Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH
—
SBÍRKA ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Anna KALIVODOVÁ

České Budějovice, duben 2012

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Funkce dvou proměnných - sbírka řešených příkladů jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 22. 4. 2012

Anna Kalivodová

Poděkování

Ráda bych tímto poděkovala RNDr. Libuši Samkové, PhD., vedoucí mé diplomové práce, za vedení a cenné rady.

Anotace

KALIVODOVÁ, ANNA. Funkce dvou proměnných - sbírka řešených příkladů, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, 2012.
Práce obsahuje řešené příklady na definiční obor funkce dvou proměnných. Každý příklad je podrobně vyřešen a doplněn o obrázek. Příklady jsou řazeny dle tematických celků a dle obtížnosti.

Klíčová slova: funkce, definiční obor.

Abstract

KALIVODOVÁ, ANNA. Function of two variables - A Digest of Solved Examples. University of South Bohemia, Faculty of Education, 2012.
This thesis includes solving the domain of the function of two variables. Each problems solution is described in detail and supplemented with a picture. The problems are sorted by thematically complex and difficulty.

Keywords: function, domain.

Obsah

1 Úvod

Ve své diplomové práci jsem se rozhodla zaměřit na grafickou podobu definičního oboru funkce dvou proměnných. Myslím si, že v učitelství matematiky je toto téma pouze zběžně probráno, protože problematika je postavena na znalostech, kterými by student vysoké školy měl disponovat ze školy střední.

Slavný matematik 20. století David Hilbert prohlásil: *„Matematika by neměla být pokládána za hotovou, dokud ji neučiníte tak jasnou, že ji můžete vysvětlit prvnímu člověku, kterého na ulici potkáte.“* Proto jsem se snažila příklady uspořádat od nejjednodušších znalostí po komplikovanější a podle tematických celků. Obrázky definičních oborů by měly pomoci studentům pochopit závislost obou proměnných a doplnit matematické zápisy definičních oborů.

Definiční obory jsou vytvořeny v programu Classic Worksheet Maple 9.5. Samotná práce v programu byla velice náročná. Formulace příkazů pro obarvení požadovaných ploch nebyla vždy jednoduchá. Pokud hraniční přímky definičního oboru splývaly se souřadnicovými osami, byly pro lepší viditelnost o desetiny posunuty. Nadefinování příkladu *17*, resp. obrázku (19) vypadá v Maple takto

```
> with(plots):
> p1:=plot(4, x=-4..0, color=white, filled=true):
> p2:=plot(-4,x=-4..0,color=white,filled=true):
> p3:=plot(4,x=0..4,color=cyan, filled=true):
> p4:=plot(-4,x=0..4,color=cyan,filled=true):
> h1:=plot([0.05,t,t=-4..4],color=red,linestyle=3,thickness=3):
> display(p1,p2,p3,p4,h1,scaling=constrained,labels=[" "," "]);
```

Nejobtížnější bylo nadefinování přerušovaných hranic, pokud se jednalo o křivku mezi dvěma body. Příkaz pro přerušovanou čárů počítal pouze hraniční body a čára přerušovaná nebyla. Musela jsem mezi těmito body nadefinovat několik samostatných intervalů po desetinných číslech. Například v příkladu *23* v obrázku (32) vypadá nadefinování přerušované hranice takto

```
> h2:=plot(x^2,x=0.05..0.1,color=red,thickness=3):
> h3:=plot(x^2,x=0.15..0.2,color=red,thickness=3):
> h4:=plot(x^2,x=0.25..0.3,color=red,thickness=3):
> h5:=plot(x^2,x=0.35..0.4,color=red,thickness=3):
> h6:=plot(x^2,x=0.45..0.5,color=red,thickness=3):
```

```
> z1:=plot(x^2,x=0.55..0.6,color=red,thickness=3):
> z2:=plot(x^2,x=0.62..0.65,color=red,thickness=3):
```

Samotná práce je vysázena v programu LaTeX, konkrétně v programu TexMaker. Zvolila jsem tento program, protože je vyvinutý pro práci s matematickým textem. I tak má svá úskalí a zadávání nerovnic nebylo vždy jednoduché. Uživatel neklikᡠna ikonky, ale píše zdrojový kód.

2 Definiční obor funkce dvou proměnných

Základní teorii k tématu jsem převzala a upravila z literatury [2] a [3].

Definice 1 (Funkce)**.** Zobrazení f množiny $A \subset \mathbb{R}^2$ do množiny $\mathbb{R}$ (zapisujeme $f : A \to R$) se nazývá *reálná funkce dvou reálných proměnných* (zkráceně budeme říkat jen *funkce dvou proměnných*). Čísla x, y se nazývají *nezávislé proměnné.* Číslo $f(x, y)$ se nazývá hodnota funkce f v bodě $(x, y) \in A$ nebo funkční hodnota funkce f v bodě (x, y).

Definice 2 (Definiční obor)**.** Uvažujme reálnou funkci dvou proměnných. Nechť A je množina v $\mathbb{R}^2$. Prvky množiny A jsou dvojice reálných čísel (neboli body v rovině). Funkce f s definičním oborem A přiřazuje každé dvojici (x, y) v A reálné číslo $z = f(x, y)$.

Poznámka 3. *Definičním oborem funkce bývá nejčastěji oblast, resp. uzavřená oblast (tj. oblast a její hranice). Příkladem oblasti je vnitřek elipsy, celá roviny xy atd. Příkladem uzavřené oblasti je kruh včetně hraniční kružnice atd.*

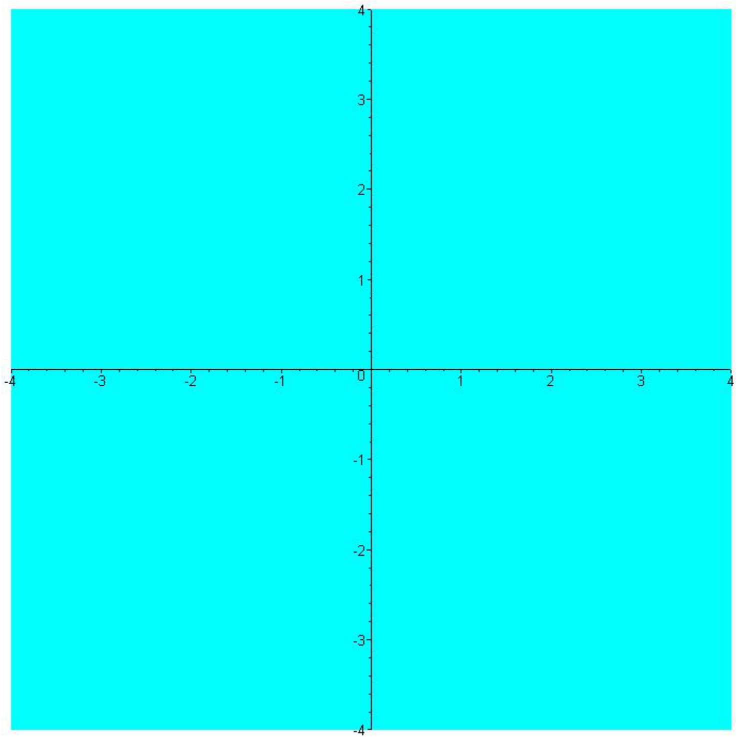
3 Řešené příklady

3.1 Příklad 1

Určete definiční obor funkce

$$F(x, y) = 2x + 3y - 1 \tag{1}$$

Při řešení definičního oboru funkce (1) nejsme ničím limitováni. Nemáme tu žádná omezení v podobě zlomku, odmocniny, funkcí.
Definiční obor je na obrázku (1).



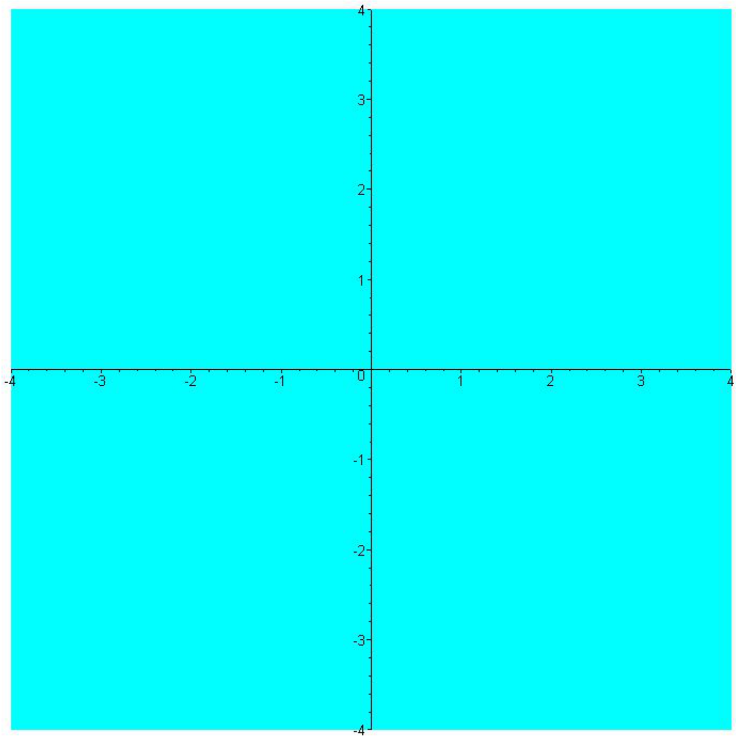
Obrázek 1: definiční obor funkce $F(x, y) = 2x + 3y - 1$

3.2 Příklad 2

Určete definiční obor funkce

$$F(x, y) = x^2 + 3 \tag{2}$$

Kvadratická funkce je definována pro $x \in \mathbb{R}$. Tudíž definičním oborem funkce (2) na obrázku (2) je prostor $\mathbb{R}^2$.



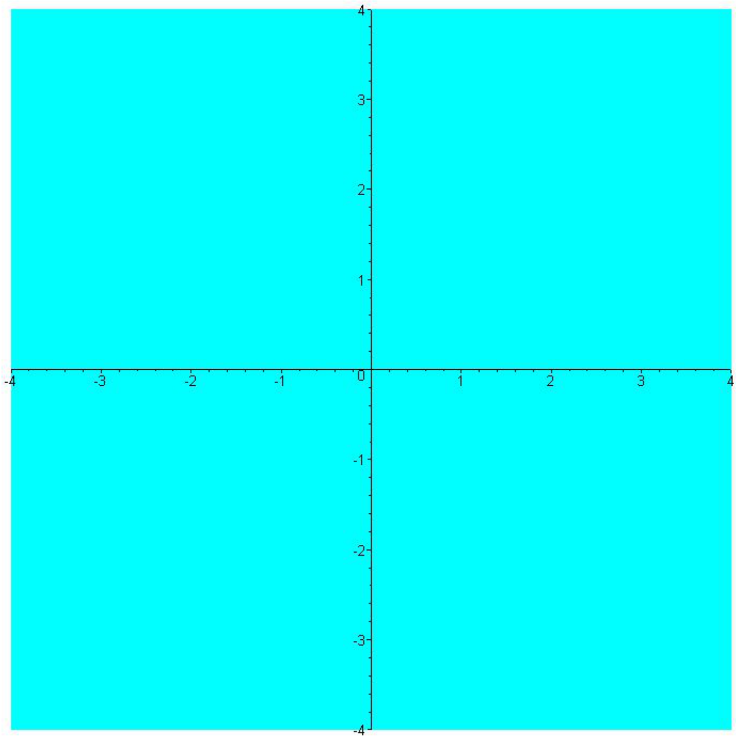
Obrázek 2: definiční obor funkce $F(x, y) = x^2 + 3$

3.3 Příklad 3

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = x^2 + y^2 \tag{3}$$

Nejsou zde žádné omezující funkce. Tudíž definiční oborem je celý prostor $\mathbb{R}^2$, obrázek (3).



Obrázek 3: definiční obor funkce $F(x,y) = x^2 + y^2$

3.4 Příklad 4

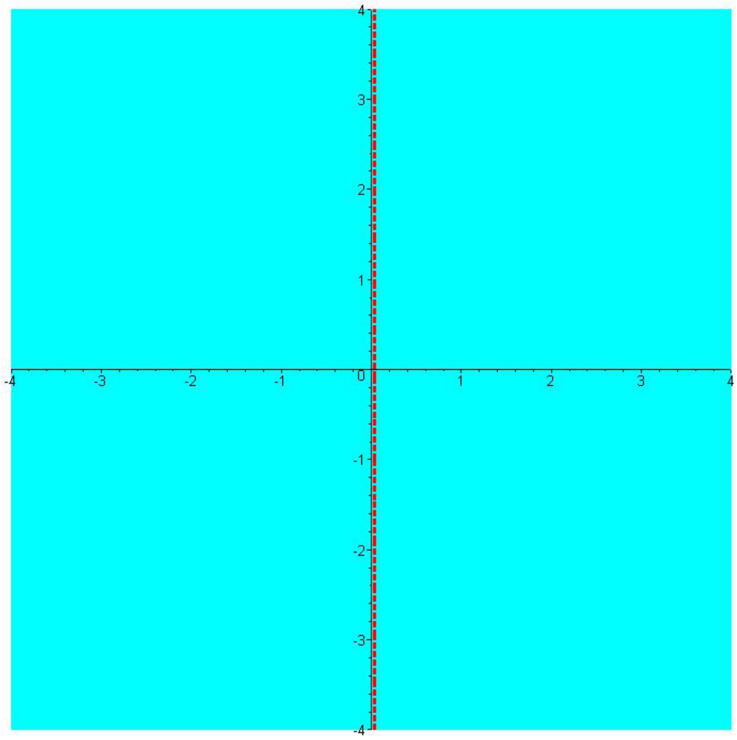
Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \frac{y}{x} \tag{4}$$

Zlomek je definován, pokud jmenovatel je různý od 0. Z toho vyplývá podmínka

$$x \neq 0.$$

Definiční obor funkce je tedy na obrázku (4).



Obrázek 4: definiční obor funkce $F(x,y) = \dfrac{y}{x}$

3.5 Příklad 5

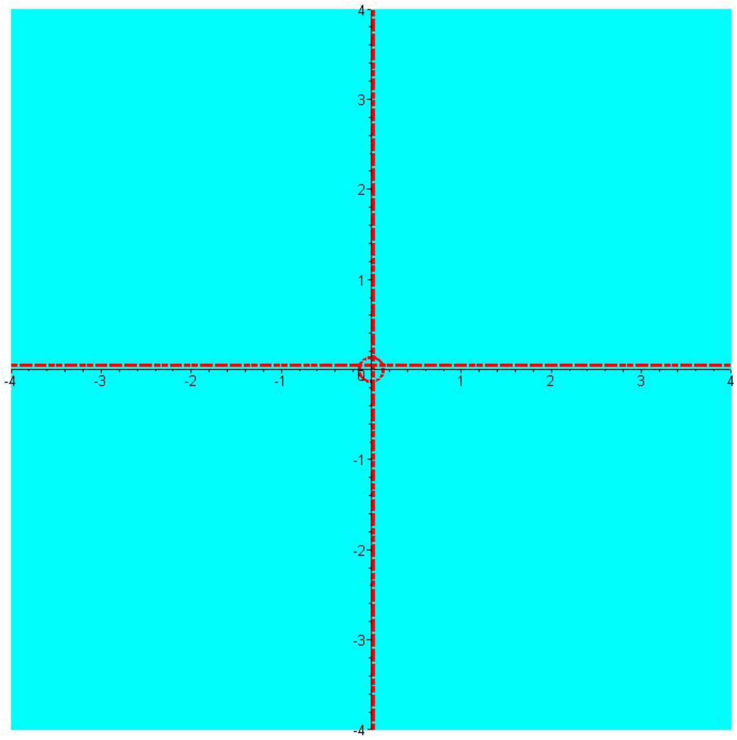
Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \tag{5}$$

Z omezení pro zlomek vyplývají dvě podmínky

$$x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0.$$

Při grafickém znázornění vypustíme x-ovou a y-ovou osu, obrázek (5).



Obrázek 5: definiční obor funkce $F(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

3.6 Příklad 6

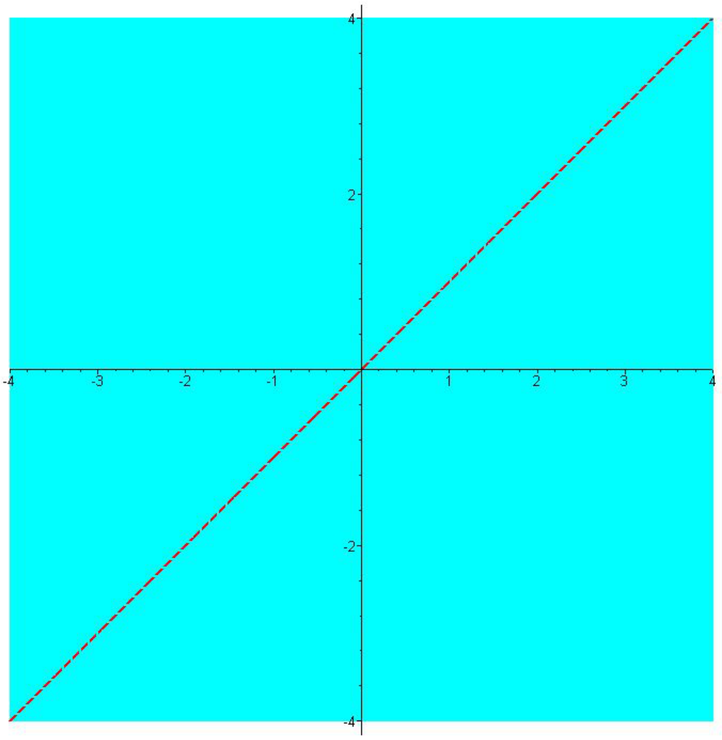
Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \frac{x+y}{x-y} \tag{6}$$

Výraz $x - y$ je jmenovatelem ve zlomku. Tedy

$$\begin{aligned} x - y &\neq 0 \\ x &\neq y. \end{aligned} \tag{7}$$

Definičním oborem funkce (6) je $\mathbb{R}^2$ bez přímky $x = y$.
Grafické znázornění je na obrázku (6).



Obrázek 6: definiční obor funkce $F(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

3.7 Příklad 7

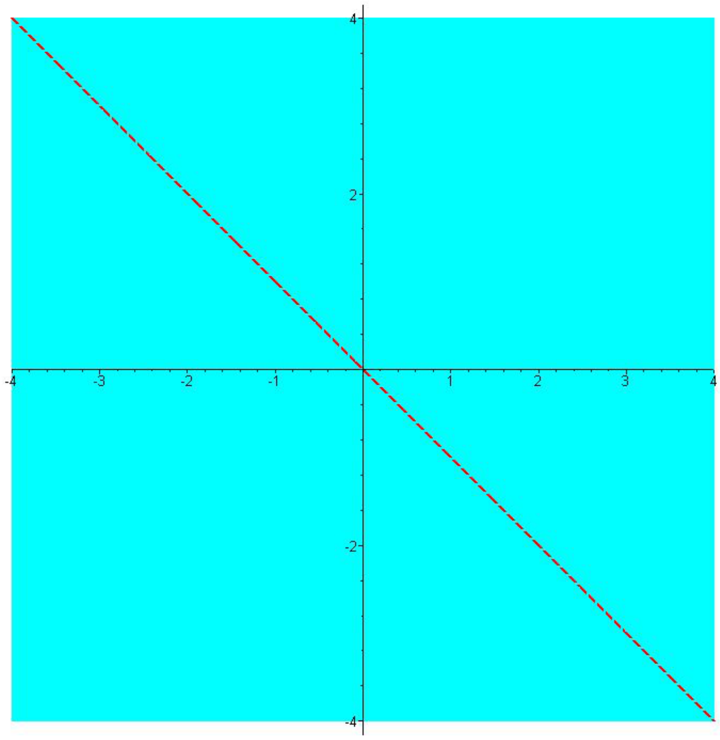
Určete definiční obor funkce

$$F(x, y) = \frac{xy}{x + y} \tag{8}$$

Omezení definičního oboru funkce (8) máme v podobě jmenovatele ve zlomku. Jmenovatel musí být různý od 0. Tudíž

$$y \neq -x.$$

Z prostoru $\mathbb{R}^2$ „vynecháme“ přímku $y = -x$. Definiční obor je tedy na obrázku (7).



Obrázek 7: definiční obor funkce $F(x, y) = \dfrac{xy}{x + y}$

3.8 Příklad 8

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \frac{5x-2y}{1+xy} \tag{9}$$

Existenci zlomku zajistíme, pokud jmenovatel položíme různý od 0. Odtud řešíme nerovnici

$$\begin{aligned} 1+xy &\neq 0 \\ xy &\neq -1. \end{aligned} \tag{10}$$

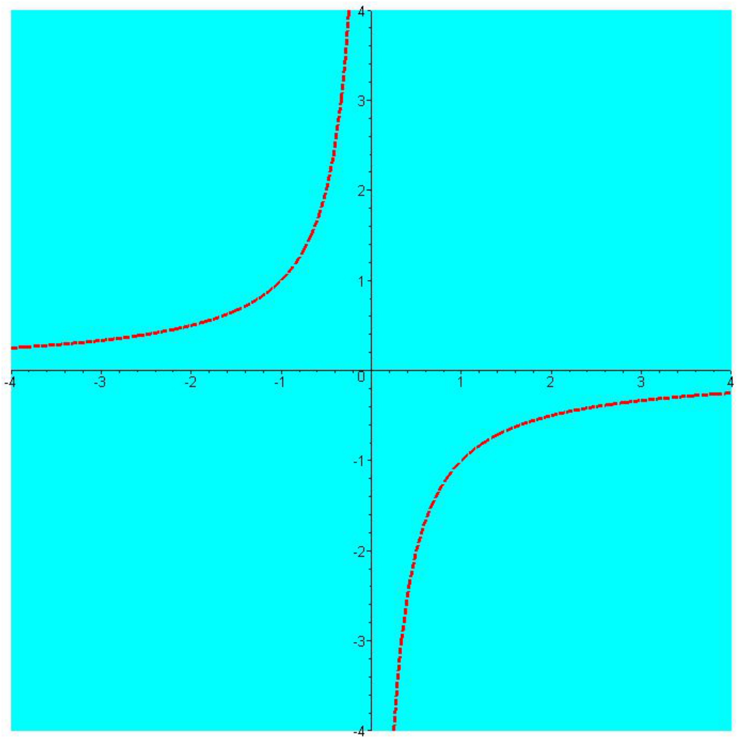
1. $x = 0$
   Nerovnice (10) je splněna.

2. $x \neq 0$
   Nerovnici (10) upravíme

   $$y \neq -\frac{1}{x}. \tag{11}$$

   Podmínka (11) značí, že se musíme vyhnout rovnoosé hyperbole.

Definiční obor funkce (9) je sjednocením obou případů - obrázek (8).



Obrázek 8: definiční oboru funkce $F(x, y) = \dfrac{5x - 2y}{1 + xy}$

3.9 Příklad 9

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \frac{1}{(x-3)^2 + (y+1)^2 - 4} \tag{12}$$

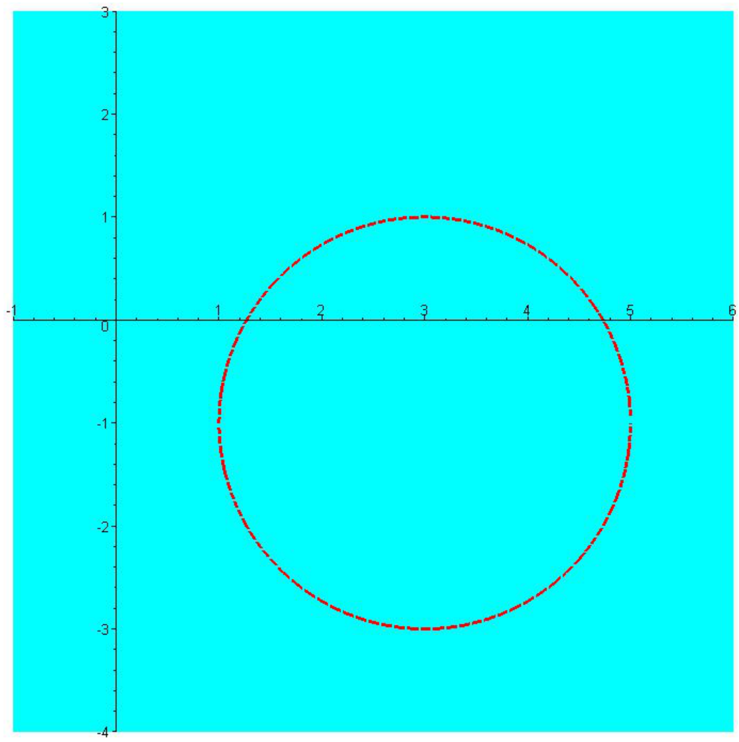
Zlomek je definován, pokud jmenovatel je různý od 0. Odtud řešíme nerovnici

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 - 4 \neq 0.$$

Pokud ji přepíšeme do tvaru

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 \neq 4,$$

dostáváme středovou rovnici kružnice se středem $S = [3; -1]$ a poloměrem $r = 2$. Tudíž definiční obor funkce je prostor $\mathbb{R}^2$ bez kružnice $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$. Grafická podoba je na obrázku (9).



Obrázek 9: definiční obor funkce $F(x,y) = \dfrac{1}{(x-3)^2 + (y+1)^2 - 4}$

3.10 Příklad 10

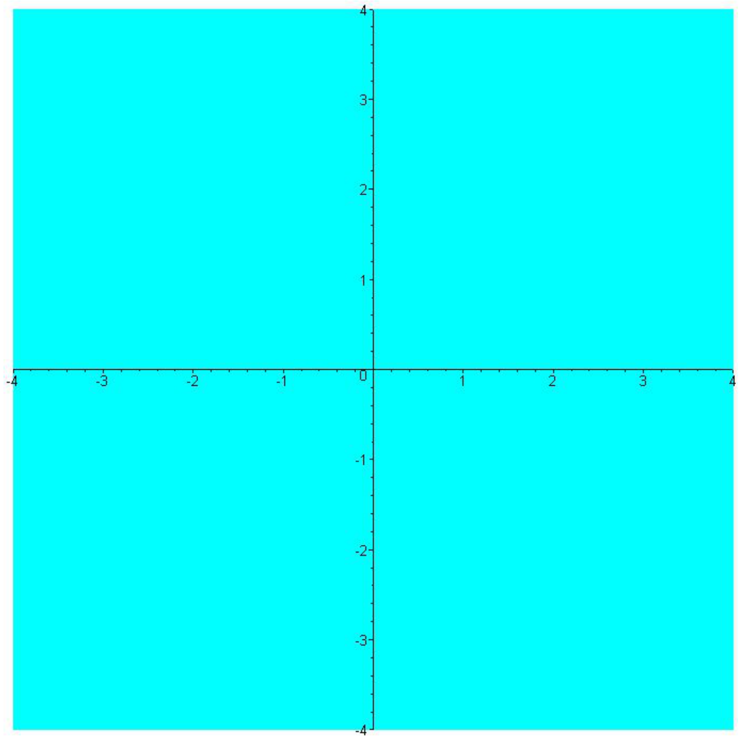
Určete definiční obor funkce

$$F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{13}$$

Odmocnina je definována pro nezáporná čísla. Z toho řešíme nerovnici

$$x^2 + y^2 \geq 0.$$

Ovšem výraz pod odmocninou nenabývá nikdy záporných hodnot. Pouze pro bod $[0; 0]$ je nerovnice rovna 0, ale tato hodnota je též přípustná. Grafická podoba definičního oboru je na obrázku (10).



Obrázek 10: definiční obor funkce $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

3.11 Příklad 11

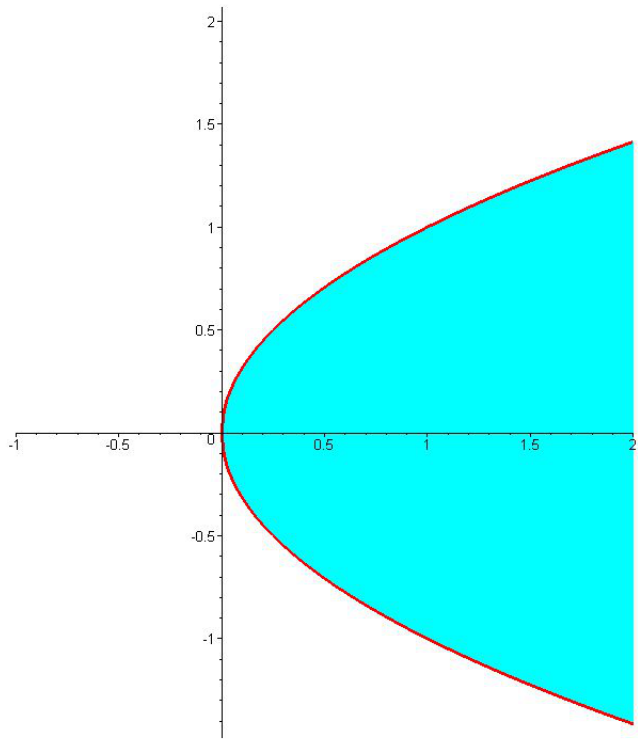
Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \sqrt{x - y^2} \tag{14}$$

Odmocnina je definována pro nezáporná čísla. Řešíme nerovnici

$$\begin{aligned} x - y^2 &\geq 0 \\ x &\geq y^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Křivku $y^2 = x$ získáme překlopením paraboly $y = x^2$ kolem osy I. a III. kvadrantu.
Nerovnici $x \geq y^2$ vyhovuje vnitřek paraboly, včetně křivky.
Gragická podoba definičního oboru funkce (14) je tedy na obrázku (11).



Obrázek 11: definiční obor funkce $F(x,y) = \sqrt{x - y^2}$

3.12 Příklad 12

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{y^2-9} \tag{16}$$

Odmocnina je definována pro nezáporná čísla.
Z první odmocniny dostáváme podmínku

$$x^2 \leq 4,$$

tedy

$$|x| \leq 2.$$

Dostáváme

$$x \in \langle -2; 2 \rangle .$$

Z druhé odmocniny dostáváme podmínku

$$y^2 \geq 9,$$

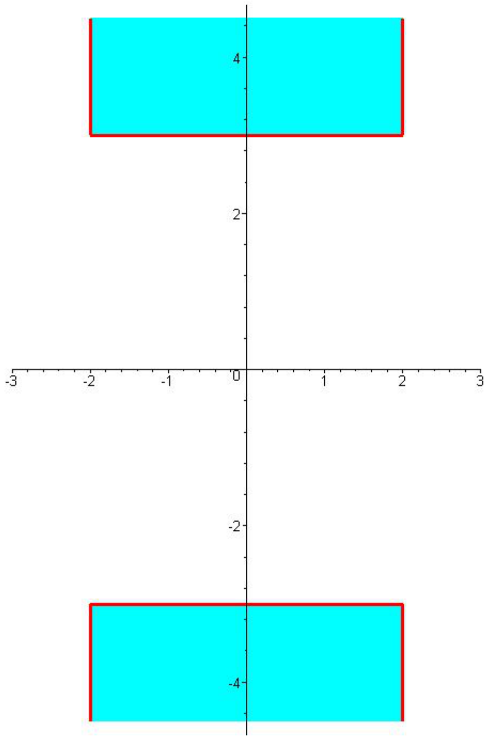
tedy

$$|y| \geq 3.$$

Pro proměnnou y dostáváme

$$y \in (-\infty; -3\rangle \vee \langle 3; \infty).$$

Známe již omezení pro proměnnou x i pro proměnnou y. Grafická podoba definičního oboru funkce je na obrázku (12).



Obrázek 12: definiční obor funkce $F(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{y^2 - 9}$

3.13 Příklad 13

Určete definiční obor funkce

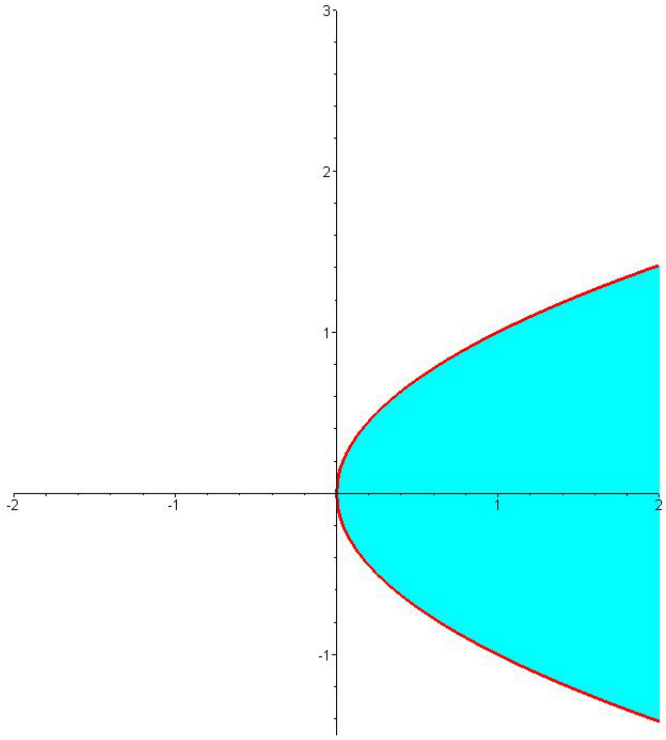
$$F(x,y) = \sqrt{x-y^2} + \sqrt{x^2-y} \tag{17}$$

Definiční obor funkce (17) omezují dvě odmocniny. Výrazy pod odmocninami musí být nezáporná čísla.

Z první odmocniny dostáváme podmínku

$$\begin{aligned} x-y^2 &\geq 0 \\ y^2 &\leq x. \end{aligned} \tag{18}$$

Křivku $y^2 = x$ získáme překlopením paraboly $y = x^2$ kolem osy I. a III. kvadrantu. Nerovnici (18) odpovídá křivka a její vnitřní část - obrázek (13).

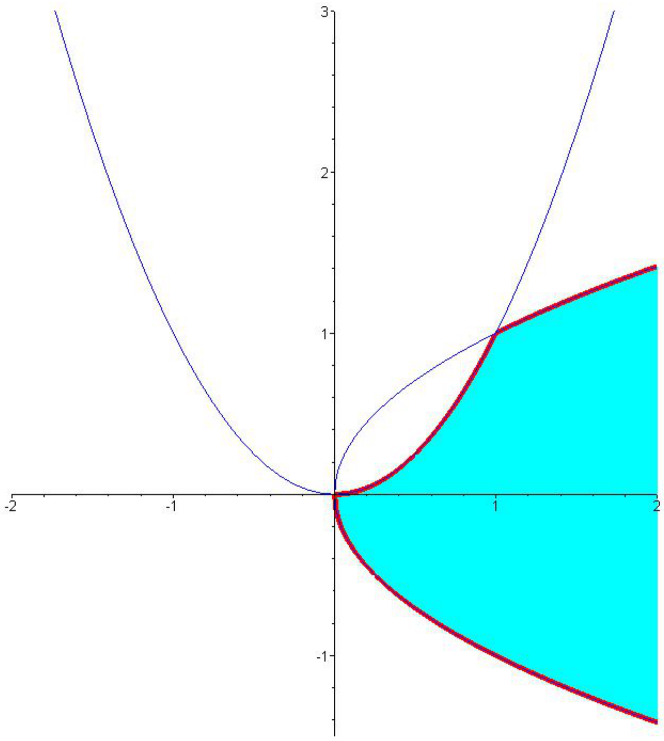


Obrázek 13: $y^2 \leq x$

Z druhé odmocniny dostáváme podmínku

$$\begin{aligned} x^2-y &\geq 0 \\ y &\leq x^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Křivka $y = x^2$ představuje parabolu s vrcholem v bodě $[0; 0]$, s osou v ose y. Nerovnici (19) odpovídá parabola a vnější část paraboly.
Průnikem podmínek nerovnic (18) a (19) dostáváme konečnou podobu definičního oboru funkce, která je patrná z obrázku (14). Křivky se protínají v bodech $[0; 0]$ a $[1; 1]$.



Obrázek 14: definiční oboru funkce $F(x, y) = \sqrt{x - y^2} + \sqrt{x^2 - y}$

3.14 Příklad 14

Určete definiční obor funkce

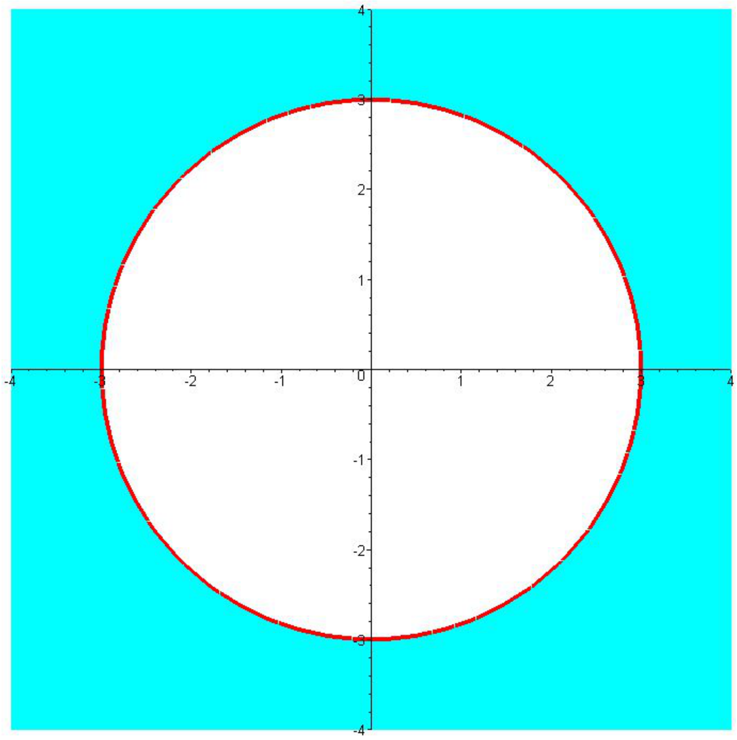
$$F(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9} \tag{20}$$

Odmocnina je definována pro nezáporná čísla. Upravujeme tedy nerovnici

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 9 &\geq 0 \\ x^2 + y^2 &\geq 9. \end{aligned} \tag{21}$$

Rovnice $x^2 + y^2 = 9$ je analytickým vyjádřením kružnice se středem v počátku, tj. $S = [0; 0]$ a poloměrem $r = 3$.

Do definičního oboru funkce (20) náleží samotná kružnice a její okolí. Znázornění je na obrázku (15).



Obrázek 15: definiční obor funkce $F(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$

3.15 Příklad 15

Určete definiční obor funkce

$$F(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2} \tag{22}$$

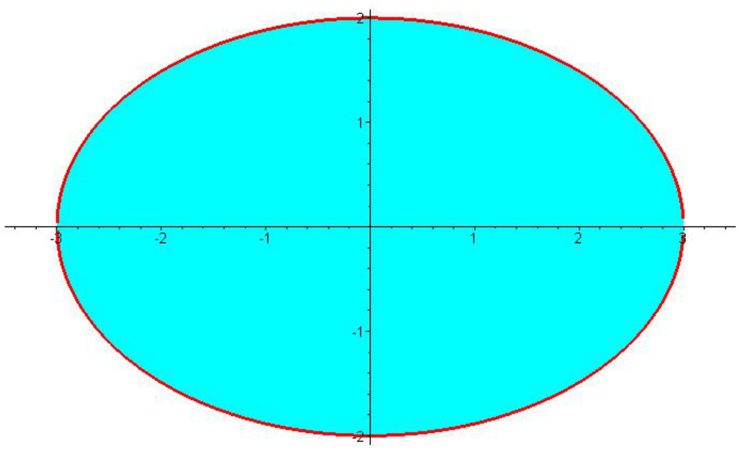
Odmocnina je definována pro nezáporná čísla. Odtud řešíme nerovnici

$$\begin{aligned} 36 - 4x^2 - 9y^2 &\geq 0 \\ 4x^2 + 9y^2 &\leq 36 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} &\leq 1. \end{aligned} \tag{23}$$

Rovnice

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

představuje obecnou rovnici elipsy se středem $S = [0; 0]$. Osy elipsy jsou rovnoběžné se souřadnými osami. Délka hlavní poloosy $a = 3$ a délka vedlejší poloosy $b = 2$.
Z nerovnice (23) máme omezení definičního oboru funkce na elipsu a její vnitřek. Což je patrné z obrázku (16).



Obrázek 16: definiční obor funkce $F(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$

3.16 Příklad 16

Určete definiční obor funkce

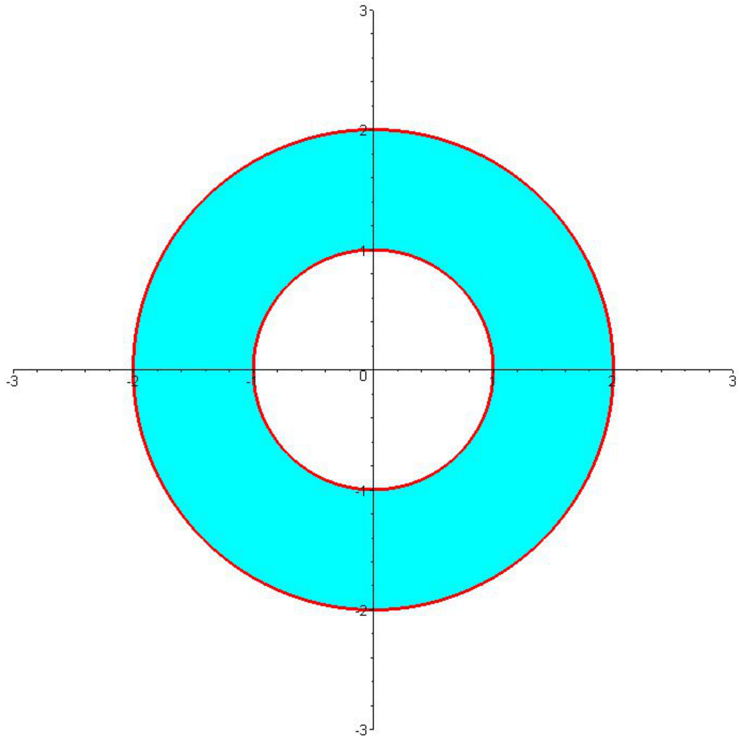
$$F(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)} \tag{24}$$

Výraz pod odmocninou musí být nezáporné číslo. V tomto případě řešíme, kdy je součin dvou čísel větší nebo roven 0. Řešení se rozpadá na dva případy:

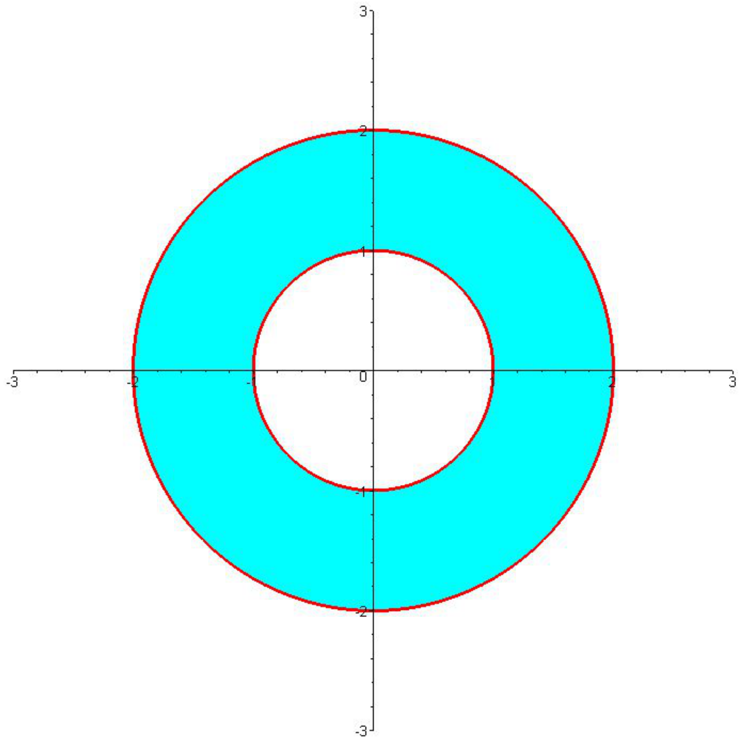
1. $x^2+y^2-1\geq 0 \quad \wedge \quad 4-x^2-y^2\geq 0$
   Řešení první nerovnice:
   $$\begin{aligned} x^2+y^2-1&\geq 0\\ x^2+y^2&\geq 1. \end{aligned} \tag{25}$$
   Výraz $x^2+y^2=1$ představuje kružnici se středem S v bodě $[0;0]$ a poloměrem $r=1$. Podmínce (25) vyhovuje kružnice a její vnější část.
   Řešení druhé nerovnice:
   $$\begin{aligned} 4-x^2-y^1&\geq 0\\ x^2+y^2&\leq 4. \end{aligned} \tag{26}$$
   Výraz $x^2+y^2=4$ představuje kružnici se středem S v bodě $[0;0]$ a poloměrem $r=2$. Podmínce (26) vyhovuje kružnice a její vnitřní část. Průnik podmínek (25) a (26) je na obrázku (17).

2. $x^2+y^2-1\leq 0 \quad \wedge \quad 4-x^2-y^2\leq 0$
   Řešení první nerovnice:
   $$\begin{aligned} x^2+y^2-1&\leq 0\\ x^2+y^2&\leq 1. \end{aligned}$$
   Tedy kružnice se středem $S=[0;0]$ a poloměrem $r=1$ a její vnitřní část. Řešení druhé nerovnice:
   $$\begin{aligned} 4-x^2-y^1&\leq 0\\ x^2+y^2&\geq 4. \end{aligned}$$
   Tedy kružnice se středem $S=[0;0]$ a poloměrem $r=2$ a její vnější část.
   Průnikem podmínek je prázdná množina.

Definiční obor funkce je spojením uvedených dvou případů. Z druhého případu nevyhovují žádné body z prostoru $\mathbb{R}^2$, tudíž grafické řešení definičního oboru funkce je na obrázku (18).



Obrázek 17: $x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad 4 - x^2 - y^2 \geq 0$



Obrázek 18: definiční oboru funkce $F(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$

3.17 Příklad 17

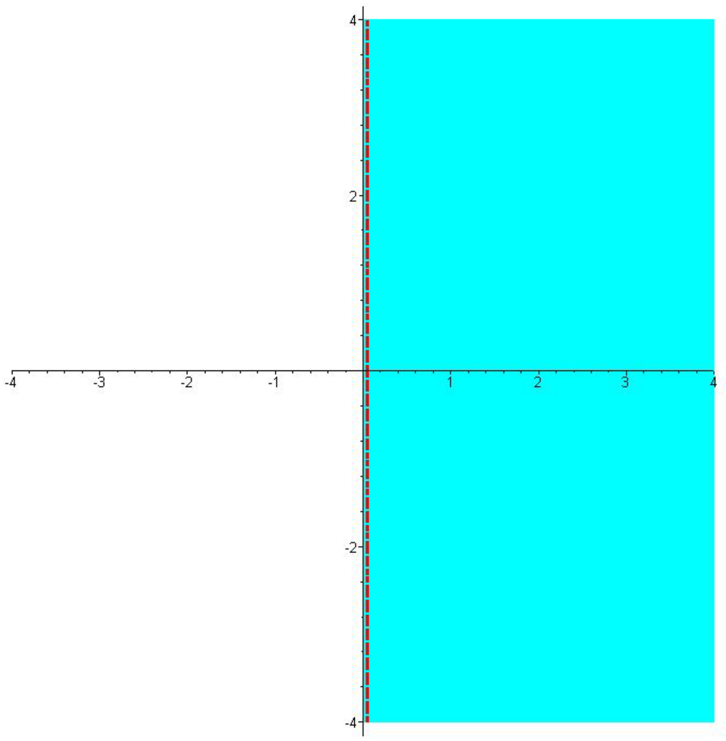
Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x}} \tag{27}$$

Definiční obor funkce (27) je omezen zlomkem a odmocninou. Obojí se vztahuje k proměnné x. Vycházíme tedy z nerovnice

$$x > 0,$$

což je v tomto případě i řešení definičního oboru.
Grafická podoba definičního oboru funkce (27) je na obrázku (19).



Obrázek 19: definiční obor funkce $F(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$

3.18 Příklad 18

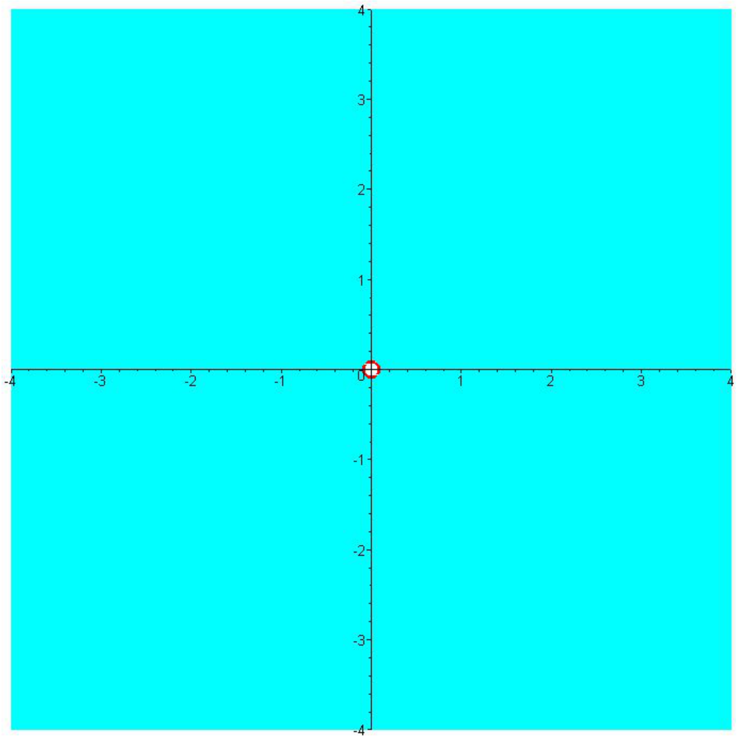
Určete definiční obor funkce

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{28}$$

Omezení definičního oboru máme v podobě zlomku, kdy se jmenovatel nesmí rovnat 0, a odmocnině. Musíme vyřešit nerovnici

$$x^2 + y^2 > 0.$$

Tuto nerovnici splňují všechny dvojice $[x; y]$ reálných čísel, kromě dvojice, resp. bodu $[0, 0]$.
Grafická podoba definičního oboru funkce (28) je na obrázku (20).



Obrázek 20: definiční obor funkce $F(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

3.19 Příklad 19

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{y}}} \tag{29}$$

Odmocnina je definována pro nezáporná čísla. Jmenovatel ve zlomku musí být různý od 0.
Z vnitřní odmocniny vyplývá podmínka

$$y \geq 0.$$

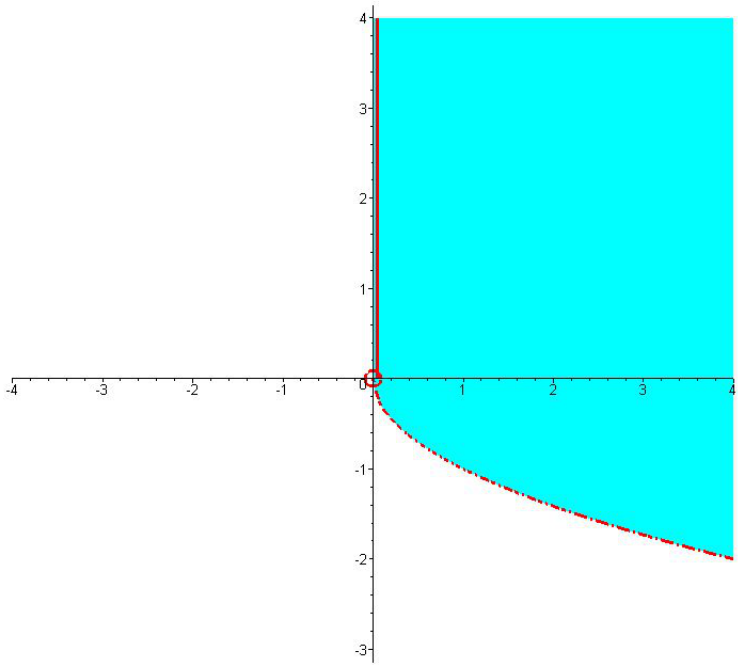
Budeme se pohybovat na nebo nad osou x.
Odmocnina ve jmenovateli je definována, pokud

$$\begin{aligned} x + \sqrt{y} &> 0 \\ x &> -\sqrt{y}. \end{aligned} \tag{30}$$

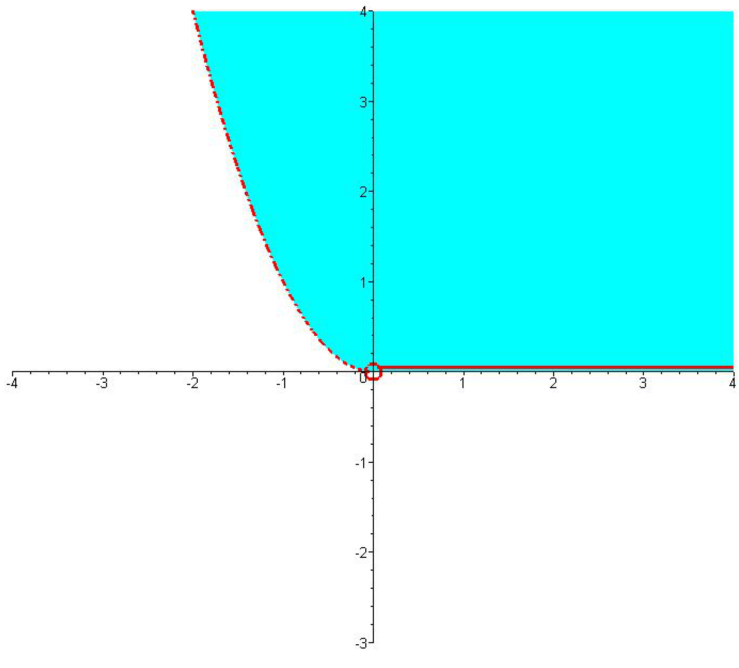
Křivku $x = -\sqrt{y}$ získáme překlopením křivky $y = -\sqrt{x}$ kolem osy I. a III. kvadrantu. Graficky znázorníme nerovnici

$$y > -\sqrt{x},$$

což je obrázek (21).
Definiční obor funkce (29) získáme překlopením útvaru z obrázku (21) kolem osy I. a III. kvadrantu. Na překlopeném útvaru musíme zkontrolovat, zda je splněna podmínka z vnitřní odmocniny funkce (29), tj. $y \geq 0$. Podmínka je splněna. Grafická podoba definičního oboru je na obrázku (22).



Obrázek 21: $y > -\sqrt{x}$



Obrázek 22: definiční obor funkce $F(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{y}}}$

3.20 Příklad 20

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 - y} + \sqrt{x - y^2}}{x} \tag{31}$$

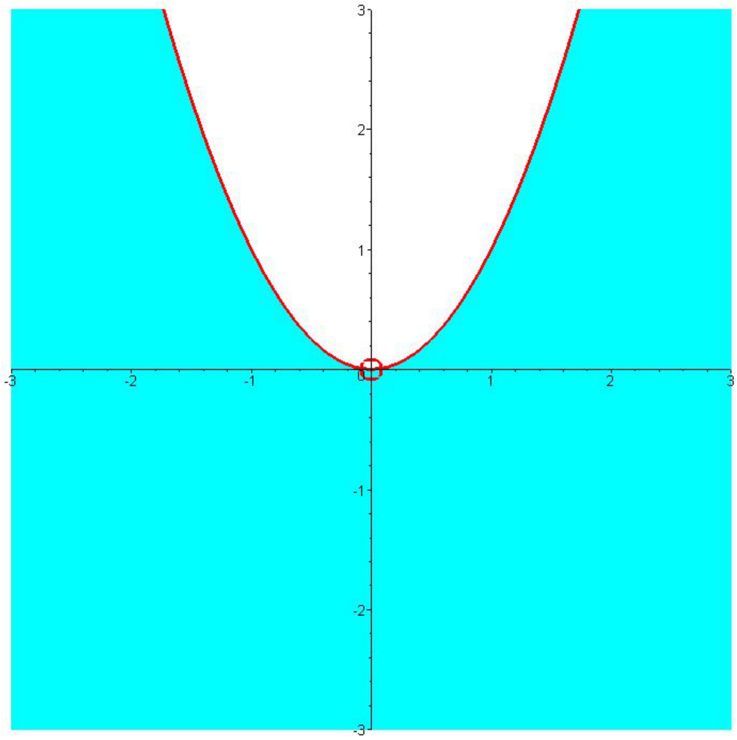
Existenci zlomku zajistíme podmínkou

$$x \neq 0.$$

Dále musíme zajistit existenci odmocnin, tj. výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven 0.
Nejprve upravíme první odmocninu následovně

$$\begin{aligned} x^2 - y &\geq 0 \\ y &\leq x^2. \end{aligned} \tag{32}$$

Křivka $y = x^2$ je konvexní kvadratická parabola s vrcholem v bodě $[0; 0]$. Podmínce (32) odpovídá obrázek (23).

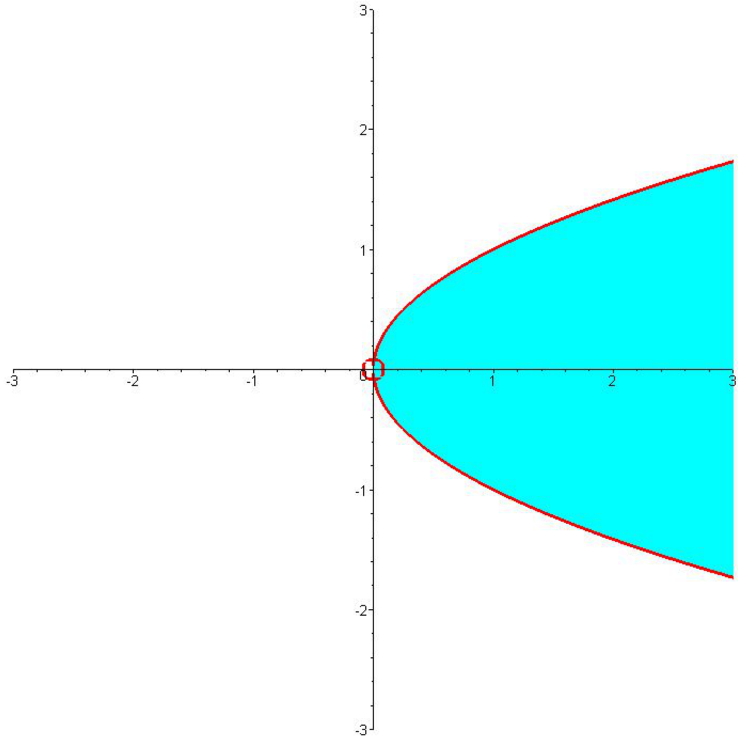


Obrázek 23: $x \neq 0 \quad \wedge \quad y \leq x^2$

Druhou odmocninu upravíme následovně

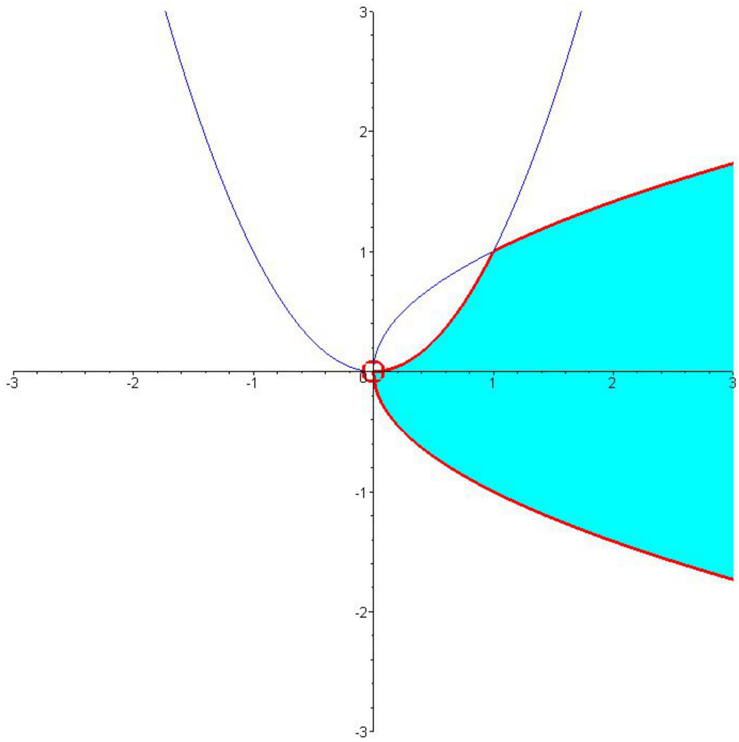
$$\begin{aligned} x - y^2 &\geq 0 \\ y^2 &\leq x. \end{aligned} \tag{33}$$

Podmínce (33) odpovídá obrázek (24).



Obrázek 24: $x \neq 0 \quad \wedge \quad y^2 \leq x$

Grafická podoba definičního oboru funkce je průnik útvarů z obrázků (23) a (24). Body, ve kterých se křivky protínají, jsou $[0; 0]$ a $[1; 1]$. Ovšem bod $[0; 0]$ do definičního oboru funkce (31) nepatří.
Grafická podoba definičního oboru funkce (31) je na obrázku (25).



Obrázek 25: definiční obor funkce $F(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2 - y} + \sqrt{x - y^2}}{x}$

3.21 Příklad 21

Určete definiční obor funkce

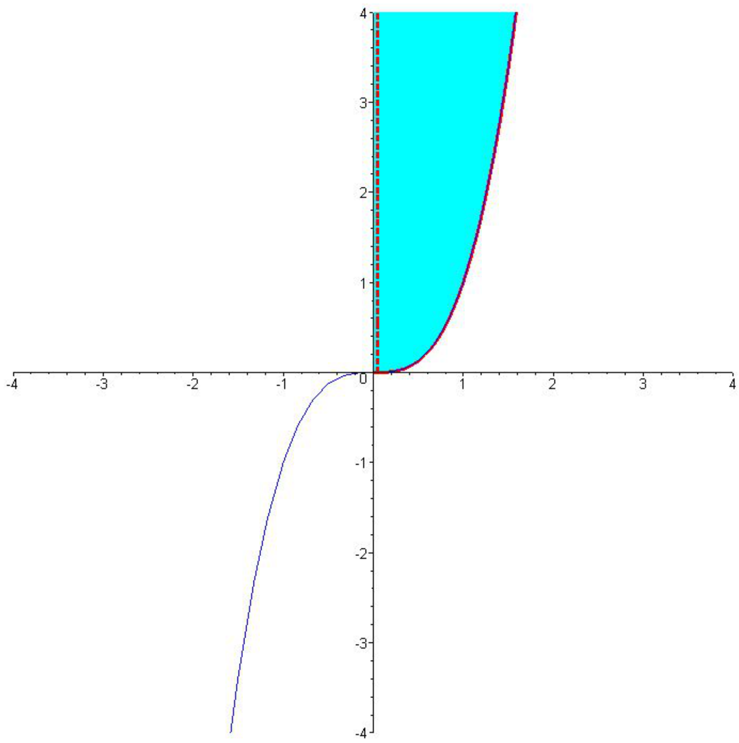
$$F(x,y) = \sqrt{\frac{y - x^3}{x}} \tag{34}$$

Na první pohled jsou patrné dvě podmínky:

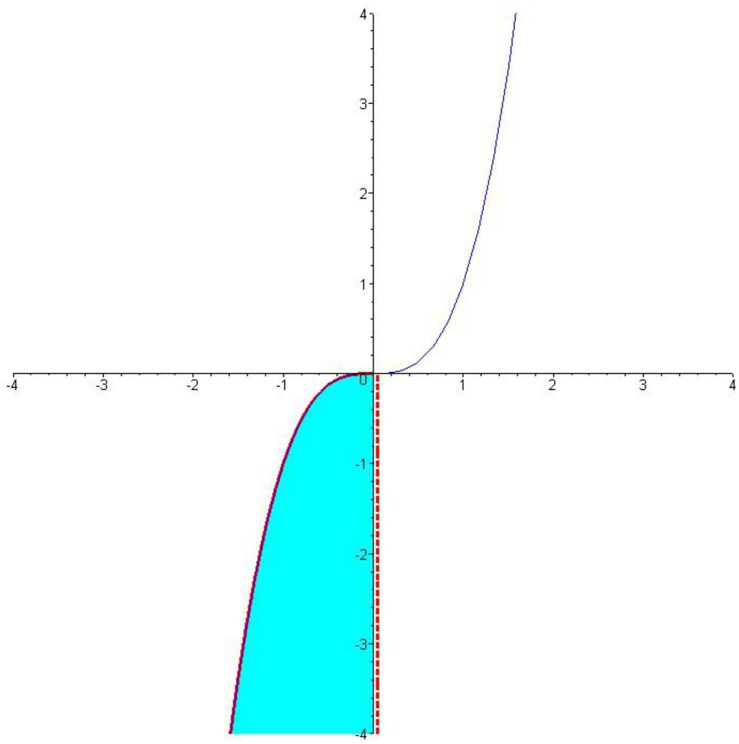
1. Zlomek je definován, pokud jmenovatel je různý od 0. První podmínka definičního oboru zní
$$x \neq 0.$$
2. Odmocnina je definována pro nezáporná čísla.
Řešíme nerovnici
$$\frac{y - x^3}{x} \geq 0.$$
   (a) $y - x^3 \geq 0 \quad \wedge \quad x > 0$
   Z první nerovnice dostáváme
   $$y \geq x^3.$$
   Podle podmínky $x > 0$ se budeme pohybovat napravo od osy y.
   Grafem x^3 je kubická parabola a musí být splněna podmínka $y \geq x^3$.
   Grafická podoba je na obrázku (26).

   (b) $y \leq x^3 \quad \wedge \quad x < 0$
   Budeme se pohybovat nalevo od osy y, s podmínkou $y \leq x^3$. Proto nás nepřekvapí obrázek (27).

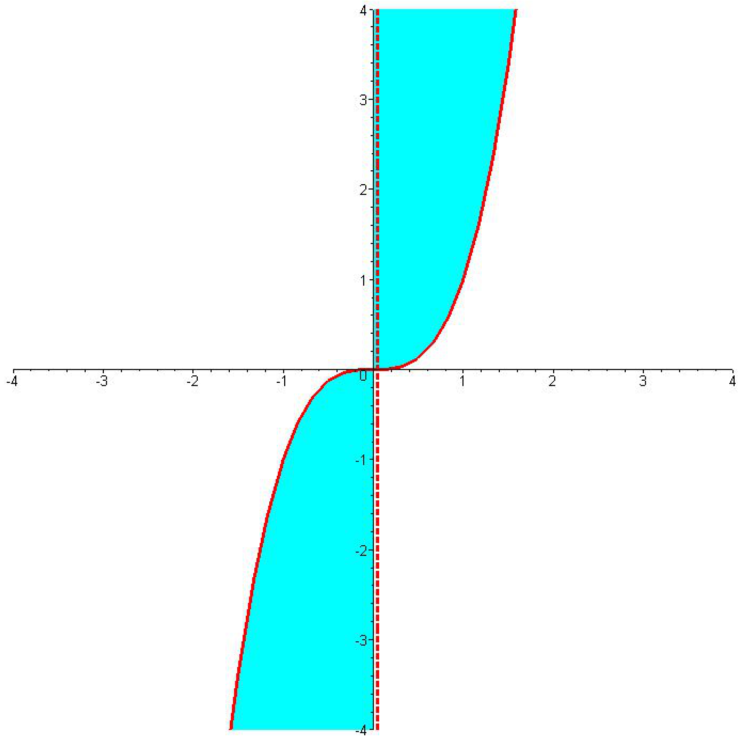
Spojením útvarů z obrázků (26) a (27) dostáváme konečnou podobu definičního oboru funkce (34). Podmínka $x \neq 0$ je v obrázku (28) znázorněna jako červená přerušovaná čára. Samotná kubická parabola splňuje podmínky $y \geq x^3$, $y \leq x^3$, tudíž je znázorněna červenou plnou čárou.



Obrázek 26: $y - x^3 \geq 0 \quad \wedge \quad x > 0$



Obrázek 27: $y \leq x^3 \quad \wedge \quad x < 0$



Obrázek 28: definiční obor funkce $F(x,y)=\sqrt{\dfrac{y-x^3}{x}}$

3.22 Příklad 22

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \sqrt{\frac{x^2 - y^2 - 1}{x}} \tag{35}$$

První podmínka definičního oboru vyplývá z existence zlomku. Zlomek je definován pokud jeho jmenovatel je různý od 0, odtud

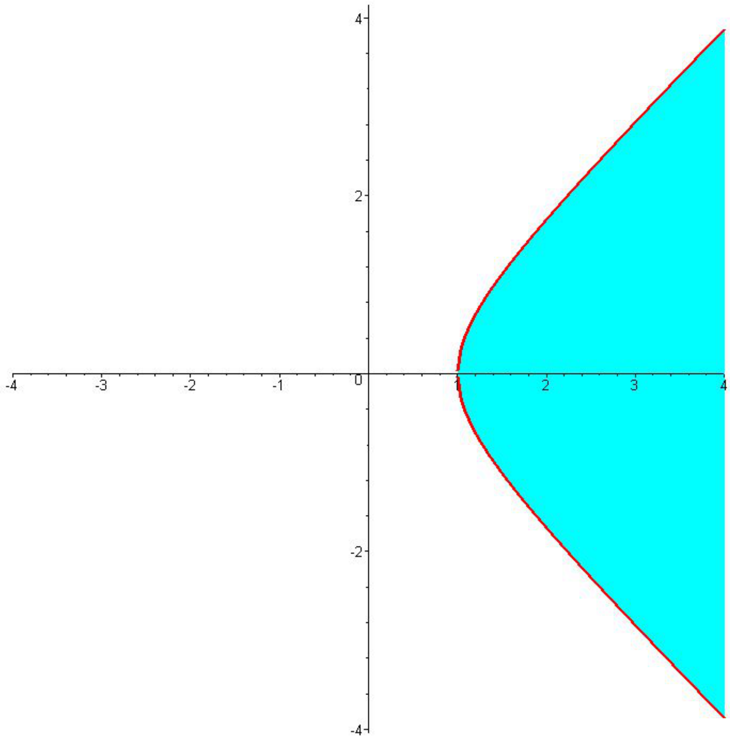
$$x \neq 0.$$

Odmocnina je definována pro nezáporná čísla. Pod odmocninou se nám vyskytuje zlomek, který převadí řešení na situaci, kdy je zlomek větší nebo roven nule.

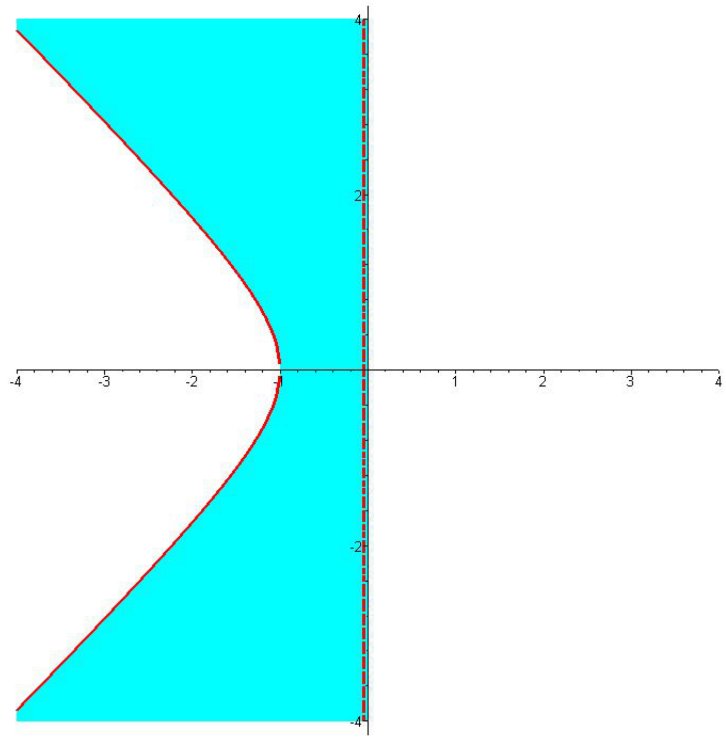
1. $x^2 - y^2 - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad x > 0$
   Rovnice $x^2 - y^2 - 1 = 0$ skrývá analytické vyjádření hyperboly, se středem v bodě $S = [0, 0]$. Hlavní poloosa je rovna vedlejší poloose, tj. $a = b = 1$.
   Pokud $a = b$, pak dostáváme rovnoosou hyperbolu.
   Nerovnice vyjadřuje křivku a její vnější část.
   Situace je vyjádřena na obrázku (29).

2. $x^2 - y^2 - 1 \leq 0 \quad \wedge \quad x < 0$
   První nerovnice vyjadřuje hyperbolu z bodu 1. a její vnitřní část.
   Situace je vyjádřena na obrázku (30).

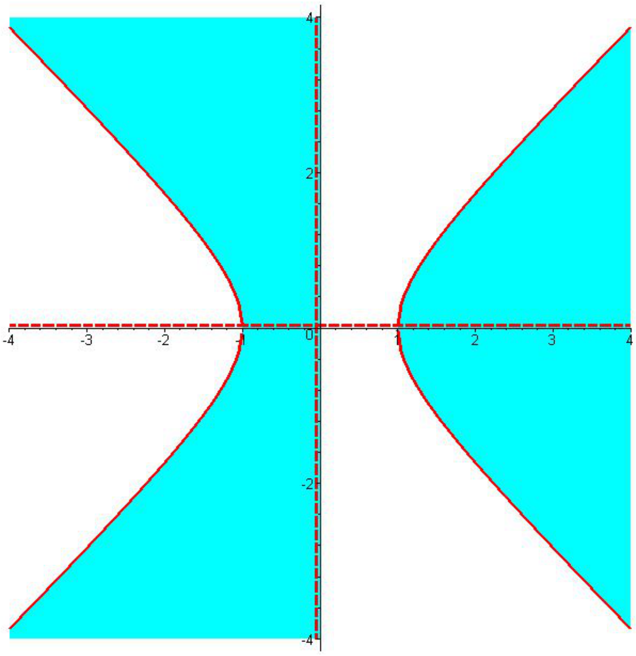
Definiční obor funkce (35) je tedy sjednocením útvarů z obrázků (29) a (30) a je znázorněn na obrázku (31).



Obrázek 29: $x^2 - y^2 - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad x > 0$



Obrázek 30: $x^2 - y^2 - 1 \leq 0 \quad \wedge \quad x < 0$



Obrázek 31: definiční obor funkce $F(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^2-y^2-1}{x}}$

3.23 Příklad 23

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y)=\sqrt{\frac{x-x^2-y^2}{x^2-y}} \tag{36}$$

Nejprve zajistíme existenci zlomku podmínkou

$$x^2-y\neq 0.$$

Odmocnina je definována pro nezáporná čísla. Situace se rozpadá na dvě řešení:

1. $x-x^2-y^2\geq 0 \quad \wedge \quad x^2-y>0$
   Nejprve upravíme první nerovnici:

$$\begin{aligned} x-x^2-y^2 &\geq 0 \\ \left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+y^2-\frac{1}{4} &\leq 0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 &\leq \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{37}$$

   Výraz

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

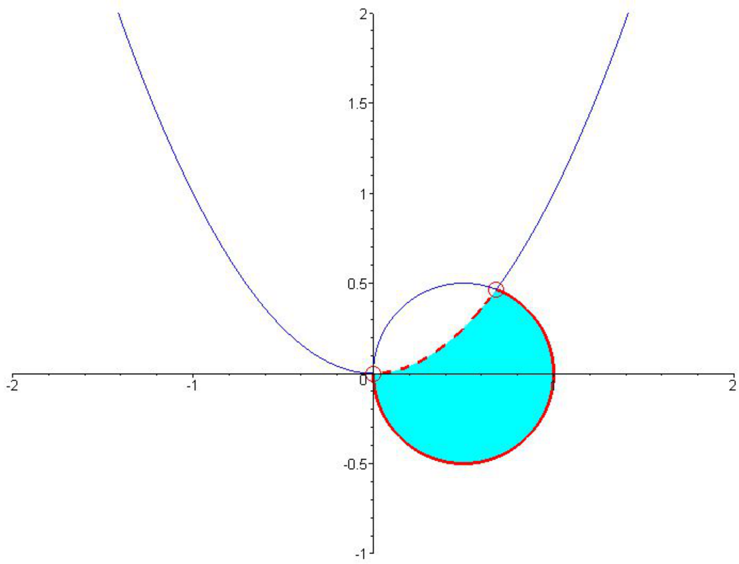
   je analytickým vyjádřením kružnice se středem v bodě $S=\left[\frac{1}{2};0\right]$ a poloměrem $r=\frac{1}{2}$.
   Nerovnici (37) vyhovuje kružnice a její vnitřek.
   Upravením druhé nerovnice dostáváme:

$$\begin{aligned} x^2-y &> 0 \\ y &< x^2. \end{aligned} \tag{38}$$

   Výraz

$$y=x^2$$

   je analytické vyjádření kvadratické paraboly.
   Grafické spojení podmínky (37) a (38) vidíme na obrázku (32).



Obrázek 32: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leq\frac{1}{4} \quad \wedge \quad y<x^2$

2. $x-x^2-y^2\leq 0 \quad \wedge \quad x^2-y<0$

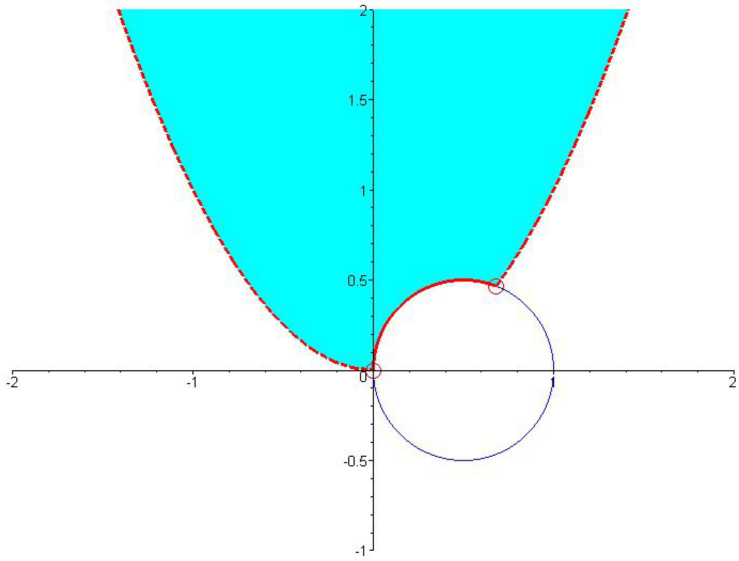
   Po úpravách dostáváme

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geq\frac{1}{4} \quad \wedge \quad y>x^2.$$

   Podmínkám odpovídá obrázek (33).

Spojením prvního a druhého případu, tj. sjednocení útvarů z obrázků (32) a (33) dostáváme konečnou grafickou podobu definičního oboru funkce, tj. obrázek (34). Body, ve kterých se parabola a kružnice protínají, splňují zároveň rovnice $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ a $y=x^2$, tedy jsou řešením rovnice 4. řádu. Jejich přesné hodnoty určíme pomocí programu Maple. Použijeme k tomu příkaz *solve*.

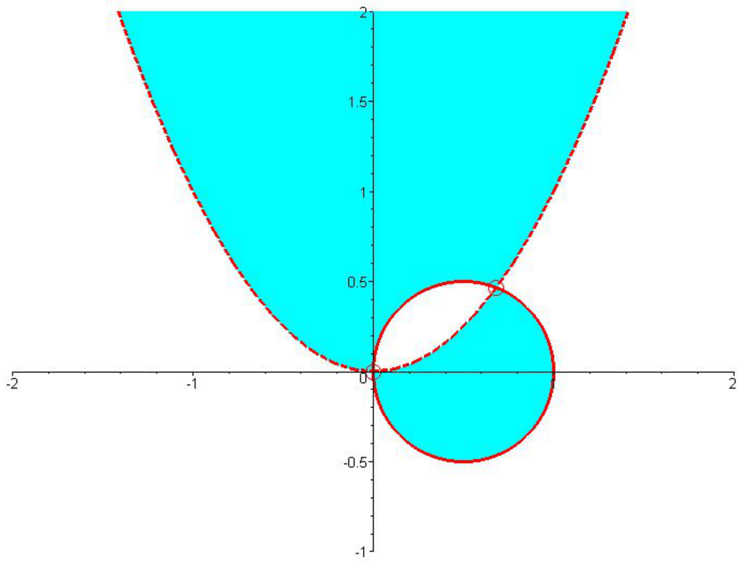
```
> rce1:=y=x^2;
                                        2
                          rce1 := y = x


> rce2:=(x-1/2)^2+y^2=1/4;
                                     2    2
```



Obrázek 33: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4} \quad \wedge \quad y > x^2$

```
                 rce2 := (x - 1/2)  + y  = 1/4

> solve({rce1,rce2},{x,y});
                                         3
  {y = 0, x = 0}, {x = RootOf(_Z - 1 + _Z , label = _L3),


                              3              2
        y = RootOf(_Z - 1 + _Z , label = _L3) }

> evalf(%);

        {y = 0., x = 0.}, {x = 0.6823278038, y = 0.4655712318}
```

Z posledního řádku vyplývá, že body dotyku jsou $[0; 0]$ a $[0,6823278038; 0,4655712318]$.



Obrázek 34: definiční obor funkce $F(x,y)=\sqrt{\dfrac{x-x^2-y^2}{x^2-y}}$

3.24 Příklad 24

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}} \tag{39}$$

Existenci zlomku zajistíme podmínkou

$$2x - x^2 - y^2 \neq 0.$$

Odmocnina je definována pro nezáporná čísla. Řešení definičního oboru funkce se rozpadá na dva případy, kdy je zlomek větší nebo roven 0.

1. $x^2 + y^2 - x \geq 0 \quad \wedge \quad 2x - x^2 - y^2 > 0$
   Při řešeních použijeme úpravu doplnění na čtverec.
   Řešení první nerovnice vypadá následovně

$$\begin{aligned} x^2+y^2-x &\geq 0 \\ \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + y^2 - \frac{1}{4} &\geq 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &\geq \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{40}$$

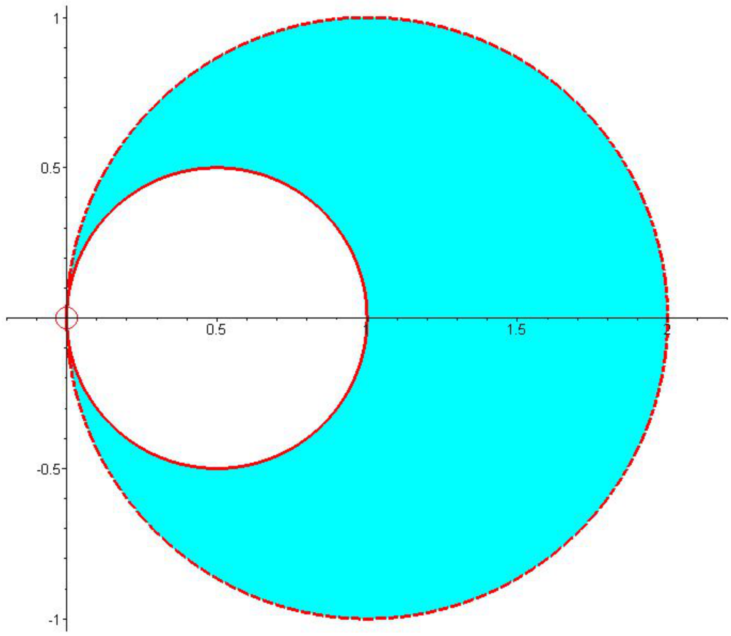
   Podmínce (40) odpovídá kružnice se středem $S = \left[\frac{1}{2}; 0\right]$ a poloměrem $r = \frac{1}{2}$ a její vnější část.

   Druhou nerovnici upravíme následovně

$$\begin{aligned} 2x - x^2 - y^2 &> 0 \\ (x^2 - 2x + 1) - 1 + y^2 &< 0 \\ (x-1)^2 + y^2 &< 1. \end{aligned} \tag{41}$$

   Podmínce (41) odpovídá vnitřní část kružnice se středem $S = [1; 0]$ a poloměrem $r = 1$.

   Průnik podmínek (40) a (41) je znázorněn na obrázku (35). Bod $[0; 0]$ do definičního oboru funkce nepatří, v obrázku je znázorněn malým červeným kolečkem.



Obrázek 35: $x^2 + y^2 - x \geq 0 \quad \wedge \quad 2x - x^2 - y^2 > 0$

2. $x^2 + y^2 - x \leq 0 \quad \wedge \quad 2x - x^2 - y^2 < 0$

   Analogicky upravíme nerovnice ve druhém případě:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}. \tag{42}$$

   Což z grafického hlediska je kružnice se středem $S = \left[\frac{1}{2}; 0\right]$, poloměrem $r = \frac{1}{2}$ a její vnitřní část.

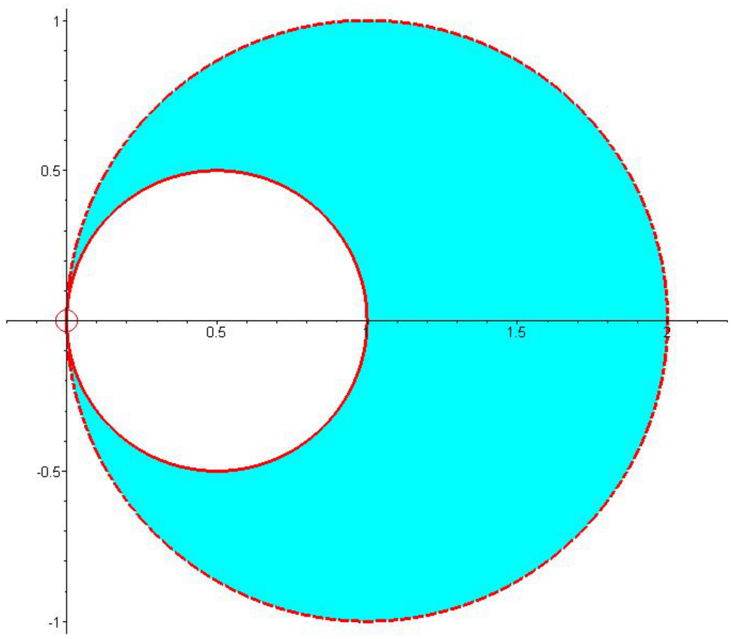
   Druhou nerovnici upravíme

$$(x - 1)^2 + y^2 > 1. \tag{43}$$

   Což z grafického hlediska je vnější část kružnice se středem $S = [1; 0]$ a poloměrem $r = 1$.

   Množiny (42), (43) nemají žádný společný průnik.

Definiční obor funkce (39) je tedy obrázek (36).



Obrázek 36: definiční obor funkce $F(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$

3.25 Příklad 25

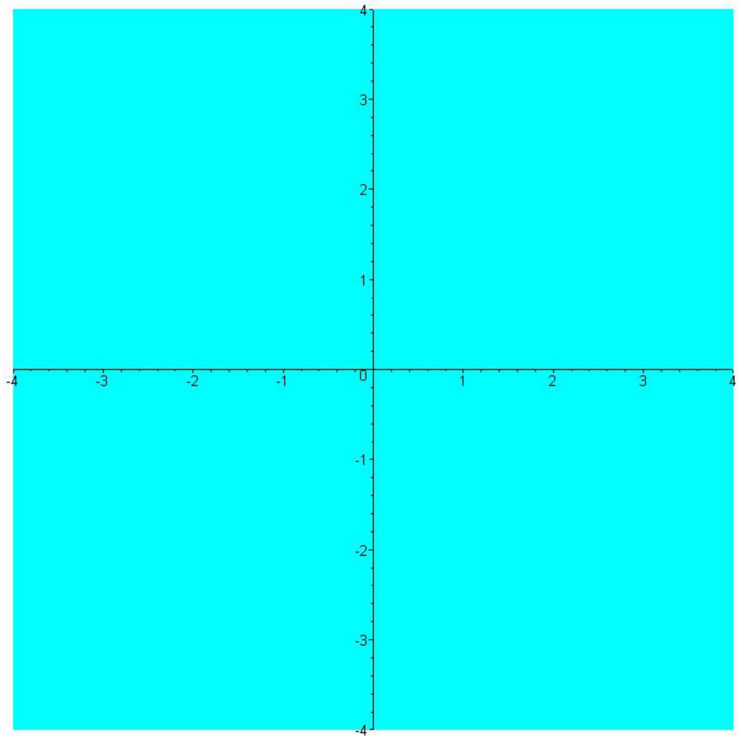
Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \frac{y}{\mathrm{e}^x} \tag{44}$$

Ve funkci (44) se vyskytuje zlomek. Zlomek je definovaný, když jmenovatel je různý od 0. Tedy

$$\mathrm{e}^x \neq 0.$$

Exponenciální funkce je definována pro všechny hodnoty x. Tudíž i definiční obor funkce (44) je řešitelný pro $x \in \mathbb{R}$.
Pro hodnoty y nemáme žádná omezení.
Grafická podoba je tedy na obrázku (37).



Obrázek 37: definiční obor funkce $F(x,y) = \dfrac{y}{\mathrm{e}^x}$

3.26 Příklad 26

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \sqrt{y \cdot \sin x} \tag{45}$$

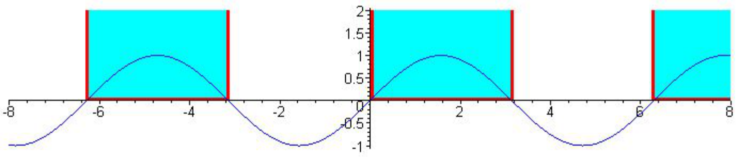
Odmocnina je definována pro nezáporná čísla. Pod odmocninou máme součin, tudíž se nám řešení nerovnice

$$y \cdot \sin x \geq 0$$

rozpadá na dvě situace:

1. $y \geq 0 \quad \wedge \quad \sin x \geq 0$
   První nerovnice nám určuje, že se budeme pohybovat na ose nebo nad osou x. Grafem funkce sin je sinusoida. Podle naší nerovnice nás budou zajímat x-ové souřadnice, pro které jsou „obloučky“ sinusoidy na ose nebo nad osou x. Matematický zápis obrázku (38) by vypadal takto

   $$x \in \langle 0; \pi \rangle + 2k\pi, k \in \mathbb{R}.$$

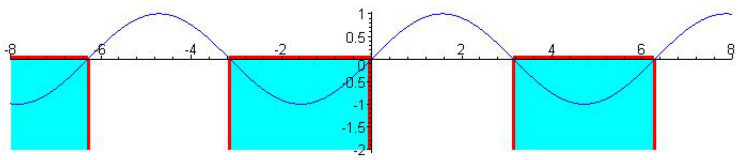


Obrázek 38: $y \geq 0 \quad \wedge \quad \sin x \geq 0$

2. $y \leq 0 \quad \wedge \quad \sin x \leq 0$
   Nerovnice $y \leq 0$ nám říká, že se budeme pohybovat na ose nebo pod osou x.

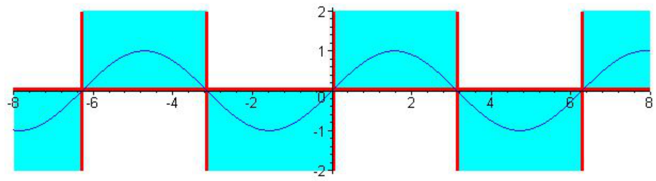
A ze sinusoidy z nerovnice $\sin x \leq 0$ se budeme zajímat o x-ové souřadnice, pro které jsou „obloučky" na ose nebo pod osou x.
Výsledek těchto dvou nerovnic je na obrázku (39) a matematický zápis by vypadal takto

$$x \in \langle \pi; 2\pi \rangle + 2k\pi, k \in \mathbb{R}.$$



Obrázek 39: $y \leq 0 \quad \wedge \quad \sin x \leq 0$

Konečná podoba definičního oboru funkce (45) je sjednocením útvarů z předchozích dvou obrázků - obrázek (40).



Obrázek 40: definiční obor funkce $F(x, y) = \sqrt{y \cdot \sin x}$

3.27 Příklad 27

Určete definiční obor funkce

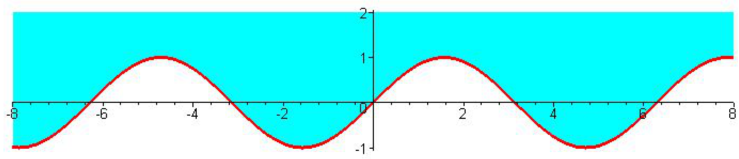
$$F(x,y) = \sqrt{y - \sin x} \tag{46}$$

Odmocnina je definována pro nezáporná čísla. Tedy

$$\begin{aligned} y - \sin x &\geq 0 \\ y &\geq \sin x. \end{aligned} \tag{47}$$

Grafem funkce $\sin x$ je sinusoida.

Hledáme y nad nebo na sinusoidě. Výsledek je patrný z obrázku (41).



Obrázek 41: definiční obor funkce $F(x,y) = \sqrt{y - \sin x}$

3.28 Příklad 28

Určete definiční obor funkce

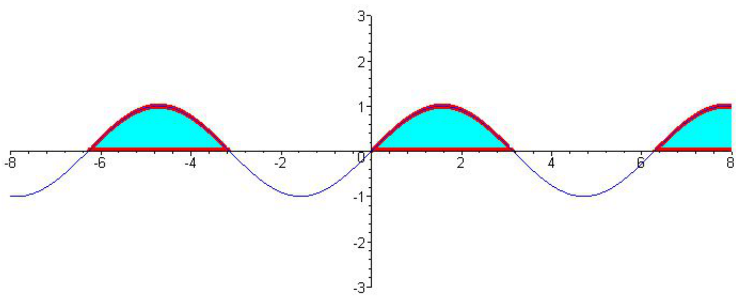
$$F(x,y) = \sqrt{y \cdot (\sin x - y)} \tag{48}$$

Jediné omezení definičního oboru spatřujeme v odmocnině. Musí platit

$$y \cdot (\sin x - y) \geq 0.$$

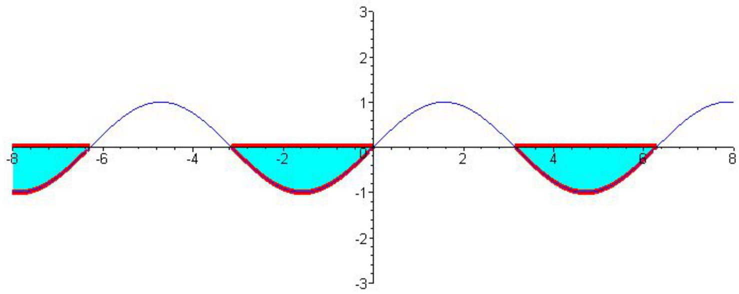
Řešení se rozpadá na dva případy.

1. $y \geq 0 \quad \wedge \quad \sin x - y \geq 0$
   Z první nerovnice víme, že se budeme pohybovat na nebo nad osou x. Druhá nerovnice po upravení na tvar
   $$y \leq \sin x,$$
   nás odkazuje na body pod sinusoidou. Gragický výsledek na obrázku (42).



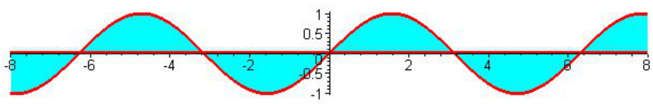
Obrázek 42: $y \geq 0 \quad \wedge \quad y \leq \sin x$

2. $y \leq 0 \quad \wedge \quad \sin x - y \leq 0$
   Po úpravách dostáváme nerovnice
   $$y \leq 0 \quad \wedge \quad y \geq \sin x.$$
   Je zřejmé, že se budeme pohybovat na ose nebo pod osou x a půjde nám o body nad sinusoidou, jak je vidět na obrázku (43).



Obrázek 43: $y \leq 0 \quad \wedge \quad y \geq \sin x$

Sjednocením útvarů z obrázků (42) a (43), dostáváme konečnou podobu definičního oboru funkce (48) - obrázek (44).



Obrázek 44: definiční obor funkce $F(x, y) = \sqrt{y \cdot (\sin x - y)}$

3.29 Příklad 29

Určete definiční obor funkce

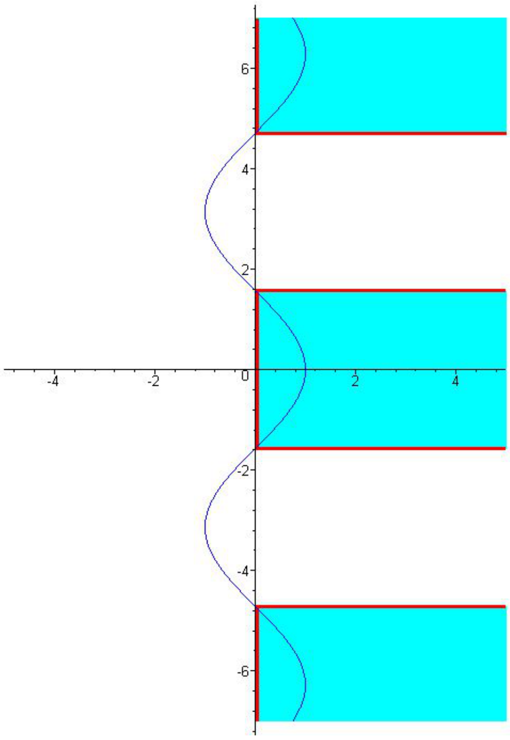
$$F(x, y) = \sqrt{x \cdot \cos y} \tag{49}$$

Funkce $\cos y$ je definována na celých reálných číslech.
Odmocnina je definována pro nezáporná čísla. Odtud řešíme nerovnici

$$x \cdot \cos y \geq 0.$$

Řešení se rozpadá na dva případy:

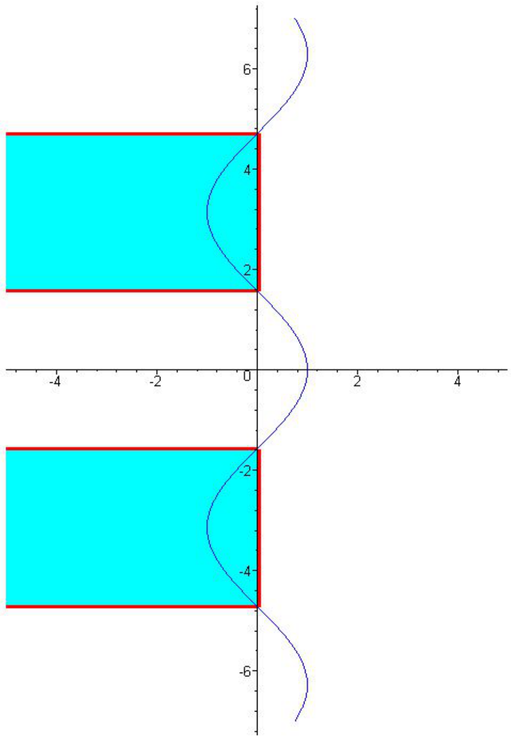
1. $x \geq 0 \quad \wedge \quad \cos y \geq 0$
   Budeme se pohybovat na ose y nebo vpravo od osy y. Budou nás zajímat y-ové souřadnice, pro které je kosinusoida větší nebo rovna 0. Grafická podoba prvního případu je na obrázku (45).



Obrázek 45: $x \geq 0 \quad \wedge \quad \cos y \geq 0$

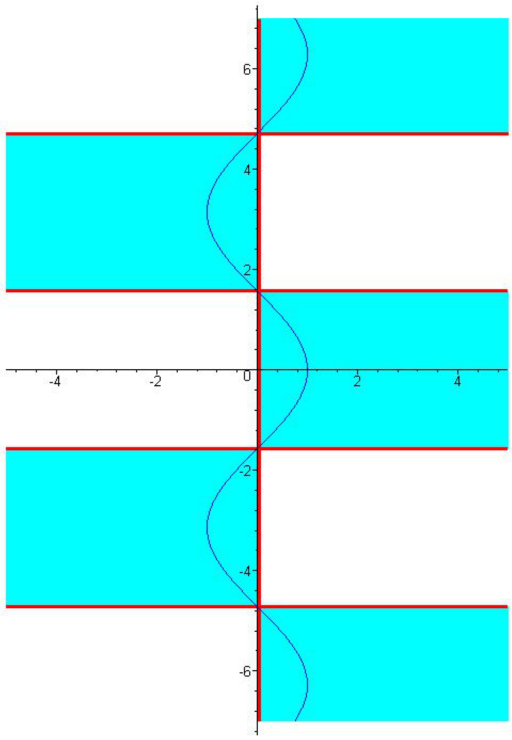
2. $x \leq 0 \quad \wedge \quad \cos y \leq 0$
   Budeme se pohybovat na ose y nebo vlevo od osy y. Budou nás zajímat

y-ové souřadnice, pro které je kosinusoida menší nebo rovna 0. Grafická podoba druhého případu je na obrázku (46).



Obrázek 46: $x \leq 0 \quad \wedge \quad \cos y \leq 0$

Sjednocením obou útvarů dostáváme konečnou podobu definičního oboru funkce,která je na obrázku (47).



Obrázek 47: definiční obor funkce $F(x, y) = \sqrt{x \cdot \cos y}$

3.30 Příklad 30

Určete definiční obor funkce

$$F(x, y) = \ln(xy) \tag{50}$$

Logaritmus je definovaný, pokud jeho argument je kladné reálné číslo. Tudíž řešíme nerovnici

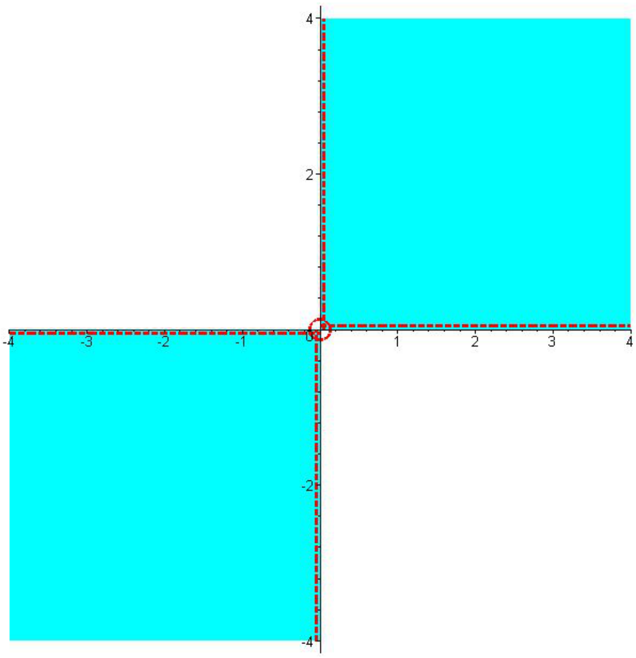
$$xy > 0.$$

Řešení se rozpadá na dva případy:

1. $x > 0 \quad \wedge \quad y > 0$
   Řešením je I. kvadrant, neboli otevřený výsek roviny vymezený x-ovou osou a y-ovou osou.

2. $x < 0 \quad \wedge \quad y < 0$
   Řešením je III. kvadrant prostoru $\mathbb{R}^2$.

Definiční obor funkce je I. a III. kvadrant, tedy obrázek (48).



Obrázek 48: definiční obor funkce $F(x, y) = \ln(xy)$

3.31 Příklad 31

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \ln(4xy) \tag{51}$$

Funkce ln je definována pro argumenty z intervalu $(0;\infty)$. Odtud řešíme nerovnici

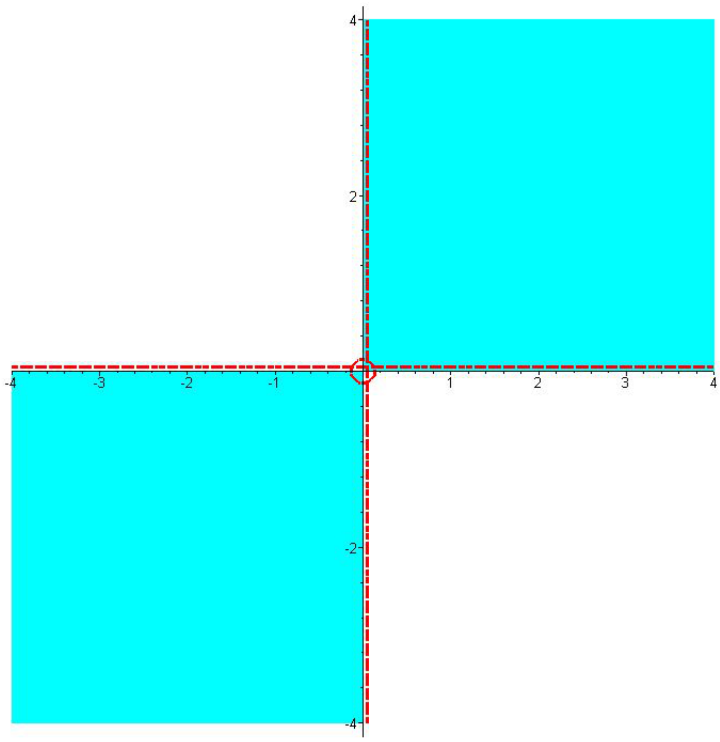
$$4xy > 0.$$

Řešení se rozpadá na dva případy.

1. $x > 0 \quad \wedge \quad y > 0$
   Výsledkem je I. kvadrant bez hraničních os.

2. $x < 0 \quad \wedge \quad y < 0$
   Výsledkem je III. kvadrant bez hraničních os.

Definiční obor funkce je sjednocením prvního a druhé případu. Grafickou podoba definičního oboru vidíme na obrázku (49).



Obrázek 49: definiční obor funkce $F(x,y) = \ln(4xy)$

3.32 Příklad 32

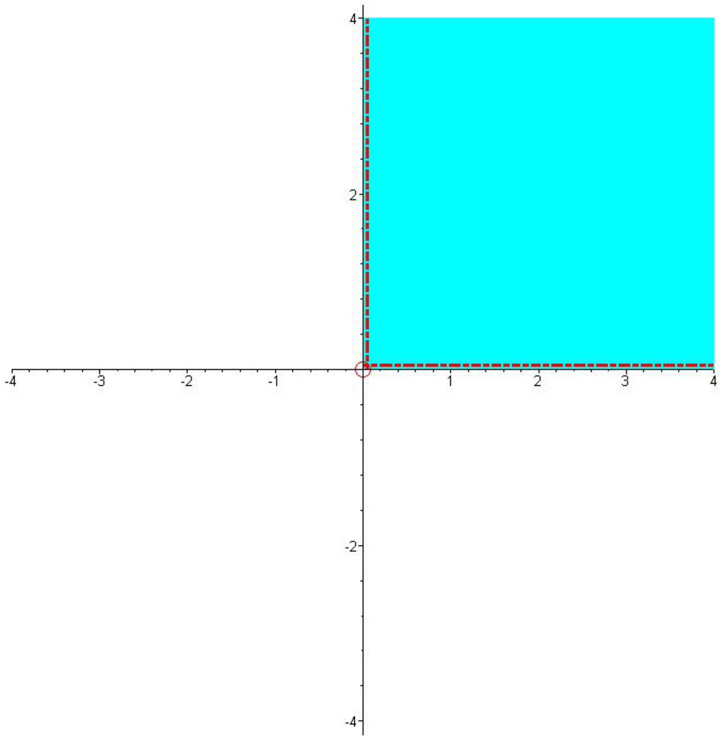
Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \ln x + \ln y \tag{52}$$

Logaritmus je definovaný, pokud jeho argument je kladné reálné číslo. Tudíž řešíme

$$x > 0 \quad \wedge \quad y > 0.$$

Definičním oborem funkce je I. kvadrant, obrázek (50).



Obrázek 50: definiční obor funkce $F(x,y) = \ln x + \ln y$

3.33 Příklad 33

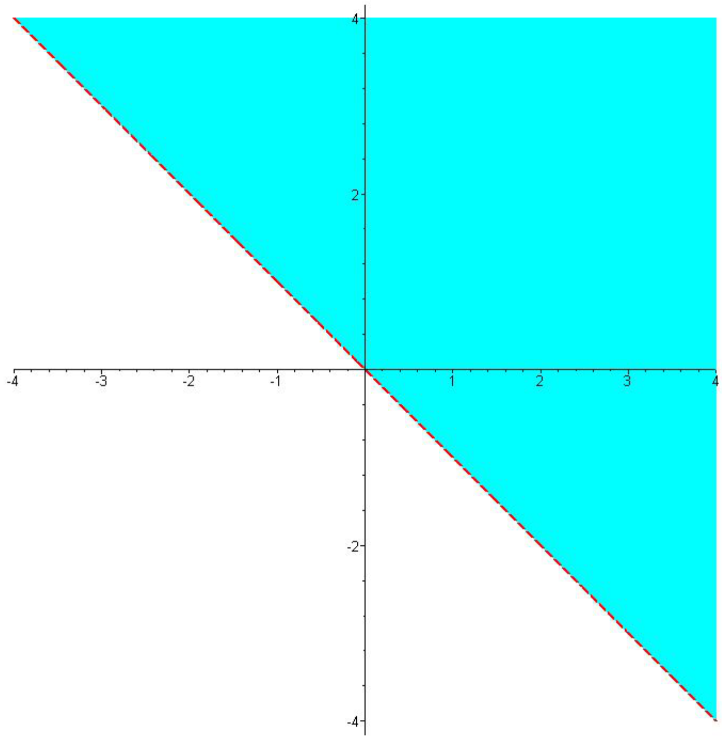
Určete definiční obor funkce

$$F(x, y) = \ln(x + y) \tag{53}$$

Logaritmus je definovaný, pokud jeho argument je kladné reálné číslo. Tudíž řešíme nerovnici

$$x + y > 0.$$

Dostáváme podmínku $y > -x$, která na obrázku (51) definičního oboru funkce vymezuje horní polorovinu prostoru $\mathbb{R}^2$ omezeného přímkou $y = -x$.



Obrázek 51: definiční obor funkce $F(x, y) = \ln(x + y)$

3.34 Příklad 34

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \ln\big(9x^2 + 54x + 4y^2 + 45\big) \tag{54}$$

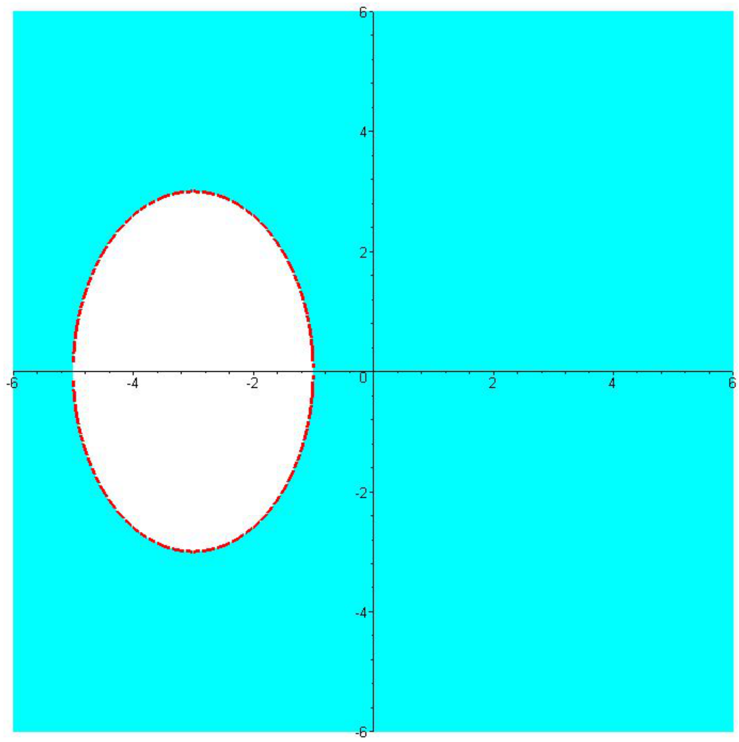
Funkce ln je definována pro argumenty z intervalu $(0;\infty)$. Odtud musíme vyřešit nerovnici

$$9x^2 + 54x + 4y^2 + 45 > 0.$$

Výraz na levé straně nerovnice doplníme na čtverec a následně upravíme

$$\begin{aligned}
9x^2 + 54x + 4y^2 + 45 &> 0 \\
\big(9x^2 + 54x + 81\big) + 4y^2 + 45 - 81 &> 0 \\
9(x+3)^2 + 4y^3 &> 36 \\
\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{y^2}{9} &> 1.
\end{aligned} \tag{55}$$

Pokud by v nerovnici (55) bylo znaménko rovnosti, snadno bychom odhalili analytické vyjádření elipsy se středem $S = [-3;0]$, hlavní poloosou $a = 2$ a vedlejší poloosou $b = 3$. V našem případě je ovšem znaménko nerovnosti,tzn. definiční obor funkce je vnější část elipsy. Grafické znázornění je na obrázku (52).



Obrázek 52: definiční obor funkce $F(x, y) = \ln(9x^2 + 54x + 4y^2 + 45)$

3.35 Příklad 35

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \ln(y - x^2) + \ln(9 - y) \tag{56}$$

Funkce ln je definována pro argumenty z intervalu $(0;\infty)$.
Z prvního logaritmu dostáváme nerovnici

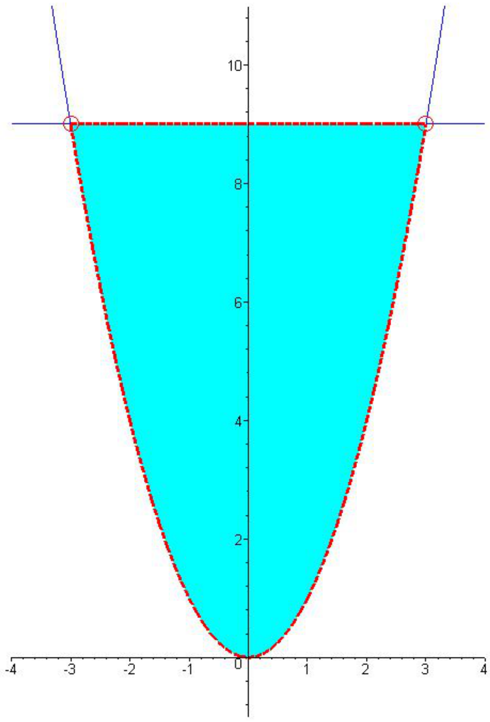
$$\begin{aligned} y - x^2 &> 0 \\ y &> x^2. \end{aligned} \tag{57}$$

Křivka $y = x^2$ odpovídá konvexní kvadratické parabole, nerovnice jejímu vnitřku.

Z druhého logaritmu dostáváme nerovnici

$$\begin{aligned} 9 - y &> 0 \\ y &< 9. \end{aligned} \tag{58}$$

Průnik podmínek (57) a (58) je konečný definiční obor funkce. Jeho grafická podoba je na obrázku (53). Průsečíky křivek splňují rovnice $y = x^2$ a $y = 9$, jedná se tedy o body $[-3; 9]$ a $[3; 9]$.



Obrázek 53: definiční oboru funkce $F(x, y) = \ln(y - x^2) + \ln(9 - y)$

3.36 Příklad 36

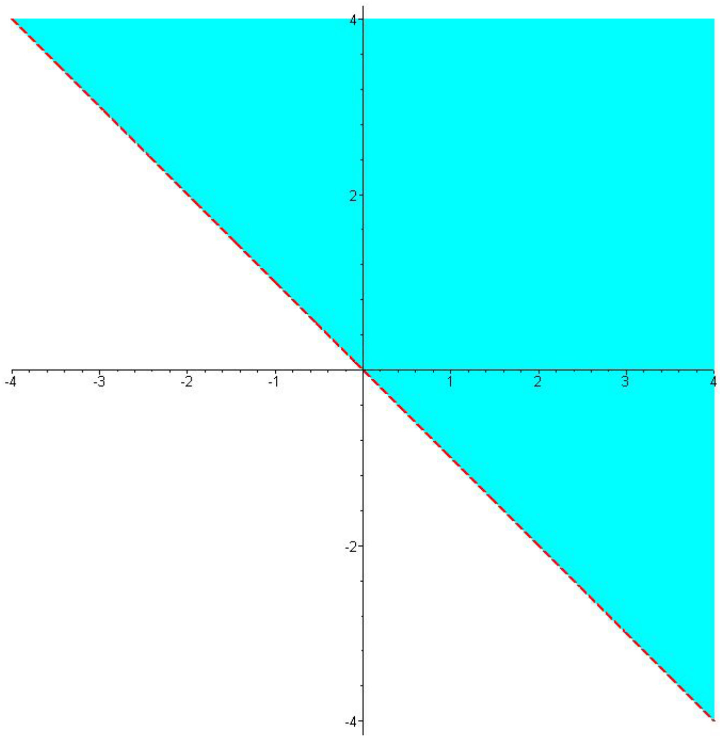
Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \ln\left(x \cdot \ln(x+y)\right) \tag{59}$$

Definiční obor logaritmické funkce je interval $(0;\infty)$. Tudíž z vnitřní závorky vyplývá

$$\begin{aligned} x+y &> 0 \\ y &> -x. \end{aligned} \tag{60}$$

Budeme se pohybovat v polorovině, která je znázorněna na obrázku (54).



Obrázek 54: $y > -x$

Z podmínky vnějšího logaritmu dostáváme

$$x \cdot \ln(x+y) > 0.$$

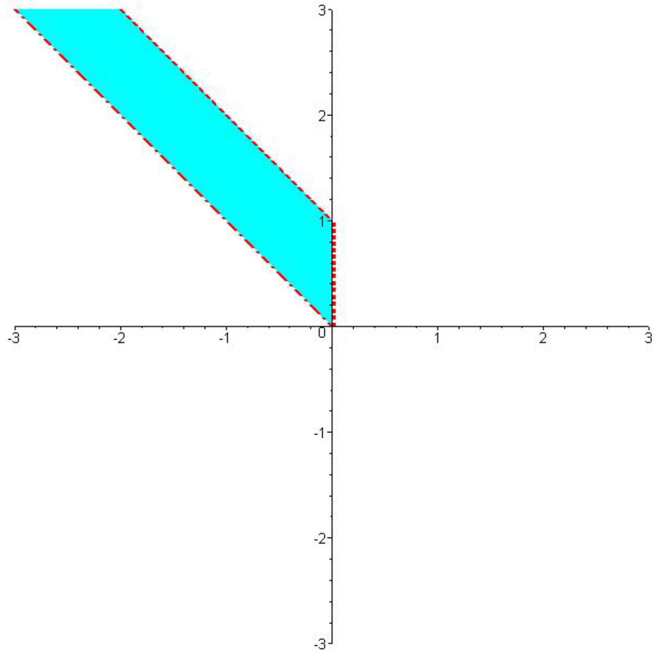
Řešení nerovnice se rozpadá na dva případy:

1. $x < 0 \quad \wedge \quad \ln(x+y) < 0$

   Při úpravě druhé nerovnice využijeme poznatku, že ln je záporný pro argumenty z intervalu $(0;1)$. Hledáme tedy řešení nerovnice

$$\begin{array}{rcl} 0 & < & x+y & < & 1 \\ -x & \leq & y & \leq & 1-x. \end{array}$$

Situace je znázorněna na obrázku (55), je zde počítáno již s podmínkou z nerovnice (60).



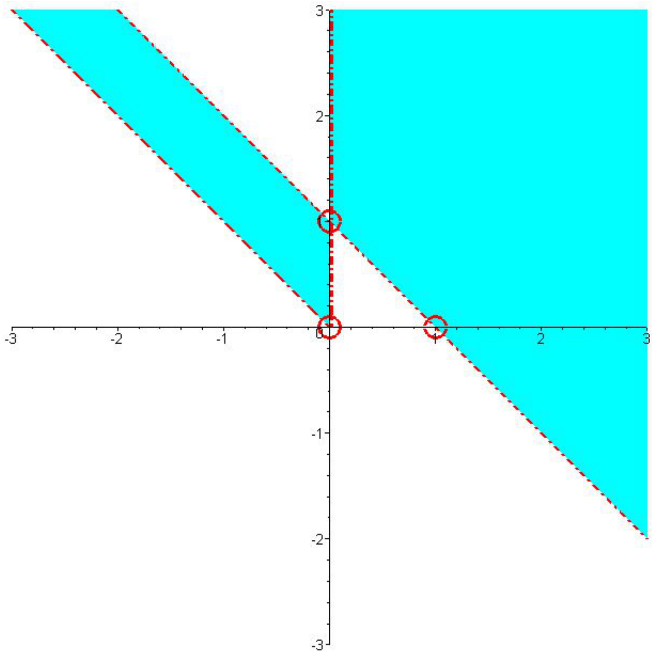
Obrázek 55: $y > -x \quad \wedge \quad x < 0 \quad \wedge \quad \ln(x+y) < 0$

2. $x > 0 \quad \wedge \quad \ln(x+y) > 0$

   Při úpravě nerovnice $\ln(x+y) > 0$, využijeme stejného poznatku jako v předchozím případě. Úprava bude následující

$$\begin{array}{rcl} x+y & > & 1 \\ y & > & 1-x. \end{array}$$

Spojením prvního případu, resp. obrázku (55) a druhého případu, dostáváme konečnou podobu definičního oboru funkce. Definiční obor funkce (59) je na obrázku (56).



Obrázek 56: definiční obor funkce $F(x,y) = \ln\left(x \cdot \ln(x+y)\right)$

3.37 Příklad 37

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \ln\big(1-(x^2+y)^2\big) \tag{61}$$

Logaritmus je definovaný, pokud jeho argument je kladné reálné číslo. Tudíž řešíme nerovnici

$$1-(x^2+y)^2 > 0.$$

Výraz upravíme na tvar

$$(1-x^2-y)(1+x^2+y) > 0.$$

Řešení definičního oboru funkce se nám rozpadá na dva případy:

1. $1-x^2-y > 0 \quad \wedge \quad 1+x^2+y > 0$

   Upravení první nerovnice vypadá takto:

   $$\begin{aligned} 1-x^2-y &> 0 \\ y &< 1-x^2. \end{aligned} \tag{62}$$

   Křivka $y = 1-x^2$ je konkávní parabola, posunutá po y-ové ose do hodnoty 1.

   Upravení druhé nerovnice vypadá takto:

   $$\begin{aligned} 1+x^2+y &> 0 \\ y &> -1-x^2. \end{aligned} \tag{63}$$

   Křivka $y = -1-x^2$ je konkávní parabola, posunutá po y-ové ose do hodnoty -1.

   Spojením podmínek (62) a (63) dostáváme první omezení definičního oboru funkce. Z grafického hlediska se jedná o prostor mezi parabolami, jak je patrné z obrázku (57).

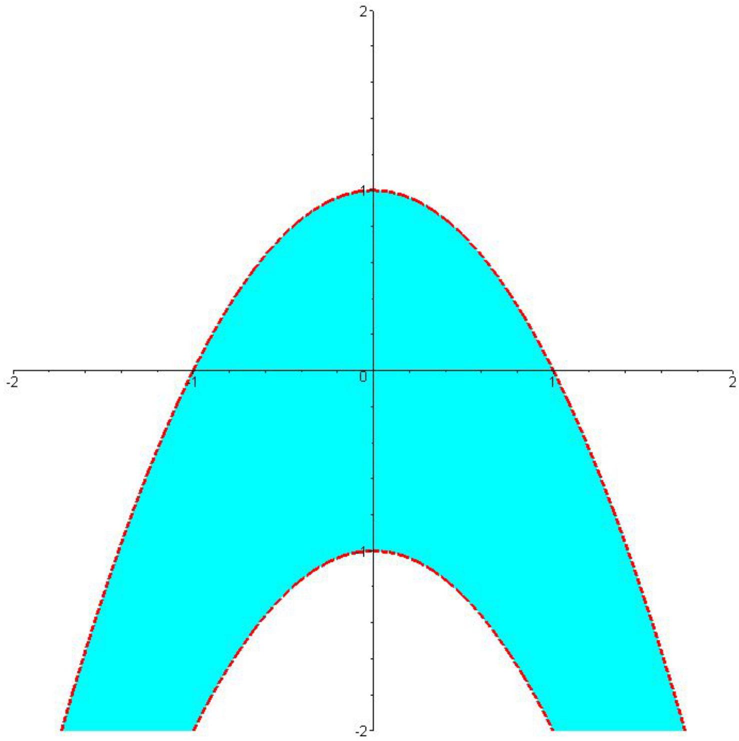
2. $1-x^2-y < 0 \quad \wedge \quad 1+x^2+y < 0$

   Analogickými úpravami závorek dostáváme konečné podmínky ve tvaru

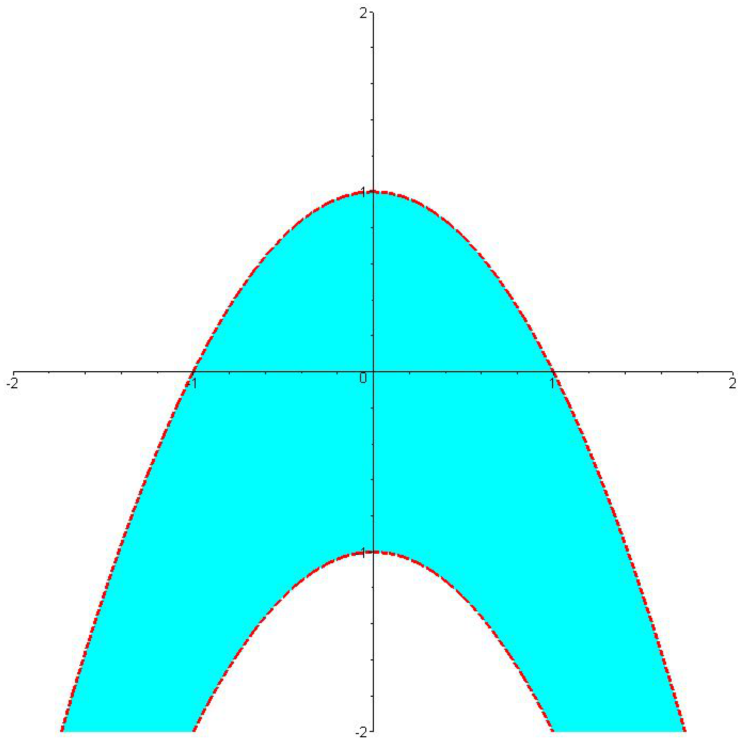
   $$y > 1-x^2 \quad \text{a} \quad y < -1-x^2.$$

   Těmto podmínkám nevyhovuje žádný bod z prostoru $\mathbb{R}^2$, protože $1-x^2$ není nikdy menší než $-1-x^2$.

Tedy konečný definiční obor funkce je prostor mezi dvěma konkávními parabolami znázorněný na obrázku (58).



Obrázek 57: $1 - x^2 - y > 0 \quad \wedge \quad 1 + x^2 + y > 0$



Obrázek 58: definiční obor funkce $F(x, y) = \ln\left(1 - (x^2 + y)^2\right)$

3.38 Příklad 38

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \ln \frac{x+1}{2-y} \tag{64}$$

Zlomek existuje, pokud jmenovatel je různý od 0, tedy

$$y \neq 2.$$

Funkce ln je definována pro argumenty z intervalu $(0;\infty)$. Odtud řešíme nerovnici

$$\frac{x+1}{2-y} > 0.$$

Řešení nerovnice se rozpadá na dva případy.

1. čitatel i jmenovatel kladní

$$\begin{array}{rclcrcl} x+1 & > & 0 & \wedge & 2-y & > & 0 \\ x & > & -1 & \wedge & y & < & 2 \end{array} \tag{65}$$

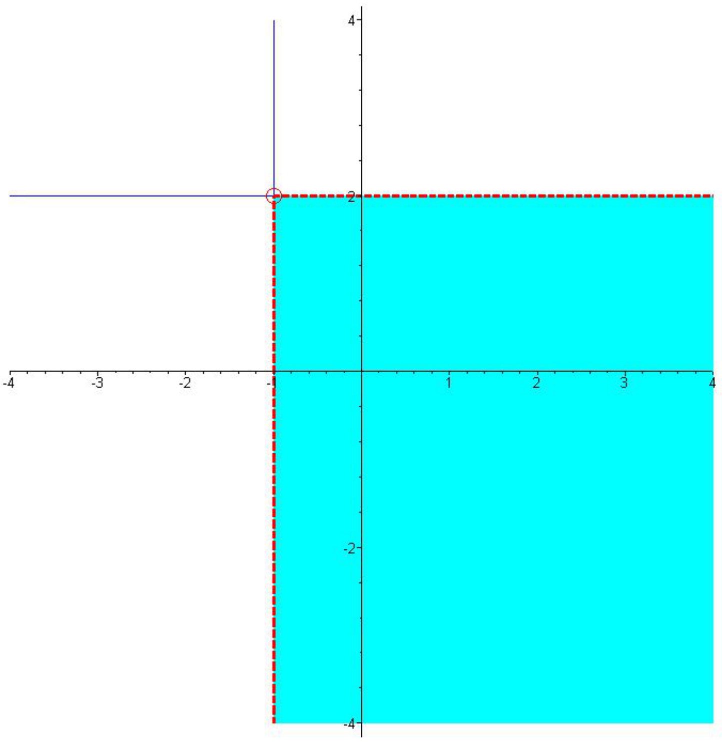
   První případ má grafické řešení na obrázku (59).

2. čitatel i jmenovatel záporní

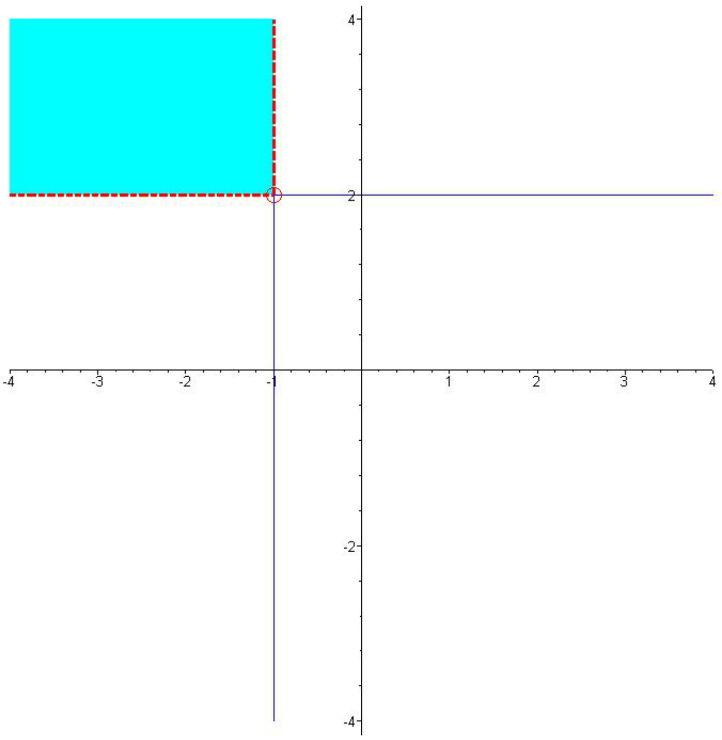
$$\begin{array}{rclcrcl} x+1 & < & 0 & \wedge & 2-y & < & 0 \\ x & < & -1 & \wedge & y & > & 2 \end{array} \tag{66}$$

   Druhý případ má grafické řešení na obrázku (60).

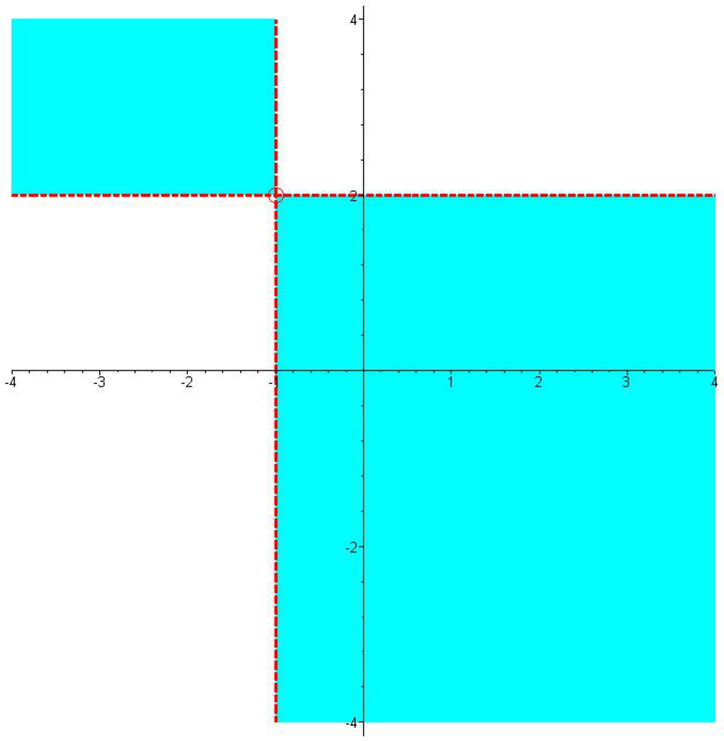
Sjednocením obou útvarů dostáváme konečnou podobu definičního oboru funkce graficky znázorněnou na obrázku (61).



Obrázek 59: $x > -1 \quad \wedge \quad y < 2$



Obrázek 60: $x < -1 \quad \wedge \quad y > 2$



Obrázek 61: definiční obor funkce $F(x, y) = \ln \dfrac{x+1}{2-y}$

3.39 Příklad 39

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \frac{\sqrt{y-2x^2}}{\ln(1-x^2-y^2)} \tag{67}$$

---

1. Existenci zlomku zajistíme podmínkou

$$\begin{aligned} \ln(1-x^2-y^2) &\neq 0 \\ 1-x^2-y^2 &\neq 1 \\ x^2+y^2 &\neq 0, \end{aligned} \tag{68}$$

   tj. do definičního oboru funkce (67) nepatří bod $[0;0]$.

2. Funkce ln je definována pro argumenty z intervalu $(0;\infty)$,tedy potřebujeme

$$\begin{aligned} 1-x^2-y^2 &> 0 \\ x^2+y^2 &< 1. \end{aligned} \tag{69}$$

   Podmínce (69) odpovídá vnitřní část kružnice se středem $S = [0;0]$ a poloměrem $r = 1$.

3. Odmocnina v čitateli je definována pro nezáporná čísla. Odtud řešíme nerovnici

$$\begin{aligned} y-2x^2 &\geq 0 \\ y &\geq 2x^2. \end{aligned} \tag{70}$$

   Podmínce (70) odpovídá parabola a její vnitřní část.

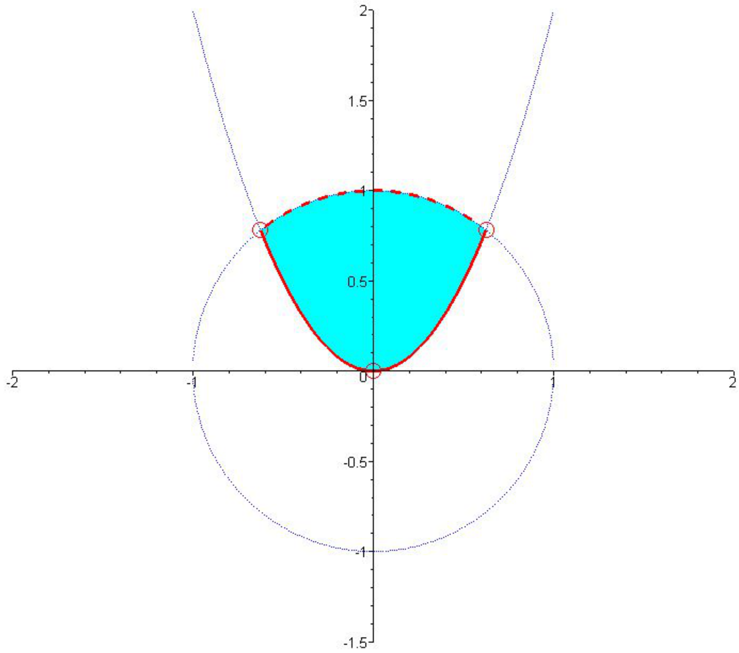
Průnik podmínek (69) a (70) je definiční obor funkce, jehož grafická podoba je na obrázku (62).
Pro určení průsečíků křivek musíme vyřešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1 \\ y &= 2x^2, \end{aligned}$$

tedy rovnici

$$4x^4 + x^2 - 1 = 0.$$

Program Maple ukazuje, že máme dva dvojnásobné kořeny



Obrázek 62: definiční obor funkce $F(x,y) = \dfrac{\sqrt{y-2x^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$

```
> 4*x^4+x^2-1=0;

                       4      2
                    4 x  + x  - 1 = 0

> solve(%);

            1/2 1/2              1/2 1/2               1/2 1/2
  (-2 + 2 17    )      (-2 + 2 17    )       (-2 - 2 17    )
- -----------------, -----------------, - -----------------,
          4                  4                     4

              1/2 1/2
    (-2 - 2 17    )
    -----------------
            4
```

Dopočítáme y-ovou souřadnici

```
> y1:=2*(-1/4*(-2+2*17^(1/2))^(1/2))^2;

                                    1/2
                                  17
                   y1 := - 1/4 + -----
                                    4

> y2:=2*(1/4*(-2+2*17^(1/2))^(1/2))^2;

                                    1/2
                                  17
                   y2 := - 1/4 + -----
                                    4
```

Průsečíky křivek jsou $\left[-\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{17}}}{4}; -\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}\right]$ a $\left[\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{17}}}{4}; -\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}\right]$.

3.40 Příklad 40

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \ln\left[x \ln(y-x)\right] + \mathrm{e}^{2x-1} \tag{71}$$

Exponent u exponenciální funkce nemá žádné omezení, tj. je definován pro $x \in \mathbb{R}$. Zaměříme se na funkci ln, která je definována pro argumenty z intervalu $(0;\infty)$. Z vnitřního logaritmu dostáváme podmínku

$$y - x > 0, \quad \text{tj. } y > x.$$

Řešení vnějšího logaritmu bude o něco složitější. Musíme vyřešit nerovnici

$$x \cdot \ln(y-x) > 0.$$

Úprava nerovnice se rozpadá na dva případy.

1. $x > 0 \quad \wedge \quad \ln(y-x) > 0$
   První nerovnice je zřejmá. Druhou upravíme

$$\begin{aligned} \ln(y-x) &> 0 \\ y - x &> 1 \\ y &> x + 1. \end{aligned}$$

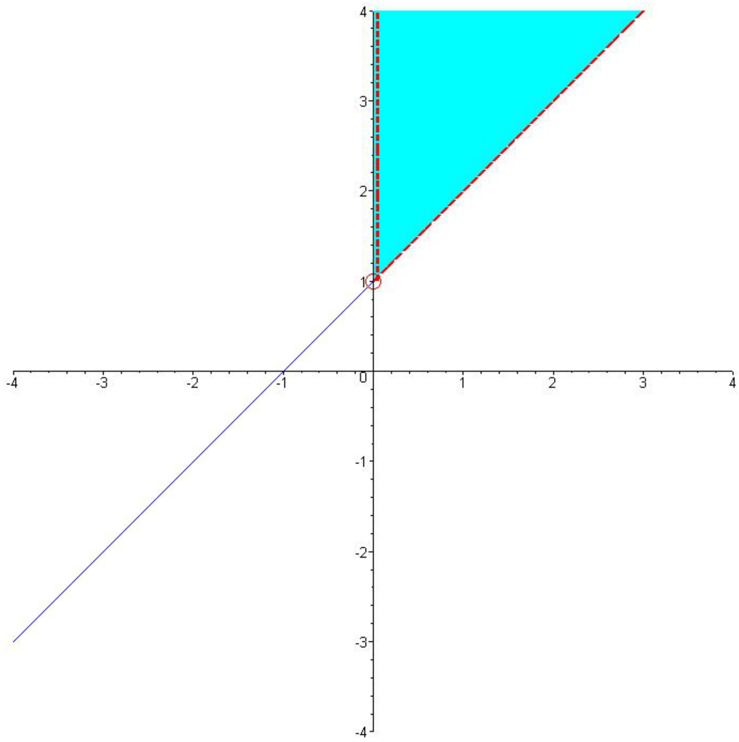
   V grafické podobě „vybarvíme" v I. kvadrantu prostor mezi osou y a přímkou $y = x + 1$, bez okrajových přímek - obrázek (63).

2. $x < 0 \quad \wedge \quad \ln(y-x) < 0$
   Upravíme druhou nerovnici

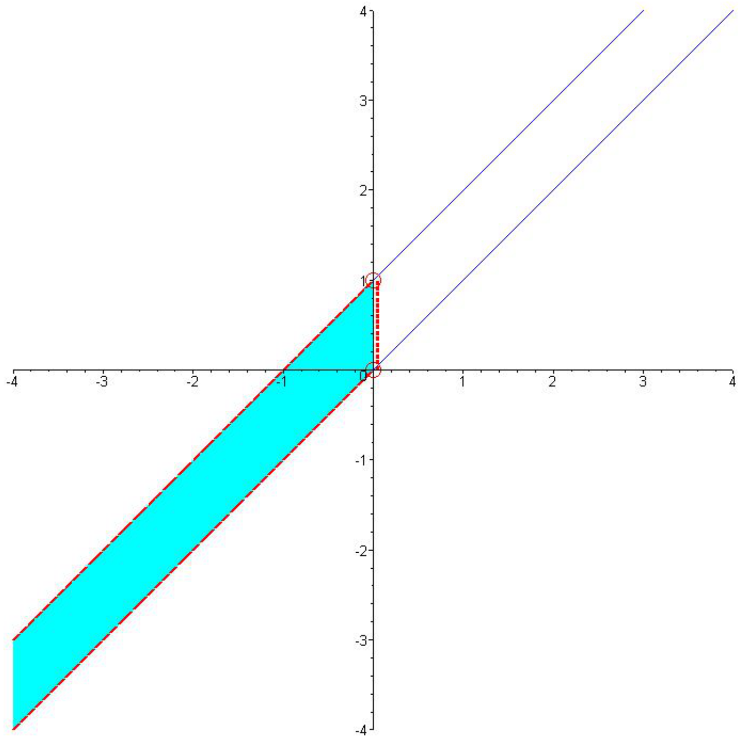
$$\begin{array}{rcccl} & & \ln(y-x) & < & 0 \\ 0 & < & y-x & < & 1 \\ x & < & y & < & x+1. \end{array}$$

   V Gaussově rovině na intervalu $x \in (-\infty;0)$ „vybarvíme" prostor mezi přímkami $y = x$ a $y = x + 1$, bez okrajových přímek - obrázek (64).

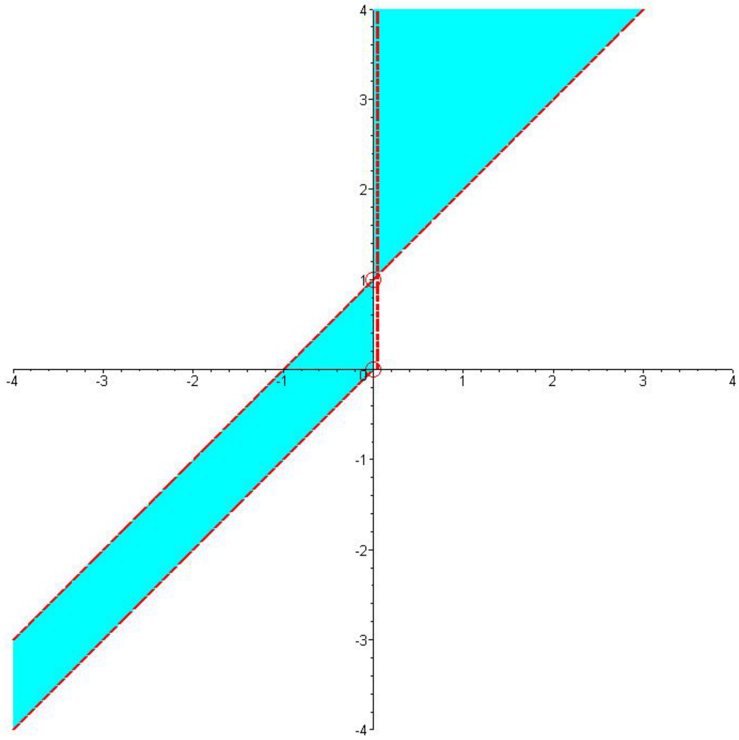
Obrázek (65) je spojením útvarů z předchozích obrázků a zároveň i definičním oborem funkce (71).



Obrázek 63: $x > 0 \quad \wedge \quad y > x + 1$



Obrázek 64: $x < 0 \quad \wedge \quad x < y < x + 1$



Obrázek 65: definiční obor funkce $F(x, y) = \ln\left[x \ln(y - x)\right] + \mathrm{e}^{2\mathrm{x}-1}$

3.41 Příklad 41

Určete definiční obor funkce

$$F(x, y) = x^y \tag{72}$$

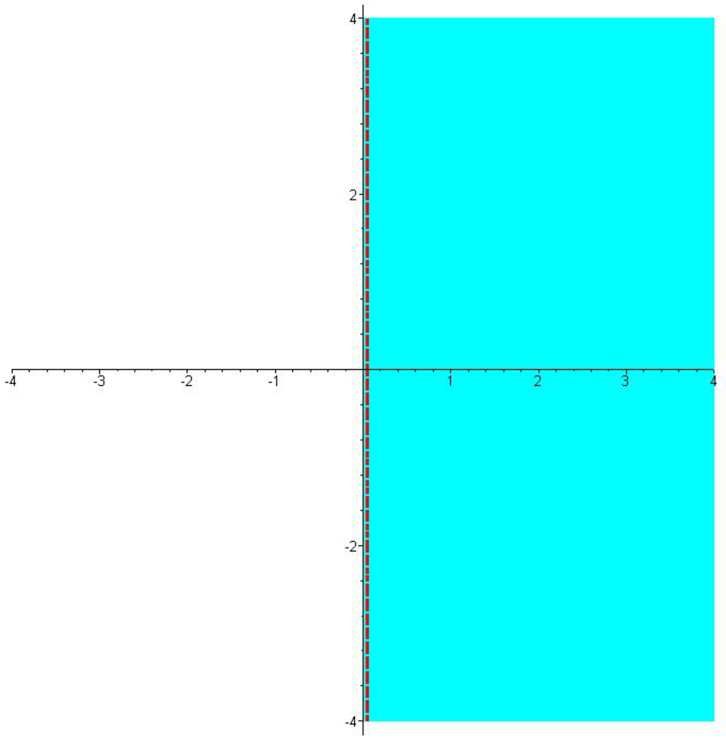
Funkci (72) můžeme přepsat na

$$F(x, y) = \mathrm{e}^{y \cdot \ln x}.$$

Exponenciální funkce je definována pro všechna reálná čísla. Omezuje nás funkce logaritmu v exponentu. Logaritmus je definovaný, pokud jeho argument je kladné reálné číslo. Tudíž máme omezení v podobě

$$x > 0.$$

Definiční obor funkce je I. a IV. kvadrant, jak je patrné z obrázku (66).



Obrázek 66: definiční obor funkce $F(x, y) = x^y$

3.42 Příklad 42

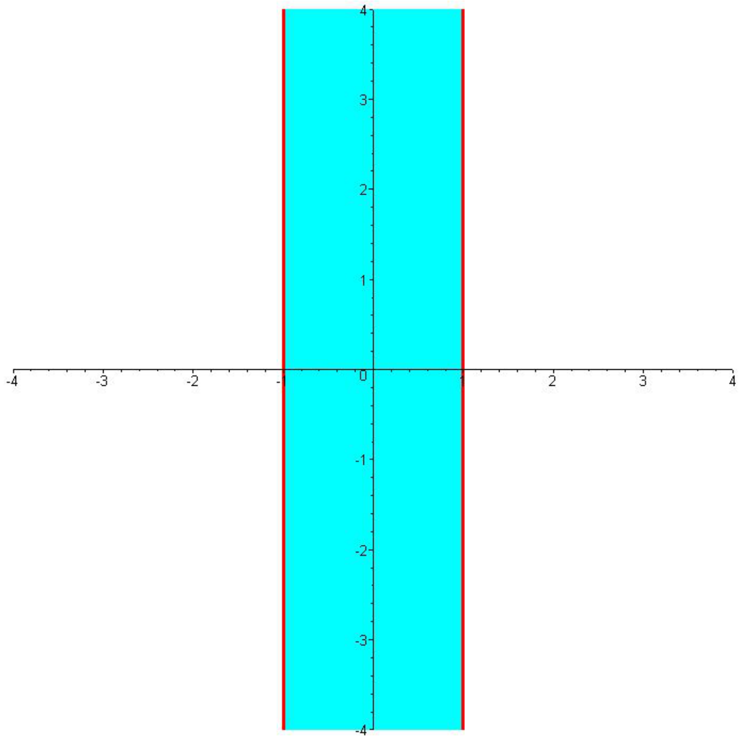
Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = y - \arcsin x \tag{73}$$

Omezení pro proměnnou y nemáme. Zaměříme se na funkci arcsin, která je definována na intervalu $\langle -1; 1\rangle$. Omezení pro proměnnou x je tedy

$$-1 \leq x \leq 1,$$

což je i definičním oborem funkce (73).
Grafická podoba definičního oboru je na obrázku (67).



Obrázek 67: definiční obor funkce $F(x, y) = y - \arcsin x$

3.43 Příklad 43

Určete definiční obor funkce

$$F(x, y) = \arcsin(xy) \tag{74}$$

Funkce arcsin je definována pro argumenty z intervalu $\langle -1; 1\rangle$. Odtud řešíme nerovnice

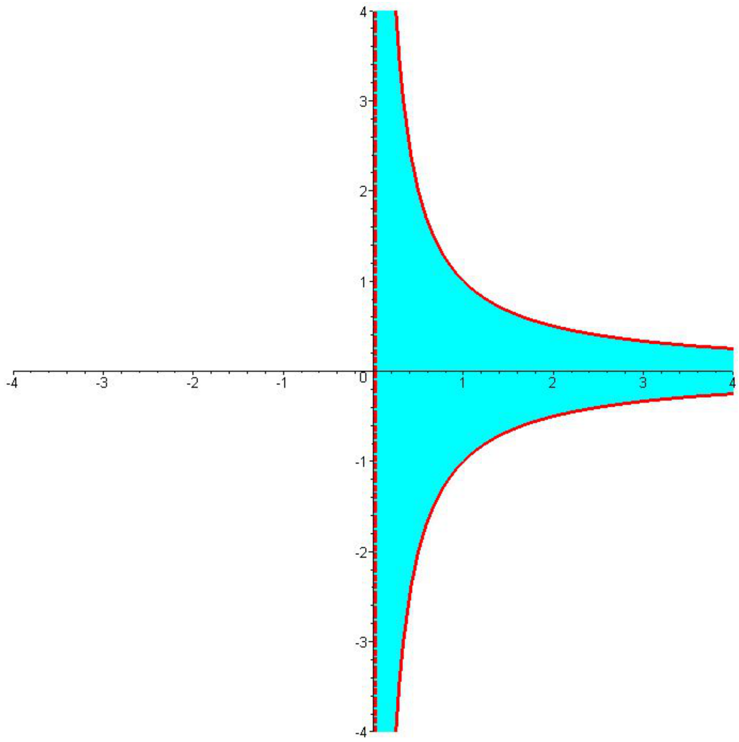
$$-1 \leq xy \leq 1.$$

Při úpravě nerovnice tentokrát budeme rozebírat tři případy.

1. Pokud $x > 0$, upravíme nerovnice na tvar

$$-\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x}.$$

Křivka $y = \dfrac{1}{x}$ představuje rovnoosou hyperbolu. Nerovnicím odpovídá obrázek (68).

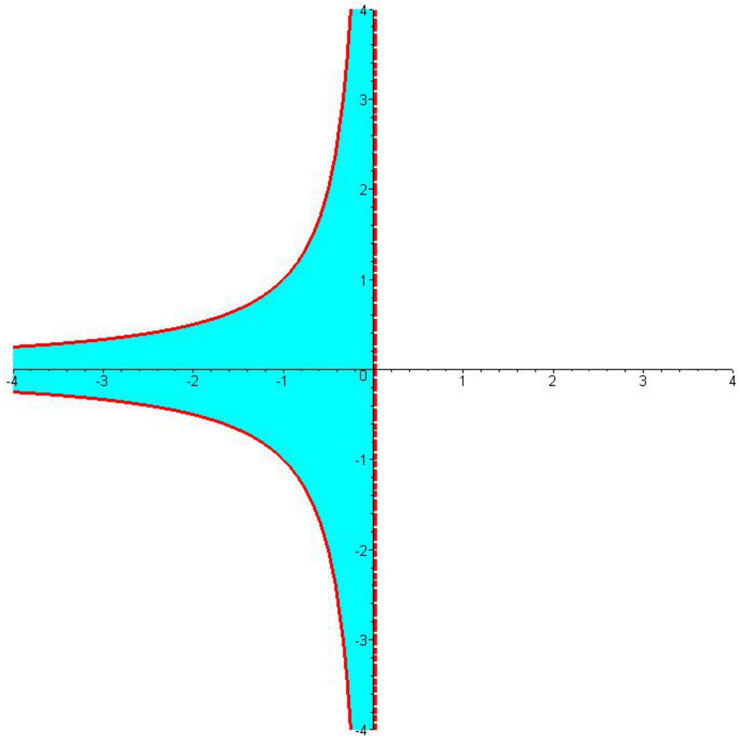


Obrázek 68: $x > 0 \quad \wedge \quad -\dfrac{1}{x} \leq y \leq \dfrac{1}{x}$

2. Pokud $x < 0$, upravíme nerovnice na tvar

$$-\frac{1}{x} \geq y \geq \frac{1}{x}.$$

Těmto nerovnicím odpovídá obrázek (69).



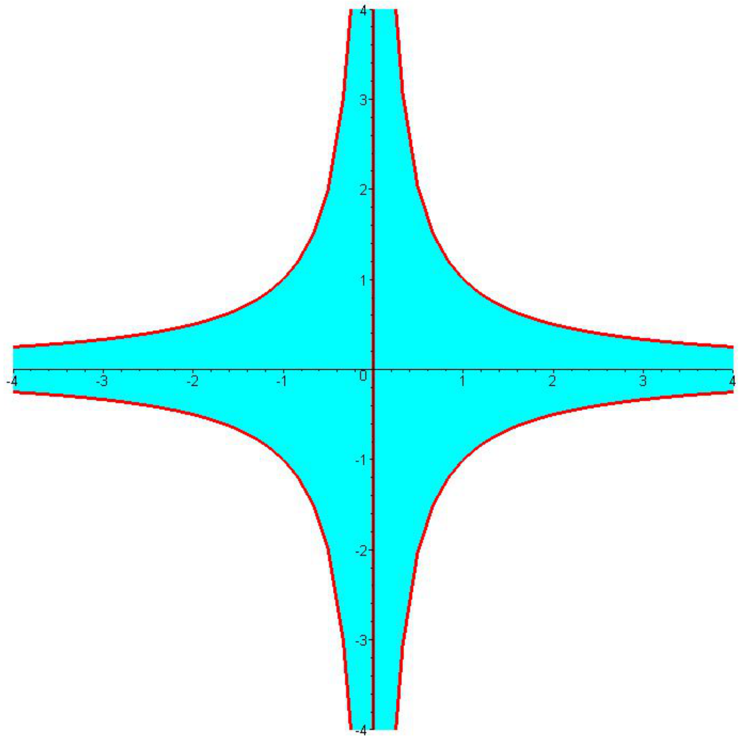
Obrázek 69: $x < 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{x} \geq y \geq \frac{1}{x}$

3. Pokud $x = 0$, dostáváme nerovnice

$$-1 \leq 0 \leq 1,$$

které jsou zřejmé svou platností.

Definiční obor funkce je tedy sjednocením všech tří případů. Grafická podoba včetně hranic je na obrázku (70).



Obrázek 70: definiční oboru funkce $F(x, y) = \arcsin(xy)$

3.44 Příklad 44

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \arcsin(y + 4x) \tag{75}$$

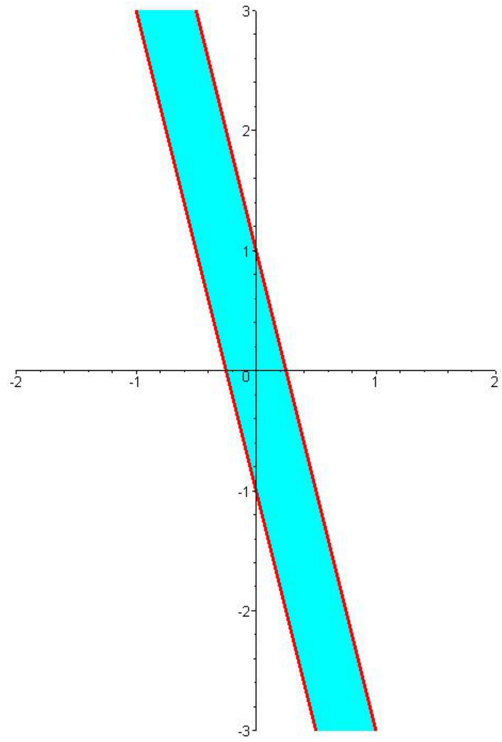
Funkce arcsin je definována pro argumenty z intervalu $\langle -1; 1\rangle$. Odtud plyne řešení

$$-1 \leq y + 4x \leq 1.$$

Jednoduchou úpravou dostáváme omezení v podobě

$$-1 - 4x \leq y \leq 1 - 4x.$$

Z grafického hlediska se jedná o pás mezi rovnoběžkami $y = -1 - 4x$ a $y = 1 - 4x$. Definiční obor funkce je tedy na obrázku (71).



Obrázek 71: definiční obor funkce $F(x,y) = \arcsin(y + 4x)$

3.45 Příklad 45

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \arcsin(x^2 + y^2 + 1) \tag{76}$$

Funkce arcsin je definována na intervalu $\langle -1; 1\rangle$. Odtud řešíme a upravujeme

$$\begin{array}{rcccl} -1 & \leq & x^2 + y^2 + 1 & \leq & 1 \\ -2 & \leq & x^2 + y^2 & \leq & 0. \end{array} \tag{77}$$

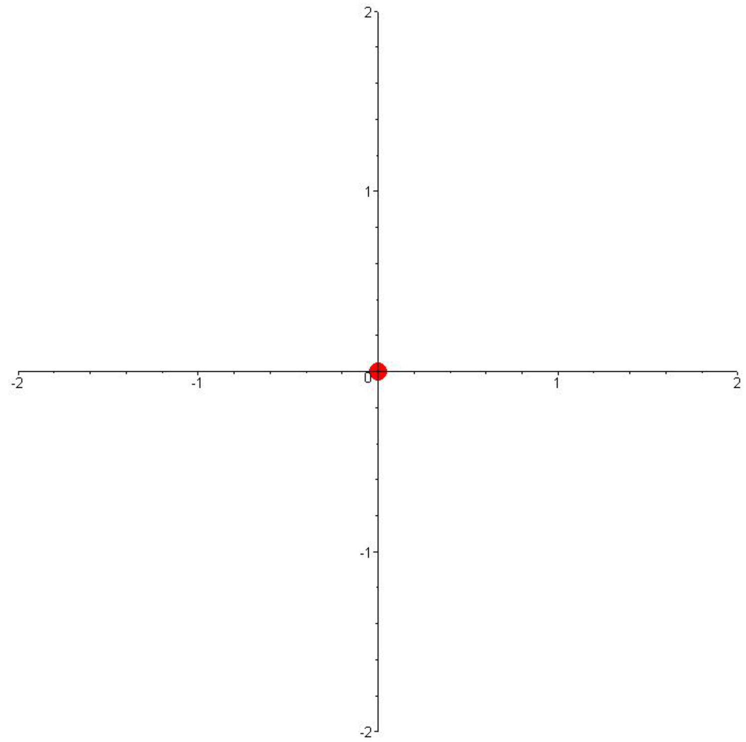
Podmínce

$$x^2 + y^2 \geq -2$$

vyhovuje celý prostor $\mathbb{R}^2$.
Podmínce

$$x^2 + y^2 \leq 0$$

vyhovuje pouze bod $[0; 0]$.
Konečná podoba definičního oboru funkce, která splňuje podmínku (77), je znázorněna na obrázku (72).



Obrázek 72: definiční obor funkce $F(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 + 1)$

3.46 Příklad 46

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 1) \tag{78}$$

Funkce arcsin je definována pro argumenty z intervalu $\langle -1; 1\rangle$. Odtud řešíme a upravujeme

$$\begin{array}{rcccl} -1 & \leq & x^2 + y^2 - 1 & \leq & 1 \\ 0 & \leq & x^2 + y^2 & \leq & 2. \end{array} \tag{79}$$

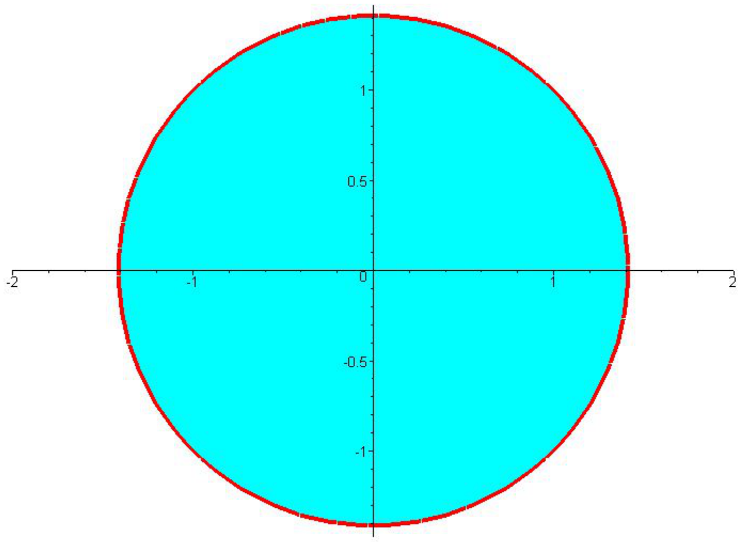
Podmínce

$$x^2 + y^2 \geq 0$$

vyhovuje celý prostor $\mathbb{R}^2$.
Křivka

$$x^2 + y^2 = 2$$

představuje kružnici se středem $S = [0; 0]$ a poloměrem $r = \sqrt{2}$. Nás zajímá oblast menší nebo rovna poloměru $r = \sqrt{2}$, což je kružnice a její vnitřní část.
Konečná podoba definičního oboru funkce, která splňuje podmínku (79), je znázorněna na obrázku (73).



Obrázek 73: definiční obor funkce $F(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 1)$

3.47 Příklad 47

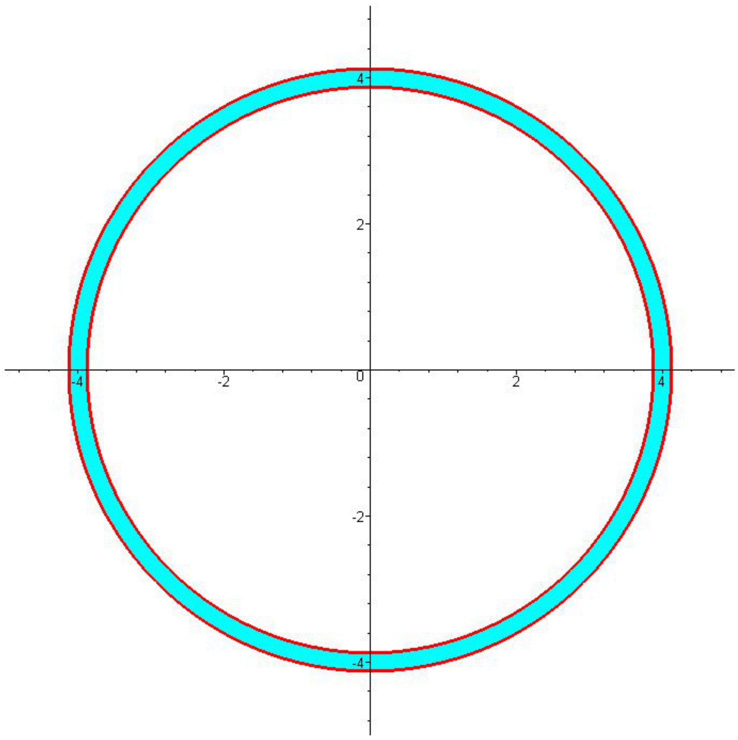
Určete definiční obor funkce

$$F(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 16) \tag{80}$$

Funkce arcsin je definována pro argumenty z intervalu $\langle -1; 1\rangle$. Odtud

$$\begin{array}{rcccl} -1 & \leq & x^2 + y^2 - 16 & \leq & 1 \\ 15 & \leq & x^2 + y^2 & \leq & 17. \end{array} \tag{81}$$

Křivka $x^2+y^2 = 15$ představuje kružnici se středem $S = [0; 0]$ a poloměrem $r = \sqrt{15}$.
Křivka $x^2+y^2 = 17$ představuje kružnici se středem $S = [0; 0]$ a poloměrem $r = \sqrt{17}$.
Podmínce (81) vyhovuje mezikruží výše zmíněných kružnic, včetně kružnic.
Grafická podoba definičního oboru funkce je na obrázku (74).



Obrázek 74: definiční obor funce $F(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 16)$

3.48 Příklad 48

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \arcsin\frac{x+y}{x} \tag{82}$$

Podmínkou

$$x \neq 0$$

zajistíme existenci zlomku.
Funkce arcsin je definována pro argumenty z intervalu $\langle -1; 1\rangle$. Odtud řešíme nerovnice

$$-1 \leq \frac{x+y}{x} \leq 1.$$

Řešení se rozpadá na dvě situace:

1. Pokud násobíme nerovnici číslem kladným,tj. $x > 0$, znaménko nerovnosti se nezmění.
   Úprava vypadá následovně

   $$\begin{array}{rcccl} -x & \leq & x+y & \leq & x \\ -2x & \leq & y & \leq & 0. \end{array} \tag{83}$$

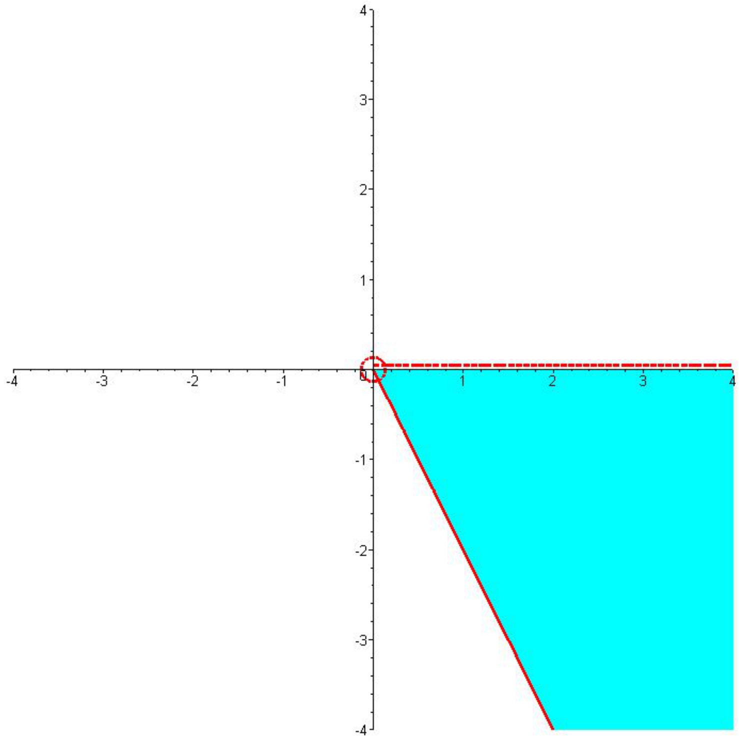
   Podmínce (83) graficky odpovídá prostor ve IV. kvadrantu mezi osou x a přímkou $y = -2x$, obrázek (75).

2. Pokud násobíme nerovnici číslem záporným,tj. $x < 0$, znaménko nerovnosti se změní.
   Úprava vypadá následovně

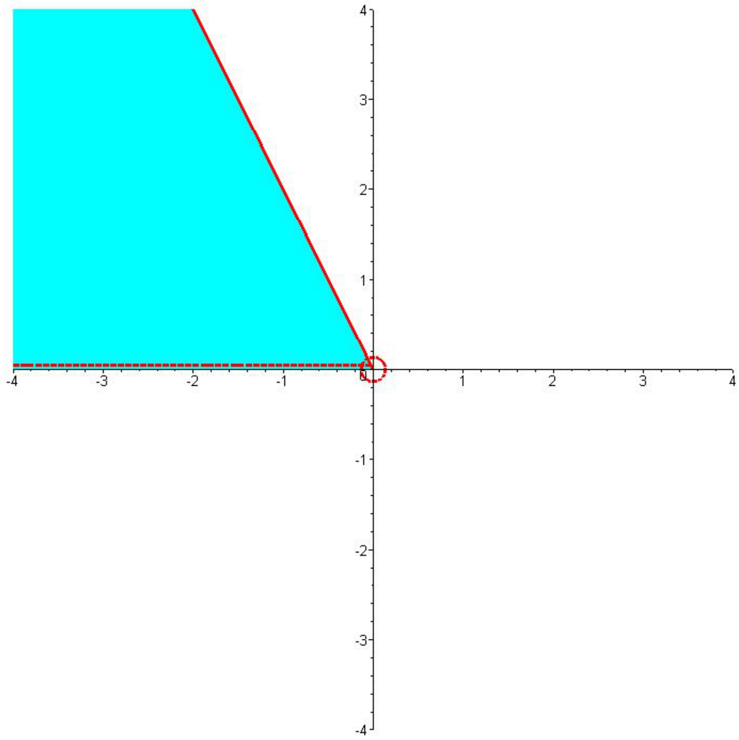
   $$\begin{array}{rcccl} -x & \geq & x+y & \geq & x \\ -2x & \geq & y & \geq & 0. \end{array} \tag{84}$$

   Podmínce (84) graficky odpovídá prostor ve II. kvadrantu mezi osou x a přímkou $y = -2x$, obrázek (76).

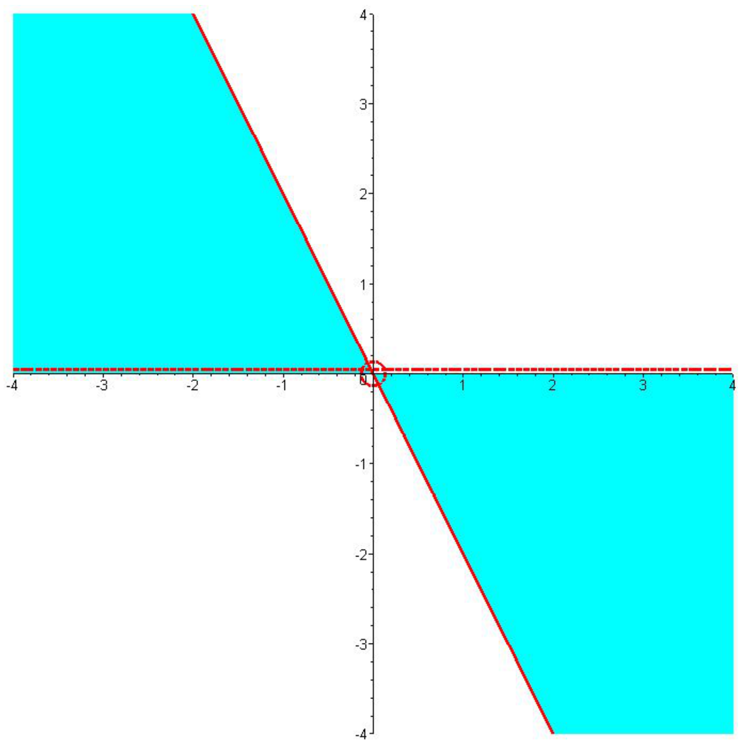
Konečná podoba definičního oboru funkce je spojení podmínek (83) a (84). Grafická podoba definiční obor funkce (82) je na obrázku (77).



Obrázek 75: $x > 0 \quad \wedge \quad -2x \leq y \leq 0$



Obrázek 76: $x < 0 \quad \wedge \quad -2x \geq y \geq 0$



Obrázek 77: definiční obor funkce $F(x,y) = \arcsin \dfrac{x+y}{x}$

3.49 Příklad 49

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \arcsin\frac{x+y}{x-y} \tag{85}$$

Zlomek $\frac{x+y}{x-y}$ je definován, pokud $x \neq y$.(Podmínka vychází ze jmenovatele, kde $x - y \neq 0$.)

Funkce arcsin je definována pro argumenty z intervalu $\langle -1; 1\rangle$. Z toho vyplývá, že musíme vyřešit nerovnice

$$-1 \leq \frac{x+y}{x-y} \leq 1.$$

Pokud vynásobíme nerovnice kladným číslem, znaménko nerovnosti se nám nezmění, pokud bychom ale vynásobili nerovnice záporným číslem, znaménko se změní. Budeme řešit dva případy:

1. $x - y > 0$, resp. $y < x$
   Vynásobením nerovnic výrazem $x - y$ dostaneme nerovnice

   $$-x + y \leq x + y \leq x - y.$$

   Po úpravách máme omezení definičního oboru za podmínek

   $$x \geq 0 \quad \wedge \quad y \leq 0 \quad \wedge \quad y < x.$$

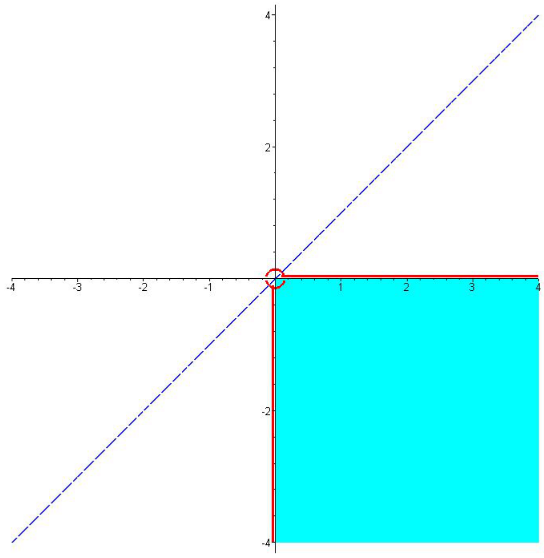
   Výsledkem je IV.kvadrant prostoru $\mathbb{R}^2$, včetně os, ale bez bodu $[0;0]$, který je znázorněn na obrázku (78).

2. $x - y < 0$, resp. $y > x$
   Při úpravě nerovnic se změní znaménko nerovnosti, dostáváme omezení

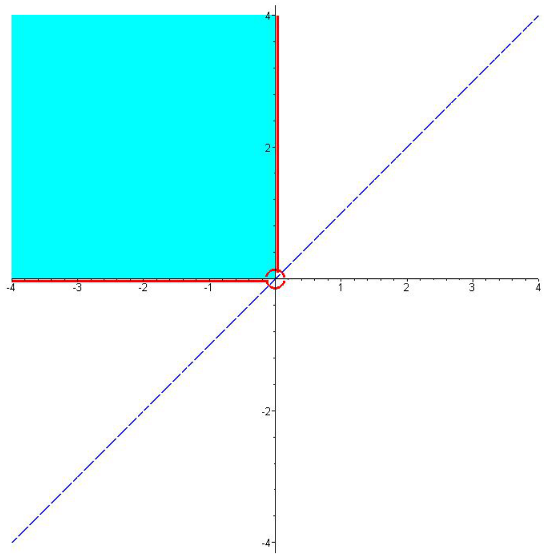
   $$x \leq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0.$$

   Výsledkem je II. kvadrant prostoru $\mathbb{R}^2$, včetně os, ale bez bodu $[0;0]$, který je znázorněn na obrázku (79).

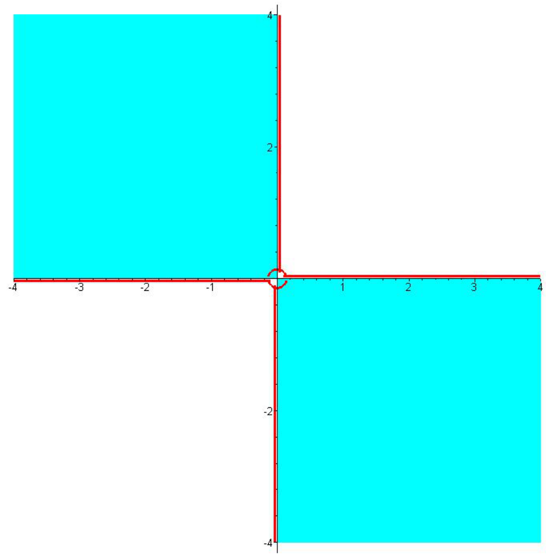
Konečná grafická podoba definičního oboru je sjednocení obou předchozích útvarů, tedy obrázek (80).



Obrázek 78: $x \geq 0 \quad \wedge \quad y \leq 0 \quad \wedge \quad y < x$



Obrázek 79: $x \leq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0 \quad \wedge \quad y > x$



Obrázek 80: definiční obor funkce $F(x,y) = \arcsin\dfrac{x+y}{x-y}$

3.50 Příklad 50

Určete definiční obor funkce

$$F(x, y) = \arccos \frac{x-1}{y} \tag{86}$$

Definiční obor bude omezen zlomkem a funkcí arccos.
Ze zlomku plyne

$$y \neq 0.$$

Funkce arccos je definována na intervalu $\langle -1; 1 \rangle$, tudíž musíme vyřešit nerovnice

$$-1 \leq \frac{x-1}{y} \leq 1.$$

Abychom správně upravili nerovnice, musíme se zaměřit na dvě situace:

1. $y > 0$
   Protože $y > 0$ nemění se při úpravě nerovnice násobením proměnnou y znaménko nerovnosti.
   Tudíž po úpravě nerovnic dostáváme

   $$y \geq 1 - x \quad \wedge \quad y \geq x - 1.$$

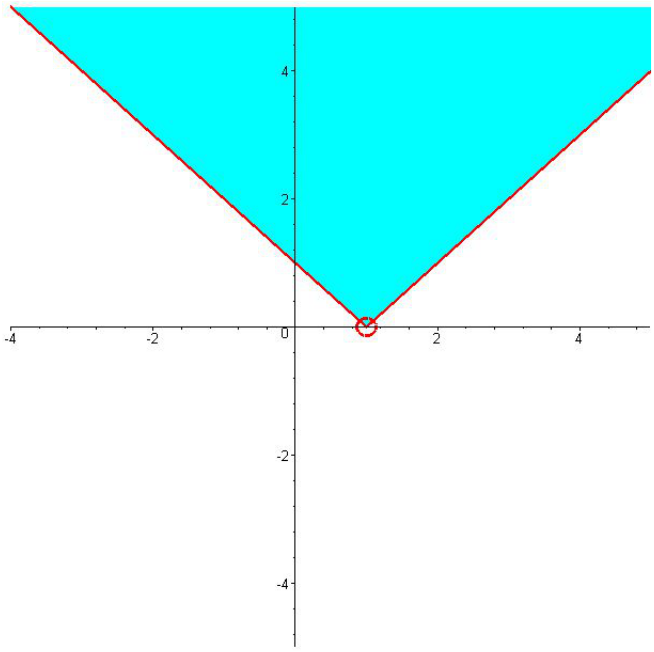
   Grafická podoba je na obrázku (81).

2. $y < 0$
   Při úpravě násobení nerovnic proměnnou $y < 0$ se obrátí znaménka nerovnosti.
   Tedy dostáváme

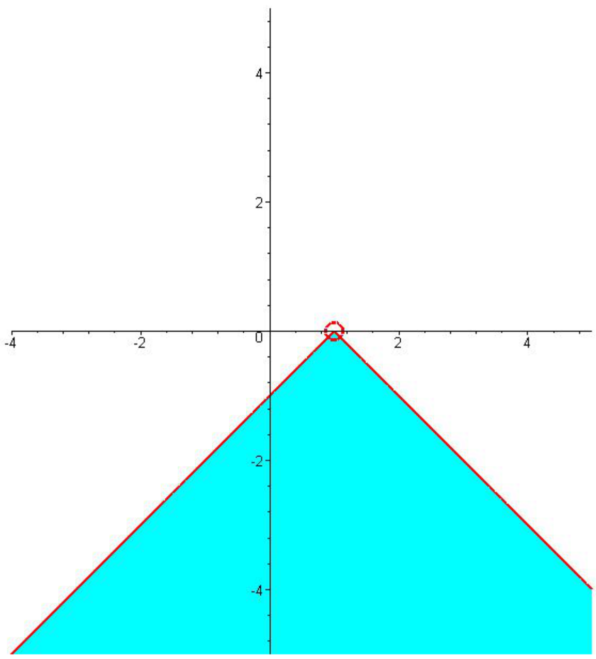
   $$y \leq 1 - x \quad \wedge \quad y \leq x - 1.$$

   Grafická podoba je na obrázku (82).

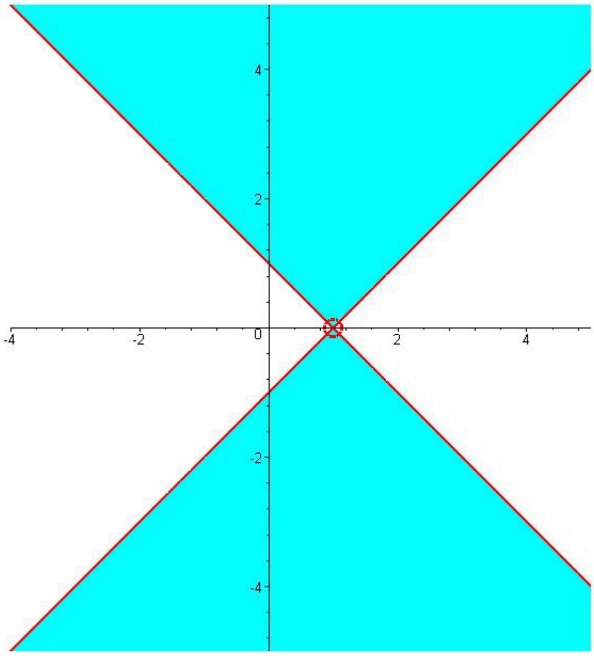
Definiční obor funkce (86) je tedy sjednocení útvarů z obrázků (81) a (82). Konečná podoba definičního oboru je znázorněna na obrázku (83).



Obrázek 81: $y > 0 \quad \wedge \quad y \geq 1 - x \quad \wedge \quad y \geq x - 1$



Obrázek 82: $y < 0 \quad \wedge \quad y \leq 1 - x \quad \wedge \quad y \leq x - 1$



Obrázek 83: definiční obor funce $F(x,y) = \arccos \dfrac{x-1}{y}$

3.51 Příklad 51

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \arccos\frac{x}{x+y} \tag{87}$$

Jako první musíme zajistit existenci zlomku.
Jmenovatel musí být různý od 0. Tedy

$$x \neq -y.$$

Funkce arccos je definována pro argumenty z intervalu $\langle -1; 1\rangle$. Z toho vyplývá, že musíme vyřešit nerovnice

$$-1 \leq \frac{x}{x+y} \leq 1.$$

Rozlišíme dva případy vynásobení nerovnic:

1. Pokud jmenovatel $x+y>0$, tedy $y>-x$, znaménka nerovnosti se nezmění. Po vynásobení dostáváme

   $$-x-y \leq x \leq x+y.$$

   Z řešení první nerovnice dostáváme

   $$\begin{aligned} -x-y &\leq x \\ -y &\leq 2x \\ y &\geq -2x. \end{aligned} \tag{88}$$

   Obdobně vyřešíme druhou nerovnici

   $$\begin{aligned} x &\leq x+y \\ y &\geq 0 \end{aligned} \tag{89}$$

   Grafická podoba první části podmínek je na obrázku (84).

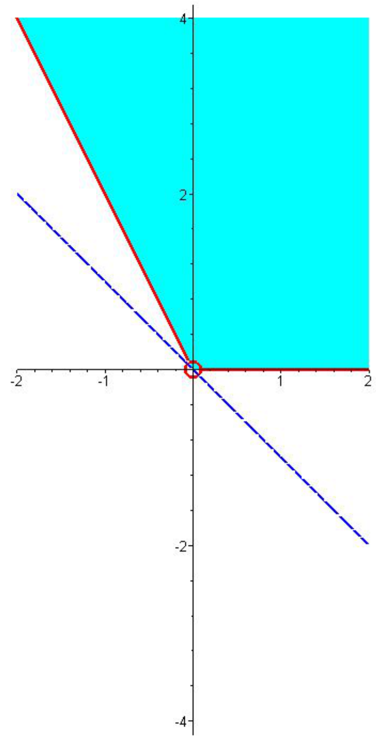
2. Pokud jmenovatel $x+y<0$, tedy $y<-x$, znaménka nerovnosti se změní. Po vynásobení dostáváme nerovnice

   $$-x-y \geq x \geq x+y.$$

   Analogickým řešením jako v prvním případě dostáváme konečnou podobu podmínek řešitelnosti ve tvaru

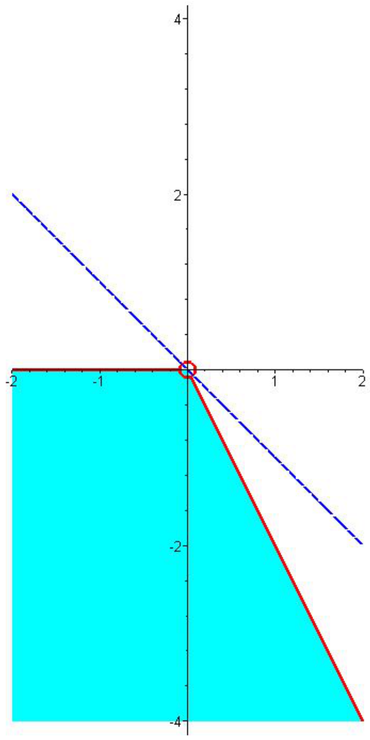
   $$y \leq -2x \quad \wedge \quad y \leq 0.$$

   Grafická podoba druhé části podmínek je na obrázku (85).

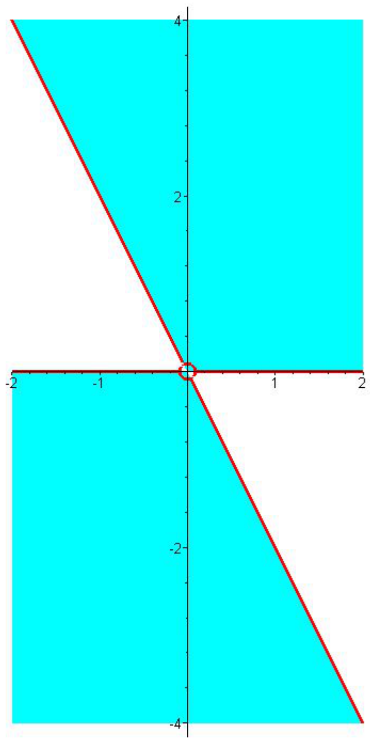


Obrázek 84: $y > -x \quad \wedge \quad y \geq -2x \wedge \quad y \geq 0$

Konečná podoba definičního oboru funkce je sjednocení útvarů z obrázků (84) a (85), což je na obrázku (86).
Podmínka $y > -x$, resp. $y < -x$, nemá v tomto řešení vliv - přímka $y = -x$ je na obrázcích pouze kvůli lepší orientaci.



Obrázek 85: $y < -x \quad \wedge \quad y \leq -2x \wedge \quad y \leq 0$



Obrázek 86: definiční obor funkce $F(x, y) = \arccos \dfrac{x}{x+y}$

3.52 Příklad 52

Určete definiční obor funkce

$$F(x, y) = \sqrt{y - 2x + 1} + \arccos x^2 \tag{90}$$

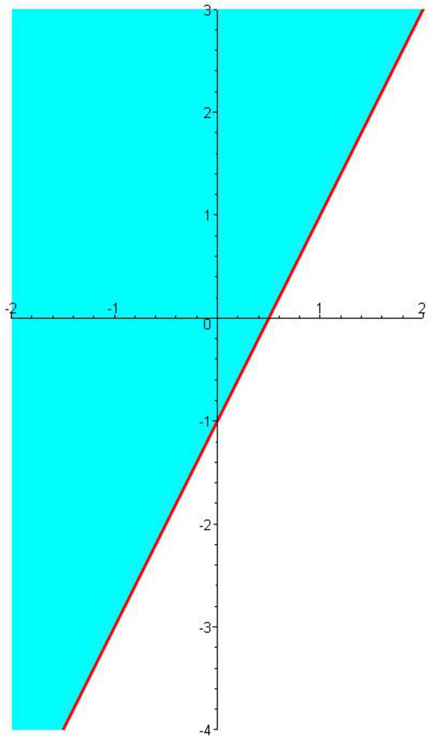
Odmocnina je definována pro nezáporná čísla. Z toho vyplývá, že hledáme řešení nerovnice

$$y - 2x + 1 \geq 0.$$

Po úpravě dostáváme omezení definičního oboru v podobě

$$y \geq 2x - 1,$$

což vidíme na obrázku (87).



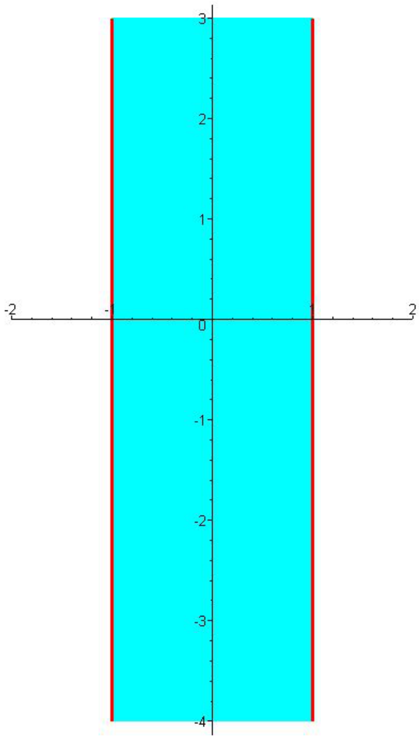
Obrázek 87: $y \geq 2x - 1$

Funkce arccos je definována pro argumenty z intervalu $\langle -1; 1\rangle$. Odtud potřebujeme

$$-1 \leq x^2 \leq 1.$$

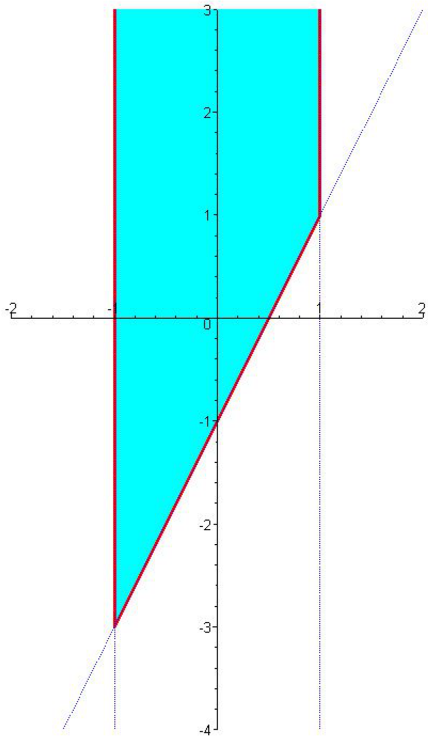
Úpravou dostáváme omezení v podobě

$$-1 \leq x \leq 1,$$



Obrázek 88: $-1 \leq x \leq 1$

které je na obrázku (88).
Konečná podoba definičního oboru funkce je průnik obrázků (87) a (88). Průsečíky přímek vyhovují rovnicím $x = 1$ a $y = 2x - 1$, resp. $x = -1$ a $y = 2x - 1$. Body, ve kterých se přímky protínají, jsou tedy $[1; 1]$ a $[-1; -3]$. Grafickou podobu definičního oboru vidíme na obrázku (89).



Obrázek 89: definiční obor funkce $F(x, y) = \sqrt{y - 2x + 1} + \arccos x^2$

3.53 Příklad 53

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \arcsin(2y - 2x - 3) \cdot \ln(y - x^2 - 1) \tag{91}$$

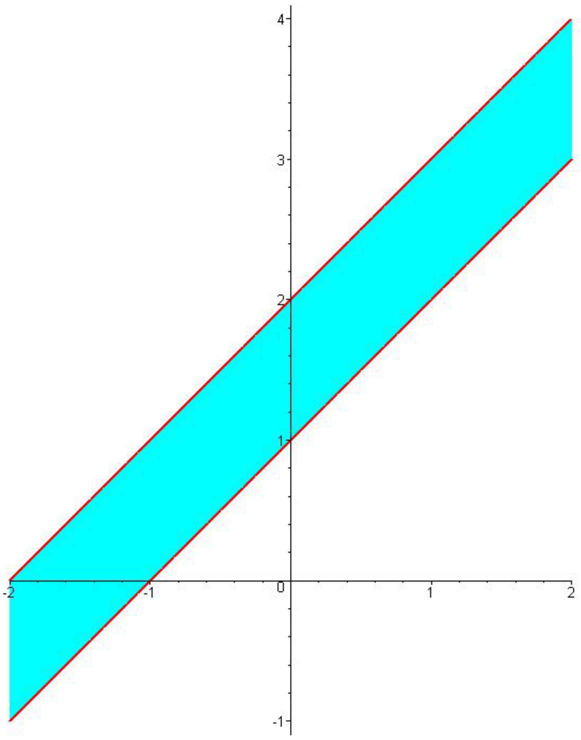
Funkce arcsin je definována pro argumenty z intervalu $\langle -1; 1\rangle$. Odtud řešíme nerovnice

$$-1 \le 2y - 2x - 3 \le 1.$$

Upravíme

$$\begin{array}{rcccl} 2x+2 & \le & 2y & \le & 2x+4 \\ x+1 & \le & y & \le & x+2. \end{array} \tag{92}$$

Nerovnicím (92) odpovídá pás mezi rovnoběžkami ohraničený přímkami $y = x + 1$ a $y = x + 2$. Rovinný pás je znázorněn na obrázku (90).



Obrázek 90: $x + 1 \le y \le x + 2$

Definiční obor logaritmické funkce je interval $(0; \infty)$. Z řešení nerovnice

$$y - x^2 - 1 > 0,$$

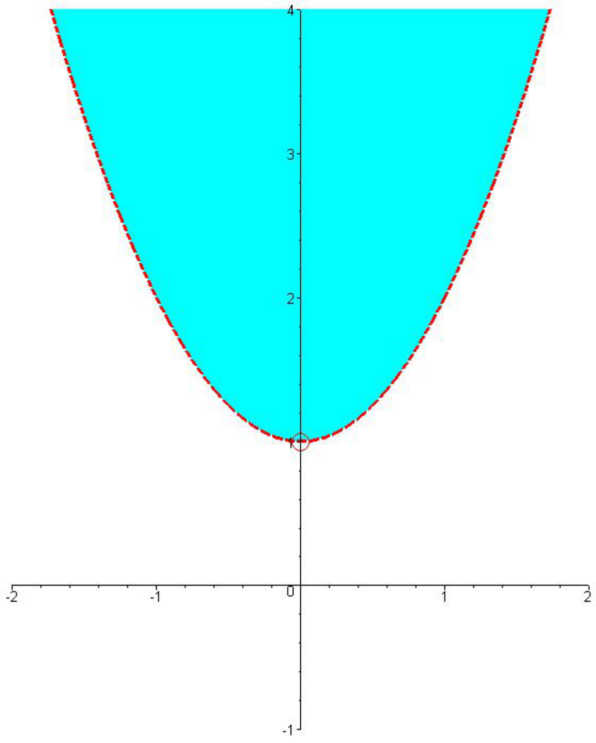
vyplývá omezení v podobě

$$y > x^2 + 1.$$

Rovnice

$$y = x^2 + 1$$

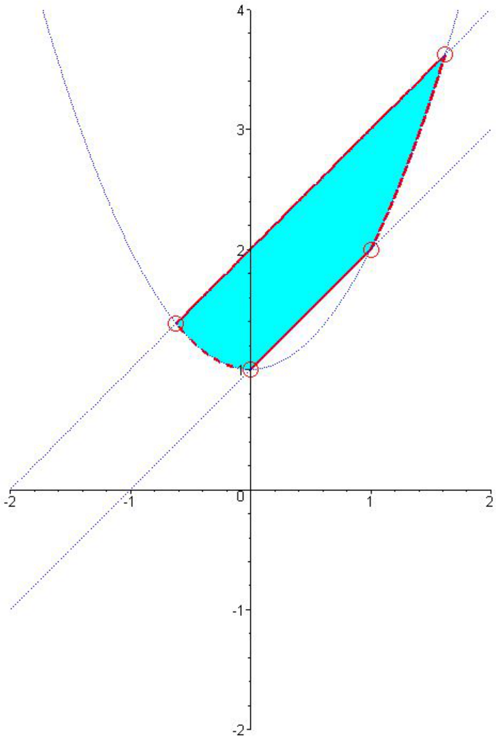
představuje konvexní parabolu,která má posunutý vrchol po y-ové ose do hodnoty 1. Definiční obor funkce omezený funkcí $\ln(y - x^2 - 1)$ je na obrázku (91).



Obrázek 91: $y > x^2 + 1$

Průnikem obou obrázků dostáváme konečnou grafickou podobu definičního oboru funkce - obrázek (92). Průsečíky paraboly $y = x^2 + 1$ s přímkou $y = x + 1$ určíme pomocí programu Maple.

```
>rce1:=y=x^2+1;
                                          2
                          rce1 := y = x  + 1

> rce2:=y=x+1;
                          rce2 := y = x + 1

> rce3:=y=x+2;
                          rce3 := y = x + 2
```



Obrázek 92: definiční obor funkce $F(x, y) = \arcsin(2y - 2x - 3) \cdot \ln(y - x^2 - 1)$

```
> solve({rce1,rce2},{x,y});
                    {y = 1, x = 0}, {y = 2, x = 1}
```

Průsečíky jsou body $[0; 1]$ a $[1; 2]$.
Také průsečíky paraboly $y = x^2 + 1$ s přímkou $y = x + 2$ určíme pomocí programu Maple.

```
>solve({rce1,rce3},{x,y});
                        2
  {x = RootOf(-5 _Z + _Z  + 5, label = _L9) - 2,


                             2
        y = RootOf(-5 _Z + _Z  + 5, label = _L9)}
```

Maple nedává nám srozumitelné výsledky. Průsečíky musí splňovat zároveň rovnice $y = x^2 + 1$ a $y = x + 2$. Po dosazení rovnice přímky do rovnice paraboly dostáváme rovnici

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Z programu Maple získáme x-ové souřadnice:

```
> y:=x^2-x-1;

                                     2
                               y := x  - x - 1
> solve(y=0,x);

                                  1/2         1/2
                                 5           5
                         1/2 + ----, 1/2 - ----
                                  2           2
```

Získali jsme x-ové souřadnice bodů. Pro získání y-ových souřadnic dosazíme získané hodnoty do rovnice přímky:

```
> y1:=1/2+1/2*5^(1/2) +2;

                                         1/2
                                        5
                               y1 := 5/2 + ----
                                         2

> y2:=1/2-1/2*5^(1/2)+2;

                                         1/2
                                        5
                               y2 := 5/2 - ----
                                         2
```

Hledané průsečíky mají souřadnice $\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ a $\left[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

3.54 Příklad 54

Určete definiční obor funkce

$$F(x,y) = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arccos(1-y) \tag{93}$$

Existenci zlomku zajistíme podmínkou $y^2 \neq 0$, tedy

$$y \neq 0.$$

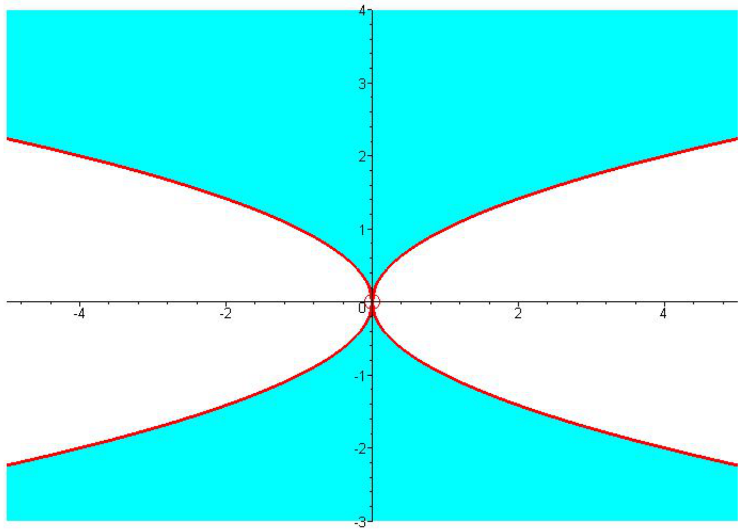
Funkce arcsin je definována pro argumenty z intervalu $\langle -1; 1 \rangle$.
Odtud řešíme

$$-1 \leq \frac{x}{y^2} \leq 1.$$

Výraz y^2 je vždy kladný, tudíž se nemusíme zabývat dvěma případy násobením nerovnic kladným nebo záporným číslem. Podmínku upravíme na tvar

$$-y^2 \leq x \leq y.$$

Což graficky znázorníme na obrázku (93).



Obrázek 93: $y \neq 0 \quad \wedge \quad -y^2 \leq x \leq y$

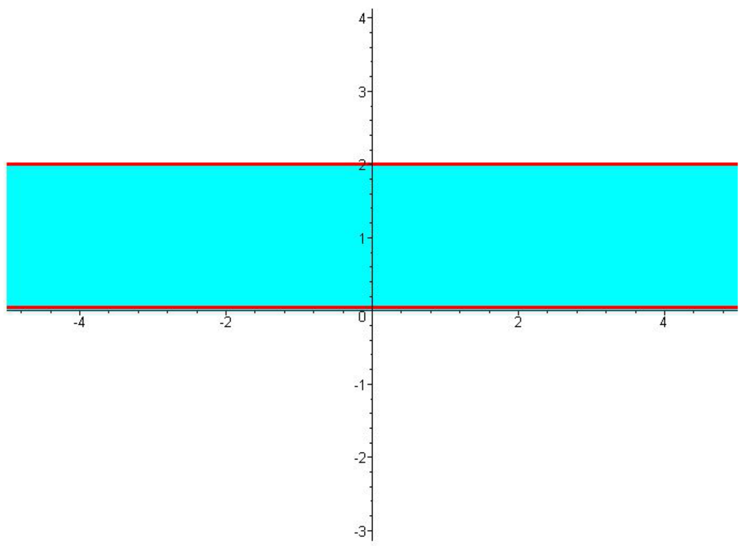
Funkce arccos je definována pro argumenty z intervalu $\langle -1; 1\rangle$.
Odtud potřebujeme

$$-1 \leq 1 - y \leq 1.$$

Po úpravě dostáváme podmínky ve tvaru

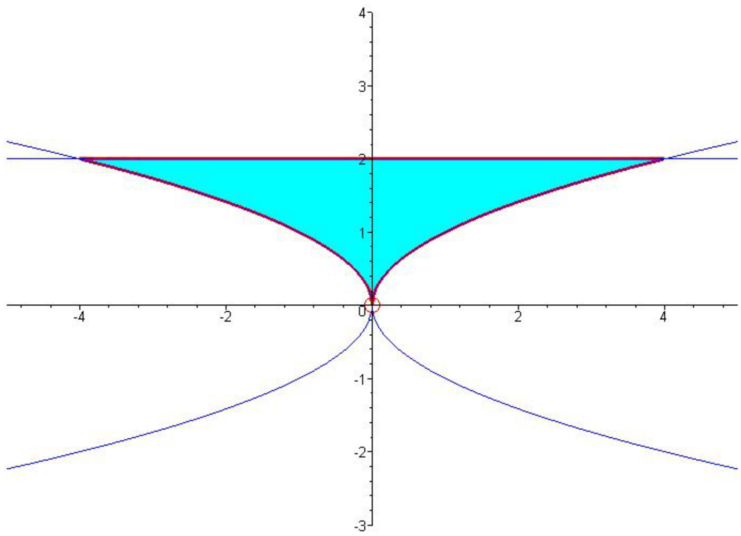
$$0 \leq y \leq 2.$$

Což graficky znázorňuje uzavřený pás mezi hodnotami 0 a 2 na y-ové ose, obrázek (94).



Obrázek 94: $0 \leq y \leq 2$

Průnikem útvarů z obrázků (93) a (94) dostáváme konečnou grafickou podobu definičního oboru funkce, obrázek (95).
Body, v nichž se křivky protínají, jsou $[4; 2]$ a $[-4; 2]$. Body dotyku křivek vyhovují zároveň nerovnicím $y^2 = x, y = 2$, resp. $-y^2 = x, y = 2$.



Obrázek 95: definiční obor funkce $F(x, y) = \arcsin \dfrac{x}{y^2} + \arccos(1 - y)$

4 Přehled řešených příkladů

příklad	**neomezená**	**zlomek**	**odmocnina**	e	ln	sin	cos	arcsin	arccos
1	X								
2	X								
3	X								
4		X							
5		X							
6		X							
7		X							
8		X							
9		X							
10			X						
11			X						
12			X						
13			X						
14			X						
15			X						
16			X						
17		X	X						
18		X	X						
19		X	X						
20		X	X						
21		X	X						
22		X	X						
23		X	X						
24		X	X						
25		X		X					
26		X				X			
27		X				X			

příklad	**neomezená**	**zlomek**	**odmocnina**	e	ln	sin	cos	arcsin	arccos
28		X				X			
29			X				X		
30					X				
31					X				
32					X				
33					X				
34					X				
35					X				
36					X				
37					X				
38		X			X				
39		X	X		X				
40				X	X				
41				x	x				
42								X	
43								X	
44								X	
45								X	
46								X	
47								X	
48		X						X	
49		X						X	
50		X							X
51		X							X
52			X						X
53					X			X	
54		X						X	X

Literatura

[1] DĚMIDOVIČ, P. B., *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy.* Havlíčkův Brod: Fragment, 2003. ISBN 80-7200-587-1.

[2] GILMANN, L., MCDOWELL, R. H.; přeložil ADÁMEK, J. *Matematická analýza.* 2.vydání, Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1983. ISBN 04-013-83.

[3] JARNÍK, V. *Diferenciální počet 1.* 6. vydání, Praha: Academia, 1974.

[4] MAPLESOFT. *Maple user Manual*: Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc, ©2011. ISBN 978-1-926902-07-4.

[5] NEČAS, Jiří a kol. *Aplikovaná matematika 1, A až L.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1977. ISBN 04-044-77.

[6] OETIKER, T. a kol. *Né příliš stručný úvod do systému LaTEX 2ε.* 1998. Dostupné také z *http://www.penguin.cz/~kocer/texty/lshort2e/lshort2e-cz.pdf*

[7] POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky.* 8.vydání, Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-267-8.

[8] REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky 1.* 5. vydání, Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1988. ISBN 04-022-88-01.

[9] ŠKRÁŠEK, J., TICHÝ, Z. *Základy aplikované matematiky 2.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1986. ISBN 04-513-86.

[10] ŽÁK, V. *Matematické výpočty se systémem Maple.* Dostupné také z *http://www.vladimirzak.com/maple/*

[11] *Drsný úvod do LaTEXu.* 2005. Dostupné také z *http://apfyz.upol.cz/ucebnice/down/mini/drslat.pdf*

Seznam obrázků