



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STAVEBNÍ**

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

**ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY**

INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

**VYUŽITÍ IDENTIFIKACE PARAMETRŮ  
NELINEÁRNÍCH MATERIÁLOVÝCH MODELŮ PRO  
ANALÝZU BETONOVÝCH KONSTRUKCÍ**

USING THE IDENTIFICATION OF PARAMETERS OF NONLINEAR MATERIAL MODELS FOR  
ANALYSIS OF CONCRETE STRUCTURES

**DISERTAČNÍ PRÁCE**

DOCTORAL THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Ing. Petr Král

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

doc. Ing. PETR HRADIL, Ph.D.

BRNO 2022



## ABSTRAKT

Předkládaná práce je zaměřena na numerické modelování chování (odezvy) betonu s využitím nelineárních materiálových modelů (konstitutivních vztahů) a na identifikaci hodnot vstupních parametrů těchto materiálových modelů. V současnosti existuje celá řada matematicky zformulovaných konstitutivních vztahů určených nejen pro simulování odezvy tvárných či křehkých materiálů, ale také materiálů kvazi-křehkých. Konstitutivní vztahy pro kvazi-křehké materiály vycházejí z různých teorií (teorie plasticity, koncept mechaniky poškození, nelineární lomová mechanika) a jejich komplexnost se odvíjí od zvoleného typu řešiče. Obecným problémem při využívání těchto konstitutivních vztahů je nutnost definice hodnot jejich vstupních parametrů, kterých tyto modely zahrnují obvykle velmi značné množství a které často postrádají fyzikální význam s tím, že je jejich význam ryze matematického či experimentálního charakteru. Zmíněný problém se stupňuje s narůstající komplexností materiálových modelů, ke které dochází při přechodu z formulace pro klasickou metodu konečných prvků (MKP) na formulaci pro explicitní MKP, a značně znesnadňuje jejich praktickou aplikaci. Cílem této práce je představit přístup, jak se s tímto problémem u vybraných nelineárních konstitutivních vztahů vypořádat. Za tímto účelem je práce rozdělena do tří hlavních tematických částí.

První hlavní část práce je zaměřena na identifikaci hodnot vstupních parametrů Continuous surface cap modelu. Záměrem této části je nejprve ověřit efektivnost a přesnost zvolených identifikačních postupů. Následuje identifikace hodnot parametrů modelu na základě experimentálních dat za účelem modifikace odvozených kalibračních křivek. Identifikace hodnot vstupních parametrů je v této části demonstrována na obou verzích modelu, přičemž jsou využita data ze zkoušek pevnosti betonu v tahu (prostý tah, excentrický tah, tah za ohybu).

Druhá hlavní část práce se zaměřuje na identifikaci hodnot vstupních parametrů Karagozian & Case concrete modelu na základě experimentálních dat odpovídajících zkoušce pevnosti betonu v třiosém tlaku. Získaná data jsou validována na dalších experimentálních datech.

Poslední hlavní část práce je zaměřena na algoritmizaci vybraných konstitutivních vztahů vhodných pro matematické modelování odezvy kvazi-křehkých materiálů. K algoritmizaci jsou použity nástroje programu Matlab. Konstitutivní vztahy jsou v rámci této části testovány za účelem nalezení odpovídajících hodnot vstupních parametrů, přičemž součástí je také validace simulovaných dat.

## KLÍČOVÁ SLOVA

Beton; materiálový model; konstitutivní vztahy; explicitní MKP; numerická simulace; identifikace hodnot parametrů; analýza citlivosti; optimalizace

## **ABSTRACT**

The presented thesis is focused on numerical modeling of concrete behavior (response) using nonlinear material models (constitutive relations) and on identification of input parameter values of these material models. Nowadays, there are a number of mathematically formulated constitutive relations intended not only to simulate the response of ductile or brittle materials, but also quasi-brittle materials. The constitutive relations for quasi-brittle materials are based on various theories (plasticity theory, the concept of damage mechanics, nonlinear fracture mechanics) and their complexity depends on the chosen type of solver. A general problem in the use of these constitutive relations is the need to define the values of their input parameters which these models usually include a very large number, and which often lack physical meaning, with their meaning being purely mathematical or experimental. This problem escalates with the increasing complexity of material models, which occurs in the transition from the formulation for the classic finite element method (FEM) to the formulation for the explicit FEM, and greatly complicates their practical application. The aim of this thesis is to present an approach how to deal with this problem for selected nonlinear constitutive relations. For this purpose, the thesis is divided into three main thematic parts.

The first main part of the thesis is focused on the identification of input parameter values of the Continuous Surface Cap model. The purpose of this part is to first verify the effectivity and accuracy of the selected identification procedures. The following is the identification of model parameter values based on experimental data in order to adjust the derived calibration curves. In this part, the identification of input parameter values is demonstrated on both versions of the model. Data from the direct tensile test, compact tension test and four-point bending test of concrete are used.

The second main part of the thesis focuses on the identification of input parameter values of the Karagozian & Case Concrete model on the basis of experimental data corresponding to the triaxial compression strength test of concrete. The obtained data are validated on other experimental data.

The last main part of the thesis is focused on the programming of selected constitutive relations suitable for mathematical modeling of the response of quasi-brittle materials. Matlab tools are used for programming. Within this part, constitutive relations are tested in order to find the appropriate input parameter values, and the validation of simulated data is also a part of it.

## **KEYWORDS**

Concrete; material model; constitutive relations; explicit FEM; numerical simulation; identification of parameter values; sensitivity analysis; optimization

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

Ing. Petr KRÁL. *Využití identifikace parametrů nelineárních materiálových modelů pro analýzu betonových konstrukcí*. Brno, 2022. 129 s. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce doc. Ing. Petr Hradil, Ph.D.



## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že jsem disertační práci s názvem *Využití identifikace parametrů nelineárních materiálových modelů pro analýzu betonových konstrukcí* zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 29. 7. 2022

---

Ing. Petr Král  
autor práce





## PODĚKOVÁNÍ

V první řadě bych touto cestou rád poděkoval svému školiteli doc. Ing. Petru Hradilovi, Ph.D. za vedení a podporu, které se mi dostávalo jak v průběhu tvorby této práce, tak v průběhu celého doktorského studia, a také za velmi lidský a přátelský přístup k mé osobě. Dále bych chtěl poděkovat prof. Ing. Jiřímu Kalovi, Ph.D. za umožnění účasti na grantových projektech v průběhu celého mého doktorského studia, a tedy za zapojení do vědeckovýzkumné činnosti Ústavu stavební mechaniky.

Vřelé díky bych chtěl věnovat také dalším kolegům z Ústavu stavební mechaniky, se kterými jsem v průběhu doktorského studia zažil mnohé neopakovatelné okamžiky, jmenovitě Martinu Kalinovi, Martinu Huškovi, Josefu Květoňovi, Danielu Jindrovi, Hynku Štekbauerovi a Michalu Jedličkovi. Byly to skvělé časy, díky pánové!

V neposlední řadě patří poděkování také mé rodině, přítelkyni a nejbližším přátelům za důvěru a psychickou podporu, kterou mi při tvorbě této práce poskytli.



# Obsah

<b>1 Úvod .....</b>	<b>1</b>
<b>2 Modelování betonu – současný stav problematiky .....</b>	<b>3</b>
2.1 Metody a přístupy.....	3
2.2 Identifikace hodnot vstupních parametrů.....	7
<b>3 Cíle a organizace práce .....</b>	<b>11</b>
<b>I. Continuous surface cap model .....</b>	<b>13</b>
<b>4 Continuous surface cap model – teoretické pozadí .....</b>	<b>15</b>
4.1 Formulace modelu a jeho vstupní parametry .....	15
4.2 Odvození kalibračních křivek pro vstupní parametry .....	25
<b>5 Identifikační studie .....</b>	<b>37</b>
5.1 Referenční data .....	37
5.2 Výpočtový model .....	38
5.3 Proces identifikace hodnot parametrů .....	39
5.3.1 Analýza citlivosti .....	39
5.3.2 Optimalizace .....	42
5.3.3 Shrnutí výsledků .....	46
<b>6 Modifikace kalibračních křivek .....</b>	<b>49</b>
6.1 Experimentální data .....	49
6.2 Výpočtový model .....	50
6.3 Proces identifikace hodnot parametrů .....	52
6.3.1 Analýza citlivosti .....	52
6.3.2 Globální optimalizace .....	55
6.3.3 Výsledky a doporučení .....	57
<b>7 Modifikovaná verze modelu .....</b>	<b>59</b>
7.1 Formulace úlohy a experimentální data .....	59
7.2 Výpočtový model .....	60
7.3 Doplnkové materiálové modely .....	62

7.3.1	Plastic kinematic model .....	62
7.3.2	Linear elastic model .....	63
7.4	Identifikace hodnot parametrů .....	64
7.4.1	Globální optimalizace .....	64
7.4.2	Výsledky a jejich zhodnocení .....	65
<b>II.</b>	<b>Karagozian &amp; Case concrete model .....</b>	<b>69</b>
<b>8</b>	<b>Parametry Karagozian &amp; Case concrete modelu .....</b>	<b>71</b>
<b>9</b>	<b>Identifikace parametrů modelu .....</b>	<b>75</b>
9.1	Referenční (experimentální) data .....	75
9.2	Výpočtový model .....	76
9.3	Proces identifikace hodnot parametrů .....	77
9.3.1	Analýza citlivosti .....	77
9.3.2	Globální optimalizace .....	79
9.3.3	Validace získaných výsledků .....	80
<b>III.</b>	<b>Algoritmizace vybraných konstitutivních vztahů .....</b>	<b>83</b>
<b>10</b>	<b>Teoretické pozadí vybraných konstitutivních vztahů .....</b>	<b>85</b>
10.1	Plochy plasticity .....	85
10.2	Model zpevnění a zákon plastického tečení .....	88
10.3	Ekvivalentní pracovní diagram jednoosé napjatosti .....	89
10.4	Plastický modul zpevnění .....	91
10.5	Přírůstkový tvar konstitutivních rovnic .....	93
<b>11</b>	<b>Algoritmizace a testování v Matlabu, validace .....</b>	<b>95</b>
<b>12</b>	<b>Závěr .....</b>	<b>105</b>
	<b>Literatura .....</b>	<b>109</b>
	<b>Přehled publikačních aktivit .....</b>	<b>117</b>
	<b>Curriculum vitae .....</b>	<b>125</b>

# 1 Úvod

Pochopení procesů odehrávajících se v materiálu v průběhu zatěžování, a s tím souvisejícího chování materiálu, je zcela zásadní úlohou pro vědce a odborníky nejen z oblasti stavebního inženýrství a průmyslu. V současném moderním průmyslu hraje výzkum v oblasti materiálového chování (odezvy materiálu na zatížení) a jeho matematického modelování zcela zásadní roli a je neustále posouván kupředu. Tato oblast výzkumu má svůj počátek cca v polovině 20. století. Její rozvoj, až do podoby, jakou známe dnes, souvisel s vývojem komplexních numerických (matematických) metod ve druhé polovině 20. století a také samozřejmě s kontinuálně rostoucí úrovní výpočetní techniky, která má i v současnosti z hlediska úrovně stále rostoucí tendence a umožňuje nám využívat stále komplexnější přístupy za účelem matematického vyšetřování chování materiálů, a konstrukcí z nich vyrobených, při zatěžování. Aplikace reálného (nelineárního) materiálového chování v rámci počítačového modelování nám v současnosti umožňuje nejen analyzovat chování stavebních konstrukcí, a nejen jich, ve velkém detailu, ale především nám umožňuje navrhovat konstrukce, pro které je přístup s použitím platných norem buď zcela nepoužitelný, nebo příliš konzervativní a v tom důsledku nevýhodný po ekonomické stránce. Významnost vědní oblasti zabývající se materiálovým chováním a jeho matematickým modelováním je tedy zcela zřejmá.

Popis chování materiálu závisí na jeho struktuře a intenzitě zatížení. Z hlediska odezvy materiálu (jak matematické, tak reálné) na vyvíjené zatížení lze obecně materiály rozdělit do tří skupin.

První skupinu tvoří materiály s tzv. duktilní (tvárnou) odezvou. Chování těchto materiálů lze obecně popsat tak, že při zatěžování vykazují s nárůstem deformace nejprve lineárně pružnou odezvu. Tento stav trvá až do okamžiku dosažení určité pevnostní meze, o které obvykle hovoříme jako o tzv. mezi kluzu. Následně u těchto materiálů dochází ke vzniku plastických deformací. Po vzniku plastických deformací a dalším zatěžování obvykle napětí v těchto materiálech dále narůstá (materiály se zpevněním), nebo zůstává konstantní (materiály bez zpevnění), a to až do dosažení meze pevnosti daného materiálu. Pro materiály s duktilní odezvou je tedy typické porušení zplastizováním a lze mezi ně řadit především ocel, případně také jiné kovy, a plasty.

Druhá skupina je tvořena materiály, které se vyznačují tzv. křehkou odezvou. Typické chování takovýchto materiálů je, že při zatěžování vykazují s nárůstem deformace lineárně pružnou odezvu, přičemž tento stav trvá až do okamžiku dosažení meze pevnosti daného materiálu, která se nachází obvykle velmi blízko mezi pružnosti. Po dosažení meze pevnosti dochází u těchto materiálů k okamžitému kolapsu (napětí prudce klesá na nulovou hodnotu), který je typický pro křehké porušení. Mezi materiály s křehkou odezvou lze řadit např. sklo.

Třetí a poslední skupinu tvoří materiály s tzv. kvazi-křehkou odezvou. Tyto materiály se při zatěžování s nárůstem deformace typicky vyznačují nejprve buď lineárně pružným, nebo pružnoplastickým chováním, a to až do okamžiku dosažení maximální pevnosti daného materiálu. Poté následuje kolaps materiálu, který ovšem není okamžitý (jako v případě křehkých materiálů), ale je pozvolný, kdy po překročení maximální pevnosti dochází při dalším nárůstu deformace k postupnému snižování schopnosti materiálu přenášet zatížení (napětí v materiálu s dalším nárůstem deformace pozvolna klesá). Tento jev bývá nazýván jako tzv. změkčování materiálu a je typický právě pro materiály s kvazi-křehkým porušováním. Do této třetí skupiny materiálů lze zařadit např. kámen, různé druhy hornin či zemin, led a hlavně materiál, který je v současnosti velmi hojně využíván ve stavebnictví, beton.

Počítačové modelování odezvy betonu na zatížení je v dnešní době umožněno prostřednictvím celé řady metod a přístupů. To, co však mají prakticky všechny metody a přístupy společné, je skutečnost, že jejich využití vyžaduje definování číselných hodnot vstupních parametrů, na kterých je posléze závislá výsledná počítačová odezva betonu. Vzhledem k povaze určitých parametrů (a často také vzhledem k jejich množství) je však nutnost definovat jejich číselné hodnoty tak, aby výsledná počítačová odezva co možná nejlépe odpovídala reálné odezvě betonu, mnohdy velmi netriviálním a komplexním úkolem, který lze z praktického hlediska úspěšně vyřešit v podstatě pouze s využitím komplexních nástrojů určených pro identifikaci hodnot parametrů, což je problematika, kterou se tato práce zabývá.

## 2 Modelování betonu – současný stav problematiky

Beton se z hlediska své struktury na makroskopické úrovni řadí mezi tzv. heterogenní materiály. Ve své podstatě se beton skládá ze dvou hlavních složek, kterými jsou kamenivo a cementová matrice, která obaluje jednotlivá zrna kameniva. Samotné kamenivo se pak nejčastěji skládá minimálně ze dvou složek, kterými jsou písek a štěrk (případně kamenná drť). Cementová matrice je sama o sobě složena z cementu a vody. Daná struktura betonu jednoznačně ovlivňuje jeho chování, které je ve své podstatě definováno jako pružnoplastické s kvazi-křehkým porušením.

Využití betonu za účelem výstavby nových stavebních konstrukcí je v současnosti stále se rozvíjející a rozšiřující oblastí. Obliba betonu jako stavebního materiálu spočívá především v možnostech jeho tvarové variability, která nám umožňuje vytvářet konstrukce v podstatě jakéhokoliv tvaru v závislosti pouze na možnostech výroby bednění. Použití betonu se již v minulosti neomezovalo pouze na výrobu nenosných či nosných konstrukcí v rámci běžné výstavby, pro které bylo podmínkou přenesení především statického zatížení, ale přesahovalo také do oblastí výroby vojenských a ochranných konstrukcí, které musely odolávat zatížení dynamickému, ne-li přímo rázovému. Nejinak je tomu i v současnosti. Nicméně požadavky na bezpečnost, trvanlivost a ekonomičnost návrhu betonových konstrukcí se od minulosti do současnosti výrazně zpřísnily. Tato skutečnost dnes vede stavební inženýry a výpočetní specialisty ke zpřesňování návrhu betonových konstrukcí prostřednictvím pokročilého matematického modelování (Wu a kol. 2015, Zhang a kol. 2016, Moscoso a kol. 2017).

### 2.1 Metody a přístupy

Matematické modelování chování betonu při zatěžování je v současnosti umožněno prostřednictvím celé řady metod a přístupů. Nejzákladnější způsob, jakým lze přistupovat k úloze modelování chování betonu a konstrukcí z něj vyrobených, je využití analytických modelů, které se za účelem analýzy jednoduchých konstrukcí běžně využívají ve stavební praxi v kombinaci s posuzováním dle platných norem. Výhodou analytických (spojitých) modelů je jejich jednoduchost, nicméně jejich využití je omezeno v podstatě výhradně na prutové, případně plošné, konstrukce. Materiálové chování je u analytických modelů z hlediska okamžitého monotónního zatěžování omezeno pouze na chování lineárně pružné, kde při modelování nevyztuženého betonu je rozhodujícím faktorem stav, při kterém je dosažena pevnost betonu v tahu (dle normy ČSN EN 1992-1-1 (2006) se jedná o charakteristickou pevnost betonu v tahu, 5 % kvantil, poníženou o dílčí součinitel spolehlivosti pro beton). K tématu analytických modelů lze dále uvést také možnost využití analytické formy konstitutivních vztahů, které umožňují modelovat reálné nelineární chování betonu se změkčováním. Tento přístup nicméně

vyžaduje realizaci konstitutivního zákona, a tedy také řešení stavu napětí, po jednotlivých krocích, které odpovídají definovaným přírůstkům deformace, a je vhodný pouze pro řešení elementárních úloh a prvotní testování konstitutivních vztahů. Vzhledem k velmi časté vysoké komplexnosti konstitutivních vztahů a krokovému algoritmu řešení, u kterého obecně platí, že s narůstajícím počtem kroků se výsledná křivka charakterizující odezvu betonu stává hladší a přesnější, nabývá tento přístup na významu až především v kombinaci s naprogramovanými numerickými metodami řešení, které umožňují využití konstitutivních vztahů jak v rámci základních (elementárních) úloh, tak v rámci komplexních úloh.

Pro úlohy, pro které analytické řešení není dostačující, nebo pro úlohy, pro které analytické řešení není vůbec možné, lze s výhodou využít řešení numerické. Modelování betonu prostřednictvím numerických metod je v současné době nejpoužívanějším přístupem. Široce využívanou metodou pro řešení úloh mechaniky kontinua je v současnosti metoda konečných prvků (MKP) (Kolář a kol. 1997). Jedná se o numerickou (přibližnou) metodu vhodnou pro řešení problémů popsanych diferenciálními rovnicemi, při jejímž použití je kontinuum (spojité prostředí) diskretizováno sítí konečných prvků (prvky s konečnými rozměry). Výhodou metody konečných prvků je především její univerzálnost, díky které můžeme modelovat i velmi složité konstrukce ve 3D prostoru, a pak také skutečnost, že umožňuje využití nástrojů nelineární mechaniky. Klíčovou komponentou každého konečně-prvkového modelu je konstitutivní zákon (materiálový model), který charakterizuje vztah mezi napětím a poměrnou deformací a definuje tak materiálové chování. Moderní komplexní výpočetní systémy založené na metodě konečných prvků (Adina 1997, Autodyn 2009, Atena 2013, ANSYS 2020, LS-Dyna 2021) zahrnují v současnosti celou řadu nelineárních materiálových modelů vhodných nejen pro modelování betonu. Z hlediska modelování betonu jsou nelineární materiálové modely založeny především na třech teoriích, kterými jsou teorie plasticity, mechanika poškození a nelineární lomová mechanika, ve kterých se uplatňují různé podmínky plasticity či porušení, např. Chen-Chenova podmínka plasticity (Chen a Chen 1975) nebo Kupferova podmínka porušení (Kupfer a kol. 1969). Materiálové modely betonu založené na zmíněných teoriích mají jak různou úroveň výstižnosti chování betonu, tak také výpočetní náročnost, a záleží jen na výpočtáři, který model si pro výpočty zvolí. Modely betonu založené na teorii plasticity lze dále obecně rozdělit do tří skupin podle uplatňované funkce plastického potenciálu v rámci jejich matematických formulací. Funkce plastického potenciálu udává, jakým způsobem jsou počítány plastické poměrné deformace (zákon plastického tečení), a slouží k popisu zpevnění materiálu. První skupinu tvoří materiálové modely využívající tzv. Prandtl-Reussův zákon plastického tečení (Holmquist a kol. 1993, Hong a Liu 1997, Malvar a kol. 1997, Riedel a kol. 1999). Typickým znakem těchto modelů je, že nedokážou postihnout smykovou dilatanci materiálu, protože přírůstky plastické objemové



deformace jsou u těchto modelů nezávislé na teorii plastického tečení. Druhá skupina zahrnuje materiálové modely využívající tzv. neasociovaný zákon plastického tečení (Lade a kol. 1987, Runesson a Mroz 1989, Lubliner a kol. 1989, Grassl a Jirásek 2006). Funkce plastického potenciálu je u těchto modelů odlišná od funkce plasticity, přičemž smyková dilatance materiálu může být velmi dobře postihnuta z důvodů závislosti přírůstků plastické objemové deformace na teorii plastického tečení. Poslední třetí skupina zahrnuje materiálové modely, u kterých se funkce plastického potenciálu rovná funkci plasticity. Tyto modely tedy využívají tzv. asociovaný zákon plastického tečení pro výpočet přírůstku plastické poměrné deformace (Bland 1957, Schwer a Murray 1994, Murray 2007, Murray a kol. 2007). Podobně jako tomu je u modelů druhé skupiny, i zde lze smykovou dilatanci materiálu postihnout velmi dobře. Společnou vlastností všech nelineárních materiálových modelů betonu nicméně zůstává, že umožňují modelovat nelineární chování materiálu se změkčováním (pokles napětí při narůstající deformaci) a nestejnými mechanickými vlastnostmi v tlaku a tahu.

Vlivem přítomnosti změkčování v konstitutivním zákonu aplikovaném na konečně-prvkový model může při výpočtech docházet k tzv. lokalizaci nepružných deformací. Tento jev má za následek závislost výsledné simulované odezvy modelu na velikosti sítě konečných prvků a z tohoto důvodu je také označován termínem „falešná závislost výsledků na síti konečných prvků“. Za účelem eliminace tohoto jevu v rámci numerických simulací byly vyvinuty různé regulační techniky (omezovače lokalizace), které jsou dnes již běžnou součástí nelineárních materiálových modelů betonu implementovaných ve výpočetních systémech. Mezi známé omezovače lokalizace patří např. model pásu trhlin (Bažant a Oh 1983) nebo nelokální model (Jirásek 1998). Jedním z možných přístupů, jak zabránit lokalizaci nepružných deformací v rámci numerických simulací, je využití tzv. rozšířené metody konečných prvků (angl. extended finite element method – XFEM), která zmíněný problém řeší umožněním modelování diskontinuit ve spojitém tělese (Belytschko a Gracie 2007).

Z hlediska modelování odezvy betonu prostřednictvím simulací metodou konečných prvků je dále na místě zmínit některé přednosti materiálových modelů betonu určených pro explicitní metodu konečných prvků oproti modelům určeným pro klasickou metodu konečných prvků. Je obecně známo, že beton patří mezi materiály, jejichž odezva je závislá na rychlosti zatěžování (rychlosti deformace). Tuto skutečnost je možné zohlednit v rámci numerických simulací pouze při použití materiálových modelů betonu určených pro explicitní metodu konečných prvků, jelikož konstitutivní zákony těchto modelů zahrnují, na rozdíl od modelů určených pro klasickou metodu konečných prvků, formulace udávající vztahy mezi rychlostí deformace a stavem napětí (Kráal a kol. 2015). Další předností materiálových modelů betonu určených pro explicitní metodu konečných prvků je možnost modelovat před-poškození konečného prvku nebo skupiny konečných prvků. Při vhodné diskretizaci modelu lze této přednosti využít za účelem modelování

jednotlivých hlavních složek (heterogenity) betonu. K tomuto je nicméně nutno dodat, že výpočetní náročnost spojená s konečnými prvky o velmi malých rozměrech, které by tvořily cementovou matici, by byla velmi vysoká, nemluvě o velkém množství výpočetního času, který by byl zapotřebí v důsledku podmíněné stability explicitního MKP algoritmu. Použití explicitního MKP algoritmu (řešení metodou centrálních diferencí) za účelem modelování fyzikálně nelineární odezvy betonu je však, oproti použití klasického MKP algoritmu (řešení Newton-Raphsonovou metodou), obecně výhodné, protože při něm nedochází k problémům s konvergencí výpočtu. Explicitní MKP algoritmus lze také kombinovat s implicitním MKP algoritmem (Noels a kol. 2004).

Další metodou, kterou lze v současnosti využít za účelem numerického modelování betonu, je metoda s názvem Smoothed particle hydrodynamics (SPH) (Liu a Liu 2003). Jedná se o tzv. meshfree částicovou metodu, která byla původně vyvinuta pro využití v astrofyzice, ale postupem času si našla své uplatnění také v rámci mechaniky kontinua, kde je v současné době používána za účelem simulování dynamiky těles a tekutin. V rámci SPH metody je kontinuum nahrazováno souborem diskretních prvků, označovaných jako částice, jejichž vzájemné ovlivňování je definováno prostorovou vzdáleností (vyhlazovací délkou) a kernelovou (vyhlazovací) funkcí jednotlivých částic. Jedna konkrétní částice v metodě SPH tedy nemusí ovlivňovat pouze sousední částice, ale může ovlivňovat také další částice v rádiu daném vyhlazovací délkou (Hušek a kol. 2017). Metoda SPH nám umožňuje, podobně jako metoda konečných prvků, modelovat složité struktury ve 3D prostoru a její uplatnění, vzhledem k možnosti modelování rychlých dynamických dějů a silných nelinearit, spočívá ve spojení s explicitní časovou integrací pohybových rovnic a nelineárními materiálovými modely. Materiálové chování betonu lze v rámci SPH metody modelovat buď s využitím komplexních explicitních nelineárních materiálových modelů (model je tvořen pravidelnou strukturou částic), nebo namodelováním struktury betonu a vhodnou definicí kernelovy funkce v rámci částic tvořících jednotlivé složky betonu při využití co nejjednoduššího materiálového modelu. Vzhledem k vysoké výpočetní a časové náročnosti především druhé z nabízených možností je prakticky nezbytné, aby se numericky řešený fyzikální děj odehrával v co nejkratším časovém úseku. Je na místě také poznamenat, že SPH metoda může být při výpočtech s výhodou kombinována s explicitní metodou konečných prvků.

Alternativně k numerickým metodám využívaným v rámci mechaniky kontinua lze za účelem modelování betonu využít také tzv. diskretní (částicové) modely (angl. zkr. DEM), prostřednictvím kterých lze materiál reprezentovat jako systém propojených diskretních částic (Cusatis a kol. 2003). U těchto modelů je interakce mezi jednotlivými částicemi dána prostřednictvím vztahů mezi zobecněnými vnitřními silami, které jsou definovány na koncových průřezech (kontaktních plochách) částic, a prostřednictvím vztahů mezi zobecněnými posuny koncových průřezů částic. Za účelem modelování odezvy betonu prostřednictvím diskretního modelu je pochopitelně nutné do modelu

zavést odpovídající konstitutivní zákon, který definuje materiálové chování. Konstitutivní zákony používané u diskrétních modelů bývají obvykle založeny na mechanice poškození nebo nelineární lomové mechanice. U diskrétních modelů se konstitutivní zákon realizuje na kontaktech mezi koncovými průřezy jednotlivých částic a je definován ve vektorové formě. Diskrétní modely se obvykle využívají k simulacím materiálů na úrovni mezostruktury, případně mikrostruktury (Cusatis a Cedolin 2007).

Závěrem nelze nezmínit vědecky velmi populární mikroploškový model (Caner a Bažant 2013). Ačkoliv má tento model celou řadu předností, jeho velkou nevýhodou je velmi markantní výpočetní náročnost. Model obecně funguje na principu, že se v každém bodě, ve kterém nás zajímají materiálové vlastnosti, nejprve převádí složky poměrných deformací a napětí na jednoduché případy napjatosti snadno popsatelné experimentálními daty získanými ze základních laboratorních zkoušek. Poté se zpětnou integrací získává nový (upravený) stav napětí a poměrných deformací a výpočet může pokračovat dále.

### 2.2 Identifikace hodnot vstupních parametrů

Ať je však odezva betonu modelována v podstatě jakoukoliv matematickou metodou či přístupem, jednu věc mají prakticky všechny metody a přístupy společnou a tou je skutečnost, že jejich použití vyžaduje definování číselných hodnot vstupních parametrů, na kterých je posléze výsledná modelovaná odezva závislá. Cílem je vždy pochopitelně nalézt takové číselné hodnoty vstupních parametrů nelineárních materiálových modelů betonu nebo matematických metod, aby výsledná modelová odezva co možná nejlépe odpovídala reálné odezvě betonu na zatížení. V případě velmi nízkého počtu parametrů a znalosti jejich rozsahu variability lze za tímto účelem využít klasickou metodu pokus-omyl (Bei a kol. 2013), prostřednictvím které by se požadovaná modelová odezva hledala za pomoci náhodného testování potenciálních číselných kombinací parametrů, přičemž by tento proces trval, dokud by nebylo dosaženo úspěchu, nebo dokud by nebyl manuálně ukončen. Z předchozí věty je zřejmé, že nevýhodou této metody je, že se při zvyšování počtu parametrů stává velmi neefektivní. Důvodem je, že by při zvyšování počtu parametrů docházelo k rapidnímu nárůstu množství potenciálních číselných kombinací parametrů, které by bylo nutno testovat.

Vzhledem k velmi časté ryze matematické povaze (bez fyzikální podstaty) či specifčnosti některých parametrů (a často také vzhledem k jejich velkému množství) nelineárních materiálových modelů betonu, případně matematických metod, je hledání číselných hodnot těchto parametrů tak, aby výsledná modelová odezva co možná nejlépe odpovídala reálné odezvě betonu, mnohdy velmi komplexním úkolem, se kterým se lze úspěšně vypořádat prakticky pouze s využitím komplexních nástrojů určených pro identifikaci hodnot parametrů (Jankowiak a Łodygowski 2005, Nguyen a Korsunsky 2006, Cooreman a kol. 2007). Jedněmi z aktuálně nejpůvodnějších nástrojů

využívaných za účelem identifikace hodnot parametrů jsou metody založené na cvičení umělých neuronových sítí (Lehký a Novák 2013, Ahmad a kol. 2018, Shirkhani a kol. 2019). Umělé neuronové sítě mají v současnosti využití v celé řadě technických oblastí zahrnujících např. strojírenství, informační technologie a samozřejmě také stavebnictví. Struktura umělé neuronové sítě je tvořena souborem neuronů uspořádaných vždy v několika vrstvách, přičemž všechny neurony uspořádané v jedné vrstvě jsou vždy propojeny se všemi neurony uspořádanými v následující vrstvě. Kvalita umělé neuronové sítě závisí na jejím natrénování v rámci adaptivní fáze, ke kterému se obvykle využívají stochastické výpočty. Z hlediska modelování odezvy betonu dokáže vhodně natrénovaná umělá neuronová síť na základě vstupních dat (experimentálně naměřená odezva betonu) naidentifikovat hodnoty parametrů používaných simulačních technik a metod velmi efektivně.

Mezi další nástroje vhodné pro využití za účelem identifikace hodnot parametrů lze uvést tzv. optimalizační metody a algoritmy. V současnosti existuje celá řada optimalizačních metod a algoritmů, ze kterých lze uvést např. gradientní metodu s angl. názvem Nonlinear programming by quadratic Lagrangian (NLPQL – metoda založená na nelineárním programování – nelineární optimalizace) (Schittkowski 1986), algoritmus s názvem Particle swarm optimization (PSO → optimalizace hejnem částic – algoritmus inspirovaný chováním hejna ptáků při hledání potravy) (Kennedy a Eberhart 1995), přímé metody, jakými jsou simplexová metoda (metoda založená na lineárním programování – lineární optimalizace) (Lagová a Jablonský 2004) nebo metody plochy odezvy (Kim a Na 1997), a dále také algoritmy inspirované biologickou evolucí, jakými jsou evoluční algoritmy (EA) (Hrstka a kol. 2003, Zaharie 2009) či genetické algoritmy (GA) (Hynek 2008, Kaya 2018). Použitelnost, přesnost a efektivnost zmíněných optimalizačních metod a algoritmů se samozřejmě mění v závislosti na typu a podstatě řešené úlohy, a tudíž záleží jen na výpočtáři, kterou metodu si pro řešení své úlohy zvolí. Podstata identifikace hodnot parametrů založené na optimalizaci spočívá ve snaze minimalizovat hodnotu zvolené cílové funkce (hledání globálního minima funkce). Cílová funkce může nabývat různých matematických formulací, nicméně z hlediska modelování odezvy betonu je obvykle formulována tak, že její vypočtená hodnota udává odchylku mezi experimentálně naměřenou odezvou betonu (referenční odezvou – je součástí vstupních dat pro optimalizaci) a simulovanou odezvou. Optimální (naidentifikované) hodnoty parametrů pak tedy odpovídají hodnotám parametrů použitým v simulaci, jejíž data vykazují nejmenší odchylku od dat experimentálních. Vzhledem k přítomnosti referenční odezvy na vstupu optimalizačního procesu je identifikace hodnot parametrů založená na optimalizaci také často nazývána termínem „inverzní úloha“.

Proces identifikace hodnot vstupních parametrů za použití optimalizačních procedur lze v současnosti s výhodou kombinovat také s analýzou citlivosti, jejímž účelem je především analyzovat významnost parametrů z hlediska jejich vlivu na požadovanou

výslednou simulovanou odezvu (Saltelli a kol. 2008, Král a kol. 2017, Kala 2019). Významným výsledkem analýzy citlivosti je tedy především informace o tom, které parametry významně ovlivňují požadovanou simulovanou odezvu, přičemž hodnoty právě těchto parametrů je posléze nutno identifikovat. Analýza citlivosti tedy může přispět k významné redukci počtu parametrů, jejichž hodnoty je potřeba identifikovat. Tento přístup je výhodný především z toho pohledu, že nám v některých případech může umožnit významně zjednodušit celý optimalizační proces, a v tom důsledku také zkrátit výpočetní čas.

V rámci některých identifikačních úloh s použitím optimalizace lze také s výhodou kombinovat globální optimalizaci (hledání globálního minima cílové funkce) s lokální optimalizací (Král a kol. 2017). Cílem lokální optimalizace je v těchto případech analýza okolí globálního minima a jeho případné zpřesnění. Tento přístup bývá často kombinován s analýzou citlivosti, jelikož redukce počtu parametrů je u tohoto přístupu velmi žádoucí z důvodů omezení časové náročnosti výpočtů.



### 3 Cíle a organizace práce

Účelem práce je hlouběji proniknout do konstitutivního modelování nelineárního chování betonu a zaměřit se na identifikaci hodnot vstupních parametrů vybraných konstitutivních vztahů.

Dílčí cíle práce jsou stanoveny následovně:

- Provést odvození kalibračních křivek pro vstupní parametry u Continuous surface cap modelu.
- V rámci studie provést identifikaci hodnot parametrů základní verze Continuous surface cap modelu za účelem zhodnocení přesnosti a efektivnosti zvolených identifikačních (optimalizačních) metod v rámci řešené oblasti.
- Se zohledněním závěrů studie provést identifikaci hodnot parametrů základní verze Continuous surface cap modelu na základě relevantních experimentálních dat a podle výsledků navrhnout úpravu kalibračních křivek modelu.
- Provést identifikaci hodnot parametrů modifikované verze Continuous surface cap modelu a Karagozian & Case concrete modelu na relevantních experimentálních datech.
- Provést algoritmizaci vybraných konstitutivních vztahů určených pro modelování odezvy betonu.
- Otestovat naprogramované konstitutivní vztahy za účelem nalezení odpovídajících hodnot jejich vstupních parametrů, následně model validovat na experimentálních datech.

V souladu s dílčími cíli je z organizačního hlediska práce rozdělena do tří hlavních tematických částí. První část se zaměřuje na, v dílčích cílech zmíněnou, problematiku týkající se Continuous surface cap modelu. Druhá část je zaměřena na identifikaci hodnot vstupních parametrů Karagozian & Case concrete modelu. Třetí část je zaměřena na algoritmizaci vybraných konstitutivních vztahů pro modelování betonu a problematiku s tím související.





**I. část**

**Continuous surface cap model**



## 4 Continuous surface cap model – teoretické pozadí

Continuous surface cap model (MAT 159 ve výpočetním systému LS-Dyna) (LS-Dyna 2021) představuje velmi silný nástroj pro účely nelineární numerické analýzy betonových konstrukcí. Model je obecně určen pro modelování kvazi-křehkého chování materiálu s nestejnými mechanickými vlastnostmi v tlaku a tahu. Umožňuje také modelovat tzv. vliv rychlosti deformace (závislost stavu napětí na rychlosti deformace) (Malvar a Ross 1998). Nevýhodou modelu (myšleno jeho základní verze) je nicméně velké množství jeho vstupních parametrů, jejichž hodnoty musí být pro správnou funkci modelu definovány. Vzhledem k nefyzikálnímu významu většiny vstupních parametrů je nicméně tento úkol vcelku netriviální. V literatuře (Murray 2007) sice lze nalézt hodnoty většiny parametrů tabulkově v závislosti na konkrétních hodnotách pevnosti v jednoosém tlaku a maximální velikosti zrna kameniva, nicméně ani tato skutečnost nemusí být dostačující pro potřebnou kalibraci modelu. Jedním ze způsobů, jak vylepšit data pro potřeby kalibrace základní verze daného materiálového modelu, je odvození kalibračních křivek pro jeho vstupní parametry na základě výše zmíněných údajů v Murray (2007) a jejich následná úprava v závislosti na relevantně získaných výsledcích procesu inverzní identifikace hodnot parametrů. Zmíněná fakta tvoří dílčí cíle této práce, kterým jsou věnovány následující kapitoly, přičemž součástí je také studie přesnosti a efektivnosti zvolených identifikačních (optimalizačních) metod či algoritmů za účelem zefektivnění následných postupů, a také práce s modifikovanou verzí materiálového modelu. Z hlediska matematických přístupů je za účelem dosažení výše zmíněných vytyčených cílů využita právě optimalizace (většinou v kombinaci s analýzou citlivosti) (program optiSLang) a explicitní metoda konečných prvků (program LS-Dyna).

### 4.1 Formulace modelu a jeho vstupní parametry

Continuous surface cap model je explicitní pružnoplastický konstitutivní model využívající koncept mechaniky poškození (Krajcinovic a Lemaitre 1987) za účelem modelování tlakového či tahového změkčování a degradace modulu pružnosti (tuhosti) a pevnosti při cyklickém zatěžování. Modelování vlivu rychlosti deformace je v rámci materiálového modelu založeno na teorii visko-plasticity. Model se používá převážně pro modelování odezvy betonu, nebo mu podobných kvazi-křehkých materiálů, na zatížení, nicméně bylo zaznamenáno také jeho použití v oblasti numerické analýzy materiálů, které se běžně vyskytují v geotechnice (horniny, nerosty nebo zeminy).

Model využívá podmínku plasticity, jejíž funkce závisí na třech invariantech napětí a parametru modelu izotropního zpevnění. Tato funkce plasticity tedy v rámci svého matematického vyjádření kombinuje funkci popisující model izotropního zpevnění s funkcí smykového porušení, přičemž je tato kombinace multiplikativního charakteru a

z hlediska grafického je průsečík obou funkcí hladký, což zajišťuje výslednou hladkost a spojitost funkce (plochy) plasticity. Počátek porušování odpovídá právě dosažení funkce plasticity. Matematický zápis funkce plasticity je (Sandler a kol. 1976, Murray 2007)

$$f(I_1, J_2, J_3, \kappa) = J_2 - \mathfrak{R}^2 F_f^2 F_c \quad (4.1)$$

ve kterém  $I_1$  je první invariant tenzoru napětí,  $J_2$  je druhý invariant deviátoru tenzoru napětí a  $J_3$  je třetí invariant deviátoru tenzoru napětí. Tyto invarianty jsou definovány následujícími rovnicemi (indexová notace)

$$I_1 = 3P \quad (4.2)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (4.3)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} \quad (4.4)$$

ve kterých  $S_{ij}$ ,  $S_{jk}$  a  $S_{ki}$  jsou prvky deviátoru tenzoru napětí a  $P$  je tlak. Proměnná  $\kappa$  v rovnici (4.1) je parametr modelu izotropního zpevnění, který charakterizuje hodnotu prvního invariantu tenzoru napětí v místě průsečíku plochy smykového porušení s plochou modelu zpevnění,  $\mathfrak{R}$  je Rubinova redukční funkce, která závisí na prvním invariantu tenzoru napětí a třetím invariantu deviátoru tenzoru napětí (Rubin 1991),  $F_c$  je funkce modelu izotropního zpevnění a  $F_f$  je funkce smykového porušení.

Pro určení modelovaného stavu napětí se invarianty dočasně přepočítávají na základě tenzoru napětí  $\sigma^T$ , jehož prvky jsou počítány za předpokladu čistě elastického inkrementu. Získáváme tak invarianty napětí označované horním indexem  $T$ . Jestliže

$$f(I_1^T, J_2^T, J_3^T, \kappa^T) \leq 0 \quad (4.5)$$

pružný stav napětí je modelován. Pakliže

$$f(I_1^T, J_2^T, J_3^T, \kappa^T) > 0 \quad (4.6)$$

pružnoplastický stav napětí je modelován. V tomto případě je stav napětí vrácen do stavu odpovídajícímu podmínce

$$f(I_1^P, J_2^P, J_3^P, \kappa^P) = 0 \quad (4.7)$$

kde index  $P$  označuje invarianty pro tenzor napětí bez zahrnutí viskozity  $\sigma^P$ . Tyto invarianty napětí odpovídají právě dosažení podmínky plasticity.

Matematické vyjádření funkce (plochy) smykového porušení je

$$F_f(I_1) = \alpha - \lambda \exp^{-\beta I_1} + \theta I_1 \quad (4.8)$$

Hodnoty parametrů  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ , a  $\theta$  obsažených v rovnici (4.8) lze obecně získat fitováním plochy smykového porušení v závislosti na experimentálních měřeních získaných z laboratorních zkoušek pevnosti betonu v tříosém tlaku provedených na betonových vzorcích tvaru válce, které nezahnují žádnou přidanou výztuž. Z hlediska celkové plochy plasticity pokrývá samotná plocha smykového porušení oblasti jednoosého tlakového a tahového namáhání a také oblast víceosého tlakového namáhání o nízké intenzitě. Plastický tok je řízen smykovými napětími a funkce plastického potenciálu koresponduje s funkcí plasticity. To indikuje, že se v rámci modelu uplatňuje asociovaný zákon plastického tečení.

Pro další případy namáhání (kroucení či tříosý tah) se plocha smykového porušení (pevnost) musí měřítkově upravit. Tato úprava se provádí prostřednictvím výše zmíněné Rubinovy redukční funkce  $\mathfrak{R}$  dle daného případu namáhání. Pevnost v kroucení je tedy modelována podle rovnice

$$\mathfrak{R}F_f = Q_1 F_f \quad (4.9)$$

ve které

$$Q_1 = \alpha_1 - \lambda_1 \exp^{-\beta_1 I_1} + \theta_1 I_1 \quad (4.10)$$

a pevnost v tříosém tahu je modelována jako

$$\mathfrak{R}F_f = Q_2 F_f \quad (4.11)$$

kde

$$Q_2 = \alpha_2 - \lambda_2 \exp^{-\beta_2 I_1} + \theta_2 I_1 \quad (4.12)$$

Hodnoty parametrů  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\lambda_1$ , a  $\theta_1$  (resp.  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\lambda_2$ , a  $\theta_2$ ) obsažených v rovnici (4.10) (resp. v rovnici (4.12)) lze obecně získat fitováním funkce v rovnici (4.9) (resp. v rovnici (4.11)) na základě experimentálních měření získaných z laboratorních zkoušek pevnosti betonu v kroucení (resp. v tříosém tahu) provedených na nevyztužených betonových vzorcích tvaru válce.

Pro pokrytí oblastí celkové plochy plasticity, které charakterizují víceosé tlakové namáhání o vysoké intenzitě a přechod mezi nízkou a vysokou intenzitou víceosého tlakového namáhání, není samotná funkce smykového porušení vhodná, protože selhává z hlediska postižení patřičných plastických objemových změn, které se vážou k jevu, který popisujeme jako „kolaps pórů v materiálu“. Proto je do modelu přidána eliptická funkce popisující model izotropního zpevnění. Pro modelování materiálu ve výše zmíněných oblastech se tedy využívá kombinace plochy smykového porušení s plochou modelu zpevnění. Funkce (plocha) modelu izotropního zpevnění je matematicky definována jako (Foster a kol. 2005)

$$F_c(I_1, \kappa) = 1 - \frac{[I_1 - L(\kappa)][|I_1 - L(\kappa)| + I_1 - L(\kappa)]}{2[X(\kappa) - L(\kappa)]^2} \quad (4.13)$$

kde

$$L(\kappa) = \kappa \quad \text{jestliže } \kappa > \kappa_0 \quad (4.14)$$

$$L(\kappa) = \kappa_0 \quad \text{jestliže } \kappa \leq \kappa_0 \quad (4.15)$$

$$X(\kappa) = L(\kappa) + RF_f(L(\kappa)) \quad (4.16)$$

V rovnici (4.13) lze vidět, že se funkce modelu zpevnění  $F_c$  skládá ze dvou částí. První část odpovídá konstantní funkci o hodnotě 1. Druhá část odpovídá elipse. Jestliže  $L(\kappa) \geq I_1$ , je funkce modelu zpevnění definována právě konstantní funkcí o hodnotě 1. Pakliže  $L(\kappa) < I_1$ , funkce modelu zpevnění definuje elipsu. Parametr  $\kappa_0$  uvedený v rovnicích (4.14)-(4.15) představuje hodnotu prvního invariantu tenzoru napětí v místě průsečíku plochy smykového porušení s plochou modelu zpevnění (před začátkem zpevňování materiálu). Proměnná  $R$  uvedená v rovnici (4.16) představuje poměrový parametr modelu izotropního zpevnění. Tento parametr definuje úroveň eliptičnosti.

Za účelem simulace plastických objemových změn je v rámci materiálového modelu umožněna kontrakce a expanze eliptické části funkce modelu zpevnění. Ke kontrakci eliptické části dochází v případě, kdy se hodnoty parametrů  $X(\kappa)$  a  $\kappa$  snižují. Naopak k expanzi eliptické části dochází, pokud se hodnoty zmíněných parametrů zvyšují. Proces kontrakce či expanze eliptické části je v rámci modelu řízen tzv. zákonem plastického objemově-deformačního zpevnění, jehož matematické vyjádření je následující

$$\varepsilon_{p,v} = W \left( 1 - \exp^{-D_1(X(\kappa) - X_0) - D_2(X(\kappa) - X_0)^2} \right) \quad (4.17)$$

kde  $\varepsilon_{p,v}$  je plastická objemová deformace, proměnné  $D_1$  a  $D_2$  představují tvarové parametry ( $D_1$  je lineární a  $D_2$  kvadratický tvarový parametr),  $W$  zastupuje maximální plastickou objemovou deformaci a  $X_0$  je parametr počátku zpevnění, který odpovídá parametru  $X(\kappa)$  pro  $\kappa = \kappa_0$ . Uvedené parametry  $R$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $W$  a  $X_0$  lze obecně získat na základě laboratorně naměřených zatěžovacích (závislost tlaku na objemové deformaci) křivek pro hydrostatický tlak a jednoosou deformaci.

Při reálném jednoosém tlakovém zatěžování vykazuje beton, či jiné kvazi-křehké materiály, nelineární chování již před dosažením jednoosé tlakové pevnosti. Tato skutečnost je v rámci materiálového modelu zohledněna skrze parametry  $N_H$  (parametr iniciace zpevnění) a  $C_H$  (parametr intenzity zpevnění), které určují množství nelinearity. Jelikož model pracuje s izotropním zpevněním, je požadováno definovat parametry  $N_H$  a  $C_H$  nulovými hodnotami.

Po dosažení tlakové či tahové pevnosti se v kvazi-křehkém materiálu akumuluje poškození, což má za následek, že při dalším zatěžování takovýto materiál vykazuje, jako odezvu, změkčování. Continuous surface cap model vychází z konceptu mechaniky poškození, který pro modelování poškození zavádí tzv. parametr poškození  $d$ . Prostřednictvím tohoto parametru se v rámci modelu přepočítává visko-plastický tenzor napětí bez poškození  $\sigma^{vp}$  na tenzor napětí s poškozením  $\sigma^d$ . Matematicky lze tento přepočet zapsat následovně (indexová notace) (Murray 2007, LS-Dyna 2021)

$$\sigma_{ij}^d = (1-d)\sigma_{ij}^{vp} \quad (4.18)$$

Parametr poškození  $d$  se hodnotově pohybuje mezi 0 (nepoškozený materiál) a 1 (kompletně poškozený materiál), matematicky zapsáno jako  $0 \leq d \leq 1$ . Vzhledem k odlišné akumulaci poškození při tahovém a tlakovém namáhání se za účelem modelování změkčování v rámci materiálového modelu používají dvě zcela odlišné formulace poškození (křehké a duktilní poškození) (Murray a Lewis 1995).

Formulace křehkého poškození se aplikuje v situaci tahového namáhání ( $P$  vychází kladně), když hodnota energetického parametru pro akumulaci křehkého poškození  $\tau_b$  překročí hodnotu parametru iniciace křehkého poškození  $r_{0b}$ . Výpočet energetického parametru pro akumulaci křehkého poškození  $\tau_b$  je definován vztahem

$$\tau_b = \sqrt{E\varepsilon_{max}^2} \quad (4.19)$$

ve kterém  $E$  je Youngův modul pružnosti a  $\varepsilon_{max}$  představuje maximální hlavní poměrnou deformaci.

Formulace duktilního poškození se uplatní v případě tlakového namáhání ( $P$  vychází záporně), když hodnota energetického parametru pro akumulaci duktilního poškození  $\tau_d$  překročí hodnotu parametru iniciace duktilního poškození  $r_{0d}$ . Výraz pro výpočet energetického parametru pro akumulaci duktilního poškození  $\tau_d$  lze v indexové notaci zapsat jako

$$\tau_d = \sqrt{\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}} \quad (4.20)$$

kde člen  $\sigma_{ij}$  představuje prvky tenzoru napětí, které jsou vypočítány před zahrnutím poškození a vlivu rychlosti deformace, a člen  $\varepsilon_{ij}$  představuje prvky tenzoru celkové deformace.

Jak již bylo naznačeno výše, při tahovém či tlakovém změkčování se v materiálu průběžně akumuluje poškození. V rámci modelu to má za následek růst parametru poškození  $d$  z minimální hodnoty (0) na maximální hodnotu (1). Růst parametru poškození je závislý na příslušném energetickém parametru. Tato závislost definuje funkci změkčení. Ta má při uplatnění formulace křehkého poškození tvar

$$d(\tau_b) = \frac{0,999}{D} \left[ \frac{1+D}{1+D \exp^{-C(\tau_b - \tau_{0b})}} - 1 \right] \quad (4.21)$$

a při uplatnění formulace duktilního poškození zase nabývá tvaru

$$d(\tau_d) = \frac{d_{max}}{B} \left[ \frac{1+B}{1+B \exp^{-A(\tau_d - \tau_{0d})}} - 1 \right] \quad (4.22)$$

Proměnné  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$  v rovnicích (4.21)-(4.22) jsou nazývány jako tzv. parametry tvaru změkčení, jelikož právě tyto parametry udávají výslednou formu funkce změkčení. Parametr označený jako  $d_{max}$ , který je obsažen v rovnici (4.22), reprezentuje interně počítanou proměnnou, která charakterizuje maximální level poškození, kterého je možné dosáhnout. Hodnota parametru tvaru tlakového změkčení  $A$  může být v rámci modelu dále uměle snížena podle vztahu

$$A = A(d_{max} + 0,001)^{pmod} \quad (4.23)$$

ve kterém exponent  $pmod$  představuje modifikační parametr. Hodnota parametru poškození  $d$ , která se aplikuje na složky napětí v rámci přepočtu visko-plastického tenzoru napětí bez poškození  $\sigma^{vp}$  na tenzor napětí s poškozením  $\sigma^d$ , vždy odpovídá té větší z hodnot vypočítaných pro obě výše zmíněné formulace poškození.

Za účelem omezení (regulace) lokalizace nepružných deformací je do materiálového modelu zahrnut koncept postavený na zachování konstantní lomové energie, která je nezávislá na velikosti konečného prvku (Murray 2007). Definice zmíněné lomové energie je, že se jedná o plochu pod křivkou části pracovního diagramu (závislost napětí na posunu) materiálu od maximální hodnoty napětí (ultimátní pevnosti) po nulovou reziduální pevnost. Konstantnost lomové energie je ovlivněna interním výpočtem již výše zmíněných parametrů tvaru změkčení  $A$  a  $C$ , dále definovanými hodnotami parametrů tvaru změkčení  $B$  a  $D$ , a také interním výpočtem charakteristické délky  $L$  každého konečného prvku, která se stanovuje ve smyslu třetí odmocniny z objemu daného prvku. Lomová energie  $G_f$  je interně stanovovaným parametrem, jehož výpočet závisí na aplikované formulaci poškození. Při uplatnění formulace křehkého poškození se lomová energie  $G_f$  stanovuje podle rovnice

$$G_f = G_{fs} + k_t (G_{ft} - G_{fs}) \quad (4.24)$$

ve které

$$k_t = \left( \frac{-I_1}{\sqrt{3}J_2} \right)^{pwrt} \quad (4.25)$$

Při uplatnění formulace duktilního poškození je lomová energie  $G_f$  definována jako



$$G_f = G_{fs} + k_c (G_{fc} - G_{fs}) \quad (4.26)$$

kde

$$k_c = \left( \frac{I_1}{\sqrt{3}J_2} \right)^{pwrc} \quad (4.27)$$

Parametry  $k_t$  a  $k_c$  musí vyhovovat podmínce  $0 \leq k_t$  (nebo  $k_c$ )  $\leq 1$ . Z hlediska lomových charakteristik obsažených v rovnicích (4.24) a (4.26),  $G_{ft}$  je lomová energie pro jednoosý tah,  $G_{fc}$  představuje lomovou energii pro jednoosý tlak a  $G_{fs}$  reprezentuje lomovou energii pro čistý smyk. Parametry  $pwrt$  a  $pwrc$  uvedené v rovnicích (4.25) a (4.27) představují tzv. přechodové parametry (smyk-tah a smyk-tlak).

Pro účely zohlednění vlivu rychlosti deformace na stav napětí model zahrnuje visko-plastický algoritmus (Murray 2007). Tento algoritmus lze v indexové notaci popsat rovnicí

$$\sigma_{ij}^{vp} = (1 - \gamma)\sigma_{ij}^T + \gamma\sigma_{ij}^P \quad (4.28)$$

ve které

$$\gamma = \frac{\Delta t / \eta}{1 + \Delta t / \eta} \quad (4.29)$$

Z rovnice (4.28) lze vidět, že visko-plastický algoritmus funguje na principu interpolace mezi neviskózními složkami napětí tenzoru  $\sigma^P$  (bez vlivu rychlosti deformace) a složkami napětí počítanými za předpokladu čistě elastického inkrementu z tenzoru  $\sigma^T$  za účelem stanovení visko-plastických složek napětí tenzoru  $\sigma^{vp}$  (s vlivem rychlosti deformace), přičemž je tato interpolace realizována v každém časovém (výpočtovém) kroku. Rovnice (4.29) ukazuje závislost interpolace na dvou parametrech. Těmi jsou parametr  $\Delta t$ , který představuje délku časového kroku, a parametr  $\eta$ , který je nazýván jako efektivní koeficient fluidity. Podobně jako u lomové energie  $G_f$ , také výpočet efektivního koeficientu fluidity  $\eta$  se liší v závislosti na uplatňující se formulaci poškození. V případech, kdy se neuplatňuje žádná z formulací poškození (poškození se neakumuluje), se výpočet koeficientu  $\eta$  odvíjí podle toho, jestli je namáhání tahové nebo tlakové (jestli  $P$  vychází kladně nebo záporně). Pro případy, ve kterých je aplikována formulace křehkého poškození, nebo ve kterých je namáhání tahové, se efektivní koeficient fluidity  $\eta$  stanovuje na základě rovnice

$$\eta = \eta_s + k_t(\eta_t - \eta_s) \quad (4.30)$$

ve které parametr  $k_t$  odpovídá tomu z rovnice (4.25). Pro případy, ve kterých je aplikována formulace duktilního poškození, nebo ve kterých je namáhání tlakové, se efektivní koeficient fluidity  $\eta$  vypočítá jako

$$\eta = \eta_s + k_c(\eta_c - \eta_s) \quad (4.31)$$

kde  $k_c$  je parametr z rovnice (4.27). Parametry  $\eta_t$ ,  $\eta_c$  a  $\eta_s$  uvedené v rovnicích (4.30)-(4.31) jsou definovány následujícími matematickými výrazy

$$\eta_t = \frac{\eta_{0t}}{\varepsilon_{sr}^{N_t}} \quad (4.32)$$

$$\eta_c = \frac{\eta_{0c}}{\varepsilon_{sr}^{N_c}} \quad (4.33)$$

$$\eta_s = S_{rate} \eta_t \quad (4.34)$$

kde  $\eta_{0t}$  a  $\eta_{0c}$  jsou parametry vlivu rychlosti deformace pro jednoosé tahové a tlakové namáhání, parametry  $N_t$  a  $N_c$  tvoří exponenty rychlosti deformace pro jednoosé tahové a tlakové namáhání,  $S_{rate}$  představuje parametr udávající poměr koeficientu fluidity pro čistý smyk vůči koeficientu fluidity pro jednoosý tah a parametr  $\varepsilon_{sr}$  reprezentuje efektivní rychlost deformace. Výpočet efektivní rychlosti deformace  $\varepsilon_{sr}$  se realizuje na základě rovnice

$$\varepsilon_{sr} = \sqrt{\frac{2}{3} \left[ (\varepsilon_{sr,x} - \varepsilon_{sr,y})^2 + (\varepsilon_{sr,y} - \varepsilon_{sr,z})^2 + (\varepsilon_{sr,z} - \varepsilon_{sr,x})^2 + \varepsilon_{sr,xy}^2 + \varepsilon_{sr,xz}^2 + \varepsilon_{sr,yz}^2 \right]} \quad (4.35)$$

ve které složky  $\varepsilon_{sr,x}$ ,  $\varepsilon_{sr,y}$ ,  $\varepsilon_{sr,z}$ ,  $\varepsilon_{sr,xy}$ ,  $\varepsilon_{sr,xz}$  a  $\varepsilon_{sr,yz}$  představují prvky tenzoru rychlosti deformace.

V případech velmi vysokých rychlostí deformace (obecně tehdy, když se efektivní rychlost deformace  $\varepsilon_{sr}$  dostane nad hodnotu 100) začne visko-plastický algoritmus ovlivňovat stav napětí enormním (nežádoucím) způsobem, což je jev, který je potřeba eliminovat (limitovat). Limitace tohoto jevu je v rámci materiálového modelu realizována prostřednictvím parametrů *overt* a *overc*, jejichž úkolem je v případě potřeby upravit, a tím limitovat, výpočet efektivního koeficientu fluidity  $\eta$ . Potřeba zmíněné úpravy je dána podmínkou, že pokud

$$E\varepsilon_{sr}\eta > over \quad (4.36)$$

pak je výpočet efektivního koeficientu fluidity realizován podle vztahu

$$\eta = \frac{over}{E\varepsilon_{sr}} \quad (4.37)$$

Parametr *over* obsažený v rovnicích (4.36)-(4.37) odpovídá parametru *overt* v případě, kdy je namáhání tahové ( $P$  vychází kladně), a parametru *overc* zase v případě, kdy je namáhání tlakové ( $P$  vychází záporně).

Model dále umožňuje zohlednit také vliv rychlosti deformace na velikost (nárůst) lomové energie. Využívá k tomu výpočetní vztah udávající závislost lomové energie  $G_f$  na efektivní rychlosti deformace  $\varepsilon_{sr}$ . Tento vztah lze zapsat jako

$$G_{f,rate} = G_f \left( 1 + \frac{E\varepsilon_{sr}\eta}{f'} \right)^{repow} \quad (4.38)$$

kde  $G_{f,rate}$  představuje lomovou energii po zahrnutí vlivu rychlosti deformace,  $f'$  je interně počítaný pevnostní parametr, který lze definovat jako napětí (pevnost) na mezi vzniku plastických poměrných deformací před zohledněním vlivu rychlosti deformace, a parametr *repow* tvoří exponent rychlosti deformace pro nárůst lomové energie. Výraz v závorkách uvedený v rovnici (4.38) reprezentuje stanovení přibližného poměru dynamické pevnosti vůči statické pevnosti. Tento výraz může nabývat pouze hodnoty 1, nebo hodnot vyšších než 1.

Na základě výše zmíněné formulace Continuous surface cap modelu mohou být nyní tabelovány jeho vstupní parametry, jejichž číselné hodnoty je nutné pro výpočty definovat. Vstupní parametry modelu (myšleno jeho základní verze) (Murray 2007, LS-Dyna 2021) jsou uvedeny v tabulce 4.1, která zahrnuje jejich popisy, použité jednotky a označení, se kterými parametry se dále pracovalo v rámci (v dalších kapitolách uvedených) procesů inverzní identifikace hodnot parametrů založených na optimalizaci (označení  $\checkmark$ ) a se kterými nikoliv (označení  $\times$ ). V rámci identifikačních procesů se dále nepracovalo konkrétně s parametry iniciace a intenzity zpevnění (označeny čísla 37-38 v tabulce 4.1), protože model pracuje s izotropním zpevněním (požadavek:  $N_H = C_H = 0$ ). Nepracovalo se také s parametry souvisejícími s vlivem rychlosti deformace (označeny čísla 39-46 v tabulce 4.1), poněvadž vliv rychlosti deformace byl v rámci numerických simulací zanedbán prostřednictvím parametru IRATE (označen číslem 4 v tabulce 4.1  $\rightarrow$  je-li tento parametr roven nule, numericky simulovaná odezva modelu odpovídá kvazi-statickému (lze říci, že i statickému) zatěžování, je tedy nezávislá na aplikované rychlosti zatěžování, což umožňuje využití Continuous surface cap modelu nejen pro numerické modelování dynamického zatěžování konstrukcí z kvazi-křehkých materiálů, ale také pro modelování kvazi-statického nebo statického zatěžování takovýchto konstrukcí). Experimentální a numerická data využitá pro identifikační účely byla kvazi-statického charakteru, nebylo tedy zapotřebí modelovat vliv rychlosti deformace, a proto byl v rámci numerických simulací zanedbán. Pochopitelně se také dále nepracovalo s ovládacími parametry modelu (označeny čísla 1-8 v tabulce 4.1). Parametry označené v tabulce 4.1 symbolem ( $\times$ ) jsou v dalším textu této práce ignorovány.

Tabulka 4.1: Continuous surface cap model – vstupní parametry základní verze

Č.	Parametr	Popis	Jednotka	Ozn.
1	MID	Identifikační číslo	–	×
2	NPLOT	Parametr pro nastavení výstupu ve smyslu komponenty 7 uložené do souboru d3plot	–	×
3	INCRE	Maximální přírůstek poměrné deformace pro sub-inkrementaci	–	×
4	IRATE	Parametr určující zanedbání (0) nebo zohlednění (1) vlivu rychlosti deformace	–	×
5	ERODE	Parametr určující vypadávání konečných prvků z výpočtu (tzv. eroze prvků)	–	×
6	RECOV	Parametr určující obnovu tuhosti při poškození	–	×
7	ITRETRC	Parametr určující zanedbání (0) nebo zohlednění (1) retrakce v rámci modelu izotropního zpevnění	–	×
8	PreD	Parametr pro modelování před-poškození	–	×
9	$\rho$	Objemová hmotnost	Mg/mm <sup>3</sup>	✓
10	$G$	Modul pružnosti ve smyku	MPa	✓
11	$K$	Objemový modul pružnosti	MPa	✓
12	$\alpha$	Parametr funkce smykového porušení – fitování z dat tříosých tlakových zkoušek – konstantní člen	MPa	✓
13	$\theta$	Parametr funkce smykového porušení – fitování z dat tříosých tlakových zkoušek – lineární člen	–	✓
14	$\lambda$	Parametr funkce smykového porušení – fitování z dat tříosých tlakových zkoušek – nelineární člen	MPa	✓
15	$\beta$	Parametr funkce smykového porušení – fitování z dat tříosých tlakových zkoušek – exponent	MPa <sup>-1</sup>	✓
16	$\alpha_1$	Parametr funkce smykového porušení – fitování z dat zkoušek v kroucení – konstantní člen	–	✓
17	$\theta_1$	Parametr funkce smykového porušení – fitování z dat zkoušek v kroucení – lineární člen	MPa <sup>-1</sup>	✓
18	$\lambda_1$	Parametr funkce smykového porušení – fitování z dat zkoušek v kroucení – nelineární člen	–	✓
19	$\beta_1$	Parametr funkce smykového porušení – fitování z dat zkoušek v kroucení – exponent	MPa <sup>-1</sup>	✓
20	$\alpha_2$	Parametr funkce smykového porušení – fitování z dat tříosých tahových zkoušek – konstantní člen	–	✓
21	$\theta_2$	Parametr funkce smykového porušení – fitování z dat tříosých tahových zkoušek – lineární člen	MPa <sup>-1</sup>	✓
22	$\lambda_2$	Parametr funkce smykového porušení – fitování z dat tříosých tahových zkoušek – nelineární člen	–	✓
23	$\beta_2$	Parametr funkce smykového porušení – fitování z dat tříosých tahových zkoušek – exponent	MPa <sup>-1</sup>	✓
24	$R$	Poměrový parametr modelu izotropního zpevnění	–	✓

25	$X_0$	Parametr počátku zpevnění	MPa	✓
26	$W$	Maximální plastická objemová deformace	–	✓
27	$D_1$	Lineární tvarový parametr	MPa	✓
28	$D_2$	Kvadratický tvarový parametr	MPa <sup>2</sup>	✓
29	$B$	Parametr tvaru tlakového změkčení	–	✓
30	$D$	Parametr tvaru tahového změkčení	–	✓
31	$pwrc$	Přechodový parametr (smyk-tlak)	–	✓
32	$pwrct$	Přechodový parametr (smyk-tah)	–	✓
33	$pmod$	Modifikační parametr	–	✓
34	$G_{fc}$	Lomová energie pro jednoosý tlak	mJ/mm <sup>2</sup>	✓
35	$G_{ft}$	Lomová energie pro jednoosý tah	mJ/mm <sup>2</sup>	✓
36	$G_{fs}$	Lomová energie pro čistý smyk	mJ/mm <sup>2</sup>	✓
37	$N_H$	Parametr iniciace zpevnění	–	×
38	$C_H$	Parametr intenzity zpevnění	–	×
39	$\eta_{0c}$	Parametr vlivu rychlosti deformace pro jednoosé tlakové namáhání	–	×
40	$N_c$	Exponent rychlosti deformace pro jednoosé tlakové namáhání	–	×
41	$\eta_{0t}$	Parametr vlivu rychlosti deformace pro jednoosé tahové namáhání	–	×
42	$N_t$	Exponent rychlosti deformace pro jednoosé tahové namáhání	–	×
43	$overc$	Parametr limitující efektivní koeficient fluidity při tlakovém namáhání	MPa	×
44	$overt$	Parametr limitující efektivní koeficient fluidity při tahovém namáhání	MPa	×
45	$S_{rate}$	Parametr poměru koeficientu fluidity pro čistý smyk vůči koeficientu fluidity pro jednoosý tah	–	×
46	$repow$	Exponent rychlosti deformace pro nárůst lomové energie	–	×

## 4.2 Odvození kalibračních křivek pro vstupní parametry

Jak již bylo naznačeno, hodnoty vstupních parametrů Continuous surface cap modelu uvedených v tabulce 4.1 je pro výpočty nutné uživatelsky definovat v případě, že je použita jeho základní verze. Materiálový model nicméně nabízí také možnost použití jeho modifikované verze (Murray 2007, LS-Dyna 2021). Výhodou modifikované verze Continuous surface cap modelu je, že pro svou aplikaci v rámci výpočtů vyžaduje uživatelsky definovat číselné hodnoty pouze dvanácti vstupních parametrů. Těmito parametry se myslí ovládací parametry modelu (označeny čísly 1-8 v tabulce 4.1), objemová hmotnost  $\rho$  (označena číslem 9 v tabulce 4.1) a tři parametry neuvedené

v tabulce 4.1. Konkrétně se jedná o parametry  $f_c$  (pevnost v jednoosém tlaku),  $D_{agg}$  (maximální velikost zrna kameniva) a UNITS (parametr pro nastavení sady jednotek), podle jejichž definovaných hodnot jsou hodnoty ostatních parametrů s čísly 10-46 v tabulce 4.1 automaticky generovány. Automatické generování hodnot parametrů může být z pohledu uživatele považováno za další výhodu modifikované verze materiálového modelu, nicméně je na místě zmínit, že pro vstupní parametry  $f_c$  a  $D_{agg}$  by měly být respektovány následující omezení:  $20 \text{ MPa} \leq f_c \leq 58 \text{ MPa}$ , zároveň  $8 \text{ mm} \leq D_{agg} \leq 32 \text{ mm}$  (LS-Dyna 2021). Zároveň však automatické generování hodnot parametrů reprezentuje také zásadní nevýhodu modifikované verze modelu, kterou je nedostatečná ovlivnitelnost simulované odezvy materiálu, především pak v oblasti změkčování. Z tohoto důvodu se obecně doporučuje využívat modifikovanou verzi modelu pouze v simulacích úloh, ve kterých zmíněný aspekt nehraje zas až tak zásadní roli. V ostatních případech se doporučuje využívat základní verzi. Modifikovaná verze modelu je v rámci této práce využita jak za srovnávacím účelem, tak je jí také věnována samostatná úloha.

Závislost hodnoty konkrétního parametru na hodnotě parametru  $f_c$  (a hodnotě parametru  $D_{agg}$  u lomových energií) je v rámci generátoru hodnot parametrů řízena kalibrační funkcí (křivkou). Hodnoty parametrů s čísly 10-46 v tabulce 4.1 jsou tedy při použití modifikované verze modelu generovány podle příslušných kalibračních křivek. Znalost těchto křivek by rozhodně nabídla potenciál z hlediska využití základní verze modelu, kde by se s nimi dalo dále pracovat a upravovat je dle vlastní potřeby na základě získaných experimentálních dat. Funkční předpisy kalibračních křivek nicméně nejsou obecně známy. Nabízí se však možnost jejich odvození na základě autorských tabelovaných dat uvedených v Murray (2007). Toho bylo v rámci této práce využito.

Odvození kalibračních křivek pro jednotlivé vstupní (nekonstantní) parametry bylo provedeno prostřednictvím polynomiální (případně exponenciální nebo mocninné) regrese výše zmíněných autorských tabelovaných dat (viz tabulka 4.2). Hodnoty regresních koeficientů daných funkcí byly pomocí metody nejmenších čtverců (Rao a kol. 2007) (nebo s využitím CEB-FIP (1993)) hledány tak, aby hodnota koeficientu determinace  $R^2$  vycházela vždy co nejbližší číslu 1 (aby byl získán co nejkvalitnější regresní model). Vzhledem k tomu, že dané funkce byly vůči hledaným regresním koeficientům lineární (případná nelinearita byla odstraněna zlogaritmováním), byl pro posouzení míry kvality regresního modelu použit koeficient determinace definovaný následující rovnicí (Anderson-Sprecher 1994)

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}} \quad (4.39)$$

ve které

$$SS_{res} = \sum_{i=1}^n (y_i - f_i)^2 \quad (4.40)$$

Tabulka 4.2: Hodnoty vstupních parametrů při různých hodnotách parametru  $f_c$  (a při různých hodnotách parametru  $D_{agg}$  u lomových energií) (Murray 2007)

$f_c$	MPa	20	28	38	46 (48)	58
$G$	MPa	10011	11199	12399	(13403)	14276
$K$	MPa	10964	12266	13580	(14680)	15636
$\alpha$	MPa	12,8	14,2	15,4	15,9	15,9
$\theta$	–	0,266	0,290	0,323	0,350	0,395
$\lambda$	MPa	10,5				
$\beta$	MPa <sup>-1</sup>	0,01929				
$\alpha_1$	–	0,74735				
$\theta_1$	MPa <sup>-1</sup>	1,372E-03	1,204E-03	9,247E-04	6,382E-04	1,147E-04
$\lambda_1$	–	0,17				
$\beta_1$	MPa <sup>-1</sup>	0,07829	0,07252	0,06135	0,05004	0,02757
$\alpha_2$	–	0,66				
$\theta_2$	MPa <sup>-1</sup>	1,649E-03	1,450E-03	1,102E-03	7,687E-04	1,310E-04
$\lambda_2$	–	0,16				
$\beta_2$	MPa <sup>-1</sup>	0,07829	0,07252	0,06135	0,05004	0,02757
$R$	–	5				
$X_0$	MPa	87	90	95	(102)	110
$W$	–	0,05				
$D_1$	MPa	2,5E-04				
$D_2$	MPa <sup>2</sup>	3,49E-07				
$B$	–	100				
$D$	–	0,1				
$pwrc$	–	5				
$pwrt$	–	1				
$pmod$	–	0				
$D_{agg} = 8 \text{ mm}$						
$G_{fc}$	mJ/mm <sup>2</sup>	4,06	5,14	6,36	(7,50)	8,56
$G_{ft}$	mJ/mm <sup>2</sup>	0,0406	0,0514	0,0636	(0,0750)	0,0856
$G_{fs}$	mJ/mm <sup>2</sup>	0,0406	0,0514	0,0636	(0,0750)	0,0856
$D_{agg} = 16 \text{ mm}$						
$G_{fc}$	mJ/mm <sup>2</sup>	4,87	6,17	7,64	(8,99)	10,27
$G_{ft}$	mJ/mm <sup>2</sup>	0,0487	0,0617	0,0764	(0,0899)	0,1027
$G_{fs}$	mJ/mm <sup>2</sup>	0,0487	0,0617	0,0764	(0,0899)	0,1027
$D_{agg} = 32 \text{ mm}$						
$G_{fc}$	mJ/mm <sup>2</sup>	6,17	7,81	9,67	(11,39)	13,01
$G_{ft}$	mJ/mm <sup>2</sup>	0,0617	0,0781	0,0967	(0,1139)	0,1301
$G_{fs}$	mJ/mm <sup>2</sup>	0,0617	0,0781	0,0967	(0,1139)	0,1301

$$SS_{tot} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{mean})^2 \quad (4.41)$$

$SS_{res}$  (rovnice (4.40)) představuje sumu kvadratických odchylek závislé proměnné  $y_i$  (tabulkové hodnoty konkrétního vstupního parametru, viz tabulka 4.2) od regresního odhadu  $i$ -tého pozorování  $f_i$ . Hodnota  $SS_{res}$  byla při hledání regresních koeficientů dané funkce metodou nejmenších čtverců vždy minimalizována.  $SS_{tot}$  (rovnice (4.41)) představuje sumu kvadratických odchylek závislé proměnné  $y_i$  od její střední hodnoty  $y_{mean}$ . Při výpočtu  $y_{mean}$  byl respektován vztah

$$y_{mean} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (4.42)$$

kde  $n$  je počet pozorování. Z tabulky 4.2 lze vidět, že kalibrační křivky (regresní funkce) byly odvozovány pro vstupní parametry, se kterými se dále pracovalo v rámci identifikačních procesů (označení ✓ v tabulce 4.1).

### Kalibrační křivky pro parametry $G$ a $K$

Hodnoty modulu pružnosti ve smyku  $G$  a objemového modulu pružnosti  $K$  v tabulce 4.2 lze stanovit s využitím klasických vztahů mezi elastickými konstantami. Tyto vztahy jsou dány jako

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.43)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4.44)$$

kde Youngův modul pružnosti  $E$  závisí na parametru  $f_c$  podle rovnice (CEB-FIP 1993)

$$E = E_c \left( \frac{f_c}{10} \right)^{1/3} \quad (4.45)$$

Konstanta  $\nu$  obsažená v rovnicích (4.43)-(4.44) reprezentuje Poissonovo číslo, jehož hodnota se pro beton běžně pohybuje v rámci intervalu  $\langle 0,1; 0,2 \rangle$ .  $E_c$  v rovnici (4.45) je modul pružnosti betonu odpovídající pevnosti  $f_c = 10$  MPa (podle CEB-FIP (1993):  $E_c = 18275$  MPa).

Výsledné kalibrační křivky pro parametry  $G$  a  $K$  byly získány dosazením rovnice (4.45) do rovnic (4.43)-(4.44) a následným dosazením hodnot 18275 za  $E_c$  a 0,15 za  $\nu$ . Jejich matematický zápis je následující

$$G = \frac{18275}{2,3\sqrt[3]{10}} f_c^{1/3} \quad (4.46)$$



$$K = \frac{18275}{2,1\sqrt[3]{10}} f_c^{1/3} \quad (4.47)$$

pro dosazení hodnoty za  $f_c$  v megapascálech. Výrazy v rovnicích (4.46)-(4.47) představují mocninné regresní funkce, které poskytují nejlepší možnou (přesnou) aproximaci dat pro parametry  $G$  a  $K$  v tabulce 4.2 ( $R^2 = 1$ ), viz obrázky 4.1 a 4.2.

### Kalibrační křivky pro parametry $\alpha$ , $\theta$ , $\lambda$ a $\beta$

Kalibrační křivky pro parametry  $\alpha$  a  $\theta$  byly získány polynomiální a exponenciální regresí příslušných dat z tabulky 4.2. Jejich výsledný matematický tvar je následující (pro dosazení hodnoty za  $f_c$  v megapascálech)

$$\alpha = -5E-06f_c^3 - 0,0026f_c^2 + 0,3089f_c + 7,7026 \quad \text{pro } f_c < 46 \text{ MPa} \quad (4.48)$$

$$\alpha = 15,9 \quad \text{pro } f_c \geq 46 \text{ MPa} \quad (4.49)$$

$$\theta = 0,2166 \exp^{0,0104f_c} \quad (4.50)$$

Pro polynomiální regresní funkci (rovnice (4.48)) měl koeficient determinace  $R^2$  hodnotu 1 a pro exponenciální regresní funkci (rovnice (4.50)) měl zase hodnotu 0,9997. Lze tedy konstatovat, že obě regresní funkce reprezentují prakticky nejlepší možnou (lze říct přesnou) aproximaci dat pro parametry  $\alpha$  a  $\theta$  v tabulce 4.2, viz obrázky 4.3 a 4.4.

Kalibrační křivky pro parametry  $\lambda$  a  $\beta$  jsou tvořeny konstantními funkcemi (nezávislými na hodnotě parametru  $f_c$ ) ve tvaru (viz tabulka 4.2)

$$\lambda = 10,5 \quad (4.51)$$

$$\beta = 0,01929 \quad (4.52)$$

### Kalibrační křivky pro parametry $\alpha_1$ , $\theta_1$ , $\lambda_1$ a $\beta_1$ , resp. $\alpha_2$ , $\theta_2$ , $\lambda_2$ a $\beta_2$

Za účelem odvození kalibračních křivek pro parametry  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\beta_1$  a  $\beta_2$  byla zcela dostačující polynomiální regrese příslušných dat z tabulky 4.2. Matematické vyjádření odvozených křivek je následující (pro dosazení hodnoty za  $f_c$  v megapascálech)

$$\theta_1 = -5E-11f_c^3 - 4,026E-07f_c^2 - 14,322E-07f_c + 0,0015618 \quad (4.53)$$

$$\theta_2 = -4,909E-07f_c^2 - 16,429E-07f_c + 0,0018786 \quad (4.54)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = -2,0113E-05f_c^2 + 23,48E-05f_c + 0,081648 \quad (4.55)$$

Pro všechny polynomiální regresní funkce v rovnicích (4.53)-(4.55) měl koeficient determinace  $R^2$  hodnotu přibližně rovnu 1, tudíž lze konstatovat, že získané regresní

funkce poskytují velmi dobrou aproximaci dat pro parametry  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\beta_1$  a  $\beta_2$  v tabulce 4.2, viz obrázky 4.5, 4.6 a 4.7.

Kalibrační křivky pro parametry  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  jsou tvořeny konstantními funkcemi ve tvaru (viz tabulka 4.2)

$$\alpha_1 = 0,74735 \quad (4.56)$$

$$\alpha_2 = 0,66 \quad (4.57)$$

$$\lambda_1 = 0,17 \quad (4.58)$$

$$\lambda_2 = 0,16 \quad (4.59)$$

### **Kalibrační křivky pro parametry $R$ , $X_0$ , $W$ , $D_1$ a $D_2$**

Kalibrační křivka pro parametr  $X_0$  byla odvozena polynomiální regresí příslušných dat z tabulky 4.2. Její výsledná matematická forma je následující (pro dosazení hodnoty za  $f_c$  v megapascálech)

$$X_0 = 0,0077 f_c^2 + 0,0064 f_c + 83,77 \quad (4.60)$$

Koeficient determinace  $R^2$  byl pro polynomiální regresní funkci v rovnici (4.60) roven hodnotě 0,9998. Lze tedy konstatovat, že daná regresní funkce reprezentuje prakticky nejlepší možnou (bezmála přesnou) aproximaci dat pro parametr  $X_0$  v tabulce 4.2, viz obrázek 4.8.

Kalibrační křivky pro parametry  $R$ ,  $W$ ,  $D_1$  a  $D_2$  mají podobu konstantních funkcí ve tvaru (viz tabulka 4.2)

$$R = 5 \quad (4.61)$$

$$W = 0,05 \quad (4.62)$$

$$D_1 = 2,5E-04 \quad (4.63)$$

$$D_2 = 3,49E-07 \quad (4.64)$$

### **Kalibrační křivky pro parametry $B$ , $D$ , $pwrc$ , $pwrt$ , $pmod$ , $G_{fc}$ , $G_{ft}$ a $G_{fs}$**

Hodnoty lomové energie pro jednoosý tah  $G_{ft}$  v tabulce 4.2 je možné získat s využitím vztahu dle CEB-FIP (1993)

$$G_{ft} = G_{F0} \left( \frac{f_c}{10} \right)^{0,7} \quad (4.65)$$

ve kterém  $G_{F0}$  představuje lomovou energii pro jednoosý tah odpovídající pevnosti  $f_c = 10$  MPa. Hodnota lomové energie  $G_{F0}$  závisí na hodnotě parametru  $D_{agg}$  reprezentujícího maximální velikost zrna kameniva. Tato závislost je následující:  $G_{F0} = 0,025$  mJ/mm<sup>2</sup> (pro  $D_{agg} = 8$  mm),  $G_{F0} = 0,03$  mJ/mm<sup>2</sup> (pro  $D_{agg} = 16$  mm) a  $G_{F0} = 0,038$  mJ/mm<sup>2</sup> (pro  $D_{agg} = 32$  mm).

Výsledné kalibrační křivky pro lomovou energii  $G_{ft}$  byly získány dosazením výše zmíněných hodnot pro  $G_{F0}$  do rovnice (4.65). Jsou znázorněny na obrázku 4.9 a jejich matematický zápis je následující

$$G_{ft} = \frac{0,025}{10^{0,7}} f_c^{0,7} \quad \text{pro } D_{agg} = 8 \text{ mm} \quad (4.66)$$

$$G_{ft} = \frac{0,03}{10^{0,7}} f_c^{0,7} \quad \text{pro } D_{agg} = 16 \text{ mm} \quad (4.67)$$

$$G_{ft} = \frac{0,038}{10^{0,7}} f_c^{0,7} \quad \text{pro } D_{agg} = 32 \text{ mm} \quad (4.68)$$

kde za  $f_c$  musí být dosazena hodnota v megapascálech. Výrazy v rovnicích (4.66)-(4.68) reprezentují mocninné regresní funkce, které poskytují nejlepší možnou (přesnou) aproximaci dat pro parametr  $G_{ft}$  v tabulce 4.2 ( $R^2 = 1$ ), viz obrázek 4.9.

Z dat v tabulce 4.2 je zřejmé, že kalibrační křivky pro lomovou energii v jednoosém tlaku  $G_{fc}$  bylo možné získat jednoduše z kalibračních křivek pro  $G_{ft}$  na základě vztahu

$$G_{fc} = 100G_{ft} \quad (4.69)$$

Získané kalibrační křivky pro parametr  $G_{fc}$  jsou uvedeny na obrázku 4.10 a jejich matematické vyjádření je následující

$$G_{fc} = \frac{2,5}{10^{0,7}} f_c^{0,7} \quad \text{pro } D_{agg} = 8 \text{ mm} \quad (4.70)$$

$$G_{fc} = \frac{3}{10^{0,7}} f_c^{0,7} \quad \text{pro } D_{agg} = 16 \text{ mm} \quad (4.71)$$

$$G_{fc} = \frac{3,8}{10^{0,7}} f_c^{0,7} \quad \text{pro } D_{agg} = 32 \text{ mm} \quad (4.72)$$

Kalibrační křivky pro lomovou energii v čistém smyku  $G_{fs}$  odpovídají kalibračním křivkám pro  $G_{ft}$  (viz obrázek 4.9), poněvadž vztah mezi daty příslušných veličin v tabulce 4.2 je udán ve smyslu

$$G_{fs} = G_{ft} \quad (4.73)$$

Kalibrační křivky pro zbývající parametry  $B$ ,  $D$ ,  $pwrc$ ,  $pwrt$  a  $pmod$  jsou tvořeny konstantními funkcemi ve tvaru (viz tabulka 4.2)

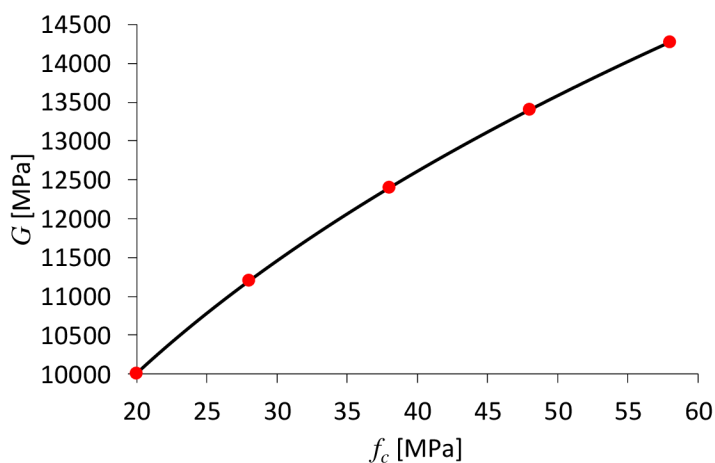
$$B = 100 \quad (4.74)$$

$$D = 0,1 \quad (4.75)$$

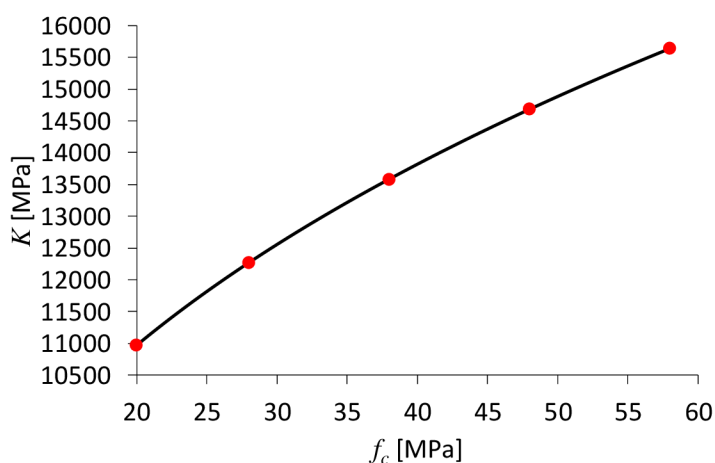
$$pwrc = 5 \quad (4.76)$$

$$pwrt = 1 \quad (4.77)$$

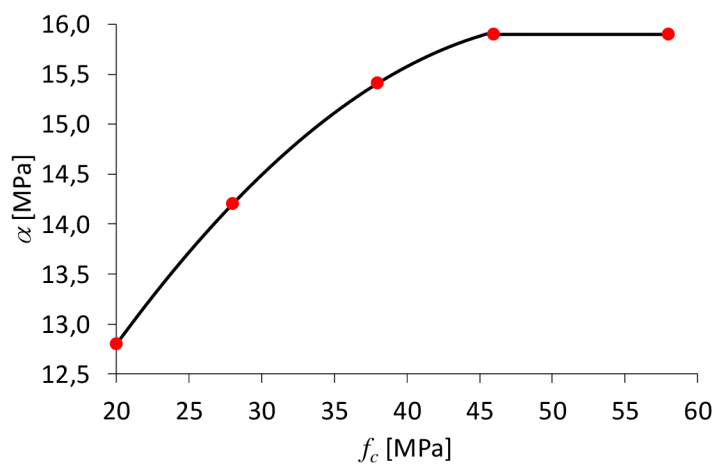
$$pmod = 0 \quad (4.78)$$



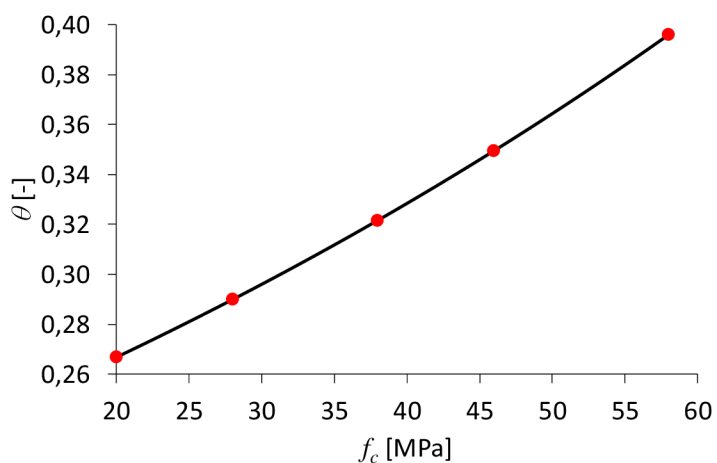
Obrázek 4.1: Kalibrační křivka pro parametr  $G$



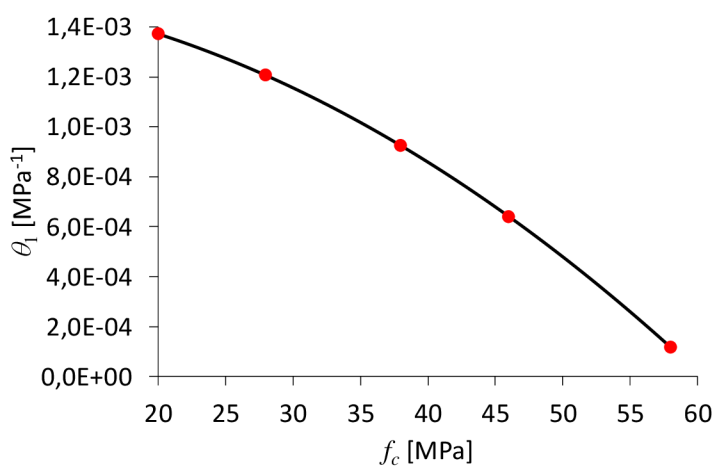
Obrázek 4.2: Kalibrační křivka pro parametr  $K$



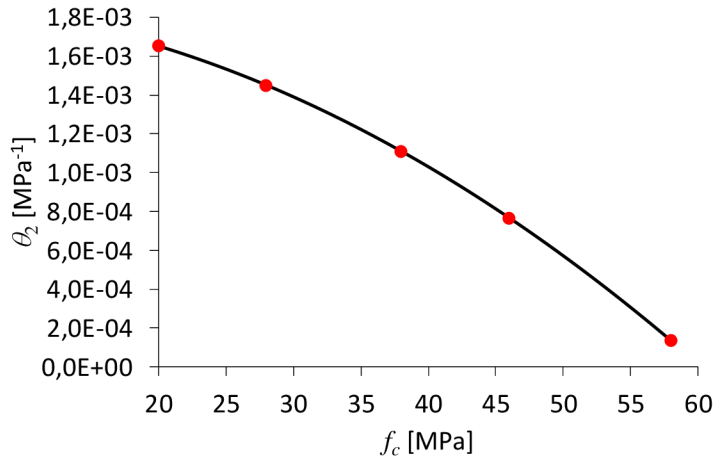
Obrázek 4.3: Kalibrační křivka pro parametr  $\alpha$



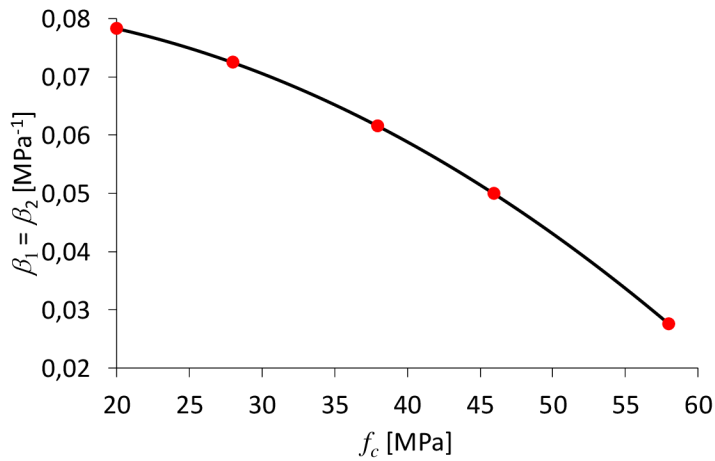
Obrázek 4.4: Kalibrační křivka pro parametr  $\theta$



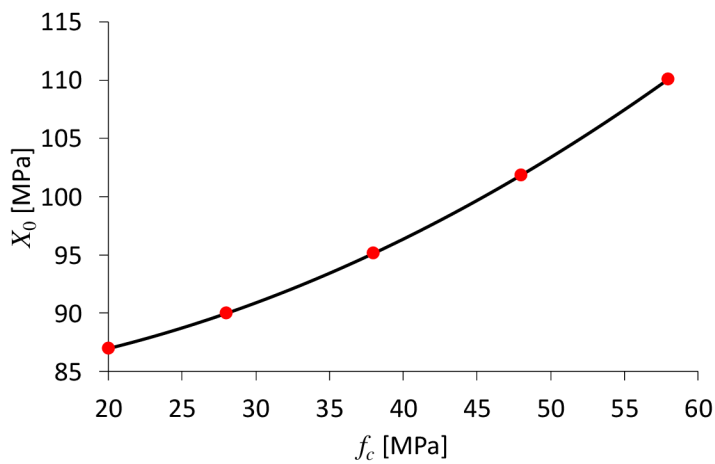
Obrázek 4.5: Kalibrační křivka pro parametr  $\theta_1$



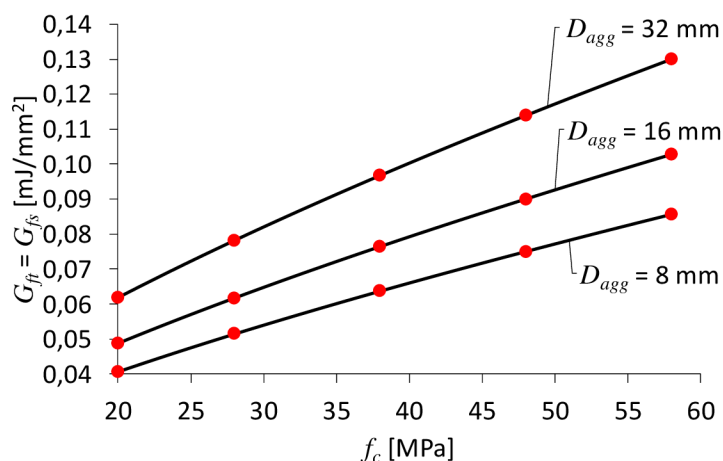
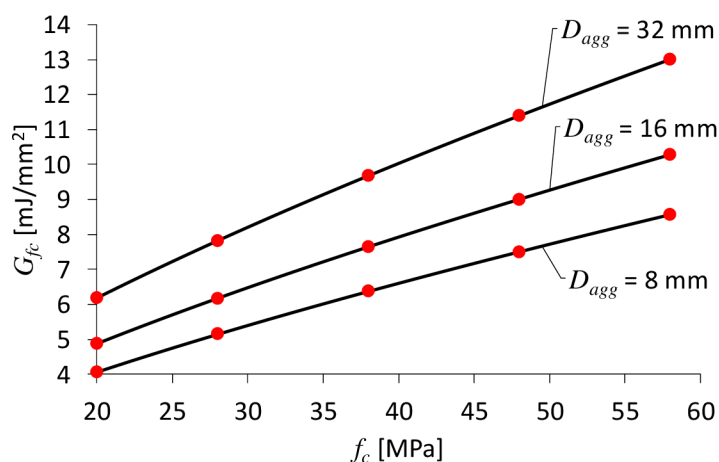
Obrázek 4.6: Kalibrační křivka pro parametr  $\theta_2$



Obrázek 4.7: Kalibrační křivka pro parametry  $\beta_1$  a  $\beta_2$



Obrázek 4.8: Kalibrační křivka pro parametr  $X_0$

Obrázek 4.9: Kalibrační křivky pro parametry  $G_{ft}$  a  $G_{fs}$ Obrázek 4.10: Kalibrační křivky pro parametr  $G_{fc}$ 

Získané kalibrační křivky jednoznačně představují silný nástroj pro účely definování číselných hodnot vstupních parametrů Continuous surface cap modelu v jeho základní verzi, poněvadž na rozdíl od modifikované verze modelu lze s těmito křivkami dále pracovat a manipulovat dle vlastní potřeby. Těto skutečnosti lze využít především v případech, kdy použití současné (původní) formy kalibračních křivek není dostačující pro potřebnou kalibraci modelu. V těchto případech je za účelem vylepšení dat pro potřeby kalibrace daného materiálového modelu možné kalibrační křivky upravit například na základě výsledků procesu inverzní identifikace hodnot parametrů, což bude v rámci této práce demonstrováno po následující kapitole věnované studii přesnosti a efektivnosti zvolených identifikačních (optimalizačních) metod a algoritmů.





## 5 Identifikační studie

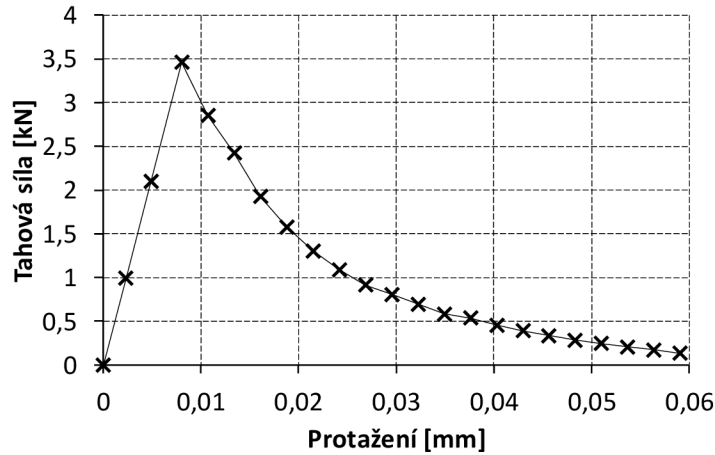
Cílem identifikační studie je ukázat a zhodnotit přesnost a efektivnost zvolených identifikačních metod při identifikaci hodnot různého počtu vstupních parametrů základní verze Continuous surface cap modelu. Nutný počet parametrů určených k identifikaci je zjišťován na základě analýzy citlivosti, přičemž následná identifikace hodnot těchto parametrů je provedena s využitím optimalizace. Závěry identifikační studie dopomohou k ujasnění a zefektivnění identifikačních postupů v dalších kapitolách.

### 5.1 Referenční data

Základním principem procesů inverzní identifikace hodnot parametrů založených na optimalizaci, které jsou dále demonstrovány v rámci této práce, je hledání takových hodnot vstupních parametrů materiálového modelu, aby výsledná numericky simulovaná odezva modelovaného konstrukčního prvku co nejlépe aproximovala referenční data. Nezbytnou součástí každého dále uvedeného identifikačního procesu jsou tedy referenční data (odezva), která tvoří jedny ze vstupních dat pro optimalizaci a která mohou být tvořena buď numericky simulovanými daty, nebo daty experimentálními.

Referenční odezva byla pro účely identifikační studie tvořena numerickými daty získanými pro model 145 (Jiang a Zhao 2015, LS-Dyna 2021), která odpovídala experimentálním datům ze zkoušek těles z prostého betonu v jednoosém (prostém) tahu (Geopalaeratnam a Shah 1985). Zkouška jednoosým tahem je jednou ze zkoušek, které se používají za účelem vyšetřování tahového chování prostého betonu. Na obrázku 5.1 lze vidět, že použitá referenční data udávají tvar zatěžovací křivky (křivka závislosti tahové síly na protažení), která charakterizuje chování modelu betonového zkušební vzorku namáhaného jednoosým tahem. Toto chování je charakteristické lineární větví před dosažením mezní únosnosti v jednoosém tahu a následným nelineárním tahovým změkčováním.

Bližší charakteristika zkoušek, na jejichž základě byla získána referenční numerická data, je následující (Geopalaeratnam a Shah 1985). Dimenze zkušebních vzorků z prostého betonu byly 305 mm x 60 mm x 19 mm (délka x šířka x tloušťka v místě kritické průřezové plochy). Experimentální data byla vždy měřena na 85 mm dlouhé části zkušební vzorku, kde měl vzorek právě kritickou průřezovou plochu o rozměrech 60 mm x 19 mm. Pevnost použitého betonu v jednoosém tlaku (po 28 dnech zrání) byla rovna hodnotě 44 MPa. Velikosti zrn kameniva v betonu byly proměnlivé, přičemž autoři zkoušek uvádějí, že maximální velikost zrna kameniva byla 10 mm. V průběhu zatěžování byly zkušební vzorky natahovány konstantní zatěžovací rychlostí. Zatěžování bylo pomalé, odezvu zkušebních vzorků tedy bylo možné považovat za kvazi-statickou.



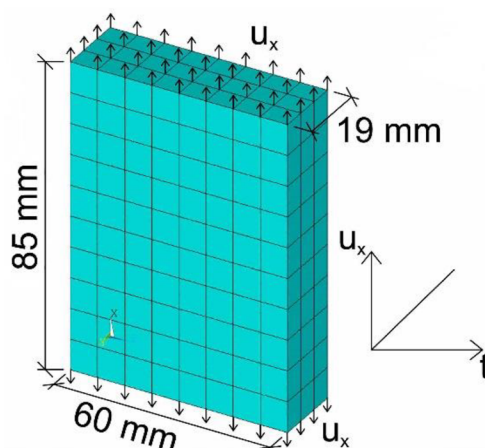
Obrázek 5.1: Referenční data

## 5.2 Výpočtový model

Proces inverzní identifikace hodnot parametrů založený na optimalizaci obecně vyžaduje opakované provádění počítačových simulací řešené úlohy, která je udána referenčními daty. Za tímto účelem byl v rámci identifikační studie vytvořen výpočtový model zkoušky pevnosti betonu v jednoosém tahu. V rámci výpočtového modelu byla modelována pouze část zkušebního vzorku o délce 85 mm s kritickou průřezovou plochou o rozměrech 60 mm x 19 mm (viz obrázek 5.2). Toto zjednodušení bylo adekvátní, poněvadž data uvedená na obrázku 5.1 odpovídají právě zmíněné části zkušebního vzorku. Pro modelování byly využity explicitní 3 D osmiuzlové strukturální konečné prvky. Výpočtový model byl tvořen pravidelnou sítí konečných prvků, jejichž velikost byla zvolena tak, aby délka časového kroku v používaném explicitním MKP algoritmu nebyla, vzhledem k jeho podmíněné stabilitě, příliš malá. To vedlo k přijatelnému výpočetnímu času bez nutnosti dalšího zjednodušení ve smyslu využití symetrie úlohy. Vzhledem k tomu, že používaný materiálový model (Continuous surface cap model) zahrnuje nástroj pro regulaci lokalizace nepružných deformací, a k tomu, že se porušení při tahovém namáhání akumulovalo v jedné až dvou sousedních vrstvách konečných prvků, což odpovídalo očekávání, byla velikost konečných prvků zvolena adekvátně.

Jednoosé tahové zatěžování bylo v rámci výpočtového modelu modelováno prostřednictvím v čase lineárně narůstajících posunů (konstantní rychlost) ve směru osy  $x$ , které byly předepsány pro uzly obou podstav konečně-prvkového modelu části zkušebního vzorku (viz obrázek 5.2). Rychlost zatěžování byla zvolena přiměřeně časové náročnosti výpočtů (tato volba byla umožněna v důsledku toho, že odezva konečně-prvkového modelu byla nezávislá na rychlosti deformace, viz parametr IRATE Continuous surface cap modelu). Aby při jednoosém tahovém zatěžování docházelo ke

korektnímu příčnému zkracování konečně-prvkového modelu části vzorku v důsledku nenulového Poissonova čísla, nebyly na model aplikovány žádné podpory. Bylo tedy využito toho, že použitý explicitní MKP řešič (respektive metoda centrálních diferencí) umožňuje stabilní řešení úloh bez zadání podepření (LS-Dyna 2021).



Obrázek 5.2: Výpočtový model

### 5.3 Proces identifikace hodnot parametrů

Proces inverzní identifikace hodnot parametrů byl v rámci identifikační studie rozdělen celkem do dvou částí. První část byla tvořena analýzou citlivosti, která představuje efektivní před-optimalizační proceduru umožňující (po definici vstupů) redukci počtu parametrů určených k identifikaci (návrhového prostoru), což zjednodušuje a zefektivňuje následný postup (druhou část). Druhá část byla tvořena optimalizací, ve které se pracovalo s jednou cílovou funkcí. Jednalo se tedy o tzv. jedno-cílovou optimalizaci.

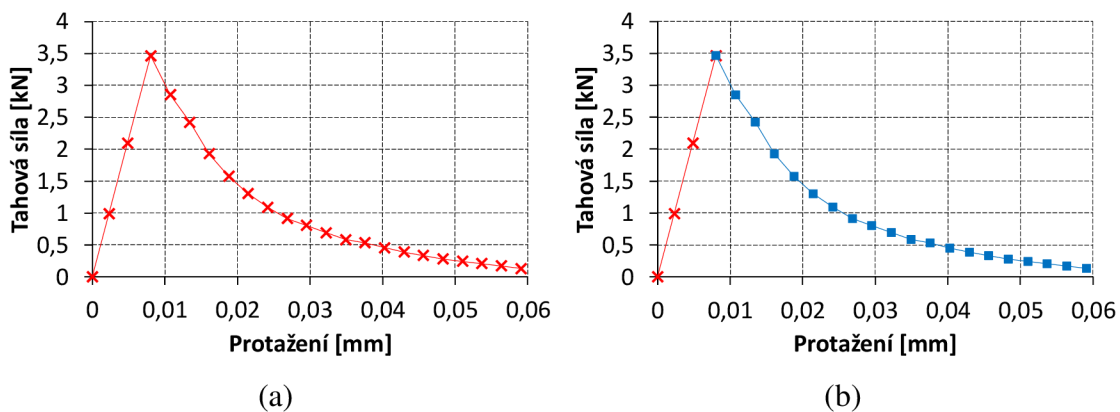
#### 5.3.1 Analýza citlivosti

Cílem analýzy citlivosti bylo zjištění a kvalitativní vyhodnocení, do jaké míry jsou nejistoty výstupních dat ovlivněny variabilitou dat vstupních (Saltelli a kol. 2008). Jinými slovy byly hledány korelace (závislosti) mezi vstupními a výstupními daty. Vstupní data byla tvořena návrhovým vektorem, který zahrnoval veškeré parametry základní verze Continuous surface cap modelu, jejichž hodnoty byly určeny k identifikaci (vstupní parametry 9-36 v tabulce 4.1). Zmíněný návrhový vektor lze matematicky definovat jako

$$\mathbf{X} = \{\rho, G, K, \alpha, \theta, \lambda, \beta, \alpha_1, \theta_1, \lambda_1, \beta_1, \alpha_2, \theta_2, \lambda_2, \beta_2, R, X_0, W, D_1, D_2, B, D, pwrc, pwrt, pmod, G_{fc}, G_{ft}, G_{fs}\}^T \quad (5.1)$$

Každý parametr návrhového vektoru byl uvažován jako spojitá náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti na intervalu daném okrajovými hodnotami. Tyto okrajové hodnoty byly pro jednotlivé parametry v rámci identifikační studie odhadnuty na základě provedení několika testovacích výpočtů, jejichž výsledky byly porovnány s referenčními daty. Rovnoměrná rozdělení pravděpodobnosti jednotlivých parametrů určovala návrhový prostor vstupních dat. Výstupní data byla tvořena daty z numerických simulací, konkrétně jejich výsledky, které udávaly tvar simulované zatěžovací křivky betonu při namáhání jednoosým tahem.

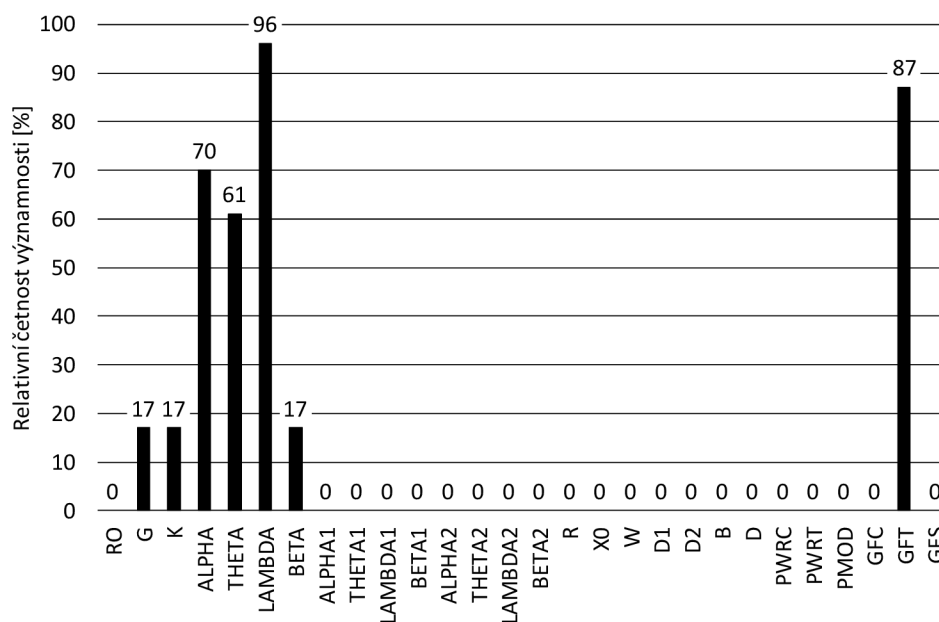
Aby bylo zjištěno co možná nejvíce možných korelací mezi vstupními a výstupními daty, byla analýza citlivosti provedena v celkem dvou případech odlišných z hlediska dělení výstupních dat. V prvním případě byla výstupní data uvažována jako celek, tudíž citlivost vstupních dat byla analyzována na celé zatěžovací křivce (znázorněno červenou barvou na referenční křivce na obrázku 5.3 (a)). Ve druhém případě byla výstupní data rozdělena na dvě části, tudíž citlivost vstupních dat byla analyzována na lineární a nelineární části zatěžovací křivky odděleně (znázorněno červenou a modrou barvou na referenční křivce na obrázku 5.3 (b)).



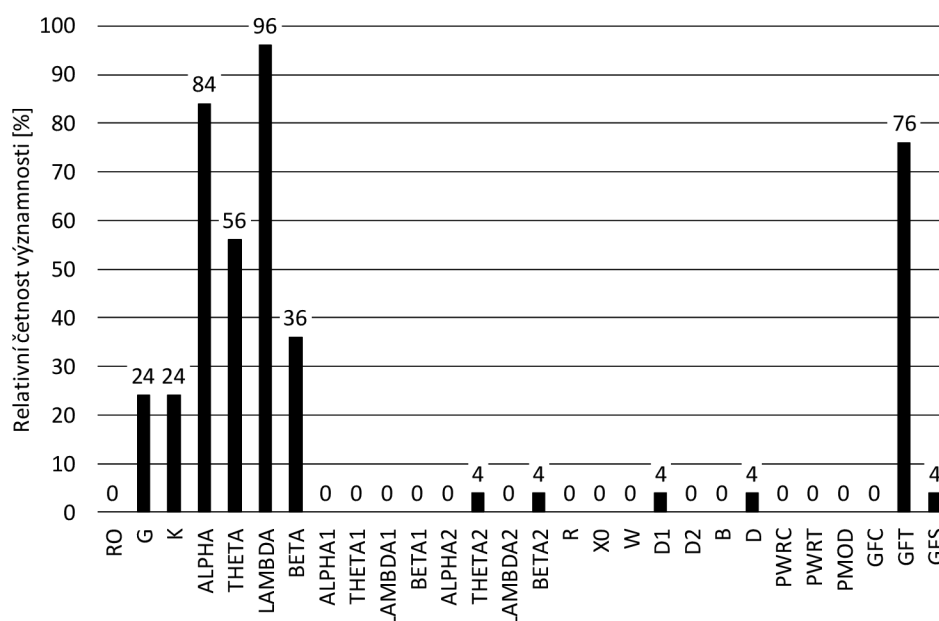
Obrázek 5.3: Dělení výstupních dat: (a) 1. případ analýzy citlivosti, (b) 2. případ analýzy citlivosti

Za účelem pokrytí návrhového prostoru množstvím náhodných realizací návrhového vektoru byla využita metoda s názvem Latin hypercube sampling (LHS → stratifikační metoda programu optiSLang) (Olsson a kol. 2003, optiSLang 2014). Prostřednictvím této metody bylo v obou dvou případech analýzy citlivosti vygenerováno celkem 300 náhodných realizací návrhového vektoru, které zajistily dostatečné pokrytí návrhového prostoru bez

vzniku klastrů. Každá realizace představovala jeden numerický výpočet řešené úlohy. První realizace návrhového vektoru nicméně v obou případech analýzy citlivosti odpovídala počátečním hodnotám parametrů materiálového modelu, které byly definovány manuálně. Tyto hodnoty byly pro účely identifikační studie vybrány zcela namátkově, pouze s respektem k okrajovým hodnotám rozdělení pravděpodobnosti u jednotlivých parametrů.



Obrázek 5.4: Relativní četnosti významnosti pro 1. případ analýzy citlivosti



Obrázek 5.5: Relativní četnosti významnosti pro 2. případ analýzy citlivosti

Data získaná prostřednictvím LHS metody byla v obou případech analýzy citlivosti dále aproximována náhradními regresními modely (metamodely). Konkrétně se jednalo o izotropní kernelův model, lineární regresní model a MLS (zkr. pro moving least squares) aproximační model (optiSLang 2014). Na základě těchto modelů byly získány hodnoty relativních četností významnosti pro parametry zahrnuté v návrhovém vektoru. Relativní četnost významnosti kvalitativně určuje míru závislosti mezi vstupními a výstupními daty, kdy její nulová hodnota značí nevýznamná vstupní data (výstupní data nejsou na těchto datech závislá). Výstupní numericky simulovaná data tedy byla významně závislá pouze na parametrech, které měly nenulovou hodnotu relativní četnosti významnosti (viz obrázky 5.4 a 5.5 pro oba případy analýzy citlivosti). Hodnoty pouze těchto významných parametrů musely být identifikovány na základě následné optimalizace. Původní návrhový vektor  $\mathbf{X}$  byl tedy pro optimalizaci zredukován podle výsledků 1. případu analýzy citlivosti do tvaru

$$\mathbf{X}_{\text{red},1} = \{G, K, \alpha, \theta, \lambda, \beta, G_{ft}\}^T \quad (5.2)$$

a podle výsledků 2. případu analýzy citlivosti do tvaru

$$\mathbf{X}_{\text{red},2} = \{G, K, \alpha, \theta, \lambda, \beta, \theta_2, \beta_2, D_1, D, G_{ft}, G_{fs}\}^T \quad (5.3)$$

### 5.3.2 Optimalizace

Cílem optimalizace bylo nalezení takových hodnot významných parametrů (parametry s nenulovými hodnotami relativních četností významnosti z analýzy citlivosti), aby odchylka mezi simulovanou a referenční zatěžovací křivkou byla minimální. Jinými slovy byla snaha o minimalizaci rozdílu mezi oběma zmíněnými křivkami. Za tímto účelem bylo potřeba využít nástroj, který by rozdíl mezi křivkami vyjádřil prostřednictvím skaláru. Tímto nástrojem byla cílová funkce, která v rámci této práce vycházela z konceptu minimalizace sumy čtverců (angl. zkr. LSM  $\rightarrow$  least squares minimization) (Most 2010).

Koncept minimalizace sumy čtverců (LSM) lze definovat následujícím vztahem (pro nezávislé směrodatné odchylky dat)

$$J = \sum_{i=1}^m \omega_i (y_{\text{sim},i} - y_{\text{ref},i})^2 \rightarrow \min \quad (5.4)$$

ve kterém

$$\omega_i = \frac{1}{\sigma_{y,\text{data},i}^2} \quad (5.5)$$

Proměnná  $y_{\text{sim},i}$  v rovnici (5.4) zastupuje data modelu, zatímco proměnná  $y_{\text{ref},i}$  charakterizuje referenční data,  $m$  je počet diskretizačních bodů a parametr  $\sigma_{y,\text{data},i}$  obsažený v rovnici (5.5)

reprezentuje směrodatné odchylky dat. S uvážením rovnosti směrodatných odchylek dat lze vztah v rovnici (5.4) zjednodušit následujícím způsobem

$$J = \sum_{i=1}^m (y_{sim,i} - y_{ref,i})^2 \rightarrow \min \quad (5.6)$$

Výraz pro  $J$  v rovnici (5.6) představuje jednu z možných matematických formulací cílové funkce, kterou lze po změně na značení vyjadřující chybu aproximace zapsat jako

$$ERROR = \sum_{i=1}^m (y_{sim,i} - y_{ref,i})^2 \quad (5.7)$$

Právě cílová funkce  $ERROR$  z rovnice (5.7) byla použita v rámci optimalizace, přičemž bylo hledáno její globální minimum a jemu odpovídající optimální hodnoty významných parametrů. Za tímto účelem byly do proměnné  $y_{sim,i}$  dosazovány numericky simulované hodnoty tahové síly odpovídající daným hodnotám protažení a za  $y_{ref,i}$  byly dosazovány referenční hodnoty tahové síly odpovídající stejným hodnotám protažení. Počet diskretizačních bodů  $m$  byl roven hodnotě 22. Identifikované parametry byly uvažovány, stejně jako v případě analýzy citlivosti, v podobě spojitých náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti. Ostatní parametry byly definovány deterministicky s využitím jejich počátečních hodnot.

Optimalizace byla za účelem srovnání provedena ve dvou případech pro redukované návrhové vektory  $\mathbf{X}_{red,1}$  a  $\mathbf{X}_{red,2}$  vycházející z výsledků analýzy citlivosti. V obou případech byla nejprve provedena globální optimalizace a následně byla provedena také lokální optimalizace, jejímž účelem byla analýza okolí globálního minima cílové funkce a jeho následné zpřesnění (výsledek globální optimalizace byl tedy výchozím bodem pro lokální optimalizaci).

Pro globální optimalizaci byl v obou případech použit evoluční algoritmus (EA) (optiSLang 2014). Důvodem byla jeho vhodnost pro hledání globálního minima cílové funkce, jelikož na rozdíl od jiných optimalizačních metod dokáže při svém běhu bez problémů vystoupit z lokálního minima funkce velmi blízkého minimu globálnímu. Jednalo se o algoritmus inspirovaný biologickou evolucí, který je založený na opakovaném nahrazování rodičovské populace populací potomků, ze které se po každém nahrazení stává právě rodičovská populace, přičemž tento proces trvá až do nalezení optimálního řešení. Při běhu evolučního algoritmu vzniká během každého cyklu populace potomků z rodičovské populace prostřednictvím několika operací. Zaprvé dochází k selekci, kdy se vybírají nejlepší generace rodičovských jedinců na základě jejich hodnocení (ranking). Poté dochází k rekombinaci, kdy rodičovští jedinci produkují potomky sdílením číselných hodnot svých genů. Na závěr dochází k mutaci, kdy výsledná populace potomků přebírá část genů od původních rodičovských jedinců.

Pro lokální optimalizaci byla v prvním případě (pro vektor  $\mathbf{X}_{\text{red},1}$ ) použita simplexová metoda (SM) (optiSLang 2014). Důvodem bylo malé množství identifikovaných parametrů, které její použití umožňovalo, jelikož iterativní algoritmus simplexové metody je efektivní pouze při nízkém počtu identifikovaných parametrů (cca do 6-7 parametrů). Tento přímý iterativní algoritmus je založený na lineárním programování (lineární optimalizace) a při svém běhu systematicky prohledává soubor přípustných řešení, dokud nenajde řešení optimální. Z geometrického hlediska lze říct, že simplexová metoda přechází po hranách mnohostěnu, který reprezentuje všechna přípustná řešení, mezi jeho vrcholy (bázičnými řešeními), až najde vrchol optimálního řešení.

Ve druhém případě (pro vektor  $\mathbf{X}_{\text{red},2}$ ) byla, vzhledem k většímu počtu parametrů, pro lokální optimalizaci využita metoda s názvem Particle swarm optimization (PSO → optimalizace hejnem částic) (optiSLang 2014). Jednalo se o optimalizační meta-heuristický algoritmus inspirovaný chováním hejna ptáků při hledání potravy. Při svém běhu algoritmus pracuje s hejnem částic, ve kterém je každá částice definována svou polohou, rychlostí a pamětí předchozích úspěchů při hledání optima. Jednotlivé částice hejna jsou průběžně ovlivňovány (přebírají informace) ostatními úspěšnějšími částicemi. V rámci algoritmu je pohyb hejna částic počítán v diskrétních časových krocích, ve kterých jsou neustále upravovány hodnoty popisující jednotlivé částice, přičemž tento děj trvá, dokud není nalezeno optimální řešení.

V průběhu optimalizačních výpočtů byla hodnota cílové funkce vždy postupně minimalizována (konvergovala k optimálnímu řešení) skrze jednotlivé cykly či iterace použitých optimalizačních metod. Každý cyklus či iterace představoval jeden numerický výpočet řešené úlohy. Jakmile již nedocházelo k dalšímu zlepšování výsledků, výpočty byly vždy automaticky ukončeny.

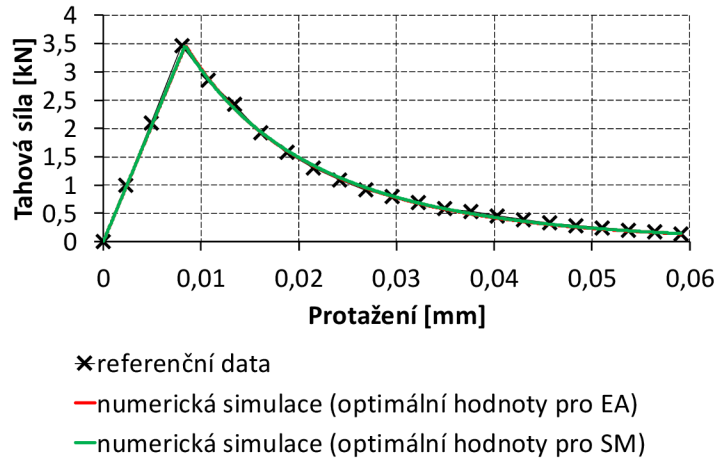
Výsledné optimální (naintifikované) hodnoty vstupních parametrů základní verze Continuous surface cap modelu odpovídající nejlepším cyklům či iteracím použitých optimalizačních metod jsou uvedeny v tabulce 5.1 společně s příslušnými minimálními hodnotami použité cílové funkce. Hodnoty významných parametrů z vektorů  $\mathbf{X}_{\text{red},1}$  a  $\mathbf{X}_{\text{red},2}$ , které tvořily návrhový prostor v rámci procesu optimalizace, jsou v tabulce 5.1 tučně zvýrazněny. Grafická srovnání výsledků numerických simulací, ve kterých byly použity optimální hodnoty parametrů materiálového modelu uvedené v tabulce 5.1, s referenčními daty jsou znázorněna na obrázcích 5.6 a 5.7.



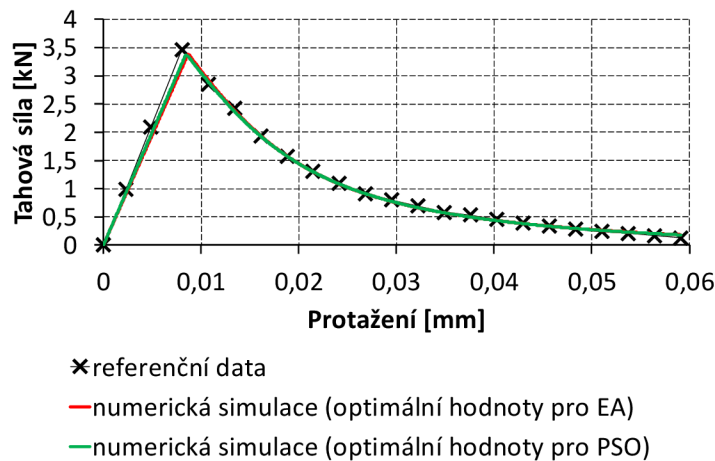
## 5. IDENTIFIKAČNÍ STUDIE

Tabulka 5.1: Výsledné optimální hodnoty vstupních parametrů základní verze Continuous surface cap modelu

Parametr	Jednotka	1. případ optimalizace		2. případ optimalizace	
		EA (glob. opt.)	SM (loc. opt.)	EA (glob. opt.)	PSO (loc. opt.)
$\rho$	Mg/mm <sup>3</sup>	2,4E-09	2,4E-09	2,4E-09	2,4E-09
$G$	MPa	<b>13371,67</b>	<b>13419,73</b>	<b>12667,00</b>	<b>12987,44</b>
$K$	MPa	<b>14645,16</b>	<b>14697,80</b>	<b>13873,38</b>	<b>14224,34</b>
$\alpha$	MPa	<b>16,207</b>	<b>16,220</b>	<b>15,688</b>	<b>15,673</b>
$\theta$	–	<b>0,2501</b>	<b>0,2500</b>	<b>0,3654</b>	<b>0,3642</b>
$\lambda$	MPa	<b>11,192</b>	<b>11,212</b>	<b>10,539</b>	<b>10,540</b>
$\beta$	MPa <sup>-1</sup>	<b>2,188E-02</b>	<b>2,193E-02</b>	<b>2,001E-02</b>	<b>2,008E-02</b>
$\alpha_1$	–	0,65	0,65	0,65	0,65
$\theta_1$	MPa <sup>-1</sup>	7E-04	7E-04	7E-04	7E-04
$\lambda_1$	–	0,16	0,16	0,16	0,16
$\beta_1$	MPa <sup>-1</sup>	4,5E-02	4,5E-02	4,5E-02	4,5E-02
$\alpha_2$	–	0,58	0,58	0,58	0,58
$\theta_2$	MPa <sup>-1</sup>	0,800E-03	0,800E-03	<b>1,500E-03</b>	<b>1,495E-03</b>
$\lambda_2$	–	0,12	0,12	0,12	0,12
$\beta_2$	MPa <sup>-1</sup>	4,500E-02	4,500E-02	<b>5,900E-02</b>	<b>5,840E-02</b>
$R$	–	4,7	4,7	4,7	4,7
$X_0$	MPa	95	95	95	95
$W$	–	4E-02	4E-02	4E-02	4E-02
$D_1$	MPa	2,000E-04	2,000E-04	<b>3,000E-04</b>	<b>2,984E-04</b>
$D_2$	MPa <sup>2</sup>	3E-07	3E-07	3E-07	3E-07
$B$	–	100	100	100	100
$D$	–	0,1000	0,1000	<b>0,8384</b>	<b>0,8438</b>
$pwrc$	–	5	5	5	5
$pwrt$	–	1	1	1	1
$pmod$	–	0	0	0	0
$G_{fc}$	mJ/mm <sup>2</sup>	2,6	2,6	2,6	2,6
$G_{ft}$	mJ/mm <sup>2</sup>	<b>4,793E-02</b>	<b>4,818E-02</b>	<b>4,179E-02</b>	<b>4,173E-02</b>
$G_{fs}$	mJ/mm <sup>2</sup>	2,600E-02	2,600E-02	<b>6,915E-02</b>	<b>6,862E-02</b>
<b>ERROR</b>	kN <sup>2</sup>	0,065068	0,063969	0,119059	0,079048



Obrázek 5.6: Srovnání výsledků numerických simulací s referenčními daty pro 1. případ optimalizace



Obrázek 5.7: Srovnání výsledků numerických simulací s referenčními daty pro 2. případ optimalizace

### 5.3.3 Shrnutí výsledků

Na obrázcích 5.6 a 5.7 lze vidět, že hodnoty vstupních parametrů materiálového modelu byly naidentifikovány velice přesně všemi použitými optimalizačními metodami. Rozdíly mezi výsledky globální a lokální optimalizace jsou tedy u řešené úlohy prakticky zanedbatelné. Stejně tak jsou prakticky zanedbatelné také rozdíly mezi výsledky získanými pro redukovaný návrhový vektor  $\mathbf{X}_{\text{red},1}$  (1. případ optimalizace) a výsledky získanými pro vektor  $\mathbf{X}_{\text{red},2}$  (2. případ optimalizace). Zanedbatelnost rozdílů mezi výsledky optimalizace lze také pozorovat na minimálních hodnotách cílové funkce v tabulce 5.1.

Z hlediska časové náročnosti procesu optimalizace lze výsledky shrnout následovně. V 1. případě optimalizace, kdy byl návrhový prostor tvořen nižším počtem významných parametrů vektoru  $\mathbf{X}_{\text{red},1}$ , bylo zapotřebí provést celkem 310 cyklů evolučního algoritmu a 139 iterací simplexové metody. Celkem tedy bylo nutné provést, při uvážení globální i lokální optimalizace, 449 numerických výpočtů. Naproti tomu ve 2. případě optimalizace, kdy byl návrhový prostor tvořen vyšším počtem významných parametrů vektoru  $\mathbf{X}_{\text{red},2}$ , bylo zapotřebí provést celkem 270 cyklů evolučního algoritmu a 400 iterací PSO metody. V tomhle případě tedy bylo nutné provést až 670 numerických výpočtů.

Z výše uvedených poznatků lze zaprvé konstatovat, že je zcela dostatečné analyzovat citlivost vstupních dat přímo na celé zatěžovací křivce, jelikož analýza citlivosti vstupních dat odděleně na částech zatěžovací křivky (a tedy pravděpodobnost vyššího počtu významných parametrů) nepřináší z hlediska následného procesu optimalizace žádné další zlepšení. Naopak může při následné globální a lokální optimalizaci dojít k významnému navýšení časové náročnosti celého procesu. Zadruhé lze z výše uvedených poznatků konstatovat, že globální optimalizace je z hlediska aproximačních úloh zcela dostačující. Následná lokální optimalizace může přinést už jen nepatrné zlepšení, přičemž časová náročnost celého optimalizačního procesu významně narůstá. Zmíněné skutečnosti budou zohledněny v dalších identifikačních procesech uvedených v této práci.

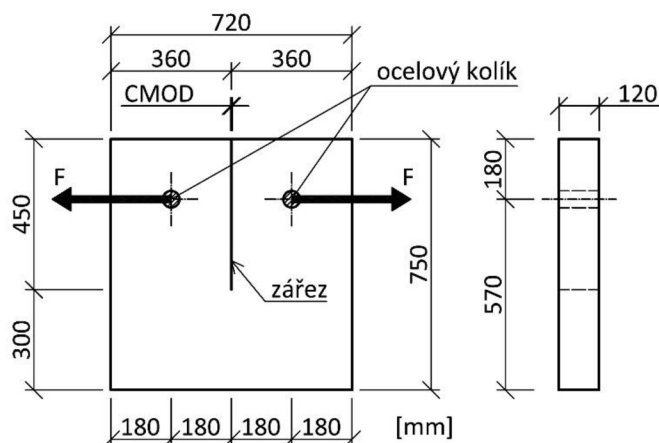


## 6 Modifikace kalibračních křivek

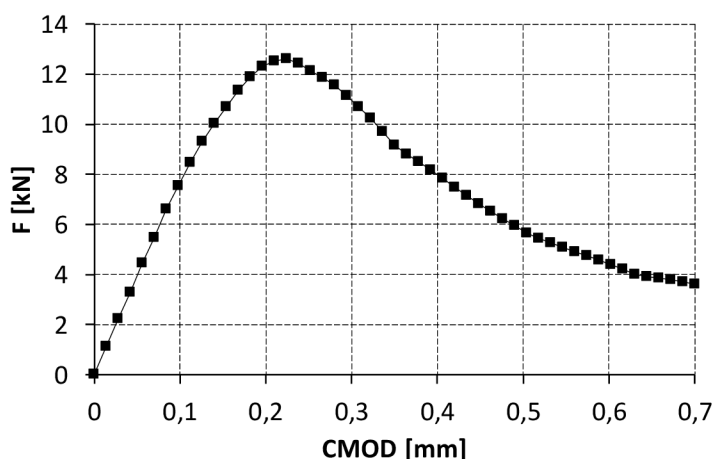
Jak již bylo zmíněno, kalibrační křivky odvozené v rámci této práce jednoznačně představují silný nástroj pro účely definování číselných hodnot vstupních parametrů základní verze Continuous surface cap modelu. Nelze je však brát jako dogma, jelikož mohou nastat případy, kdy jejich použití v základní (současné) podobě nemusí být dostačující pro potřebnou kalibraci modelu. V těchto případech je za účelem vylepšení dat pro potřeby kalibrace daného materiálového modelu nicméně možné kalibrační křivky upravit například právě na základě výsledků procesu inverzní identifikace hodnot parametrů založeného na optimalizaci. Tato skutečnost je demonstrována dále v následujících podkapitolách na vybrané úloze, pro kterou je právě použití odvozené podoby kalibračních křivek nedostačující. V rámci identifikačního procesu jsou zohledněny poznatky získané na základě předchozí identifikační studie (analýza citlivosti s využitím celé zatěžovací křivky a pouze globální optimalizace).

### 6.1 Experimentální data

V rámci identifikačního procesu byla jako referenční data použita data experimentální, která byla získána ze zkoušky pevnosti betonu v excentrickém tahu provedené a popsané autory Wittmann a kol. (1988). Zkouška excentrickým tahem je alternativní testovací metodou k třibodové ohybové zkoušce (zkoušce tahem za ohybu). Obě testovací metody jsou dle RILEM (1985) navrženy k určení lomové energie betonu v tahu a dalších lomově-mechanických charakteristik. Wittmann a kol. (1988) provedli zkoušku excentrickým tahem pro celkem 59 betonových zkušebních vzorků s počátečním zářezem za účelem zkoumání vlivu složení betonu, rychlosti zatěžování a velikosti zkušebního vzorku. Pro účely této práce byla z citované literatury převzata a použita experimentální data získaná pro referenční zkušební vzorek, jehož rozměry jsou společně se schematickou reprezentací zkoušky uvedeny na obrázku 6.1. Použitá experimentální data jsou reprezentována zatěžovací křivkou, která udává závislost zatěžovací síly ( $F$  na obrázku 6.1) na povrchovém otevření trhliny (CMOD na obrázku 6.1). Křivka je znázorněna na obrázku 6.2. Charakteristiky betonu, pro které byla experimentální křivka na obrázku 6.2 naměřena, byly následující:  $f_c = 42,9$  MPa (pevnost betonu v jednoosém tlaku po 28 dnech zrání) a  $D_{agg} = 16$  mm (velikost největšího zrna kameniva). Experimentální data mají kvazi-statický charakter, jelikož zatěžování bylo pomalé (konstantní rychlost zatěžování byla rovna hodnotě 0,2 mm/min).



Obrázek 6.1: Schéma zkoušky pevnosti betonu v excentrickém tahu s uvedenými rozměry referenčního zkušební vzorku

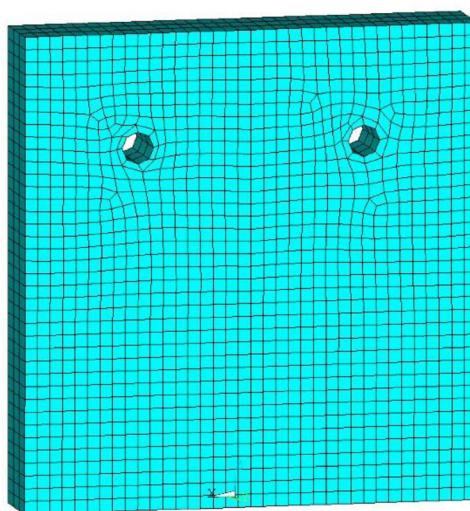


Obrázek 6.2: Experimentální zatěžovací křivka

## 6.2 Výpočtový model

Za účelem opakovaného provádění numerických simulací v rámci identifikačního procesu byl vytvořen výpočtový model řešené úlohy (zkouška pevnosti betonu v excentrickém tahu). Ve srovnání s reálnou zkouškou excentrickým tahem byl výpočtový model této zkoušky zjednodušen. Zjednodušení spočívalo v tom, že nebyly modelovány ocelové kolíky, prostřednictvím kterých se přenáší zatěžovací síly ze zkušební přístroje do zkušební vzorku (viz obrázek 6.1). Jejich účinky byly suplovány aplikací okrajových podmínek. Zmíněné zjednodušení umožnilo využití pouze konečně-prvkového modelu zkušební vzorku bez modelování dalších komponent.

Pro diskretizaci geometrického modelu zkušební vzorku se zářezem byly použity explicitní 3 D osmiuzlové strukturální konečné prvky (bricky). Při diskretizaci byla snaha o vytvoření co nejpravidelnější sítě konečných prvků, zejména pak v oblasti otvorů ve vzorku. Velikost konečných prvků byla volena tak, aby délka časového kroku v podmíněně stabilním algoritmu explicitní metody konečných prvků nebyla příliš malá. Symetrie úlohy nebyla využita, poněvadž poškození zkušební vzorku namáhaného excentrickým tahem může být obecně nesymetrické. Zářez ve vzorku byl modelován nespojitostí sítě konečných prvků (zdvojené uzly konečných prvků v místě zářezu). Výsledný konečně-prvkový model vzorku použitý v simulacích zkoušky excentrickým tahem je znázorněn na obrázku 6.3.



Obrázek 6.3: Konečně-prvkový model zkušební vzorku pro simulace zkoušky excentrickým tahem

Okrajové podmínky byly aplikovány ve smyslu zatížení a podepření konečně-prvkového modelu zkušební vzorku. Zatížení bylo aplikováno na uzly po obvodu obou otvorů ve vzorku ve formě v čase lineárně narůstajících posunů (konstantní rychlost zatěžování) ve směru osy  $x$  (směr kolmý na zářez). Maximální velikost posunutí byla zvolena tak, aby bylo dosaženo  $CMOD = 0,7$  mm. Rychlost zatěžování byla zvolena přiměřeně časové náročnosti výpočtů. Volba zatěžovací rychlosti byla, stejně jako v případě předchozí identifikační studie (resp. úlohy), umožněna v důsledku zanedbání vlivu rychlosti deformace v rámci výpočtů (viz parametr *IRATE Continuous surface cap* modelu). Podpory byly předepsány nulovými posuny ve směru osy  $y$  (směr kolmý na plochu vzorku) pro uzly po obvodu obou otvorů a pro uzly spodní podstavy konečně-prvkového modelu zkušební vzorku. V důsledku použití explicitní MKP formulace nebylo nutné do výpočtů zavádět žádná další podepření (LS-Dyna 2021).

## 6.3 Proces identifikace hodnot parametrů

### 6.3.1 Analýza citlivosti

Za účelem hledání korelací mezi vstupními a výstupními daty byla vstupní data zastoupena, stejně jako v případě předchozí identifikační studie, návrhovým vektorem, který obsahoval vstupní parametry základní verze Continuous surface cap modelu určené k identifikaci (parametry 9-36 v tabulce 4.1). Matematická podoba návrhového vektoru tedy byla (viz také rovnice (5.1))

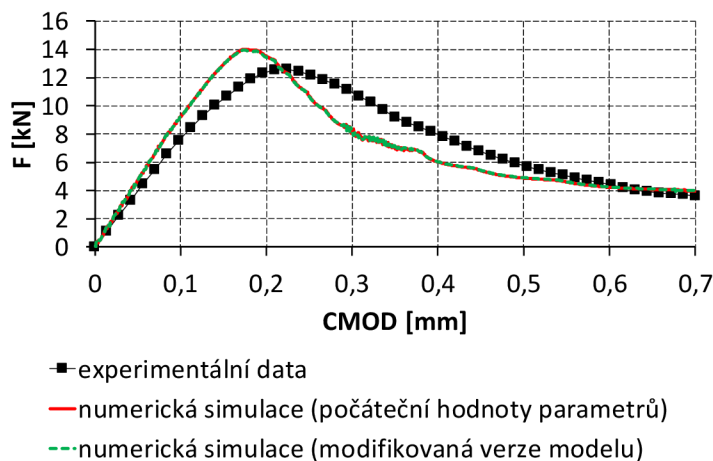
$$\mathbf{X} = \{\rho, G, K, \alpha, \theta, \lambda, \beta, \alpha_1, \theta_1, \lambda_1, \beta_1, \alpha_2, \theta_2, \lambda_2, \beta_2, R, X_0, W, D_1, D_2, B, D, pwrc, pwrt, pmod, G_{fc}, G_{ft}, G_{fs}\}^T \quad (6.1)$$

Do návrhového vektoru vstupoval každý parametr jako spojitá náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti na intervalu daném okrajovými hodnotami. Okraje rovnoměrných rozdělení pravděpodobnosti byly u jednotlivých parametrů definovány hodnotami z tabulky 4.2 pro  $f_c = 20$  MPa a 58 MPa a pro  $D_{agg} = 8$  mm a 32 mm, nebo byly definovány empirickými hodnotami (to platilo pro objemovou hmotnost  $\rho$  a parametry s konstantními kalibračními funkcemi), viz tabulka 6.1. Výstupní data byla tvořena numericky simulovanými daty, která udávala tvar simulované zatěžovací křivky odpovídající namáhání vzorku excentrickým tahem. Citlivost vstupních dat byla analyzována na celé zatěžovací křivce.

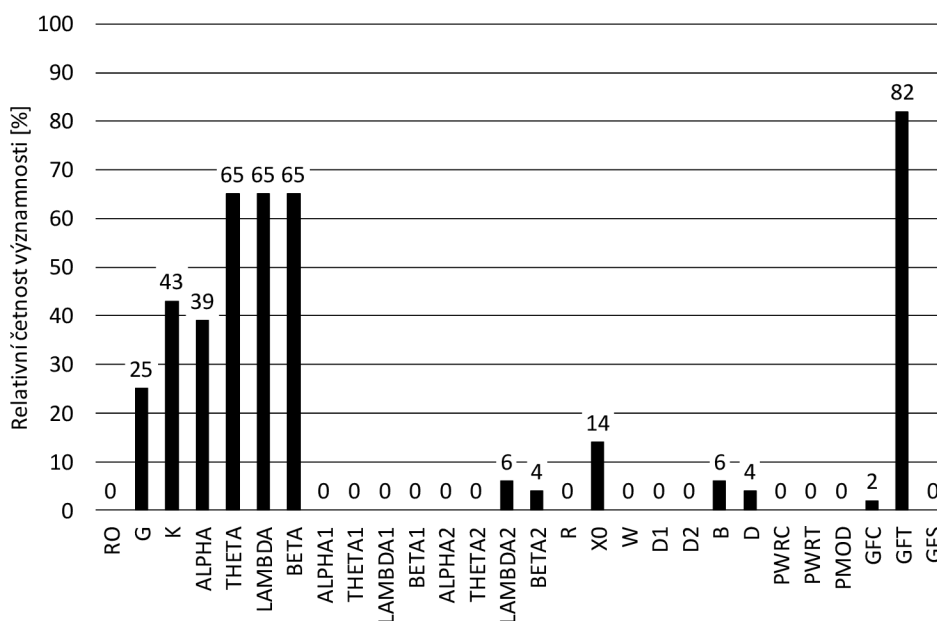
Za účelem pokrytí návrhového prostoru náhodnými realizacemi návrhového vektoru byla využita, stejně jako v případě předchozí identifikační studie, stratifikační metoda LHS. Touto metodou bylo vygenerováno celkem 100 náhodných realizací návrhového vektoru. Vygenerované realizace dostatečně pokryly návrhový prostor, přičemž nedocházelo ke vzniku klastrů. Každá realizace představovala jeden numerický výpočet řešené úlohy, přičemž první realizace návrhového vektoru odpovídala počátečním hodnotám parametrů modelu, které byly definovány manuálně. Tyto hodnoty byly získány výpočtem s použitím odvozených kalibračních křivek pro hodnoty parametrů  $f_c$  a  $D_{agg}$  odpovídající experimentálním charakteristikám ( $f_c = 42,9$  MPa a  $D_{agg} = 16$  mm). Objemová hmotnost  $\rho$  byla definována běžně používanou hodnotou pro prostý beton. Počáteční hodnoty parametrů samozřejmě respektovaly jejich okrajové hodnoty, společně s nimiž jsou uvedeny v tabulce 6.1. Na obrázku 6.4 je znázorněno srovnání experimentální zatěžovací křivky se simulovanou zatěžovací křivkou získanou pro zmíněné počáteční hodnoty parametrů modelu. Srovnání je důkazem toho, že pro řešenou úlohu je použití odvozené podoby kalibračních křivek nedostačující, jelikož i přes použití charakteristik odpovídajících experimentu vykazuje simulovaná zatěžovací křivka významné odchylky od experimentální křivky jak z hlediska maximální únosnosti a tuhosti, tak z hlediska tahového změkčování. Dále je na obrázku 6.4 znázorněna také simulovaná zatěžovací křivka, která byla získána pro modifikovanou verzi



materiálového modelu (vstupní parametry  $f_c$  a  $D_{agg}$  modifikované verze modelu byly přirozeně definovány hodnotami odpovídajícími experimentálním charakteristikám). Je vidět, že tato křivka je prakticky totožná s křivkou získanou pro základní verzi modelu. To potvrzuje korektnost odvození kalibračních funkcí pro vstupní parametry modelu.



Obrázek 6.4: Srovnání zatěžovacích křivek



Obrázek 6.5: Relativní četnosti významnosti

Data získaná prostřednictvím LHS metody byla dále aproximována, stejně jako v případě předchozí identifikační studie, náhradními regresními modely. V tomto případě se konkrétně jednalo o lineární regresní model, izotropní kernelův model a anizotropní kernelův

model (optiSLang 2014). Na základě těchto modelů byly získány hodnoty relativních četností významnosti pro parametry zahrnuté v návrhovém vektoru (viz obrázek 6.5). Byla tedy získána informace o významných parametrech, jejichž hodnoty musely být identifikovány v rámci následné globální optimalizace. Původní návrhový vektor  $\mathbf{X}$  byl tedy pro globální optimalizaci zredukován do formy zahrnující pouze významné parametry, což lze zapsat jako

$$\mathbf{X}_{\text{red}} = \{G, K, \alpha, \theta, \lambda, \beta, \lambda_2, \beta_2, X_0, B, D, G_{fc}, G_{ft}\}^T \quad (6.2)$$

Tabulka 6.1: Počáteční, okrajové a optimální hodnoty parametrů materiálového modelu

Parametr	Jednotka	Počáteční hodnota	Okrajová hodnota (min)	Okrajová hodnota (max)	Optimální hodnota (EA)
$\rho$	Mg/mm <sup>3</sup>	2,4E-09	2,1E-09	2,5E-09	počáteční
$G$	MPa	12911	10011	14276	10923
$K$	MPa	14140	10964	15636	11034
$\alpha$	MPa	15,77	12,80	15,90	15,26
$\theta$	–	0,338	0,266	0,395	0,278
$\lambda$	MPa	10,50	9,00	12,00	11,19
$\beta$	MPa <sup>-1</sup>	0,01929	0,01500	0,02300	0,02210
$\alpha_1$	–	0,74735	0,50000	1,00000	počáteční
$\theta_1$	MPa <sup>-1</sup>	7,555E-04	1,147E-04	1,372E-03	počáteční
$\lambda_1$	–	0,17	0,14	0,20	počáteční
$\beta_1$	MPa <sup>-1</sup>	0,05470	0,02757	0,07829	počáteční
$\alpha_2$	–	0,66	0,30	0,90	počáteční
$\theta_2$	MPa <sup>-1</sup>	9,047E-04	1,310E-04	1,649E-03	počáteční
$\lambda_2$	–	0,16	0,10	0,22	0,22
$\beta_2$	MPa <sup>-1</sup>	0,05470	0,02757	0,07829	0,04086
$R$	–	5	2	8	počáteční
$X_0$	MPa	98,22	87,00	110,00	89,67
$W$	–	0,05	0,02	0,08	počáteční
$D_1$	MPa	2,5E-04	1,5E-04	3,5E-04	počáteční
$D_2$	MPa <sup>2</sup>	3,49E-07	2,49E-07	4,49E-07	počáteční
$B$	–	100,00	80,00	120,00	108,91
$D$	–	0,10000	0,00000	1,00000	0,63618
$pwrc$	–	5	2	8	počáteční
$pwrt$	–	1,0	0,5	2,0	počáteční
$pmod$	–	0	0	1	počáteční
$G_{fc}$	mJ/mm <sup>2</sup>	8,31	4,06	13,01	4,27
$G_{ft}$	mJ/mm <sup>2</sup>	0,0831	0,0406	0,1301	0,1118
$G_{fs}$	mJ/mm <sup>2</sup>	0,0831	0,0406	0,1301	počáteční
$RMSE$	kN	–	–	–	0,14278

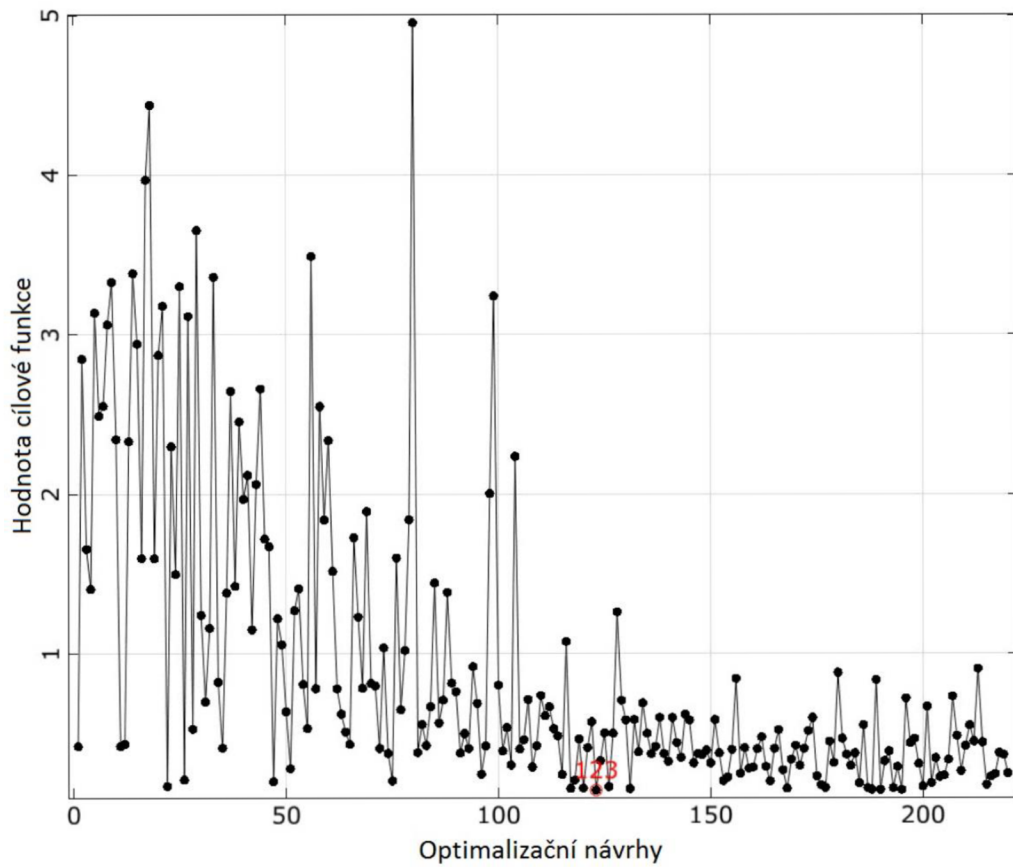
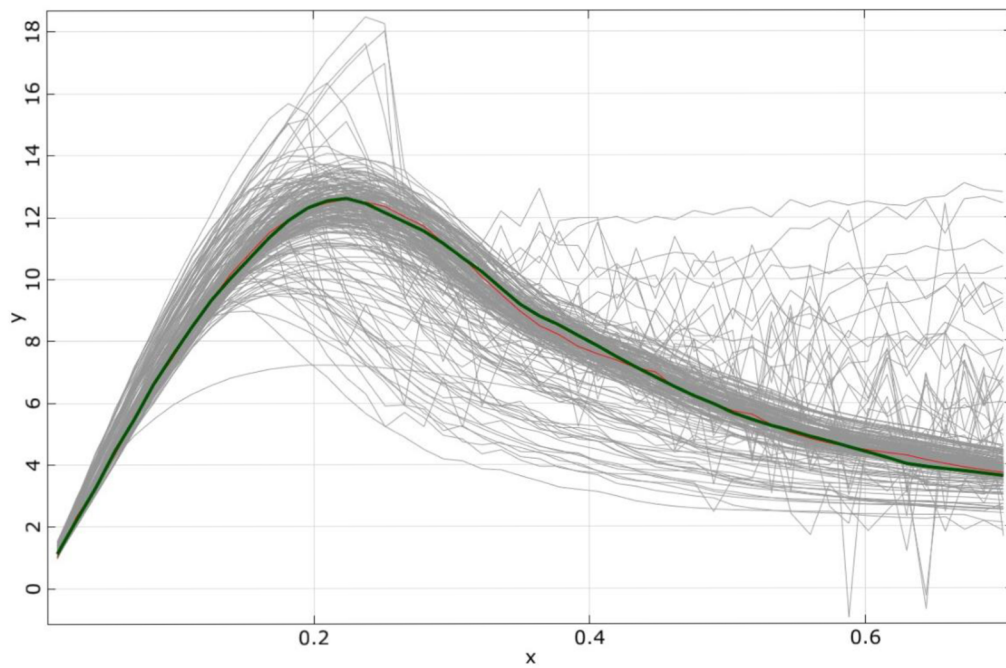
### 6.3.2 Globální optimalizace

Za účelem nalezení takových hodnot významných parametrů obsažených v redukováném návrhovém vektoru  $\mathbf{X}_{\text{red}}$ , aby bylo dosaženo minimálního rozdílu mezi simulovanou a experimentální zatěžovací křivkou, byla v rámci optimalizace využita cílová funkce, která vycházela z cílové funkce použité v rámci předchozí identifikační studie. I zde tedy byla cílová funkce založena na konceptu minimalizace sumy čtverců (LSM), přičemž rozdíly oproti předchozí cílové funkci spočívaly v jejích úpravách ve smyslu vydělení počtem diskretizačních bodů  $m$  a následného odmocnění. Těmito úpravami získaná cílová funkce charakterizuje standardní chybu aproximace (angl. zkr. RMSE  $\rightarrow$  root mean squared error). Její matematické vyjádření je dáno rovnicí (Hyndman a Koehler 2006)

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (y_{\text{sim},i} - y_{\text{ref},i})^2}{m}} \quad (6.3)$$

Cílová funkce  $RMSE$  byla využita v rámci optimalizace, přičemž bylo hledáno její globální minimum a jemu odpovídající optimální hodnoty parametrů vektoru  $\mathbf{X}_{\text{red}}$ . Za tímto účelem byly do proměnné  $y_{\text{sim},i}$  dosazovány hodnoty zatěžovací síly  $F$  z numerické analýzy a za  $y_{\text{ref},i}$  byly dosazovány odpovídající hodnoty síly  $F$  z experimentu. Počet diskretizačních bodů  $m$  se rovnal hodnotě 50. Identifikované parametry vstupovaly do redukováného návrhového vektoru jako spojité náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti (viz také analýza citlivosti). Ostatní parametry byly definovány deterministicky s využitím jejich počátečních hodnot (viz tabulka 6.1, sloupec pro optimální hodnoty). Byla provedena pouze globální optimalizace bez následné optimalizace lokální.

Pro globální optimalizaci byl použit, stejně jako v případě předchozí identifikační studie, evoluční algoritmus (EA). Náhodně vybraná realizace LHS metody posloužila jako výchozí bod pro evoluční algoritmus. Historie hodnoty použité cílové funkce  $RMSE$  v závislosti na jednotlivých cyklech (optimalizačních návrzích) evolučního algoritmu je znázorněna na obrázku 6.6. Každý optimalizační návrh představoval jeden numerický výpočet řešené úlohy (viz šedé zatěžovací křivky na obrázku 6.7, zelená barva značí experimentální zatěžovací křivku). Na obrázku 6.6 lze vidět, že globální minimum cílové funkce odpovídalo optimalizačnímu návrhu s číslem 123 (viz červená zatěžovací křivka na obrázku 6.7). Jemu odpovídající optimální hodnoty parametrů návrhového vektoru  $\mathbf{X}_{\text{red}}$  jsou uvedeny v tabulce 6.1 společně s minimální hodnotou použité cílové funkce. Na obrázku 6.6 lze dále vidět, že optimalizační výpočet pokračoval dále i po nalezení globálního minima. To se nicméně dělo jen po omezenou dobu, po které byl algoritmus automaticky ukončen z důvodu neschopnosti dalšího vylepšení výsledků.

Obrázek 6.6: Historie hodnoty cílové funkce *RMSE*

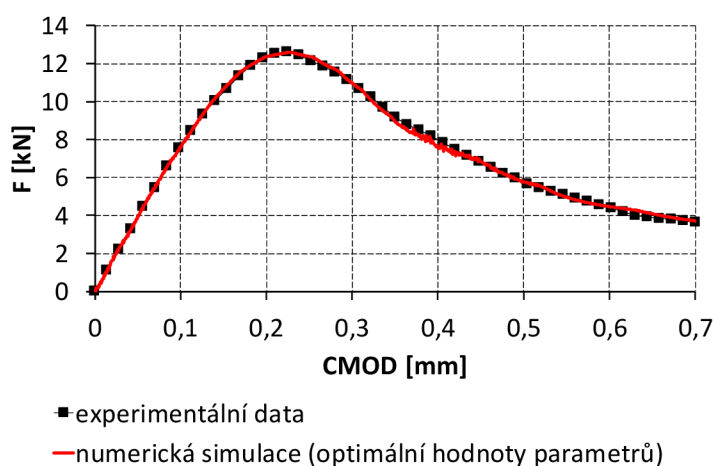
Obrázek 6.7: Výsledky optimalizačních návrhů

### 6.3.3 Výsledky a doporučení

Na obrázku 6.8 je znázorněno výsledné srovnání experimentální zatěžovací křivky se simulovanou zatěžovací křivkou, která byla získána z výpočtu, v němž byly použity optimální hodnoty parametrů základní verze Continuous surface cap modelu z tabulky 6.1. Na základě tohoto srovnání lze konstatovat, že hodnoty vstupních parametrů modelu získané na základě provedené globální optimalizace představují velmi kvalitní kalibrační data pro řešenou úlohu, jelikož rozdíly mezi křivkami na obrázku 6.8 jsou prakticky zanedbatelné. Tato data nicméně neodpovídají hodnotám získaným na základě kalibračních křivek, jejichž podoba byla v rámci této práce odvozena (viz tabulka 6.1). Za účelem vylepšení dat pro potřeby kalibrace daného materiálového modelu v rámci numerického řešení zkoušky pevnosti betonu v excentrickém tahu je tedy potřeba příslušné kalibrační křivky upravit podle získaných výsledků.

Navržená úprava spočívá v zahrnutí posunů v oblasti oboru hodnot do příslušných kalibračních křivek. Tím jsou získány kalibrační funkce, které respektují získané výsledky a zachovávají si své derivace. Původní kalibrační funkce pro vstupní parametry modelu identifikované v rámci globální optimalizace a jejich doporučené (navržené) úpravy jsou tedy uvedeny v tabulce 6.2. Kalibrační křivky ostatních parametrů mohou být ponechány v původním tvaru, jelikož numerický výsledek na obrázku 6.8 odpovídá počátečním hodnotám těchto parametrů, které byly získány právě na základě původních kalibračních křivek (viz tabulka 6.1).

Získané výsledky a poznatky mohou s výhodou posloužit jako podklad pro další případný výzkum zabývající se kalibrací Continuous surface cap modelu v jeho základní verzi, nebo jako pomůcka pro praktickou aplikaci modelu.



Obrázek 6.8: Výsledné srovnání zatěžovacích křivek

Tabulka 6.2: Původní a upravené kalibrační funkce

Par.	Původní funkce*	Doporučená úprava funkce*
$G$	$G = \frac{18275}{2,3\sqrt[3]{10}} f_c^{1/3}$	$G = \frac{18275}{2,3\sqrt[3]{10}} f_c^{1/3} - 1988$
$K$	$K = \frac{18275}{2,1\sqrt[3]{10}} f_c^{1/3}$	$K = \frac{18275}{2,1\sqrt[3]{10}} f_c^{1/3} - 3106$
$\alpha$	Pro $f_c < 46$ MPa: $\alpha = -5E - 06f_c^3 - 0,0026f_c^2 + 0,3089f_c + 7,7026$ Pro $f_c \geq 46$ MPa: $\alpha = 15,9$	Pro $f_c < 46$ MPa: $\alpha = -5E - 06f_c^3 - 0,0026f_c^2 + 0,3089f_c + 7,1926$ Pro $f_c \geq 46$ MPa: $\alpha = 15,39$
$\theta$	$\theta = 0,2166\exp^{0,0104f_c}$	$\theta = 0,2166\exp^{0,0104f_c} - 0,06$
$\lambda$	$\lambda = 10,5$	$\lambda = 11,19$
$\beta$	$\beta = 0,01929$	$\beta = 0,0221$
$\lambda_2$	$\lambda_2 = 0,16$	$\lambda_2 = 0,22$
$\beta_2$	$\beta_2 = -2,0113E - 05f_c^2 + 23,48E - 05f_c + 0,081648$	$\beta_2 = -2,0113E - 05f_c^2 + 23,48E - 05f_c + 0,067808$
$X_0$	$X_0 = 0,0077f_c^2 + 0,0064f_c + 83,77$	$X_0 = 0,0077f_c^2 + 0,0064f_c + 75,22$
$B$	$B = 100$	$B = 108,91$
$D$	$D = 0,1$	$D = 0,63618$
$G_{fc}$	Pro $D_{agg} = 8$ mm: $G_{fc} = \frac{2,5}{10^{0,7}} f_c^{0,7}$ Pro $D_{agg} = 16$ mm: $G_{fc} = \frac{3}{10^{0,7}} f_c^{0,7}$ Pro $D_{agg} = 32$ mm: $G_{fc} = \frac{3,8}{10^{0,7}} f_c^{0,7}$	Pro $D_{agg} = 8$ mm: $G_{fc} = \frac{2,5}{10^{0,7}} f_c^{0,7} - 4,04$ Pro $D_{agg} = 16$ mm: $G_{fc} = \frac{3}{10^{0,7}} f_c^{0,7} - 4,04$ Pro $D_{agg} = 32$ mm: $G_{fc} = \frac{3,8}{10^{0,7}} f_c^{0,7} - 4,04$
$G_{ft}$	Pro $D_{agg} = 8$ mm: $G_{ft} = \frac{0,025}{10^{0,7}} f_c^{0,7}$ Pro $D_{agg} = 16$ mm: $G_{ft} = \frac{0,03}{10^{0,7}} f_c^{0,7}$ Pro $D_{agg} = 32$ mm: $G_{ft} = \frac{0,038}{10^{0,7}} f_c^{0,7}$	Pro $D_{agg} = 8$ mm: $G_{ft} = \frac{0,025}{10^{0,7}} f_c^{0,7} + 0,0287$ Pro $D_{agg} = 16$ mm: $G_{ft} = \frac{0,03}{10^{0,7}} f_c^{0,7} + 0,0287$ Pro $D_{agg} = 32$ mm: $G_{ft} = \frac{0,038}{10^{0,7}} f_c^{0,7} + 0,0287$

\*pro dosažení hodnoty za  $f_c$  v megapascálech

## 7 Modifikovaná verze modelu

Jak již bylo zmíněno dříve, zásadní nevýhodou modifikované verze Continuous surface cap modelu je nedostatečná ovlivnitelnost simulované odezvy materiálu, především pak v oblasti změkčování. Proto se obecně doporučuje využívat modifikovanou verzi modelu především v simulacích úloh, ve kterých zmíněný aspekt nehraje zas až tak zásadní roli. Efektivně lze modifikovanou verzi modelu využít například v simulacích, ve kterých je oblastí zájmu analýza odezvy vyztuženého prvku z kvazi-křehkého materiálu na zatížení před dosažením mezní únosnosti. Tato skutečnost je demonstrována dále v následujících podkapitolách. Součástí je samozřejmě identifikace hodnot materiálových parametrů modifikované verze Continuous surface cap modelu, která je provedena s využitím globální optimalizace.

### 7.1 Formulace úlohy a experimentální data

Za účelem identifikace hodnot materiálových parametrů modifikované verze Continuous surface cap modelu byla jako referenční data využita data experimentální, která jsou výsledkem čtyřbodové ohybové zkoušky (zkouška pevnosti materiálu v tahu za ohybu) provedené na vysokém, betonářskou ocelí vyztuženém, betonovém nosníku. Tato zkouška byla provedena a popsána autory Damjanic a Owen (1984). Schematické znázornění zkoušky lze vidět na obrázku 7.1, na kterém je znázorněna geometrie betonového nosníku společně s geometrií a umístěním vyztužného prutu a podložek v místech zatěžování a podepření nosníku. Charakteristiky betonu (po 28 dnech zrání) a betonářské výztuže byly dle Damjanic a Owen (1984) následující:

#### Charakteristiky betonu:

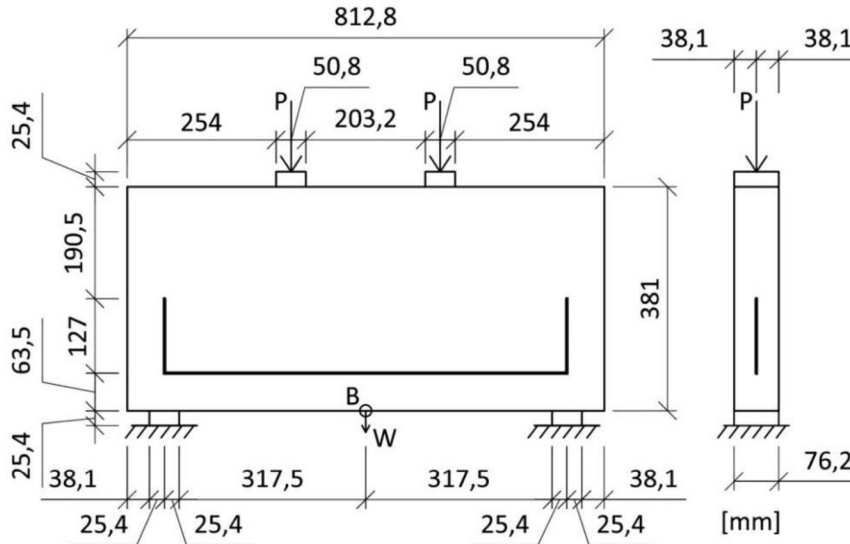
- Modul pružnosti: 20,68 GPa;
- Poissonovo číslo: 0,15;
- Pevnost v jednoosém tlaku: 24,13 MPa;
- Pevnost v jednoosém tahu: 3,10 MPa.

#### Charakteristiky betonářské výztuže:

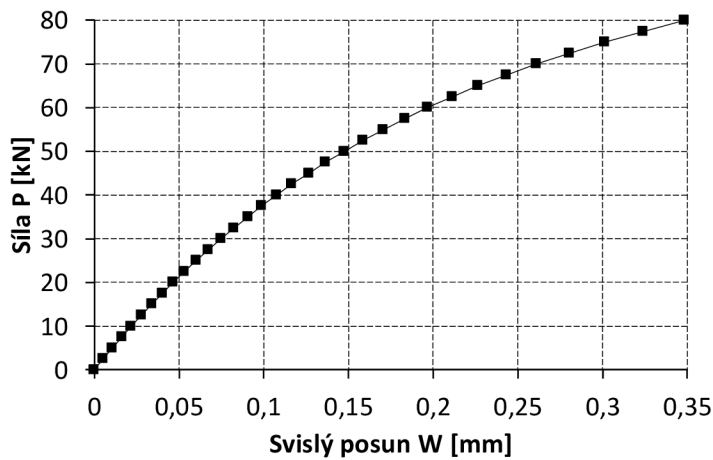
- Modul pružnosti: 210,00 GPa;
- Mez kluzu: 344,75 MPa;
- Průřezová plocha vyztužného prutu:  $0,71E-04 \text{ m}^2$ .

Jak lze vidět na obrázku 7.1, nosník byl v průběhu zkoušky zatěžován silami  $P$ . Intenzita sil v čase lineárně narůstala, dokud nebylo dosaženo hodnoty 80 kN. Rychlost zatěžování tedy byla konstantní. Zatěžování mělo kvazi-statický charakter. V průběhu zkoušky byl měřen svislý posun (průhyb) nosníku  $W$  uprostřed jeho rozpětí. Přesné místo, kde byl průhyb nosníku měřen, je na obrázku 7.1 označeno jako bod  $B$ . Naměřená

experimentální data (zatěžovací křivka), která byla využita jako data referenční, jak již bylo zmíněno, jsou znázorněna na obrázku 7.2.



Obrázek 7.1: Schematické znázornění čtyřbodové ohybové zkoušky



Obrázek 7.2: Naměřená experimentální data

## 7.2 Výpočtový model

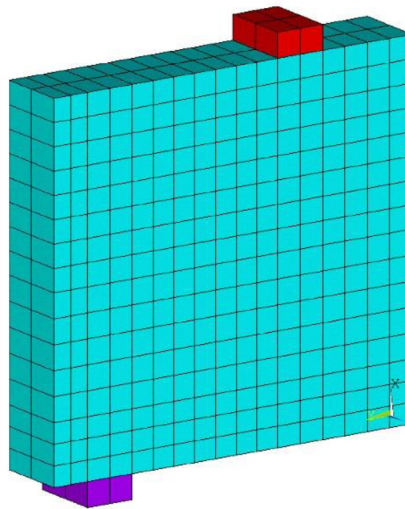
Při tvorbě výpočtového modelu řešené úlohy (čtyřbodová ohybová zkouška) bylo respektováno její schéma z obrázku 7.1. V rámci výpočtového modelu bylo potřeba vytvořit konečně-prvkové modely vysokého nosníku, výztužného prutu a podložek. Dále bylo potřeba definovat okrajové podmínky (podpory a zatěžování).



Konečně-prvkový model nosníku byl vytvořen s použitím 3 D osmiuzlových explicitních strukturálních konečných prvků. Síť konečných prvků tvořící model nosníku byla pravidelná, přičemž byla využita symetrie úlohy (byla modelována pouze polovina nosníku), viz obrázek 7.3. Hustota sítě konečných prvků modelu nosníku byla zvolena tak, aby časová náročnost výpočtů v důsledku použití explicitního konečně-prvkového algoritmu nebyla příliš vysoká.

Výztužný prut byl modelován prostřednictvím 3 D dvouuzlových explicitních prutových konečných prvků. Hustota sítě prutových konečných prvků byla přizpůsobena konečně-prvkovému modelu nosníku tak, aby byla zajištěna spojitost mezi modelem nosníku a modelem výztužného prutu. Dimenze obdélníkového (resp. čtvercového) průřezu prutových konečných prvků byly zadány tak, aby výsledná průřezová plocha modelu výztužného prutu odpovídala hodnotě z experimentu ( $0,71E-04 \text{ m}^2$ ).

Podložky byly modelovány s použitím 3 D osmiuzlových explicitních strukturálních konečných prvků. Velikosti konečných prvků tvořících modely podložek odpovídaly velikostem konečných prvků tvořících model nosníku (viz obrázek 7.3).



Obrázek 7.3: Konečně-prvkový model řešené úlohy

Okrajové podmínky byly v rámci výpočtového modelu řešené úlohy definovány v místech podložek a na ose symetrie vysokého nosníku. Model spodní podložky měl okrajové podmínky definovány tak, aby bylo zabráněno jeho posunutí ve vodorovném i svislém směru (ve směrech všech tří os kartézského souřadnicového systému  $xyz$ ). Model horní podložky měl okrajové podmínky definovány tak, aby bylo zabráněno jeho posunutí pouze ve vodorovném směru (ve směrech os  $y$  a  $z$ ) z důvodů aplikace zatížení. V místě osy symetrie měl model nosníku předepsány symetrické okrajové podmínky. Zatěžování bylo aplikováno na model horní podložky ve formě v čase lineárně narůstajícího tlaku

(konstantní rychlost zatěžování) ve svislém směru (ve směru osy  $x$ ). Konečná velikost tlaku odpovídala po přepočtu síle o intenzitě 80 kN. Rychlost zatěžování byla zvolena přiměřeně časové náročnosti výpočtů (její volba byla opět umožněna v důsledku zanedbání vlivu rychlosti deformace v rámci výpočtů). Zatěžování bylo dále aplikováno také ve formě zohlednění vlastní tíhy konstrukce (LS-Dyna 2021).

Materiálové chování výztužného prutu a podložek bylo v rámci výpočtového modelu popsáno prostřednictvím materiálových modelů uvedených v následující podkapitole.

## 7.3 Doplnkové materiálové modely

### 7.3.1 Plastic kinematic model

Materiálové chování výztužného prutu bylo modelováno prostřednictvím Plastic kinematic modelu (LS-Dyna 2021). Plastic kinematic model je explicitní pružnoplastický konstitutivní model, který z hlediska odezvy materiálu rozlišuje celkem dvě základní lineární větve pracovního diagramu (bilineární odezva materiálu). První větev reprezentuje pružné chování materiálu, kdy se uplatňuje Hookův zákon. Tento pružný stav trvá, dokud není dosažena hodnota meze kluzu materiálu. Po dosažení meze kluzu dochází ke vzniku plastických deformací a následnému plastizování materiálu. Tento stav charakterizuje druhá (plastická) větev. Úhel sklonu plastické větve závisí na hodnotě pružnoplastického (tečného) modulu. Nulový pružnoplastický modul znamená nulový sklon plastické větve, a tudíž modelování materiálu bez zpevnění. Naopak nenulový pružnoplastický modul znamená nenulový sklon plastické větve, a tudíž uvážení zpevnění materiálu, které může v rámci modelu nabývat izotropní, kinematické nebo kombinované podoby.

Modelování vlivu rychlosti deformace je v rámci materiálového modelu založeno na formulaci podle Cowpera a Symondse (Cowper a Symonds 1957), která předpokládá násobení meze kluzu materiálu faktorem závislým na rychlosti deformace  $\varepsilon_{sr}$ . Matematické vyjádření zmíněného faktoru je

$$1 + \left( \frac{\varepsilon_{sr}}{C} \right)^p \quad (7.1)$$

kde konstanty  $C$  a  $p$  představují parametry vlivu rychlosti deformace.

Materiálový model je vhodný především pro modelování odezvy konstrukční či betonářské oceli, nicméně může být využit také pro modelování odezvy plastických materiálů, které se chovají podobně jako ocel.

Zanedbání vlivu rychlosti deformace při výpočtech bylo v rámci materiálového modelu zajištěno skrze nulové hodnoty parametrů  $C$  a  $p$ . Zpevnění materiálu nebylo

uvažováno. Vstupní parametry modelu nepodléhaly identifikaci, a byly tudíž definovány deterministicky hodnotami z experimentu. Použité hodnoty, jednotky a popisy parametrů Plastic kinematic modelu jsou uvedeny v tabulce 7.1.

Tabulka 7.1: Plastic kinematic model – vstupní parametry a jejich hodnoty

Parametr	Popis	Hodnota	Jednotka
$\rho$	Objemová hmotnost	7,85E-09	Mg/mm <sup>3</sup>
$E$	Youngův modul pružnosti	210000	MPa
$\nu$	Poissonovo číslo	0,3	–
$f_y$	Mez kluzu	344,75	MPa
$E_t$	Pružnoplastický (tečný) modul	0	MPa
$C$	Parametr vlivu rychlosti deformace $C$ ; $C = 0 \rightarrow$ bez vlivu rychlosti deformace	0	–
$p$	Parametr vlivu rychlosti deformace $p$ ; $p = 0 \rightarrow$ bez vlivu rychlosti deformace	0	–

### 7.3.2 Linear elastic model

Materiálové chování podložek bylo modelováno prostřednictvím Linear elastic modelu (LS-Dyna 2021), což je explicitní konstitutivní model založený na lineární teorii pružnosti, ve které je závislost mezi napětími a poměrnými deformacemi vyjádřena zobecněným Hookovým zákonem. Tento materiálový model byl použit, protože pro modelování materiálového chování podložek nebyl zapotřebí model detailnější (nelineární). Vstupní parametry modelu nepodléhaly identifikaci, a byly tudíž definovány deterministickými hodnotami. Použité hodnoty, jednotky a popisy parametrů Linear elastic modelu jsou uvedeny v tabulce 7.2.

Tabulka 7.2: Linear elastic model – vstupní parametry a jejich hodnoty

Parametr	Popis	Hodnota	Jednotka
$\rho$	Objemová hmotnost	7,85E-09	Mg/mm <sup>3</sup>
$E$	Youngův modul pružnosti	210000	MPa
$\nu$	Poissonovo číslo	0,3	–

## 7.4 Identifikace hodnot parametrů

### 7.4.1 Globální optimalizace

Vzhledem k velmi nízkému počtu identifikovaných parametrů (materiálové parametry  $\rho$ ,  $f_c$  a  $D_{agg}$  modifikované verze Continuous surface cap modelu) byla provedena přímo globální optimalizace bez předchozí analýzy citlivosti.

Za účelem nalezení takových hodnot identifikovaných parametrů, aby bylo dosaženo minimálního rozdílu mezi simulovanými a experimentálními daty, byla v rámci globální optimalizace využita, stejně jako v předchozím případě, cílová funkce  $RMSE$  charakterizující standardní chybu aproximace. Její matematický zápis byl pro řešenou úlohu dán rovnicí

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (W_{sim,i} - W_{ref,i})^2}{m}} \quad (7.2)$$

V průběhu optimalizace bylo hledáno globální minimum cílové funkce  $RMSE$  a jemu odpovídající optimální hodnoty identifikovaných parametrů. Za tímto účelem byly za  $W_{sim,i}$  dosazovány numericky simulované hodnoty svislého posunu (průhybu) odpovídající příslušným hodnotám zatěžovací síly  $P$  a za  $W_{ref,i}$  byly dosazovány referenční (experimentálně naměřené) hodnoty svislého posunu odpovídající stejným hodnotám zatěžovací síly. Počet diskretizačních bodů  $m$  byl roven hodnotě 32. Identifikované parametry tvořily v rámci globální optimalizace návrhový vektor, který lze zapsat jako

$$\mathbf{X} = \{\rho, f_c, D_{agg}\}^T \quad (7.3)$$

Každý parametr vstupoval do návrhového vektoru jako spojitá náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti na intervalu daném definovanými okrajovými hodnotami. Jako okrajové hodnoty byly použity doporučené mezní hodnoty pro parametry  $f_c$  a  $D_{agg}$  a empirické hodnoty pro parametr  $\rho$  (viz tabulka 7.3). Počáteční hodnoty identifikovaných parametrů, které posloužily jako výchozí bod pro optimalizaci, odpovídaly hodnotám z experimentu (viz také tabulka 7.3). Tyto hodnoty samozřejmě respektovaly okrajové hodnoty parametrů.

Výchozí metodou pro globální optimalizaci byl, stejně jako v předešlých identifikačních procesech, evoluční algoritmus (EA). Pro srovnání zde nicméně byly, jako nástroje pro globální optimalizaci, použity také další metody. Konkrétně se jednalo o již dříve využitě metody simplex (SM) a PSO, a také o adaptivní metodu plochy odezvy (angl. zkr. ARSM) (optiSLang 2014), která se řadí mezi přímé optimalizační algoritmy. Tato metoda je založena na polynomiální aproximaci s efektivitou cca do počtu 20 identifikovaných parametrů. Při svém běhu metoda začíná s jedním počátečním

návrhovým bodem, kolem kterého je vystavěno počáteční DoE (angl. zkr. pro Design of Experiments (Hicks 1973)) schéma (počáteční návrhový bod tvoří střed schématu). Na základě aproximace modelových odezev je v rámci mezi DoE schématu hledán optimální návrhový bod. Po jeho nalezení končí první iterační krok metody a startuje druhý, ve kterém je kolem předešlého optimálního návrhového bodu (středu) vystavěno nové DoE schéma a proces dále pokračuje jako v předešlém iteračním kroku (nalezení nového optimálního návrhového bodu → další iterační krok atd.). V závislosti na vzdálenosti mezi optimálními návrhovými body aktuálního a předchozího iteračního kroku se DoE schéma vždy posune, zmenší nebo rozšíří (adaptuje). Metoda konverguje k optimálnímu řešení, pokud dochází k postupnému zmenšování DoE schématu na minimální velikost. Výhodou metody je, že dovoluje dodatečné začlenění požadavků či omezení do cílové funkce.

Při optimalizačních výpočtech byla hodnota cílové funkce *RMSE* vždy postupně minimalizována skrze jednotlivé iterace či cykly použitých optimalizačních metod. Každá iterace (nebo cyklus) představovala jeden numerický výpočet řešené úlohy. Jakmile již nedocházelo k dalšímu zlepšování výsledků, došlo vždy k automatickému ukončení výpočtu.

Tabulka 7.3: Počáteční a okrajové hodnoty identifikovaných parametrů

Parametr	Jednotka	Počáteční hodnota	Okrajová hodnota (min)	Okrajová hodnota (max)
$\rho$	Mg/mm <sup>3</sup>	2,40E-09	2,10E-09	2,45E-09
$f_c$	MPa	24,13	20,00	58,00
$D_{agg}$	mm	16	8	32

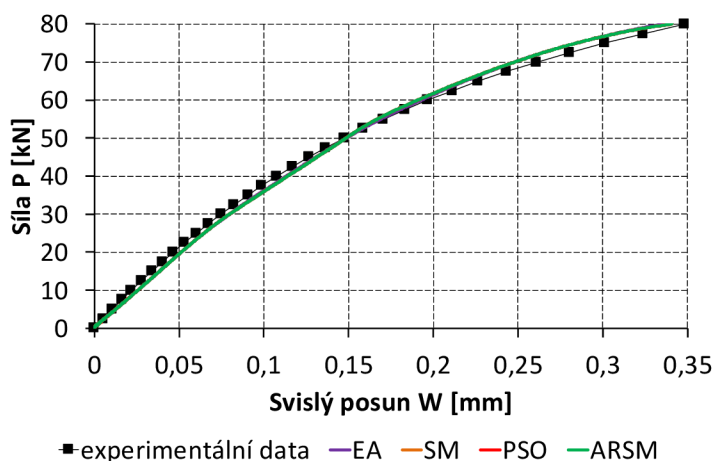
#### 7.4.2 Výsledky a jejich zhodnocení

Tabulkové srovnání výsledků globální optimalizace pro všechny použité optimalizační metody je uvedeno v tabulce 7.4. Konkrétně jsou v tabulce 7.4 uvedeny výsledné optimální (naintifikované) hodnoty materiálových parametrů modifikované verze Continuous surface cap modelu odpovídající nejlepším iteracím či cyklům použitých optimalizačních metod, a to včetně příslušných minimálních hodnot použité cílové funkce. Dále jsou v tabulce 7.4 uvedeny také počty iterací či cyklů použitých optimalizačních metod, které byly nutné pro nalezení minima cílové funkce a jemu odpovídajících optimálních hodnot identifikovaných materiálových parametrů. Na obrázku 7.4 je znázorněno grafické srovnání výsledků numerických simulací, ve kterých

byly použity optimální hodnoty materiálových parametrů modelu uvedené v tabulce 7.4, společně s experimentálními daty.

Tabulka 7.4: Tabulkové srovnání výsledků

Parametr	Jednotka	Optimální hodnota			
		EA	SM	PSO	ARSM
$\rho$	Mg/mm <sup>3</sup>	2,450E-09	2,409E-09	2,438E-09	2,450E-09
$f_c$	MPa	20,00000	20,00000	20,00007	20,00000
$D_{agg}$	mm	28,10027	8,00829	8,00000	8,00000
$RMSE$	mm	0,0073995	0,0074597	0,0074575	0,0074581
nutný počet iterací (cyklů):		400	75	400	180



Obrázek 7.4: Grafické srovnání výsledků

Z výsledků uvedených v tabulce 7.4 a na obrázku 7.4 lze vidět, že přesnost všech čtyř použitých optimalizačních přístupů byla velmi uspokojivá, neboť bylo dosaženo velmi dobré aproximace experimentálních dat numerickými simulacemi, ve kterých byly použity optimální hodnoty parametrů materiálového modelu získané právě při využití jednotlivých optimalizačních metod. Navíc lze vidět, že rozdíly v přesnosti mezi jednotlivými metodami jsou prakticky zanedbatelné (numerické křivky na obrázku 7.4 se prakticky překrývají). Při pohledu na hodnoty cílové funkce  $RMSE$  pro jednotlivé metody v tabulce 7.4 lze nicméně za nejpřesnější optimalizační přístup označit evoluční algoritmus, který byl při optimalizaci použit jako výchozí metoda.

Pokud bychom chtěli srovnat použité optimalizační metody z hlediska nutného počtu iterací či cyklů (tedy z hlediska časové náročnosti či efektivity optimalizace), tak lze podle údajů uvedených v tabulce 7.4 konstatovat, že nejefektivnější metodou byla pro

danou úlohu metoda simplexová, neboť pro nalezení minima cílové funkce potřebovala pouze 75 iterací, a byla tedy časově nejméně náročná. Naopak nejméně efektivními optimalizačními přístupy byly evoluční algoritmus a PSO metoda, neboť pro nalezení minima cílové funkce potřebovaly až 400 cyklů či iterací.

Závěrem lze konstatovat, že z hlediska přesnosti a nalezení skutečného globálního minima cílové funkce při globální optimalizaci je nejvhodnější použít evoluční algoritmus, ačkoliv tento optimalizační přístup nepatří k časově nejefektivnějším. Podkladem pro toto tvrzení jsou údaje uvedené v textu výše a také skutečnost, že se optimální hodnota parametru  $D_{agg}$  z evolučního algoritmu výrazně liší od hodnot tohoto parametru z jiných optimalizačních přístupů (viz tabulka 7.4). Tento rozdíl byl způsoben existencí dvou velmi blízkých minim cílové funkce  $RMSE$ , z nichž pouze jedno bylo možné klasifikovat jako globální minimum. Vzhledem k tomu, že nejmenší  $RMSE$  hodnota odpovídá evolučnímu algoritmu, bylo právě s využitím tohoto algoritmu nalezeno skutečné globální minimum použité cílové funkce. V případě dalších použitých optimalizačních metod bylo nalezeno minimum lokální, které však bylo velmi blízké minimu globálnímu. Z tohoto důvodu lze výsledky všech metod považovat za srovnatelné. Zmíněné skutečnosti potvrdily dříve uvedené tvrzení, že pro hledání globálního minima cílové funkce je vhodný zejména evoluční algoritmus, neboť na rozdíl od jiných optimalizačních metod dokáže při svém běhu bez problémů vystoupit z lokálního minima funkce velmi blízkého minimu globálnímu.

Při odhlédnutí od problematiky blízkých lokálních a globálních extrémů lze v důsledku srovnatelnosti získaných výsledků dále závěrem konstatovat také to, že z hlediska časové efektivity může být při globální optimalizaci velmi výhodné využít simplexovou metodu nebo případně také adaptivní metodu plochy odezvy.

Výše uvedené výsledky a poznatky mohou s výhodou posloužit jako podklad pro další práci s modifikovanou verzí Continuous surface cap modelu, ať už z hlediska výzkumu, či praktických analýz.





## **II. část**

### **Karagozian & Case concrete model**



## 8 Parametry Karagozian & Case concrete modelu

Karagozian & Case concrete model (MAT 72 ve výpočetním systému LS-Dyna) (Malvar a kol. 1997, LS-Dyna 2021) je tří invariantní konstitutivní model založený na třech plochách smykového porušení, kterými jsou plocha smykového porušení na mezi vzniku plastických deformací, plocha smykového porušení na mezi maximální (ultimátní) pevnosti a plocha smykového porušení na mezi reziduální pevnosti. Zmíněné plochy smykového porušení jsou vzájemně nezávislé a jejich zobecněný matematický zápis může být vyjádřen následovně (Wu a kol. 2012)

$$F_i(p) = a_{0i} + \frac{p}{a_{1i} + a_{2i}p} \quad (8.1)$$

kde se spodní index  $i$  rovná  $y$  (plocha smykového porušení na mezi vzniku plastických deformací),  $m$  (plocha smykového porušení na mezi maximální pevnosti) nebo  $r$  (plocha smykového porušení na mezi reziduální pevnosti). Proměnné  $a_{ji}$  ( $j = 0, 1, 2$ ) tvoří parametry, které je možné kalibrovat z experimentálních dat, a  $p$  je parametr závislý na prvním invariantu tenzoru napětí ( $p = -I_1/3$ ).

Výsledná plocha porušení je v rámci modelu interpolována buď mezi plochou smykového porušení na mezi maximální pevnosti a plochou smykového porušení na mezi vzniku plastických deformací, anebo mezi plochou smykového porušení na mezi maximální pevnosti a plochou smykového porušení na mezi reziduální pevnosti dle vztahů

$$F(I_1, J_2, J_3) = r(J_3)[\eta(\lambda)(F_m(p) - F_y(p)) + F_y(p)] \quad \text{pro } \lambda \leq \lambda_m \quad (8.2)$$

$$F(I_1, J_2, J_3) = r(J_3)[\eta(\lambda)(F_m(p) - F_r(p)) + F_r(p)] \quad \text{pro } \lambda > \lambda_m \quad (8.3)$$

kde  $J_2$  je druhý invariant deviátoru tenzoru napětí,  $J_3$  je třetí invariant deviátoru tenzoru napětí,  $\lambda$  je modifikovaná efektivní plastická deformace,  $\eta(\lambda)$  je funkce závislá na modifikované efektivní plastické deformaci  $\lambda$ ,  $r(J_3)$  je faktor měřítka ve formě Willam-Warnkeho rovnice (Chen a Han 1988) a  $\lambda_m$  je modifikovaná efektivní plastická deformace na mezi maximální pevnosti.

Model umožňuje zohlednit porušení materiálu s nesejnoměrnými mechanickými vlastnostmi v tahu a tlaku, tudíž je vhodný pro modelování odezvy betonu (nebo podobných kvazi-křehkých materiálů) na zatížení. V rámci svých vstupních parametrů model umožňuje zohlednit také vliv rychlosti deformace na stav napětí. Tato schopnost může být nicméně v rámci modelu zanedbána. Tím se odezva modelu stává nezávislou na časovém údaji. Z této skutečnosti je zřejmé, že Karagozia & Case concrete model je vhodný nejen pro modelování odezvy konstrukcí na rychlé dynamické zatěžování, ale

také pro modelování odezvy konstrukcí na kvazi-statické či statické zatěžování, čehož bylo v rámci této práce využito.

Tabulka 8.1: Karagozian & Case concrete model – parametry k identifikaci

Č.	Parametr	Popis	Jednotka
1	$\rho$	Objemová hmotnost	Mg/mm <sup>3</sup>
2	$\nu$	Poissonovo číslo	–
3	$\sigma_f$	Maximální hlavní napětí pro selhání materiálu	MPa
4	$a_{0m}$	Koheze pro plochu smykového porušení na mezi maximální pevnosti	MPa
5	$a_{2m}$	Koeficient zpevnění pro plochu smykového porušení na mezi maximální pevnosti	MPa <sup>-1</sup>
6	$a_{0y}$	Koheze pro plochu smykového porušení na mezi vzniku plastických deformací	MPa
7	$a_{2y}$	Koeficient zpevnění pro plochu smykového porušení na mezi vzniku plastických deformací	MPa <sup>-1</sup>
8	$a_{2r}$	Koeficient zpevnění pro plochu smykového porušení na mezi reziduální pevnosti	MPa <sup>-1</sup>
9	$B_1$	Faktor měřítka pro poškození	–
10	$P_2$	Tlak – 2. hodnota	MPa
11	$P_3$	Tlak – 3. hodnota	MPa
12	$P_4$	Tlak – 4. hodnota	MPa
13	$P_5$	Tlak – 5. hodnota	MPa
14	$P_6$	Tlak – 6. hodnota	MPa
15	$P_7$	Tlak – 7. hodnota	MPa
16	$P_8$	Tlak – 8. hodnota	MPa
17	$P_9$	Tlak – 9. hodnota	MPa
18	$P_{10}$	Tlak – 10. hodnota	MPa
19	$BU_1$	Objemový modul pružnosti při odtěžování – 1. hodnota	MPa
20	$BU_2$	Objemový modul pružnosti při odtěžování – 2. hodnota	MPa
21	$BU_3$	Objemový modul pružnosti při odtěžování – 3. hodnota	MPa
22	$BU_4$	Objemový modul pružnosti při odtěžování – 4. hodnota	MPa
23	$BU_5$	Objemový modul pružnosti při odtěžování – 5. hodnota	MPa
24	$BU_6$	Objemový modul pružnosti při odtěžování – 6. hodnota	MPa
25	$BU_7$	Objemový modul pružnosti při odtěžování – 7. hodnota	MPa
26	$BU_8$	Objemový modul pružnosti při odtěžování – 8. hodnota	MPa
27	$BU_9$	Objemový modul pružnosti při odtěžování – 9. hodnota	MPa
28	$BU_{10}$	Objemový modul pružnosti při odtěžování – 10. hodnota	MPa

Pro svou aplikaci vyžaduje materiálový model definovat číselné hodnoty celkem 48 svých vstupních parametrů společně s hodnotami 44 parametrů stavové rovnice (LS-Dyna 2021). Pro použití tohoto modelu je tedy nutné definovat číselné hodnoty celkem 92 parametrů, což je vzhledem k nefyzikální podstatě velkého množství parametrů dosti problematický úkol.

Velké množství vstupních parametrů modelu zůstává se změnou fyzikálně-mechanických vlastností materiálu konstantní. Hodnoty těchto parametrů tudíž není nutné identifikovat, čehož bylo v rámci této práce využito. Při pominutí konstantních parametrů nicméně stále zbývá definovat číselné hodnoty celkem 28 vstupních parametrů, které se mění v závislosti na fyzikálně-mechanických vlastnostech materiálu, což je stále (vzhledem k nefyzikální podstatě některých parametrů) dosti problematický úkol. Přehled těchto 28 parametrů je, včetně použitých jednotek, uveden v tabulce 8.1. Hodnoty těchto parametrů jsou v rámci této práce identifikovány za účelem nalezení co nejpřesnější aproximace experimentálních dat (viz dále) numerickou simulací.

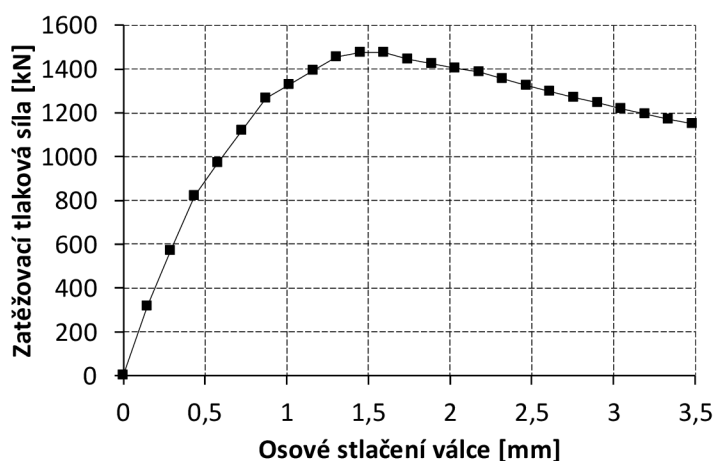


## 9 Identifikace parametrů modelu

Identifikace hodnot parametrů Karagozian & Case concrete modelu je v rámci této práce provedena, podobně jako v předchozí části, s využitím dvou fází. První fáze sestává z analýzy citlivosti, kdy je využita celá zatěžovací křivka, a druhá fáze pak z globální optimalizace. Získaná data jsou závěrem validována na dalších (při identifikaci nepoužitých) experimentálních datech.

### 9.1 Referenční (experimentální) data

Pro účely identifikace hodnot parametrů Karagozian & Case concrete modelu byla referenční data tvořena experimentální zatěžovací křivkou získanou ze zkoušek válcové pevnosti betonu v třiosém tlaku, které byly provedeny a publikovány v rámci reportu Joy a Moxley (1993). Zkouška válcové pevnosti betonu v třiosém tlaku je jednou ze zkoušek sloužících pro ověřování mechanických vlastností betonu. Rozměry betonového zkušebního válce použitého v rámci každé zkoušky byly 304,8 mm (výška) a 152,4 mm (průměr podstavy). Zjištěná pevnost betonu, ze kterého byl každý zkušební válec vyroben, v jednoosém tlaku byla 45,4 MPa. Každý zkušební válec byl v průběhu zkoušky stlačován konstantní rychlostí. Zatěžování mělo kvazi-statický charakter. Pro identifikační účely byly vybrány výsledky zkoušky pro v čase konstantní příčný tlak 7 MPa, jenž vyvozoval třiosé namáhání.



Obrázek 9.1: Referenční zatěžovací křivka

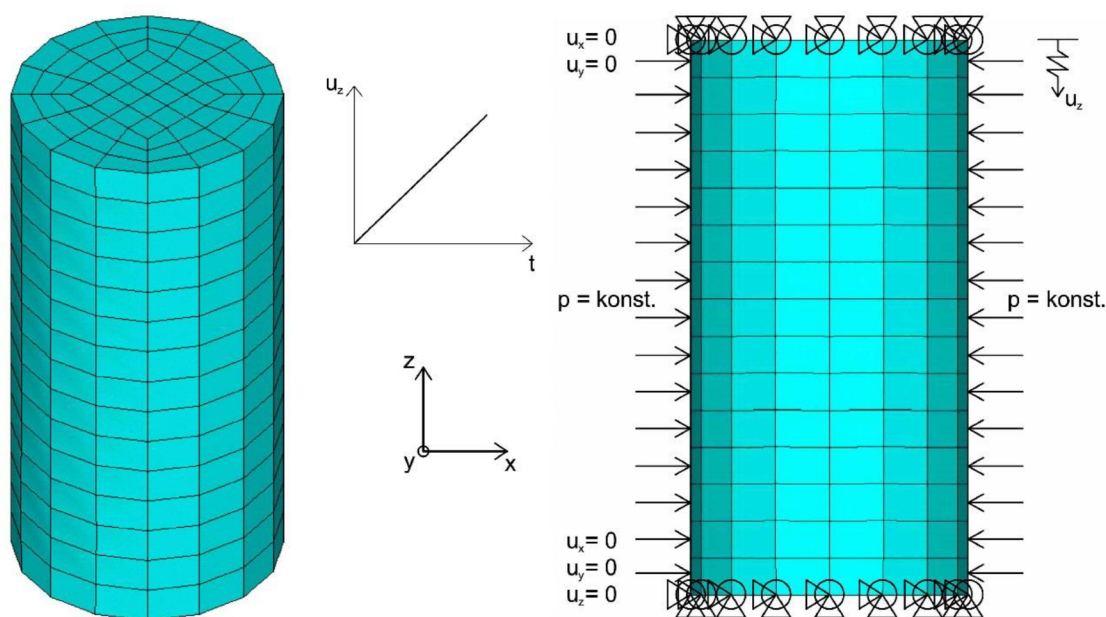
Zatěžovací křivka je znázorněna na obrázku 9.1. Při pohledu na zatěžovací křivku lze vidět, že v průběhu tlakového zatěžování vykazoval betonový válec nejprve pružnou

a poté pružnoplastickou odezvu. Dále lze vidět, že po dosažení maximální únosnosti betonového válce při daném třísém namáhání začalo docházet k tlakovému změkčování betonu. Toto změkčování se začalo projevovat v důsledku porušení struktury betonového válce vznikem trhlin. Vlivem působení v čase konstantního příčného tlaku 7 MPa je však celková odezva betonového válce poměrně duktilní.

## 9.2 Výpočtový model

Při reálné zkoušce válcové pevnosti betonu v třísém tlaku byl betonový zkušební válec vždy umístěn v triaxiální komoře mezi tlačnými deskami zkušebního lisu. Pro účely numerických simulací prováděných v rámci této práce byly okrajové podmínky zjednodušeny, a to následujícím způsobem:

- Byl modelován pouze zkušební válec bez tlačných desek prostřednictvím 3 D osmiuzlových explicitních strukturálních konečných prvků (bricků), viz obrázek 9.2. Velikost konečných prvků byla zvolena s ohledem na časovou náročnost výpočtů.
- Uzly spodní podstavy konečně-prvkového modelu válce měly předepsány nulové posuny ve všech směrech, viz obrázek 9.2.



Obrázek 9.2: Konečně-prvkový a výpočtový model zkušebního válce

- Uzly horní podstavy konečně-prvkového modelu válce měly předepsány nulové posuny v horizontálních směrech (směry os  $x$  a  $y$ ) a lineárně narůstající posuny v čase ve vertikálním směru (směr osy  $z$ ), jak je vidět na obrázku 9.2. Vertikální posuny uzlů



podstavy simulovaly stlačování válce konstantní rychlostí. Tato rychlost byla zvolena přiměřeně časové náročnosti výpočtů (její volba byla umožněna v důsledku zanedbání vlivu rychlosti deformace v rámci výpočtů).

- V čase konstantní příčný tlak 7 MPa byl aplikován přímo na model válce (LS-Dyna 2021), viz obrázek 9.2.

Počáteční tuhost válce zjištěná z numerických simulací při zjednodušených okrajových podmínkách odpovídala počáteční tuhosti skutečného válce při tlakovém namáhání. Uvažované zjednodušení tedy bylo možné považovat za korektní.

## 9.3 Proces identifikace hodnot parametrů

### 9.3.1 Analýza citlivosti

Při hledání korelací mezi výstupními a vstupními daty byla vstupní data tvořena původním návrhovým vektorem, který zahrnoval dříve zmíněných 28 vstupních parametrů Karagozian & Case concrete modelu určených k identifikaci. Podoba návrhového vektoru tedy byla následující

$$\mathbf{X} = \left\{ \rho, \nu, \sigma_f, a_{0m}, a_{2m}, a_{0y}, a_{2y}, a_{2r}, B_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, BU_1, BU_2, BU_3, BU_4, BU_5, BU_6, BU_7, BU_8, BU_9, BU_{10} \right\}^T \quad (9.1)$$

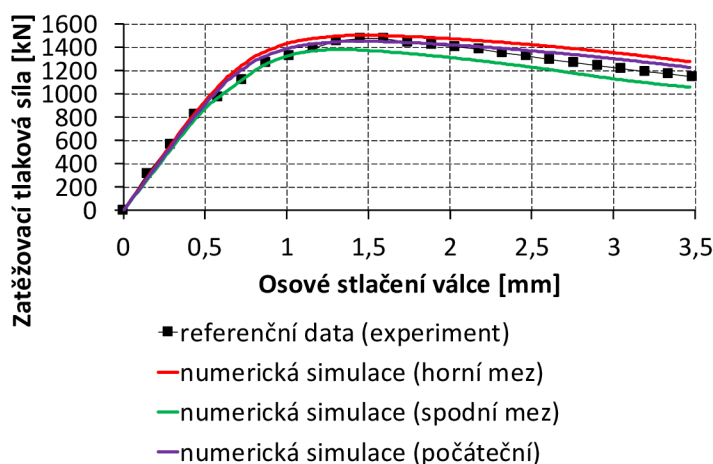
Parametry vstupovaly do návrhového vektoru jako spojité náhodné veličiny, které byly definovány rovnoměrnými rozděleními pravděpodobnosti na intervalech daných okrajovými hodnotami. Okrajové hodnoty rovnoměrných rozdělení pravděpodobnosti (viz tabulka 9.1) byly pro jednotlivé parametry návrhového vektoru odhadnuty na základě uskutečnění několika testovacích výpočtů, jejichž výsledky byly srovnány s referenční zatěžovací křivkou. Na obrázku 9.3 jsou znázorněny právě zatěžovací křivky získané z numerických simulací pro okrajové hodnoty parametrů návrhového vektoru. Tyto křivky tvořily horní a spodní mez, a tudíž obklopovaly experimentálně naměřenou referenční křivku, což je z obrázku 9.3 zřejmé. Výstupní data byla tvořena daty z numerických simulací. Tato data udávala tvar simulované zatěžovací křivky betonu při namáhání tříosým tlakem. Citlivost vstupních dat byla analyzována na celé zatěžovací křivce.

Pokrytí návrhového prostoru množstvím náhodných realizací návrhového vektoru bylo realizováno prostřednictvím metody nazývané Advanced latin hypercube sampling (ALHS  $\rightarrow$  vylepšená LHS stratifikační metoda programu optiSLang) (Huntington a Lyrintzis 1998, optiSLang 2014). S využitím této metody bylo vygenerováno celkem 500 náhodných realizací návrhového vektoru, které dostatečně pokryly daný návrhový prostor bez vzniku klastrů. Jednotlivé realizace návrhového vektoru představovaly jednotlivé

numerické výpočty řešené úlohy. První realizace návrhového vektoru nicméně nebyla náhodná, ale odpovídala počátečním hodnotám parametrů materiálového modelu (viz tabulka 9.1), které byly vybrány zcela namátkově (pouze s respektem k okrajovým hodnotám rozdělení pravděpodobnosti u jednotlivých parametrů) a zadány manuálně. Simulovaná zatěžovací křivka získaná pro počáteční hodnoty parametrů modelu je spolu s dalšími daty uvedena na obrázku 9.3.

Tabulka 9.1: Počáteční, okrajové a optimální hodnoty parametrů materiálového modelu

Parametr	Jednotka	Počáteční hodnota	Okrajová hodnota (min)	Okrajová hodnota (max)	Optimální hodnota (EA)
$\rho$	Mg/mm <sup>3</sup>	2,4E-09	2,1E-09	2,5E-09	počáteční
$\nu$	–	0,2000	0,1600	0,2000	0,1677
$\sigma_f$	MPa	3,3600	3,1500	3,5100	3,2092
$a_{0m}$	MPa	13,4200	12,4200	14,1900	13,9527
$a_{2m}$	MPa <sup>-1</sup>	1,7800E-03	1,6800E-03	1,9300E-03	1,8462E-03
$a_{0y}$	MPa	10,13	9,37	10,72	počáteční
$a_{2y}$	MPa <sup>-1</sup>	5,67E-03	5,36E-03	6,14E-03	počáteční
$a_{2r}$	MPa <sup>-1</sup>	2,61E-03	2,46E-03	2,82E-03	2,82E-03
$B_1$	–	1,5800	1,4500	1,6000	1,4752
$P_2$	MPa	26,58	22,55	27,33	22,80
$P_3$	MPa	57,94	49,17	59,58	49,17
$P_4$	MPa	93,03	78,94	95,66	počáteční
$P_5$	MPa	176,75	150,00	181,75	počáteční
$P_6$	MPa	266,59	226,24	274,12	počáteční
$P_7$	MPa	378,22	320,98	388,90	počáteční
$P_8$	MPa	578,62	491,06	594,97	počáteční
$P_9$	MPa	3378,18	2866,96	3473,57	počáteční
$P_{10}$	MPa	5166,94	4385,03	5312,84	počáteční
$BU_1$	MPa	17719	15037	18220	18220
$BU_2$	MPa	17719	15037	18220	počáteční
$BU_3$	MPa	17967	15248	18475	počáteční
$BU_4$	MPa	18871	16015	19404	počáteční
$BU_5$	MPa	22450	19052	23085	počáteční
$BU_6$	MPa	26047	22105	26783	počáteční
$BU_7$	MPa	29627	25143	30464	počáteční
$BU_8$	MPa	32338	27444	33251	počáteční
$BU_9$	MPa	72755	61745	74810	počáteční
$BU_{10}$	MPa	88596	75189	91099	počáteční
$RMSE$	kN	–	–	–	16,584644



Obrázek 9.3: Srovnání zatěžovacích křivek

Data, která byla získána aplikací ALHS metody na řešenou úlohu, byla dále aproximována náhradními regresními metamodely, čímž byla získána informace, že pouze 9 vstupních parametrů materiálového modelu z původních 28 významně ovlivňovalo výsledný tvar simulované zatěžovací křivky. Hodnoty pouze těchto významných parametrů musely být identifikovány v další fázi, která sestávala z globální optimalizace. Původní návrhový vektor  $\mathbf{X}$  byl tedy do další fáze zredukován do tvaru, který zahrnoval pouze významné parametry. Tento redukovaný návrhový vektor lze matematicky zapsat jako

$$\mathbf{X}_{\text{red}} = \{v, \sigma_f, a_{0m}, a_{2m}, a_{2r}, B_1, P_2, P_3, BU_1\}^T \quad (9.2)$$

### 9.3.2 Globální optimalizace

Hledání takových hodnot významných parametrů obsažených v redukovaném návrhovém vektoru  $\mathbf{X}_{\text{red}}$ , aby numerická data co nejpřesněji (s minimálním rozdílem) aproximovala data experimentální, bylo v rámci globální optimalizace realizováno opět s využitím cílové funkce  $RMSE$ , jejíž matematický zápis lze pro danou úlohu charakterizovat jako

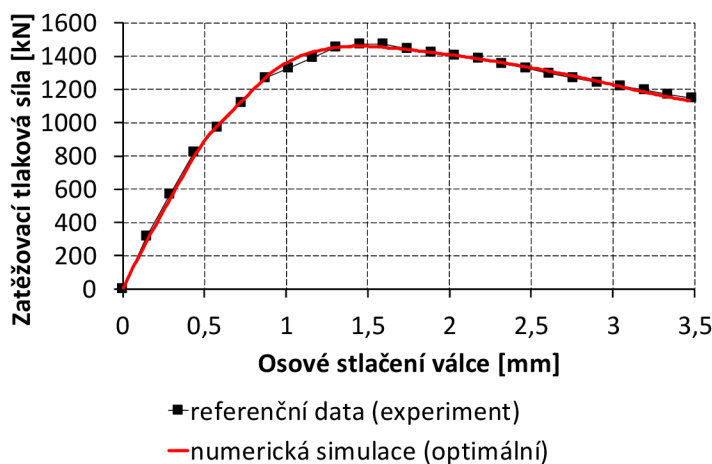
$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (F_{\text{sim},i} - F_{\text{ref},i})^2}{m}} \quad (9.3)$$

Za účelem nalezení globálního minima cílové funkce  $RMSE$  a jemu odpovídajících optimálních hodnot parametrů vektoru  $\mathbf{X}_{\text{red}}$  byly za proměnnou  $F_{\text{sim},i}$  dosazovány hodnoty zatěžovací síly odečtené ze simulované zatěžovací křivky při daných deformacích a za proměnnou  $F_{\text{ref},i}$  byly dosazovány hodnoty zatěžovací síly odečtené z experimentálně

naměřené referenční zatěžovací křivky při stejných deformacích. Použitých diskretizačních bodů  $m$  bylo celkem 24. Každý identifikovaný parametr vstupoval do redukovaného návrhového vektoru  $\mathbf{X}_{\text{red}}$  jako spojitá náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti (viz také analýza citlivosti). U ostatních parametrů byly využity jejich počáteční hodnoty (deterministické zadání), viz sloupec pro optimální hodnoty v tabulce 9.1.

Globální optimalizace byla uskutečněna, stejně jako v rámci předchozích identifikačních procesů, s využitím evolučního algoritmu (EA). Skrze jednotlivé cykly evolučního algoritmu byla při optimalizačním výpočtu hodnota cílové funkce *RMSE* postupně minimalizována. Každý cyklus představoval jeden numerický výpočet řešeného problému. Jakmile již nedocházelo ke zlepšování výsledků, optimalizační výpočet byl automaticky ukončen.

Výsledné optimální (naintifikované) hodnoty vstupních parametrů Karagozian & Case concrete modelu zahrnutých v redukovaném návrhovém vektoru  $\mathbf{X}_{\text{red}}$  jsou uvedeny v tabulce 9.1 společně s minimální hodnotou použité cílové funkce. Na obrázku 9.4 je znázorněno výsledné srovnání experimentální referenční křivky se simulovanou zatěžovací křivkou, která byla získána z výpočtu, v němž byly použity optimální hodnoty parametrů Karagozian & Case concrete modelu z tabulky 9.1. Z obrázku 9.4 lze vidět velmi dobrou aproximaci experimentálních dat numerickou simulací, což značí, že provedený optimalizační výpočet poskytl velmi dobré výsledky.



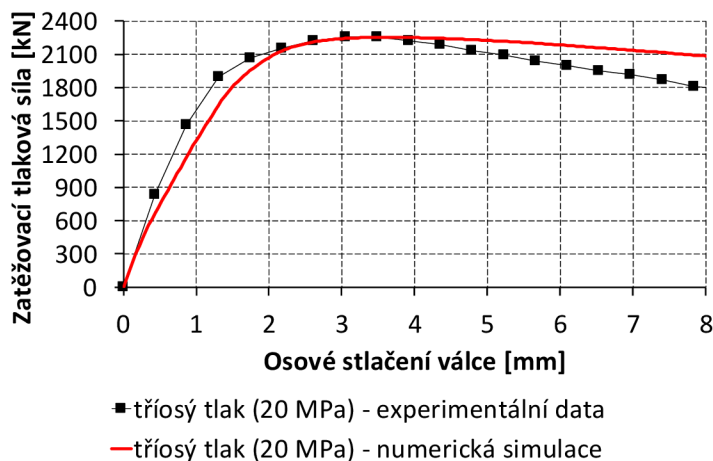
Obrázek 9.4: Výsledné srovnání zatěžovacích křivek

### 9.3.3 Validace získaných výsledků

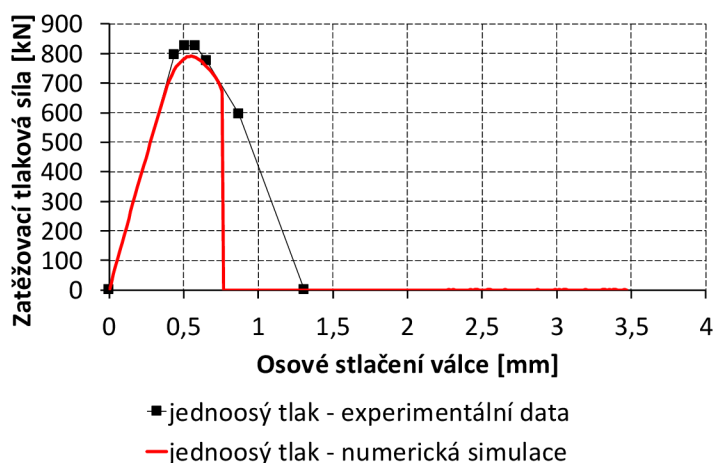
Validace výsledných optimálních hodnot parametrů Karagozian & Case concrete modelu je provedena na základě srovnání zatěžovacích křivek získaných z numerických

simulací, ve kterých byly použity právě optimální hodnoty parametrů, s experimentálními zatěžovacími křivkami odlišnými od té, která byla použita v rámci identifikačního procesu.

Na obrázku 9.5 je znázorněno srovnání experimentálně naměřené zatěžovací křivky pro tříosý tlak (příčný tlak 20 MPa) (Joy a Moxley 1993) se zatěžovací křivkou získanou z numerické simulace s aplikovanými optimálními hodnotami parametrů.



Obrázek 9.5: Srovnání zatěžovacích křivek pro tříosý tlak (20 MPa)



Obrázek 9.6: Srovnání zatěžovacích křivek pro jednoosý tlak

Na obrázku 9.6 je znázorněno srovnání experimentálně naměřené zatěžovací křivky pro jednoosý tlak (Joy a Moxley 1993) se zatěžovací křivkou získanou z numerické simulace s aplikovanými optimálními hodnotami parametrů.

Na obrázcích 9.5 a 9.6 lze vidět, že numerické simulace aproximují daná experimentální data velice uspokojivě. K výraznějším rozdílům v chování betonu dochází v oblasti tlakového změkčování, kdy pro tříosý tlak s hodnotou příčného tlaku 20 MPa vykazuje numerický model více duktilní odezvu, než je tomu v případě reálného betonu, a naopak pro jednoosý tlak vykazuje numerický model křehčí odezvu než reálný beton. Celkově lze ale konstatovat, že výsledky získané z provedeného identifikačního procesu představují velice kvalitní data vhodná pro další kalibrační účely vztahující se ke Karagozian & Case concrete materiálovému modelu. Výsledky, ale i další uvedené poznatky, lze dále využít také jako pomůcku pro praktickou aplikaci materiálového modelu.

## **III. část**

# **Algoritmizace vybraných konstitutivních vztahů**





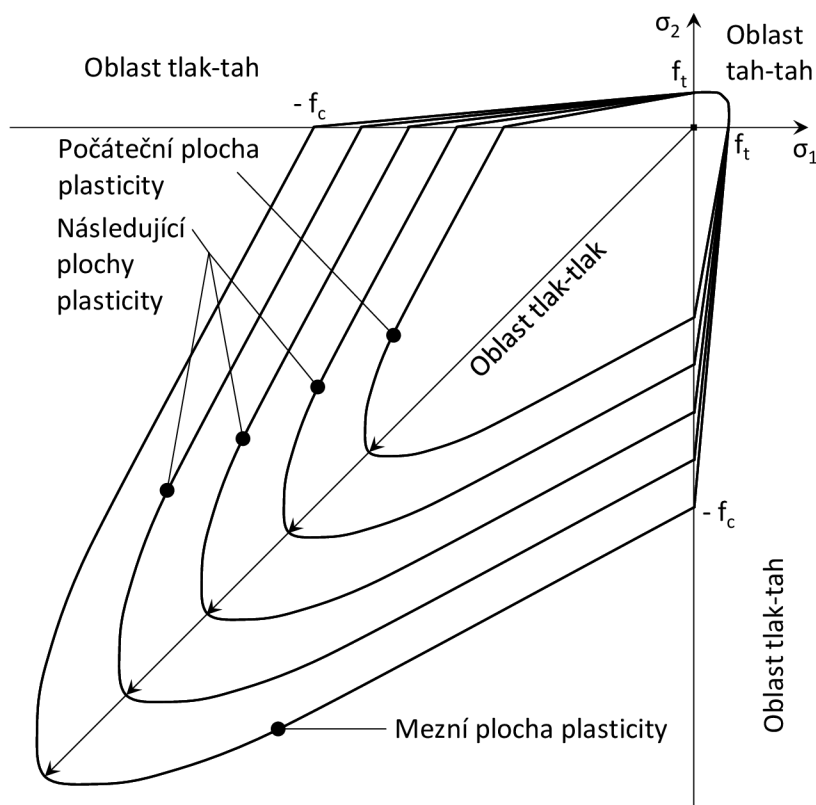
## 10 Teoretické pozadí vybraných konstitutivních vztahů

Závěrečná část práce je zaměřena na provedení algoritmicke vybraných konstitutivních vztahů určených pro matematické modelování odezvy betonu či podobně se chovajících kvazi-křehkých materiálů. Konkrétně byly vybrány konstitutivní vztahy, které lze využít pro modelování rovinného stavu napětí materiálu a které jsou založeny na přírůstkové pružnoplustické konstitutivní teorii zohledňující zpevnění materiálu (Hu a Schnobrich 1989, Schwer a Murray 1994, Grassl a Jirásek 2006). Z hlediska modelů založených na teorii plasticity se v minulosti pro modelování odezvy betonu využívaly mimo modely, které popisovaly beton jako pružnoplustický materiál se zpevněním, také modely, které popisovaly beton jako ideálně pružnoplustický materiál (Kaufmann 1998, Szcześniak a Stolarski 2016). Pružnoplustické materiálové modely se zpevněním se však pro popis reálného chování betonu ukázaly jako mnohem obecnější a vhodnější než ideálně pružnoplustické materiálové modely. Z hlediska popisu reálného chování betonu konstitutivními vztahy je velmi významná také volba zákona plastickeho tečení, který určuje závislost přírůstků plasticke deformace na přírůstcích napětí. Při modelování se nejčastěji volí mezi asociovaným a neasociovaným zákonem plastickeho tečení. V minulosti bylo prokázáno, že neasociovaný zákon plastickeho tečení je pro modelování víceosé napjatosti betonu vhodnější než ten asociovaný (Lade a kol. 1987). Vzhledem k tomu, že je v rámci této části disertační práce modelována právě víceosá napjatost betonu, je pro veškeré provedené výpočty využít právě neasociovaný zákon plastickeho tečení. Další aspekty, které je nutné definovat pro úplnost vybraných konstitutivních vztahů, jako jsou plochy (funkce) plasticity, model zpevnění, plasticke modul zpevnění a ekvivalentní pracovní diagram jednoosé napjatosti, jsou popsány v následujících podkapitolách. Tyto aspekty jsou v rámci této práce oproti Hu a Schnobrich (1989) v určitých ohledech modifikovány za účelem dosažení lepší stability výpočtů a odstranění výpočetních obtíží. Naprogramované konstitutivní vztahy jsou v rámci této práce testovány a evaluovány na úlohách jednoosé napjatosti betonu v tlaku a tahu a dvojosé napjatosti betonu v tlaku (za účelem nalezení odpovídajících hodnot vstupních parametrů). Za účelem validace konstitutivních vztahů jsou výsledky pro jednoosé stlačování betonu srovnány s experimentálními daty.

### 10.1 Plochy plasticity

Jak již bylo zmíněno, vybrané konstitutivní vztahy jsou založeny na přírůstkové pružnoplustické konstitutivní teorii zohledňující zpevnění materiálu. Takovéto modely se vyznačují tím, že po dosažení počáteční plochy plasticity se následující plochy plasticity mění v závislosti na plasticke přetváření až do okamžiku dosažení mezní plochy plasticity (viz obrázek 10.1). Všechny zmíněné plochy plasticity mohou být navíc

popsány stejnou matematickou funkcí. Pro modelování betonu může být dále funkce plasticity rozdělena na celkem tři funkce, z nichž každá slouží pro popis jedné ze tří oblastí plochy plasticity (oblast tah-tah, oblast tlak-tah a oblast tlak-tlak). Pro účely této práce byly použity funkce plasticity, které byly definovány právě pro zmíněné oblasti tah-tah (dvojosý tah), tlak-tah a tlak-tlak (dvojosý tlak) odděleně (Hand a kol. 1972, Hu a Schnobrich 1989). Odpovídající plochy plasticity jsou znázorněny na obrázku 10.1.



Obrázek 10.1: Plochy plasticity v rovině hlavních napětí

Z hlediska oblasti tah-tah je z obrázku 10.1 zřejmé, že se v tahu předpokládá pouze lineárně pružné chování betonu bez vzniku plastické deformace od začátku zatěžování až do jeho porušení, jelikož počáteční plocha plasticity je totožná s mezní plochou plasticity (plochou porušení). Funkce plasticity pro oblast tah-tah má následující matematický zápis

$$f(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T) = F(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T) - f_c = c_1 \left( \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{1+\alpha}{\alpha} \tau_{oct} + \frac{3}{2} \frac{1-\alpha}{\alpha} \sigma_m \right) - f_c = 0 \quad (10.1)$$

kde  $\{\boldsymbol{\sigma}\}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$  je řádkový vektor složek napětí pro rovinnou napjatost,  $f_c$  je maximální pevnost materiálu (betonu) v jednoosém tlaku a proměnná  $\alpha$  závisí na parametrech  $f_c$  a  $f_t$  podle rovnice

$$\alpha = \frac{f_t}{f_c} \quad (10.2)$$

kde  $f_t$  je maximální pevnost materiálu (betonu) v jednoosém tahu.  $\sigma_m$  v rovnici (10.1) je střední napětí, které je pro případ rovinné napjatosti definováno jako

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (10.3)$$

a  $\tau_{oct}$  je oktaedrické smykové napětí definované jako

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (10.4)$$

Parametr  $c_1$  z rovnice (10.1) lze vyjádřit následující rovnicí

$$c_1 = 1 - 0,4019 \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) + 0,008913 \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2 \quad (10.5)$$

kde  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  jsou hlavní napětí, pro které platí, že  $\sigma_1 \geq \sigma_2$  (obě hlavní napětí mají kladnou hodnotu).

V případě oblasti tlak-tah, kdy je beton namáhán současně jak tlakem, tak tahem, lze funkci plasticity vyjádřit následující rovnicí

$$f(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T, \sigma_{eqv}) = F(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T) - \sigma_{eqv} = c_2 \left( \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{1+\alpha}{\alpha} \tau_{oct} + \frac{3}{2} \frac{1-\alpha}{\alpha} \sigma_m \right) - \sigma_{eqv} = 0 \quad (10.6)$$

kde  $\sigma_{eqv}$  je ekvivalentní napětí. Toto napětí zastává funkci parametru zpevnění a závisí na předchozí historii zatěžování. Jakmile je hodnota funkce zatěžování  $F$  z rovnice (10.6) rovna hodnotě  $\sigma_{eqv}$ , dojde k plastickému přetváření a v tu samou chvíli získá ekvivalentní napětí novou hodnotu. Parametr  $c_2$  z rovnice (10.6) lze vyjádřit pomocí následujících rovnic

$$c_2 = 1 - 0,02886 \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) - 0,006657 \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2 - 0,0002443 \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^3$$

$$\text{pro } -\infty < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < -0,103 \quad (10.7)$$

$$c_2 = 1 + 6,339 \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) + 68,82 \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 + 183,8 \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^3 \quad \text{pro } -0,103 \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 0 \quad (10.8)$$

kde  $\sigma_1$  je maximální hlavní napětí s kladnou hodnotou a  $\sigma_2$  je minimální hlavní napětí se zápornou hodnotou.

V případě oblasti tlak-tlak, kdy je beton namáhán pouze tlakem, je funkce plasticity definována výrazem

$$f(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T, \sigma_{eqv}) = F(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T) - \sigma_{eqv} = c_3 \left( \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{2\beta-1}{\beta} \tau_{oct} + 3 \frac{\beta-1}{\beta} \sigma_m \right) - \sigma_{eqv} = 0 \quad (10.9)$$

ve kterém  $\beta = 1,16$  a parametr  $c_3$  je definován jako

$$c_3 = 1 + 0,05848 \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) - 0,05848 \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \quad (10.10)$$

kde mají obě hlavní napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  zápornou hodnotu, a platí, že  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ . V rámci této práce je ve srovnání s Hu a Schnobrich (1989) v rovnici (10.10) poměr hlavních napětí modifikován za účelem dosažení lepší výpočetní stability.

Hlavní napětí jsou ve všech uvedených  $c$  parametrech dána rovnicemi (Meyers a Chawla 2009)

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (10.11)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (10.12)$$

## 10.2 Model zpevnění a zákon plastického tečení

U materiálů se zpevněním dochází při zatěžování způsobujícím plastické přetváření k posunům ploch plasticity. Způsob, jakým se plochy plasticity posouvají, je řízen použitým modelem zpevnění. Podle potřeby je možné aplikovat různé modely zpevnění, mezi které patří například kinematický či izotropní model zpevnění, ale také různé smíšené modely zpevnění (Shames a Cozzarelli 1997, Rouainia a Muir Wood 2000, Rezaiee-Pajand a Nasirai 2007, Kazaz 2011). Kinematický model zpevnění je vhodný pro modelování cyklicky zatěžovaných materiálů, u kterých je nutné postihnout tzv. Bauschingerův efekt. U takovýchto materiálů nedochází při plastické deformaci k posunům ploch plasticity ve smyslu jejich expanze, ale ve smyslu jejich distorze. Pro modelování monotónně zatěžovaných materiálů je zcela dostačující použití izotropního modelu zpevnění, u kterého nedochází k distorzi ploch plasticity, ale pouze k jejich expanzi. Smíšené modely zpevnění je nutné použít v případech, kdy jsou pro modelování významné vlastnosti jak izotropního, tak kinematického modelu zpevnění. Jelikož bylo

v rámci této části práce při výpočtech uvažováno pouze s monotónním zatěžováním betonu, byl pro tyto účely použit izotropní model zpevnění.

Z hlediska zákona plastického tečení se v rámci teorie plasticity nejčastěji volí mezi jeho asociovanou a neasociovanou formou (Bland 1957, Runesson a Mroz 1989). Rozdíl mezi oběma formami spočívá v podobě funkce plastického potenciálu, která se váže k plastickým přetvořením. V rámci asociovaného zákona plastického tečení se předpokládá, že je funkce plastického potenciálu rovna funkci plasticity materiálu, zatímco v rámci neasociovaného zákona plastického tečení se uvažuje, že se funkce plastického potenciálu a funkce plasticity materiálu od sebe liší. Pro účely této práce byl použit neasociovaný zákon plastického tečení, jehož formulaci lze matematicky zapsat jako

$$d\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_p^T = \lambda \frac{\partial g(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T, \sigma_{eqv})}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}^T} = \lambda \frac{\partial G(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T)}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}^T} \quad (10.13)$$

kde  $\lambda$  je kladný skalární faktor, který se může během procesu zpevňování měnit. Rovnice (10.13) ukazuje souvislost mezi funkcí plastického potenciálu a přírůstkovým vektorem složek plastické deformace, který u pružnoplastických materiálových modelů tvoří společně s přírůstkovým vektorem složek pružné deformace přírůstkový vektor složek celkové deformace podle rovnice

$$d\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T = d\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e^T + d\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_p^T \quad (10.14)$$

ve které jsou všechny zmíněné vektory řádkové. Rovnice (10.14) může být zapsána také v nepřírůstkovém tvaru jako

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T = \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e^T + \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_p^T \quad (10.15)$$

Funkce plastického potenciálu použitá pro výpočty v rámci této části práce má následující podobu

$$g(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T, \sigma_{eqv}) = G(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T) - \sigma_{eqv} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} - \sigma_{eqv} = 0 \quad (10.16)$$

### 10.3 Ekvivalentní pracovní diagram jednoosé napjatosti

Významným aspektem, který je nutné u modelů zahrnujících plastické deformace se zpevněním definovat, je ekvivalentní pracovní diagram jednoosé napjatosti při namáhání tlakem. K tomuto diagramu se vztahují výsledky všech případných zatěžovacích stavů. Pro účely této práce byl použit ekvivalentní pracovní diagram, který je definován prostřednictvím vzájemné závislosti dvou parametrů, k nimž jsou vztaženy

multidimenzionální napjatostní a přetvárné podmínky (Hu a Schnobrich 1988). Jedná se o závislost parametru  $\sigma_{eqv}$  (ekvivalentní napětí) na parametru  $\varepsilon_{eqv}$  (ekvivalentní poměrná deformace), kterou lze zapsat prostřednictvím následující rovnice

$$\sigma_{eqv} = \frac{E_{c,init} \varepsilon_{eqv}}{1 + (R + R_E - 2) \left( \frac{\varepsilon_{eqv}}{\varepsilon^*} \right) - (2R - 1) \left( \frac{\varepsilon_{eqv}}{\varepsilon^*} \right)^2 + R \left( \frac{\varepsilon_{eqv}}{\varepsilon^*} \right)^3} \quad (10.17)$$

ve které parametr  $E_{c,init}$  představuje počáteční modul pružnosti a  $R$  představuje poměrový parametr, který je definován jako

$$R = \frac{R_E (R_\sigma - 1)}{(R_\varepsilon - 1)^2} - \frac{1}{R_E} \quad (10.18)$$

V rovnicích (10.17)-(10.18):  $R_E$  je modulární poměr,  $R_\sigma$  je poměr napětí a  $R_\varepsilon$  je poměr deformací. Tyto tři poměry jsou dány následujícími vztahy

$$R_E = \frac{E_{c,init}}{E_{sc}} \quad (10.19)$$

$$R_\sigma = \frac{f_c}{\sigma_f} \quad (10.20)$$

$$R_\varepsilon = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon^*} \quad (10.21)$$

kde  $\varepsilon_f$  je mezní poměrná deformace ekvivalentního pracovního diagramu,  $\sigma_f$  je napětí odpovídající poměrné deformaci  $\varepsilon_f$  a  $E_{sc}$  je sečnový modul pružnosti definovaný jako

$$E_{sc} = \frac{f_c}{\varepsilon^*} \quad (10.22)$$

Parametr  $\varepsilon^*$  (v rovnicích (10.17), (10.21)-(10.22)) představuje poměrnou deformaci odpovídající pevnosti  $f_c$  v rámci ekvivalentního pracovního diagramu. Matematické vyjádření této poměrné deformace je následující

$$\varepsilon^* = q \varepsilon_c \quad (10.23)$$

kde  $\varepsilon_c$  je poměrná deformace odpovídající pevnosti  $f_c$  v rámci diagramu zkoušky pevnosti materiálu (betonu) v jednoosém tlaku a  $q$  představuje parametr, prostřednictvím kterého se docílje větší obecnosti ekvivalentního pracovního diagramu. Parametr  $q$  závisí na realizované oblasti celkové plochy plasticity, což souvisí s daným stavem napětí. Jestliže stav napětí odpovídá oblasti tlak-tah plochy plasticity, je parametr  $q$  definován následujícími rovnicemi

$$q = \frac{f_c}{E_{c,init}\varepsilon_c} + \left(1 - \frac{f_c}{E_{c,init}\varepsilon_c}\right) \left[ 0,001231 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + 0,001469 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2 + 0,0000134 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^3 \right]$$

pro  $-\infty < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < -0,103$  (10.24)

$$q = \frac{f_c}{E_{c,init}\varepsilon_c} + \left(1 - \frac{f_c}{E_{c,init}\varepsilon_c}\right) \left[ 1 + 13,96 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) + 59,21 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 + 69,24 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^3 \right]$$

pro  $-0,103 \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 0$  (10.25)

kde  $\sigma_1$  je maximální hlavní napětí s kladnou hodnotou a  $\sigma_2$  je minimální hlavní napětí se zápornou hodnotou. V případě dvojosého tlaku (oblast tlak-tlak plochy plasticity) je parametr  $q$  definován jako

$$q = \frac{f_c}{E_{c,init}\varepsilon_c} + \left(1 + \frac{f_c}{E_{c,init}\varepsilon_c}\right) \left[ 1 + 1,782 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) + 0,5936 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 \right]$$

(10.26)

kde mají obě hlavní napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  zápornou hodnotu, a platí, že  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ . Ve výpočtech provedených v rámci této části práce byla ekvivalentní poměrná deformace  $\varepsilon_{eqv}$  v rovnici (10.17) počítána s využitím následujícího vztahu

$$\varepsilon_{eqv} = \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_x^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{3}{4} \gamma_{xy}^2}$$

(10.27)

ve kterém jednotlivé uvedené poměrné deformace náleží do vektoru složek celkové deformace, který je v řádkovém tvaru pro rovinnou napjatost definován jako

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$$

(10.28)

## 10.4 Plastický modul zpevnění

Dalším významným aspektem, který je nutné u modelů zahrnujících plastické deformace se zpevněním definovat a který se váže k ekvivalentnímu pracovnímu diagramu, je plastický modul zpevnění. Plastický modul zpevnění  $H_p$  je obecně definován jako derivace funkce, která popisuje tvar ekvivalentního pracovního diagramu, podle plastické složky ekvivalentní poměrné deformace. To může být matematicky vyjádřeno jako

$$H_p = \frac{d\sigma_{eqv}}{d\varepsilon_{eqv,p}} \quad (10.29)$$

Vzhledem k přítomnosti přírůstkové plastické složky ekvivalentní poměrné deformace v rovnici (10.29) je zřejmé, že podobně jako vektor složek celkové deformace z rovnice (10.15) lze také ekvivalentní poměrnou deformaci  $\varepsilon_{eqv}$  rozdělit na dvě části v podobě její pružné složky  $\varepsilon_{eqv,e}$  a plastické složky  $\varepsilon_{eqv,p}$ . Tato skutečnost může být v přírůstkovém tvaru zapsána jako

$$d\varepsilon_{eqv} = d\varepsilon_{eqv,e} + d\varepsilon_{eqv,p} \quad (10.30)$$

Po vydělení rovnice (10.30) přírůstkovým ekvivalentním napětím  $d\sigma_{eqv}$  přejde tato rovnice na tvar

$$\frac{d\varepsilon_{eqv}}{d\sigma_{eqv}} = \frac{d\varepsilon_{eqv,e}}{d\sigma_{eqv}} + \frac{d\varepsilon_{eqv,p}}{d\sigma_{eqv}} = \frac{1}{E_{c,init}} + \frac{1}{H_p} = \frac{1}{E_{tg}} \quad (10.31)$$

kde  $E_{tg}$  představuje ekvivalentní tečnový modul pružnosti. Na základě rovnice (10.31) lze nyní jednoduše získat konkrétní výraz pro výpočet plastického modulu zpevnění ve formě

$$H_p = \frac{E_{c,init} E_{tg}}{E_{c,init} - E_{tg}} \quad (10.32)$$

Matematické vyjádření ekvivalentního tečnového modulu pružnosti uvedeného v rovnicích (10.31)-(10.32) je následující

$$E_{tg} = \frac{d\sigma_{eqv}}{d\varepsilon_{eqv}} = \frac{E_{c,init} \left[ 1 + (2R-1) \left( \frac{\varepsilon_{eqv}}{\varepsilon^*} \right)^2 - 2R \left( \frac{\varepsilon_{eqv}}{\varepsilon^*} \right)^3 \right]}{\left[ 1 + (R+R_E-2) \left( \frac{\varepsilon_{eqv}}{\varepsilon^*} \right) - (2R-1) \left( \frac{\varepsilon_{eqv}}{\varepsilon^*} \right)^2 + R \left( \frac{\varepsilon_{eqv}}{\varepsilon^*} \right)^3 \right]^2} \quad (10.33)$$

Tvar funkce ekvivalentního pracovního diagramu, a v tom důsledku také sklon (znaménko) ekvivalentního tečnového modulu pružnosti, je silně závislý na hodnotách parametrů  $\varepsilon_f$  a  $\sigma_f$ . V rámci Hu a Schnobrich (1989) jsou hodnoty zmíněných parametrů voleny tak, aby  $R_\varepsilon = R_\sigma = 4$ . Murray a kol. (1979) také využívají poměry  $R_\varepsilon$  a  $R_\sigma$  rovny číslu 4. Nevýhodou takto zvolených hodnot parametrů  $\varepsilon_f$  a  $\sigma_f$  je, že v oblasti ekvivalentního pracovního diagramu po překročení pevnosti  $f_c$  nabývá ekvivalentní tečnový modul pružnosti záporných hodnot. To způsobuje značné výpočetní obtíže. V rámci této práce nebyly hodnoty parametrů  $\varepsilon_f$  a  $\sigma_f$  voleny pro všechny případy tak, aby se poměry  $R_\varepsilon$  a  $R_\sigma$  rovnaly vždy jednomu konkrétnímu číslu, ale byly voleny tak, aby pro různé případy v kombinaci s hodnotami ostatních parametrů zajistily permanentně rostoucí funkci ekvivalentního pracovního diagramu při dosažení přijatelných



výpočetních výsledků (využilo se skutečnosti, že funkce ekvivalentního pracovního diagramu nemusí mít stejný tvar jako simulovaná funkce diagramu zkoušky pevnosti betonu v jednoosém tlaku). V rámci výpočtů tento přístup zajistil permanentně kladné hodnoty ekvivalentního tečnového modulu pružnosti. Z tohoto důvodu je přístup vhodný k odstranění dříve zmíněných výpočetních obtíží.

## 10.5 Přírůstkový tvar konstitutivních rovnic

Jsou-li aspekty, jako plochy plasticity, model zpevnění, zákon plastického tečení, ekvivalentní pracovní diagram jednoosé napjatosti a plastický modul zpevnění, definovány, mohou být sestaveny konstitutivní vztahy (Hu a Schnobrich 1989). V rámci teorie pružnosti lze konstitutivní rovnice zapsat ve formě zobecněného Hookova zákona. Při uvážení rozkladu vektoru složek celkové deformace na jeho pružnou a plastickou část lze zobecněný Hookův zákon zapsat v přírůstkovém tvaru následujícím způsobem

$$d\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}]_e d\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e = [\mathbf{C}]_e (d\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - d\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_p) \quad (10.34)$$

kde  $d\{\boldsymbol{\sigma}\}$  je přírůstkový vektor složek napětí ve sloupcovém tvaru a  $[\mathbf{C}]_e$  je matice tuhosti pružného materiálu definovaná pro rovinou napjatost. Přírůstkový tvar funkce plasticity získaný její diferenciací lze zapsat následovně

$$df(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T, \sigma_{eqv}) = \frac{\partial f(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T, \sigma_{eqv})}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}^T} d\{\boldsymbol{\sigma}\} + \frac{\partial f(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T, \sigma_{eqv})}{\partial \sigma_{eqv}} \frac{d\sigma_{eqv}}{d\varepsilon_{eqv,p}} d\varepsilon_{eqv,p} = 0 \quad (10.35)$$

Dosadí-li se rovnice (10.13), (10.29), (10.34) a rovnice

$$\frac{\partial f(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T, \sigma_{eqv})}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}^T} = \frac{\partial F(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T)}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}^T} \quad (10.36)$$

do rovnice (10.35), a uváží-li se, že

$$\frac{\partial f(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T, \sigma_{eqv})}{\partial \sigma_{eqv}} = -1 \quad (10.37)$$

tak rovnice (10.35) získá následující tvar

$$\frac{\partial F(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T)}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}^T} [\mathbf{C}]_e \left( d\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \lambda \frac{\partial G(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T)}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}^T} \right) - H_p d\varepsilon_{eqv,p} = 0 \quad (10.38)$$

Vyjádří-li se přírůstková ekvivalentní plastická poměrná deformace ze vztahu pro výpočet plastické práce vykonané při plastické deformaci, a pokud se následně dosadí rovnice (10.13), získá se rovnice

$$d\varepsilon_{eqv,p} = \frac{\{\boldsymbol{\sigma}\}^T d\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_p}{\sigma_{eqv}} = \frac{\{\boldsymbol{\sigma}\}^T \lambda \frac{\partial G(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T)}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}}}{\sigma_{eqv}} = \lambda \frac{G(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T)}{\sigma_{eqv}} \quad (10.39)$$

Dosažením rovnice (10.39) do rovnice (10.38) a následnou úpravou lze získat rovnici pro výpočet faktoru  $\lambda$  ve tvaru

$$\lambda = \frac{\frac{\partial F(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T)}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}^T} [\mathbf{C}]_e d\{\boldsymbol{\varepsilon}\}}{H_p \frac{G(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T)}{\sigma_{eqv}} + \frac{\partial F(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T)}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}^T} [\mathbf{C}]_e \frac{\partial G(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T)}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}}} \quad (10.40)$$

Pokud se nyní do rovnice (10.34) dosadí rovnice (10.13) a následně také rovnice (10.40), tak rovnice (10.34) získá tvar

$$d\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}]_e d\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - [\mathbf{C}]_e \lambda \frac{\partial G(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T)}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} = [\mathbf{C}]_e d\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - [\mathbf{C}]_p d\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = ([\mathbf{C}]_e - [\mathbf{C}]_p) d\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (10.41)$$

kde je matice tuhosti pružného materiálu  $[\mathbf{C}]_e$  dána jako

$$[\mathbf{C}]_e = \frac{E_{c,init}}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (10.42)$$

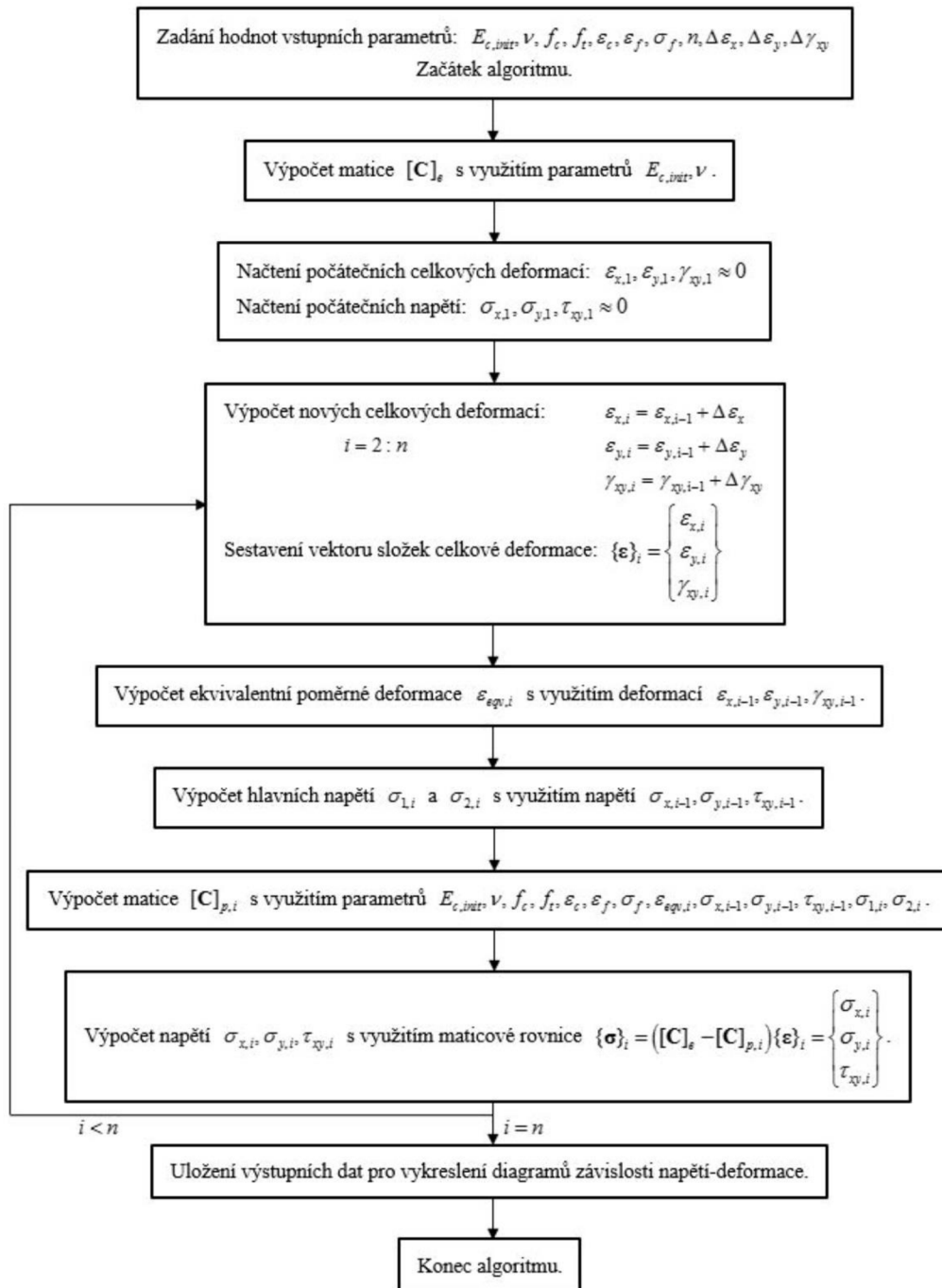
a kde  $[\mathbf{C}]_p$  je nesymetrická matice tuhosti plastického materiálu, která je definována jako

$$[\mathbf{C}]_p = \frac{[\mathbf{C}]_e \frac{\partial G(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T)}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \frac{\partial F(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T)}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}^T} [\mathbf{C}]_e}{H_p \frac{G(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T)}{\sigma_{eqv}} + \frac{\partial F(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T)}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}^T} [\mathbf{C}]_e \frac{\partial G(\{\boldsymbol{\sigma}\}^T)}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}}} \quad (10.43)$$

Parametr  $\nu$  v rovnici (10.42) představuje Poissonovo číslo materiálu (betonu). Konstitutivní vztahy dané v přírůstkovém tvaru v rovnici (10.41) byly použity pro výpočty provedené v rámci této části práce.

## 11 Algoritmizace a testování v Matlabu, validace

V rámci této části práce byly veškeré výpočty provedeny prostřednictvím algoritmu, který byl zapsán v programovacím jazyce Matlab (Matlab 2005) a který zahrnoval konstitutivní vztahy popsané v předchozím textu. Zjednodušené schéma algoritmu je znázorněno na obrázku 11.1.



Obrázek 11.1: Schéma algoritmu

Tabulka 11.1: Hodnoty vstupních parametrů algoritmu pro beton s  $f_c = 33$  MPa

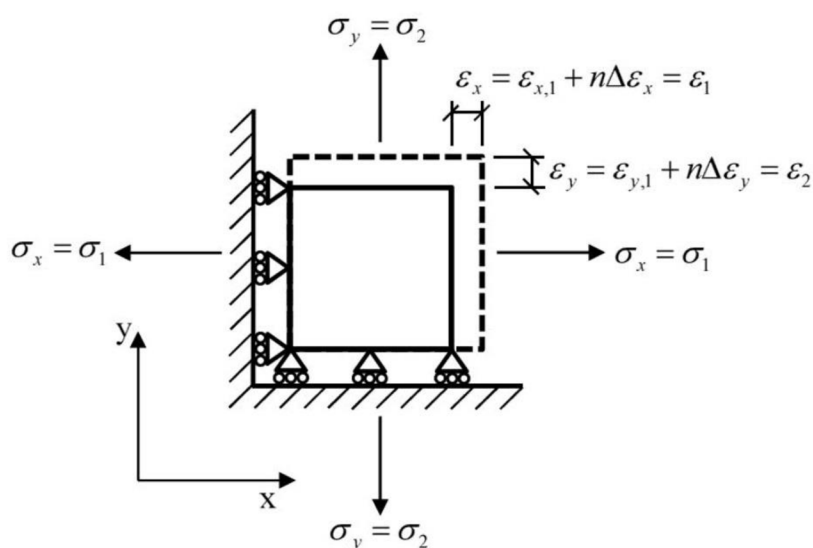
Případ	1	2	3	4	5	6	7	8
Způsob namáhání	<i>uxc</i>		<i>bxc</i>					<i>uxt</i>
$E_{c,init}$ [MPa]	14500							
$\nu$ [-]	0,2							
$f_c$ [MPa]	33							
$f_t$ [MPa]	3							
$\varepsilon_c$ [-]	0,0021							
$\varepsilon_f$ [-]	0,0035							
$\sigma_f$ [MPa]	38,5							
$n$	400	442	508	552	570	560	740	207
$1000\Delta\varepsilon_x$ [-]	-0,010							0,001
$1000\Delta\varepsilon_y$ [-]	0,0020	-0,0010	-0,0030	-0,0050	-0,0070	-0,0085	-0,0100	-0,0002
$1000\Delta\gamma_{xy}$ [-]	0							

 Tabulka 11.2: Hodnoty vstupních parametrů algoritmu pro betony s různými  $f_c$ 

Případ	1	2	3	4	5	6	7	8
Způsob namáhání	<i>uxc</i>				<i>uxt</i>			
$E_{c,init}$ [MPa]	11700	14500	17600	20300	11700	14500	17600	20300
$\nu$ [-]	0,2							
$f_c$ [MPa]	24	33	43	53	24	33	43	53
$f_t$ [MPa]	2,2	3,0	3,9	4,8	2,2	3,0	3,9	4,8
$\varepsilon_c$ [-]	0,00190	0,00210	0,00225	0,00240	0,00190	0,00210	0,00225	0,00240
$\varepsilon_f$ [-]	0,0035							
$\sigma_f$ [MPa]	27,2	38,5	50,5	63,0	27,2	38,5	50,5	63,0
$n$	380	400	420	440	189	207	222	237
$1000\Delta\varepsilon_x$ [-]	-0,010				0,001			
$1000\Delta\varepsilon_y$ [-]	0,0020				-0,0002			
$1000\Delta\gamma_{xy}$ [-]	0							

Ze schématu na obrázku 11.1 je zřejmé, že účelem algoritmu bylo na základě definovaných hodnot vstupních parametrů simulovat rovinný stav napětí betonu při konstantně narůstajícím přetvoření. Dále je ze schématu zřejmé, že výstupem algoritmu byla data, která umožnila následnou konstrukci diagramů závislosti napětí-deformace, které popisovaly chování prostého betonu při rovinné napjatosti.

Konstitutivní vztahy (materiálový model) byly prostřednictvím naprogramovaného algoritmu v Matlabu testovány a evaluovány v celkem dvou fázích. Zaprvé byly testovány pro jeden konkrétní typ betonu (beton s maximální pevností v jednoosém tlaku  $f_c$  rovnající se 33 MPa) na způsoby namáhání: jednoosý (prostý) tlak ( $uxc$ ), dvojosý tlak ( $bxc$ ) a jednoosý (prostý) tah ( $uxt$ ), viz tabulka 11.1. Zadruhé byly testovány pro betony s různými maximálními pevnostmi v jednoosém tlaku  $f_c$  na způsoby namáhání: jednoosý tlak ( $uxc$ ) a jednoosý tah ( $uxt$ ), viz tabulka 11.2. Ve zmíněných tabulkách jsou uvedeny odpovídající hodnoty vstupních parametrů algoritmu.



Obrázek 11.2: Simulovaný rovinný stav napětí betonu

V tabulce 11.1 jsou konkrétně uvedeny hodnoty vstupních parametrů použité pro simulaci chování betonu s výše zmíněnou maximální pevností  $f_c = 33$  MPa při výše zmíněných způsobech namáhání ( $uxc$ ,  $bxc$  a  $uxt$ ). Parametr  $\Delta\gamma_{xy}$  byl ve všech případech definován nulovou hodnotou, protože při aplikovaných způsobech namáhání nedochází ke vzniku smykového napětí  $\tau_{xy}$ , a v tom důsledku ani ke vzniku poměrné smykové deformace  $\gamma_{xy}$ . Vzhledem k této skutečnosti je zřejmé, že normálová napětí a poměrné deformace byly v simulované rovině rovny přímo hlavním napětím a hlavním poměrným deformacím. Za účelem zachování obecnosti značení byly mezi napětími a poměrnými deformacemi zvoleny a použity následující rovnosti

$$\sigma_x = \sigma_1 \quad (11.1)$$

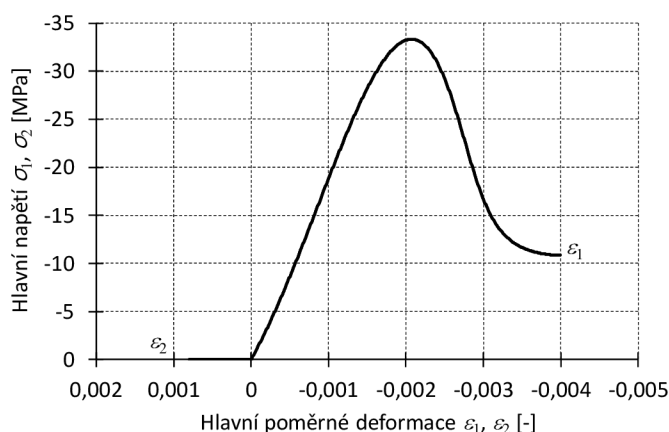
$$\sigma_y = \sigma_2 \quad (11.2)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 \quad (11.3)$$

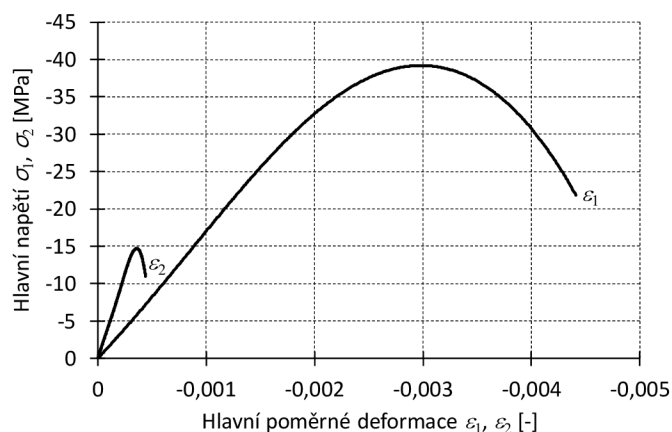
$$\varepsilon_y = \varepsilon_2 \quad (11.4)$$

Při výše uvedených skutečnostech lze testování rovinného stavu napětí betonu provedené v této části práce schematicky znázornit jako rovinné tlakové nebo tahové namáhání betonového tělesa, jehož rozměry v testované rovině jsou výrazně větší než jeho tloušťka (viz obrázek 11.2).

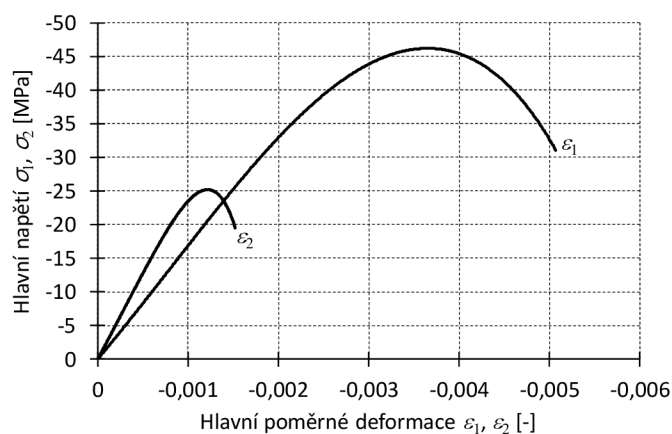
Na obrázcích 11.3, 11.4, 11.5, 11.6, 11.7, 11.8 a 11.9 jsou zobrazeny výsledky výpočtů pro případy 1-7 z tabulky 11.1. Výsledky jsou tvořeny diagramy závislosti napětí-deformace, které popisují chování betonu při jednoosém a dvojosém stlačování. Osy diagramů zahrnují v důsledku rovnic (11.1)-(11.4) a obrázku 11.2 hlavní veličiny. Z hlediska jednoosé napjatosti betonu v tlaku je z obrázku 11.3 vidět, že materiálový model dle očekávání vykazoval (v průběhu konstantně narůstajícího přetvoření) pružnoplastické chování betonu se zpevněním před dosažením maximální pevnosti v jednoosém tlaku  $f_c$  s následným tlakovým změkčováním. Dále je z obrázku 11.3 vidět, že vrchol křivky zcela správně odpovídá hodnotám  $f_c$  a  $\varepsilon_c$  z tabulky 11.1. V neposlední řadě je vidět, že se u materiálového modelu pokles napětí, který byl zapříčiněn tlakovým změkčováním při dalším přetváření, ustálil na hodnotě cca 11 MPa, kterou lze označit jako reziduální pevnost (napětí) betonu.



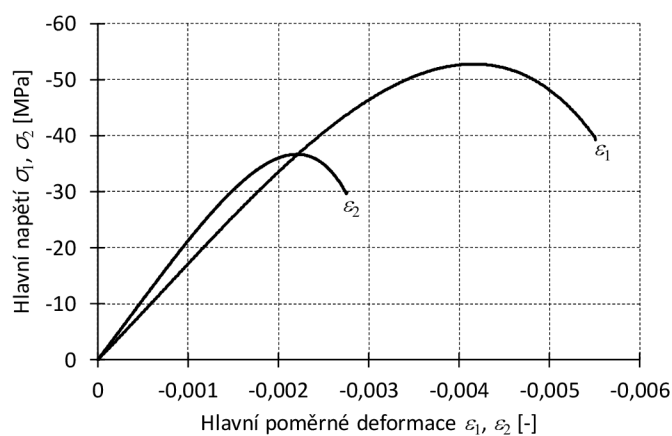
Obrázek 11.3: Simulovaný diagram závislosti napětí-deformace pro beton namáhaný jednoosým tlakem (případ 1 v tabulce 11.1)



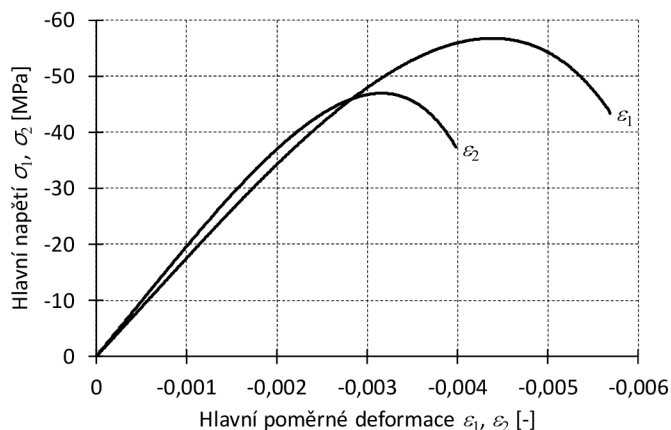
Obrázek 11.4: Simulovaný diagram závislosti napětí-deformace pro beton namáhaný dvojosým tlakem (případ 2 v tabulce 11.1)



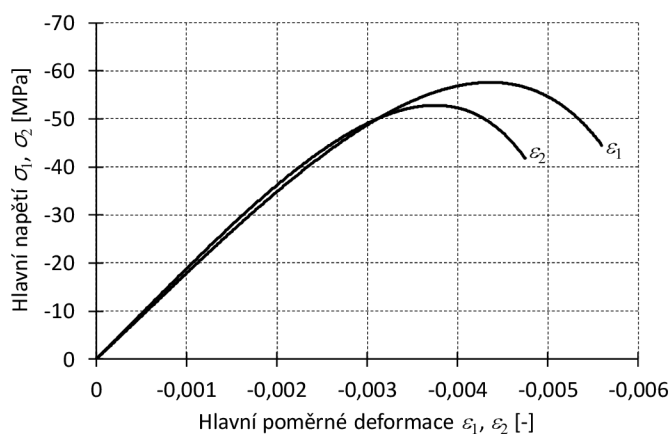
Obrázek 11.5: Simulovaný diagram závislosti napětí-deformace pro beton namáhaný dvojosým tlakem (případ 3 v tabulce 11.1)



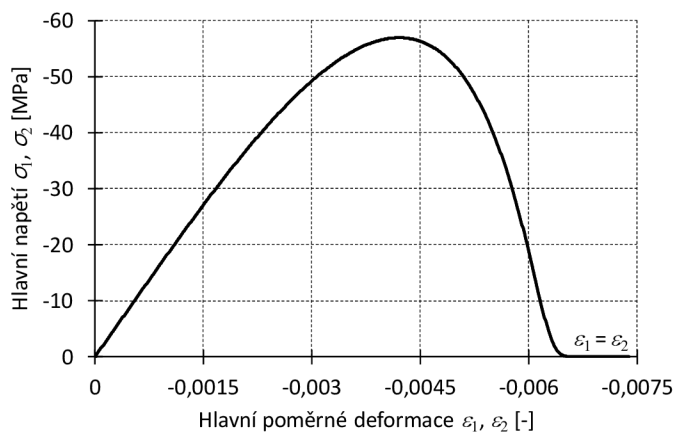
Obrázek 11.6: Simulovaný diagram závislosti napětí-deformace pro beton namáhaný dvojosým tlakem (případ 4 v tabulce 11.1)



Obrázek 11.7: Simulovaný diagram závislosti napětí-deformace pro beton namáhaný dvojosým tlakem (případ 5 v tabulce 11.1)



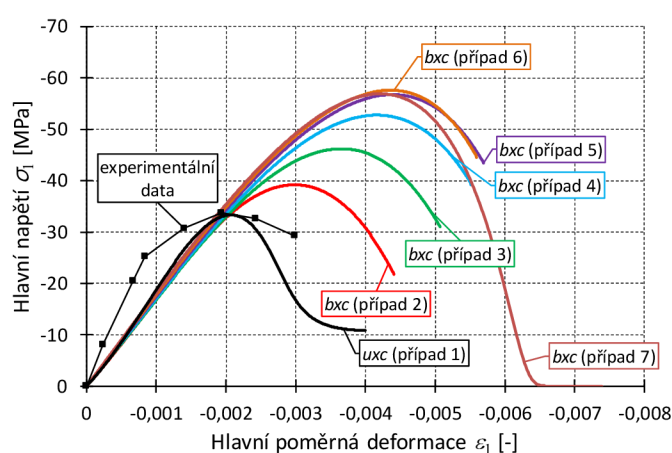
Obrázek 11.8: Simulovaný diagram závislosti napětí-deformace pro beton namáhaný dvojosým tlakem (případ 6 v tabulce 11.1)



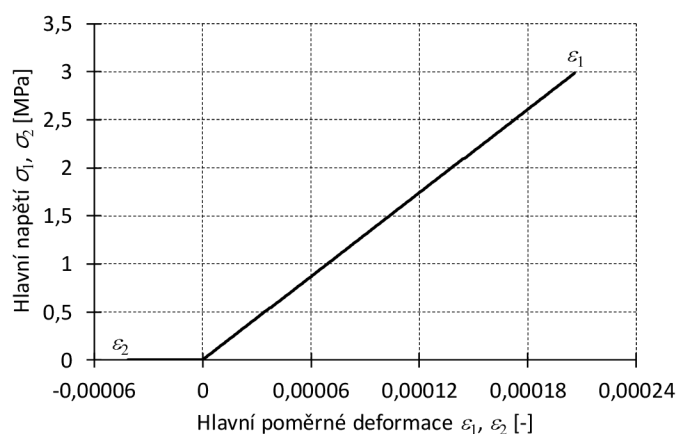
Obrázek 11.9: Simulovaný diagram závislosti napětí-deformace pro beton namáhaný dvojosým tlakem (případ 7 v tabulce 11.1)



Z hlediska dvojosé napjatosti betonu v tlaku je z obrázků 11.4, 11.5, 11.6, 11.7, 11.8 a 11.9 vidět, že materiálový model vykazoval (v průběhu konstantně narůstajícího dvojosého přetvoření) velmi podobné chování betonu jako v případě jednoosého tlaku. Vrchol křivky pro beton namáhaný dvojosým tlakem je nicméně ve všech simulovaných případech posunutý oproti vrcholu křivky pro beton namáhaný jednoosým tlakem. Z toho vyplývá, že materiálový model je schopný simulovat nárůst maximální pevnosti v tlaku a odpovídající poměrné deformace v důsledku dvojosého tlakového zatěžování. Stav napětí betonu namáhaného dvojosým tlakem je tedy zcela v souladu s plochami plasticity na obrázku 10.1.



Obrázek 11.10: Simulované křivky závislosti napětí-deformace pro beton namáhaný tlakem a experimentální data



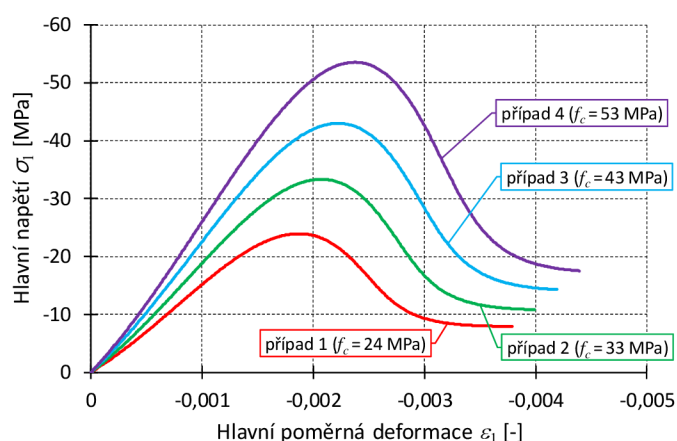
Obrázek 11.11: Simulovaný diagram závislosti napětí-deformace pro beton namáhaný jednoosým tahem (případ 8 v tabulce 11.1)

Na obrázku 11.10 jsou znázorněny všechny simulované křivky závislosti napětí-deformace pro beton namáhaný tlakem (případy 1-7 v tabulce 11.1) společně s experimentálními daty pro jednoosé stlačování betonu, která byla získána z experimentální analýzy provedené v rámci publikace Kupfer a Gerstle (1973). Účelem obrázku 11.10 je jednak názorná demonstrace toho, jakým způsobem v rámci materiálového modelu narůstají maximální pevnost v tlaku a jí odpovídající poměrná deformace při narůstajícím dvojosém tlakovém zatěžování, a pak také validace příslušných simulovaných dat (případ 1,  $uxc$ ) experimentálními daty. Experimentální křivka na obrázku 11.10 odpovídá výsledku jednoosé tlakové zkoušky provedené na tělese (vzorku) z prostého betonu o rozměrech 200 mm x 200 mm x 50 mm. Srovnání experimentální křivky se simulovanou křivkou pro jednoosé stlačování betonu ukazuje, že materiálový model je při zvolené kombinaci hodnot vstupních parametrů schopný postihnout jak vrchol reálné experimentální křivky, tak do jisté míry také její tvar. Menších rozdílů mezi oběma křivkami by bylo možné dosáhnout některou z dalších možných kombinací hodnot vstupních parametrů, nicméně tady je na místě poznamenat, že při zvolené kombinaci hodnot parametrů nabýval ekvivalentní tečnový modul pružnosti, který byl počítán v rámci algoritmu konstitutivních vztahů, permanentně kladných hodnot i přesto, že tečnový modul simulované křivky nabýval při tlakovém změkčování záporných hodnot, čehož bylo cílem dosáhnout. Výhodou permanentně kladných hodnot ekvivalentního tečnového modulu pružnosti v průběhu výpočtu je odstranění výpočetních obtíží, které jsou obvykle spojeny s jeho zápornými hodnotami.

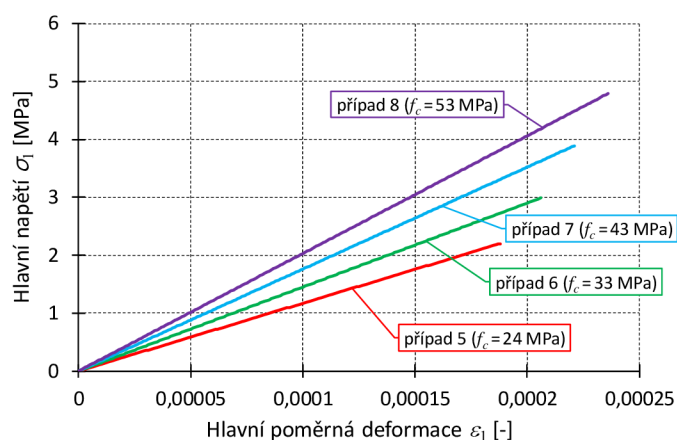
Na obrázku 11.11 je zobrazen diagram závislosti napětí-deformace získaný z výpočtu, ve kterém byl simulován jednoosý tah betonu (případ 8 v tabulce 11.1). Z obrázku je zřejmé, že materiálový model vykazoval (v průběhu konstantně narůstajícího tahového přetvoření) pouze lineárně pružné chování betonu, a to až do okamžiku dosažení maximální pevnosti v jednoosém tahu  $f_t$ , což je zcela v souladu s plochou plasticity na obrázku 10.1, která jednoznačně definuje, že v oblasti tah-tah nevznikají žádné plastické deformace. Dále lze z obrázku 11.11 vidět, že výpočet byl ukončen v okamžiku dosažení tahové pevnosti  $f_t$ . Důvodem byla skutečnost, že konstitutivní vztahy použité v rámci této části práce nezahrnují žádný model, prostřednictvím kterého by bylo možné po dosažení tahové pevnosti  $f_t$  postihnout efekt tahového změkčování v důsledku otevírání trhlin v betonu. Výpočty, ve kterých bylo simulováno tlakové namáhání betonu, byly zase vždy ukončovány v okamžiku, kdy začaly být nestabilní.

V tabulce 11.2 jsou uvedeny hodnoty vstupních parametrů algoritmu použité pro simulace chování betonů s různými maximálními pevnostmi v jednoosém tlaku  $f_c$  při dříve (výše) zmíněných způsobech namáhání ( $uxc$  a  $uxt$ ). Výsledky simulací jsou zobrazeny na obrázku 11.12 ( $uxc$ ), respektive na obrázku 11.13 ( $uxt$ ). Podle ACI Committee 363 (1984) s sebou nárůst maximální jednoosé tlakové pevnosti reálného

betonu přináší v prvé řadě nárůst tlakové poměrné deformace, při které je pevnost v tlaku dosažena, a pak také nárůst tuhosti betonu (modulu pružnosti betonu). Duktilita reálného betonu v tlaku se naopak s nárůstem tlakové pevnosti snižuje. Z obrázku 11.12 a tabulky 11.2 je zřejmé, že zmíněné aspekty (týkající se pevnosti a tuhosti reálného betonu v tlaku) je materiálový model schopný vystihnout na základě vhodné definice parametrů  $E_{c,init}$ ,  $f_c$  a  $\varepsilon_c$ . Z hlediska duktility betonu v tlaku je z obrázku 11.12 vidět, že materiálový model při výpočtech vykazoval s nárůstem tlakové pevnosti betonu menší duktilitu neboli prudší a výraznější pokles napětí v průběhu tlakového změkčování. Nižší duktility betonu v tlaku bylo při výpočtech dosahováno zvyšováním hodnoty parametru  $\sigma_f$  při zachování konstantní hodnoty parametru  $\varepsilon_f$ . S nárůstem tlakové pevnosti betonu v rámci výpočtů pochopitelně souvisel také nárůst maximální pevnosti betonu v jednoosém tahu a odpovídajícího tahového přetvoření. Tento nárůst je demonstrován na obrázku 11.13.



Obrázek 11.12: Výsledky simulací pro betony s různými  $f_c$  ( $uxc$ )



Obrázek 11.13: Výsledky simulací pro betony s různými  $f_c$  ( $uxt$ )

Na základě získaných výsledků a jejich srovnání s experimentálními daty a poznatky z reálného zkoušení betonu lze konstatovat, že konstitutivní vztahy popsané a testované v rámci této části práce jsou vhodným nástrojem pro modelování chování reálného betonu při rovinném stavu napětí, především jedná-li se o tlakové namáhání. Lze také konstatovat, že použité konstitutivní vztahy mají potenciál uplatnit se v rámci případné implementace do konečně-prvkových výpočetních systémů.

## 12 Závěr

Záměrem při tvorbě této práce bylo hlouběji proniknout do konstitutivního modelování nelineární odezvy betonu na zatížení se zaměřením se na identifikaci hodnot vstupních parametrů vybraných materiálových modelů. Za tímto účelem byla práce rozdělena do tří hlavních tematických částí, které následovaly po zmapování současného stavu problematiky v oblasti matematického modelování betonu jak z hlediska použitelných metod, přístupů či modelů, tak z hlediska možností identifikace hodnot vstupních parametrů.

První a zároveň nejrozsáhlejší hlavní část práce byla zaměřena na identifikaci hodnot vstupních parametrů Continuous surface cap modelu. V první řadě byla v rámci této části práce zmapována konstitutivní teorie zmíněného materiálového modelu, a na základě toho popsány jeho vstupní parametry, pro které byly dále odvozeny kalibrační křivky na základě autorských tabelovaných dat. Jedním z hlavních záměrů této části práce bylo dále zhodnotit efektivnost a přesnost zvolených identifikačních (optimalizačních) postupů (metod). Za tímto účelem byla provedena identifikační studie, ve které proces inverzní identifikace hodnot parametrů sestával z analýzy citlivosti s následnou optimalizací. Identifikační studie ukázala, že je zcela dostačující provádět analýzu citlivosti vstupních dat na nedělených výstupních datech, jelikož testovaná analýza citlivosti, která byla provedena na dělených výstupních datech, nepřinesla z hlediska následného procesu optimalizace žádné další výhody. Dále identifikační studie ukázala, že z hlediska aproximačních úloh je proces globální optimalizace zcela dostačující, jelikož následná lokální optimalizace přináší už jen nepatrné zlepšení výsledků za cenu dalších nevýhod. Poznatky získané z identifikační studie byly zohledněny v následných identifikačních procesech. Dalším z hlavních záměrů této části práce byla identifikace hodnot parametrů základní verze materiálového modelu na základě experimentálních dat (zkouška pevnosti betonu v excentrickém tahu) za účelem návrhu modifikace odvozených kalibračních křivek modelu dle získaných výsledků. Modifikace byla navržena tak, aby kalibrační funkce pochopitelně respektovaly získané výsledky a zároveň si zachovaly své derivace. Identifikace hodnot parametrů modifikované verze materiálového modelu na základě experimentálních dat (zkouška pevnosti betonu v tahu za ohybu) byla závěrem demonstrována v rámci této části práce. Naidentifikované hodnoty vstupních parametrů materiálového modelu a získané kalibrační funkce představují kvalitní data, která mohou s výhodou posloužit jako podklad či pomůcka pro čistě uživatelskou aplikaci modelu nebo mohou být výchozím bodem pro další případný výzkum zabývající se kalibrací Continuous surface cap modelu.

Záměrem druhé hlavní části práce byla identifikace hodnot vstupních parametrů Karagozian & Case concrete modelu, která byla provedena (po zmapování a popisu nekonstantních parametrů) na základě experimentálních dat odpovídajících válcové

zkoušce pevnosti betonu v tříosém tlaku (příčný tlak 7 MPa). Identifikační proces sestával z analýzy citlivosti (využita celá zatěžovací křivka = nedělená výstupní data) a následně globální optimalizace. I zde tedy byly zohledněny poznatky získané z předchozí identifikační studie. Získaná data (naidentifikované hodnoty parametrů) byla validována na dalších experimentálních datech. Konkrétně se jednalo o data z válcových zkoušek pevnosti betonu v jednoosém a tříosém tlaku (příčný tlak 20 MPa). Na základě validace bylo možné v konečném důsledku konstatovat, že získané výsledky představují velmi kvalitní data vhodná pro další kalibrační účely vztahující se ke Karagozian & Case concrete materiállovému modelu, a to jak z hlediska dalšího výzkumu, tak z hlediska pomoci dalším uživatelům při praktické aplikaci modelu.

Třetí a zároveň poslední hlavní část práce byla zaměřena na algoritmizaci vybraných konstitutivních vztahů určených pro matematické modelování odezvy kvazi-křehkých materiálů, především betonu. Konkrétně byly vybrány konstitutivní vztahy, jejichž smyslem bylo modelování rovinné napjatosti materiálu a jejichž teoretické pozadí je založeno na přírůstkové pružnoplustické konstitutivní teorii zohledňující zpevnění materiálu. Algoritmizace byla provedena (po vymezení konstitutivní teorie a jejích aspektů) s využitím nástrojů programu Matlab. Naprogramované konstitutivní vztahy byly otestovány a evaluovány na úlohách jednoosé napjatosti betonu v tlaku a tahu a dvojosé napjatosti betonu v tlaku, aby byly nalezeny odpovídající hodnoty vstupních parametrů algoritmu. Pro jednoosou napjatost betonu v tlaku byla simulovaná data (a tedy konstitutivní vztahy) validována na příslušných experimentálních datech. Významnými poznatky této části práce byly zaprvé skutečnost, že při použitých kombinacích hodnot vstupních parametrů nabýval ekvivalentní tečnový modul pružnosti, který byl počítán v rámci algoritmu konstitutivních vztahů, permanentně kladných hodnot (výhoda odstranění výpočetních obtíží, které jsou obvykle spojeny se zápornými hodnotami ekvivalentního tečnového modulu pružnosti), a zadruhé skutečnost, že konstitutivní vztahy nezahrnovaly žádný model, prostřednictvím kterého by bylo možné postihnout efekt tahového změkčování betonu v důsledku otevírání trhlin (při tahovém namáhání byla tedy řešena pouze lineární větev simulovaného diagramu). Na základě získaných výsledků, provedené validace a poznatků bylo možné konstatovat, že použité konstitutivní vztahy jsou vhodným nástrojem pro modelování chování reálného betonu při rovinném stavu napětí, především jedná-li se o tlakové namáhání. Dále bylo možné také konstatovat, že konstitutivní vztahy mají jednoznačný potenciál uplatnit se v rámci případné implementace do konečně-prvkových výpočetních systémů.

Směry dalších prací v problematikách, které jsou obsahem této práce, mohou být následující:

- zaměřit se na identifikaci hodnot vstupních parametrů v této práci použitých materiállových modelů na dalších experimentálních datech, případně se zaměřit na identifikaci hodnot vstupních parametrů dalších materiállových modelů,

- modifikovat kalibrační křivky Continuous surface cap modelu na základě většího množství identifikovaných dat,
- zavést do algoritmizovaných konstitutivních vztahů model postihující efekt tahového změkčování betonu (poškození betonu v důsledku otevírání trhlin),
- implementovat konstitutivní vztahy do konečně-prvkových výpočetních systémů.





## Literatura

- ACI Committee 363 (1984), "State of the art report on high-strength concrete", *ACI Journal*, 81(4), 364-411.
- ADINA (1997), *ADINA: Theory and Modeling Guide*, ADINA R&D Inc.
- Ahmad, S., Pilakoutas, K., Rafi, M. M., Zaman, Q. U. (2018), "Bond strength prediction of steel bars in low strength concrete by using ANN", *Computers and Concrete*, 22(2), 249-259.
- Anderson-Sprecher, R. (1994), "Model comparisons and  $R^2$ ", *The American Statistician*, 48(2), 113-117.
- ANSYS (2020), *ANSYS Release Notes, Release 2020 R2*, ANSYS Inc.
- ATENA (2013), *ATENA Program Documentation*, Cervenka consulting Ltd., Prague, Czech Republic.
- AUTODYN (2009), *AUTODYN User Manual Version 12.1*, ANSYS Inc.
- Bažant, Z. P., Oh, B. H. (1983), "Crack band theory for fracture of concrete", *Materiaux et Constructions*, 16, 155-177.
- Bei, X., Chen, N., Zhang, S. (2013), "On the complexity of trial and error", *STOC '13: Proceedings of the Forty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Palo Alto, California, USA, June.
- Belytschko, T., Gracie, R. (2007), "On XFEM applications to dislocations and interfaces", *International Journal of Plasticity*, 23(10-11), 1721-1738.
- Bland, D. R. (1957), "The associated flow rule of plasticity", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6(1), 71-78.
- Caner, F. C., Bažant, Z. P. (2013), "Microplane model M7 for plane concrete. I: Formulation", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 139(12), 1714-1735.
- CEB-FIP Model Code 1990 (1993), Comité Euro-International du Béton, Thomas Telford House.
- Cooreman, S., Lecompte, D., Sol, H. Vantomme, J., Debruyne, D. (2007), "Elasto-plastic material parameter identification by inverse methods: Calculation of the sensitivity matrix", *International Journal of Solids and Structures*, 44(13), 4329-4341.

- Cowper, G. R., Symonds, P. S. (1957), "Strain-hardening and strain-rate effects in the impact loading of cantilever beams", Technical Report No. 28, Brown University Division of Applied Mathematics.
- Cusatis, G., Bažant, Z. P., Cedolin, L. (2003), "Confinement-shear lattice model for concrete damage in tension and compression", *Journal of Engineering Mechanics*, 129(12), 1439-1448.
- Cusatis, G., Cedolin, L. (2007), "Two-scale study of concrete fracturing behavior", *Engineering Fracture Mechanics*, 74(1-2), 3-17.
- ČSN EN 1992-1-1: *Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*, (2006).
- Damjanic, F., Owen, D. R. J. (1984), "Practical considerations for modelling of post-cracking concrete behaviour for finite element analysis of reinforced concrete structures", *Proceedings of the International Conference on Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Split, Yugoslavia, September.
- Foster, C. D., Regueiro, R. A., Fossum, A. F., Borja, R. I. (2005), "Implicit numerical integration of a three-invariant, isotropic/kinematic hardening cap plasticity model for geomaterials", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(50-52), 5109-5138.
- Geopalaeratnam, V. S., Shah, S. P. (1985), "Softening response of plain concrete in direct tension", *ACI Journal*, 85(3), 310-323.
- Grassl, P., Jirásek, M. (2006), "Damage-plastic model for concrete failure", *International Journal of Solids and Structures*, 43(22-23), 7166-7196.
- Hand, F. R., Pecknold, D. A., Schnobrich, W. C. (1972), "A layered finite element nonlinear analysis of reinforced concrete plates and shells", Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 389, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana-Champaign, Illinois.
- Hicks, C. R. (1973), *Fundamental concepts in the design of experiments*, Holt, Rinehart & Winston, New York, USA.
- Holmquist, T. J., Johnson, G. R., Cook, W. H. (1993), "A computational constitutive model for concrete subjected to large strains, high strain rates, and high pressures", *Proceedings of 14th International Symposium on Ballistics*, Quebec, Canada, September.

- Hong, H.-K., Liu, C.-S. (1997), "Prandtl-Reuss elastoplasticity: On-off switch and superposition formulae", *International Journal of Solids and Structures*, 34(33-34), 4281-4304.
- Hrstka, O., Kučerová, A., Lepš, M., Zeman, J. (2003), "A competitive comparison of different types of evolutionary algorithms", *Computers & Structures*, 81(18-19), 1979-1990.
- Hu, H.-T., Schnobrich, W. C. (1989), "Constitutive modeling of concrete by using nonassociated plasticity", *Journal of Materials in Civil Engineering*, 1(4), 199-216.
- Hu, H.-T., Schnobrich, W. C. (1988), "Nonlinear analysis of plane stress state reinforced concrete under short term monotonic loading", Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 539, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana-Champaign, Illinois.
- Huntington, D. E., Lyrintzis, C. S. (1998), "Improvements to and limitations of Latin hypercube sampling", *Probabilistic Engineering Mechanics*, 13(4), 245-253.
- Hušek, M., Kala, J., Král, P., Hokeš, F. (2017), "Steel fibre reinforced concrete simulation with the SPH method", *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 245, 1-8.
- Hyndman, R. J., Koehler, A. B. (2006), "Another look at measures of forecast accuracy", *International Journal of Forecasting*, 22(4), 679-688.
- Hynek, J. (2008), *Genetické algoritmy a genetické programování*, Grada Publishing a.s., Praha, Česká republika.
- Chen, A. C. T., Chen, W. F. (1975), "Constitutive relations for concrete", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 101(4), 465-481.
- Chen, W. F., Han, D. J. (1988), *Plasticity for structural engineers*, Springer-Verlag, New York, USA.
- Jankowiak, T., Łodygowski, T. (2005), "Identification of parameters of concrete damage plasticity constitutive model", *Foundations of Civil and Environmental Engineering*, 6, 53-69.
- Jiang, H., Zhao, J. (2015), "Calibration of the continuous surface cap model for concrete", *Finite Elements in Analysis and Design*, 97, 1-19.

- Jirásek, M. (1998), "Nonlocal models for damage and fracture: comparison of approaches", *Solid Structures*, 35, 4133-4145.
- Joy, S., Moxley, R. (1993), "Material characterization, WSMR-5 3/4-inch concrete", Report to the Defense Special Weapons Agency, USAE Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS (limited distribution).
- Kala, Z. (2019), "Global sensitivity analysis of reliability of structural bridge system", *Engineering Structures*, 194, 36-45.
- Kaufmann, W. (1998), *Strength and deformations of structural concrete subjected to in-plane shear and normal forces*, Springer Basel AG, Zurich, Switzerland.
- Kaya, M. (2018), "Developing a new mutation operator to solve the RC deep beam problems by aid of genetic algorithm", *Computers and Concrete*, 22(5), 493-500.
- Kazaz, I. (2011), "Finite element analysis of shear-critical reinforced concrete walls", *Computers and Concrete*, 8(2), 143-162.
- Kennedy, J., Eberhart, R. (1995), "Particle swarm optimization", *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, Perth, WA, Australia, November-December.
- Kim, S.-H., Na, S.-W. (1997), "Response surface method using vector projected sampling points", *Structural Safety*, 19(1), 3-19.
- Kolář, V., Němec, I., Kanický, V. (1997), *FEM – Principy a praxe metody konečných prvků*, Computer Press, Praha, Česká republika.
- Krajcinovic, D., Lemaitre, J. (1987), *Continuum damage mechanics: Theory and applications*, Springer-Verlag, Wien, Austria.
- Král, P., Hokeš, F., Hušek, M., Kala, J., Hradil, P. (2017), "Optimization-based inverse identification of the parameters of a concrete cap material model", *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 245, 1-10.
- Král, P., Hradil, P., Kala, J. (2015), "Studie odezvy nelineárních materiálových modelů betonu v závislosti na rychlosti deformace", *Proceedings of 23rd SVSFEM ANSYS Users' Group Meeting and Conference*, Hustopeče, Česká republika, červen.
- Kupfer, H., Gerstle, K. (1973), "Behaviour of concrete under biaxial stress", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 99, 852-866.

- Kupfer, H., Hilsdorf, H. K., Rüsç, H. (1969), "Behavior of concrete under biaxial stress", *ACI Journal Proceedings*, 66(8), 656-666.
- Lade, P. V., Nelson, R. B., Ito, Y. M. (1987), "Nonassociated flow and stability of granular materials", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 113(9), 1302-1318.
- Lagová, M., Jablonský, J. (2004), *Lineární modely*, nakladatelství Oeconomica, Praha, Česká republika.
- Lehký, D., Novák, D. (2013), "Inverse reliability problem solved by artificial neural networks", *Safety, Reliability, Risk and Life-Cycle Performance of Structures and Infrastructures*, New York, NY, USA, June.
- Liu, G. R., Liu, M. B. (2003), *Smoothed particle hydrodynamics: A meshfree particle method*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- LS-Dyna (2021), *Keyword Manual Vol. I*, Livemore Software Technology Corporation, Livemore, California, USA.
- LS-Dyna (2021), *Keyword Manual Vol. II – Material Models*, Livemore Software Technology Corporation, Livemore, California, USA.
- LS-Dyna (2021), *Theory Manual*, Livemore Software Technology Corporation, Livemore, California, USA.
- Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S., Oñate, E. (1989), "A plastic-damage model for concrete", *International Journal of Solids and Structures*, 25(3), 299-326.
- Malvar, L. J., Crawford, J. E., Wesevich, J. W., Simons, D. (1997), "A plasticity concrete material model for DYNA3D", *International Journal of Impact Engineering*, 19(9-10), 847-873.
- Malvar, L. J., Ross, C. A. (1998), "Review of strain rate effects for concrete in tension", *ACI Materials Journal*, 95(6), 735-739.
- Matlab (2005), *The Language of Technical Computing*, The MathWorks, Inc.
- Meyers, M. A., Chawla, K. K. (2009), *Mechanical behavior of materials*, Cambridge University Press, New York, NY, USA.
- Moscoso, A. M., Tamayo, J. L. P., Morsch, I. B. (2017), "Numerical simulation of external pre-stressed steel-concrete composite beams", *Computers and Concrete*, 19(2), 191-201.

- Most, T. (2010), "Identification of the parameters of complex constitutive models: Least squares minimization vs. Bayesian updating", *Proceedings of the IFIP WG 7.5 Working Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems*, Munich, Germany, April.
- Murray, D. W., Wong, C., Rijub-Agha, K. Y., Chitnuyanondh, L. (1979), "Concrete plasticity theory for biaxial stress analysis", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 105(6), 989-1006.
- Murray, Y. D. (2007), "User's manual for LS-DYNA concrete material model 159", Report No. FHWA-HRT-05-062, Federal Highway Administration.
- Murray, Y. D., Abu-Odeh, A., Bligh, R. (2007), "Evaluation of concrete material model 159", Report No. FHWA-HRT-05-063, Federal Highway Administration.
- Murray, Y. D., Lewis, B. A. (1995), "Numerical simulation of damage in concrete", Technical Report Submitted to the Defense Nuclear Agency by APTEK, Contract No. DNA 001-91-C-0075, DNA-TR-94-190.
- Nguyen, G. D., Korsunsky, A. M. (2006), "Damage-plasticity modelling of concrete: Calibration of parameters using separation of fracture energy", *International Journal of Fracture*, 139(2), 325-332.
- Noels, L., Stainier, L., Ponthot, J.-P. (2004), "Combined implicit/explicit time-integration algorithms for the numerical simulation of sheet metal forming", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168(1-2), 331-339.
- Olsson, A., Sandberg, G., Dahlblom, O. (2003), "On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis", *Structural Safety*, 25(1), 47-68.
- optiSLang (2014), *Methods for multi-disciplinary optimization and robustness analysis*, Dynardo, Weimar, Germany.
- Rao, C. R., Toutenburg, H., Shalabh, Heumann, C. (2007), *Linear models and generalizations*, Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- Rezaiee-Pajand, M., Nasirai, C. (2007), "Accurate integration scheme for von-Mises plasticity with mixed-hardening based on exponential maps", *Engineering Computations*, 24(6), 608-635.

- Riedel, W., Thoma, K., Hiermaier, S. (1999), "Penetration of reinforced concrete by BETA-B-500 numerical analysis using a new macroscopic concrete model for hydrocodes", *Proceedings of 9th International Symposium Interaction of the Effect of Munitions with Structures*, Berlin, Germany, May.
- RILEM Draft Recommendation 50-FMC (1985), "Determination of fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bending tests on notched beams", *Materials and Structures*, 18(4), 287-290.
- Rouainia, M., Muir Wood, D. (2000), "A kinematic hardening constitutive model for natural clays with loss of structure", *Géotechnique*, 50(2), 153-164.
- Rubin, M. B. (1991), "Simple, convenient isotropic failure surface", *Journal of Engineering Mechanics*, 117(2), 348-369.
- Runesson, K., Mroz, Z. (1989), "A note on nonassociated plastic flow rules", *International Journal of Plasticity*, 5(6), 639-658.
- Saltelli, A., Ratto, M., Andres, T., Campolongo, F., Cariboni, J., Gatelli, D., Saisana, M., Tarantola, S. (2008), *Global sensitivity analysis. The primer*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, West Sussex, England.
- Sandler, I. S., DiMaggio, F. L., Baladi, G. Y. (1976), "Generalized cap model for geological materials", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 102(7), 683-699.
- Shames, I. H., Cozzarelli, F. A. (1997), *Elastic and inelastic stress analysis*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, Florida, USA.
- Shirkhani, A., Davarnia, D., Azar, B. F. (2019), "Prediction of bond strength between concrete and rebar under corrosion using ANN", *Computers and Concrete*, 23(4), 273-279.
- Schittkowski, K. (1986), "NLPQL: A FORTRAN subroutine solving constrained nonlinear programming problems", *Annals of Operations Research*, 5(1), 485-500.
- Schwer, L. E., Murray, Y. D. (1994), "A three-invariant smooth cap model with mixed hardening", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 18(10), 657-688.
- Szcześniak, A., Stolarski, A. (2016), "A simplified model of concrete for analysis of reinforced concrete elements", *Bulletin of the Military University of Technology*, 65(4), 55-68.

- Wittmann, F. H., Rokugo, K., Brühwiler, E., Mihashi, H., Simonin, P. (1988), "Fracture energy and strain softening of concrete as determined by means of compact tension specimens", *Materials and Structures*, 21(1), 21-32.
- Wu, M., Chen, Z., Zhang, C. (2015), "Determining the impact behavior of concrete beams through experimental testing and meso-scale simulation: I. Drop-weight tests", *Engineering Fracture Mechanics*, 135, 94-112.
- Wu, Y., Crawford, J. E., Magallanes, J. M. (2012), "Performance of LS-DYNA concrete constitutive models", *12th International LS-DYNA Users Conference*, Detroit, USA, June.
- Zaharie, D (2009), "Influence of crossover on the behavior of Differential Evolution Algorithms", *Applied Soft Computing*, 9(3), 1126-1138.
- Zhang, D., Wang, Q., Dong, J. (2016), "Simulation study on CFRP strengthened reinforced concrete beam under four-point bending", *Computers and Concrete*, 17(3), 407-421.



## Přehled publikačních aktivit

### 2022

1. KRÁL, P. Flexural Response of Formwork-Matrix Specimen – Numerical Study. *Sborník příspěvků 20. mezinárodní konference Modelování v mechanice 2022*, Ostrava: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Fakulta stavební, 2022, p. 1, ISBN 978-80-248-4609-5 (print), ISBN 978-80-248-4610-1 (online).
2. KRÁL, P., KONEČNÝ, P., LEHNER, P., KATZER, J. Numerical Analysis of Flexural Behavior of Concrete Element with 3-D Printed Formwork. In: *AIP Conference Proceedings (ICNAAM 2020)*, Volume 2425(1), 2022, p. 1-4, ISSN 0094-243X (print), ISSN 1551-7616 (online).  
DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0081317>

### 2020

1. JINDRA, D., HRADIL, P., KALA, J., KRÁL, P. Mesh Size Influence of the Concrete Slab FE Model Exposed to Impact Load for Various Material Models. *Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Civil Engineering Series*, Volume 20(2), 2020, p. 1-7, ISSN 1213-1962 (print), ISSN 1804-4824 (online).  
DOI: 10.35181/tces-2020-0010
2. KRÁL, P., KALA, J., HRADIL, P. Algorithmization and Application of Constitutive Equations for Modeling the Plane Stress State of Concrete. In: *AIP Conference Proceedings (ICNAAM 2019)*, Volume 2293(1), 2020, p. 1-4, ISBN 978-0-7354-4025-8, ISSN 0094-243X (print), ISSN 1551-7616 (online).  
DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0026518>
3. KRÁL, P., HRADIL, P., KALA, J. Modelling the Tensile Softening Behaviour of Concrete in LS-Dyna Software. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (WMCAUS 2020)*, Volume 960(4), 2020, p. 1-7, ISSN 1757-8981 (print), ISSN 1757-899X (online).  
DOI: 10.1088/1757-899X/960/4/042084
4. JINDRA, D., HRADIL, P., KALA, J., KRÁL, P. The Suitable Discretization of Concrete Plate Finite Element Model Exposed to High Velocity Loading. In: *The 3<sup>rd</sup> International Conference on Sustainable Development in Civil, Urban and Transportation Engineering 2020 (CUTE 2020)*, Book of Abstracts, 2020, p. 15-18, Ostrava, Czech Republic, ISBN 978-80-248-4457-2 (CD-ROM).

**2019**

1. KRÁL, P., KALA, J., HRADIL, P. Study of the Efficiency and Accuracy of Optimisation Algorithms within Inverse Identification of the Parameter Values of a Nonlinear Concrete Material Model. *Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Civil Engineering Series*, Volume 19(2), 2019, p. 9-16, ISSN 1213-1962 (print), ISSN 1804-4824 (online).  
DOI: 10.35181/tces-2019-0013
2. KRÁL, P., HRADIL, P., KALA, J., KALA, Z., HOKEŠ, F. Using the Inverse Identification of Parameters of a Nonlinear Concrete Material Model for Analysis of RC Structural Element. In: *AIP Conference Proceedings (ICNAAM 2018)*, Volume 2116(1), 2019, p. 1-4, ISBN 978-0-7354-1854-7, ISSN 0094-243X (print), ISSN 1551-7616 (online).  
DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5114111>
3. HOKEŠ, F., KRÁL, P., TRCALA, M. Modelling Uniaxial Compression of Concrete Specimen with Utilization of Nonlinear Material Models inside ANSYS and RFEM. In: *AIP Conference Proceedings (ICNAAM 2018)*, Volume 2116(1), 2019, p. 1-4, ISBN 978-0-7354-1854-7, ISSN 0094-243X (print), ISSN 1551-7616 (online).  
DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5114112>
4. KRÁL, P., HRADIL, P., KALA, J. Four-Point Bending Test on a High Reinforced Concrete Beam: Nonlinear Numerical Analysis Using Material Parameter Identification. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (WMCAUS 2018)*, Volume 471(4), 2019, p. 1-9, ISSN 1757-8981 (print), ISSN 1757-899X (online).  
DOI: 10.1088/1757-899X/471/5/052052
5. KRÁL, P. Analýza citlivosti jako nástroj při optimalizaci parametrů nelineárního materiálového modelu. *21. odborná konference doktorského studia Juniorstav 2019*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, 2019, p. 258-264, ISBN 978-80-86433-71-4 (flash disk).

**2018**

1. KRÁL, P., HUŠEK, M., HRADIL, P., KALA, J., MAŇAS P. Identification of Concrete Material Model Parameters Using Optimisation Algorithms. *Advances in Military Technology*, Volume 13(1), 2018, p. 33-45, ISSN 1802-2308 (print), ISSN 2533-4123 (online).  
DOI: 10.3849/aimt.01213

2. HUŠEK, M., KRÁL, P., KALA, J., HRADIL, P., MAŇAS P. Concrete Targets with Heterogeneities under Impact Loading. *Advances in Military Technology*, Volume 13(1), 2018, p. 107-118, ISSN 1802-2308 (print), ISSN 2533-4123 (online).  
DOI: 10.3849/aimt.01216
3. KRÁL, P., HRADIL, P., HUŠEK, M., KALA, J., KALA Z. Sensitivity Analysis and Optimization as Tools for the Inverse Concrete Material Model Parameter Identification. In: *AIP Conference Proceedings (ICNAAM 2017)*, Volume 1978(1), 2018, p. 1-4, ISBN 978-0-7354-1690-1, ISSN 0094-243X (print), ISSN 1551-7616 (online).  
DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5044025>
4. HUŠEK, M., KALA, J., KRÁL, P., HOKEŠ, F. Using Noise to Generate the Material Structure of Concrete. In: *AIP Conference Proceedings (ICNAAM 2017)*, Volume 1978(1), 2018, p. 1-4, ISBN 978-0-7354-1690-1, ISSN 0094-243X (print), ISSN 1551-7616 (online).  
DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5044017>
5. KRÁL, P. Testování konstitutivních rovnic pro modelování betonu. *Sborník příspěvků 20. odborné konference doktorského studia Juniorstav 2018*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, 2018, p. 570-575, ISBN 978-80-86433-69-1.
6. KRÁL, P., KALA, J., HRADIL, P. Studie efektivity a přesnosti optimalizačních algoritmů při inverzní identifikaci hodnot parametrů nelineárního materiálového modelu betonu. *Sborník příspěvků 16. mezinárodní konference Modelování v mechanice 2018*, Ostrava: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Fakulta stavební, 2018, p. 1-12, ISBN 978-80-248-4175-5.
7. KRÁL, P., HRADIL, P., KALA, J. Evaluation of Constitutive Relations for Concrete Modeling Based on an Incremental Theory of Elastic Strain-Hardening Plasticity. *Computers and Concrete*, Volume 22(2), 2018, p. 227-237, ISSN: 1598-8198 (print), 1598-818X (online). *Impact Factor: 1,637 (2017)*.  
DOI: <https://doi.org/10.12989/cac.2018.22.2.227>

## 2017

1. KRÁL, P., HRADIL, P., KALA, J. Inverse Identification of the Material Parameters of a Nonlinear Concrete Constitutive Model Based on the Triaxial Compression Strength Testing. *Frattura ed Integrità Strutturale (Fracture and Structural Integrity)*, Volume 39, 2017, p. 38-46, ISSN 1971-8993.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.3221/IGF-ESIS.39.05>

2. HUŠEK, M., HOKEŠ, F., KALA, J., KRÁL, P. Inclusion of Randomness into SPH Simulations. *WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer*, Volume 12, 2017, p. 1-10, ISSN 1790-5044 (print), ISSN 2224-3461 (online).  
<http://www.wseas.org/multimedia/journals/heat/2017/a025812-166.pdf>
3. HOKEŠ, F., HUŠEK, M., KALA, J., KRÁL, P. Predicting the Load-Carrying Capacity of Reinforced Concrete Structural Element. *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, Volume 12, 2017, p. 1-10, ISSN 1991-5747 (print), ISSN 2224-3429 (online).  
<http://www.wseas.org/multimedia/journals/mechanics/2017/a025811-081.pdf>
4. KRÁL, P., HRADIL, P., KALA, J., HOKEŠ, F., HUŠEK, M. Identification of the Parameters of a Concrete Damage Material Model. *Procedia Engineering*, Volume 172, 2017, p. 578-585, ISSN 1877-7058.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2017.02.068>
5. HOKEŠ, F., KRÁL, P., KRŇÁVEK, O., HUŠEK, M. Improved Sensitivity Analysis in the Inverse Identification of the Parameters of a Nonlinear Material Model. *Procedia Engineering*, Volume 172, 2017, p. 347-354, ISSN 1877-7058.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2017.02.039>
6. KRÁL, P., HRADIL, P., HUŠEK, M., HOKEŠ, F. Comparison of Responses of Concrete Damage Material Models with Respect to Optimization-Based Material Parameter Identification. In: *AIP Conference Proceedings (ICNAAM 2016)*, Volume 1863(1), 2017, p. 1-4, ISBN 978-0-7354-1538-6, ISSN 0094-243X (print), ISSN 1551-7616 (online).  
DOI: <http://doi.org/10.1063/1.4992644>
7. HUŠEK, M., KALA, J., KRÁL, P., HOKEŠ, F. Concept and Numerical Simulations of a Reactive Anti-Fragment Armour Layer. In: *AIP Conference Proceedings (ICNAAM 2016)*, Volume 1863(1), 2017, p. 1-4, ISBN 978-0-7354-1538-6, ISSN 0094-243X (print), ISSN 1551-7616 (online).  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4992643>
8. KRÁL, P., HUŠEK, M., HRADIL, P., KALA, J., MAŇAS, P. Optimization of the Material Parameters of the Continuous Surface Cap Model for Concrete. In: *2017 International Conference on Military Technologies (ICMT)*, Brno, Czech Republic, 31 May-2 June 2017, p. 1-5.  
DOI: 10.1109/MILTECHS.2017.7988773
9. HUŠEK, M., KRÁL, P., KALA, J., HRADIL, P., MAŇAS, P. Simulating Randomized Failure of Concrete Targets. In: *2017 International Conference on Military Technologies (ICMT)*, Brno, Czech Republic, 31 May-2 June 2017, p. 1-5.  
DOI: 10.1109/MILTECHS.2017.7988774

10. HUŠEK, M., KALA, J., HOKEŠ, F., KRÁL, P. Conversion of Fractal Fields into Heterogeneities Inside SPH Simulations. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (WMCAUS 2016)*, Volume 245, 2017, p. 1-7, ISSN 1757-8981 (print), ISSN 1757-899X (online).  
DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/245/3/032024>
11. HUŠEK, M., KALA, J., KRÁL, P., HOKEŠ, F. Steel Fibre Reinforced Concrete Simulation with the SPH Method. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (WMCAUS 2016)*, Volume 245, 2017, p. 1-8, ISSN 1757-8981 (print), ISSN 1757-899X (online).  
DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/245/3/032070>
12. HOKEŠ, F., KRÁL, P., HUŠEK, M., KALA, J. Study on Identification of Material Model Parameters from Compact Tension Test on Concrete Specimens. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (WMCAUS 2016)*, Volume 245, 2017, p. 1-10, ISSN: 1757-8981 (print), ISSN: 1757-899X (online).  
DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/245/3/032079>
13. KRÁL, P., HOKEŠ, F., HUŠEK, M., KALA, J., HRADIL, P. Optimization-Based Inverse Identification of the Parameters of a Concrete Cap Material Model. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (WMCAUS 2016)*, Volume 245, 2017, p. 1-10, ISSN: 1757-8981 (print), ISSN: 1757-899X (online).  
DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/245/3/032078>
14. KRÁL, P., HUŠEK, M. Beton v jednoosém a tříosém tlaku – experimentální a numerická analýza v interakci s optimalizací materiálových parametrů. *Sborník abstraktů 19. odborné konference doktorského studia Juniorstav 2017*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, 2017, p. 163, ISBN 978-80-214-5462-0.
15. HOKEŠ, F., HUŠEK, M., KRÁL, P. Nelineární numerická studie čepového spoje při statickém a cyklickém zatěžování. *Sborník abstraktů 19. odborné konference doktorského studia Juniorstav 2017*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, 2017, p. 159, ISBN 978-80-214-5462-0.

## 2016

1. WALD, F., ŠABATKA, L., BAJER, M., BARNAT, J., GÖDRICH, L., HOLOMEK, J., KABELÁČ, J., KOČKA, M., KOLAJA, D., KRÁL, P., KUREJKOVÁ, M., VILD, M. *Benchmark Cases for Advanced Design of Structural Steel Connections*. Česká technika – nakladatelství ČVUT, Praha, Česká republika, září 2016, počet stran 187, ISBN 978-80-01-05826-8.

2. KRÁL, P., KALA, J., HRADIL, P. Verification of the Elasto-Plastic Behavior of Nonlinear Concrete Material Models. *International Journal of Mechanics*, North Atlantic University Union, Volume 10, 2016, p. 175-181, ISSN 1998-4448.  
<https://www.naun.org/main/NAUN/mechanics/2016/a522003-188.pdf>
3. HUŠEK, M., KALA, J., HOKEŠ, F., KRÁL, P. How to Handle Irregular Distribution of SPH Particles in Dynamic Fracture Analysis. *International Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Volume 1, 2016, p. 212-217, ISSN 2367-8984.  
<http://www.iaras.org/iaras/filedownloads/ijtam/2016/009-0032.pdf>
4. HUŠEK, M., HOKEŠ, F., KALA, J., KRÁL, P. A Simple Solution for Randomized Failure Modeling with the SPH Method. *International Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Volume 1, 2016, p. 253-258, ISSN 2367-8992.  
<http://www.iaras.org/iaras/filedownloads/ijtam/2016/009-0038.pdf>
5. HUŠEK, M., KALA, J., KRÁL, P., HOKEŠ, F. Effect of the Support Domain Size in SPH Fracture Simulations. *International Journal of Mechanics*, North Atlantic University Union, Volume 10, 2016, p. 396-402, ISSN 1998-4448.  
<http://www.naun.org/main/NAUN/mechanics/2016/b162003-208.pdf>
6. HOKEŠ, F., KALA, J., HUŠEK, M., KRÁL, P. Parameter Identification for a Multivariable Nonlinear Constitutive Model inside ANSYS Workbench. *Procedia Engineering*, Volume 161, 2016, p. 892-897, ISSN 1877-7058.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.743>
7. HUŠEK, M., KALA, J., HOKEŠ, F., KRÁL, P. Influence of SPH Regularity and Parameters in Dynamic Fracture Phenomena. *Procedia Engineering*, Volume 161, 2016, p. 489-496, ISSN 1877-7058.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.671>
8. HOKEŠ, F., HUŠEK, M., KRÁL, P., KALA, J. Numerical Simulation of Reinforced Concrete Beam with Utilization of Elasto-plastic Material Model of Concrete. *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, Volume 11, 2016, p. 136-141, ISSN 1991-8747 (print), ISSN 2224-3429 (online).  
<http://www.wseas.org/multimedia/journals/mechanics/2016/a325811-092.pdf>
9. KRÁL, P. Testování odezvy nelineárních materiálových modelů betonu implementovaných ve výpočetním systému LS-Dyna. *Sborník abstraktů 18. odborné konference doktorského studia Juniorstav 2016*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, 2016, p. 237, ISBN 978-80-214-5312-8.
10. KRÁL, P., HRADIL, P., KALA, J. Inverzní identifikace materiálových parametrů konstitutivního modelu určeného pro modelování betonu. *Sborník příspěvků 14. mezinárodní konference Modelování v mechanice 2016*, Ostrava: Vysoká škola

báňská – Technická univerzita Ostrava, Fakulta stavební, 2016, p. 1-11, ISBN 978-80-248-3917-2.

11. KRÁL, P., HRADIL, P. Studie vlivu redukce návrhového vektoru na výsledky inverzní identifikace parametrů nelineárního materiálového modelu betonu. *Proceedings of 24<sup>th</sup> SVSFEM ANSYS Users' Group Meeting and Conference 2016*, Dolní Morava, Česká republika, 2016, p. 102-110, ISBN 978-80-905525-3-1.

## 2015

1. KRÁL, P., HRADIL, P., KALA, J. The effect of Strain Rate on the Response of Nonlinear Material Models of Concrete. *Proceedings Of International Conference on Applied System Innovation*, Osaka, Japan, 22-27 May 2015, p. 211.
2. KRÁL, P., HRADIL, P., KALA, J. Studie odezvy nelineárních materiálových modelů betonu v závislosti na rychlosti deformace. *Proceedings of 23<sup>rd</sup> SVSFEM ANSYS Users' Group Meeting and Conference 2015*, Hustopeče, Česká republika, 2015, p. 87-99, ISBN 978-80-905525-2-4.
3. KRÁL, P., KALA, J., HRADIL, P. Validation of the Response of Concrete Nonlinear Material Models Subjected to Dynamic Loading. *Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Conference on Continuum Mechanics (CM '15)*, Rome, Italy, 7-9 November 2015, p. 182-185, ISBN 978-1-61804-346-7, ISSN 2227-4359.





## Curriculum vitae

### Osobní a kontaktní údaje

Jméno a příjmení, titul: Petr Král, Ing.  
Adresa trvalého bydliště: Nová 328, 753 66 Hustopeče nad Bečvou, Česká republika  
E-mail: kral.p@fce.vutbr.cz  
Telefon: +420 733 549 223  
Datum narození: 27. 6. 1989  
Národnost: Česká

### Vzdělání

- 02/2015–současnost **Fakulta stavební VUT v Brně, Veverří 331/95, 602 00 Brno**  
**Doktorský studijní program**  
Studijní program: *P3607 Stavební inženýrství (nD)*  
Studijní obor: *Konstrukce a dopravní stavby*  
Zaměření: *Konstrukce*  
Specializace: *Stavební mechanika*  
Téma disertační práce: *Identifikace parametrů nelineárních materiálových modelů*  
V současnosti kombinované studium.
- 09/2013–02/2015 **Fakulta stavební VUT v Brně, Veverří 331/95, 602 00 Brno**  
**Navazující magisterský studijní program**  
Studijní program: *N3607 Stavební inženýrství (C)*  
Studijní obor: *Pozemní stavby*  
Zaměření: *Konstrukce a statika staveb*  
Specializace: *Stavební mechanika*  
Téma diplomové práce: *Verifikace nelineárních materiálových modelů betonu*
- 09/2009–06/2013 **Fakulta stavební VUT v Brně, Veverří 331/95, 602 00 Brno**  
**Bakalářský studijní program**  
Studijní program: *B3607 Stavební inženýrství (B)*  
Studijní obor: *Pozemní stavby*  
Zaměření: *Konstrukce a statika staveb*  
Specializace: *Stavební mechanika*  
Téma bakalářské práce: *Nelineární analýza železobetonových konstrukcí*

09/2005–05/2009 **Střední průmyslová škola stavební, Máchova 628, 757 01  
Valašské Meziříčí**  
Obor: *Pozemní stavitelství*

### **Pracovní zkušenosti**

07/2022–současnost **FEM consulting, s.r.o., Veverí 331/95, 602 00 Brno**  
Pozice: *Tester softwaru*  
Náplň práce: *Tvorba testovacích příkladů pro oblast nelineární časové analýzy*

01/2019–současnost **Fakulta stavební VŠB-TUO, Ludvíka Poděště 1875/17, 708 00  
Ostrava-Poruba**  
Pozice: *Akademický pracovník – odborný asistent*  
Náplň práce: *Vědeckovýzkumná činnost, vedení výuky předmětů Stavební mechanika, Statika stavebních konstrukcí I, Statika stavebních konstrukcí II, Pružnost a plasticita, Základy stavební mechaniky, Počítačová podpora statických výpočtů, Nelineární mechanika, Mechanika materiálu, Inženýrské statické výpočty*

01/2017–12/2019 **Fakulta stavební VUT v Brně, Veverí 331/95, 602 00 Brno**  
Pozice: *THP na výzkumných projektech*  
Náplň práce: *Vědeckovýzkumná činnost a softwarová podpora, tvorba odborných a vědeckých publikací, účast na zahraničních i tuzemských odborných a vědeckých konferencích, příprava experimentů*

### **Kurzy a školení**

2018 **ANSYS optiSLang**  
Školení optimalizačního softwaru dle osnov a materiálů firmy ANSYS, Inc.

2018 **SCIA Engineer 18.1**  
Studentské školení MKP softwaru dle osnov a materiálů firmy SCIA CZ, s.r.o.

2017 **SCIA Engineer 16.1**  
Studentské školení MKP softwaru dle osnov a materiálů firmy SCIA CZ, s.r.o.

2016 **LS-Dyna**  
Školení explicitního MKP softwaru dle osnov a materiálů firmy ANSYS, Inc.

2015 **Modeling of Localized Inelastic Deformation**  
Kurz na Fakultě stavební ČVUT v Praze pod vedením pana prof. Ing. Milana Jiráska, DrSc.

### Jazykové znalosti

Čeština výborná znalost / rodilý mluvčí  
Angličtina pokročilá znalost

### Účast na řešení vědeckých projektů

- 04/2021–současnost **Projekt TAČR FW03010260**  
**„Pokročilý softwarový nástroj pro návrh a analýzu betonových a spřažených konstrukcí se zohledněním fází výstavby a časově závislých dějů“**  
Pozice: Člen v týmu řešitelů projektu za VUT v Brně pod vedením pana prof. Ing. Jiřího Kaly, Ph.D., hlavní řešitel projektu: firma FEM consulting, s.r.o.  
Náplň práce: Vědeckovýzkumná činnost a softwarová podpora v oblasti modelování fyzikálních nelinearit betonu, příprava experimentů
- 03/2018–12/2018 **Projekt Juniorského specifického výzkumu FAST-J-18-5604**  
**„Statická analýza betonových konstrukcí s využitím explicitních nelineárních materiálových modelů a identifikace hodnot jejich vstupních parametrů“**  
Pozice: Řešitel projektu, projekt řešen v rámci VUT v Brně  
Náplň práce: Vědeckovýzkumná činnost v oblasti aplikace explicitních nelineárních materiálových modelů betonu v rámci statické analýzy betonových konstrukcí, identifikace hodnot vstupních parametrů materiálových modelů, publikační činnost, účast na mezinárodních i tuzemských odborných a vědeckých konferencích
- 10/2017–09/2020 **Projekt MPO FV20372**  
**„Softwarový nástroj pro nelineární analýzu betonových konstrukcí u rychlých dynamických dějů“**  
Pozice: Člen v týmu řešitelů projektu za VUT v Brně pod vedením pana prof. Ing. Jiřího Kaly, Ph.D., hlavní řešitel projektu: firma FEM consulting, s.r.o.

Náplň práce: *Vědeckovýzkumná činnost a softwarová podpora v oblasti modelování fyzikálních nelinearit betonu, příprava experimentů*

01/2017–12/2019 **Projekt TAČR TH02020301**  
**„Pokročilý návrh zesilování ocelové konstrukce pod zatížením“**

Pozice: *Člen v týmu řešitelů projektu za VUT v Brně pod vedením pana prof. Ing. Miroslava Bajera, CSc., hlavní řešitel projektu: firma IDEA RS, s.r.o.*

Náplň práce: *Softwarová podpora v oblasti modelování fyzikálních nelinearit konstrukční oceli*

01/2017–12/2019 **Projekt GAČR GA17-23578S**  
**„Identifikace míry poškození vyztuženého betonu při extrémním zatížení“**

Pozice: *Člen v týmu hlavního řešitele projektu VUT v Brně pod vedením pana prof. Ing. Jiřího Kaly, Ph.D.*

Náplň práce: *Vědeckovýzkumná činnost a softwarová podpora v oblastech stochastické optimalizace a modelování fyzikálních nelinearit betonu a betonářské oceli, tvorba odborných a vědeckých publikací, účast na zahraničních i tuzemských odborných a vědeckých konferencích, příprava experimentů*

03/2017–12/2017 **Projekt Juniorského specifického výzkumu FAST-J-17-4779**  
**„Vývoj, systémová implementace a identifikace parametrů nelineárních materiálových modelů betonu“**

Pozice: *Řešitel projektu, projekt řešen v rámci VUT v Brně*

Náplň práce: *Vědeckovýzkumná činnost v oblasti programování nelineárních materiálových modelů betonu prostřednictvím uživatelských rutin na bázi UPF, identifikace hodnot jejich vstupních parametrů, publikační činnost, účast na mezinárodních i tuzemských odborných a vědeckých konferencích*

03/2016–12/2016 **Projekt Juniorského specifického výzkumu FAST-J-16-3744**  
**„Optimalizace parametrů nelineárních materiálových modelů určených pro explicitní dynamiku“**

Pozice: *Řešitel projektu, projekt řešen v rámci VUT v Brně*

Náplň práce: *Vědeckovýzkumná činnost v oblasti inverzní identifikace hodnot vstupních parametrů nelineárních materiálových modelů pro beton pomocí optimalizačních*

*algoritmů, publikační činnost, účast na mezinárodních i tuzemských odborných a vědeckých konferencích*

07/2014–12/2016

**Projekt GAČR GA14-25320S**

**„Aspekty použití komplexních nelineárních materiálových modelů“**

*Pozice: Člen v týmu hlavního řešitele projektu VUT v Brně pod vedením pana prof. Ing. Jiřího Kaly, Ph.D.*

*Náplň práce: Vědeckovýzkumná činnost a softwarová podpora v oblasti numerického modelování fyzikálních nelinearit betonu, tvorba odborných a vědeckých publikací, účast na zahraničních i tuzemských odborných a vědeckých konferencích, příprava experimentů*

04/2014–12/2015

**Projekt TAČR TA03010680**

**„Pokročilý software pro optimální návrh obecných styčníků stavebních ocelových konstrukcí“**

*Pozice: Člen v týmu řešitelů projektu za VUT v Brně pod vedením pana prof. Ing. Miroslava Bajera, CSc., hlavní řešitel projektu: firma IDEA RS, s.r.o.*

*Náplň práce: Vědeckovýzkumná činnost v oblasti problematiky návrhu styčníků z ocelových dutých profilů, verifikace, tvorba kapitol pro monografii*