UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Diplomová práce

Bc. Jan Pospíšil

Učebnice kruhové inverze pro sekundární vzdělávání

Olomouc 2023

vedoucí práce: Mgr. David Nocar, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci zpracoval samostatně, pouze na základě uvedených pramenů a literatury.

V Olomouci dne 11. června 2023

Bc. Jan Pospíšil

Na tomto místě bych rád poděkoval Mgr. Davidu Nocarovi, Ph.D. za trpělivost a cenné rady při vedení a zpracování této diplomové práce. Mé díky patří též Mgr. Terezii Hiklové za vyčerpávající jazykovou korekturu.

OBSAH

ÚVOD

Diplomová práce se zabývá tématem kruhové inverze[1] ve vztahu k nadaným či mimořádně nadaným žákům posledních ročníků základních škol či ekvivalentních ročníků víceletých gymnázií. Těm se podle nejnovější tematické zprávy České školní inspekce nedostává dostatečné pozornosti a podpory na rozdíl od žáků se speciálními vzdělávacími potřebami.[2] Na základě zjištění charakteristiky těchto žáků a zásad optimální práce s nimi se snaží tato práce nabídnout východisko skrze tvorbu uceleného vzdělávacího materiálu s geometrickým tématem.

Primárním cílem této práce je zpracovat metodiku výuky kruhové inverze pro nadané žáky ZŠ a následně ji realizovat vytvořením digitální učebnice na toto téma. Jedním z důvodů výběru tohoto tématu je v současnosti malá ochota pedagogů matematiky zařazovat geometrická témata do své výuky. Dále chce autor práce ukázat, že při vhodném uchopení tradičně vysokoškolského tématu (tedy bez příslušného teoretického rámce a za pomoci jednoduchých instruktivních kroků) lze toto téma předložit již žákům posledních ročníků ZŠ.

Sekundárních cílů práce je několik. Jedním z nich je snaha sjednotit a doplnit běžně užívané značení geometrických konstrukcí a vytvořit z nich jednotný systém, který by jak žáci, tak zejména učitelé, standardně používali. Dalším cílem je vytvořit interaktivní webové prostředí, v němž by si žáci mohli tyto konstrukce krok po kroku procházet a nechat si je postupně vykreslovat, což by jim mělo pomoci je lépe pochopit. V neposlední řadě je cílem vytvořit v rámci učebnice interaktivní aplikaci, díky níž by žáci mohli aktivně prozkoumávat jednotlivá geometrická zobrazení.

Diplomová práce je rozdělena do tří kapitol. První dvě kapitoly představují teoretickou část, třetí kapitola část praktickou. První kapitola stručně, ale výstižně pojednává o problémech a výzvách podpory nadaných žáků s ohledem na výuku matematiky. Druhá kapitola popisuje specifika vytvořené učebnice, zasazuje ji do teoretického rámce a komentuje zásadní rozdíly oproti tradičním učebnicím. Poslední kapitola obsahuje textový přepis digitální učebnice.

1 Kruhová inverze je nelineární geometrické zobrazení v rovině, které zobrazuje přímky a kružnice opět na přímky a kružnice, avšak nutně nezachovává typ těchto křivek.

2 Viz (PAVLAS, 2022, s. 8).

1 PROBLEMATIKA PODPORY NADANÝCH ŽÁKŮ

V této kapitole si čtenář udělá představu o tom, kdo to je nadaný žák, a to z pohledu žáka nadaného v matematice. Dále se seznámí s možnostmi a obecnými zásadami jeho podpory a také s problémy, se kterými se učitelé (zejména v matematice) při práci s nadaným žákem setkávají. Kapitola je poměrně stručná, avšak akcentuje nejzásadnější body charakteristiky nadaného žáka a problémy s jeho podporou, čímž se stává východiskem pro další kapitoly této práce.

1.1 Kdo je to nadaný žák?

Nejprve je důležité poznamenat, že „*pojmy nadání a mimořádné nadání nejsou ve školském zákoně přesně definovány*“ (Pavlas, 2022, s. 6). Od roku 2021 je však v účinnosti vyhláška o vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami a též o vzdělávání žáků nadaných, v níž existuje tato definice:

„Za nadaného žáka se (...) považuje (...) žák, který (...) vykazuje ve srovnání s vrstevníky vysokou úroveň (...) rozumových schopností...“ (Pavlas, 2022, s. 6)

Úroveň rozumových schopností lze kategorizovat podle IQ skóre a podle Fořtíkové je kritérium pro zařazení žáka do kategorie rozumového nadání IQ skóre 130 a vyšší. Tuto hranici používá i mezinárodní organizace Mensa, která tak sdružuje zhruba 2 % celkové populace, kteří této hranice dosáhnou. (Careswell, 2011, s. 5)

Intelektově nadaní žáci nepoužívají jiné kognitivní schopnosti než průměrní žáci, ale jejich schopnosti jsou oproti žákům průměrným více vyvinuté a vyzrálé. Navíc jsou schopni používat složitější logické konstrukce a strategie, než je u jejich vrstevníků obvyklé. Mezi kognitivní charakteristiky těchto žáků patří např. větší schopnost abstrakce, používání kritického a flexibilního myšlení, originalita myšlení a v oblastech jejich zájmu pak především hlubší znalosti a dlouhodobá koncentrace pozornosti, než je obvyklé u žáků průměrných. (Slabihoudková, 2020, s. 26–28)

Nadaného žáka samozřejmě necharakterizují pouze rozumové schopnosti. Jeho nadání se může projevit i v jiných dovednostech, např. pohybových, sociálních, manuálních či uměleckých. Tato práce se však zabývá nadaným žákem v matematice, kde jsou ostatní zmíněné dovednosti pro žáka marginální.

Dalším důležitým faktorem, mimo rozumové schopnosti, je pak zejména žákova motivační charakteristika. U nadaných žáků můžeme vypozorovat, že v případě, že se věnují činnosti, která je zajímá, jsou schopni u této činnosti dlouho a bez větší únavy vytrvat. Také jejich motivace je převážně vnitřního než vnějšího charakteru. (Slabihoudková, 2020, s. 30) Práce s motivací u nadaného žáka je pak zásadním bodem jeho rozvoje!

Mimo motivační charakteristiku můžeme u nadaného žáka vypozorovat ještě zvláštnosti v jeho učení, oproti průměrným žáků stejné věkové skupiny. Nadaní žáci rádi řeší problémové úkoly a preferují individuální práci před skupinovou. Jsou schopni se velice dobře orientovat v různých informačních zdrojích a v případě jejich zájmu o danou problematiku vykazují velký rozsah znalostí, a pokud je to možné, rádi a se zájmem provádějí experimenty. (Slabihoudková, 2020, s. 31)

1.2 Jak podporovat nadané žáky?

Odpověď na tuto otázku dává již sama předchozí podkapitola. Nadaného žáka (v matematice) je potřeba intelektuálně stimulovat a rozvíjet, a to vhodným, citlivým a nenásilným způsobem. Je nutné jej rozumně motivovat, ale především zabránit jeho demotivaci, a to buď nedostatečným, nebo naopak nadměrným působením ze strany pedagoga. Nakonec je potřeba mu připravit takové prostředí, v němž může bezpečně rozvíjet své nadání.

Mezi obecné zásady podpory nadaných žáků patří:

- podněcování zvídavosti a objevování nových znalostí
- nabízení atraktivních a vzrušujících aktivit pro žáka
- nastavení náročnosti a úrovně aktivit, takovým způsobem, aby mohl nadaný žák vynaložit značné úsilí pro dosažení vzdělávacího cíle

Dále se doporučuje:

- kontakt s nadanými vrstevníky (např. různé kurzy, soutěže, tábory apod.)
- setkání s odborníky s praxe
- podpora profilace zájmů a studijní poradenství

(Careswell, 2011, s. 9–10)

Mimo tyto obecné zásady a doporučení existují ve školské praxi dva základní přístupy z hlediska změny obsahu výuky. Jsou jimi **akcelerace** a **obohacování** učiva (Careswell, 2011, s. 11). Akcelerací učiva se rozumí rychlejší zvládnutí učební látky žákem, které v praxi často znamená přeřazení do vyššího ročníku bez absolvování předchozího ročníku. (Zapletalová, 2007). *„V obohacování jde především o* ***rozšíření znalostí, pochopení, zájmů a dovedností za hranici běžného kurikula.*** *"* (Careswell, 2011, s. 11) *„Cílem tohoto postupu [obohacování] je učivo prohloubit, rozšířit a obohatit o další informace, ale také* ***stimulovat procesy objevování*** *a vyhledávání dalších souvislostí a vazeb, které dané téma nabízí."* (Zapletalová, 2007)

Jak dále uvádí Fořtíková, příklady takového obohacování mohou být exkurze, zapojení do soutěží, vzdělávací kluby, zapojení odborníka do výuky či využívání technologií. Co se týče výuky samotné, je možné obohacovat informace v daném předmětu jak do šířky, tak do hloubky. Cílem tohoto obohacování má být zlepšení schopnosti analýzy a řešení problémů, rozvoj hodnotných zájmů žáka a stimulování originality, iniciativy a sebekontroly. (Careswell, 2011, s. 11)

Fořtíková také uvádí 10 pedagogických zásad pro práci s nadanými žáky:

1. Umožnit pracovat rychlejším tempem.
2. Méně procvičování, umožnit postup dopředu.
3. Náročnější výuka.
4. Nezávislost.
5. Kreativní myšlení a divergentní úkoly.
6. Abstraktní úkoly.
7. Kontakt s intelektovými vrstevníky.
8. Zkušenostní učení.
9. Umožnit ranou specializaci v rámci výuky.
10. Opora o vlastní zájmy.

(Careswell, 2011, s. 16–17)

Vraťme se ale zpět k tématu obohacování učiva, které souvisí s cílem této diplomové práce. Jak uvádí Konečná (2009, s. 23–24), obohacování má zásadní vliv na rozvoj kognitivních a afektivních složek žákovy osobnosti. Kognitivní složky rozvíjí především studium faktů souvisejících s daným oborem a s tím související vyhledávání informací z různých zdrojů, ale také řešení různých úloh a **samostudium**. Afektivní složky pak rozvíjí radost ze získávání poznatků a hledání a nacházení různých způsobů řešení problémů. Dále pak diskuze nad vlastní prací či studovanými tématy, obhajoba vlastních názorů, uznání argumentace druhých a celkový rozvoj argumentační komunikace.

1.3 Problémy podpory nadaných žáků

Jaké mohou být problémy v podpoře nadaných žáků? Dobrým příkladem je shrnutí hlavních zjištění České školní inspekce na téma podpory nadaných a mimořádně nadaných žáků v základních a středních školách z roku 2022:

- *„Oblast podpory a vzdělávání nadaných a mimořádně nadaných žáků stále není ve školách v potřebné míře systematicky rozvíjena a akcentována."*
- *„Většina (...) škol má sice rozvoj nadání (...) formálně ukotven (...) ale jen zřídka se (...) aplikuje..."*
- *„Na základních školách bylo jen 5 % žáků a na středních jen 7 % žáků identifikováno jako žáci nadaní a méně než 0,1 % žáků jako mimořádně nadaní, což je výrazně méně, než by mělo podle předpokladů být."*
- *„Jen 4 % pedagogů základních škol a 3 % pedagogů středních škol absolvovala v posledních dvou letech v rámci dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků nějaký kurz nebo seminář zaměřený na vzdělávání nadaných a mimořádně nadaných žáků."*
- *„Podpora rozvoje nadaných (...) žáků není (...) příliš patrná ani v samotné výuce."*

(Pavlas, 2022, s. 8)

Pokud bychom měli toto shrnutí ještě okomentovat, tak jedním z největších problémů je nedostatečná identifikace nadaných žáků, a především malá míra objektivity této identifikace, která probíhá pouze na základě pozorování žáků a pedagogické intuice. Dalším zásadním problémem je, že většina škol soustředí svou pozornost zejména na podporu žáků se speciálními vzdělávacími potřebami a *„...podpora žáků nadaných a mimořádně nadaných [není] dostatečně zajištěna a není adekvátně akcentována..."* (Pavlas, 2022, s. 8, 12, 13).

Tradičním přístupem většiny škol je pak organizování nejrůznějších soutěží a olympiád, které však nijak nerozvíjí nadání těchto žáků. Další hojně využívaná forma práce je rozšiřování a obohacování učiva, která je podle zprávy ČSI sice vhodná, ale v žádném případě dostatečná. *„Problémem je ale nedostatek efektivních metod a forem, které by rozvíjely individuální nadání…“*. (Pavlas, 2022, s. 8)

Vraťme se ale zpět k otázce obohacování učiva. Podle Pavlase (2022, s. 24–25) je to právě rozšíření a obohacení učiva, k němuž základní školy přistupují nejčastěji. Podle citované zprávy ČSI tuto formu práce s nadanými žáky využívá 87 % základních škol a 84 % gymnázií.

Nyní tedy vyvstává otázka, jakým způsobem obohacovat učivo nadaného žáka ZŠ? Tak abychom podněcovali jeho zvídavost, aby aktivity s tím spojené byly náročné, ale atraktivní. Aby stimuloval procesy objevování a případně rozšířil své znalosti za hranici běžného kurikula. Je tedy nepochybné, že musíme takovému nadanému žákovi poskytnout kvalitní vzdělávací materiál, který splňuje v co největší míře všechny výše uvedené zásady.

Existují však takové materiály? A jaké je vůbec skutečná učitelská praxe?

Jak uvádí Vyoralová (2018, s. 51) *„Někteří učitelé mají problémy s hledáním materiálů pro obohacení výuky matematiky pro nadané žáky. Uvedli, že není dostatek odpovídajících zdrojů.“*. Tyto materiály si pak podle Vyoralové učitelé většinou vytváří sami. Lze tedy předpokládat, že neexistuje žádný komplexně zpracovaný materiál určený výhradně pro nadané žáky, případně že tento materiál existuje, ale není v obecné povědomosti učitelů.

Při hledání materiálů však můžeme nalézt nepřeberné množství různých pracovních listů, které s největší pravděpodobností učitelé využívají. Tyto listy zpravidla obohacují učivo do hloubky, přinášejí žákům náročnější úkoly v již probraných tématech. Materiálů obohacujících učivo do šířky, tedy přinášející nové učivo mimo kurikulum dané RVP (potažmo ŠVP), je pak podstatně méně. Tyto materiály většinou obohacují učivo základní školy nějakým prvkem z kurikula určené pro střední školu, což se zdá být více než logické.

Obecný úzus pro obohacení učiva matematiky pak je „zadávání těžších příkladů“, tedy praxe, při níž učitel využívá zrychlené práce nadaného žáka a tento „ušetřený“ čas vyplňuje učivem obohaceným do hloubky. Zpravidla se pak nejedná o expozici nějakého nového (třeba zajímavého) učiva, ale spíše o „zatížení“ nadaného žáka další prací, od níž si učitel slibuje rozvoj tohoto žáka.

Je však nanejvýš nutné si položit otázku, zda **vypracování náročnějších matematických příkladů skutečně rozvíjí žákovo nadání, ale především zda je tento přístup vhodný z hlediska jeho motivace?** Touží skutečně nadaný žák po větším objemu náročnější práce? Je to skutečně to, co dál rozvíjí jeho nadání a uspokojuje jeho intelektuální potřeby? Nebo se v tomto přístupu učitelé naprosto mýlí?

V následujících dvou kapitolách je metodicky popsána a realizována učebnice, která má ambici být komplexním materiálem určeným pro nadané žáky v matematice, konkrétně pak v geometrii. Snaží se maximálním způsobem dodržet všechny výše uvedené zásady práce s nadaným žákem. Je určena především pro samostudium nadaného žáka, ideálně v 9. ročníku ZŠ, ale lze ji využít i jiným způsobem, případně pedagogem samotným pro přípravu vlastních obohacujících materiálů. Navržena je však tak, aby žák studoval výklad nové látky samostatně, a společně s učitelem o ní pak diskutovali a pracovali na praktických příkladech (které však nejsou součástí učebnice).

Ústředním bodem a vyvrcholením celé učebnice je téma kruhové inverze, tedy téma vysokoškolské. Tímto výběrem se tak otevřel prostor pro nadaného žáka zkoumat něco, o čem většina jeho vrstevníků (a pravděpodobně i učitelů) nemá ani ponětí, což může být jedním z motivačních faktorů. Celá učebnice je však rámována tématem geometrických zobrazení a lze tak pro obohacení žáků použít jen její první část.

2 POPIS SPECIFICKÝCH VLASTNOSTÍ UČEBNICE

V této kapitole se čtenář podrobně seznámí se strukturou celé učebnice a významem jejích jednotlivých částí. Dále získá přehled o specifické jazykové a grafické úpravě učebnice a zhodnotí výhody jejího digitálního zpracování. Nakonec se seznámí se signifikantními změnami v obsahu oproti jiným učebnicím či tradičnímu pojetí dané problematiky.

2.1 Struktura učebnice

Celá učebnice je rozdělena do dvou velkých částí, každá část pak obsahuje několik kapitol. Učebnice začíná tzv. *prologem*, což je kapitola, která čtenáře uvádí do problematiky celé učebnice a nastiňuje, o čem bude učebnice pojednávat. Obě velké části jsou spojeny kapitolou s názvem *intermezzo*, která slouží k opakování, prohloubení a novému pohledu na některé vybrané geometrické problémy, a připravuje nás na studium druhé části učebnice. Ta je pak zakončena kapitolou s názvem *epilog*, která spíše než že shrnuje učivo druhé části, tak především rozšiřuje to, co se čtenář v celé učebnici dozvěděl a nastiňuje možnosti a témata k dalšímu studiu. Na samém počátku se pak nachází jakási „předkapitola“ sloužící k zopakování všech zásadních znalostí, jež jsou pro studium učebnice nezbytně nutné.

Úvodní „opakovací“ kapitola s názvem *Co je třeba znát!* má ambici být něčím víc než jen prostým opakováním geometrických znalostí, které se žák již měl dozvědět v řádné výuce matematiky a jež jsou nezbytné pro čtení celé učebnice. V první části této kapitoly se opakují nejzákladnější geometrické objekty, se kterými se bude pracovat – bod, přímka a kružnice. Protože hrozí, že opakování bude pro nadané žáky nudné a nezáživné (vzhledem k tomu, že tyto základní věci již „dávno znají“), je tato část pojata více filozoficky a historicky, než je obvyklé. Myšlenkou je obohatit žáka o další informace z dané problematiky a tím jej motivovat k četbě něčeho, co by možná považoval za zbytečné a co by eventuálně přeskočil. Druhá část této kapitoly se zabývá standardními geometrickými konstrukcemi. Je opět obohacena o historický pohled (ovšem s přímým přesahem do uváděných konstrukcí) a klade si za cíl detailně vysvětlit důvody a principy použité v jednotlivých konstrukcích.

Prolog uvádí čtenáře do problematiky geometrických zobrazení. Dá se očekávat, že se žák na základní škole se zobrazeními setkal (především s osovou a středovou souměrností), ale při jejich výuce pravděpodobně chyběl příslušný teoretický rámec. Tato kapitola si dává za cíl jej čtenáři doplnit, především co se týká terminologie a klasifikace jednotlivých pojmů.

Část A: Lineární zobrazení je první ze dvou velkých částí učebnice a obsahuje celkem 4 kapitoly – *Posunutí*, *Otočení*, *Souměrnost* a *Zrcadlení*. Každá z uvedených kapitol pojednává o jednom lineárním zobrazení a všechny tyto kapitoly mají stejnou strukturu. Nejprve se popisuje princip fungování daného zobrazení s příslušnými pojmy. Dále je uvedeno, jakým způsobem se v daném zobrazení zobrazují jednotlivé body. Poté přichází prostor pro zkoumání daného zobrazení – čtenáři jsou kladeny otázky, na které si má nejprve sám odpovědět a pak pokračovat v dalším studiu. Na základě konstrukce obrazu bodu a vypozorovaných vlastností daného zobrazení se pak uvádí konstrukce přímek a kružnic. Každá kapitola je zakončena závěrečným shrnutím.

Tyto kapitoly slouží především k tomu, aby čtenáře naučili jistým způsobem s daným (libovolným) zobrazením pracovat a přemýšlet o něm v určitých schématech. Také povzbuzuje k aktivnímu přístupu k učení, které není založeno na pouhé konzumaci předkládaných informací, ale především na vlastním kladení otázek a hledání jejich odpovědí. V tomto smyslu učebnice žáka nahrazuje a předkládá mu otázky vlastní, avšak s vidinou toho, že po čase si žák začne klást otázky sám. Hledání odpovědí by si měl během čtení učebnice osvojit.

Informace a učivo obsažené v celé této části jsou v rámci konceptu učebnice v jistém smyslu marginální. Je to zejména proto, že jsou většině žáků základní školy dávno známá či jsou sami o sobě natolik zjevné, že je není potřeba dále komentovat. Cílem této části je tedy zejména naučit čtenáře na velmi známém obsahu takovým způsobům práce a myšlení, které později zužitkuje při studiu obsahu neznámého, v němž však bude třeba pracovat a přemýšlet obdobným způsobem. Idea celého tohoto přístupu tedy tkví v tom, že po přečtení těchto čtyř kapitol žák preventivně odstraní nevhodné a neefektivní způsoby svého učení, což při studiu druhé části eliminuje jeho případný neúspěch v osvojení si daného učiva. Laicky řečeno, díky prostudování *části A* bude čtenáři připadat *část B* této učebnice velmi srozumitelná, jasná a v podstatě jednoduchá a to proto, že se během studia *části A* naučil vhodnému způsobu učení díky tomu, že jej realizoval na známém obsahu a tím pádem pro něj prakticky představoval opakování.

Intermezzo je kapitola spojující *část A* s *částí B*. Ve velkém rozsahu se zabývá přímkami a kružnicemi – opakuje, ale především významně rozšiřuje znalosti o těchto dvou křivkách, protože je bude čtenář potřebovat v další části učebnice. Dopodrobna jsou rozebrány jednotlivé vlastnosti a vzájemné polohy (především terminologie) těchto křivek. Jedná se o náročnou kapitolu, která funguje jako psychologický trik, díky němuž se čtenáři zdají následující kapitoly výrazně jednodušší. Náročnost vůbec netkví v obsahu probírané problematiky, ale především v jejím rozsahu a podrobnosti. Lidově řečeno, vše je jednoduše pochopitelné, ale je toho prostě moc.

Část B: Kruhové zobrazení je druhá velká část této učebnice a jedná se o stěžejní část celé učebnice! Tato část obsahuje celkem 3 kapitoly. První kapitola s názvem *Inverze* má stejnou strukturu jako předchozí kapitoly jednotlivých zobrazení v *části A*, čímž se obě tyto části v jistém smyslu propojují. Tato kapitola obsahuje teoretické poznatky o kruhové inverzi. Jejich výklad a struktura kopírují výklad a strukturu kapitoly o osové souměrnosti, protože osová souměrnost je limitním případem kruhové inverze (v případě kdy se střed řídící kružnice dostává do bodu v nekonečnu a z řídící kružnice se stává řídící přímka neboli osa souměrnosti).

Z této kapitoly je vypuštěna část o zobrazení bodu v kruhové inverzi, protože konstrukce jeho obrazu je daleko složitější než konstrukce obrazů přímky a kružnice. Stejně tak je vynechána část, v níž žáci zkoumají obrazy jednotlivých geometrických objektů. Důvodem je předpokládaná nulová zkušenost s kruhovou inverzí a z toho plynoucí malá pravděpodobnost nalezení a identifikování jednotlivých signifikantních poznatků o tomto zobrazení (přeci jenom je učebnice určena žáků ZŠ). Toto zkoumání je nahrazeno předložením již hotových poznatků s odkazem na paralely s osovou souměrností. Část o zobrazení přímek a kružnic v kruhové inverzi je pak rozpracována v následujících dvou kapitolách.

Kapitola *Inverze přímek* představuje vyvrcholení celé učebnice. Na základě konstrukce obrazu sečné přímky vůči řídící kružnici (která je vysvětlena a „dokázána" pomocí paralely s osovou souměrností) a zákona zachování incidence bodů jsou postaveny všechny ostatní konstrukce obrazů přímek různých poloh. Tato kapitola je nejobsažnější z pohledu nových poznatků pro žáka a v jistém smyslu též nejnáročnější. Tato náročnost je však, jak už bylo řečeno, umírněna prostudováním *části A* a „vyčerpávající" kapitolou *Intermezzo*.

V předposlední kapitole *Inverze kružnic* se žák po teoretické stránce nenaučí nic nového, ale prakticky využívá všech nově nabytých znalostí a postupů z předchozí kapitoly. I když jsou konstrukce obrazů kružnic mnohem náročnější než u přímek, veškerý teoretický základ a jeho pochopení vychází z kapitoly předešlé; zde jsou tyto znalosti a dovednosti pouze aplikovány na náročnějších příkladech.

Epilog představuje závěrečnou kapitolu, v níž je finálně představena konstrukce bodu v kruhové inverzi – ta vychází z postupů prezentovaných v předchozích kapitolách. Na závěr jsou zde shrnuty všechny zásadní informace související s inverzní geometrií, a především je zde jakási „ochutnávka“ nových poznatků a zajímavostí, které mohou žáci nalézt v dalších dílech učebnice. Ty slouží jako motivační faktor k dalšímu studiu této problematiky.

2.2 Grafická a jazyková úprava učebnice

Z grafické úpravy geometrických objektů a prezentovaných konstrukcí je potřeba se zmínit o dvou jevech. Prvním z nich je, že všechny body jsou v této učebnici reprezentovány barevným „puntíkem“. Obvyklá praxe na základní škole je reprezentace bodu pomocí „křížku“. Proč je v učebnici použito „puntíků“ místo „křížků“? Hlavním důvodem je rychlá a jasná orientace v přiložených obrázcích. „Puntík“ je dobře viditelný, lze jej v obrázku lehce najít a je poměrně jasné, které z okolních písmen jej označuje. Oproti tomu „křížek“ (který je většinou bohužel vyveden ve stejné tloušťce jako ostatní křivky) se v obrázcích daleko hůře hledá a ve složitějších konstrukcích může rušit, protože přináší do obrázku další čáry, které je třeba odlišit od ostatních křivek. Často se také takový bod neoznačuje vůbec, pouze se k místu průniku dvou křivek připíše písmeno označující tento průsečík, což může být ve složitějších konstrukcích matoucí. Žákům by mělo být jasné, že plocha „puntíku“ nepředstavuje bod samotný, že se jedná pouze o označení místa průniku/dotyku dvou křivek, což je vysvětleno v úvodní části učebnice.

S tím souvisí druhý jev a tím je snaha maximálně zpřehlednit přiložené geometrické konstrukce. Toho je dosaženo několika způsoby:

- **minimalizací počtu kroků v konstrukci** – díky použití komplexních konstrukcí v jediném kroku (např. konstrukce rovnoběžky je jediný krok, i když je pro ni potřeba celkem 7 dalších pomocných konstrukcí),
- **omezením nevhodného pojmenovávání objektů:**
    - *nepoužívání pojmenování s pomocí dolních indexů* – je daleko jednodušší v obrázku hledat různá písmena než se orientovat podle drobných indexů u stejnojmenných objektů (např. tři různé kružnice označíme nejlépe jako k, l, m, než mnohem hůře čitelným k_1, k_2, k_3[3]),

3 Tohoto způsobu je v učebnici použito prakticky pouze u tečen, kde to může mít své opodstatnění.

- *vyhýbání se nevhodných dvojic písmen pro označování podobných objektů* – matematikové rádi označují podobné objekty dvojicí v abecedě po sobě jdoucích písmen, které jsou si však velmi podobná a mohou být snadno zaměnitelná, např.: E-F, i-j, m-n, M-N, p-q, u-v a U-V; ideální je se podobným dvojicím při označovaní (navíc podobných) objektů vyhnout a zvolit jinou dvojici po sobě jdoucích písmen, která si nejsou vizuálně podobná.

- **použitím „barevného kódu“** – složitější konstrukce nejsou pouze černobílé, ale jsou vyvedeny v různých barvách, jejichž význam je v rámci celé učebnice stále stejný. To umožňuje žákům z barevného vyvedení daného objektu získat okamžitě informaci o nějaké vlastnosti tohoto objektu, která není explicitně uvedena. Tento přístup využívá žákovu vizuální inteligenci a dovoluje mu získat z obrázku informace, které by si jinak musel vyhledat na jiném místě v textu. Následující tabulka uvádí ustálený „barevný kód“ použitý v celé učebnici:

OBJEKT	BARVA
bod, přímka, kružnice	černá
pomocná konstrukce	šedá
vzor v zobrazení	modrá
obraz v zobrazení	červená
samodružný objekt	fuchsiová
řídící bod/křivka	zelená
orientovaná úsečka	zelená
orientovaný úhel	oranžová
průvodič bodu	purpurová
vzor pomocné křivky	purpurová
obraz pomocné křivky	zlatá

Jazyková úprava učebnice s sebou přináší dvě specifika. Prvním z nich je fakt, že výklad příslušné učební látky nemá (a nechce mít) ambici být vědeckým textem. Daleko podstatnější a přednější je předání jednotlivých myšlenek a principů než formální správnost. Z tohoto důvodu není v učebnici vždy důsledně dodržována didaktická zásada vědeckosti – vždy je kladen důraz více na předání myšlenky, než na formální správnost matematického vyjádření. To se v praxi projevuje tím, že při výkladu nejsou vždy použity správné a přesné pojmy (což se však děje výjimečně a pouze v případech, kdy přesné vyjádření znesnadňuje pochopení).

Extrémnějším případem tohoto přístupu je občasné použití vágní formulace či „lidového jazyka“, které se vymykají zbylému formálnímu textu. Ty jsou společně s použitím tzv. „smajlíků“ (*emoji*) druhým specifikem jazykové úpravy učebnice. Vyskytují se převážně v náročnějších pasážích textu a obě mají za cíl tuto pasáž „odlehčit“. Tyto formulace a používání emoji jsou bližší k vyjadřování současných žáků než formální text. Psychologickým efektem tohoto přístupu je pak větší identifikace žáka s textem (případně s jeho autorem), snížení jeho mentální zátěže (vyvolané náročnou pasáží textu) a případně zvýšením či udržením jeho motivace daný text studovat.

Celá učebnice je na různých místech průběžně doplněna anglickými ekvivalenty českých termínů. Primárním účelem uvedení těchto anglických názvů je to, aby si žák mohl na internetu rychle, a především správně vyhledat související informace, články či videa v anglickém jazyce. Není totiž obvyklou praxí, aby učitel ZŠ tyto anglické názvy žáky učil. Některé anglické názvy je možné získat jednoduchým překladem (např. přímka – *line*, bod – *point* či kružnice – *circle*), avšak mnoho anglických termínů tímto způsobem získat nelze a tyto názvy sami o sobě nejsou pro žáka ZŠ intuitivní (např. osa úsečky – *line segment bisector* nebo vzor zobrazení – *preimage*). Žák základní školy, který nezná tyto přesné matematické termíny a má s největší pravděpodobností nízkou jazykovou úroveň v tomto jazyce, se bude snažit vyhledat příslušný studijní materiál pomocí přímého překladu českých termínů, které však vůbec neodpovídají těm anglickým (např. osa úsečky – *line segment axis*, vzor zobrazení – *display pattern*). Bez vynaložení většího úsilí tak pravděpodobně uvedené anglické materiály vůbec nenalezne.

Dále je možné těchto termínů použít při tzv. CLIL[4] výuce, a to jak žáky, tak pedagogy (není pravděpodobné, že pedagog anglického jazyka bez matematické či fyzikální aprobace zná všechny odborné matematické názvy, především ty složitější, a ne často používané). Výuka matematiky na ZŠ touto metodou pak může probíhat následujícím způsobem:

4 **CLIL** – Content and Language Integrated Learning, tj. obsahově a jazykově integrované učení.

„Osvojování učiva a formulování úkolů nejazykového předmětu je vedeno v českém jazyce, informace hledají žáci v cizojazyčném textu, odpovědi žáci formulují česky. Pokyny na hodině jsou v cizím jazyce. Gramatické jevy, slovní obraty, jazykové styly a textové útvary cizího jazyka učitel vysvětluje česky." (Baladová, 2009)

2.3 Digitální učebnice

Pojem digitální učebnice je možné brát jako synonymum k pojmu elektronická, multimediální či interaktivní učebnice. Jedná se o typ vzdělávacího materiálu, který je založen především na textu, ale je doplněn multimediálními a interaktivními prvky, jež je možné realizovat pouze v elektronické podobě, nikoliv v tištěné. (Bambasová, 2017, s. 4)

Ideální digitální učebnice by měla splňovat následující kritéria:

- sestává se z velkého množství malých uzavřených celků, které jsou propojeny množstvím vzájemných odkazů (tj. je velmi fragmentovaná)
- využívá co největší škálu multimediálního obsahu (výkladový text, obrázky, animace, videolekce, interaktivní aplikace) ve vyváženém mixu
- sleduje a analyzuje žákův učební proces a poskytuje mu odpovídající zpětnou vazbu (výběr témat, korekce obsahu k procvičování apod.)
- *„nachází se někde na pomezí současné učebnice a pracovního sešitu, tj. má výkladovou, procvičovací a testovací část"* (Neumajer, 2013)
- *„je platformně nezávislá"* (Neumajer, 2013), nejlépe založená na webové technologii
- *„podporuje aktivizaci žáka, podněcuje jeho zájem objevovat"* (Neumajer, 2013)

Tato učebnice kruhové inverze není ideální digitální učebnicí. Spíše je jakýmsi hybridem mezi digitální a tištěnou učebnicí. Hlavním důvodem je porušení již prvního výše uvedeného bodu. Celá učebnice je sestavena z menšího množství obsahově velmi objemných částí, které jsou jen minimálně propojeny vzájemnými odkazy. Učebnice se tak stává vysoce lineární, což není pro ryze digitální studijní materiál příliš vhodné. Je to především z toho důvodu, že hlavním přínosem této učebnice má být **metodika výuky tématu kruhové inverze pro žáky základní školy**. A pro potřebu prezentace jakékoliv metodiky je nutné lineární schéma.

Stejně tak rozmanitost multimediálního obsahu neodpovídá ideální digitální učebnici. Zásadní důraz je zde kladen na text, naopak úplně chybí jakékoliv výkladové video. Oproti tomu však tato učebnice hojně využívá animací a interaktivních „aplikací“ (viz zkoumání jednotlivých zobrazení v tzv. laboratoři). Tyto dva multimediální obsahy jsou ústředním benefitem, který učebnice nabízí oproti tištěné publikaci. Použití animací, zejména v geometrii, umožňuje daleko rychlejší a mnohdy hlubší porozumění dané problematice než jen při sledování statického obrázku, či sledu obrázků.

Nejzásadnějším přínosem učebnice však jsou dvě interaktivní aplikace použité napříč učebnicí. První z nich je již zmíněná laboratoř. Jedná se o aplikaci, která umožňuje žákům sledovat vzor a obraz zvoleného geometrického objektu ve zvoleném lineárním zobrazení. V této aplikace je pak možné interaktivně upravovat parametry jednotlivých objektů či zobrazení a v reálném čase sledovat, jak se změna těchto parametrů projevuje na vzorech a především obrazech geometrických objektů. Tímto způsobem může žák získat nejen velmi cenné zkušenosti s experimentováním, ale též hluboký vhled do dané problematiky (v případě, že s tímto nástrojem umí adekvátně pracovat)!

Druhou zmíněnou aplikací jsou interaktivní postupy konstrukce. Ty umožňují žákovi nechat si vykreslit jednotlivé kroky konstrukce, což výrazně zvyšuje přehlednost celé konstrukce a slouží k jejímu lepšímu pochopení i k pochopení jednotlivých kroků. Naprosto odpadá nutnost analyzovat celkový obrázek dané konstrukce (mnohdy nebarevný, špatně označený a se spoustou zbytečných pomocných konstrukcí), což může být velmi časově náročné a může též žáka úplně odradit – než totiž najde všechny označené objekty a v hlavě si seskládá celý postup, tak to raději vzdá (je to totiž neúměrné množství práce vzhledem k očekávanému výsledku). Možnost projít si celou konstrukci interaktivně a nechat si ji krok po kroku vykreslit tak velmi výrazně přispívá k celkovému pochopení jak samotné konstrukce, tak i případných souvislostí (v rámci konstrukce i mimo ni).

Posledním, avšak neméně zásadním, přínosem digitální učebnice je to, že je taková učebnice mnohem **vhodnější k samostudiu** než učebnice klasická. Při samostudiu je jedním z největších nedostatků nemožnost přímé komunikace s vyučujícím v případě, že nejde vše hladce, že se žák nějakým způsobem „zasekl“ (daná pasáž je mu nejasná, potřebuje nějaké doplňující informace, ověřit si rychle nějakou myšlenku apod.). V případě, že je v digitální učebnici realizován bod č.3 ze seznamu uvedeném výše, potřeba takové interakce se méně či více snižuje a v jistých ohledech může být i eliminována. Jedním z cílů této učebnice je, aby ji mohl žák primárně použít při samostudiu a ne, aby byla pouze doplňkem frontální výuky. I když učebnice bod č. 3 v tomto smyslu dostatečně nenaplňuje, je (tím že je digitální) připravená a nachystaná tento nedostatek v budoucnu doplnit, ale také již nyní poskytuje sadu interaktivních aplikací (zmíněných výše), které žákovi cestu samostudia výrazně usnadňují.

2.4 Obsah učebnice

V následujících oddílech jsou popsána jednotlivá obsahová specifika této učebnice, především to, čím se liší od ostatních učebnic. Je zde vysvětlena podstata, a především důvod těchto změn, které mají za cíl zvýšit žákovu motivaci, standardizovat a sjednotit různé přístupy a především usnadnit pochopení některých partií geometrie, které se mohou při tradičním pojetí zdát náročnější, než ve skutečnosti jsou.

2.4.1 Konceptuální rámec inverzní geometrie

Celá učebnice inverzní geometrie je postavena na Euklidových *Základech*. V učebnici se vychází z ideálu antického geometrického světa, jako ho prezentuje ve svém komentáři k Servítově překladu prof. Petr Vopěnka (Eukleides, 2008). Jedním z principů tohoto ideálu je striktní používání tzv. euklidovské konstrukce, tj. konstrukce s použitím ideálního pravítka a kružítka[5].

Dalším principem, na kterém je antický geometrický svět založen, je idea „*zorného pole geometra*“. V tomto zorném poli se odehrávají veškeré geometrické konstrukce, a co je mimo toto zorné pole je pro geometra neuchopitelné. (Eukleides, 2008, s. 10) Z tohoto pohledu jsou základními geometrickými objekty bod, úsečka a kružnice. Vzhledem k vývoji geometrie, objevení různých forem geometrického „nekonečna“ a tomu, že sama tato učebnice se zabývá inverzní geometrií s nekonečnem pracující, byla tato trojice základních objektů nahrazena trojicí bod, přímka a kružnice. Jedná se však o jedinou „úlitbu“ oproti Euklidovu chápání antické geometrie.

5 Ideální pravítko je nekonečně dlouhé, má pouze jednu hranu a slouží k rýsování přímek v případě, že jsou zadány dva body na této přímce ležící. Ideální pravítko nemá žádné rysky pomocí nichž by se dala měřit vzdálenost.
Ideální kružítko je schopné rýsovat kružnice s libovolně velkým poloměrem za předpokladu, že je zadán střed kružnice a bod na kružnici ležící. Toto kružítko je tzv. „kolabující“, což znamená, že ve chvíli, kdy je zvednuto z papíru, jeho dvě nožky „zkolabují“ a nezachovají si velikost poloměru, kterou svíraly. Tímto kružítkem tedy není možné přenášet vzdálenosti (jak se obvykle děje ve výuce na ZŠ).

Z těchto tří elementárních geometrických objektů vychází všechny konstrukce v této učebnici, tj. konstrukce řešení libovolného geometrického problému se ve výsledku skládá pouze z konečného počtu konstrukcí bodů, přímek a kružnic. Tyto konstrukce Euklides nazývá jako *postuláty* (v Servítově překladu *úkoly prvotné*) a jedná se o následující konstrukce:

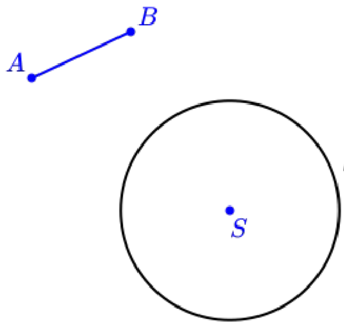
1. Označení místa průniku dvou křivek (přímek či kružnic).
2. Konstrukce přímky ze zadaných dvou bodů, jimiž přímka prochází.
3. Konstrukce kružnice ze zadaného středu a bodu ležícího na kružnici.

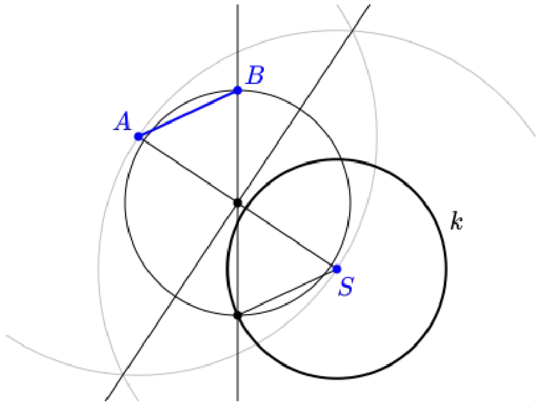
Z důvodu striktního používání euklidovských konstrukcí platí jistá omezení na konstrukce ostatních objektů, které nejsou na ZŠ obvyklé:

- není možné si v prostoru volit při konstrukci libovolné body a ty dále při konstrukci využívat (výjimkou je možnost zvolit si libovolný bod na vybrané křivce)
- není možné použít pravítko pro „odměřování“ jakýchkoli vzdáleností ani jej použít pro sestrojení rovnoběžek či kolmic (jak se např. v běžné školské praxi používá pravítko s ryskou)
- není možné použít kružítko pro přenášení vzdáleností
- není možné sestrojit kružnici bez zadaného bodu, kterým má procházet (v případě, že je zadán střed a poloměr kružnice)

Tato omezení prakticky eliminuje z geometrie jakékoliv metrické zadání konstrukce. Délky a vzdálenosti, které při konstrukci spontánně vzniknou z původní polohy objektů při zadání je dále možné pomocí euklidovských konstrukcí přenášet, případně geometricky sčítat nebo násobit racionálním číslem. Avšak použití konkrétních metrických hodnot (např. délky úsečky v centimetrech apod.) je vyloučeno.

Proč je v učebnici použito výhradně euklidovských konstrukcí? Jedná se opět o další z principů antického geometrického světa, kterým je zásadní důraz na názor. Vysvětleme to na následujícím příkladu. Máme za úkol sestrojit kružnici $k(S;|AB|)$, tedy kružnici se středem S a poloměrem určeným velikostí úsečky AB. Na následujících obrázcích jsou dva možné postupy – jeden z nich reflektuje klasickou školskou praxi, druhý je založen na euklidovských konstrukcích.





Pro názornost jsou zadané objekty (střed kružnice a úsečka) vyvedeny modrou barvou. Na levém obrázku můžeme vidět případ klasické školské konstrukce. Do kružítka byla vzata délka úsečky AB, kružítko pak bylo následně zapíchnuto do středu S a byla jím opsána kružnice k. Z obrázku/konstrukce však vůbec není patrné, že by kružnice k měla poloměr rovný velikosti úsečky AB. Na první pohled je možná vidět že by poloměr mohl být stejný, ale neexistuje žádný důkaz založený na názoru, že tomu tak skutečně je. Tuto skutečnost zná pouze ten, kdo konstrukci prováděl. Při konkrétním (fyzickém) rýsování se pak může stát, že velikost je do kružítka špatně „odměřena“, že kružítko během přesouvání změnilo „změřený“ poloměr, případně kružítko nebylo zabodnuto přesně do středu kružnice.

Tyto problémy v antickém geometrickém světě odpadají. Fyzická realizace může být zpochybněna, může být (a je) nedokonalá, avšak geometrická idea je vždy dokonalá. I kdyby však byl rys kružnice proveden naprosto dokonale, stále není podle prvního obrázku zřejmé, že kružnice má poloměr rovný velikosti dané úsečky. Při použití euklidovské konstrukce (viz pravý obrázek) jsou však veškeré pochyby rozmetány. Geometrický názor je zde nezpochybnitelný a každému, kdo zná základní geometrické zákony, je jasné, že kružnice k má poloměr rovný velikosti úsečky AB. I kdyby fyzická realizace této konstrukce byla nedokonalá a ve skutečnosti by poloměr nebyl rovný velikosti úsečky, ve světě antické geometrie by tyto nedokonalosti zmizely a zůstala by čistá geometrická idea.

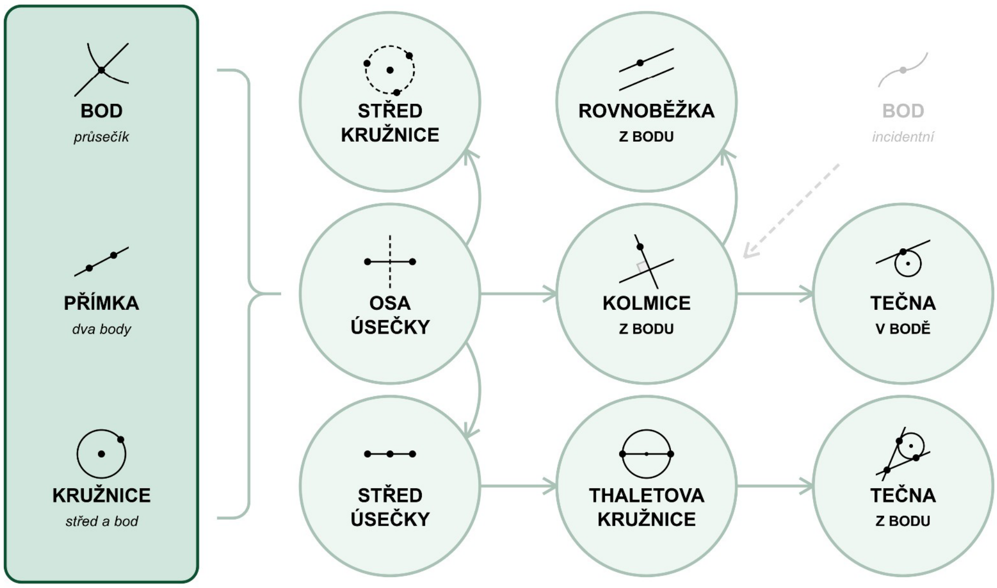
Odpověď na otázku, proč jsou v učebnici striktně použité pouze euklidovské konstrukce je tedy taková, že pouze při použití euklidovských konstrukcí máme zaručen takový názor a vhled do konstrukce samotné, který nám (bez ohledu na nedokonalost fyzické realizace) zaručuje nezpochybnitelnost vlastností objektů v jednotlivých krocích konstrukce.

Posledním principem použitým v učebnici je snaha o odstranění jakékoliv práce s úhly. Pojem úhel prošel od dob antiky výraznějším vývojem a jeho chápání se v průběhu staletí měnilo. Původní koncepce úhlu jako veličiny spíše kvalitativní než kvantitativní ve spojení s určitou statickou (nehybnou) polohou dvou přímek (tehdy úseček) ale i kružnic, se změnila na veličinu ryze kvantitativní s výrazným dynamickým charakterem (daným především spojením úhlu s otáčením, a tedy s pohybem). Vzhledem k tomuto rozporu současného a antického chápání úhlu byla snaha v učebnici maximálně omezit používání úhlů. To však nebylo prakticky možné, díky zařazení kapitoly o zobrazení otočení, bez níž by byla první část učebnice neúplná. Důsledkem tedy je, že některé elementární konstrukce s úhly (např. osa úhlu) jsou v učebnici vynechány a zůstávají pouze ty, které jsou nezbytně nutné pro práci ve zmíněném zobrazení (rotaci).

2.4.2 Geometrické konstrukce a jejich značení

Jak bylo již řečeno, všechny geometrické konstrukce se skládají pouze z takových kroků, při nichž je označen průsečík nějakých křivek, nebo je sestrojena přímka či kružnice. Sestrojení nějakého složitějšího geometrického objektu pak v takovém případě může obsahovat až desítky jednotlivých kroků, což jistě není vhodné. Z tohoto důvodu každý větší logický celek konstrukce (např. osa úsečky, kterou používáme v mnoho jiných konstrukcích) dostal v této učebnici vlastní název a vlastní označení konstrukce, které tak shrnuje několik kroků v krok jediný. Tento jediný krok je pak v přiložených postupech konstrukcí prezentován jediným objektem (bodem či křivkou) a další objekty které jsou součástí konstrukce tohoto velkého celku označujeme jako „pomocné konstrukce" (s příslušným barevným označením, viz výše).

Tímto způsobem je možné všechny uváděné konstrukce do sebe vzájemně vnořovat, sestavit z nich jakousi hierarchii geometrických objektů s rostoucím počtem kroků (a tedy pomocných konstrukcí) a mírou komplexnosti, jak ukazuje následující obrázek:



Označení kroku konstrukce má následující schéma:

{číslo kroku}. {označení objektu}; {charakteristické vlastnosti objektu}

Mezi charakteristické vlastnosti objektu patří především informace o incidenci k jiným objektům, případně polohové vlastnosti (jako je kolmost či rovnoběžnost); výjimečně je použito metrických vlastností.

Body jsou běžně v konstrukcích označovány velkými latinskými písmeny, přímky a kružnice malými latinskými písmeny. Tento úzus byl v učebnici inverzní geometrie drobně změněn a to tak, že označení bodů a přímek zůstalo zachováno, avšak označení kružnic je jiné. Kružnice se stále označuje malým latinským písmenem, ale za toto označení se ještě do závorky přidává střed dané kružnice. Tedy kružnice k se středem S se v této učebnici označuje jako $k(S)$. Toto označení vychází z obecného označení kružnice, kdy je v závorce uváděn střed a poloměr této kružnice, např. $k(S;r)$.

Důvody pro tuto změnu jsou dva. Prvním z nich je, že v mnoha zápisech se charakteristické vlastnosti objektu shodovaly jak pro přímku, tak pro kružnici. Vzhledem k tomu, že obě křivky jsou obvykle značeny pouhým písmenem, nebylo možné při pohledu na zápis konstrukce jasně rozlišit, zda se jedná o přímku či kružnici (respektive bylo možné si zápis vyložit oběma způsoby). Pouhým přidáním závorky se středem kružnice se tak elegantně vyřešil problém, který by jinak musel být násilně řešen v části zápisu s charakteristickými vlastnostmi konstrukce. Nyní je navíc již z označení objektu jasné, jakou křivku je třeba sestrojit.

Druhým důvodem byl požadavek na to, aby celý zápis konstrukce (tedy část označení i část vlastnosti objektu) obsahoval všechny objekty, které je nutné pro danou konstrukci mít zadané i všechny objekty, která při dané konstrukci vzniknou (samozřejmě vyjma pomocných konstrukcí). Bohužel však některé pokročilé konstrukce kružnic (např. ortogonální kružnice) nepotřebují ve svých charakteristických vlastnostech uvádět vlastní střed. V případě, že tento střed není uveden ani v jejich označení, pak ve výsledném zápisu chybí. A v antické geometrii není možné mít kružnici bez středu!

Kromě změny označení kružnic se v učebnici vyskytují i další drobné, avšak výrazné změny, a to v části charakteristických vlastností objektu. Ty byly provedeny u dvou nejzákladnějších konstrukcí, a to u sestrojení přímky a kružnice, jak ukazuje následující tabulka:

PŮVODNÍ ZÁPIS	**NOVÝ ZÁPIS**
$p;\ p = \leftrightarrow XY$	$p;\ X, Y \in p$
$k;\ k(S; \lvert SX \rvert)$	$k(S);\ X \in k(S)$

Důvod pro změnu zápisu těchto konstrukcí byl především jejich nekoncepčnost vzhledem k ostatním zápisům konstrukce. Ty totiž, jak už bylo řečeno, obsahují v části vlastností objektů pouze informace o incidenci či poloze vůči ostatním objektům. Šipku označující přímku pak nenalezneme v žádné jiné konstrukci, a proto se nabízelo tento znak ze zápisu vypustit. Původní zápis kružnice pak obsahoval závorky, které se transformovaly do nového označení kružnic a metrické údaje o poloměru, které nejsou v souladu s ideou euklidovských konstrukcí.

Nový zápis těchto konstrukcí se pak podobá všem ostatním zápisům, protože obsahuje výhradně informace o incidenci bodů ke konstruovaným křivkám. Navíc (zejména u kružnice) mnohem více reflektují myšlenku tzv. úkolů prvotných, kdy je ze zápisu naprosto jasné, že při sestrojení přímky je nutné mít dva body, jimiž přímka prochází a při konstrukci kružnice je nutné mít střed kružnice a bod, kterým tato kružnice prochází.

Mimo běžně používané symboly a charakteristické vlastnosti jsou v učebnici též použity symboly nové. Mezi ně patří zejména symbol pro konstrukci *Thaletovy kružnice*, který je tvořen malým řeckým písmenem tau s dolním indexem, v němž je uveden průměr, nad nímž

Thaletovu kružnici sestrojujeme, např.: $\boldsymbol{\tau}_{AB}$. Tento zápis je vypůjčen z článku Ireny Budínové (2014) a v běžné školské praxi se spíše nepoužívá. Další novinkou je zápis konstrukce objektu v určitém zobrazení, který se řídí následujícím schématem:

{číslo kroku}. {obraz objektu}; $Z_{\{\text{kritérium zobrazení}\}}$[{vzor objektu}]

V části vlastností objektů je nejprve velkým latinským písmenem uveden druh zobrazení (např. T pro translaci, R pro rotaci apod.). K druhu zobrazení je dolním indexem připojeno kritérium tohoto zobrazení, tedy pravidlo, podle něhož se daný objekt zobrazuje (např. v případě translace vektor posunutí, v případě rotace střed a orientovaný úhel apod.). Nakonec je v hranatých závorkách uveden objekt, který je vzorem daného zobrazení. Například kružnice $l(O)$, která je obrazem kružnice $k(S)$ v translaci podle vektoru $\overrightarrow{AB}$ bude zapsána takto: $l(O);\ T_{\overrightarrow{AB}}[\ k(S)\ ]$.

Všechny zápisy konstrukcí použité v učebnici inverzní geometrie může čtenář nalézt v Příloze č. 1 této práce.

2.4.3 Revize geometrického názvosloví

Některé běžně používané geometrické termíny byly v této učebnici nahrazeny jinými, případně byly vymyšleny termíny nové. V tomto oddíle budou shrnuty provedené změny v geometrickém názvosloví a objasněny důvody pro jejich použití.

V kapitole *Zobrazení* (prologu) se rozdělují zobrazení do dvou skupin podle vnitřní logiky těchto zobrazení, a to na skupinu zobrazení pohybu (posunutí a otočení) a na skupinu zobrazení souměrnosti (středová a osová souměrnost a kruhová inverze). Bylo vhodné k těmto českým názvům přiřadit ekvivalentní cizojazyčný termíny.[6] Těmi se nakonec staly pojmy **involuce** a **lokomoce**. Involuce (označující zobrazení souměrnosti) vychází ze samotné ideje souměrnosti, v níž vždy existují (souměrné) páry geometrických objektů, mezi nimiž se nerozlišuje vzor a obraz, což je právě definicí involutorního zobrazení (Chodorová, 2013, s. 39). Lokomoce (označující zobrazení pohybu) vychází z novolatinského slova *locomotus* (slože-

6 Téměř všechny české termíny používané v geometrii mají svůj cizojazyčný ekvivalent, čímž ovšem není myšlen překlad termínu do cizího jazyka, ale jiné pojmenování vycházející z některého z cizích jazyků (typicky z řečtiny či latiny). Vzhledem k tomu, že se tato „dualita" v názvosloví objevuje, bylo vhodné i zde přidat cizojazyčný termín.
Zde je uvedeno několik ilustrativních příkladů ekvivalentních pojmů:
rovnoběžné – *paralelní*, kolmé – *ortogonální*, posunutí – *translace*, otočení – *rotace*, souměrnost – *symetrie*, průvodič – *rádiusvektor*, soustředné – *kocentrické*, apod.

nina slov *locus* – místo a *motivus* – hybný), které se dá přeložit jako „z místa se pohybující" (Rejzek, 2012, s. 362). Důvodem pro výběr právě tohoto pojmu byla především morfologická podoba obou termínů.

Ve stejné kapitole se také objevují netradiční názvy zobrazení souměrnosti, tj. středové a osové souměrnosti a kruhové inverze. Hlavní myšlenkou bylo sjednotit všechny termíny tak, aby byly jednoslovné a každý z nich měl svůj „duální" pojem (viz pozn. pod čarou), stejně jako dvojice posunutí – *translace* a otočení – *rotace*. Kruhová inverze byla nahrazena zkráceným pojmem **inverze** a jako jediný z pojmů nemá svůj duální protějšek. To je z toho důvodu, že již samotný český výraz *kruhová inverze* obsahuje cizoslovný pojem, po němž je navíc pojmenována celá učebnice. U osové souměrnosti byl jako český pojem vybrán termín **zrcadlení**, který vychází z anglického překladu osové souměrnosti (*reflection* – odraz) a poměrně přesně vystihuje podstatu tohoto zobrazení, především s ohledem na žáky ZŠ. U cizojazyčného duálního pojmu se nabízel termín *reflexe* (počeštění anglického výrazu). Ten byl však ze sémantického důvodu nevhodný a byl nahrazen pojmem *inverze*. To se může zdát na první pohled jako nevhodný výběr, kvůli zaměnitelnosti s kruhovou inverzí, avšak právě tato zaměnitelnost je v učebnici do budoucna výhodná kvůli způsobu, jakým se navazuje výklad o kruhové inverzi na osovou souměrnost (a též z matematického hlediska, kdy je osová souměrnost limitním případem kruhové inverze). Posledním pojmem je **souměrnost**, která označuje středovou souměrnost a vychází z cizojazyčného pojmu *symetrie* jako jeho duální termín.

V kapitolách č. 3–5 se objevují pojmy, které nejsou nové, ale při popisu zmíněných zobrazení (souměrností) se běžně nepoužívají. Zaprvé se jedná o trojici pojmů **řídící bod**, **řídící přímka** a **řídící kružnice**. Jak zmiňuje Lálová (2019, s. 2), kružnice, která v kruhové inverzi určuje, jakým způsobem se budou geometrické objekty v tomto zobrazení zobrazovat „…se nazývá *základní kružnice*, *řídící kružnice* nebo také *určující kružnice* kruhové inverze, …". V této učebnici je pak pojem řídící kružnice zobecněn i pro zobrazení středové a osové souměrnosti; obecně nazýván u všech zobrazení involuce jako **řídící objekt**. Další trojicí pojmů jsou **střed involuce**, **směr involuce** a **průvodič**. Střed involuce, který se objevuje pouze u kruhové inverze, je podle Chodorové (2013, s. 40) v involuci „takový vlast-ní bod přímky, který odpovídá nevlastnímu bodu". Použili jsme tedy termín objevující se obvykle v projektivní geometrii. V pojednáních o kruhové inverzi je tento bod častěji nazýván jako *střed inverze*, protože se jedná o střed řídící kružnice. Směr involuce je pojem nový a vychází z pojmu *směr afinity* (termín pocházející z afinních zobrazení) a faktu, že kruhová inverze je v libovolném směru de facto involuce bodů na přímce (tj. na přímce procházející středem involuce). Kombinací přeneseného významu a zaužívaného pojmu tak vznikl tento pojem nový. Posledním termínem je tzv. průvodič, který je znám např. z fyziky či konstrukční geometrie (např. u kuželoseček). Tento pojem bude dále komentován v následujícím oddíle.

Kapitola *Přímky a kružnice* (intermezzo) obsahuje asi nejvýraznější a nejzásadnější úpravy oproti obvyklé školské praxi. První pozměněným pojmem jsou **rovnoběžné kružnice**, jež nahrazují všeobecně užívaný pojem soustředné kružnice. Motivací pro tuto změnu je především v učebnici uváděná definice rovnoběžných křivek:

$$(\exists!\, d \in \mathbb{R})(\forall\, X \in a)(\forall\, Y \in b)\colon\ |Xb| = |Ya| = d.$$

Této definici totiž vyhovují jak rovnoběžné přímky, tak soustředné kružnice. Název rovnoběžné kružnice je také v souladu s běžně užívaným pojmem rovnoběžných křivek v zahraniční literatuře. Samotný český ekvivalent původně řeckého slova paralelní není úplně ideální, protože u soustředných kružnic postrádáme názor toho, že by „běžely rovně“; daleko vhodnější by pak bylo použít původní význam tohoto slova (*paraléllos*), který znamená „souběžný, vedle sebe položený“ (Rejzek, 2012, s. 467). Použití termínů *souběžné přímky* a *souběžné kružnice* by tak v podstatě bylo vhodnější, ale pro žáky ZŠ již možná příliš odtržené od běžné praxe. Navíc použitím pojmu rovnoběžné kružnice mělo být dosaženo toho, aby žák skrze jazykovou podobnost začal vnímat i ideovou podobnost obou popisovaných geometrických objektů.

Posledním, a zřejmě nejkontroverznějším, zásahem do geometrického názvosloví v této učebnici je změna tradičního označení polohy přímky vůči kružnici, které známe jako trojici pojmů: *sečna – tečna – mimoběžná přímka*. Celá koncepce změny je poměrně detailně rozebrána přímo v učebnici – pro její úplné pochopení je tedy nejlépe danou pasáž nastudovat (viz kapitola *Přímky a kružnice*, část **Sečny, tečny, mimoběžky**). Na tomto místě pouze uvedeme výsledné změny a důvody pro jejich zavedení.

Vnější přímka kružnice byla přejmenována na **mimoběžku** kružnice. Toto označení vychází z klasického pojetí mimoběžných přímek, které není možné realizovat v rovině, ale pouze v prostoru. Definice mimoběžných přímek říká, že jsou to přímky, které nemají žádný společný bod a nejsou rovnoběžné. Zásadní je však informace, že nemají žádný společný bod, protože v inverzní geometrii rovnoběžné přímky mají společný bod, a sice bod v nekonečnu. Stejně tak různoběžné přímky mají dva společné body – průsečík a bod v nekonečnu. Z tohoto pohledu jsou tedy různoběžky sečné přímky se 2 společnými body, rovnoběžky tečné přímky s 1 společným bodem a mimoběžky přímky mající 0 společných bodů. To potvrzují i obrazy těchto přímek v kruhové inverzi – obrazem rovnoběžných přímek jsou totiž tečné kružnice a obrazem různoběžných přímek sečné kružnice.[7] Toto rozdělení přímek na tři různé typy (sečna – tečna – mimoběžka) je pak analogicky aplikováno na vzájemné polohy přímky a kružnice i vzájemné polohy dvou kružnic. Kritériem je vždy počet společných bodů, což je v případě mimoběžných křivek vždy nula. Komplexní pojmenování těchto poloh pak v sobě kromě této trojice obsahuje i pojmy *vnitřní*/*vnější* a *přímka*/*kružnice*, ale to již čtenář nejlépe nastuduje přímo v textu učebnice.

Na závěr ještě drobný dodatek. V textu učebnice se objevují pojmy kolmé kružnice a ortogonální kružnice, které jsou obvykle synonymy. V učebnici mají však drobně odlišný charakter v závislosti na jejich konstrukci. Pojem *kolmé kružnice* je použit v případě, kdy chceme k zadané kružnici sestrojit kolmou kružnici a máme k dispozici střed této nové kružnice. Naopak pojem *ortogonální kružnice* je použit v případě, kdy nemáme k dispozici střed, ale pouze dva body, jimiž musí kolmá kružnice procházet.

2.4.4 Inovativní přístup k vybraným geometrickým pojmům

U některých geometrických pojmů uváděných v této učebnici je použit netradiční přístup při jejich výkladu či uchopení dané problematiky. V tomto oddíle budou popsány tyto odchylky od tradičního přístupu, společně s důvody pro tuto změnu.

První taková změna se nachází úplně na začátku učebnice u trojice základních geometrických objektů: bodu, přímky a kružnice. Výklad těchto bytostně známých pojmů je kvůli lepší motivaci čtenáře ozvláštněn o filozofičtější pohled na tyto objekty. Tento pohled se snaží vystihnout podstatu zmiňovaných objektů a v dalších částech učebnice se pak s tímto pohledem dále pracuje. Bod je zde prezentován jako naprosto přesné a jedinečné **místo** v prostoru (rovině), které je nějakým způsobem význačné (např. je to průnik dvou křivek, střed úsečky apod.). Tento pohled není asi ničím překvapivým, ale je možné, že mnoha žákům ZŠ tento vhled do podstaty uniká a bodem rozumí nějaké „puntíky“ či „křížky“. Přímka je prezentována jako určitý **směr**, v němž je možné se pohybovat. Z hlediska matematiky směrem rozu-

7 Tedy pouze v případě, že se jedna či obě přímky nezobrazí opět na přímky, ale tomu lze zamezit v případě, že střed involuce (tj. střed řídící kružnice) nebude incidentní s žádnou z těchto přímek.

míme svazek rovnoběžných přímek (svazek přímek 2. druhu); konkrétní přímka z tohoto svazku je pak reprezentantem tohoto směru. Kružnice je pak chápána jako určitá **vzdálenost**, což je dáno tím, že všechny body kružnice mají stejnou vzdálenost od jejího středu. V tomto filozofickém rámci je pak možné libovolnou geometrickou konstrukci (jako řešení nějakého problému) sémanticky vyložit za použití těchto pojmů, např.: „Nalezneme takový směr, jenž je daný dvěma místy, která mají od námi zadaných jiných míst stejnou vzdálenost.“.[8]

Další výraznou změnou je definice a uchopení *Thaletovy kružnice*. Nejprve se podrobně podívejme na definici této kružnice. Budínová (2014, s. 7) nabízí dvě definice *Thaletovy kružnice*:

„Množina všech vrcholů všech pravých úhlů roviny,
jejichž ramena procházejí body A, B je kružnice o průměru AB...“

a

„…Množina všech bodů, ze kterých vidíme úsečku AB pod úhlem 90°,
je kružnice nad průměrem AB…“

Tyto dvě definice jsou prakticky stejné, pouze používají jiné slovní obraty. Co je však velmi důležité, je to, že **tato definice je špatně!** Množina bodů podle výše uvedených definic totiž neobsahuje (ani v jednom případě) body *A* a *B*, a jedná se tak tedy o množinu dvou otevřených půlkružnic, **nikoliv o kružnici!**[9]

Ukazuje se tedy nanejvýš vhodné tuto definici upravit tak, aby výsledná množina bodů byla celou kružnicí, aby v ní žádné body nechyběly. Opravená definice může znít např. takto:

„Množina všech pat kolmic spuštěných z bodu *A* ke všem přímkám procházejícím bodem *B*,
se nazývá *Thaletova kružnice* nad průměrem *AB*.“

Tato definice není v učebnici uvedena. Pracuje se tam však s ní v její obrácené logice, a to tak, že je žákům předkládána jistá vlastnost *Thaletovy kružnice*. Ta říká, že vedeme-li libovolným bodem *Thaletovy kružnice* přímky procházející body *A* a *B*, pak jsou tyto přímky na sebe kolmé.

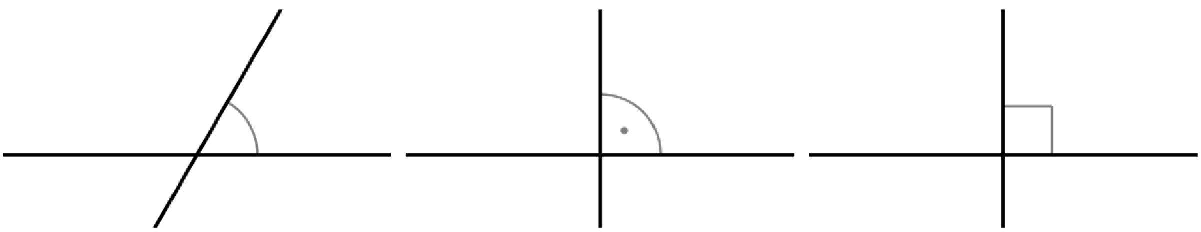
8 Uvedená věta je popisem konstrukce osy libovolné úsečky, která je zadaná svými dvěma krajními body.

9 Nutno zde podotknout, že uvedené citace nejsou úplné a v původním zdroji (Budínová, 2014, s. 7) je tato skutečnost zmíněna. V citaci je však vynechána zejména proto, že ne vždy můžeme v různých zdrojích tento dodatek nalézt a také proto, že ho ne všichni učitelé znají a žákům vysvětlují.

Tím se opět dostáváme k problému krajních bodů úsečky, nad nimiž je *Thaletova kružnice* sestrojena. Pokud si jeden z nich zvolíme jako náš libovolný bod, budeme mít problém s konstrukcí druhé z přímek, protože ta bude najednou určena pouze jediným bodem. Této skutečnosti je v učebnici využito k přípravě budování pojmu **limity** u žáka. Geometrické uchopení tohoto pojmu je na hony vzdálené analytické δ-ϵ definici a díky využití animací je v jistém smyslu pro žáky velmi intuitivní. Kromě výkladu vlastnosti *Thaletovy kružnice* je pak tento latentní princip limity (prezentován často formou „degradace“ sečny v tečnu – jak je ostatně obvyklé i při motivačním výkladu základů diferenciálního počtu) možno nalézt při výkladu obrazu přímek a bodu v kruhové inverzi a též v závěrečné kapitole při výkladu pojmu kruhových křivek.

Další z netradičních přístupů souvisí s pojmem **kolmost**. Jak už bylo řečeno výše, jedním z konceptů této učebnice bylo eliminovat použití úhlů. Pokud odhlédneme od zobrazení rotace, zjišťujeme, že při jakékoliv jiné konstrukci nevyvstává potřeba jakéhokoliv úhlu, vyjma úhlu pravého – tedy potřeba konstrukce dvou na sebe kolmých přímek (obecně křivek). Z tohoto důvodu je v učebnici zaveden pojem kolmosti, který se od pojmu pravého úhlu odlišuje. Toto odlišení pramení z různých (filozofických) podstat obou pojmů a odkazuje k odlišnému vnímání pojmu úhel v antické geometrii.

Pro vyznačení úhlu v konstrukci je použit klasický symbol „obloučku“, který je použit i v případě pravého úhlu s obvyklým doplněním „tečky“, čímž je naznačeno, že pravý úhel je speciálním případem úhlu obecného. Pro vyznačení vlastnosti kolmosti dvou křivek je v konstrukcích použito symbolu „čtverečku“, který se obvykle v zahraniční literatuře užívá pro vyznačení pravého úhlu (namísto u nás obvyklého „obloučku s tečkou“). Tato grafická změna pak v žákovi evokuje i změnu v koncepci tohoto pojmu – pravý úhel je speciálním případem úhlu, tedy kvantitativní metrické veličiny, zatímco kolmost je kvalitativní **vlastnost** dvou křivek.


úhel *pravý úhel* *kolmost*

S pojmem kolmost se opět vynořuje potřeba správné definice této vlastnosti, tedy případu, kdy jsou dvě dané přímky na sebe kolmé (případy kolmosti jiných dvou křivek lze dále definovat pomocí dvou kolmých přímek, jak je vysvětleno v textu učebnice). Obvyklá, všeobecná definice tohoto pojmu je následující:

Dvě přímky jsou na sebe kolmé právě tehdy, když svírají pravý úhel (nebo též úhel 90°).

Tato definice je z podstaty špatně… Proč používat pojem související s otáčením u polohové vlastnosti dvou přímek? Co to vůbec je pravý úhel? Tato otázka může vést k definici kruhem, když si odpovíme, že pravý úhel je ten úhel, který svírají kolmé přímky. Případně můžeme pravý úhel vyčíslit jako úhel velikosti 90°. V tom případě musíme tento úhel nějak změřit, ale my chceme nemetrickou geometrii, geometrii bez měření. Je vidno, že toto není ta správná cesta.

Řešení přináší nová definice vlastnosti kolmosti, reps. kolmosti dvou přímek, která je uvedena v učebnici:

Dvě přímky jsou na sebe kolmé, pokud libovolný bod jedné z nich
má stejnou vzdálenost k oběma krajním bodům libovolné úsečky,
která leží na druhé z přímek a jejíž střed je totožný s průsečíkem obou přímek.

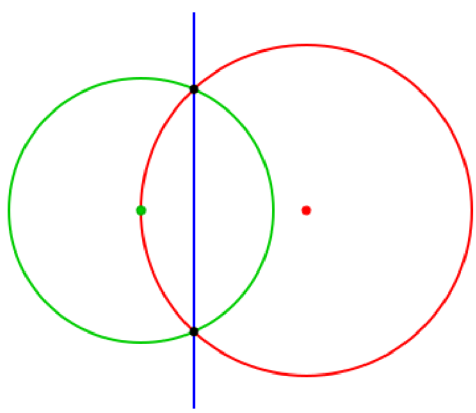
V případě této definici opadá jakékoliv měření (natož pak měření úhlu). Stačí udělat jednoduchý „test“ pomocí dvou kružnic a zjistit incidenci bodu ke kružnici. V případě, že bod je incidentní, jedná se o kolmé přímky; v opačném případě (bod není incidentní) jsou přímky různoběžné. Pro úplné pochopení nechť si čtenář nastuduje příslušnou pasáž v učebnici, a to v kapitole *Přímky a kružnice*, v části **Sečny a kolmice**.

Novinkou je také kritérium určení vzájemné polohy dvou kružnic. Zatímco u vzájemné polohy dvou přímek či přímky a kružnice je tímto kritériem počet společných bodů, u dvou kružnic je situace složitější. Kromě společného počtu bodů je ještě potřeba zohlednit vzdálenosti středů těchto kružnic a jejich poloměry. Teprve díky všem těmto informacím lze rozhodnout o jedné z pěti možných poloh dvou kružnic. Tento způsob určování vzájemné polohy byl v učebnici změněn na poněkud sofistikovanější, ale ve výsledku jednodušší a přiměřejší přístup. Tím je určení počtu **společných tečen** těchto kružnic. Každá z pěti různých vzájemných poloh dvou kružnic má jiný počet společných tečen, a proto toto číslo jednoznačně určuje příslušnou polohu, stejně jako číslo společného počtu bodů v případě dvou přímek či přímky a kružnice. Kritéria u všech typů křivek jsou pak ve výsledku konceptuálně totožná, než v případě porovnávání vzdáleností středů kružnic a jejich poloměrů.

Poslední, avšak pro učebnici stěžejní, je inovativní přístup k výkladu zobrazení v kruhové inverzi. Ve vysokoškolské praxi (kde se většina studentů s kruhovou inverzí setkává prvně) je obvyklé se při výkladu této problematiky nejprve seznámit s konstrukcí obrazu jednotlivého bodu (což má přímou souvislost s definicí inverze) a poté studovat jakým způsobem se v inverzi zobrazují přímky a kružnice. V této učebnici je postup opačný. Žáci se nejprve seznámí s konstrukcí obrazu přímky a kružnice a až nakonec se dopracují ke konstrukci samotného bodu.

Jaký je k tomu důvod? Samotná konstrukce bodu je, co se týká počtu kroků a pomocných konstrukcí, mnohem náročnější než konstrukce křivek – v případě, že se tyto konstrukce správně uchopí. Navíc konstrukce bodu v kruhové inverzi se vůbec v ničem nepodobá ostatním zobrazením, se kterými se měli žáci možnost setkat. Výklad o sestrojení bodu v inverzi by tak pro tyto žáky, jak se říká, „spadl z nebe“. Naopak v případě konstrukce přímky lze najít četné paralely mezi kruhovou inverzí a osovou souměrností, čehož je v učebnici využito.

Pojďme si tedy nyní projít tuto metodiku výkladu konstrukce přímek a kružnic v kruhové inverzi, jak je praktikována v této učebnici, a poukázat na stěžejní momenty v tomto přístupu. Výchozí konstrukcí, ze které de facto vychází všechny ostatní, je konstrukce **sečné přímky**.



Na obrázku vidíme řídící kružnici, sečnou přímku a její obraz v inverzi podle řídící kružnice. Je použit barevný kód zmíněný výše. Tato konstrukce může být žákům dána dogmaticky, ale v učebnici je „dokázána“ na základě podobnosti s osovou souměrností.[10] Při „důkazu“ toho, že obrazem modré přímky je skutečně červená kružnice, se učebnice opírá o tyto vlastnosti osové souměrnosti:

- body řídící přímky (osy souměrnosti) jsou samodružné
- přímka kolmá k řídící přímce (ose souměrnosti) je samodružná

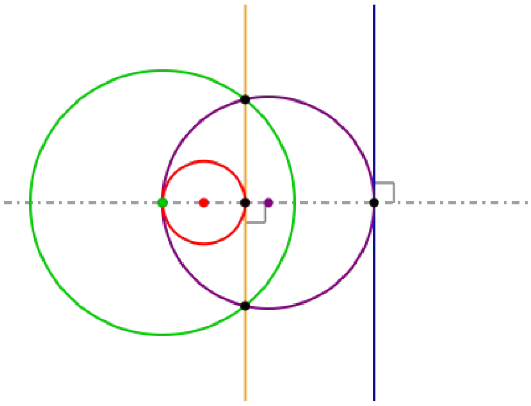
Z první vlastnosti zjistíme, že obraz modré přímky musí procházet průsečíky této přímky s řídící kružnicí, tedy dvěma černými body. Pokud by tento obraz byla přímka, musela by být samodružná, ale z druhé vlastnosti víme, že samodružná přímka musí být kolmá na řídící křivku, tj. musí procházet středem řídící kružnice. Z toho vyplývá, že obrazem nemůže být přímka a musí jím být kružnice.

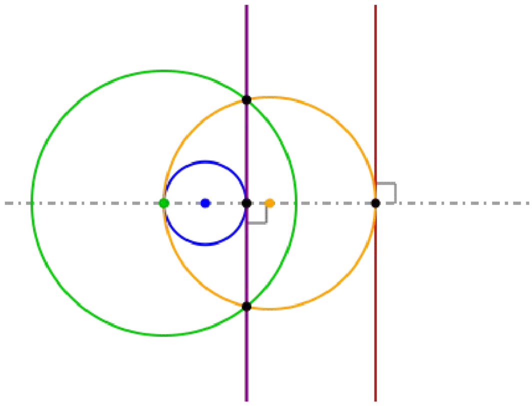
K této dedukci je pak přidána další daná informace, a to, že obraz libovolné přímky musí procházet středem involuce (středem řídící kružnice), což je později objasněno na konci učebnice. Konstrukce samotného obrazu sečné přímky je pak konceptuálně velmi jednoduchá, protože stačí nalézt kružnici, která prochází třemi zadanými body, což je problém, který byl vyřešen v úvodní kapitole celé učebnice. Z této typové konstrukce lze pak velmi snadno vyvodit konstrukci kolmé přímky a tečné přímky řídící kružnice jako její limitní případy. Protože se v involutorních zobrazeních nerozeznává vzor a obraz, žák z těchto konstrukcí ihned obdrží konstrukce sečných a tečných kružnic procházející středem inverze (v učebnici označované jako *incidentní*, čímž je myšleno, že jsou incidentní se středem involuce).

První závažný problém přichází v případě mimoběžné přímky (*vnější přímky*) řídící kružnice, protože s ní nemá žádné společné body. Tento problém se řeší použitím *zákona zachování incidence* a tzv. *fíglu s přímkou/kružnicí*. Zákon zachování incidence říká, že ve všech zobrazeních zmíněných v učebnici se zachovává incidence bodu ke křivce a též vzájemná poloha dvou křivek (tedy sečny zůstanou sečnami, tečny tečnami apod.). Fígl s přímkou a fígl s kružnicí je pak praktickým použitím zákona zachování incidence. Ten spočívá v tom, že pokud nějaký křivka, kterou chceme zobrazovat, nemá s řídící křivkou společné body, použijeme tzv. *pomocnou křivku*, která je k zadané křivce tečná, a která má s řídící křivkou

10 Tato podobnost mezi kruhovou inverzí a osovou souměrností není v učebnici nijak hlouběji vysvětlena. Je dána jako něco, co musí žák přijmout s tím, že později, až nabyde větších znalostí kruhové inverze, této podobnosti porozumí.

společné body. Díky tomu, že má společné body, umíme zkonstruovat obraz této pomocné křivky a tento obraz nám, díky zákonu zachování incidence, pomůže sestrojit hledaný obraz zadané křivky. Pro více informací, nechť si čtenář vyhledá příslušnou pasáž v textu učebnice v kapitole *Inverze přímek*.





Následující kapitola učebnice, tedy kapitola *Inverze kružnic* pak již nepřináší nic nového, pouze na příkladech konstrukce neincidentních kružnic aplikuje použití těchto figlů. V závěrečné kapitole (*epilogu*) je pak s pomocí intuitivního pojmu limity a za použití dvou figlů představena a „dokázána" konstrukce jediného bodu v kruhové inverzi. Tato konstrukce se pak díky předchozím kapitolám zdá velice snadná a díky tomuto přístupu pak nepůsobí násilně, tedy nezdá se, že by „spadla z nebe".

3 UČEBNICE KRUHOVÉ INVERZE

Tato kapitola obsahuje přepis vytvořené digitální učebnice. Nejedná se o přepis kompletní, protože není možné a v některých případech i vhodné přenášet určité interaktivní prvky do textové podoby. Co tedy tento textový přepis přesně obsahuje a co zde naopak chybí?

Veškerý výkladový text, který se nachází v digitální učebnici, nalezne čtenář i zde. Z jiných textů uvedených v učebnici zde naopak chybí některé instruktivní texty, které se v učebnici opakují (např. v kapitolách 1–4) nebo se vztahují k interaktivním prvkům učebnice. Tyto texty jsou z hlediska rozsahu i obsahu naprosto marginální.

Veškeré obrázky použité v digitální učebnici nalezne čtenář i zde. Animace, kterých v digitální verzi učebnice není málo, byly v některých případech převedeny na kolekci dvou či více obrázků, v ostatních případech byly tyto animace opět převedeny na kolekci několika obrázků a poté s odstupňovanou průhledností složeny v obrázek jediný (zejména v závěrečné části učebnice). Texty vztahující se k těmto animací byly v této textové verzi upraveny tak, že slovo „animace“ bylo nahrazeno slovem „obrázek/obrázky“.

V textové verzi je pak redukován veškerý interaktivní obsah. Postupy konstrukcí jsou vloženy způsobem, jakým se primárně zobrazují v digitální verzi (tedy kompletně vykreslené) bez možnosti interakce. Texty, které se zobrazují po kliknutí na tlačítko (zejména odpovědi na otázky či řešení zadaných problémů) jsou v textové verzi řazeny na místo, kde se nacházelo původní tlačítko. U podkapitol *Zkoumání zobrazení*, které nalezneme v kapitolách 1–4, jsou vyjma kapitoly *Posunutí* vynechány příslušné otázky (které se ve všech kapitolách opakují) a jsou uvedeny pouze odpovědi na tyto otázky.

V těchto čtyřech kapitolách se také nachází tabulky shrnující pozorování vlastností jednotlivých zobrazení. Tyto tabulky jsou v digitální verzi „zakryté“ a je možné je odkrývat, což slouží žákovi k opakování příslušné látky. V textové verzi jsou tabulky uvedeny „odkryté“. Stěžejním bodem digitální učebnice je pak tzv. **laboratoř**, v níž může žák interaktivně prozkoumávat jednotlivá zobrazení a díky tomu odpovídat na předložené otázky. Tento prvek v textové verzi úplně chybí.

Veškerý dále uvedený obsah v následujících podkapitolách již patří k textovému přepisu digitální učebnice. Kompletní učebnici může čtenář nalézt na následujícím odkazu:

http://inverzni-geometrie.kvalitne.cz/

3.1 Co je třeba znát!

3.1.1 Základní pojmy

Mezi základní pojmy geometrie, které je třeba znát, patří **bod**, **přímka** a **kružnice**. Asi si říkáte, že tyto pojmy už dávno znáte a není potřeba si o nich cokoliv číst. Nicméně jakékoliv opakování už dávno poznaných věcí může vést k tomu, že v nich objevíte něco nového, nebo že odhalíte nějaké dříve nepoznané souvislosti. A to i v případě, že jste se vlastně nic nového neučili. Naučíte se to sami jen tím, že přemýšlíte o starých znalostech v nových souvislostech. Pojďme si tedy zopakovat, co víme o bodu, přímce a kružnici.

Ještě než se začneme bavit o každém pojmu zvlášť, je třeba zdůraznit, že tyto tři pojmy jsou základními kameny geometrie. Všechny ostatní pojmy jako např. úsečka, úhel, trojúhelník apod. můžeme popsat pouze pomocí bodů, přímek anebo kružnic. Možná jste o tom takto zatím nepřemýšleli, ale je to tak. Jak je to ale možné?

Představte si, že rýsujete nějakou geometrickou úlohu. K rýsování používáte dva nástroje: **pravítko** a **kružítko**. Pravítko slouží k tomu, abyste rýsovali přímky a kružítko k tomu, abyste rýsovali kružnice. V místech, kde se přímky a kružnice protínají pak existují nějaké body. Tímto způsobem nakonec narýsujete jakýkoliv geometrický objekt. To tedy znamená, že můžeme vytvořit libovolný geometrický útvar jen pomocí bodů, přímek a kružnic.

3.1.1.1 Bod

Významný starořecký matematik a geometr Euklides[11] ve své učebnici geometrie zvané *Základy*[12] popsal bod takto:

„Bod je to, co nemá žádné části."

Je to poměrně pěkný popis bodu, ale říká o něm spíše to, co bod není, než to co bod je.

11 ***Euklides (cca 325–270 př.n.l.)*** – Nejslavnější matematik starověku, který položil pevný základ celé matematiky. Jeho axiomatická metoda se stala vzorem precizního logického myšlení. Je autorem několika geometrických pouček, např. vět o výšce či odvěsně v pravoúhlém trojúhelníku (tzv. *Euklidovy věty*).

12 ***Základy (Elementa)*** – Nejdůležitější Euklidovo dílo! Celkem 13 knih sloužilo více než 2000 let jako učebnice geometrie i matematiky. Bylo zde shrnuto veškeré matematické vědění té doby. Genialita *Základů* spočívala v tom, že všechny poučky byly vytvořeny z 5 základních axiómů pouze cestou logické dedukce. Po *Bibli* to byla nejvíce tištěná a překládaná kniha na světě.

Pokud něco můžeme rozdělit na více částí, pak to není bod. Pokud to rozdělit nemůžeme, pak to je bod. Co je to ale bod? Co je to TO, co už nemůžeme rozdělit?

Bod je v geometrii jedno jediné přesné **místo**. Např. místo, kde se protínají dvě přímky. Takové místo je pouze jedno a je velmi přesně určeno. Nedá se rozdělit na více částí, a pokud bychom se z tohoto místa posunuli byť jen o malinký kousek vedle, už bychom nebyli na stejném místě, ale byli bychom na místě jiném – v jiném bodě.

To, že bod nemá žádné části, znamená také, že bod nemá ani šířku ani délku. Bod tedy nemá **žádný rozměr**. Takový objekt se ale velmi špatně znázorňuje. Když si chceme bod znázornit, často kreslíme malinkou tečku, která označuje dané místo. Taková tečka, i když je velice malá, má ale nějakou délku i šířku – je to vlastně miniaturní kruh s velmi malým obsahem. Někdy se také bod značí malým křížkem, který jakoby označuje dané místo. Tento křížek naznačuje části dvou přímek, které se v určitém místě protínají a tím určují tento bod.

V této učebnici budeme k označení bodů používat tečku a to vůbec ne malou, ale pořádně velkou, abychom ji vždy dobře viděli. I kdybychom ji dělali malou, stejně bude mít nějakou šířku a délku, takže tím bychom si nepomohli. Opravdový bod tak ve skutečnosti nikdy nemůžeme narýsovat, vždy bude mít nějaký rozměr (když používáme při rýsování tužku, necháváme na papíře stopu čáry, která má také nějakou šířku).

Body se v geometrii značí velkými písmeny, např. A, B, C atd. Často se používají písmena ze začátku abecedy, ale mohou se použít libovolná. Pokud bod leží na nějaké přímce nebo kružnici, označuje se to symbolem $\in$. Pokud na přímce či kružnici neleží (tedy leží mimo ni), označujeme to symbolem $\notin$. Například bod B, který leží na přímce p, ale leží mimo kružnici $k(S)$, označíme takto: $B \in p$, $B \notin k(S)$. Někdy se říká, že bod B náleží přímce p a nenáleží kružnici $k(S)$.

3.1.1.2 Přímka

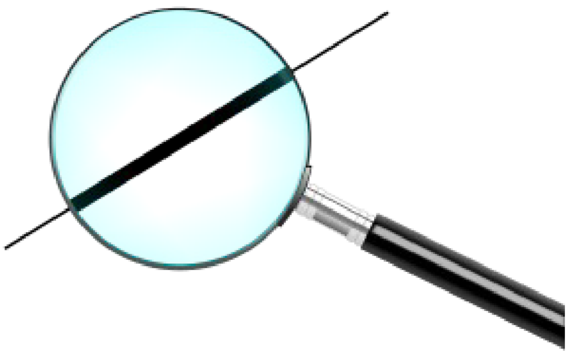
Přímka by se dala popsat jako dokonale rovná čára, která má určitý **směr** a v něm pokračuje na obě strany do nekonečna. Můžeme ji také chápat jako úsečku, kterou lze prodloužit na obou jejích koncích libovolně daleko. Tímto způsobem ji chápal Euklides a ve svých *Základech* píše:

„Úsečka je čára, která se táhne rovně. Čára je délka bez šířky.“

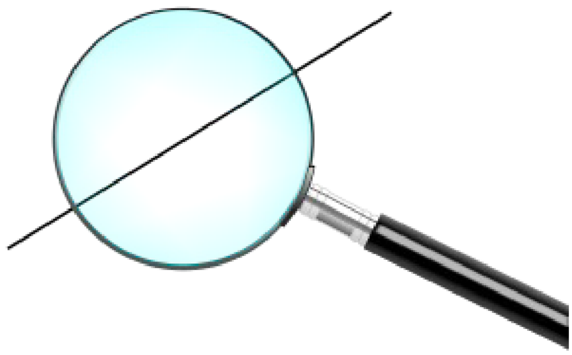
To je sice pěkné, ale kde se tu píše o přímce?! Nikde, protože Euklides přímky neznal.

Jeho chápání geometrie bylo takové, že se zabýval pouze těmi útvary, které bylo možné zhlédnout pouhým zrakem, které bylo možné nakreslit do písku nebo narýsovat na papír. A přímka, která se táhne do nekonečna, takovým útvarem rozhodně není! Euklides znal pouze úsečky a pokud potřeboval, uměl je libovolně prodloužit.

Pokud však v jeho podání nahradíme slovo úsečka slovem přímka, dostaneme poměrně pěkný pohled na to, čím přímka je. Rovně se táhnoucí čára, která nemá žádnou šířku, ale má délku (v našem případě nekonečnou) – tedy pouze **jeden rozměr**. To, že přímka nemá šířku, můžeme také chápat tak, že má nekonečně malou šířku. Kdybychom se na opravdovou přímku podívali pod lupou nebo mikroskopem, bude stále stejně tenká; její šířka bude nekonečně malá. Pokud ale přímku narýsujeme tužkou a poté se na ní podíváme pod lupou nebo mikroskopem, zjistíme, že je naše narýsovaná přímka poměrně „tlustá". Měla by nějakou šířku způsobenou tím, že při rýsování tužkou zanechává tužka stopu, která má šířku i délku. Proto stejně jako bod, ani přímku nelze ve skutečnosti nikdy narýsovat.



***narýsovaná** „přímka"*



***skutečná** přímka*

Přímky se v geometrii značí malými písmeny, obvykle začínající p, q, r atd., ale lze použít libovolné písmeno. V případě, že jsou dvě přímky rovnoběžné, zapisujeme to symbolem $\parallel$. Různoběžné přímky se zapisují jako $\nparallel$ a kolmé přímky jako $\perp$. Například pokud je přímka a rovnoběžná s přímkou b, kolmá na přímku c a různoběžná s přímkou d, zapíšeme to tímto způsobem: $a \parallel b$, $a \perp c$ a $a \nparallel d$.

3.1.1.3 Kružnice

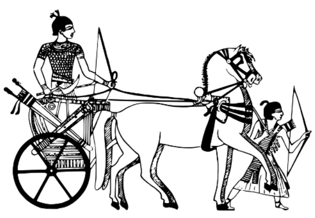
Kružnici si můžeme představit jako dokonale kulatou čáru, jejíž každý bod má od středu kružnice stejnou **vzdálenost**. Neboli kružnice je čára, která je v každém svém místě stejně vzdálená od určitého bodu – středu kružnice. Velmi podobně také kružnici popisuje Euklides ve svých *Základech*:

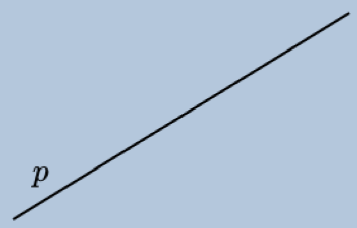
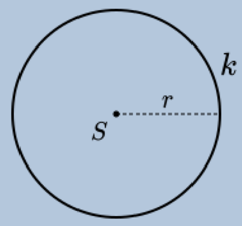
„Kruh je útvar, objímaný jedinou čarou, k níž od jeho středu vedené úsečky jsou všechny stejně dlouhé. Čára objímající kruh se nazývá kružnice.“

Jak již víme z popisu přímky, čára je délka bez šířky. I o kružnici tedy můžeme říci, že má **jeden rozměr**. Mít jeden rozměr vlastně znamená to, že se na daném objektu (který má jeden rozměr) mohu pohybovat pouze dopředu a dozadu. Na přímce jsme se pohybovali jedním nebo opačným směrem, na kružnici se můžeme jakoby otáčet po nebo proti směru hodinových ručiček.

Každá kružnice je jednoznačně určena svým **středem**, který většinou značíme písmenem S a svým **poloměrem**, což je vzdálenost všech bodů kružnice od jejího středu. Poloměr může být zadán číslem nebo velikostí úsečky a značí se obvykle písmenem r z latinského slova rádius[13]. Kružnice se obvykle značí zápisem $k(S;r)$, kde k je název kružnice, S je střed kružnice (bod) a r je buď číselná velikost poloměru, nebo velikost konkrétní úsečky, která poloměr udává. Například zápis $l(O;|AB|)$ označuje kružnici l se středem O a poloměrem určeným velikostí úsečky AB. V této učebnici nebudeme zadávat kružnici pomocí poloměru, ale pomocí bodů, kterými bude tato kružnice procházet. Proto nejčastější označení kružnice bude vypadat takto: $k(S)$; tedy kružnice k se středem S.

13 ***Rádius*** – Latinské slovo radius je v překladu **paprsek**. Je tím myšlen paprsek kola válečného vozu, který se používal ve starém Římě ke sportovním či válečným účelům (viz obrázek vpravo). V dnešní době bychom jako paprsky pravděpodobně označili **špice** jízdního kola.



BOD ***[point]***	**PŘÍMKA** ***[line]***	**KRUŽNICE** ***[circle]***
		
Bod je přesně určené **MÍSTO** v prostoru, které nemá žádné rozměry (šířku ani délku).	Přímka je nekonečně dlouhá rovná čára, která má určitý **SMĚR** a pouze jeden rozměr (délku).	Kružnice je dokonale kulatá čára, která má od svého středu ve všech místech stejnou **VZDÁLENOST** a pouze jeden rozměr (délku).
Značí se velkým písmenem, např.: B.	Značí se malým písmenem, např.: p.	Značí se malým písmenem a za ním je v závorce uveden *střed* kružnice, např.: $k(S)$.

3.1.2 Vzájemná poloha objektů

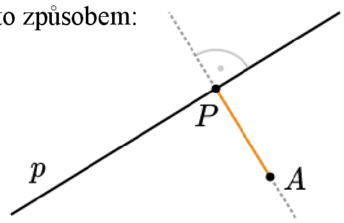
Body a křivky[14] mohou vůči sobě zaujímat různé polohy. Tyto polohy určujeme u bodů podle jejich vzdáleností od jiných bodů či křivek, u křivek podle počtu společných bodů, které mají, nebo podle jiných vlastností.

To, zda bod leží či neleží na nějaké křivce, značíme symbolem $\in$ či $\notin$. Vzdálenost dvou bodů (např. A a B) je velikost úsečky, která oba body spojuje a značí se takto: $|AB|$. Vzdálenost bodu a přímky (např. bodu A a přímky p) je velikost úsečky, která z tohoto bodu vychází, je kolmá na přímku a druhý její krajní bod leží na přímce. Značí se obdobně jako vzdálenost dvou bodů: $|Ap|$.[15]

14 ***Křivka [curve]*** – Křivka je přesný matematický pojem, který označuje to, co jsme zde dříve popisovali jako čáru. Je to tedy geometrický objekt, který má pouze jeden rozměr (délku). Typické křivky jsou **přímka** (i když je rovná) a **kružnice**.

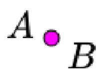
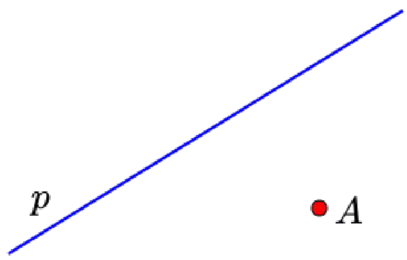
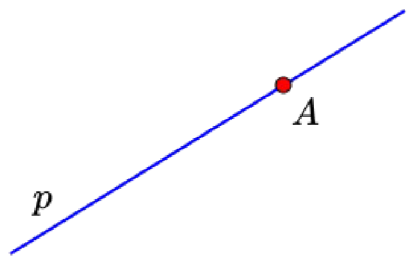
15 ***Vzdálenost bodu a přímky*** – Vzdálenost bodu A od přímky p nalezneme tímto způsobem:

1. Sestrojíme kolmici na přímku p procházející bodem A.
2. Průsečík obou přímek označíme jako bod P.
3. Vzdálenost bodu od přímky je pak rovna velikosti úsečky AP, tedy $|Ap| = |AP|$

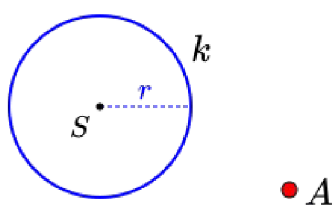


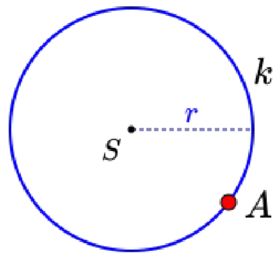
Při zkoumání vzájemné polohy dvou různých křivek často zjišťujeme počet společných bodů, které tyto křivky mají. Abychom zjistili počet společných bodů, používáme operaci průnik[16], kterou značíme symbolem $\cap$. Výsledkem této operace je pak seznam všech společných bodů, který píšeme do složených závorek a oddělujeme čárkou, např.: $\{A,B\}$. Pokud dvě křivky žádné společné body nemají, značíme to symbolem $\emptyset$. Mějme například kružnici $k(S)$ a přímky p a q. Kružnice $k(S)$ má s přímkou p společné dva body X a Y, s přímkou q pouze jeden bod T a přímky p a q nemají žádný společný bod (tím pádem musejí být rovnoběžné). Uvedené příklady zapíšeme symbolicky takto: $k(S) \cap p = \{X,Y\}$, $k(S) \cap q = \{T\}$ a $p \cap q = \emptyset$.

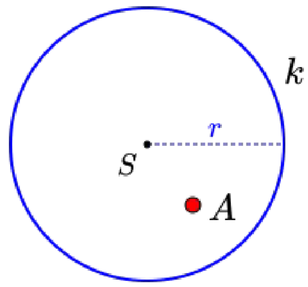
Následují ukázky všech možných poloh mezi body, přímkami a kružnicemi, kterých je celkem 21:

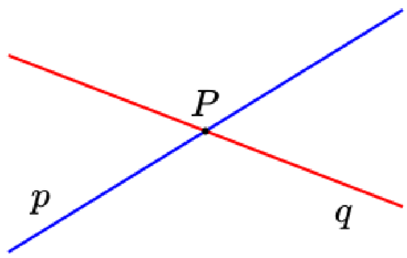
BB *dva body* A,B	 $A \neq B$ $\quad |AB| > 0$ Body A a B jsou **různé**.	 $A = B$ $\quad |AB| = 0$ Body A a B jsou **totožné**.
BP *bod a přímka* A,p	 $A \notin p$ $\quad |Ap| > 0$ Bod A **leží mimo** přímku p.	 $A \in p$ $\quad |Ap| = 0$ Bod A **leží na** přímce p.

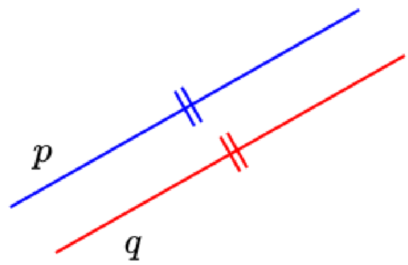
16 ***Průnik*** – Průnik je **geometrická operace**, která dává jako výsledek společné body dvou křivek. Můžeme si ji představit jako např. sčítání nebo násobení. To jsou *aritmetické operace* mezi dvěma čísly a výsledkem je opět číslo. Symbolicky se zapíší např.: 2+3 = 5 nebo 4·7 = 28. Stejně tak geometrická operace průnik se provádí mezi dvěma křivkami a výsledkem je seznam společných bodů. Symbolicky to lze zapsat například takto: $p \cap k(S) = \{T\}$.

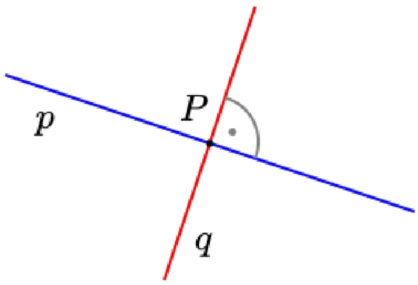
<table>
<tr>
<td rowspan="2">BK
bod a kružnice
$A, k(S)$</td>
<td>

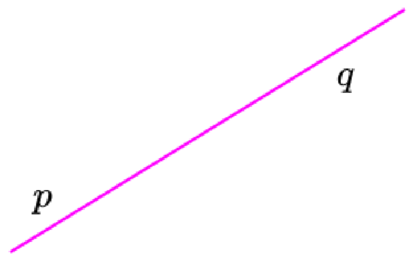
$A \notin k(S) \qquad |SA| > r$
Bod A leží vně kružnice $k(S)$.</td>
<td>

$A \in k(S) \qquad |SA| = r$
Bod A leží na kružnici $k(S)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>

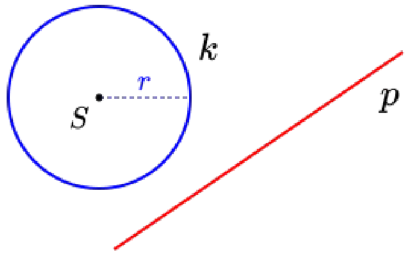
$A \notin k(S) \qquad |SA| < r$
Bod A leží uvnitř kružnice $k(S)$.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">PP
dvě přímky
p, q</td>
<td>

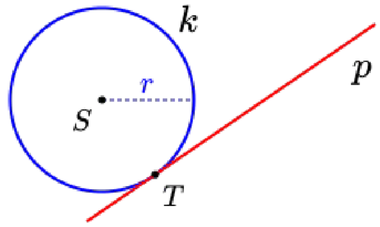
$p \nparallel q \qquad p \cap q = \{P\}$
Přímka p je různoběžná
s přímkou q.</td>
<td>

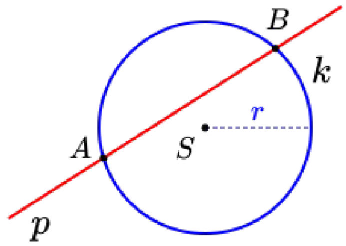
$p \parallel q \qquad p \cap q = \emptyset$
Přímka p je rovnoběžná
s přímkou q.</td>
</tr>
<tr>
<td>

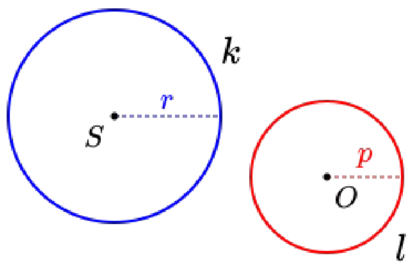
$p \perp q \qquad p \cap q = \{P\}$
Přímka p je kolmá
k přímce q.</td>
<td>

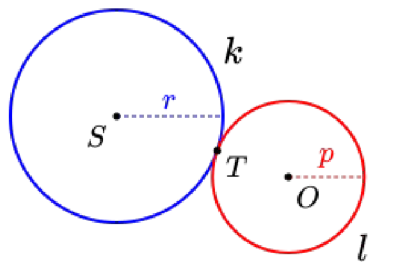
$p = q$
Přímka p je totožná
s přímkou q.</td>
</tr>
</table>

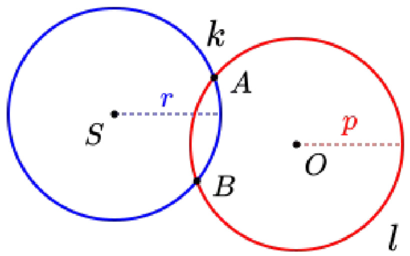
<table>
<tr>
<td rowspan="2">PK
přímka a kružnice
$p, k(S)$</td>
<td>

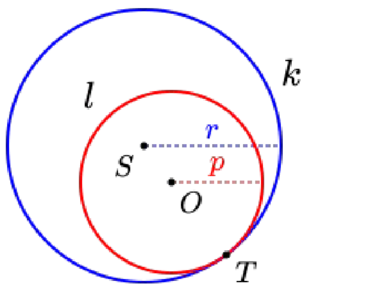
$k(S) \cap p = \emptyset \qquad |Sp| > r$
Přímka p je vnější přímkou
kružnice $k(S)$.</td>
<td>

$k(S) \cap p = \{T\} \qquad |Sp| = r$
Přímka p je tečnou
kružnice $k(S)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>

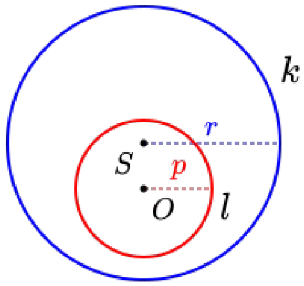
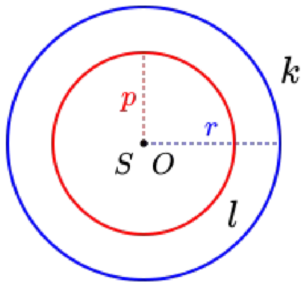
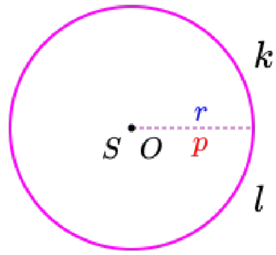
$k(S) \cap p = \{A, B\} \qquad |Sp| < r$
Přímka p je sečnou
kružnice $k(S)$.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">KK
dvě kružnice
$k(S), l(O)$</td>
<td>

$k(S) \cap l(O) = \emptyset \quad |SO| > r + p$
Kružnice $l(O)$ leží vně
kružnice $k(S)$.</td>
<td>

$k(S) \cap l(O) = \{T\} \quad |SO| = r + p$
Kružnice $l(O)$ má vnější dotyk
s kružnicí $k(S)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>

$k(S) \cap l(O) = \{A, B\}$
$|r - p| < |SO| < r + p$
Kružnice $l(O)$ protíná
kružnici $k(S)$.</td>
<td>

$k(S) \cap l(O) = \{T\} \quad |SO| = r - p$
Kružnice $l(O)$ má vnitřní dotyk
s kružnicí $k(S)$.</td>
</tr>
</table>

	 $k(S) \cap l(O) = \emptyset \quad 0 < \lvert SO \rvert < r - p$ Kružnice $l(O)$ leží **uvnitř** kružnice $k(S)$.	
	 $k(S) \cap l(O) = \emptyset \quad \lvert SO \rvert = 0 \quad r \neq p$ Kružnice $l(O)$ je **soustředná** s kružnicí $k(S)$.	 $k(S) = l(O) \quad \lvert SO \rvert = 0 \quad r = p$ Kružnice $l(O)$ je **totožná** s kružnicí $k(S)$.

3.1.3 Geometrické konstrukce

V této učebnici budeme provádět všechny geometrické konstrukce jako tzv. euklidovské konstrukce[17]. Mezi nejzákladnější konstrukce patří konstrukce přímky, kružnice a označení bodů v místech, kde se protínají dvě křivky. Z těchto nejzákladnějších konstrukcí pak vycházejí všechny další jednodušší či složitější geometrické konstrukce.

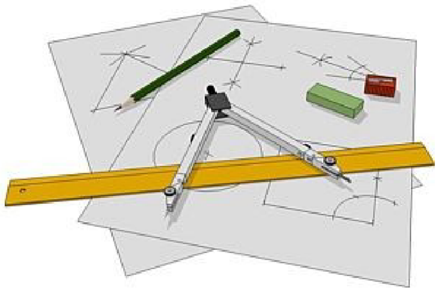
Pro naše konstrukce je nepřípustné používat stupnici na pravítku pro měření (např. takto „změřit“ střed úsečky), používat druhou stranu pravítka (např. pro narýsování rovnoběžky) či používat pravítko s ryskou (pro rýsování kolmice). Také nebudeme používat žádnou kombinaci dvou pravítek při rýsování. Oblíbená mezi učiteli je například konstrukce rovnoběžek pomocí rovného pravítka a pravítka s ryskou (trojúhelníkového tvaru), kdy posouváme jedno pravítko po hraně druhého, než dosáhneme příslušné vzdálenosti, kde chceme rovnoběžku narýsovat. Něco podobného není v *euklidovské konstrukci* možné a ani v této učebnici nebudeme podobné „zlepšováky“ používat.

17 ***Euklidovská konstrukce*** – Jedná se o konstrukci za použití POUZE ideálního **pravítka** a **kružítka**.

Stejně tak není možné používat kružítko pro přenášení vzdálenosti z jednoho místa na jiné. Například změřit kružítkem velikost nějaké úsečky a poté zvednout kružítko, přemístit ho do jiného bodu a tam narýsovat kružnici. Podobné konstrukce je třeba vyřešit jinak. V neposlední řadě také vůbec nebudeme používat „pomůcku“ zvanou *úhloměr*.

Všechny konstrukce, které budeme provádět, zvládneme pouze s ideálním **pravítkem** a **kružítkem**. Ideální pravítko zvládne narýsovat libovolnou přímku mezi dvěma body, ideální kružítko pak kružnici s daným středem o libovolném poloměru určeném druhým bodem.

PRAVÍTKO a KRUŽÍTKO
[straightedge and compass]



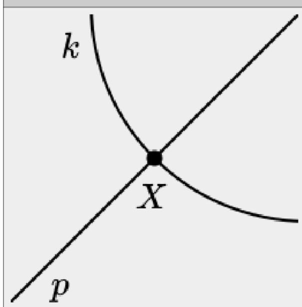
Pravítko je nekonečně dlouhé, má pouze jednu hranu a žádné měřící značky (stupnici).

Kružítko nemá žádné omezení při rýsování a je jím možné narýsovat kružnici o libovolně velkém či libovolně malém poloměru. Kružítkem není možné přenášet naměřenou vzdálenost z jednoho místa na jiné!

Následuje popis tří nejzákladnějších konstrukcí, z nichž je možné dále zkonstruovat libovolný geometrický útvar. Tyto konstrukce označil Euklides ve svých *Základech* jako tzv. **úkoly prvotné**, tedy takové konstrukce, ze kterých lze vytvořit cokoliv jiného.

Bod – body v geometrii vlastně nerýsujeme, pouze je označíme. Existují tam, kde se protínají dvě libovolné křivky (dvě přímky, dvě kružnice či přímka a kružnice). Každé místo, kterým prochází dvě nějaké křivky tak určuje nějaký bod.

Bod *[point]* – zápis konstrukce



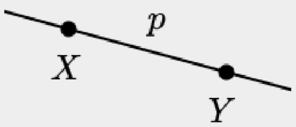
$X;\ \ X \in p \cap q$
Označíme bod X, který je průsečíkem přímek p a q.

$X;\ \ X \in p \cap k(S)$
Označíme bod X, který je průsečíkem přímky p a kružnice $k(S)$.

$X;\ \ X \in k(S) \cap l(O)$
Označíme bod X, který je průsečíkem kružnic $k(S)$ a $l(O)$.

Přímka – přímky rýsujeme pomocí *pravítka* a potřebujeme k tomu mít zadané dva body, které tuto přímku určují. Dva body (dvě místa), které určují směr přímky – z jednoho místa do druhého.

Přímka *[line]* – zápis konstrukce

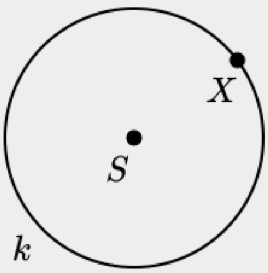


$p;\ \ X, Y \in p$
Sestrojíme přímku p, která prochází body X a Y.
Tuto konstrukci provádíme pomocí **pravítka**.

$p;\ \ p = \leftrightarrow XY$
Způsob zápisu konstrukce přímky, který možná znáte ze školy. V této učebnici jej však nebudeme používat!

Kružnice – kružnice rýsujeme pomocí *kružítka* a potřebujeme k tomu mít zadané dva body, které tuto kružnici určují. Jeden z bodů je střed kružnice, druhý je bod ležící na kružnici. Vzdálenost těchto bodů pak určuje vzdálenost všech bodů kružnice od jejího středu.

Kružnice *[circle]* – zápis konstrukce



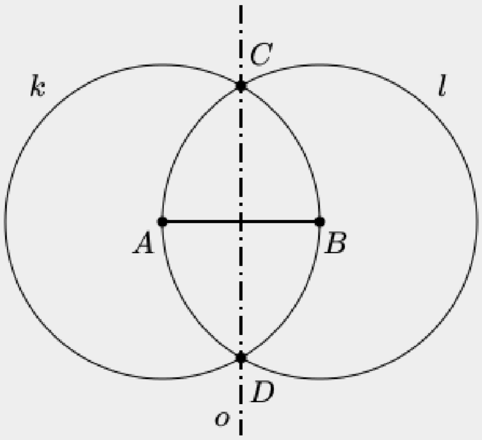
$k(S);\ \ X \in k(S)$
Sestrojíme kružnici k se středem S, která prochází bodem X.
Tuto konstrukci provádíme pomocí **kružítka**.

$k;\ \ k(S; |SX|)$
Způsob zápisu konstrukce kružnice známější ze škol. Opět jej nebudeme používat, protože zadáváme kružnici bodem, kterým prochází, a nikoliv jejím poloměrem!

3.1.3.1 Střed úsečky a kružnice

Mezi nejdůležitější konstrukce, které budeme používat, patří konstrukce osy úsečky. **Osa úsečky** má dvě skvělé vlastnosti, které se nám budou hodit při vytváření dalších složitějších konstrukcí. První vlastnost je, že osa úsečky půlí danou úsečku na dvě stejně dlouhé části, a tím pádem prochází středem této úsečky. Druhá vlastnost je, že osa úsečky je kolmá na danou úsečku. Osu tedy využijeme např. při sestrojování středu úsečky či kolmice k libovolné přímce.

Osa úsečky *[line segment bisector]* – zápis konstrukce



Je dána úsečka AB.

1. $k(A);\ \ B \in k(A)$
   Sestrojíme kružnici k se středem A,
   která prochází bodem B.
2. $l(B);\ \ A \in l(B)$
   Sestrojíme kružnici l se středem B,
   která prochází bodem A.
3. $C;\ \ C \in k(A) \cap l(B)$
   $D;\ \ D \in k(A) \cap l(B) \quad \wedge \quad D \neq C$
   Označíme body C a D,
   které jsou průsečíky kružnic $k(A)$ a $l(B)$.
4. $o;\ \ C, D \in o$
   Sestrojíme přímku o, která prochází body C a D.

Přímka o je hledaná **osa úsečky** AB.

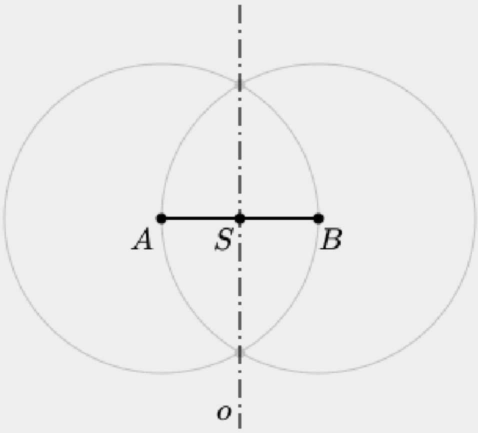
Ve třetím kroku zápisu konstrukce osy úsečky jsme použili znak $\wedge$, který slouží ke spojení dvou podmínek při konstrukci. První podmínkou bylo, aby bod D byl průsečíkem kružnic $k(A)$ a $l(B)$. Druhou podmínkou bylo, aby byl bod D různý od bodu C. Použitím znaku $\wedge$ říkáme, že je třeba, aby obě podmínky platily současně.

Konstrukce osy úsečky je velmi častá a používá se v mnoha dalších konstrukcích. Abychom nemuseli v zápisech těchto jiných konstrukcí používat celkem čtyř dalších kroků pro sestrojení osy úsečky, zavedeme pro ni jediný krok, který budeme značit takto:

$$\boxed{o;\ \ o \perp AB \quad \wedge \quad |Ao| = |Bo|}$$

Zápis říká, že budeme konstruovat přímku o, která je kolmá na úsečku AB a zároveň má stejnou vzdálenost od bodu A a od bodu B, tedy prochází středem úsečky AB. To jsou právě ty dvě vlastnosti, které má každá osa úsečky.

S pomocí osy úsečky už jednoduše sestrojíme **střed úsečky**. Je to místo, kde osa protíná danou úsečku.

Střed úsečky *[line segment midpoint]* – zápis konstrukce	
	Je dána úsečka AB. 1. $o;\ \ o \perp AB \quad \wedge \quad \lvert Ao \rvert = \lvert Bo \rvert$ Sestrojíme osu o úsečky AB. 2. $S;\ \ S \in AB \cap o$ Označíme bod S, který je průsečíkem úsečky AB a její osy o. Bod S je hledaný **střed úsečky** AB.

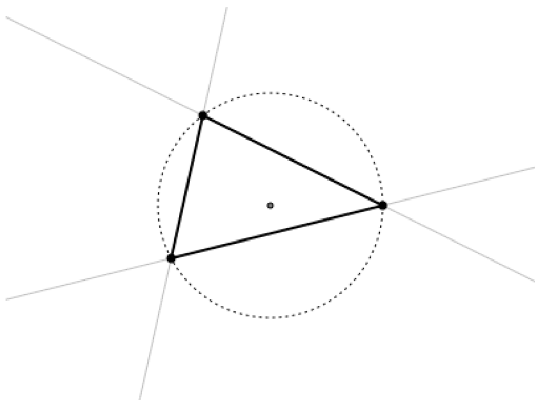
Zápis konstrukce opět zkrátíme do jediného kroku:

$$\boxed{S;\ \ S \in AB \quad \wedge \quad \lvert SA \rvert = \lvert SB \rvert}$$

Ze zápisu jsou patrné vlastnosti středu S úsečky AB. Tento bod se nachází na samotné úsečce AB (tedy neleží mimo ni, což by asi nikoho nenapadlo) a vzdálenost obou krajních bodů úsečky od středu je stejná (to je také zřejmé).

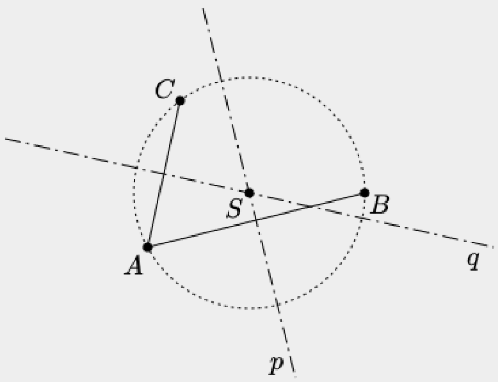
Dále budeme hledat **střed kružnice**. Pokud konstruujeme kružnici novou, musíme mít zadaný její střed. V případě, že již nějaká kružnice existuje, chceme umět tento její střed nalézt.

Libovolné **tři body**, které neleží na jedné přímce, VŽDY **leží na jediné kružnici**! Jak je to možné? Pokud máme tři body, které neleží na stejné přímce, můžeme mezi každými dvěma body vést úsečku. A každá taková úsečka leží na jiné přímce (viz obrázek níže). To znamená, že pokud tři různé body neleží na jedné přímce, tak vždy vytvoří nějaký trojúhelník. A každému trojúhelníku lze opsat kružnice. Taková kružnice pak prochází všemi třemi vrcholy tohoto trojúhelníku, tedy všemi třemi zadanými body.



Pokud tedy hledáme střed nějaké kružnice, stačí nám znát libovolné tři body, které na ní leží. Nemusíme ani mít narýsovanou celou křivku. Stačí jen libovolné tři body, o kterých víme, že leží vždy na nějaké kružnici a že tato kružnice bude jedna jediná. Z těchto tří zadaných bodů pak nalezneme střed kružnice tímto způsobem:

Střed kružnice *[center of circle]* – zápis konstrukce



Jsou dány tři různé body A, B a C.

1. AB
   Sestrojíme úsečku AB.
2. AC
   Sestrojíme úsečku AC.
3. $p;\ p \perp AB \quad \wedge \quad |Ap| = |Bp|$
   Sestrojíme osu p úsečky AB.
4. $q;\ q \perp AC \quad \wedge \quad |Aq| = |Cq|$
   Sestrojíme osu q úsečky AC.
5. $S;\ S \in p \cap q$
   Označíme bod S, který je průsečíkem os p a q.

Bod S je hledaný **střed kružnice** procházející body A, B a C.

Všimněte si, že v zápisu konstrukce středu kružnice jsou první dva kroky vlastně zbytečné. Pro nalezení středu kružnice, která prochází všemi třemi zadanými body potřebujeme najít průnik os dvou libovolných úseček mezi těmito body. Tyto úsečky ale k samotné konstrukci už nepotřebujeme. V zápisu jsme je použili pouze proto, že je názornější vytvářet osu úsečky, když je tato úsečka viditelná, než kdybychom měli zadané jen její krajní body. Každopádně z postupu konstrukce je můžeme vyřadit, protože jsou zbytečné (slouží jen k lepšímu pochopení) a zkrátit tak celkový postup jen na tři kroky. Tyto kroky pak můžeme shrnout v krok jediný, a to tímto zápisem:

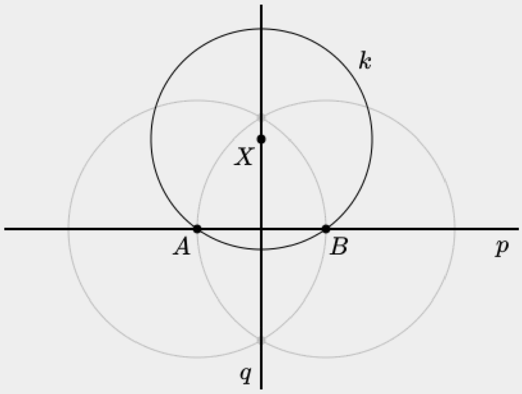
$$\boxed{S;\ |SA| = |SB| = |SC|}$$

Zápis konstrukce říká, že máme sestrojit bod S, který má stejnou vzdálenost od všech tří bodů A, B a C, což je přesně vlastnost středu kružnice procházející všemi těmito body.

3.1.3.2 Kolmice a rovnoběžka

Velmi často také budeme potřebovat sestrojit k zadané přímce její **kolmici** nebo rovnoběžku. A to ne jen tak libovolnou, ale takovou, která bude procházet nějakým zadaným bodem. I v těchto konstrukcích se nám bude velmi hodit již dříve zmiňovaná osa úsečky.

Kolmice z bodu *[perpendicular line]* – zápis konstrukce



Je dána přímka p a bod X.

1. $A;\ A \in p \quad \wedge \quad A \neq X$
   Na přímce p zvolíme libovolný bod A, který je různý od bodu X.
2. $k(X);\ A \in k(X)$
   Sestrojíme kružnici k se středem X, která prochází bodem A.
3. $B;\ B \in p \cap k(X) \quad \wedge \quad B \neq A$
   Označíme bod B, který je průsečíkem přímky p a kružnice $k(X)$ a je různý od bodu A.
4. $q;\ q \perp AB \quad \wedge \quad |Aq| = |Bq|$
   Sestrojíme osu q úsečky AB.

Přímka q je hledaná **kolmice** na přímku p procházející bodem X.

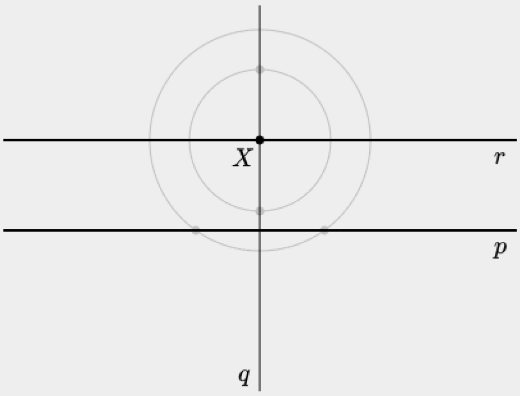
Uvedená konstrukce je stejná pro případ, kdy bod X neleží na přímce p, i pro případ, kdy bod X na přímce p leží. V případě, kdy $X \notin p$ je podmínka $A \neq X$ z prvního kroku konstrukce automaticky splněna a zdá se být zbytečná (což neplatí pro případ $X \in p$ kde je tato podmínka důležitá!).

Konstrukci opět zkrátíme na jediný krok tímto zápisem:

$$\boxed{q;\ q \perp p \quad \wedge \quad X \in q}$$

Zápis je velmi jednoduchý na čtení. Máme sestrojit přímku q, která je kolmá na přímku p a prochází bodem X.

Rovnoběžku k dané přímce procházející zadaným bodem sestrojíme pomocí dvou kolmic takto:

Rovnoběžka z bodu *[parallel line]* – zápis konstrukce	
	Je dána přímka p a bod X. 1. $q;\ q \perp p \quad \wedge \quad X \in q$ Sestrojíme kolmici q k přímce p procházející bodem X. 2. $r;\ r \perp q \quad \wedge \quad X \in r$ Sestrojíme kolmici r k přímce q procházející bodem X. Přímka r je hledaná **rovnoběžka** k přímce p procházející bodem X.

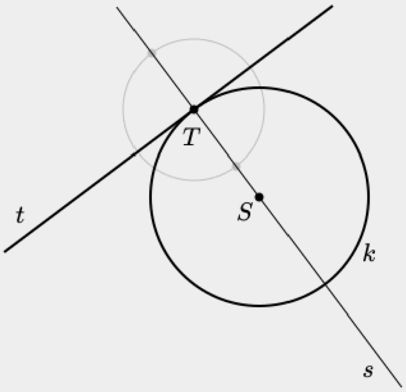
Zkrácený zápis v jednom kroku bude vypadat takto:

$$\boxed{r;\ r \parallel p \quad \wedge \quad X \in r}$$

Zápis se čte opět velmi jednoduše. Máme sestrojit přímku r, která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem X. To je vše ☺.

3.1.3.3 *Tečny ke kružnici*

Tečna ke kružnici je taková přímka, která má s kružnicí společný pouze jeden jediný bod. Ten se nazývá **bod dotyku** a obvykle se značí písmenem T. Bod dotyku je součástí konstrukce tečny a je třeba jej vždy pečlivě nalézt – ne jen tak jak se říká „střelit od oka“. Jednodušší konstrukce tečny je taková, když máme bod dotyku od začátku zadaný. **Tečna v bodě** dotyku existuje pouze jedna jediná a je vždy kolmá na přímku, která prochází bodem dotyku a středem kružnice.

Tečna v bodě *[tangent line]* – zápis konstrukce	
	Je dána kružnice $k(S)$ a bod dotyku T. 1. $s;\ S,T \in s$ Sestrojíme přímku s, která prochází středem kružnice $k(S)$ a bodem dotyku T. 2. $t;\ t \perp s \quad \wedge \quad T \in t$ Sestrojíme kolmici t k přímce s procházející bodem T. Přímka t je hledaná **tečna kružnice** $k(S)$ procházející bodem dotyku T.

Zkrácený zápis říká, že sestrojíme přímku t, která má s kružnicí $k(S)$ společný pouze jediný bod, a to bod dotyku T:

$$\boxed{t;\ \ t \cap k(S) = \{T\}}$$

Jiný případ konstrukce tečny je takový, že známe bod vně kružnice, kterým má tečna ke kružnici procházet. My pak musíme nalézt bod dotyku a tím nalezneme tuto tečnu, protože ta bude určena dvěma body – bodem dotyku a bodem, kterým má tečna procházet. K nalezení bodu dotyku nám pomůže ***Thaletova kružnice***.

Následuje náročná, ale důležitá část textu, ve které si vysvětlíme jak a proč nám při hledání bodů dotyku pomůže tzv. ***Thaletova kružnice***.

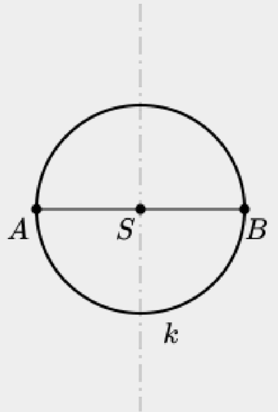
Pokud už *Thaletovu kružnici* znáte a víte, jak funguje, budete možná překvapeni. V této učebnice bude totiž *Thaletova kružnice* vysvětlena poněkud jiným způsobem než, jste možná zvyklí od vašeho učitele matematiky.

Je proto nutné číst následující odstavce pečlivě a bez spěchu a snažit se jim co nejlépe porozumět. *Thaletovu kružnici* budeme v učebnici často používat a je proto důležité jí co nejlépe pochopit!

Nejprve si vysvětlíme, jak *Thaletovu kružnici* sestrojit. Poté si řekneme, jaké speciální vlastnosti má a k čemu nám budou dobré. Každou *Thaletovu kružnici* rýsujeme ze dvou zadaných bodů. Úsečka mezi těmito body je průměr[18] budoucí *Thaletovy kružnice* – proto říkáme, že konstruujeme *Thaletovu kružnici* „nad průměrem“ nějaké úsečky. Při konstrukci kružnice tedy stačí jen nalézt střed této úsečky. Poloměr kružnice je pak vzdálenost od středu k jednomu ze dvou zadaných bodů. Konstrukce tedy není nijak složitá.

18 ***Průměr [diameter]*** – Jako průměr kružnice se označuje taková úsečka, která prochází středem této kružnice a oba její krajní body leží na této kružnici.

Thaletova kružnice – zápis konstrukce



Jsou dány body A a B.

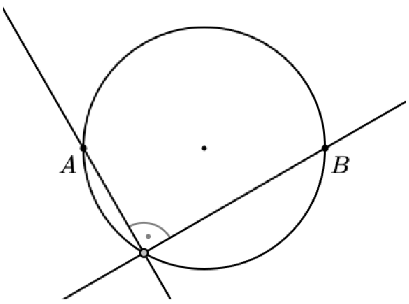
1. AB
   Sestrojíme úsečku AB.
2. $S;\ \ S \in AB \quad \wedge \quad |SA| = |SB|$
   Sestrojíme střed S úsečky AB.
3. $k(S);\ \ A, B \in k(S)$
   Sestrojíme kružnici k se středem S, která prochází body A a B.

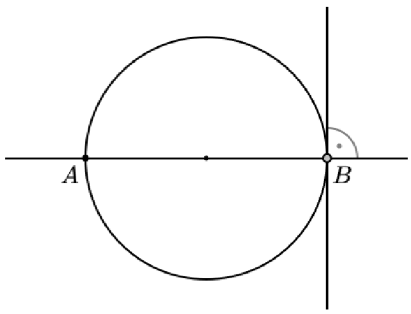
Kružnice $k(S)$ je hledaná ***Thaletova kružnice*** nad průměrem AB.

Při konstrukci předpokládáme, že jsou zadány pouze body A a B; příslušnou úsečku poté dorýsujeme. Je to vhodné z toho důvodu, že často samotnou úsečku (průměr kružnice) již dále nepotřebujeme a je tak jen pomocnou konstrukcí. Celou konstrukci *Thaletovy kružnice* opět zkrátíme v zápisu do jediného kroku. Použijeme pro to symbol, který se obvykle nepoužívá; je to řecké písmeno tau – τ. Tím budeme zapisovat konstrukci *Thaletovy kružnice*. Průměr, nad kterým kružnici sestrojujeme (tedy danou úsečku), pak zapíšeme malými písmeny za písmeno tau. Střed kružnice, který jsme při konstrukci našli, je samozřejmě uveden v závorce za názvem kružnice (jak je zvykem). Výsledný zápis vypadá takto:

$$\boxed{k(S);\ \ \tau_{AB}}$$

Thaletova kružnice má velmi důležitou a zajímavou vlastnost. Představme si tuto kružnici a na ní dva body A a B. Úsečka AB je průměrem této kružnice, stejně jako ve výše uvedeném postupu konstrukce. Nyní si zvolme na kružnici **libovolný bod** a narýsujme z něj dvě přímky – jednu procházející bodem A a druhou procházející bodem B. Platí pravidlo, že tyto přímky jsou na sebe VŽDY kolmé! Lépe si to představíme na následujících obrázcích (libovolný bod je vyznačen šedou barvou):





Co se ale stane, když zvolíme bod, který bude totožný s bodem A nebo bodem B? V tomto případě přece jedna z obou přímek vůbec nemůže existovat, protože abychom měli zadanou přímku, potřebujeme dva body a v našem případě oba tyto body splynuly v jeden!

Tento problém je velice zajímavý a budeme se s ním setkávat často. Dva body splynou v jeden jediný, ale přesto tyto „dva v jednom“ stále určují nějakou přímku! Podívejte se na obrázky výše. Bod, který krouží po kružnici, se pomalu přibližuje k bodu A nebo B. Přímka, která prochází tímto „kroužícím“ bodem a tím bodem, ke kterému se přibližuje se postupně „narovnává“ až do chvíle, kdy se oba body překryjí a přímka zůstane úplně „svisle“.

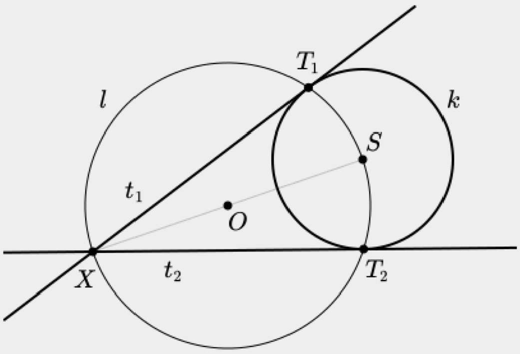
Co se vlastně stalo? Přímka, která byla po celou dobu pohybu šedého bodu pro kružnici sečnou této kružnice, se najednou stala její **tečnou**. A to přesně ve chvíli, kdy oba body, které ji určovaly, splynuly v jeden. Tato vlastnost, tento objev, bude časem velmi důležitý a je proto dobré si ho zapamatovat! Všimněte si také, že vlastnost *Thaletovy kružnice* platí i v tomto případě – obě přímky jsou na sebe stále kolmé. Jedna z nich je tečna kružnice v bodě A či B a druhá z nich prochází oběma těmito body. A jak už víme, tečna kružnice je kolmá na přímku procházející středem kružnice a bodem dotyku.

Vybaveni těmito znalosti se již můžeme pustit do konstrukce **tečny z bodu** ležícího mimo kružnici. Tedy, lépe řečeno, tečny ke kružnici procházející nějakým zadaným bodem, ležícím mimo tuto kružnici. Jak nám k tomu pomůže ona vlastnost *Thaletovy kružnice*? Na počátku máme zadanou pouze kružnici a bod ležící vně této kružnice. Máme sestrojit tečnu kružnice procházející tímto bodem. Abychom tečnu sestrojili, potřebujeme najít její bod dotyku s kružnicí. Pak už je vše jednoduché. Prostě vedeme přímku zadaným bodem a bodem dotyku, a to je naše tečna. Nejtěžší část konstrukce je tedy nalézt bod dotyku. A k tomu nám právě poslouží *Thaletova kružnice*.

Jak? No, víme, že tečna kružnice je kolmá na přímku, která prochází středem kružnice a bodem dotyku. Samotná tečna ale také prochází bodem dotyku, a navíc ještě bodem zadaným, který leží vně kružnice. Hledáme tedy takový bod, ze kterého vedou dvě přímky, které jsou na sebe kolmé. A to je přesně ta vlastnost *Thaletovy kružnice*, o které jsme mluvili. Sestrojíme tedy *Thaletovu kružnici* nad průměrem určeným dvěma body – středem zadané kružnice a zadaným bodem vně kružnice. Libovolný bod této *Thaletovy kružnice* pak má tu vlastnost, že když z něj vedeme přímky do středu zadané kružnice a do zadaného bodu, jsou na sebe tyto přímky kolmé, a to přesně potřebujeme. Nicméně náš bod dotyku musí z logiky věci ležet na zadané kružnici, takže nyní jen nalezneme průnik naší *Thaletovy kružnice* s kružnicí zadanou a máme bod dotyku ☺.

Když se podíváme na konstrukci této tečny v postupu níže, vidíme, že se obě kružnice protínají ve dvou bodech. Máme tedy celkem **dva body dotyku**. To je naprosto normální situace. Pokud je zadán bod vně kružnice, procházejí jím vždy dvě tečny a každá z nich je určena jiným bodem dotyku.

Tečny z bodu *[tangent lines]* – zápis konstrukce



Je dána kružnice $k(S)$ a bod X.

1. $l(O);\ \tau_{XS}$
   Sestrojíme *Thaletovu kružnici* $l(O)$ nad průměrem XS.
2. $T_1;\ T_1 \in k(S) \cap l(O)$
   $T_2;\ T_2 \in k(S) \cap l(O) \quad \wedge \quad T_2 \neq T_1$
   Označíme body T_1 a T_2, které jsou průsečíky kružnice $k(S)$ a *Thaletovy kružnice* $l(O)$.
   Body T_1 a T_2 jsou **body dotyku** hledaných tečen s kružnicí $k(S)$.
3. $t_1;\ X, T_1 \in t_1$
   $t_2;\ X, T_2 \in t_2$
   Sestrojíme přímku t_1, která prochází body X a T_1 a přímku t_2, která prochází body X a T_2.

Přímky t_1 a t_2 jsou hledané **tečny kružnice** $k(S)$ procházející bodem X s body dotyku T_1 a T_2.

Zkrácený zápis je podobný jako v případě tečny z bodu; říká, že sestrojíme přímky, které mají s kružnicí $k(S)$ společný jediný bod a zároveň procházejí bodem X:

$$\begin{aligned} &t_1;\ t_1 \cap k(S) = \{T_1\} \quad \wedge \quad X \in t_1 \\ &t_2;\ t_2 \cap k(S) = \{T_2\} \quad \wedge \quad X \in t_2 \quad \wedge \quad T_2 \neq T_1 \end{aligned}$$

Nyní, když jsme si zopakovali a prohloubili poznání základních geometrických objektů, jejich vlastností a konstrukcí, se již můžeme pustit do čtení této učebnice. V následujících kapitolách začneme pomalu a postupně pronikat do geometrického zobrazení známého jako **kruhová inverze**. Co je to geometrické zobrazení? Vrhněte se do čtení následujícího prologu a vše vám bude za chvíli jasné…

3.2 PROLOG: Zobrazení

3.2.1 O čem je tato učebnice?

Učebnice s názvem **Inverzní geometrie** je určena pro všechny žáky, kteří chtějí proniknout do tajů a záhad geometrie – zajímavé a nádherné, ale i náročné oblasti matematiky.

Geometrie je vůbec nejstarší matematickou disciplínou (společně s aritmetikou[19]). V této učebnici budeme společně zkoumat geometrická zobrazení, a to často jiným způsobem, než jste zvyklí ze základní školy. Odhalíme tak mnoho nových a vzrušujících geometrických pravidel a pouček, a poznáme, že geometrie je daleko zajímavější, než jak ji možná znáte ze školy.

O geometrických zobrazeních jste se už určitě učili, i když jste jim tak asi neříkali. Patří mezi ně např. osová nebo středová souměrnost. V první části této učebnice se postupně seznámíme se všemi známými zobrazeními. Prozkoumáme jejich vlastnosti a zjistíme, jak vlastně fungují. Ve druhé části se pak budeme věnovat novému a záhadnému zobrazení, které se nazývá **kruhová inverze**. Využijeme všech znalostí, které máme, a pokusíme se tomuto neznámému zobrazení přijít na kloub!

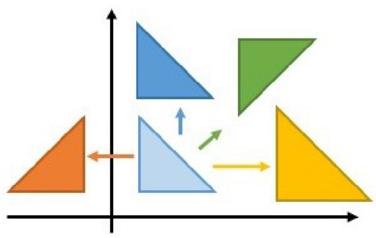
3.2.2 Co je to zobrazení?

Co to znamená něco **zobrazit**? Slovo zobrazení je vytvořeno ze slova **obraz**. Představme si tedy malíře, který maluje obraz.

19 ***Aritmetika a geometrie*** – Zjednodušeně řečeno je **aritmetika** ta část matematiky, která se zabývá ČÍSLY a počítání s nimi. **Geometrie** se naopak zabývá TVARY a jejich vlastnostmi.

Malíř se prostřednictvím barev a štětce snaží zachytit na plátno nějaký objekt. Tomuto objektu říkáme vzor, výsledné malbě pak říkáme obraz. Stejně tak geometr rýsuje pomocí pravítka a kružítka na papír nějaký geometrický objekt (např. úsečku, kružnici, trojúhelník apod.). Původní objekt se nazývá **vzor** a výsledný objekt se nazývá **obraz**. To je geometrické zobrazení.

ZOBRAZENÍ
[mapping]

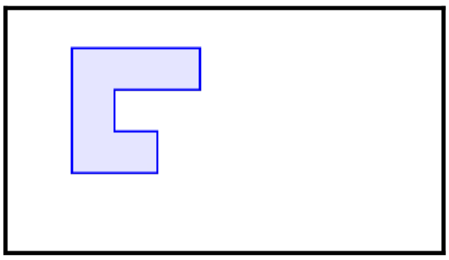


Zobrazení je proces, kdy se jeden geometrický objekt (např. trojúhelník) změní v objekt jiný.

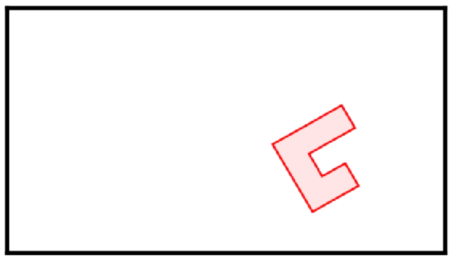
Vzor *[preimage]* je název pro původní, nezměněný objekt (v této učebnici většinou značen modrou barvou).

Obraz *[image]* je název pro výsledný, nějak změněný objekt (v této učebnici obvykle značen barvou červenou).

Ukažme si geometrické zobrazení na příkladu. Na prvním obrázku vidíme modrou barvou geometrický útvar (mnohoúhelník), který je vzorem. Na druhém obrázku je pak jeho obraz, tentokrát v červené barvě.

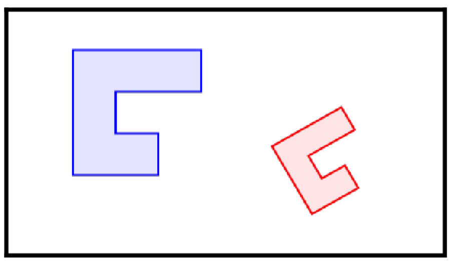


vzor



obraz

Často bývají vzor i obraz v jednom obrázku, což nám dovoluje lépe porozumět tomu, jak dané zobrazení funguje, jak bylo vytvořeno a jaké má vlastnosti. V tomto případě by tedy náš ukázkový příklad vypadal takto:



vzor + obraz

3.2.3 Druhy zobrazení

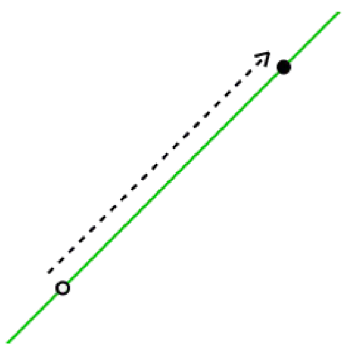
Existují dva základní druhy zobrazení geometrických objektů, které budeme zkoumat. Prvním druhem je zobrazení pohybu těchto objektů (tzv. **lokomoce**). Samotný pohyb se přímo zachytit nedá, protože geometrie, tak jak ji chápal Euklides, je geometrie strnulá, bez pohybu. Můžeme však zachytit výsledek tohoto pohybu. Vzorem zobrazení pak bude objekt před pohybem a obrazem zobrazení objekt po pohybu.

Dalším druhem je zobrazení souměrnosti (tzv. **involuce**). Cílem tohoto zobrazení je vytvořit podle vzoru takový obraz, aby byly oba tyto objekty vzájemně souměrné. Souměrnost dvou nebo i více objektů lahodí oku a je častým prvkem výtvarného umění. Některé objekty jsou souměrné samy sobě a tyto objekty a jejich souměrnosti budeme hledat.

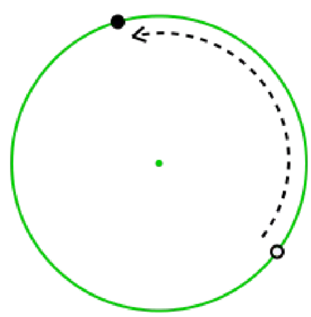
3.2.3.1 Zobrazení pohybu (lokomoce)

Pohybovat se, znamená přemístit se z jednoho místa na druhé neboli z jednoho bodu do bodu jiného. Takový pohyb z bodu do bodu se vždy uskuteční po nějaké **křivce**, která zachycuje všechna místa, přes které se pohyb vykonal (odborně se tato křivka nazývá *trajektorie*).

Jak jsme si již dříve uvedli, mezi nejjednodušší křivky patří přímka a kružnice. Pohyb bodu po těchto dvou křivkách znázorňují následující obrázky. Křivky, po kterých se body pohybují, jsou znázorněny zelenou barvou. Počáteční (výchozí) bod je znázorněn bíle, koncový (cílový) bod je znázorněn černě. Směr pohybu udává čárkovaná šipka.

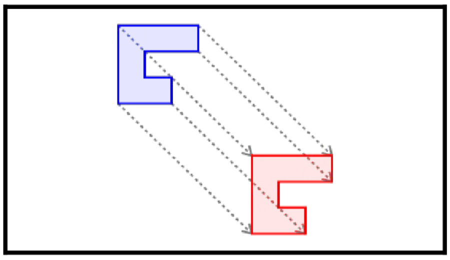


pohyb po přímce

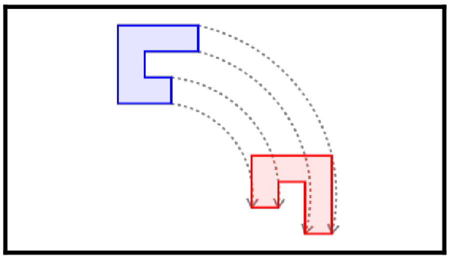


pohyb po kružnici

Pohyb po přímce se nazývá **posunutí**, pohyb po kružnici se nazývá **otočení**. Jak již bylo řečeno dříve, vzorem takového zobrazení je geometrický objekt před pohybem a obrazem je pak geometrický objekt po dokončení pohybu. Na následujících obrázcích jsou ukázány příklady těchto dvou zobrazení. Vzor je znázorněn modrou barvou, obraz je znázorněn barvou červenou.



posunutí

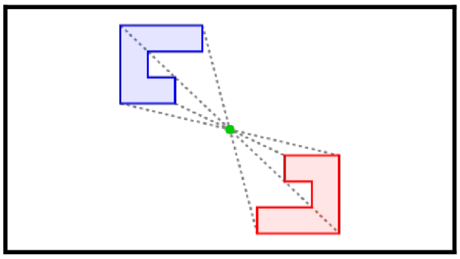


otočení

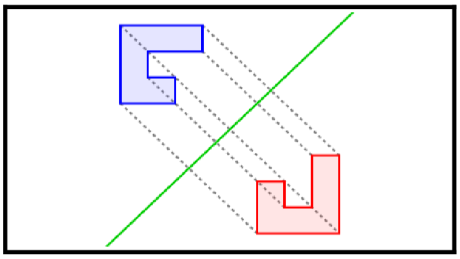
3.2.3.2 Zobrazení souměrnosti (involuce)

Dva geometrické objekty jsou navzájem souměrné vždy podle nějakého pravidla (*kritéria*). Toto pravidlo často určuje nějaký jiný geometrický objekt. My známe tři základní objekty: bod, přímku a kružnici. Souměrnosti, kterými se budeme dále zabývat, budou vycházet z těchto tří základních objektů.

Ze základní školy bychom měli znát dvě z těchto základních souměrností. První je souměrnost podle bodu. Známe ji též pod názvem souměrnost podle středu nebo *středová souměrnost*. V této učebnici ji budeme nazývat jednoduše **souměrnost**. Druhá je souměrnost podle přímky. Tu známe jako souměrnost podle osy nebo *osovou souměrnost*. My ji budeme nazývat **zrcadlení**, protože zobrazuje své vzory podobně, jako zrcadlo zobrazuje náš odraz. Příklady těchto dvou známých zobrazení uvádíme na následujících obrázcích.

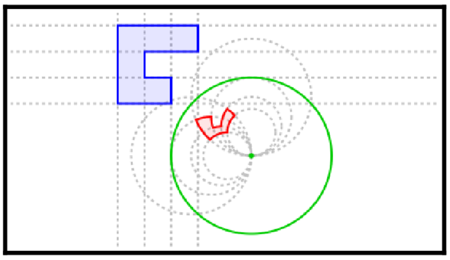


souměrnost



zrcadlení

Posledním zobrazením je souměrnost podle kružnice. Je to ono tajemné zobrazení, které se nazývá kruhová inverze a v této učebnici jí budeme říkat prostě jen inverze. Na obrázku níže se můžete podivovat nad tím, jaký obraz takové zobrazení vytvoří a pomalu se začít těšit na to, že po dočtení učebnice budete toto zobrazení chápat a rozumět mu ☺.



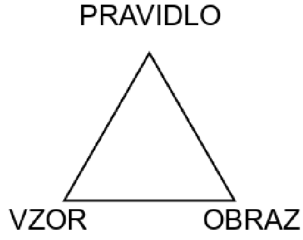
inverze

3.2.4 Druhy úloh

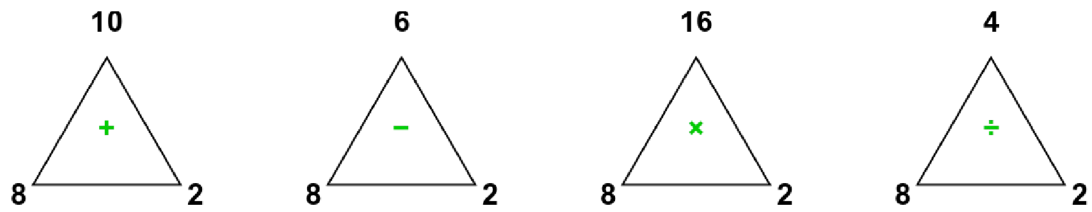
Při zkoumání různých geometrických zobrazení se můžeme setkat s celkem třemi různými druhy konstrukčních úloh, které se naučíme řešit:

1. Je zadán *vzor* a *pravidlo*, podle kterého se zobrazuje. Úkolem je zkonstruovat **obraz** tohoto vzoru.
2. Je zadán *obraz* a *pravidlo*, podle kterého se zobrazuje. Úkolem je najít **vzor** tohoto obrazu.
3. Je zadán *vzor* i *obraz* a známe druh zobrazení. Úkolem je určit **pravidlo** tohoto zobrazení.

Tuto trojici úloh můžeme symbolicky znázornit trojúhelníkem, který vidíte pod tímto textem. Pokud v něm rukou zakryjme dvojici pojmů, které máme zadány, zbylý pojem bude tím, který máme v úloze vyřešit (najít či zkonstruovat). Jinými slovy: pokud si zakryjeme jeden z pojmů, který máme hledat (např. *vzor*), pak zbylé dva potřebujeme mít zadané (v tomto případě *obraz* a *pravidlo*), abychom ten hledaný mohli najít.



Ještě si ukážeme zajímavou souvislost mezi aritmetikou a geometrií. Stejně jako existuje symbolický trojúhelník pro geometrická zobrazení, existují podobné trojúhelníky pro aritmetické operace sčítání, odčítání, násobení a dělení. Můžeme tedy v těchto dvou, na první pohled naprosto odlišných, matematických úkonech vidět jisté společné vlastnosti. Ukažme si příklady trojúhelníků pro ***aritmetické operac****e (spodní čísla jsou ty, mezi kterými operace působí, horní číslo je výsledek operace):*



Tyto trojúhelníky můžeme použít pro řešení matematických rovnic. Zakrytím jednoho z vrcholů trojúhelníka získáme neznámou v rovnici. Ukažme si to na konkrétním příkladě. Např. trojúhelník s odčítáním nám dává tento příklad: $8-2=6$. *Zakrytím čísla 8 získáme tuto rovnici:* $x-2=6$. *Zakrytím čísla 2 tuto rovnici:* $8-x=6$ *a zakrytím čísla 6 tuto rovnici:* $8-2=x$. *Symbolický trojúhelník u aritmetických operací je tedy velmi podobný trojúhelníku s geometrickým zobrazením – zakrytím jednoho vrcholu trojúhelníku získáme u geometrického zobrazení něco jako „rovnici“, kterou máme vyřešit. Hledání řešení rovnice je tedy v geometrii podobné hledání vzoru, obrazu nebo pravidla nějakého zobrazení* ☺.

3.2.5 Typy zobrazení

Existují dva typy geometrických zobrazení. Zobrazení prvního typu se nazývají **lineární zobrazení**. Název pochází z latinského slova *LINEA*, což v překladu znamená čára; v matematickém pojetí je to *úsečka*. Tato zobrazení mají tu vlastnost, že tzv. zachovávají úsečky. To znamená, že úsečka se zobrazí opět na úsečku. Tato zobrazená úsečka může být posunutá, otočená, zmenšená či zvětšená, ale stále to bude úsečka. To můžeme vidět na výše uvedených příkladech zobrazení, jako jsou posunutí, otočení, souměrnost či zrcadlení. Vzorem v těchto příkladech je mnohoúhelník, který je složen z několika úseček a výsledným obrazem je opět mnohoúhelník složený z úseček.

Lineární zobrazení mají tuto skvělou vlastnost, která je důležitá a budeme ji hodně používat – úsečky se zobrazí opět na úsečky a také přímky se zobrazí opět na přímky (protože úsečka je část přímky, tak se i přímka musí zobrazit na přímku – jinak by to nefungovalo). Oproti tomu existuje druhý typ zobrazení a ta se nazývají **kruhová zobrazení**. Jejich příkladem je už zmiňovaná inverze. Kruhová zobrazení úsečky nezachovávají. To znamená, že úsečka se může, ale také nemusí zobrazit na jinou úsečku. To krásně vidíme na výše uvedeném příkladu inverze. Vzorem je mnohoúhelník složený z úseček, ale obrazem je nějaký pokroucený divný tvar, který rozhodně není složený z úseček.

3.2.6 Mnohoúhelníky

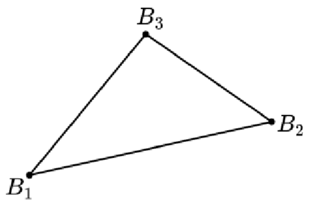
V následujících kapitolách nejprve podrobně prozkoumáme všechny vlastnosti lineárních zobrazení, protože jsou jednoduché a mnoho z nich už známe ze základní školy. Tím získáme jisté zkušenosti s prací s těmito zobrazeními. Ty pak zužitkujeme v dalších kapitolách, kde budeme zkoumat onu záhadnou inverzi, která je zobrazením kruhovým.

Ještě před tím se však pojďme na chvíli zabývat mnohoúhelníky. Proč? Mnohoúhelníky jsou nejčastější geometrické objekty, které používáme. Proto je potřeba co nejlépe porozumět tomu, jak se chovají v nejrůznějších zobrazeních. Nejprve se ale zamysleme nad tím, co to vlastně mnohoúhelník je…

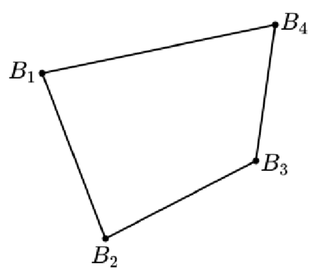
Možná si pamatujete, co to mnohoúhelník je, možná ne. Každopádně zkusme se nad tím zamyslet trochu jiným způsobem, než je obvyklé. Mnohoúhelník je složen z několika bodů. Tyto body jsou nějak uspořádány – když si zvolíme jeden z bodů, víme, který bod se nachází „před ním“, a který následuje „po něm“. Můžeme si všechny body označit písmenem B a každému přiřadit číslo, takže libovolný n-úhelník můžeme zapsat jako $B_1B_2\ldots B_n$.

Každý bod mnohoúhelníku je spojen úsečkou se svými sousedními body; poslední bod je pak spojen s bodem prvním. Máme tedy celkem n úseček: B_1B_2, B_2B_3, …, B_nB_1. Každému mnohoúhelníku lze určit jeho obvod, což je součet délek všech jeho úseček (říkáme jim *strany*). Vzorec pro výpočet obvodu je: $o = |B_1B_2| + |B_2B_3| + \ldots + |B_nB_1|$. Dále můžeme určit obsah mnohoúhelníka, což je část roviny uzavřená jeho stranami.

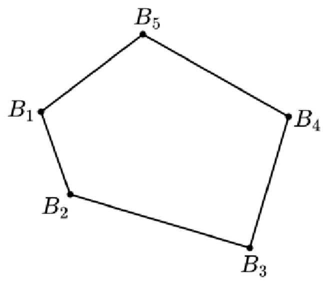
Pokud je mnohoúhelník složen ze 3 bodů, mluvíme o trojúhelníku, v případě 4 bodů o čtyřúhelníku, je-li složen z 5 bodů o pětiúhelníku atd. Když jsou všechny jeho úsečky stejně dlouhé (mají stejnou velikost) a všechny úhly mezi jednotlivými úsečkami mají také stejnou velikost, jedná se o tzv. **pravidelné mnohoúhelníky**.



trojúhelník



čtyřúhelník



pětiúhelník

Známe čtyřúhelník (např. čtverec, obdélník, lichoběžník, atd.), trojúhelník (např. rovnostranný, rovnoramenný, pravoúhlý, atd.); a co třeba takový dvojúhelník? Počkat, to je přece nějaký nesmysl, ne?! Nic takového jako dvojúhelník neexistuje! Nebo ano??

Ve skutečnosti nic takového jako dvojúhelník opravdu neexistuje! Ale když se zamyslíme nad tím, co jsme si dříve řekli, že je mnohoúhelník, tak by to možná zase takový nesmysl být nemusel. Mnohoúhelník (n-úhelník) má n bodů a mezi každým z bodů vede úsečka. Co kdyby měl pouze 2 body? V tom případě máme dva body a mezi nimi úsečku. Dva body a úsečka, to je prostě a jednoduše **úsečka**! Náš „dvojúhelník" je tedy prostá úsečka.

No, nezní to úplně přesvědčivě, že? Především úsečka nemá žádné úhly, takže název dvojúhelník je vcelku nesmyslný. Navíc můžeme sice určit obvod podle vzorce uvedeného výše – bude to dvojnásobek délky této úsečky (hmmm, to je docela zajímavé…) – ale obsah už určit nezvládneme, ten bude nulový. To uváděl už Euklides ve svých *Základech* jako jednu ze zásad: *„Dvě samotné úsečky žádné místo neohraničují"*.

A co takhle jednoúhelník? Ale tak to už snad ne… Nebo ano? Vážně?? Ano! Obdobným způsobem můžeme přemýšlet i o „jednoúhelníku". Co to bude? Jeden bod, který je spojen úsečkou s… Moment! S čím je spojen? Sám se sebou?? Tady už to nějak celé přestává dávat smysl. Žádné úhly, žádný obsah, dokonce ani žádné úsečky a tím pádem ani obvod. Co to tedy je, pokud tomu máme vůbec dát nějaký smysl? Je to prostě a jednoduše sám tento jediný **bod**. Nic víc.

„dvojúhelník"
úsečka

„jednoúhelník"
bod

K čemu je to ale všechno dobré? Tím, že si mezi mnohoúhelníky zařadíme i úsečku a bod, se v budoucnu velmi jednoduše naučíme zobrazovat u lineárních zobrazení všechny existující mnohoúhelníky. Opravdu?! Ano ☺. Ale jak??

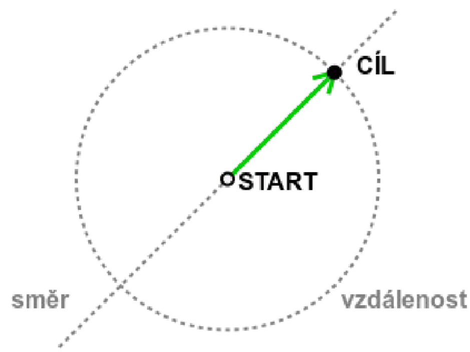
Mnohoúhelníky jsou jen body a úsečky. U lineárních zobrazení víme, že obraz nějaké úsečky je opět úsečka. Zobrazíme-li tedy libovolné dva body A a B, které jsou krajními body nějaké úsečky, pak obraz této úsečky bude úsečka vedená body A' a B' (A' je obrazem bodu A a B' je obrazem bodu B). A to je vše! Abychom v lineárním zobrazení dostali obraz úsečky, zobrazíme její krajní body a vedeme mezi nimi úsečku. To samé platí pro libovolný n-úhelník. Zobrazíme všechny jeho body a poté je všechny spojíme úsečkami.

3.3 1. KAPITOLA: Posunutí

3.3.1 Pohyb po přímce

Posunutí je pohyb z jednoho bodu do druhého po přímce. Křivka, kterou tento bod při pohybu opíše je **úsečka** (což je část přímky), a je to nejkratší možná křivka mezi dvěma body. Mezi dvěma libovolnými body existuje vždy jen **jediná** úsečka, zato jiných křivek mezi dvěma body existuje mnoho. To je také důvod, proč je úsečka ze všech těchto křivek nejkratší – je totiž jediná.

Pokud se chceme pohybovat nejkratším způsobem mezi dvěma body (označme si je například START a CÍL), musíme se pohybovat určitým **směrem** o určitou **vzdálenost**. Jak již víme, směr nám udává nějaká přímka – v tomto případě přímka procházející oběma body. Vzdálenost je potom určena kružnicí – její střed bude v bodě START a bodem CÍL bude kružnice procházet. Poloměr této kružnice pak bude vzdálenost obou zadaných bodů. Vše názorně ukazuje tento obrázek:



3.3.1.1 Orientovaná úsečka

Úsečka vedoucí z bodu START do bodu CÍL se nazývá **orientovaná úsečka**. Proč orientovaná? To znamená, že jeden z jejich krajních bodů je bod, v němž úsečka „začíná“ (také se mu říká *počáteční bod*) a druhý krajní bod je ten, v němž úsečka „končí“ (nebo též *koncový bod*). Orientace úsečky je na obrázku znázorněna šipkou, která vždy míří do koncového bodu.

Ke každé orientované úsečce existuje vždy úsečka opačně orientovaná. Je to naprosto stejná úsečka, které má stejné krajní body, ale původní počáteční bod je nyní koncový a původní koncový bod je nyní počáteční. To znamená, že je to stejná úsečka, ale její šipka míří opačným směrem. Na obrázku výše by opačně orientovaná úsečka začínala v bodě CÍL a směřovala by do bodu START, kam by mířila její šipka.

Nyní pozor! Orientovaná úsečka a úsečka k ní opačně orientovaná mají obě stejný směr. Cože? Na první pohled to zní jako nesmysl, protože každá „šipka“ ukazuje úplně jinam, takže se zdá, že směr má každá jiný. Ale směr je v geometrii dán přímkou, na které tyto úsečky leží. A tak i když každá z úseček míří na opačnou stranu, obě dvě leží na stejné přímce a mají tedy stejný směr! Říkáme, že jsou opačně orientované, ale směr mají stejný.

Pokud si vzpomeneme na symbolický trojúhelník geometrického zobrazení (VZOR – PRAVIDLO – OBRAZ), pak právě *orientovaná úsečka* je tímto pravidlem, které říká, jak máme původní *vzor* zobrazit na výsledný *obraz*.

Pro zadání pravidla posunutí nám tedy stačí **2 body**. Tyto dva body udávají orientovanou úsečku (její počáteční a koncový bod). Tato úsečka pak udává směr pohybu (protože leží na přímce, která tento směr udává) a též vzdálenost pohybu (velikost úsečky je poloměrem kružnice udávající tuto vzdálenost).

ORIENTOVANÁ ÚSEČKA
[directed line segment]

Orientovaná úsečka je úsečka, u níž je rozlišeno, který z jejích krajních bodů je tzv. **počáteční bod *[initial point]***, a který je **koncový bod *[terminal point]***.

Značí se dvojicí velkých písmen a šipkou nad nimi, např.: $\overrightarrow{AB}$. První písmeno udává počáteční bod, druhé bod koncový.

3.3.2 Zobrazení bodu

Základem každého lineárního zobrazení je umět nalézt **obraz** libovolného **bodu** pokud známe jeho vzor a pravidlo, které určuje, jakým způsobem máme zobrazení provést. Toto je velice důležitá myšlenka! Proč? Z prologu víme, že lineární zobrazení zachovává úsečky. To znamená, že obrazem úsečky je jiná úsečka, ale stále úsečka. Nestane se, aby se úsečka v lineárním zobrazení změnila v jinou křivku!

Většina geometrických objektů, se kterými se obvykle pracuje, je složena z úseček – čtverce, obdélníky, trojúhelníky, mnohoúhelníky apod. Pokud budeme umět zobrazit úsečky, budeme automaticky umět zobrazit i tyto objekty, protože jsou prostě a jednoduše složeny z úseček. Nemusíme se však starat o to, jak se budou zobrazovat všechny body nějaké úsečky. Každá úsečka má dva důležité body – **krajní body**. Stačí nám zobrazit oba krajní body a pak víme, že výsledná úsečka je úsečka mezi těmito body.

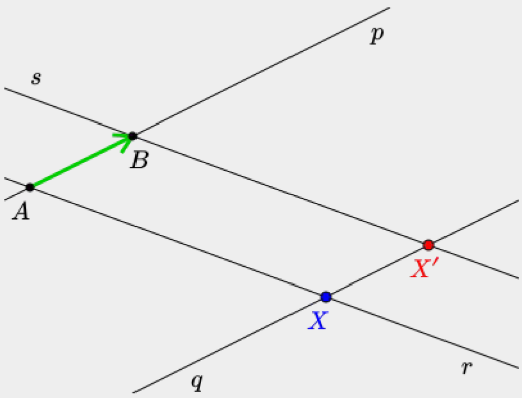
Kdyby zobrazení nebylo lineární, krajní body by nestačily – nikdy bychom si nebyli jisti, kam se zobrazí ostatní body úsečky, protože by nemusely nutně ležet mezi nimi. Mohly by ležet na nějaké jiné křivce. Ale protože zobrazení je lineární, stačí nám najít pouze krajní body úsečky a práce je hotová. Nejdůležitější je tedy umět v každém lineárním zobrazení nalézt obraz bodu! Pojďme na to…

3.3.2.1 Konstrukce obrazu

Předpokládejme, že máme zadaný bod X a orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$. Je zvykem pojmenovat obraz každého geometrického objektu stejně, jako byl pojmenován jeho vzor a připojit k němu čárku $'$. Obraz bodu X bude tedy označen jako X'.

Abychom našli obraz bodu, stačí jednoduše přemístit orientovanou úsečku tak, aby byl její počáteční bod totožný se vzorem. Obraz vzoru pak bude totožný s koncovým bodem orientované úsečky. Protože v euklidovské geometrii není pohyb, musíme „přemístění" orientované úsečky provést pomocí rovnoběžníku[20]:

Posunutí bodu – zápis konstrukce



Je dán bod X a orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$.

1. $p;\ A, B \in p$
   Sestrojíme přímku p, která prochází body A a B.
2. $q;\ q \parallel p \ \wedge\ X \in q$
   Sestrojíme rovnoběžku q k přímce p procházející bodem X.
3. $r;\ A, X \in r$
   Sestrojíme přímku r, která prochází body A a X.
4. $s;\ s \parallel r \ \wedge\ B \in s$
   Sestrojíme rovnoběžku s k přímce r procházející bodem B.
5. $X';\ X' \in s \cap q$
   Označíme bod X', který je průsečíkem přímek s a q.

Bod X' je hledaný **obraz** bodu X v **posunutí** podle orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$.

Jako obvykle celou konstrukci shrneme do jediného kroku:

$$\boxed{X';\ T_{\overrightarrow{AB}}[\ X\ ]}$$

20 ***Rovnoběžník [parallelogram]*** – Rovnoběžník (nebo také **kosodélník**) je čtyřúhelník, který má protilehlé strany rovnoběžné. Důležité je, že tyto protilehlé strany mají vždy stejnou délku. Speciálním případem kosodélníku může být *kosočtverec* (má všechny strany stejně dlouhé), *obdélník* (vedlejší strany má na sebe kolmé) nebo *čtverec* (má všechny strany stejně dlouhé i na sebe kolmé).

Zápis říká, že bod X' je obrazem bodu X v zobrazení T, které je určeno orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$. Víme, že zobrazení T je posunutí. Proč se ale označuje zrovna tímto písmenem? Důvodem je to, že zobrazení posunutí se také často nazývá slovem **translace** (původem z latiny), a proto se posunutí značí písmenem T.

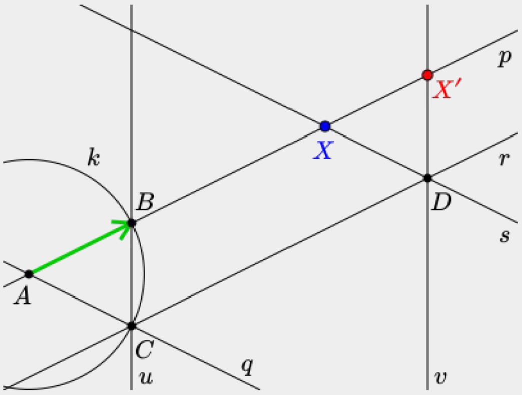
> Vraťme se ale ještě na chvíli zpět k uvedené konstrukci. Vypadá to, že je zcela v pořádku a funguje, ale není to tak docela pravda. Zkusme si ještě jednou projít všechny kroky. Není možné, že při nějaké „nešikovné“ poloze zadaného bodu a orientované úsečky narazíme na problém, který celou konstrukci zničí? Je tomu vskutku tak! Zkuste nad tím chvíli dumat, případně tento problém objevit a až pak pokračovat ve čtení dalších řádků.

Problém se objeví již ve druhém kroku konstrukce a táhne se pak dál v kroku třetím a čtvrtém. Stane se tak tehdy, když bude bod X ležet na stejné přímce jako orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$, tedy na přímce p. V tom případě rovnoběžka q, kterou ve druhém kroku konstruujeme, bude totožná s přímkou p. Stejně tak s ní budou totožné i přímky r a s, což povede k tomu, že se nám nakonec nepodaří bod X' vůbec sestrojit ☹.

> Tři body, které všechny náleží jedné přímce (v předchozím odstavci to byly body A, B a X – náleželi přímce p) nazýváme slovem **kolineární**, což doslova znamená *„ležící na jedné přímce“*.

Tento problém vyřešíme následujícím trikem. Orientovanou úsečku libovolně otočíme kolem jejího počátečního bodu; tím změníme její směr. Takto otočenou úsečku již můžeme přesunout pomocí rovnoběžníku a po přesunutí ji zase „vrátíme“ zpět do původního směru. Vše je jasně popsáno v následujícím postupu:

Posunutí bodu (kolineární) – zápis konstrukce



Je dán bod X a orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$.
Body A, B a X jsou kolineární.

1. $p;\ A, B, X \in p$
   Sestrojíme přímku p, která prochází kolineárními body A, B a X.
2. $k(A);\ B \in k(A)$
   Sestrojíme kružnici k se středem A, která prochází bodem B.
3. $C;\ C \in k(A) \quad \wedge \quad C \notin p$
   Na kružnici $k(A)$ zvolíme libovolný bod C, který neleží na přímce p.
4. $q;\ A, C \in q$
   Sestrojíme přímku q, která prochází body A a C.
5. $r;\ r \parallel p \quad \wedge \quad C \in r$
   Sestrojíme rovnoběžku r k přímce p procházející bodem C.
6. $s;\ s \parallel q \quad \wedge \quad X \in s$
   Sestrojíme rovnoběžku s k přímce q procházející bodem X.
7. $D;\ D \in r \cap s$
   Označíme bod D, který je průsečíkem přímek r a s.
8. $u;\ B, C \in u$
   Sestrojíme přímku u, která prochází body B a C.
9. $v;\ v \parallel u \quad \wedge \quad D \in v$
   Sestrojíme rovnoběžku v k přímce u procházející bodem D.
10. $X';\ X' \in p \cap v$
    Označíme bod X', který je průsečíkem přímek p a v.

Bod X' je hledaný **obraz** bodu X v **posunutí** podle orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$.

Tím, že jsme na kružnici $k(A)$ zvolili libovolný bod C, který ovšem neleží na přímce p, jsme vlastně vytvořili novou orientovanou úsečku AC, která má s orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ stejnou velikost, ale jiný směr! Tuto novou orientovanou úsečku jsme posunuli pomocí rovnoběžníku na úsečku XD. Tu jsme pak pomocí rovnoběžek u a v „vrátili" zpět do původního směru daného přímkou p.

Jako u předchozího postupu konstrukce můžeme vše shrnout do jediného kroku. Ten bude značený stejně jako u předchozí konstrukce. Ze zápisu konstrukce tedy nebude jasné, který ze dvou postupů jsme použili. To už bude záležet na konkrétní situaci a na tom, zda je zadaný bod kolineární s orientovanou úsečkou či nikoliv.

> *i* Nyní to vypadá, že je již vše vyřešeno a problém zažehnán. Avšak opět může nastat situace, kdy „šikovná" poloha zadaného bodu a orientované úsečky celou konstrukci zničí. Tentokrát se však, na rozdíl od předchozího případu, vše usnadní ☺. Vraťme se tedy zpět ke druhé konstrukci translace bodu a zkuste přijít na to, jaká kolineární poloha bodu a orientované úsečky může celou konstrukci výrazně usnadnit. Pak pokračujte čtením následujících řádků.

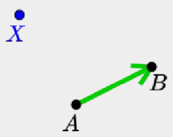
Problém nyní nastává v kroku č. 6. Pokud je totiž bod X totožný s bodem A, budou i přímky s a q totožné a stejně tak i body D a C i přímky u a v. Celá konstrukce pak bude v podstatě zbytečná, protože konstrukce má za cíl přesunout orientovanou úsečku tak, aby její počáteční bod byl totožný se vzorem. A to je přesně tato situace! Hledaný obraz X' bude tím pádem totožný s bodem B a není tak potřeba nic konstruovat.

3.3.2.2 Řešení základních úloh

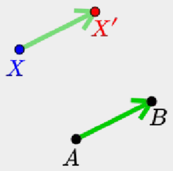
Nyní vyřešíme tři základní druhy úloh související s translací (posunutím) bodu. Úlohy jsou poměrně jednoduché, ale velice užitečné. Pokud totiž umíme vyřešit úlohy s body, umíme vyřešit úlohy s úsečkami a tím pádem také úlohy se všemi mnohoúhelníky!

Následující tři úlohy si nejprve sami promyslete. Až si budete jisti jejich řešením, ověřte si správnost vašeho řešení ☺. V případě, že jste úlohu vyřešili chybně, zastavte se na chvíli a zkuste uvažovat o tom, kde jste při řešení udělali chybu.

Hledání obrazu bodu



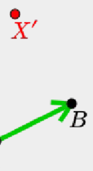
Je dán bod X a orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$.
Jakým způsobem nalezneme bod X', který je obrazem v posunutí podle dané orientované úsečky?



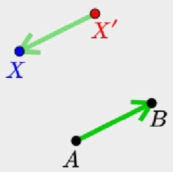
Řešení je jednoduché. Přesuneme orientovanou úsečku tak, aby byl její počáteční bod A totožný se vzorem X. Koncový bod B orientované úsečky pak bude totožný s hledaným obrazem X'.

Zápis konstrukce: $X';\ T_{\overrightarrow{AB}}[\,X\,]$

Hledání vzoru bodu



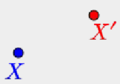
Je dán bod X', který je obrazem v posunutí podle orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$.
Jakým způsobem nalezneme bod X, který je vzorem daného bodu?



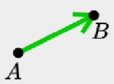
Hledáme vzor zobrazení, ale orientovaná úsečka nám říká, jak se dostaneme od vzoru k obrazu. Musíme tedy postupovat opačným způsobem. Jestliže jsme se od vzoru k obrazu dostali posunutím z počátečního bodu do koncového bodu orientované úsečky, pak se od obrazu ke vzoru dostaneme posunutím z koncového bodu do počátečního bodu orientované úsečky. To je však **opačně orientovaná úsečka**! Při hledání vzoru X tedy zobrazíme obraz X' v posunutí pomocí opačně orientované úsečky $\overrightarrow{BA}$.

Zápis konstrukce: $X;\ T_{\overrightarrow{BA}}[\,X'\,]$

Hledání orientované úsečky



Jsou dány body X a X', které jsou vzorem a obrazem v posunutí podle orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$.
Jakým způsobem nalezneme tuto orientovanou úsečku?



Řešení je opět triviální (velice jednoduché). U translace musí platit, že vzor je počátečním bodem a obraz koncovým bodem orientované úsečky, která charakterizuje toto zobrazení. Proto je orientovaná úsečka $\overrightarrow{XX'}$ totožná s orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$.

Zápis konstrukce: $\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XX'}$

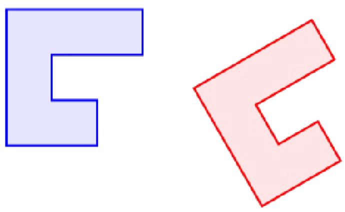
3.3.3 Zkoumání zobrazení

Nyní, když už umíme zobrazovat jednotlivé body, je načase se přesunout k větším geometrickým objektům. Nebudeme zatím řešit, jak tyto geometrické objekty sestrojit, ale budeme se zabývat tím co se s objekty děje, když se v daném zobrazení změní na svůj obraz.

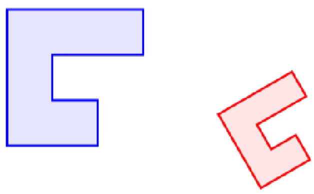
Je načase pokusit se prozkoumat různé vlastnosti daného zobrazení. Seznam zkoumaných vlastností je uveden níže. V této části učebnice nespěchejte! Snažte se každou vlastnost opravdu pečlivě prozkoumat a pochopit. Cílem totiž není dozvědět se co nejdřív odpověď na níže kladené otázky, ale vlastním uvažováním a praktickým zkoušením typu pokus/omyl přijít na to, jak dané zobrazení funguje. **Proces vlastního objevování je zde daleko důležitější než výsledné odpovědi!**

Zachovává posunutí VELIKOST geometrického objektu?

Zachování velikosti znamená, že se zachovávají délky úseček a obsahy geometrických objektů. Délka úsečky vzoru bude stejná jako délka úsečky obrazu, tj. $|XY| = |X'Y'|$. Stejně tak obsah vzoru bude stejný jako obsah obrazu.



velikost se zachovává



velikost se nezachovává

Prozkoumej, zda všechny mnohoúhelníky zachovávají svou velikost, nebo některé z nich velikost nezachovávají. Zachovává se velikost kružnic? Snaž se zdůvodnit **PROČ** tomu tak je! Až si budeš jistý nebo naopak úplně ztracený, podívej se na řešení.

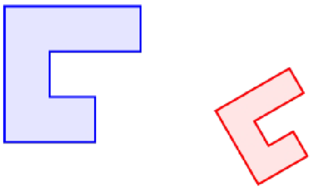
ŘEŠENÍ

Posunutí zachovává velikost všech geometrických objektů, a to nezávisle na jejich umístění či poloze.

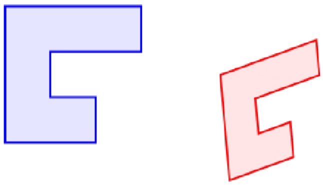
Zobrazení posunutí posouvá všechny objekty stejným směrem o stejnou vzdálenost. Pokud se krajní body libovolné úsečky posunou oba o stejnou vzdálenost a stejným směrem, znamená to, že se jejich vzdálenost nezmění, a tudíž se nezmění ani velikost úsečky. Protože se nemění velikost úseček, nemění se ani velikost mnohoúhelníků a ani jejich obsah. Poloměr kružnice je úsečka, jejíž krajní body jsou střed kružnice a libovolný její bod. Protože se zachovává velikost úseček, zachovává se též poloměr kružnice, a tudíž i obsah kružnice.

Zachovává posunutí TVAR geometrického objektu?

Zachování tvaru znamená, že libovolné 3 body, které leží na vzoru geometrického objektu, určují úhel stejné velikosti jako úhel určený obrazy těchto tří bodů, tedy $|\sphericalangle B_1 B_2 B_3| = |\sphericalangle B'_1 B'_2 B'_3|$. Zjednodušeně řečeno úsečky a přímky zůstávají rovné čáry, kružnice zůstává kružnicí a mnohoúhelníky si zachovávají velikosti všech svých vnitřních úhlů. Délky úseček však nemusí zůstat stejné, mohou se zkracovat nebo prodlužovat, avšak vždy všechny stejnou měrou. Pokud by se totiž měnily délky úseček různě, nezachovávaly by se velikosti úhlů (zkuste si to promyslet např. u trojúhelníku).



tvar se zachovává



tvar se nezachovává

Prozkoumej, zda všechny přímky, kružnice a mnohoúhelníky zachovávají svůj tvar, nebo některé z nich tvar nezachovávají. Snaž se zdůvodnit **PROČ** tomu tak je! Až si budeš jistý nebo naopak úplně ztracený, podívej se na řešení.

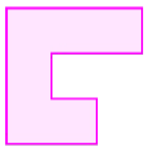
ŘEŠENÍ

Posunutí zachovává tvar všech geometrických objektů, a to nezávisle na jejich umístění či poloze.

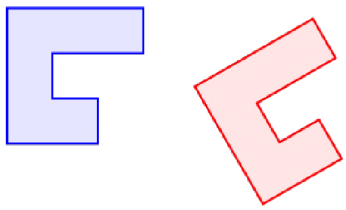
Protože posunutí posouvá všechny objekty stejným směrem o stejnou vzdálenost, zachovávají se též všechny úhly mezi všemi úsečkami a přímkami. Z toho důvodu se zachovává i tvar všech geometrických objektů.

Zachovává posunutí UMÍSTĚNÍ geometrického objektu?

Zachování umístění znamená, že se obraz geometrického objektu po zobrazení překrývá se svým vzorem, tj. není oproti vzoru nijak posunut. Takovým objektům, jejichž obrazy se po zobrazení shodují se svými vzory, říkáme **samodružné** objekty. Pokud se zobrazí všechny body vzoru sami na sebe (na stejné místo), říkáme, že geometrický objekt je **silně samodružný**. Pokud se body objektu zobrazí na jiné body, ale celý objekt se zobrazí opět sám na sebe, označujeme geometrický objekt jako **slabě samodružný**.



umístění se zachovává



umístění se nezachovává

Prozkoumej, zda nějaký geometrický objekt zachovává své umístění a za jakých podmínek. Urči, zda se jedná o silně nebo slabě samodružné objekty! Pro svá tvrzení měj vždy nějaké zdůvodnění. Až si budeš jistý nebo naopak úplně ztracený, podívej se na řešení.

ŘEŠENÍ

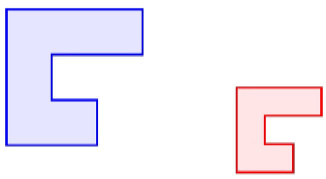
Posunutí obecně nezachovává umístění žádného geometrického objektu.

Ve speciálním případě se **zachovává umístění přímky, která má stejný směr jako orientovaná úsečka určující posunutí**.

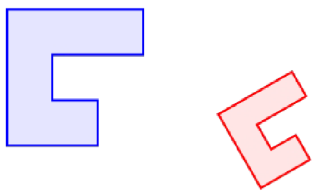
Posunutí posouvá všechny geometrické objekty a ty se proto nemohou překrývat se svými vzory. To však platí pouze pro konečné objekty, složené z úseček, či pro kružnici. Nekonečné objekty, jako je např. **přímka**, mohou být i po posunutí shodné. Vzhledem k tomu, že každý bod přímky se posouvá, přímka, která po posunutí překrývá sama sebe bude **slabě samodružná**.

Zachovává posunutí POLOHU geometrického objektu?

Zachování polohy znamená, že obraz libovolného geometrického objektu není oproti vzoru nijak otočen; respektive je otočen tak, že pokud nemáme nějakým způsobem označeny jeho jednotlivé části, nepoznáme, že se s objektem otáčelo. Objekt však může být posunut, případně zmenšen či zvětšen, ale jeho tvar nesmí být deformován (musí být zachován). Geometrické objekty, které jsou po otočení o nějaký určitý úhel shodné, nazýváme *rotačně symetrické*, což se dá česky přeložit jako otáčivě souměrné.



poloha se zachovává



poloha se nezachovává

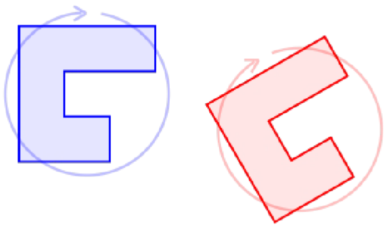
Prozkoumej, zda všechny mnohoúhelníky zachovávají svou polohu nebo některé z nich polohu nezachovávají. Zachovává se poloha přímek? Snaž se zdůvodnit **PROČ** tomu tak je! Až si budeš jistý nebo naopak úplně ztracený, podívej se na řešení.

ŘEŠENÍ

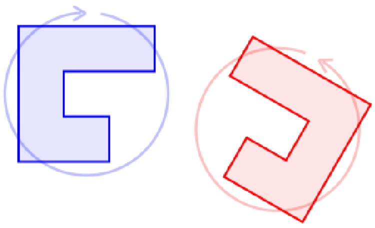
Posunutí zachovává polohu všech geometrických objektů, a to nezávisle na jejich umístění či poloze.
Zobrazení posunutí pouze posouvá geometrické objekty a nezpůsobuje tak žádné natočení obrazu vůči jejich vzoru. Obrazy úseček či přímek jsou v tomto zobrazení *rovnoběžné* se svými vzory.

Zachovává posunutí ORIENTACI geometrického objektu?

Zachování orientace znamená, že pokud seřadíme libovolné body na obvodu geometrického objektu (u mnohoúhelníku např. jeho vrcholy) ve směru hodinových ručiček, budou obrazy těchto bodů na zobrazeném objektu opět seřazené ve směru hodinových ručiček (*pravotočivě*). Pokud by byly obrazy bodů seřazeny proti směru hodinových ručiček (*levotočivě*), orientace by se nezachovala.
Zjednodušeně řečeno, v případě, kdy je obraz geometrického objektu zrcadlově převrácen oproti vzoru, orientace se změní na opačnou (nezachová se).



orientace se zachovává



orientace se nezachovává

Prozkoumej, zda všechny mnohoúhelníky zachovávají svou orientaci a zdůvodni **PROČ** tomu tak je! Až si budeš jistý nebo naopak úplně ztracený, podívej se na řešení.

ŘEŠENÍ

Posunutí zachovává orientaci všech geometrických objektů, a to nezávisle na jejich umístění či poloze.
Protože posunutí pouze posouvá všechny body stejným směrem o stejnou vzdálenost, není důvod pro to, aby se změnila orientace jakéhokoliv geometrického objektu.

Následující tabulka shrnuje veškerá pozorování jednotlivých vlastností posunutí.

OBJEKT	*VELIKOST*	*TVAR*	*UMÍSTĚNÍ*	*POLOHA*	*ORIENTACE*
BOD	⊖	⊖	⊗	⊖	⊖
ÚSEČKA	✓	✓	⊗	✓	⊖
PŘÍMKA	⊖	✓	!	✓	⊖
KRUŽNICE	✓	✓	⊗	⊖	✓
MNOHOÚHELNÍK	✓	✓	⊗	✓	✓

LEGENDA:

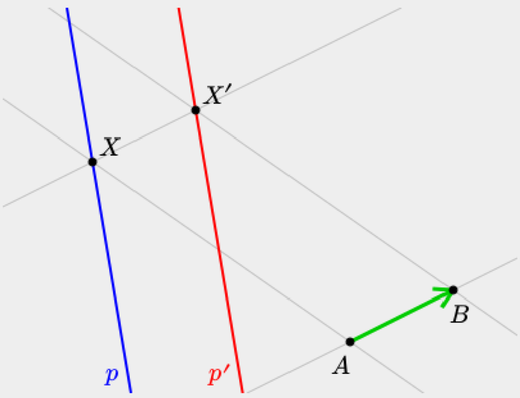
⊖	– U vlastnosti **nemá smysl** mluvit o jejím zachování.
✓	– Vlastnost se **vždy zachovává**.
!	– Vlastnost se nezachovává, ale existují **speciální případy**, kdy se zachovává.
⊗	– Vlastnost se **nikdy nezachovává**.

3.3.4 Zobrazení přímky a kružnice

Nyní, když jsme prozkoumali vlastnosti posunutí, můžeme s jejich pomocí přijít na to, jakým způsobem zkonstruovat v tomto zobrazení obrazy přímek a kružnic. Daných vlastností využijeme k tomu, aby byly konstrukce co nejjednodušší a zároveň co nejpochopitelnější.

Při zobrazování přímek se zachovává tvar, tedy obrazem přímky je opět přímka. Dále se zachovává poloha, což znamená, že vzor a obraz přímky jsou rovnoběžné. Po shrnutí těchto vlastností snadno poznáme, že pro vytvoření obrazu přímky stačí zobrazit libovolný bod této přímky a poté tímto bodem vést rovnoběžku k původnímu vzoru.

Posunutí přímky – zápis konstrukce



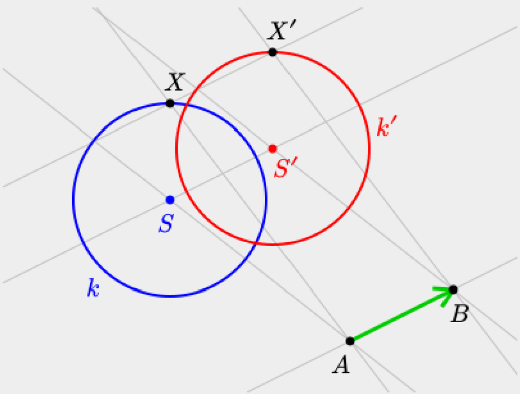
Je dána přímka p a orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$.

1. $X;\ X \in p$
   Na přímce p zvolíme libovolný bod X.
2. $X';\ T_{\overrightarrow{AB}}[\,X\,]$
   Sestrojíme bod X', který je obrazem bodu X v posunutí podle orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$.
3. $p';\ p' \parallel p \quad \wedge \quad X' \in p'$
   Sestrojíme rovnoběžku p' k přímce p procházející bodem X'.

Přímka p' je hledaný **obraz** přímky p v **posunutí** podle orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$.

Kružnice si zachovává svou velikost i tvar což znamená, že obrazem bude kružnice o stejném poloměru. Pro sestrojení kružnice potřebujeme střed a libovolný bod kružnice. Zobrazíme tedy v posunutí tyto dva body a pomocí nich vytvoříme výsledný obraz.

Posunutí kružnice – zápis konstrukce



Je dána kružnice $k(S)$ a orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$.

1. $S';\ T_{\overrightarrow{AB}}[\,S\,]$
   Sestrojíme bod S', který je obrazem bodu S v posunutí podle orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$.
2. $X;\ X \in k(S)$
   Na kružnici $k(S)$ zvolíme libovolný bod X.
3. $X';\ T_{\overrightarrow{AB}}[\,X\,]$
   Sestrojíme bod X', který je obrazem bodu X v posunutí podle orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$.
4. $k'(S');\ X' \in k'(S')$
   Sestrojíme kružnici k' se středem S', která prochází bodem X'.

Kružnice $k'(S')$ je hledaný **obraz** kružnice $k(S)$ v **posunutí** podle orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$.

Zkrácený zápis zobrazení obou křivek bude vypadat takto:

$$\boxed{p';\ T_{\overrightarrow{AB}}[\,p\,]} \qquad \boxed{k'(S');\ T_{\overrightarrow{AB}}[\,k(S)\,]}$$

3.3.5 Translace

Posunutí (neboli *translace*) je lineární zobrazení, které je určeno *orientovanou úsečkou*, tedy dvěma body (počáteční a koncový bod orientované úsečky). Protože záleží na tom, který z bodů je počáteční a který koncový, dva libovolné body mohou určovat dvě rozdílná posunutí.

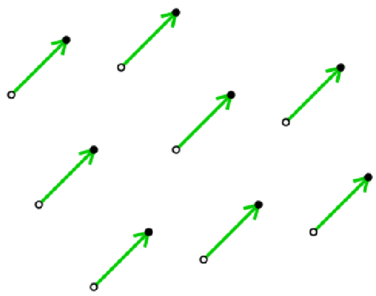
Zobrazení zachovává u všech objektů tyto vlastnosti:

- *velikost*,
- *tvar*,
- *polohu*,
- a *orientaci*.

Umístění se u žádného objektu obecně nezachovává. To dává smysl, protože pokud něco posouváme, nemůžeme čekat, že to zůstane na svém původním místě. Jedinou výjimkou je přímka, která má stejný *směr* jako orientovaná úsečka určující zobrazení. Tato přímka se posouvá ve svém vlastním směru a překrývá tak sama sebe – je tedy tzv. *slabě samodružná*.

Translace nemá **žádné samodružné body**, ale má **všechny samodružné směry**. To znamená, že obraz přímky libovolného směru bude *rovnoběžný* s jejím vzorem. Přímky, které mají stejný směr jako orientovaná úsečka určující zobrazení jsou slabě samodružné. Samodružné kružnice v posunutí neexistují.

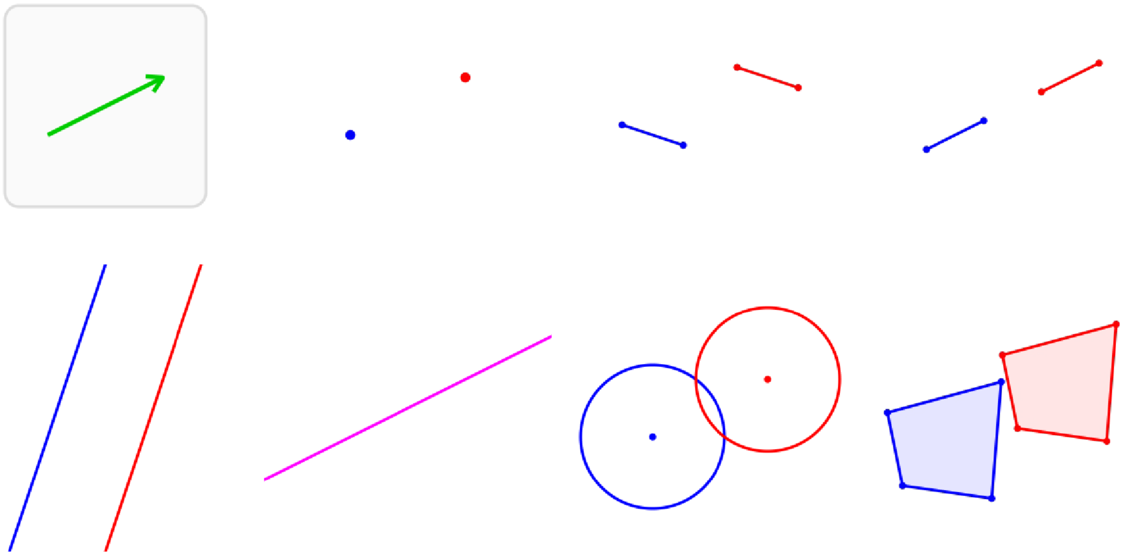
POSUNUTÍ
[translation]



Posunutí je zobrazení **pohybu po přímce**, při němž se všechny body pohybují stejným směrem o stejnou vzdálenost.

Značí se velkým písmenem T (*translace*) s dolním indexem, který určuje pravidlo zobrazení (*orientovanou úsečku*), např.: $T_{\overrightarrow{AB}}$.

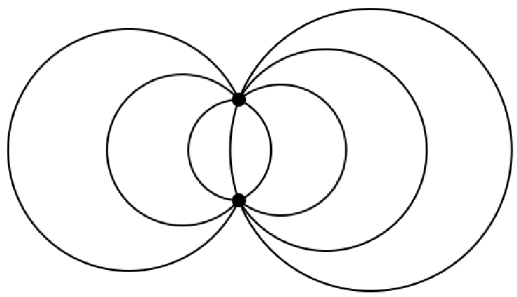
Pro úplné shrnutí ještě slouží následující obrázky, na nichž můžeme vidět pravidlo posunutí (orientovaná úsečka) a vzory a obrazy jednotlivých geometrických objektů:



3.4 2. KAPITOLA: Otočení

3.4.1 Pohyb po kružnici

Otočení je pohyb z jednoho bodu do druhého po kružnici. Křivka, kterou tento bod při pohybu opíše, se nazývá **oblouk** (což je část kružnice). Někdy se také nazývá *kruhový oblouk*. Mezi dvěma libovolnými body existuje nekonečné množství oblouků různé délky; na obrázku níže můžeme vidět některé z nich. Při pohybu po kružnici je tedy potřeba zadat ještě nějakou další informaci, která nám pomůže určit, po kterém z nekonečně mnoha existujících oblouků se máme pohybovat.

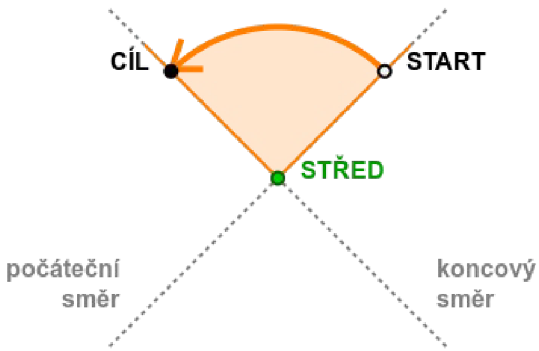


Protože je oblouk částí kružnice, stačí nám zadat kružnici, jejíž je částí. Každá kružnice je jednoznačně určena středem a bodem, který na ní leží. My máme body dva, ale střed žádný. Tento střed může být na různých místech. Střed kružnice (říkáme mu také *střed oblouku*) určuje danou kružnici, dva body na ní pak určují náš hledaný oblouk.

Libovolné tři body, které neleží na jedné přímce (nazýváme je *nekolineární*) vždy určují jedinou kružnici. Pokud máme body pouze dva, existuje nekonečně mnoho kružnic, na kterých tyto dva body leží. Pro určení konkrétní kružnice potřebujeme znát její střed. Střed kružnice má stejnou vzdálenost od všech jejích bodů, tedy i od těch dvou bodů, které mají na kružnici ležet. Všechna taková místa, kde se může nacházet střed kružnice, na níž leží dva zadané body, se nachází na ose úsečky, která tyto dva body spojuje.

Vše asi nejlépe pochopíte na následujících obrázcích. Jsou zde zadané dva body, úsečka spojující tyto body a její osa. Na ose se pohybuje bod, který představuje střed kružnice, na níž dva zadané body leží. Oba dva body společně se zadaným středem pak určují kruhový oblouk, který je v tomto případě veden ze spodního bodu k bodu vrchnímu – proti směru hodinových ručiček.

Při pohybu po kružnici mezi dvěma body (označíme je opět START a CÍL) existuje v prostoru určité místo, od něhož jsme po celou dobu pohybu stejně vzdáleni. Toto místo se nazývá **střed otáčení** a určuje oblouk, který při pohybu opisujeme, jak bylo uvedeno výše. Střed otáčení a počáteční bod pohybu START určují tzv. **počáteční směr**. Stejně tak střed otáčení a koncový bod pohybu CÍL určují tzv. **koncový směr**. Tyto dva směry (dvě přímky) nám pak určují **úhel otočení**. Vše názorně ukazuje obrázek níže. Všimněme si, že úhel otočení je určen dvěma směry a je tudíž nezávislý na vzdálenosti obou bodů od středu otáčení. Ze stejného důvodu je také nezávislý na velikosti oblouku, který při pohybu opisujeme.



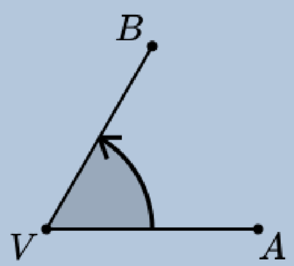
3.4.1.1 Orientovaný úhel

Úhel mezi *počátečním ramenem* (určeným středem otáčení a bodem START) a *koncovým ramenem* (určeným středem otáčení a bodem CÍL) se nazývá **orientovaný úhel**. Střed otáčení je vrcholem tohoto úhlu. Orientace úhlu je na obrázku znázorněna šipkou, která vždy míří do koncového ramene.

Ke každému orientovanému úhlu existuje vždy úhel opačně orientovaný. Je to naprosto stejný úhel, které má stejná ramena i vrchol, ale původní počáteční rameno je nyní koncové a původní koncové rameno je nyní počáteční. To znamená, že je to stejný úhel, ale jeho šipka míří opačným směrem. Na obrázku nahoře by opačně orientovaný úhel začínal v bodě CÍL a směřoval by do bodu START, kam by mířila i jeho šipka.

Orientovaný úhel nám určuje **pravidlo**, podle něhož máme původní vzor zobrazit na výsledný obraz. Pro zadání pravidla otočení tedy stačí **3 body**. Tyto tři body udávají orientovaný úhel (vrchol a počáteční a koncové rameno). Tento úhel pak určuje oblouk, po němž se pohybujeme.

ORIENTOVANÝ ÚHEL
[directed angle]



Orientovaný úhel je úhel, u něhož je rozlišeno, které z jeho ramen je tzv. **počáteční rameno *[initial side]*** a které je **koncové rameno *[terminal side]***.$\overrightarrow{AB}$

Značí se trojicí velkých písmen a stříškou nad nimi, např.: $\widehat{AVB}$. Prostřední písmeno udává **vrchol úhlu *[vertex]***. První písmeno společně s vrcholem určují počáteční rameno a poslední písmeno s vrcholem určuje koncové rameno.

3.4.2 Zobrazení bodu

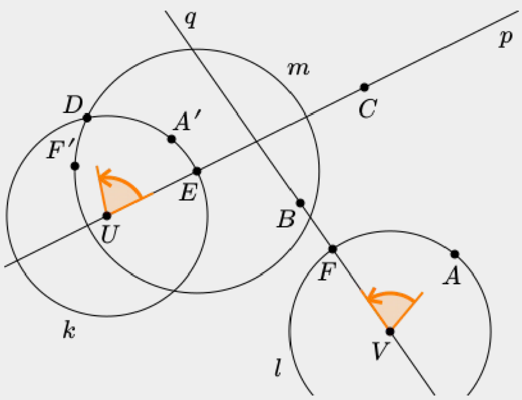
Předtím než začneme otáčet bod podle nějakého zvoleného středu, musíme zvládnout přenést orientovaný úhel z jednoho místa do druhého. Stejně jako při posunutí jsme museli přenést orientovanou úsečku (která nám říkala, jak máme bod posunout) do daného bodu, tak musíme při otáčení přenést orientovaný úhel (který nám říká, jak máme bod otočit) do středu otáčení.

Následující konstrukce je náročná! Pokud ji nepochopíte na první přečtení, možná bude potřeba se k ní jednou či dvakrát vrátit a pročíst si ji znova. Možná ani potom jí úplně neporozumíte. To však nevadí! Zvládnutí této konstrukce není důležité pro pochopení dalších částí textu.

Pravděpodobně znáte jiný a možná i jednodušší způsob, jak přenést orientovaný (nebo i neorientovaný) úhel. V této učebnici se důrazně držíme zásad euklidovské konstrukce. Ta nám jasně říká, že nemůžeme vzít do kružítka nějakou vzdálenost, kružítko zvednout z papíru a tuto vzdálenost přenést na jiné místo (viz kapitolu *Co je třeba znát!*, část **Geometrické konstrukce**). Proto je následující konstrukce náročnější než ta, kterou pravděpodobně znáte vy.

Nejprve posuneme počáteční rameno orientovaného úhlu do požadovaného vrcholu a pomocí kružnice jej otočíme do požadovaného směru (kroky č. 1–4). Dále je třeba přesunout koncové rameno. Nejprve se vyměří „rozpětí“ daného úhlu pomocí úsečky, jejíž krajní body mají od vrcholu orientovaného úhlu stejnou vzdálenost (kroky č. 5–7) – tento postup je známý z obvyklého přenášení úhlu pomocí kružítka, který se učí na školách. Vyměřené „rozpětí“ se posune do již přeneseného počátečního ramene a pomocí další kružnice opět otočí do směru koncového ramene (kroky č. 8–10).

Přenesení orientovaného úhlu – zápis konstrukce



Je dáno počáteční rameno úhlu UC s vrcholem U a orientovaný úhel $\widehat{AVB}$.

1. $p;\ U,C \in p$
   Sestrojíme přímku p, která prochází body U a C.
2. $A';\ T_{\overrightarrow{VU}}[A]$
   Sestrojíme bod A', který je obrazem bodu A v posunutí podle orientované úsečky $\overrightarrow{VU}$.
3. $k(U);\ A' \in k(U)$
   Sestrojíme kružnici k se středem U, která prochází bodem A'.
4. $E;\ E \in k(U) \cap p \quad \wedge \quad E \in \mapsto UC$
   Označíme bod E, který je průsečíkem kružnice $k(U)$ a přímky p. Zvolíme takový bod E, který leží na polopřímce $\mapsto UC$.
5. $q;\ V,B \in q$
   Sestrojíme přímku q, která prochází body V a B.
6. $l(V);\ A \in l(V)$
   Sestrojíme kružnici l se středem V, která prochází bodem A.
7. $F;\ F \in l(V) \cap q \quad \wedge \quad F \in \mapsto VB$
   Označíme bod F, který je průsečíkem kružnice $l(V)$ a přímky q. Zvolíme takový bod F, který leží na polopřímce $\mapsto VB$.
8. $F';\ T_{\overrightarrow{AE}}[F]$
   Sestrojíme bod F', který je obrazem bodu F v posunutí podle orientované úsečky $\overrightarrow{AE}$.
9. $m(E);\ F' \in m(E)$
   Sestrojíme kružnici m se středem E, která prochází bodem F'.
10. $D;\ D \in k(U) \cap m(E) \ \wedge \ |\widehat{CUD}| = |\widehat{AVB}|$
    Označíme bod D, který je průsečíkem kružnic $k(U)$ a $m(E)$. Zvolíme takový bod D, aby platila rovnost $|\widehat{CUD}| = |\widehat{AVB}|$.

Orientovaný úhel $\widehat{CUD}$ je **přenesený orientovaný úhel** $\widehat{AVB}$ do vrcholu U s počátečním ramenem úhlu UC.

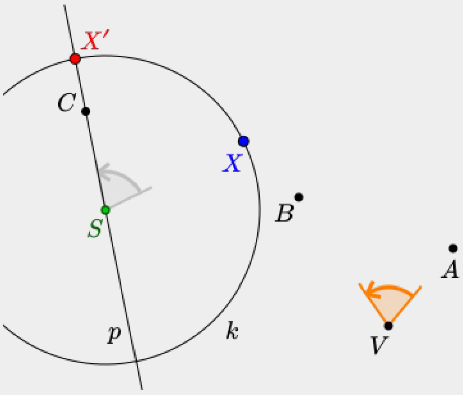
Výsledkem celé konstrukce je nalezení bodu D, který určuje koncové rameno přeneseného orientovaného úhlu – vrchol a bod určující počáteční rameno musíme již mít zadané, abychom mohli přenesení úhlu provést. Konstrukci o takto velkém počtu kroků je nutno shrnout do jediného kroku, a to následujícím způsobem:

$$\boxed{\widehat{CUD};\ |\widehat{CUD}| = |\widehat{AVB}|}$$

Nyní se již můžeme pustit do konstrukce otočení bodu. Stejně jako u posunutí platí, že pokud jsme schopni zobrazit libovolný bod, jsme také schopni zobrazit libovolný mnohoúhelník – a to díky tomu, že zobrazení otočení je lineární. Díky tomu se všechny úsečky zobrazí opět na úsečky. Stačí tedy zobrazit jejich krajní body a ty ve výsledku spojit úsečkou. A protože jsou mnohoúhelníky složeny z úseček (strany mnohoúhelníků jsou úsečky), stačí pouze zobrazit vrcholy daného mnohoúhelníku (vrcholy jsou totiž krajními body stran).

3.4.2.1 Konstrukce obrazu

Předpokládejme, že máme zadaný bod X, střed otáčení S a orientovaný úhel $\widehat{AVB}$. Abychom našli obraz bodu, je nutné přenést orientovaný úhel tak, aby jeho vrchol byl totožný se středem otáčení a aby bod X určoval počáteční rameno orientovaného úhlu. Poté pomocí kružítka přeneseme velikost úsečky SX do směru koncového ramene přeneseného orientovaného úhlu a obdržíme obraz bodu. Protože jak vzor, tak i obraz mají od středu otáčení stejnou vzdálenost.

Otočení bodu – zápis konstrukce	
	Je dán bod X, střed otáčení S a orientovaný úhel $\widehat{AVB}$. 1. $\widehat{XSC};\ \lvert\widehat{XSC}\rvert = \lvert\widehat{AVB}\rvert$ Sestrojíme orientovaný úhel $\widehat{XSC}$, který je přenesený orientovaný úhel $\widehat{AVB}$ do vrcholu S s počátečním ramenem úhlu SX. 2. $p;\ S, C \in p$ Sestrojíme přímku p, která prochází body S a C. 3. $k(S);\ X \in k(S)$ Sestrojíme kružnici k se středem S, která prochází bodem X. 4. $X';\ X' \in k(S) \cap p \quad \wedge \quad X' \in \mapsto SC$ Označíme bod X', který je průsečíkem kružnice $k(S)$ a přímky p. Zvolíme takový bod X', který leží na polopřímce $\mapsto SC$. Bod X' je hledaný **obraz** bodu X v **otočení** podle středu otáčení S a orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$.

Celou konstrukci shrneme do jediného kroku:

$$\boxed{X';\ R_{S,\lvert\widehat{AVB}\rvert}[\,X\,]}$$

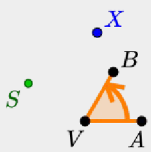
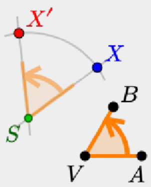
Zápis říká, že bod X' je obrazem bodu X v zobrazení R, které je určeno středem otáčení S a orientovaným úhlem $\widehat{AVB}$. Zobrazení otočení se také nazývá slovem **rotace** (původem z latiny), a proto se otočení značí písmenem R.

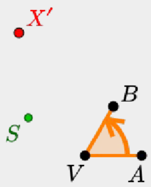
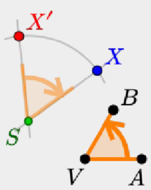
> *i*
>
> Prvním krokem při otáčení bodu je přenesení orientovaného úhlu. To se skládá ze dvou částí. V první části se posune původní vrchol úhlu do vrcholu nového. Ve druhé části se změní poloha úhlu tak, aby mělo počáteční rameno požadovaný směr. V konstrukci přenesení orientovaného úhlu výše se tyto dvě části prolínají, ale po delší úvaze a projití si všech kroků by mělo být jasné které kroky patří ke které části.
>
> Při přenášení úhlu během řešení nějaké úlohy se může stát, že vrchol orientovaného úhlu je totožný se středem otáčení a při konstrukci je potřeba pouze změnit polohu úhlu; tím pádem některé kroky přenášení úhlu odpadnou. Stejně tak je možné, že zadaný orientovaný úhel má správnou polohu a při konstrukci bude pouze stačit posunout jeho vrchol do středu otáčení; to opět způsobí vynechání některých kroků.

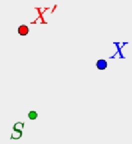
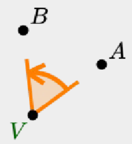
Doporučujeme si takové konstrukce (kde je poloha úhlu stejná nebo kde vrchol úhlu je shodný se středem otáčení) cvičně narýsovat, promyslet si jednotlivé kroky a porovnat je s výše uvedenými kroky přenesení orientovaného úhlu. Bude pak mnohem jasnější, které kroky se vynechávají a proč.

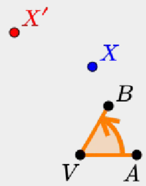
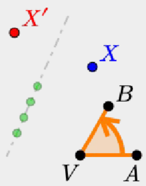
3.4.2.2 Řešení základních úloh

Opět vyřešíme základní druhy úloh související s rotací (otočením) bodu, tentokrát čtyři. Tři úlohy jsou jednoduché, čtvrtá nám dá trochu zabrat. Jak už bylo několikrát řečeno dříve, pokud umíme vyřešit úlohy s body, umíme vyřešit úlohy s úsečkami a tím pádem také úlohy se všemi mnohoúhelníky.

	Hledání obrazu bodu
	Je dán bod X, střed otáčení S a orientovaný úhel $\widehat{AVB}$. Jakým způsobem nalezneme bod X', který je obrazem v otočení podle daného středu a orientovaného úhlu?
	Řešení je jednoduché. Přeneseme orientovaný úhel tak, aby jeho vrchol byl totožný se středem otáčení S a jeho počáteční rameno bylo určeno bodem X. Koncové rameno poté protíná kružnici, která prochází bodem X v bodě X', což je hledaný obraz bodu X. Zápis konstrukce: $X';\ R_{S,\|\widehat{AVB}\|}[X]$

	Hledání vzoru bodu
	Je dán bod X', který je obrazem v otočení podle středu S a orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$. Jakým způsobem nalezneme bod X, který je vzorem daného bodu?
	Hledáme vzor zobrazení, ale orientovaný úhel nám říká, jak se dostaneme od vzoru k obrazu. Musíme tedy postupovat opačným způsobem. Jestliže jsme se od vzoru k obrazu dostali otočením z počátečního do koncového směru, pak se od obrazu ke vzoru dostaneme otočením z koncového do počátečního směru. K tomu však potřebujeme **opačně orientovaný úhel**! Při hledání vzoru X tedy zobrazíme obraz X' v otočení pomocí opačně orientovaného úhlu $\widehat{BVA}$. Zápis konstrukce: $X;\ R_{S,\|\widehat{BVA}\|}[X']$

Hledání orientovaného úhlu	
	Je dán střed otáčení S a body X a X', které jsou vzorem a obrazem v otočení podle orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$ a středu S. Jakým způsobem nalezneme tento orientovaný úhel?
	Řešení je triviální. Střed otáčení S je vrcholem orientovaného úhlu, bod X určuje počáteční rameno a bod X' koncové rameno orientovaného úhlu. Proto je orientovaný úhel $\widehat{XSX'}$ totožný s orientovaným úhlem $\widehat{AVB}$. Zápis konstrukce: $\widehat{AVB}$; $\widehat{AVB} = \widehat{XSX'}$

Hledání středu otáčení	
	Je dán orientovaný úhel $\widehat{AVB}$ a body X a X', které jsou vzorem a obrazem v otočení podle orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$ a středu S. Jakým způsobem nalezneme střed otáčení S?
	I když tato úloha v jistém smyslu patří mezi základní, její řešení je obtížnější než u ostatních základních úloh. V této učebnici její řešení nenajdete; budete si muset počkat na učebnici pro střední školy. Můžete se ovšem pokusit úlohu vyřešit sami. I když je náročnější, není zas tak složitá, abyste ji nezvládli! Je jen třeba se nad problémem více zamyslet. Střed otáčení, který hledáme, musí ležet na ose úsečky XX'. PROČ? Pokud se bod otáčí kolem nějakého středu, tak vzdálenost vzoru i obrazu od tohoto středu zůstává stále stejná – to je vlastnost tohoto zobrazení. A pokud hledáme bod, který má od jiných dvou bodů stejnou vzdálenost, leží tento bod na ose zmíněné úsečky. To je zase vlastnost osy úsečky. Teď jen zbývá vymyslet jakým způsobem nalezneme střed otáčení. Určitě musíme pro jeho nalezení využít zadaný orientovaný úhel. Takže s chutí do toho ☺.

3.4.3 Zkoumání zobrazení

Nyní opět prozkoumáme, co se s objekty děje, když se v daném zobrazení změní vzor na obraz.

Zachovává otočení VELIKOST geometrického objektu?
<u>ŘEŠENÍ</u> **Otočení zachovává velikost všech geometrických objektů, a to nezávisle na jejich umístění či poloze.** Zobrazení otočení otáčí všechny objekty kolem stejného středu o stejný úhel. Pokud se krajní body libovolné úsečky otočí oba o stejný úhel a podle stejného středu, znamená to, že se jejich vzdálenost nezmění, a tudíž se nezmění ani velikost úsečky. Protože se nemění velikost úseček, nemění se ani velikost mnohoúhelníků a ani jejich obsah. Poloměr kružnice je úsečka, jejíž krajní body jsou střed kružnice a libovolný její bod. Protože se zachovává velikost úseček, zachovává se též poloměr kružnice, a tudíž i obsah kružnice.

Zachovává otočení TVAR geometrického objektu?
<u>ŘEŠENÍ</u> **Otočení zachovává tvar všech geometrických objektů, a to nezávisle na jejich umístění či poloze.** Protože otočení otáčí všechny objekty o stejný úhel, zůstanou zachovány též všechny úhly mezi všemi úsečkami a přímkami. Z toho důvodu se zachovává i tvar všech geometrických objektů.

Zachovává otočení UMÍSTĚNÍ geometrického objektu?
<u>ŘEŠENÍ</u> **Otočení obecně nezachovává umístění žádného geometrického objektu.** Ve speciálním případě se zachovává umístění bodu, a to v případě, že je tento bod totožný se středem otáčení. **Střed otáčení je tedy silně samodružným bodem.** Dále existuje množství speciálních případů, při nichž se zachovávají různé geometrické objekty jako **slabě samodružné**: • Úsečka je slabě samodružná v případě, že je střed otáčení středem úsečky a úhel otočení je přímý úhel. • Přímka je slabě samodružná v případě, že střed otáčení leží na dané přímce a úhel

otočení je přímý úhel.

- Kružnice je slabě samodružná v případě, že střed otáčení je totožný se středem kružnice; úhel otočení může být libovolný.
- Mnohoúhelník je slabě samodružný v případě, že je pravidelný, střed otáčení je středem kružnice mnohoúhelníku opsané a úhel otočení je určen středem otočení (vrchol úhlu) a libovolnými dvěma jeho vrcholy (určují ramena úhlu).

Mimo uvedený případ mnohoúhelníku existují i jiné mnohoúhelníky, které mohou být slabě samodružné a nejsou pravidelné, např. *obdélník*. Tyto mnohoúhelníky musejí být rotačně symetrické. Zkuste najít další příklady a určit u nich střed otáčení a úhel, při němž zobrazení zachovává umístění.

Zachovává otočení POLOHU geometrického objektu?

ŘEŠENÍ

Otočení obecně nezachovává polohu žádného geometrického objektu.
Úsečka a přímka zachovávají svou polohu v případě, že úhel otočení je přímý úhel. Rotačně symetrické objekty si zachovávají polohu při určitém úhlu otočení. Zkuste najít úhly, při nichž se zachovává poloha u těchto rotačně symetrických objektů:

- *obdélník*,
- *rovnostranný trojúhelník*,
- *čtverec*,
- *pravidelný mnohoúhelník*.

Zachovává otočení ORIENTACI geometrického objektu?

ŘEŠENÍ

Otočení zachovává orientaci všech geometrických objektů, a to nezávisle na jejich umístění či poloze.
Protože otočení pouze otáčí všechny body o stejný úhel a stejnou vzdálenost od středu otáčení, není důvod pro to, aby se změnila orientace jakéhokoliv geometrického objektu.

Následující tabulka shrnuje veškerá pozorování jednotlivých vlastností otočení.

OBJEKT	*VELIKOST*	*TVAR*	*UMÍSTĚNÍ*	*POLOHA*	*ORIENTACE*
BOD	⊖	⊖	!	⊖	⊖
ÚSEČKA	✓	✓	!	!	⊖
PŘÍMKA	⊖	✓	!	!	⊖
KRUŽNICE	✓	✓	!	⊖	✓
MNOHOÚHELNÍK	✓	✓	!	!	✓

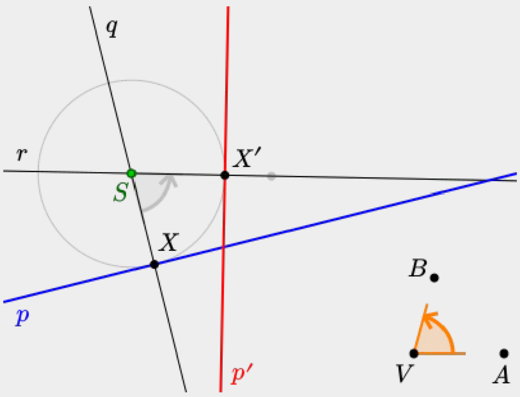
3.4.4 Zobrazení přímky a kružnice

Nyní když jsme prozkoumali vlastnosti otočení, můžeme s jejich pomocí přijít na to, jakým způsobem zkonstruovat v tomto zobrazení obrazy přímek a kružnic. Daných vlastností využijeme k tomu, aby byly konstrukce co nejjednodušší a zároveň co nejpochopitelnější.

Při zobrazování přímek se zachovává tvar, tedy obrazem přímky je opět přímka. Poloha ani umístění přímky se obecně nezachovává. Protože je přímka jednoznačně určena dvěma body, stačilo by vybrat dva různé libovolné body na přímce, ty zobrazit v otočení, a poté nimi vést přímku. Tento postup je určitě správný, ale my si ukážeme postup trochu jiný a zajímavější.

Nejprve povedeme středem otáčení kolmici na přímku, která je vzorem. Průsečík těchto dvou přímek pak zobrazíme v otočení. Takto otočeným bodem a středem otáčení povedeme další přímku. A teď se zamyslíme! Zobrazení otočení zachovává tvar, což znamená, že se zachovávají všechny úhly; tedy obraz bude mít všude stejné úhly jako vzor. Přímka, kterou chceme zobrazit (vzor) a kolmice k ní vedená středem otáčení tvoří jakýsi „kříž“ a tento kříž se otáčí. A protože se zachovává tvar (velikost úhlů), tak výsledkem otočení musí být opět tento „kříž“; zachovává se totiž kolmost obou přímek. Nakonec tedy sestrojíme kolmici otočeným bodem k přímce procházející otočeným bodem a středem otáčení a získáme tak výslednou přímku (obraz). Koukněte se na postup níže a pak si znovu přečtěte celý tento odstavec – udělejte to tolikrát, než vše, co je zde napsáno pochopíte ☺.

Otočení přímky – zápis konstrukce



Je dána přímka p, střed otáčení S a orientovaný úhel $\widehat{AVB}$.

1. $q;\ q \perp p \quad \wedge \quad S \in q$

   Sestrojíme kolmici q k přímce p procházející bodem S.

2. $X;\ X \in p \cap q$

   Označíme bod X, který je průsečíkem přímek p a q.

3. $X';\ R_{S,|\widehat{AVB}|}[\,X\,]$

   Sestrojíme bod X', který je obrazem bodu X v otočení podle středu otáčení S a orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$.

4. $r;\ S, X' \in r$

   Sestrojíme přímku r, která prochází body S a X'.

5. $p';\ p' \perp r \quad \wedge \quad X' \in p'$

   Sestrojíme kolmici p' k přímce r procházející bodem X'.

Přímka p' je hledaný **obraz** přímky p v **otočení** podle středu otáčení S a orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$.

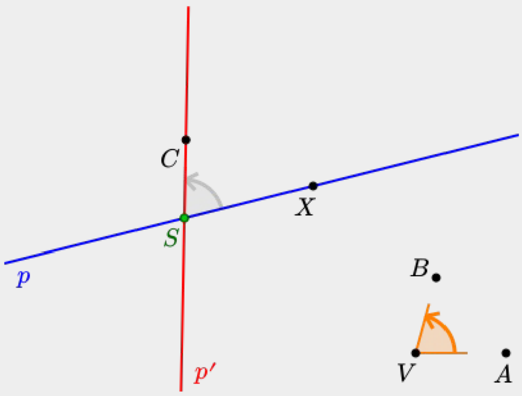
Problém nastává v případě, že je střed otáčení zároveň bodem přímky, tedy že přímce náleží. V tomto případě nelze výše uvedenou konstrukci použít.[21] Vrátíme se tedy k původnímu plánu, že otočíme dva libovolné body přímky a těmi pak povedeme přímku novou. Jenže střed otáčení je jedním bodem přímky, a navíc je to bod samodružný, tedy takový bod, který se zobrazí sám na sebe. Stačí nám tedy zvolit jakýkoliv jiný bod než střed otáčení. Ten zobrazíme v otočení a pak tímto bodem a středem otáčení vedeme novou přímku, která bude obrazem původního vzoru.

i V případě, že nějaký bod náleží určité křivce nebo že nějaká křivka prochází určitým bodem, říkáme, že je tento bod s danou křivkou tzv. **incidentní**. Toto cizí slovo znamená, že bod je součástí křivky (přímky či kružnice). Pro bod incidentní s křivkou se používá značka $\in$ (leží na).

21 ***Proč nelze konstrukci použít?*** – Střed otáčení a bod na přímce by splynuli v jeden. Protože je střed otáčení samodružný, splynul by s nimi i otočený bod a nebylo by tedy možné určit směr nové přímky (obrazu).

V konstrukci obrazu přímky incidentní se středem otáčení (která se nachází níže) dokonce ani obraz libovolného bodu přímky nepotřebujeme. Jediné, co nás zajímá je najít směr nové přímky. Stačí tedy pouze přenést orientovaný úhel tak, aby se vrchol úhlu přenesl do středu otáčení a jeho počáteční rameno, aby leželo na přímce, která je vzorem. Koncové rameno orientovaného úhlu pak bude udávat směr přímky, která je obrazem. Je totiž jedno, který bod hledané přímky dostaneme, záleží nám pouze na správném směru a ten zajistí samotný orientovaný úhel.

Otočení přímky (incidentní) – zápis konstrukce



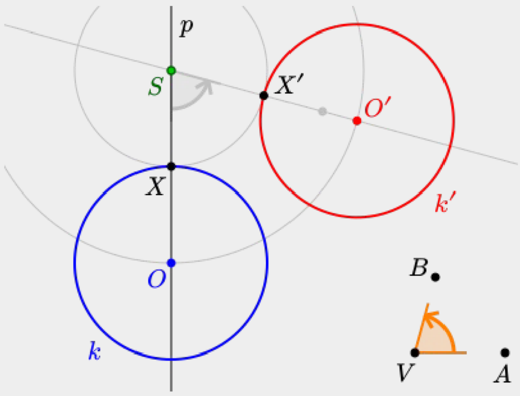
Je dána přímka p, střed otáčení S který na této přímce leží a orientovaný úhel $\widehat{AVB}$.

1. $X;\ X \in p \quad \wedge \quad X \neq S$
   Na přímce p zvolíme libovolný bod X různý od bodu S.
2. $\widehat{XSC};\ |\widehat{XSC}| = |\widehat{AVB}|$
   Sestrojíme orientovaný úhel $\widehat{XSC}$, který je přenesený orientovaný úhel $\widehat{AVB}$ do vrcholu S s počátečním ramenem úhlu SX.
3. $p';\ S, C \in p'$
   Sestrojíme přímku p', která prochází body S a C.

Přímka p' je hledaný **obraz** přímky p v **otočení** podle středu otáčení S a orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$.

Kružnice si zachovává svou velikost i tvar což znamená, že obrazem bude kružnice o stejném poloměru. Pro sestrojení kružnice potřebujeme střed a libovolný bod kružnice. Zobrazíme tedy v otočení tyto dva body a pomocí nich vytvoříme výsledný obraz. Pro zjednodušení konstrukce volíme takový bod na kružnici, který je průsečíkem kružnice a přímky procházející středem kružnici a středem otáčení.

Otočení kružnice – zápis konstrukce



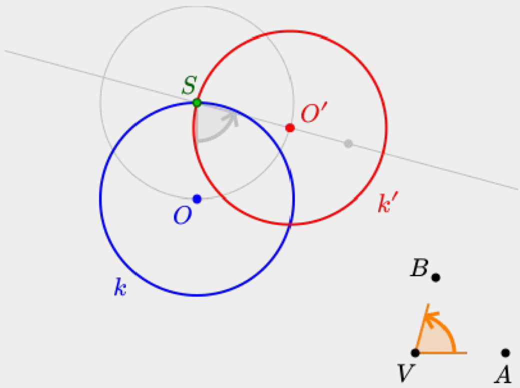
Je dána kružnice $k(O)$, střed otáčení S a orientovaný úhel $\widehat{AVB}$.

1. $O'; \; R_{S,|\widehat{AVB}|}[O]$
   Sestrojíme bod O', který je obrazem bodu O v otočení podle středu otáčení S a orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$.
2. $p; \; S, O \in p$
   Sestrojíme přímku p, která prochází body S a O.
3. $X; \; X \in p \cap k(O)$
   Označíme bod X, který je průsečíkem přímky p a kružnice $k(O)$.
4. $X'; \; R_{S,|\widehat{AVB}|}[X]$
   Sestrojíme bod X', který je obrazem bodu X v otočení podle středu otáčení S a orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$.
5. $k'(O'); \; X' \in k'(O')$
   Sestrojíme kružnici k' se středem O', která prochází bodem X'.

Kružnice $k'(O')$ je hledaný **obraz** kružnice $k(O)$ v **otočení** podle středu otáčení S a orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$.

V případě, že je střed otáčení incidentní s kružnicí, celá konstrukce se výrazně zjednodušuje, protože stačí pouze zobrazit střed kružnice v otočení. Jedním bodem kružnice je totiž střed otáčení a ten je samodružný.

Otočení kružnice (incidentní) – zápis konstrukce



Je dána kružnice $k(O)$, střed otáčení S který na této kružnici leží a orientovaný úhel $\widehat{AVB}$.

1. $O'; \ R_{S,|\widehat{AVB}|}[O]$
   Sestrojíme bod O', který je obrazem bodu O v otočení podle středu otáčení S a orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$.
2. $k'(O'); \ S \in k'(O')$
   Sestrojíme kružnici k' se středem O', která prochází bodem S.

Kružnice $k'(O')$ je hledaný **obraz** kružnice $k(O)$ v **otočení** podle středu otáčení S a orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$.

Zkrácený zápis zobrazení obou křivek bude vypadat takto:

$\boxed{p'; \ R_{S,|\widehat{AVB}|}[p]}$ $\boxed{k'(O'); \ R_{S,|\widehat{AVB}|}[k(O)]}$

3.4.5 Rotace

Otočení (neboli *rotace*) je lineární zobrazení, které je určeno *středem otáčení* a *orientovaným úhlem*, tedy třemi body (vrcholem úhlu, který je zároveň i středem otáčení, a dvěma body určujícími počáteční a koncové rameno úhlu). Protože záleží na tom, který z bodů má jakou funkci v orientovaném úhlu, tři libovolné body mohou určovat celkem šest různých otočení.

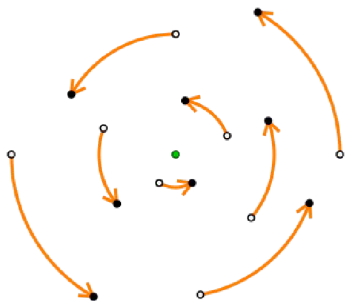
Zobrazení zachovává u všech objektů tyto vlastnosti:

- *velikost*,
- *tvar*,
- a *orientaci*.

Umístění a poloha se u žádného objektu obecně nezachovává, protože pokud něco otáčíme, nemůžeme čekat, že to zůstane na svém původním místě či v původní poloze. V případě, že je úhel otočení přímý úhel se však zachovává poloha úseček a přímek. Pokud je střed otáčení zároveň středem úsečky či je incidentní s přímkou, zachovává se též umístění této úsečky či přímky.

Rotace má **jeden samodružný bod** (*střed otáčení*) a **žádné samodružné směry**, což znamená, že obraz přímky libovolného směru nebude obecně rovnoběžný s jejím vzorem. Přímky jsou slabě samodružné pouze pokud jsou incidentní se středem otáčení a úhel otočení je přímý úhel. Kružnice jsou slabě samodružné v případě, že je střed otáčení totožný se středem kružnice; úhel otočení může být libovolný.

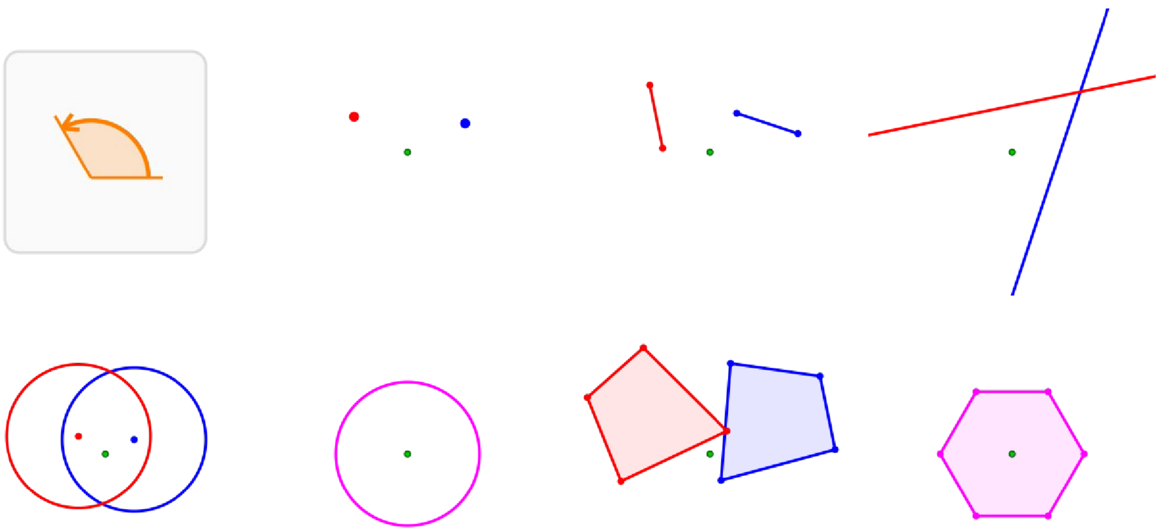
OTOČENÍ
[rotation]



Otočení je zobrazení **pohybu po kružnici**, při němž se všechny body pohybují o stejný úhel, avšak různým směrem o různou vzdálenost.

Značí se velkým písmenem R (*rotace*) s dolním indexem, který určuje pravidlo zobrazení (*střed otáčení* a *orientovaný úhel*), např.: $R_{S,|\widehat{AVB}|}$.

Pro úplné shrnutí ještě slouží následující obrázky, na nichž můžeme vidět pravidlo otočení (orientovaný úhel) a vzory a obrazy jednotlivých geometrických objektů s příslušným středem otáčení:



3.5 3. KAPITOLA: Souměrnost

3.5.1 Středová souměrnost

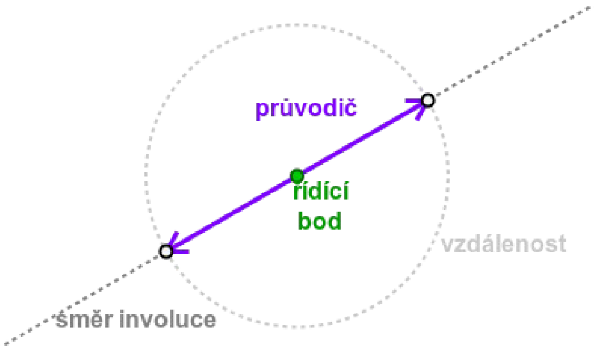
Středová souměrnost, souměrnost podle středu, souměrnost podle bodu nebo středová symetrie, symetrie podle středu a symetrie podle bodu. Dále také středová inverze, inverze podle středu a inverze podle bodu. To vše jsou různé možné názvy pro zobrazení, které v této učebnici nazýváme **souměrnost**.

Každá souměrnost (nebo též *symetrie* či *inverze*) je určena jistým kritériem (pravidlem), které představuje nějaký geometrický objekt. Tento objekt se nazývá *řídící objekt*; v případě středové souměrnosti se tedy jedná o řídící bod (obvykle označován jako *střed souměrnosti*). Pro zadání pravidla středové souměrnosti tedy stačí **1 bod**.

V libovolné souměrnosti (středové, osové či kruhové), se kterou se v této učebnici setkáme, nerozlišujeme mezi sebou *vzor* a *obraz*. A to jako u bodu, tak i u jakéhokoliv jiného geometrického objektu. Důvodem je to, že pokud vytvoříme obraz nějakého vzoru a podle stejného pravidla opět obraz tohoto obrazu, výsledkem zobrazení bude původní vzor (neboli obraz obrazu je původní vzor). Pokud bychom měli například bod A a jeho obrazem by byl bod B, pak obrazem bodu B by byl opět bod A. V takovém případě nemůžeme rozlišit, který z obou bodů je vlastně vzor a který je obraz (totéž platí i pro jiné objekty). Takovéto dvojici geometrických objektů se říká **souměrně sdružené** objekty (zkráceně budeme mluvit o *sdružených* objektech).

Každý bod zaujímá v libovolné souměrnosti určitou polohu vůči řídícímu objektu. Tento vztah bodu a řídícího objektu znázorňujeme orientovanou úsečkou, která vychází z řídícího objektu a míří do zmíněného bodu – tato orientovaná úsečka se nazývá **průvodič** daného bodu. Průvodič bodu nám pomáhá nalézt jeho sdružený bod. Jakým způsobem? Sdružený bod má totiž průvodič **stejného směru, ale opačné orientace**. Tento směr se nazývá *směr involuce*. Průvodič sdruženého bodu je tedy opačně orientovaná úsečka a stejně jako průvodič původního bodu vychází z řídícího objektu.

Následující obrázek ukazuje vztah dvou sdružených bodů v **souměrnosti** (tedy ve *středové souměrnosti*). Průvodiče obou bodů vycházejí z řídícího bodu, mají stejný směr (směr involuce), ale opačnou orientaci. **Velikost průvodičů je** v souměrnosti **stejná**, tím pádem vzdálenost sdružených bodů od řídícího bodu je také stejná.

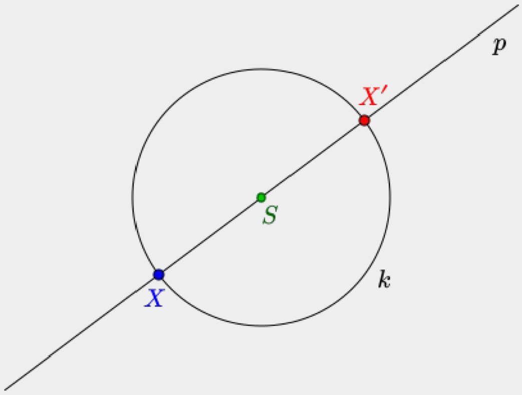


3.5.2 Zobrazení bodu

Při rýsování nějaké úlohy budeme předpokládat, že zadaný objekt je vždy vzor a hledaný objekt je obraz. Úlohu můžeme chápat ale i tak, že zadaný máme obraz a hledáme vzor tohoto objektu. Vzhledem k tomu že jsou tyto pojmy v souměrnostech (*involucích*) zaměnitelné, výsledek bude u obou možností stejný. Uvědomme si, že u zobrazení pohybu (posunutí a otočení) to takto nefunguje a obraz nějakého obrazu se nikdy nemůže stát původním vzorem (jedinou výjimkou je otočení o přímý úhel). Nyní se můžeme pustit do konstrukce obrazu bodu.

3.5.2.1 Konstrukce obrazu

Předpokládejme, že máme zadaný bod X a řídící bod S. Abychom našli obraz bodu, musíme určit směr involuce. Ten je dán přímkou procházející oběma těmito body. V tomto směru nalezneme průvodič obrazu X'. Protože velikost průvodičů zůstává u souměrnosti stejná, stačí pouze pomocí kružnice přenést velikost průvodiče SX a obdržíme hledaný obraz jako průnik přímky určující směr involuce a kružnice určující velikost průvodiče.

Souměrnost bodu – zápis konstrukce	
 	Je dán střed souměrnosti S a bod X. 1. $p;\ S, X \in p$ Sestrojíme přímku p, která prochází body S a X. 2. $k(S);\ X \in k(S)$ Sestrojíme kružnici k se středem S, která prochází bodem X. 3. $X';\ X' \in p \cap k(S) \quad \wedge \quad X' \neq X$ Označíme bod X', který je průsečíkem přímky p a kružnice $k(S)$ a je různý od bodu X. Bod X' je hledaný **obraz** bodu X v **souměrnosti** podle bodu S.

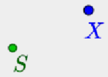
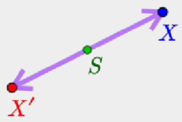
Celou konstrukci shrneme do jediného kroku:

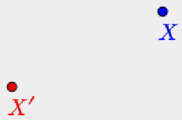
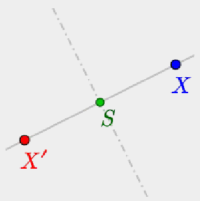
$$\boxed{X';\ S_S[\ X\ ]}$$

Zápis říká, že bod X' je obrazem bodu X v zobrazení S, které je určeno bodem (*středem*) S. Zobrazení souměrnost se také nazývá slovem **symetrie** (původem z řečtiny), a proto se souměrnost značí písmenem S.

3.5.2.2 *Řešení základních úloh*

Opět vyřešíme základní druhy úloh související se symetrií (souměrností) bodu. Úlohy si jako vždy nejprve sami promyslete a jakmile si budete jisti jejich řešením, ověřte si správnost vašeho řešení ☺. V případě, že jste úlohu vyřešili chybně, zastavte se na chvíli a zkuste uvažovat o tom, kde jste při řešení udělali chybu.

Hledání sdruženého bodu	
	Je dán bod X a řídící bod S. Jakým způsobem nalezneme bod X', který je souměrně sdružený s bodem X v souměrnosti určené daným řídícím bodem?
	Řešení je prosté. Z řídícího bodu S sestrojíme orientovanou úsečku, která bude mít stejný směr a stejnou velikost jako průvodič bodu X, ale opačnou orientaci. Koncový bod takto sestrojené orientované úsečky je hledaný bod X'. Zápis konstrukce: $X';\ S_S[\,X\,]$

Hledání řídícího bodu	
	Jsou dány souměrně sdružené body X a X' v souměrnosti určené řídícím bodem S. Jakým způsobem nalezneme tento řídící bod?
	Průvodiče obou bodů mají stejný směr (směr involuce), z čehož vyplývá, že oba body společně s řídícím bodem jsou **kolineární**. Z toho vyplývá, že se řídící bod musí nacházet na přímce určující *směr involuce*, tedy na přímce určené body X a X'. Dále platí, že řídící bod je od obou sdružených bodů stejně vzdálen, a tudíž se musí nacházet na *ose úsečk*y těchto bodů. Řídící bod S pak nalezneme v průniku těchto dvou přímek. Z uvedeného je jasné, že řídící bod je středem úsečky XX'. Zápis konstrukce: $S;\ S \in XX' \ \wedge\ \lvert SX\rvert = \lvert SX'\rvert$

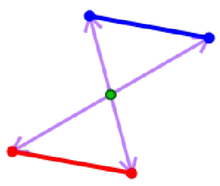
3.5.3 Zkoumání zobrazení

Nyní prozkoumáme, co se s objekty děje, když se v daném zobrazení změní na objekty souměrně sdružené.

Zachovává souměrnost VELIKOST geometrického objektu?

ŘEŠENÍ

Souměrnost zachovává velikost všech geometrických objektů, a to nezávisle na jejich umístění či poloze.
Velikost průvodičů sdružených bodů je při souměrnosti stejná, stejně tak jejich směr. Při zobrazení libovolné úsečky vzniká jakýsi trojúhelník tvořený danou úsečkou a průvodiči jejích krajních bodů. Velikost průvodičů zůstává stejná a velikosti úhlů v trojúhelníku také (protože průvodiče sdružených bodů mají stejný směr). Díky tomu je trojúhelník tvořený vzorem úsečky a průvodiči jejích krajních bodů shodný s trojúhelníkem tvořeným obrazem úsečky a průvodiči jejích krajních bodů (viz obrázek). To znamená, že se velikost obrazu úsečky oproti vzoru nemění. Protože se nemění velikost úseček, nemění se ani velikost mnohoúhelníků a ani jejich obsah.



Poloměr kružnice je úsečka, jejíž krajní body jsou střed kružnice a libovolný její bod. Protože se zachovává velikost úseček, zachovává se též poloměr kružnice, a tudíž i obsah kružnice.

Zachovává souměrnost TVAR geometrického objektu?

ŘEŠENÍ

Souměrnost zachovává tvar všech geometrických objektů, a to nezávisle na jejich umístění či poloze.
Velikost průvodičů sdružených bodů je při souměrnosti stejná, stejně tak jejich směr. Díky tomu zůstávají při zobrazení libovolných tří bodů zachovány jejich vzájemné úhly (je to stejné jako v případě zachování velikosti). Z toho důvodu se zachovává i tvar všech geometrických objektů.

Zachovává souměrnost UMÍSTĚNÍ geometrického objektu?

ŘEŠENÍ

Souměrnost obecně nezachovává umístění žádného geometrického objektu.
Ve speciálním případě se zachovává umístění bodu, a to v případě, že je tento bod totožný

se řídícím bodem. **Řídící bod je tedy silně samodružným bodem.**
Dále existuje množství speciálních případů, při nichž se zachovávají různé geometrické objekty jako **slabě samodružné**:

- Úsečka je slabě samodružná v případě, že je řídící bod středem úsečky.
- Přímka je slabě samodružná v případě, že řídící bod leží na dané přímce.
- Kružnice je slabě samodružná v případě, že je řídící bod totožný s jejím středem.
- Mnohoúhelník je slabě samodružný v případě, že je pravidelný, má sudý počet stran a řídící bod je středem kružnice mnohoúhelníku opsané.

Mimo uvedený případ mnohoúhelníků existují i jiné mnohoúhelníky, které mohou být slabě samodružné a nejsou pravidelné, např. *obdélník*. Tyto mnohoúhelníky musejí být středově souměrné. Zkuste najít další příklady a určit u nich střed souměrnosti (neboli řídící bod) při němž zobrazení zachovává umístění.

Na tomto místě je zajímavé srovnat si zachování umístění u souměrnosti a u otočení. Porovnejte si obě tyto kapitoly a zjistíte, že souměrnost je v tomto smyslu to samé jako otočení o přímý úhel. Možná to ze školy znáte, možná je to pro vás nové. Nicméně důležité je, že **to tak ve skutečnosti není**. Otočení a souměrnost jsou naprosto odlišná zobrazení! Určitě byste se teď hádali, že to tak je, že to všude vychází a že prostě souměrnost je to samé jako otočení o přímý úhel. A měli byste pravdu ☺.

Jak to tedy vlastně je?! Souměrnost je to samé jako otočení o přímý úhel (střed otáčení by byl řídící bod), ale **pouze v rovině!** Pokud bychom se přesunuli do třírozměrného prostoru, otočení nebude vůbec fungovat, zato souměrnost ano. Otáčet se dá s něčím pouze ve dvourozměrné rovině, takže v případě třírozměrného prostoru byste buď narazili na úplně jiné zobrazení, nebo byste stejně otáčeli prostor v nějaké rovině. Nemá smysl o tom teď dumat, to se časem vše naučíte. Každopádně je dobré si zapamatovat, že souměrnost **není** to samé jako otočení o přímý úhel. Pro rychlou kontrolu nebo řešení nějakého úkolu můžeme tyto dvě zobrazení zaměnit (a bude to i efektivní), ale ve své niterné matematické podstatě se jedná o naprosto odlišné věci.

Pokud vám z toho jde hlava kolem, tak to neřešte – tahle informace není pro tuto učebnici nijak podstatná.

Zachovává souměrnost POLOHU geometrického objektu?
<u>ŘEŠENÍ</u>
Souměrnost obecně nezachovává polohu žádného geometrického objektu – výjimkou jsou přímky a úsečky. Středově souměrné objekty (např. pravidelné mnohoúhelníky se sudým počtem stran nebo obdélník) si zachovávají svou polohu, a to nezávisle na poloze řídícího bodu.

Zachovává souměrnost ORIENTACI geometrického objektu?
<u>ŘEŠENÍ</u>
Souměrnost zachovává orientaci všech geometrických objektů, a to nezávisle na jejich umístění či poloze. PROČ souměrnost zachovává orientaci? Na to není jednoduché a zároveň dobré vysvětlení ☹. Jedno sice jednoduché, ale špatné vysvětlení je, že souměrnost je to samé jako otočení o přímý úhel. A otočení orientaci vždy zachovává. Špatné je toto vysvětlení právě v tom, že souměrnost není to samé jako otočení.

Následující tabulka shrnuje veškerá pozorování jednotlivých vlastností souměrnosti.

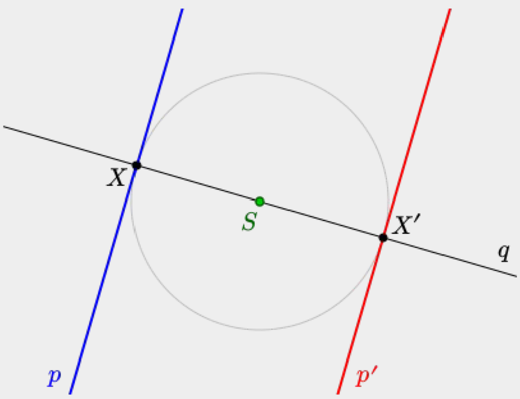
OBJEKT	*VELIKOST*	*TVAR*	*UMÍSTĚNÍ*	*POLOHA*	*ORIENTACE*
BOD	⊖	⊖	!	⊖	⊖
ÚSEČKA	✓	✓	!	✓	⊖
PŘÍMKA	⊖	✓	!	✓	⊖
KRUŽNICE	✓	✓	!	⊖	✓
MNOHOÚHELNÍK	✓	✓	!	!	✓

3.5.4 Zobrazení přímky a kružnice

Poté co jsme prozkoumali vlastnosti souměrnosti, můžeme s jejich pomocí přijít na to jakým způsobem zkonstruovat v tomto zobrazení obrazy přímek a kružnic. Daných vlastností využijeme k tomu, aby byly konstrukce co nejjednodušší a zároveň co nejpochopitelnější.

Při zobrazování přímek se zachovává tvar (tedy obrazem přímky je opět přímka) a také poloha (což znamená, že obraz přímky bude rovnoběžný s jeho vzorem). Stačí tedy zobrazit libovolný bod přímky v souměrnosti a poté tímto bodem vést rovnoběžku s původním vzorem. Při konstrukci zobrazíme bod, který leží na průniku vzoru přímky a kolmici k ní vedené z řídícího bodu, protože tuto kolmici dále využijeme při konstrukci rovnoběžky.

Souměrnost přímky – zápis konstrukce



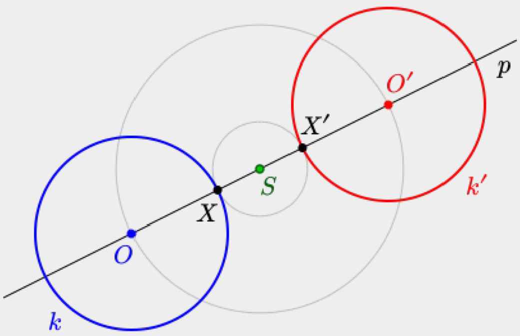
Je dán střed souměrnosti S a přímka p.

1. $q;\ q \perp p \quad \wedge \quad S \in q$
   Sestrojíme kolmici q k přímce p procházející bodem S.
2. $X;\ X \in p \cap q$
   Označíme bod X, který je průsečíkem přímek p a q.
3. $X';\ S_S[X]$
   Sestrojíme bod X', který je obrazem bodu X v souměrnosti podle bodu S.
4. $p';\ p' \parallel p \quad \wedge \quad X' \in p'$
   Sestrojíme rovnoběžku p' k přímce p procházející bodem X'.

Přímka p' je hledaný **obraz** přímky p v **souměrnosti** podle bodu S.

Kružnice si zachovává svou velikost i tvar což znamená, že obrazem bude kružnice o stejném poloměru. Pro sestrojení kružnice potřebujeme střed a libovolný bod kružnice. Zobrazíme tedy v souměrnosti tyto dva body a pomocí nich vytvoříme výsledný obraz. Pro zjednodušení konstrukce volíme takový bod na kružnici, který je průsečíkem kružnice a přímky procházející středem kružnici a řídícím bodem. Přitom nezáleží na tom, jestli zvolíme průsečík bližší či vzdálenější od řídícího bodu.

Souměrnost kružnice – zápis konstrukce



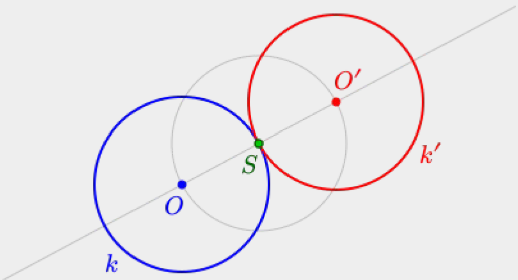
Je dán střed souměrnosti S a kružnice $k(O)$.

1. $p;\ S, O \in p$
   Sestrojíme přímku p, která prochází body S a O.
2. $X;\ X \in p \cap k(O)$
   Označíme bod X, který je průsečíkem přímky p a kružnice $k(O)$.
3. $O';\ S_S[O]$
   Sestrojíme bod O', který je obrazem bodu O v souměrnosti podle bodu S.
4. $X';\ S_S[X]$
   Sestrojíme bod X', který je obrazem bodu X v souměrnosti podle bodu S.
5. $k'(O');\ X' \in k'(O')$
   Sestrojíme kružnici k' se středem O', která prochází bodem X'.

Kružnice $k'(O')$ je hledaný **obraz** kružnice $k(O)$ v **souměrnosti** podle bodu S.

V případě, že je řídící bod incidentní s kružnicí celá konstrukce se výrazně zjednodušuje. Stačí pouze zobrazit střed kružnice v souměrnosti. Jedním bodem kružnice je totiž řídící bod a ten je samodružný.

Souměrnost kružnice (incidentní) – zápis konstrukce



Je dán střed souměrnosti S a kružnice $k(O)$, která tímto středem prochází.

1. $O';\ S_S[O]$
   Sestrojíme bod O', který je obrazem bodu O v souměrnosti podle bodu S.
2. $k'(O');\ S \in k'(O')$
   Sestrojíme kružnici k' se středem O', která prochází bodem S.

Kružnice $k'(O')$ je hledaný **obraz** kružnice $k(O)$ v **souměrnosti** podle bodu S.

Zkrácený zápis zobrazení obou křivek bude vypadat takto:

$$\boxed{p';\ S_S[\,p\,]} \qquad \boxed{k'(O');\ S_S[\,k(O)\,]}$$

3.5.5 Symetrie

Souměrnost (neboli *symetrie*) je lineární zobrazení, které je určeno jediným bodem, tzv. *řídícím bodem*. Z tohoto bodu vychází orientované úsečky zvané **průvodiče**, které směřují ke všem ostatním bodům. Body, které mají průvodič stejné velikosti a směru, avšak opačné orientace se nazývají **souměrně sdružené body**. Díky existenci těchto párů bodů nerozlišujeme u jakéhokoliv zobrazení souměrnosti (involuce) mezi vzorem a obrazem.

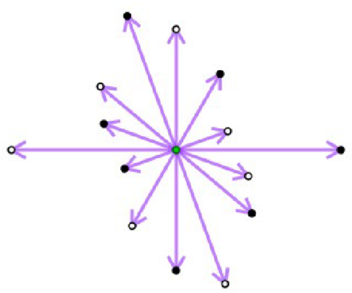
Zobrazení zachovává u všech objektů tyto vlastnosti:

- *velikost*,
- *tvar*,
- a *orientaci*.

Umístění a poloha se u žádného objektu obecně nezachovává, avšak zachovává se poloha úseček a přímek. Pokud je řídící bod zároveň středem úsečky či je incidentní s přímkou, zachovává se též umístění této úsečky či přímky.

Symetrie má **jeden samodružný bod** (*řídící bod*) a **všechny samodružné směry** což znamená, že obraz přímky libovolného směru bude *rovnoběžný* s jejím vzorem. Přímky jsou slabě samodružné pouze, pokud jsou incidentní s řídícím bodem. Kružnice jsou slabě samodružné v případě, že je řídící bod totožný se středem kružnice.

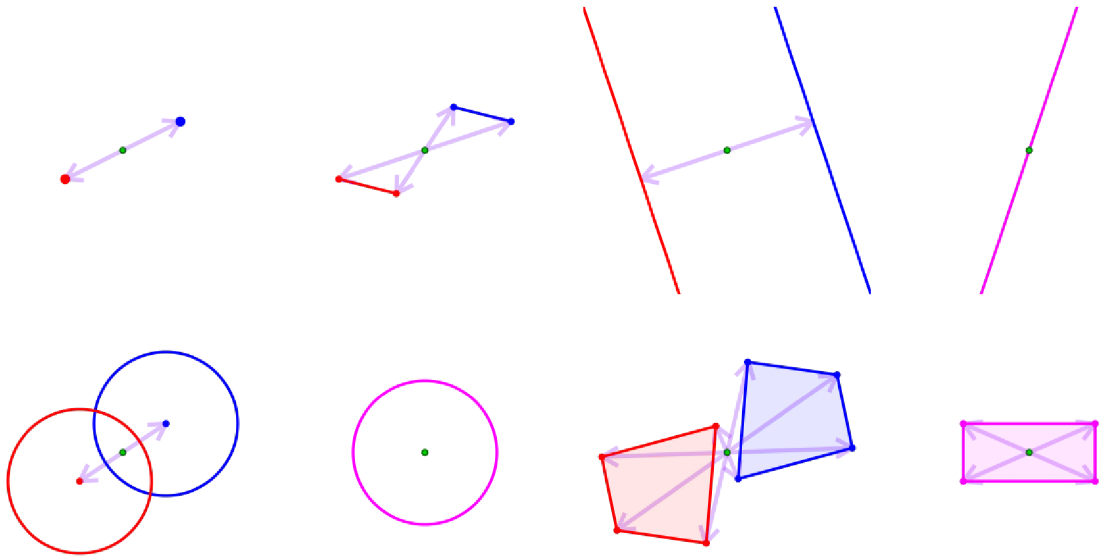
SOUMĚRNOST
[point reflection]



Souměrnost je zobrazení **symetrie určené bodem**, ve kterém existují dvojice souměrně sdružených bodů určené *průvodičem* stejné velikosti i směru, avšak opačné orientace.

Značí se velkým písmenem S (*symetrie*) s dolním indexem, který určuje pravidlo zobrazení (*řídící bod*), např.: S_S.

Pro úplné shrnutí ještě slouží následující obrázky, na nichž můžeme vidět vzory a obrazy jednotlivých geometrických objektů s příslušným řídícím bodem:



3.6 4. KAPITOLA: Zrcadlení

3.6.1 Osová souměrnost

Osová souměrnost, souměrnost podle osy, souměrnost podle přímky nebo osová symetrie, symetrie podle osy a symetrie podle přímky. Dále také osová inverze, inverze podle osy a inverze podle přímky. To vše jsou různé možné názvy pro zobrazení, které v této učebnici nazýváme **zrcadlení**.

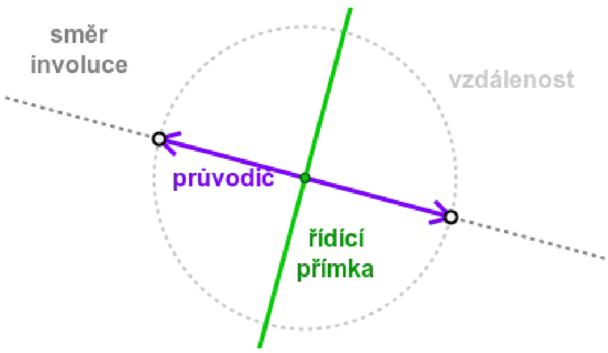
Kritérium (pravidlo) určující osovou souměrnost je tzv. **řídící přímka**, obvykle označována jako *osa souměrnosti*. Pro zadání pravidla osové souměrnosti tedy stačí **2 body**, které jednoznačně tuto přímku určují (řídící přímka těmito dvěma body prochází). Stejně jako u ostatních involucí (souměrností) nerozlišujeme u osové souměrnosti *vzor* a *obraz*, ale pouze **souměrně sdružené** objekty.

Každý bod zaujímá v libovolné souměrnosti určitou polohu vůči řídícímu objektu, kterou znázorňujeme orientovanou úsečkou zvanou **průvodič** daného bodu. Průvodič vychází z řídícího objektu a směřuje do daného bodu. Souměrně sdružené body mají průvodič **stejného směru, ale opačné orientace**. Tento směr se nazývá *směr involuce*.

Bylo řečeno, že průvodič vychází z řídícího objektu – v případě zrcadlení z řídící přímky. Nabízí se tedy otázka, odkud přesně průvodič vychází? U souměrnosti vycházel průvodič z řídícího bodu, ale u zrcadlení máme jako řídící objekt celou přímku, která obsahuje nekonečně mnoho bodů. Orientovaná úsečka musí z nějakého takového bodu přímky vycházet. Ale z kterého? Platí pravidlo, že pokud je řídící objekt nějaká křivka, pak musí být průvodič na tuto křivku **kolmý**! Stačí tedy z daného bodu vést na řídící přímku kolmici a v místě, kde se obě přímky protnou, dostaneme bod, ze kterého průvodič vychází.

Všimněme si ještě jedné zajímavé věci. U souměrnosti existovaly libovolné směry involuce – každý sdružený pár bodů měl svůj vlastní směr (případně stejný směr, pokud byly dva různé páry kolineární). V případě zrcadlení to tak není! Jedním bodem můžeme u souměrnosti vést přímku libovolného směru, ale protože musí být u zrcadlení průvodiče kolmé na řídící přímku, můžeme obdržet u libovolného sdruženého páru bodů pouze **jediný směr involuce**, a to směr kolmý na řídící přímku.

Následující obrázek ukazuje vztah dvou sdružených bodů v **zrcadlení** (tedy v *osové souměrnosti*). Průvodiče obou bodů vycházejí z *řídící přímky*, na kterou jsou kolmé, mají stejný směr (směr involuce), ale opačnou orientaci. **Velikost průvodičů je** v zrcadlení **stejná**, tím pádem vzdálenost obou sdružených bodů od řídící přímky je také stejná.



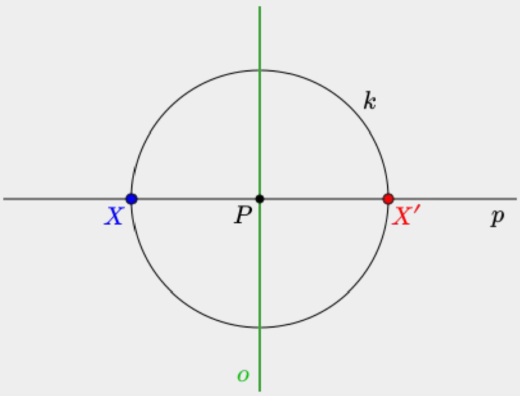
3.6.2 Zobrazení bodu

Při rýsování nějaké úlohy budeme předpokládat, že zadaný objekt je vždy vzor a hledaný objekt je obraz. Úlohu můžeme chápat ale i opačně. Vzhledem k tomu že jsou tyto pojmy v souměrnostech (involucích) zaměnitelné, výsledek bude u obou možností stejný. Nyní se můžeme pustit do konstrukce obrazu bodu.

3.6.2.1 Konstrukce obrazu

Předpokládejme, že máme zadaný bod X a řídící přímku o. Abychom našli obraz bodu, musíme určit směr involuce. Ten je dán kolmicí p vedenou z bodu X na přímku o. V tomto směru nalezneme průvodič obrazu X'. Bod P pak vznikne jako průsečík řídící přímky a kolmice a je počátečním bodem obou průvodičů. Protože velikost průvodičů zůstává u zrcadlení stejná, stačí pouze pomocí kružnice přenést velikost průvodiče PX a obdržíme hledaný obraz jako průnik přímky určující směr involuce a kružnice určující velikost průvodiče.

Zrcadlení bodu – zápis konstrukce



Je dána řídící přímka o a bod X.

1. $p;\ p \perp o \quad \wedge \quad X \in p$
   Sestrojíme kolmici p k řídící přímce o procházející bodem X.
2. $P;\ P \in p \cap o$
   Označíme bod P, který je průsečíkem přímek p a o.
3. $k(P);\ X \in k(P)$
   Sestrojíme kružnici k se středem P, která prochází bodem X.
4. $X';\ X' \in p \cap k(P) \quad \wedge \quad X' \neq X$
   Označíme bod X', který je průsečíkem přímky p a kružnice $k(P)$ a je různý od bodu X.

Bod X' je hledaný **obraz** bodu X v **zrcadlení** podle přímky o.

Celou konstrukci shrneme do jediného kroku:

$$\boxed{X';\ I_o[\,X\,]}$$

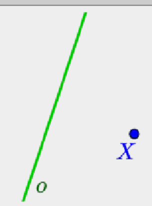
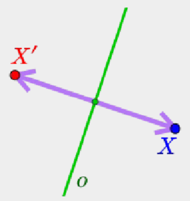
Zápis říká, že bod X' je obrazem bodu X v zobrazení I, které je určeno přímkou (*osou*) o. Zobrazení zrcadlení se také nazývá slovem **inverze** (původem z latiny), a proto se zrcadlení značí písmenem I.

Tak moment! Není náhodou inverze zkratka pro kruhovou inverzi, tedy to zvláštní zobrazení, které není lineární a které se tu máme nakonec naučit? Proč se tak potom označuje osová souměrnost, které je lineární a která s tím vůbec nesouvisí?

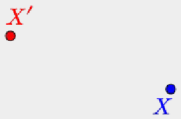
A tady právě začíná to velké dobrodružství! Tím, že osovou souměrnost (neboli zrcadlení) značíme a nazýváme stejně jako kruhovou inverzi, snažíme se již na tomto místě ukázat, že tato dvě zobrazení mají něco společného. Ve skutečnosti toho mají velmi mnoho společného. Nyní tedy opravdu začínáme s tou tzv. **inverzní geometrií**, tedy hlavní náplní celé této učebnice. Dávejte dobrý pozor, protože později zjistíte, že kruhová inverze a zrcadlení jsou v podstatě jedno a to samé. Zatím to tak vůbec nevypadá, ale díky tomu, že důkladně prozkoumáme zrcadlení, budeme toho o inverzi znát docela dost. Tyto znalosti nám pak pomůžou kruhové inverzi lépe porozumět!

3.6.2.2 *Řešení základních úloh*

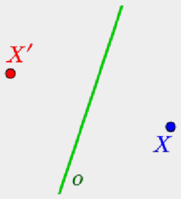
Opět vyřešíme základní druhy úloh související se zrcadlením bodu. Úlohy si jako vždy nejprve sami promyslete a jakmile si budete jisti jejich řešením, ověřte si správnost vašeho řešení ☺. V případě, že jste úlohu vyřešili chybně, zastavte se na chvíli a zkuste uvažovat o tom, kde jste při řešení udělali chybu.

Hledání sdruženého bodu	
	Je dán bod X a řídící přímka o. Jakým způsobem nalezneme bod X', který je souměrně sdružený s bodem X v zrcadlení určené danou řídící přímkou?
	Z řídící přímky o sestrojíme kolmou orientovanou úsečku, která bude mít stejný směr a stejnou velikost jako průvodič bodu X, ale opačnou orientaci. Koncový bod takto sestrojené orientované úsečky je hledaný bod X'. Zápis konstrukce: $X';\ I_o[X]$

Hledání řídící přímky



Jsou dány souměrně sdružené body X a X' v zrcadlení určené řídící přímkou o. Jakým způsobem nalezneme tuto řídící přímku?



Průvodiče obou bodů mají stejný směr (směr involuce) a řídící přímka musí být na tento směr *kolmá*. Zároveň platí, že vzdálenost obou bodů od řídící přímky musí být stejná, tedy že řídící přímka prochází *středem úsečky*, jejíž krajní body jsou souměrně sdružené.
Z uvedeného vyplývá, že řídící přímka je osa úsečky XX'.

Zápis konstrukce: $o;\ o \perp XX' \quad \wedge \quad |Xo| = |X'o|$

3.6.3 Zkoumání zobrazení

Nyní opět prozkoumáme, co se s objekty děje, když se v daném zobrazení změní na objekty souměrně sdružené.

Zachovává zrcadlení VELIKOST geometrického objektu?
<u>**ŘEŠENÍ**</u> **Zrcadlení zachovává velikost všech geometrických objektů, a to nezávisle na jejich umístění či poloze.** Velikost průvodičů sdružených bodů je při zrcadlení stejná, stejně tak jejich směr. To znamená, že se velikost obrazu úsečky oproti vzoru nemění. Protože se nemění velikost úseček, nemění se ani velikost mnohoúhelníků a ani jejich obsah. Poloměr kružnice je úsečka, jejíž krajní body jsou střed kružnice a libovolný její bod. Protože se zachovává velikost úseček, zachovává se též poloměr kružnice, a tudíž i obsah kružnice.

Zachovává zrcadlení TVAR geometrického objektu?
<u>**ŘEŠENÍ**</u> **Zrcadlení zachovává tvar všech geometrických objektů, a to nezávisle na jejich umístění či poloze.** Velikost průvodičů sdružených bodů je při zrcadlení stejná, stejně tak jejich směr. Díky

tomu zůstávají při zobrazení libovolných tří bodů zachovány jejich vzájemné úhly (je to stejné jako v případě zachování velikosti). Z toho důvodu se zachovává i tvar všech geometrických objektů.

Zachovává zrcadlení UMÍSTĚNÍ geometrického objektu?

ŘEŠENÍ

Zrcadlení obecně nezachovává umístění žádného geometrického objektu.
Ve speciálním případě se zachovává umístění bodu, a to v případě, že je tento bod *incidentní* s řídící přímkou. Všechny body, které náleží řídící přímce, a to buď jako samostatné body nebo jako součásti jiných křivek (tedy body, které jsou průsečíkem těchto křivek s řídící přímkou) jsou samodružné.
Řídící přímka je tedy silně samodružná přímka, neboť všechny její body jsou samodružné.
Dále existuje množství speciálních případů, při nichž se zachovávají různé geometrické objekty jako **slabě samodružné**:

- Úsečka je slabě samodružná v případě, že je řídící přímka osou této úsečky.
- Přímka je slabě samodružná v případě, že je kolmá na řídící přímku.
- Kružnice je slabě samodružná v případě, že její střed leží na řídící přímce.

Mimo uvedené případy ještě existují speciální (většinou pravidelné) mnohoúhelníky, které zachovávají své umístění. Jedná se o tzv. osově souměrné mnohoúhelníky. Podmínkou toho, aby se jejich umístění zachovalo je, aby řídící přímka byla zároveň jednou z jejich os souměrnosti. Zkuste najít příklady takových mnohoúhelníků a určit u nich osu jejich souměrnosti.

Zachovává zrcadlení POLOHU geometrického objektu?

ŘEŠENÍ

Zrcadlení obecně nezachovává polohu žádného geometrického objektu.
Úsečka a přímka zachovávají svou polohu v případě, že jsou **rovnoběžné** nebo **kolmé** k řídící přímce. Osově souměrné mnohoúhelníky si zachovávají svou polohu v případě, že je řídící přímka rovnoběžná s jednou z jejich os souměrnosti.

Zachovává zrcadlení ORIENTACI geometrického objektu?

ŘEŠENÍ

Zrcadlení obecně nezachovává orientaci žádného geometrického objektu.
PROČ zrcadlení orientaci nezachovává? Na to opět není jednoduché vysvětlení ☹. Ze zku-

šenosti víme, že zrcadlový obraz jakéhokoliv předmětu nebo např. lidské tváře je jiný než originál – co bylo nahoře či dole zůstává nahoře či dole, avšak co bylo vpravo, je jakoby vlevo a naopak. Zrcadlový obraz je charakteristický právě touto vlastností, tj. že obraz „převrací“. Matematickým jazykem řečeno mění orientaci, a tedy ji nezachovává.

Následující tabulka shrnuje veškerá pozorování jednotlivých vlastností zrcadlení.

OBJEKT	*VELIKOST*	*TVAR*	*UMÍSTĚNÍ*	*POLOHA*	*ORIENTACE*
BOD	−	−	!	−	−
ÚSEČKA	✓	✓	!	!	−
PŘÍMKA	−	✓	!	!	−
KRUŽNICE	✓	✓	!	−	✗
MNOHOÚHELNÍK	✓	✓	!	!	✗

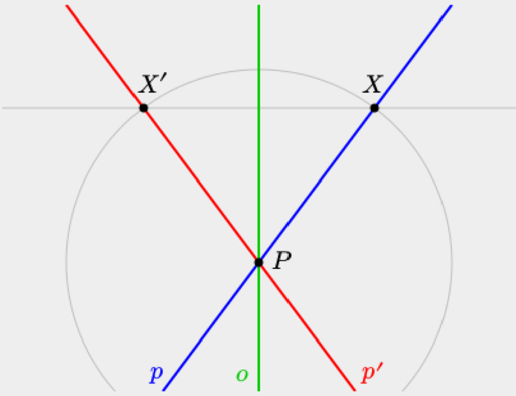
3.6.4 Zobrazení přímky a kružnice

Poté co jsme prozkoumali vlastnosti zrcadlení, můžeme s jejich pomocí přijít na to jakým způsobem zkonstruovat v tomto zobrazení obrazy přímek a kružnic. Daných vlastností využijeme k tomu, aby byly konstrukce co nejjednodušší a zároveň co nejpochopitelnější.

Při zobrazování přímek se obecně zachovává pouze tvar, tedy obrazem přímky je opět přímka. Mimo to víme, že řídící přímka je silně samodružná, neboli že je přímkou samodružných bodů – tedy každý bod této přímky je samodružný. Dále víme, že libovolný pár sdružených bodů má od řídící přímky stejnou vzdálenost. S těmito informacemi už musíme přijít na to, jakým způsobem zobrazit přímku v zrcadlení.

Začneme nejprve přímkou, která je různoběžná s řídící přímkou. Pro konstrukci obrazu této přímky nám stačí nalézt dva její libovolné body. Víme však, že průsečík přímky s řídící přímkou je samodružný bod, a tedy bude patřit i obrazu této přímky. Nyní jen stačí vybrat libovolný jiný bod vzoru, ten zobrazit v zrcadlení a poté tímto bodem a samodružným bodem (průsečíkem) vést přímku. Tak získáme obraz různoběžné přímky.

Zrcadlení přímky (různoběžné) – zápis konstrukce



Je dána řídící přímka o a k ní různoběžná přímka p.

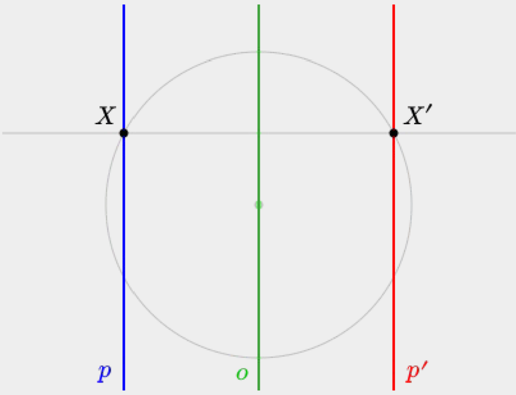
1. $P;\ P \in p \cap o$
   Označíme bod P, který je průsečíkem přímky p a řídící přímky o.
2. $X;\ X \in p \quad \wedge \quad X \neq P$
   Na přímce p zvolíme libovolný bod X různý od bodu P.
3. $X';\ I_o[\,X\,]$
   Sestrojíme bod X', který je obrazem bodu X v zrcadlení podle přímky o.
4. $p';\ P, X' \in p'$
   Sestrojíme přímku p', která prochází body P a X'.

Přímka p' je hledaný **obraz** přímky p v **zrcadlení** podle přímky o.

Všimněte si, že pomocná kružnice použitá při konstrukci bodu X' v kroku č. 3 je nějaká „divná“. Když jsme se učili, jak zkonstruovat v zrcadlení obraz bodu, použili jsme kružnici, která měla střed v bodě, z něhož vychází průvodiče k oběma sdruženým bodům. V tomto případě má však pomocná kružnice úplně jiný střed! Jak je to možné? Tato pomocná kružnice má totiž za úkol pouze přenést velikost průvodiče vzoru na „opačnou stranu“ řídící přímky – tedy tak, aby vznikl průvodič stejného směru, ale opačné orientace. Obraz pak bude ležet na průniku směru involuce (pomocná kolmá přímka) a této pomocné kružnice.
Všimněte si však, že pro přenesení vzdálenost bodu od přímky (tedy velikosti průvodiče) je možné použít LIBOVOLNOU kružnici, jejíž střed leží na řídící přímce a prochází vzorem (bodem X). Není nutné, aby to byl právě ten střed, který je průsečíkem směru involuce a řídící přímky. Pořádně si tuto informaci promyslete a případně narýsujte. V následujících konstrukcích budeme tuto vlastnost často používat.

U přímky rovnoběžné s řídící přímkou bude situace jednodušší. Z vlastností, které jsme zkoumali, totiž víme, že rovnoběžná přímka zachovává svou polohu a tím pádem bude také rovnoběžná (logicky s řídící přímkou i se svým vzorem). To znamená, že stačí vybrat libovolný bod vzoru, zobrazit ho zrcadlením a pak tímto zobrazeným bodem vést rovnoběžku.

Zrcadlení přímky (rovnoběžné) – zápis konstrukce



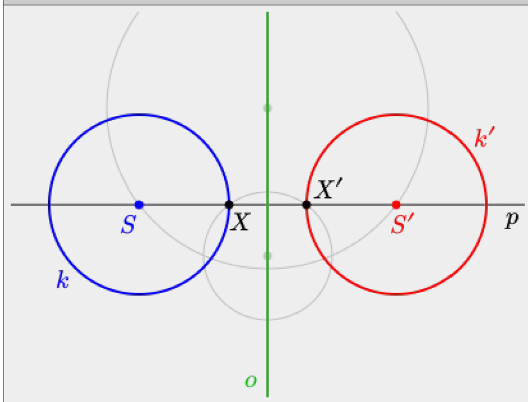
Je dána řídící přímka o a k ní rovnoběžná přímka p.

1. $X;\ X \in p$
   Na přímce p zvolíme libovolný bod X.
2. $X';\ I_o[X]$
   Sestrojíme bod X', který je obrazem bodu X v zrcadlení podle přímky o.
3. $p';\ p' \parallel p \quad \wedge \quad X' \in p'$
   Sestrojíme rovnoběžku p' k přímce p procházející bodem X'.

Přímka p' je hledaný **obraz** přímky p v **zrcadlení** podle přímky o.

Kružnice si zachovává svou velikost i tvar což znamená, že obrazem bude kružnice o stejném poloměru. Pro sestrojení kružnice potřebujeme střed a libovolný bod kružnice. Zobrazíme tedy v zrcadlení tyto dva body a pomocí nich vytvoříme výsledný obraz. Pro zjednodušení konstrukce volíme takový bod na kružnici, který je průsečíkem kružnice a kolmice na řídící přímku procházející středem kružnici. Přitom nezáleží na tom, jestli zvolíme průsečík bližší či vzdálenější od řídící přímky.

Zrcadlení kružnice (mimoběžné) – zápis konstrukce



Je dána řídící přímka o a k ní mimoběžná kružnice $k(S)$.

1. $p;\ p \perp o \quad \wedge \quad S \in p$
   Sestrojíme kolmici p k řídící přímce o procházející bodem S.
2. $X;\ X \in p \cap k(S)$
   Označíme bod X, který je průsečíkem přímky p a kružnice $k(S)$.
3. $S';\ I_o[S]$
   Sestrojíme bod S', který je obrazem bodu S v zrcadlení podle přímky o.
4. $X';\ I_o[X]$
   Sestrojíme bod X', který je obrazem bodu X v zrcadlení podle přímky o.

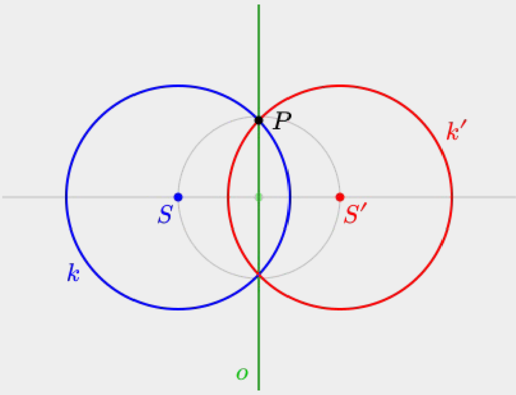
5. $k'(S')$; $X' \in k'(S')$

Sestrojíme kružnici k' se středem S', která prochází bodem X'.

Kružnice $k'(S')$ je hledaný **obraz** kružnice $k(S)$ v **zrcadlení** podle přímky o.

V případě, že kružnice a řídící přímka mají společné body, celá konstrukce se výrazně zjednodušuje, protože stačí pouze zobrazit střed kružnice v souměrnosti. Jedním bodem kružnice je totiž průsečík kružnice a řídící přímky a ten je samodružný.

Zrcadlení kružnice (sečné/tečné) – zápis konstrukce



Je dána řídící přímka o a k ní sečná nebo tečná kružnice $k(S)$.

1. S'; $I_o[S]$

   Sestrojíme bod S', který je obrazem bodu S v zrcadlení podle přímky o.

2. P; $P \in o \cap k(S)$

   Označíme bod P, který je průsečíkem řídící přímky o a kružnice $k(S)$.

3. $k'(S')$; $P \in k'(S')$

   Sestrojíme kružnici k' se středem S', která prochází bodem P.

Kružnice $k'(S')$ je hledaný **obraz** kružnice $k(S)$ v **zrcadlení** podle přímky o.

Zkrácený zápis zobrazení obou křivek bude vypadat takto:

$\boxed{p';\ I_o[p]}$ $\boxed{k'(S');\ I_o[k(S)]}$

3.6.5 Inverze

Zrcadlení (nebo také *osová inverze*) je lineární zobrazení, které je určeno *řídící přímkou*, tedy dvěma body (dva body tuto přímku určují – přímka jimi prochází). Z této přímky kolmo vychází orientované úsečky zvané **průvodiče**, které směřují ke všem ostatním bodům. Body, které mají průvodič stejné velikosti a směru, avšak opačné orientace se nazývají **souměrně sdružené body**. Díky existenci těchto párů bodů nerozlišujeme u jakéhokoliv zobrazení souměrnosti (involuce) mezi vzorem a obrazem.

Zobrazení zachovává u všech objektů tyto vlastnosti:

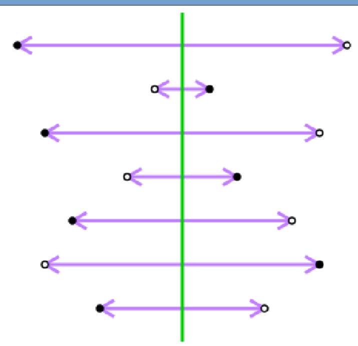
- *velikost*
- a *tvar*.

Orientace se u zrcadlení nikdy nezachovává. Pro toto zobrazení je to typická a důležitá vlastnost!

Umístění a poloha se také obecně nezachovávají, ale zachovává se poloha úseček a přímek, které jsou *rovnoběžné* nebo *kolmé* k řídící přímce. Pokud je řídící přímka zároveň osou úsečky, zachovává se též umístění této úsečky.

Zrcadlení má **nekonečně mnoho samodružných bodů** (všechny tvoří *řídící přímku*) a **dva samodružné směry** – **rovnoběžný** a **kolmý**. Obrazy přímek těchto směrů budou *rovnoběžné* s jejich vzory. Přímky jsou slabě samodružné, pouze pokud jsou kolmé k řídící přímce; řídící přímka sama je pak silně samodružná. Kružnice jsou slabě samodružné v případě, že je střed kružnice incidentní s řídící přímkou.

ZRCADLENÍ
[reflection]

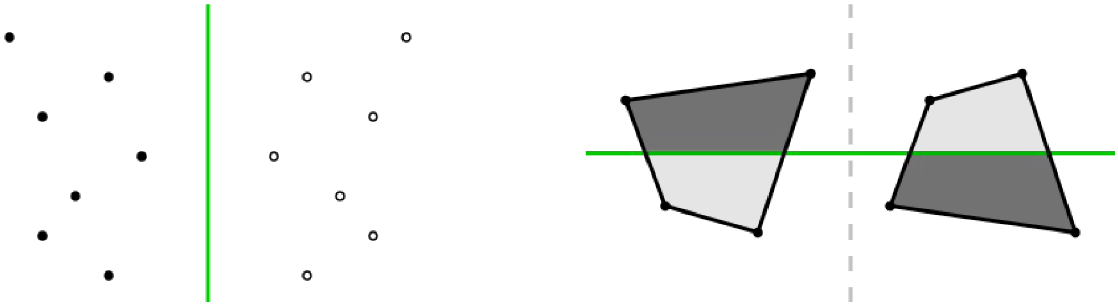


Zrcadlení je zobrazení **inverze určené přímkou**, ve kterém existují dvojice souměrně sdružených bodů určené *průvodičem* stejné velikosti i směru, avšak opačné orientace.

Značí se velkým písmenem I (*inverze*) s dolním indexem, který určuje pravidlo zobrazení (*řídící přímku*), např.: I_o.

Na závěr si ještě ukažme jednu zásadní vlastnost zrcadlení, které jste si už možná všimli, případně vám připadá naprosto jasná. Řídící přímka rozděluje celou rovinu na dvě části. Pokud by byla řídící přímka svislá, můžeme tyto části označit jako *levou* a *pravou*, kdyby byla přímka vodorovná tak jako *vrchní* a *spodní*. Na označení víceméně nezáleží, důležité je, že tyto dvě části (tzv. *poloroviny*) existují a jsou naprosto stejné.

Při zobrazování bodů (ale i jiných objektů) v zrcadlení se děje to, že VŠECHNY body z jedné části (např. levé poloroviny) se zobrazí do druhé části (pravé poloroviny)! Nikdy se nemůže stát, že by se nějaký bod či jiný objekt zobrazil do stejné části, ve které byl předtím. Pokud se nějaký geometrický objekt nachází zároveň v obou polorovinách, pak ta jeho část, která se nachází v jedné z nich (např. ve vrchní polorovině) se zobrazí do druhé poloroviny (spodní) a ta část objektu, která se nacházela ve druhé polorovině (spodní) se zobrazí do té první (vrchní).

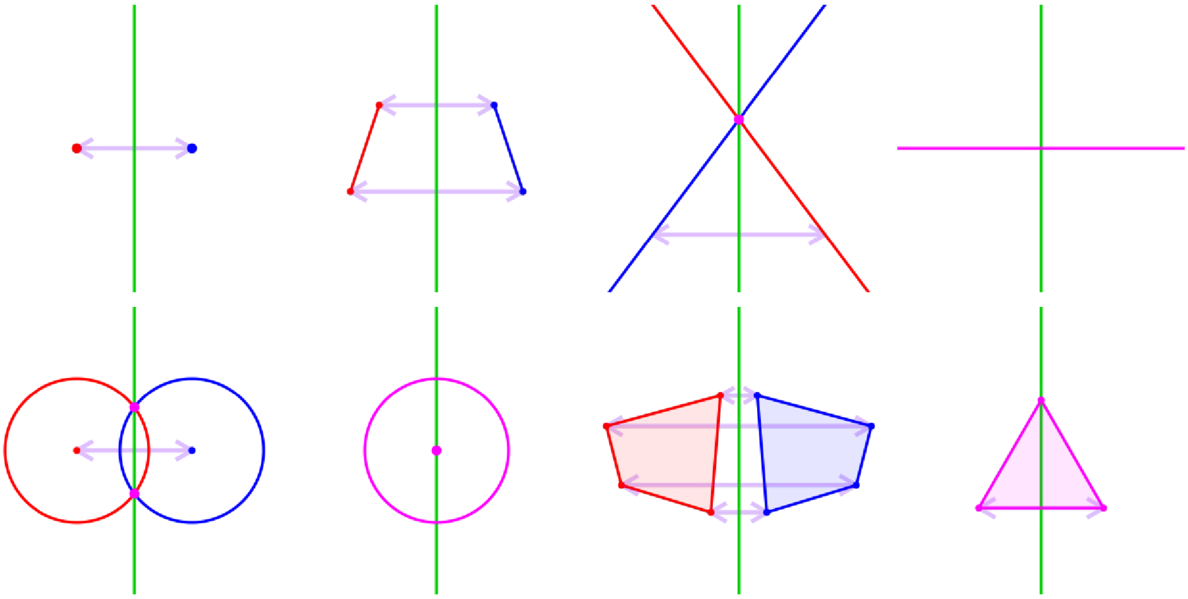


Kromě těchto dvou rozdílných částí (polorovin), existuje ještě třetí část z celé roviny a to taková, jejíž body se při zobrazování zobrazí sami na sebe, tedy do stejné části, v níž byly předtím. Asi už tušíte, že touto třetí částí je samotná *řídící přímka*, protože je to **silně samodružná přímka**.

V zobrazení zrcadlení se tedy vyskytují *3 navzájem různé části* roviny – **2 oblasti** a **1 křivka**. Tyto oblasti jsou dvě *poloroviny*, které zobrazují své body vždy do té druhé oblasti a touto křivkou je *řídící přímka*, která zobrazuje svoje body sami na sebe, tedy opět na tuto křivku. Nejdůležitější je pak tento poznatek:

Každý bod ze souměrně sdruženého páru se nachází v jiné oblasti určené řídící křivkou!

Pro úplné shrnutí ještě slouží následující obrázky, na nichž můžeme vidět vzory a obrazy jednotlivých geometrických objektů s příslušnou řídící přímkou:



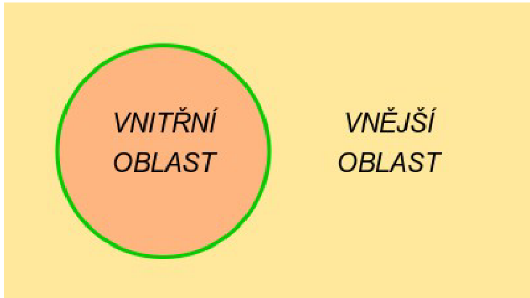
3.7 INTERMEZZO: Přímky a kružnice

3.7.1 Oblasti roviny určené křivkou

Na konci minulé kapitoly jsme se zmínili o tom, že rovina, v níž řešíme nějaký geometrický problém může být rozdělena na *3 různé části* – **2 oblasti** a **1 křivku**, která tyto oblasti odděluje. Křivkou byla *přímka* a oblasti, které tato křivka v rovině oddělila, jsme nazvali *polorovinami*. Tyto poloroviny jsme se v určitých případech snažili nějak pojmenovat, jako např. pravá a levá polorovina, nebo vrchní a spodní polorovina. Ve skutečnosti je to klam a nelze obě poloroviny od sebe nijak rozlišit. Jak to?

Představte si případ, kdy máme levou a pravou polorovinu. Teď vezmeme celou rovinu (např. papír, na němž rýsujeme) a otočíme ji po směru hodinových ručiček o pravý úhel. Polo-rovina, která byla levá je nyní vrchní a ta co byla pravá, je nyní spodní. Ale tím to nekončí! Když celou rovinu opět otočíme po směru hodinových ručiček o další pravý úhel, zjistíme, že polorovina, co byla úplně původně levá je nyní pravá a ta co byla pravá, je nyní levá. Pokud budeme pokračovat dále, zjistíme, že můžeme zaměnit i vrchní a spodní polorovinu. Nelze tedy jednoznačně určit, která polorovina je která, obě jsou naprosto shodné! Pro názornost to můžeme vidět na obrázku níže; zde jsou ale poloroviny vyznačeny barevně.

Jedna křivka rozdělila rovinu na dvě různé oblasti. My ale známe kromě přímky i jinou křivku – *kružnici*. Může také kružnice rozdělit rovinu na dvě různé oblasti? Ano, může ☺. Na rozdíl od přímky kružnice rozděluje rovinu na dvě rozdílné oblasti – *vnější oblast kružnice* a *vnitřní oblast kružnice*, které také říkáme kruh[22]. Ať s kružnicí otáčíme, jak chceme, nepodaří se nám vnitřní a vnější oblast prohodit (jak tomu bylo u přímky), což ukazuje to, že jsou tyto dvě oblasti odlišné.



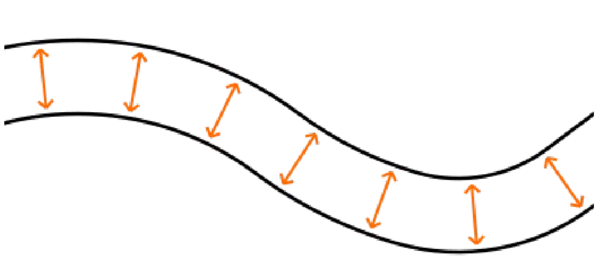
> Ne každá křivka rozděluje rovinu na dvě oblasti – např. úsečka, která je také křivkou. Aby mohla křivka rovinu rozdělit na dvě oblasti, musí se jednat o tzv. *uzavřenou křivku*. Co to přesně znamená, se dozvíte v některé z navazujících učebnic. Prozatím se spokojte s tím, že znáte dvě uzavřené křivky: **přímku** a **kružnici**.

3.7.2 Rovnoběžky a různoběžky

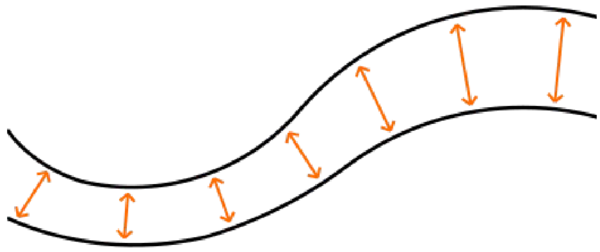
Dvě libovolné křivky zaujímají vůči sobě navzájem vždy nějakou polohu. Abychom se ve vztahu dvou křivek co nejlépe vyznali, je potřeba tyto vzájemné polohy vhodně pojmenovat a popsat.

Všechny polohy křivek můžeme rozdělit do dvou velkých kategorií – na *rovnoběžky* a *různoběžky*. Rovnoběžky jsou takové křivky, které „běží rovně“. To znamená, že jejich **vzdálenost je stále stejná**. Oproti tomu různoběžky „běží různě“ – jejich **vzdálenost se** stále (nebo alespoň někdy) **mění**. Pro lepší představu se mrkněte na následující obrázky:

22 ***Kruh [disc]*** – Ve skutečnosti je pojmem **kruh** myšlena vnitřní oblast kružnice SPOLEČNĚ s touto kružnicí, stejně jako např. trojúhelník je složen ze své vnitřní oblasti a zároveň svých hraničních úseček (stran). Kruh je tou oblastí roviny, v níž se nachází **střed kružnice**, která tuto oblast určuje.



rovnoběžné křivky



různoběžné křivky

Mezi nejznámější rovnoběžky patří **rovnoběžné přímky**. Dvě přímky *stejného směru*, které bok po boku společně ubíhají na obě strany do nekonečna. Tyto dvě přímky, stejně jako všechny ostatní existující rovnoběžky, mají jednu zajímavou vlastnost – *nikde se vzájemně neprotínají*.

⚠ Teď POZOR!

Pokud chceme ověřit, zda jsou dvě křivky rovnoběžné, musíme to udělat podle *definice*, a ne podle nějaké vlastnosti. Co to přesně znamená? Definice rovnoběžek je následující:

„Rovnoběžky jsou takové křivky, pro něž platí, že vzdálenost jedné křivky od libovolného bodu druhé z nich je vždy stejná."

Jinými slovy vzdálenost obou křivek je stále stejná. Naopak *vlastnost* rovnoběžek je tato:

„Rovnoběžky jsou křivky, které se v žádném místě neprotínají."

Klasická CHYBA, které se můžeme dopustit při určování, zda jsou dvě přímky rovnoběžné vypadá takto:

Kouknu na dvě přímky, které mám určit. Bohužel můj zrak je omezený (není nekonečný), takže vidím pouze části z nekonečných přímek. Vidím, že přímky se nikde neprotínají, ale vypadá to, že se k sobě přibližují, takže se nakonec asi protnou (viz obr. 1). Chci ale mít jistotu, takže kouknu „kousek víc vpravo" (stačí pár desítek centimetrů) a vidím, že tam už se přímky protnuly (viz obr. 2). Takže pohodička, jsou to různoběžky.

obr. 1

obr. 2

Tohle ještě žádný problém nebyl, ale pojďme se podívat na jiný případ. Opět mrknu na dvě přímky (viz obr. 3) a vidím, že se nikde neprotínají. Navíc to vypadá, že jsou rovnoběžné… Nechci ale nic riskovat, co když mě jen klame oko. Kouknu tedy zase o kus víc vpravo, tentokrát ale o dost, třeba o pár metrů. Přímky se stále neprotínají (viz obr. 4) a navíc vypadají úplně stejně jako předtím, takže musí být rovnoběžné. Ale jsou skutečně rovnoběžné? Dokud neuvidím, že se někde protínají, jistý si být nemůžu. Posunul jsem se sice o velký kus dál, ale co když je úhel mezi těmi přímkami úplně miniaturní? To by pak hóóóódně hóóóódně daleko od jejich průsečíku vypadalo, že jsou skoro rovnoběžné. Co když je to tento případ? Pokud ano, možná by nebylo špatné se kouknout ještě víc vpravo, mnohem mnohem dál, třeba až o několik kilometrů, jestli se náhodou tyto přímky neprotínají (a samozřejmě to kontroluju i „celou cestu“). Kouknu o „kilák“ dál a vidím zhruba to samé co na obrázku č. 4. Můžu si už teda být jistý, že jsou to rovnoběžky? Ne ☹. Co když se třeba náhodou protínají až za milion kilometrů? Copak to nějak vadí? Vždyť přímky jsou nekonečné, takže pro ně to není žádná vzdálenost.

obr. 3

obr. 4

Tady je jasně vidět, jak postup zjišťování, zda jsou přímky rovnoběžné (který je založený) na jejich vlastnostech, je nepoužitelný. Musel bych totiž prozkoumat celou nekonečnou přímku, abych mohl s jistotou říct, zda se někde protnuly nebo ne. A to prostě nejde. Vlastnost rovnoběžek mohu použít v případě, když chci ukázat, že to rovnoběžky nejsou. Funguje to takto: **Pokud vidím, že se dvě přímky protínají, vím jistě, že jsou různoběžné. Pokud nevidím, že by se protínaly, nevím nic – mohou být různoběžné i rovnoběžné.**

Jak tedy rovnoběžnost přímek ověřit? Podle definice! Ta říká, že všechny body jedné přímky budou mít stejnou vzdálenost od druhé přímky. Prostě vyberu dva libovolné různé body na jedné přímce a změřím (pomocí kolmic) jejich vzdálenost ke druhé přímce ☺. Zaprvé se nemusím nikam posouvat, vše můžu udělat *ve svém zorném poli* – tedy v té části roviny, na kterou se zrovna dívám (nebo na kousku papíru, kde zrovna rýsuju). Zadruhé moje ověření je založeno na měření a ne na pouhém „podívání se“. Pokud bych uměl vzdálenost vždy naprosto dokonale změřit, vždy bych věděl, zda se jedná o různoběžky (vzdálenosti by byly různé) nebo rovnoběžky (vzdálenosti by byly stejné).

Na závěr pokud se chcete zasmát nebo mít noční můry (popř. obojí), takto vypadá matematický zápis **definice** rovnoběžných křivek:

$$(\exists!\, d \in \mathbb{R})(\forall\, X \in a)(\forall\, Y \in b):\ |Xb| = |Ya| = d$$

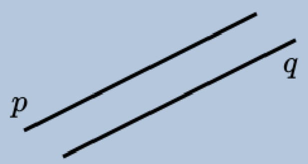
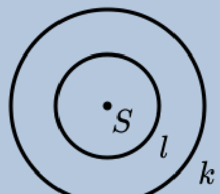
Matematický zápis **vlastnosti** rovnoběžek je pak mnohem jednodušší:

$$a \cap b = \emptyset$$

Zpátky k rovnoběžkám. Máme tedy dvě rovnoběžné přímky. Existují i jiné vzájemně rovnoběžné křivky? Mohou být přímka a kružnice vzájemně rovnoběžné? Nemusíme se ani nijak zvlášť zamýšlet, aby nám bylo jasné že asi ne. Přímka ubíhá stále „rovně“, zatímco kružnice nám jaksi „zatáčí“. V takovém případě si jen těžko tyto dvě křivky zachovají stále stejnou vzdálenost. A co třeba dvě kružnice? Když vedle sebe položíme dvě kružnice, zjistíme, že jedna „zatáčí“ opačně než ta druhá – jedna vlevo a druhá vpravo. Takže ani dvě kružnice nemohou být rovnoběžné.

Počkat, počkat, počkat!!! Dvě přímky mohou být rovnoběžné, protože obě ubíhají „rovně“ (stejným směrem). Kružnice ale „zatáčí“. Tak co kdyby dvě kružnice „zatáčely“ obě stejně. Nemohly by pak být navzájem rovnoběžné? To by asi šlo. Když leží dvě kružnice jedna vedle druhé, každá z nich „zatáčí“ opačně, ale v případě, kdy by jedna ležela uvnitř druhé, tak by obě „zatáčely“ stejně. Pouze to ale k rovnoběžnosti nestačí. Kromě toho ještě musí být od sebe stejně vzdálené. Stačí se trochu zamyslet a přijdeme na to…

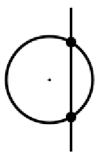
Přišli jsme na to, že existují **rovnoběžné kružnice**. Jedna z kružnic leží ve vnitřní oblasti té druhé, a aby byly od sebe stále stejně vzdálené, musí mít společný střed. Takové kružnice možná znáte pod názvem *soustředné kružnice*. Opět si připomeňme, co je definice a co vlastnost. Definice rovnoběžných kružnic říká, že každý bod jedné kružnice má stejnou vzdálenost od druhé kružnice. Vlastnosti rovnoběžných kružnic jsou dvě: neprotínají se v žádném bodě a mají společný střed (proto se jim říká *soustředné*).

ROVNOBĚŽNÉ PŘÍMKY *[parallel lines]*	**ROVNOBĚŽNÉ KRUŽNICE** *[concentric circles]*
	
Rovnoběžné přímky jsou takové přímky, pro něž platí, že vzdálenost jedné z nich od libovolného bodu druhé z přímek je vždy stejná. Dvě rovnoběžné přímky se v rovině nikde neprotínají a obě mají **stejný směr**.	Rovnoběžné (nebo též *soustředné*) kružnice jsou takové kružnice, které mají totožný střed. Dvě rovnoběžné kružnice se v rovině nikde neprotínají.
Označení rovnoběžných přímek: $p \parallel q$.	Označení rovnoběžných kružnic: $k(S) \parallel l(S)$.

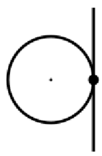
Tak to byly rovnoběžky. A teď různoběžky, tam je to jednoduché. Pokud křivky nejsou rovnoběžné, musí být různoběžné – toť vše ☺.

3.7.3 Sečny, tečny, mimoběžky

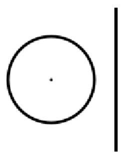
Existuje i jiné dělení než podle vzdálenosti dvou křivek, a to na základě počtu společných bodů. Tak můžeme rozdělit polohu dvou křivek do celkem tří různých kategorií. Nejznámější je toto dělení u vzájemné polohy kružnice a přímky, takže si je pojďme zopakovat.



sečna



tečna



vnější přímka

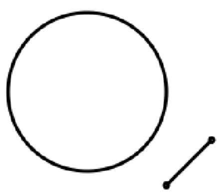
Pokud má přímka s kružnicí společné **2 body**, nazýváme ji *sečna*. Sečna od slova *sekat*, protože tato přímka „rozseká“ kruh (tedy vnitřní oblast této kružnice) na dvě různé části. Společné body přímky a kružnice pak označujeme jako **průsečíky**.

V případě, že má přímka s kružnicí společný pouze **1 bod**, nazýváme tuto přímku *tečna*. Tečna od slova *týkat* neboli (více česky) *dotýkat*. Tato přímka se totiž kružnice pouze „dotkne“, což lze jen v jednom bodě. Tento bod se pak příznačně označuje jako **bod dotyku**.

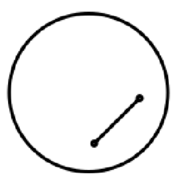
Posledním případem je varianta, kde obě křivky nemají společný **žádný bod**. Přímku pak nazýváme *vnější přímka*.

Všimněte si, že názvy sečna a tečna se dost liší od názvu vnější přímka. Je to tím, že se jedná o zkratky. Slovo sečna je zkratkou pro označení *sečná přímka* a slovo tečna pro označení *tečná přímka*. Jde o pojmenování vztahu k uvedené kružnici – pro kružnici je daná přímka buď sečná, tečná nebo vnější. Stejně tak bychom mohli popisovat vztah kružnice k dané přímce. Jednalo by se pak o sečnou kružnici, tečnou kružnici a vnější kružnici (i když toto označení není správné, jak uvidíme za chvíli).

Označení vnější u vnější přímky nám říká, že se daná přímka nachází ve vnější oblasti dané kružnice – to je také důvod proč je označení vnější kružnice špatné, protože přímka nerozděluje rovinu na vnější a vnitřní oblast! Zpět ale k vnější přímce. Ta se nachází ve vnější oblasti kružnice a jinak to ani být nemůže – do vnitřní oblasti kružnice bychom přímku asi jen těžko „narvali“ ☺. Kdybychom však místo přímky vzali pouze její část (úsečku), mohli bychom mluvit o vnější úsečce, ale i o vnitřní úsečce; to v závislosti na tom, ve které oblasti určené kružnicí by se tato úsečka nacházela (viz obrázky níže). Tato úsečka by však nebyla ani sečna, ani tečna, protože by neměla s kružnicí žádné společné body. Jak bychom ji tedy měli pojmenovat?



vnější úsečka

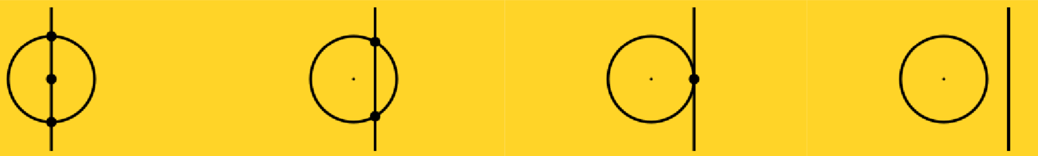


vnitřní úsečka

Úsečku bychom pojmenovali jako *mimoběžku*, což znamená že „běží mimo“ jinou křivku. A to znamená, že s ní nemá žádný společný bod – že jí neprotíná, ani se jí nedotýká. Stejně tak bychom označili i přímku, takže to, co známe pod pojmem *vnější přímka* je opět jen zkratka označení **vnější mimoběžná přímka**. Vnitřní mimoběžná přímka, jak už víme, neexistuje. *Tečná přímka* je pak opět zkratkou pro označení **vnější tečná přímka**, protože se taktéž nachází ve vnější oblasti kružnice; a ani v tomto případě vnitřní tečná přímka nemůže existovat (do kružnice se prostě nevleze). Správné je pak označení *sečná přímka*. Ta ze své vlastní podstaty nemůže být ani vnější ani vnitřní, protože aby mohla „sekat“ nějakou křivku, musí nutně ležet v obou oblastech křivkou určené.

Pojďme si teď na chvíli představit, že střed libovolné kružnice je jedním z bodů této kružnice. Je to samozřejmě úplný nesmysl, ale na chvíli si představme, že to tak je. Proč to vůbec děláme? Pomůže nám to odhalit ještě jednu další novou polohu přímky vůči kružnici a celé to zaobalit do krásné matematické teorie – i když samozřejmě úplně chybné.

Pokud budeme počítat střed kružnice mezi body kružnice, najdeme další novou polohu přímky vůči kružnici. Tato přímka bude mít s kružnicí společné **3 body** a budeme ji nazývat *kolmice*. A opravdu jak už víme z dřívějška, přímka, která prochází středem kružnice je na tuto kružnici kolmá. Nejedená se tedy o úplný nesmysl. Kolmice má podle opravdové matematiky s kružnicí společné pouze dva body, takže se jedná o sečnu. Ale mezi všemi ostatními sečnami je tato sečna něčím významná – prochází středem kružnice, a tudíž je na tuto kružnici kolmá.



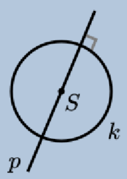
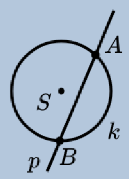
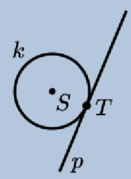
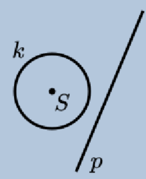
kolmice *sečna* *tečna* *mimoběžka*

Tečny a mimoběžky můžeme rozdělit na vnější a vnitřní; to podle toho v jaké oblasti kružnice se nacházejí. Sečny se automaticky nacházejí v obou oblastech určené kružnicí, ale i ty můžeme rozdělit na dvě kategorie – *kolmé sečny* a ty, které nejsou kolmé. Ty nazveme *obecné sečny*. Pokud se vrátíme k původnímu vztahu kružnice a přímky, tak existují dva případy sečné přímky. Prvním je **kolmá sečná přímka**, druhým pak **obecná sečná přímka**.

Tím jsme si ujasnili všechny 4 možné případy vztahu přímky ke kružnici. Mohli bychom však všechny tyto případy popisovat opačně, tedy jako vztah kružnice k přímce. Místo kolmé/obecné sečné přímky bychom mluvili o *kolmé/obecné sečné kružnici*, místo vnější tečné/mimoběžné přímky bychom měli *tečnou/mimoběžnou kružnici* (označení vnější/vnitřní se zde nepoužívá, protože obě oblasti určené přímkou jsou nerozlišitelné).

My budeme chtít označit polohu dvou křivek tak, abychom nemuseli řešit vztah dvou křivek, tedy abychom neřešili, jestli se jedná o přímku vzhledem ke kružnici nebo kružnici vzhledem k přímce. Proto se domluvme, že budeme používat tato zkratkovitá označení:

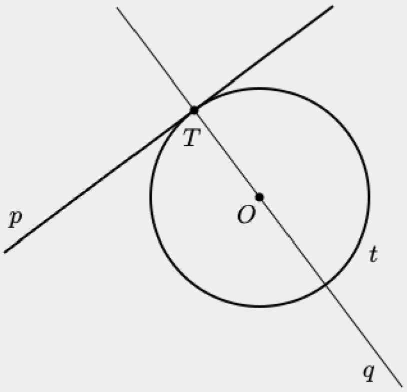
- **kolmice** (kolmé sečny),
- **sečny** (obecné sečny),
- **tečny**,
- a **mimoběžky**.

KOLMICE ***[perpendicular line]***	**SEČNY** ***[secant line]***	**TEČNY** ***[tangent line]***	**MIMOBĚŽKY** ***[exterior line]***
			
Přímka kolmá na kružnici musí **procházet jejím středem.** Platí tedy, že $S \in p$. Označení kolmých křivek: $p \perp k(S)$.	Přímka, která je sečnou kružnice s ní má **2 společné body.** Platí tedy, že $p \cap k(S) = \{A, B\}$. Sečné křivky nemají žádné speciální označení.	Přímka, která je tečnou kružnice s ní má **1 společný bod.** Platí tedy, že $p \cap k(S) = \{T\}$. Tečné křivky nemají žádné speciální označení.	Přímka, která je mimoběžkou kružnice s ní nemá **žádný společný bod.** Platí tedy, že $p \cap k(S) = \emptyset$. Mimoběžné křivky nemají žádné speciální označení.

Anglické termíny jsou uvedeny ve vztahu přímky k dané kružnici (jak je u této problematiky obvyklé).

Pro úplnost ještě uvádíme postup konstrukce tečné kružnice k přímce v případě, že je zadaný střed této kružnice (který logicky neleží na této přímce). Nejedná se o nic, co už byste dávno neznali. Pomocí kolmice nalezneme bod dotyku a sestrojíme hledanou kružnici.

Tečná kružnice k přímce – zápis konstrukce



Je dána přímka p a střed O tečné kružnice.

1. $q;\ q \perp p \quad \wedge \quad O \in q$
   Sestrojíme kolmici q k přímce p procházející bodem O.
2. $T;\ T \in p \cap q$
   Označíme bod T, který je průsečíkem přímek p a q.
   Bod T je **bod dotyku** hledané tečné kružnice s přímkou p.
3. $t(O);\ T \in t(O)$
   Sestrojíme kružnici t se středem O, která prochází bodem T.

Kružnice $t(O)$ je hledaná **tečná kružnice** přímky p s bodem dotyku T.

Zkrácený zápis:

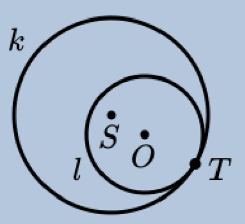
$$\boxed{t(O);\ t(O) \cap p = \{T\}}$$

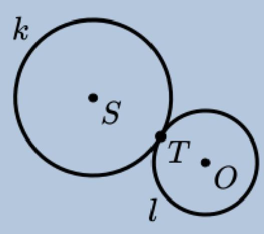
3.7.3.1 Tečny a mimoběžky

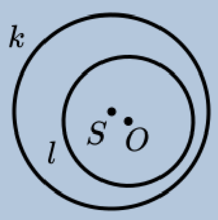
Pojďme na rychlé opáčko. *Tečné křivky* mají 1 společný bod, který se nazývá **bod dotyku**, *mimoběžné křivky* nemají žádný společný bod. U vzájemné polohy přímky a kružnice je pojmenováváme celým názvem jako: vnější tečná různoběžná přímka (kružnice), tečná různoběžná kružnice (přímky), vnější mimoběžná různoběžná přímka (kružnice) a mimoběžná různoběžná kružnice (přímky). Fuj ! Zkráceně používáme názvy **tečna** a **mimoběžka** a to nehledě na to, zda se jedná o přímku či kružnici .

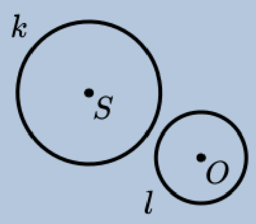
To byly vzájemné polohy mezi přímkou a kružnicí. My ale máme možnost určit vzájemnou polohu i mezi dvěma přímkami nebo dvěma kružnicemi. Pojďme nejprve na kružnice. Tečné kružnice jsou takové kružnice, které mají jeden společný bod – *bod dotyku*. Když se zamyslíme nad tím, jaká poloha dvou kružnic by mohla této podmínce vyhovovat, zjistíme, že existují dva případy. V prvním případě jsou kružnice tzv. „vedle sebe“, tedy každá kružnice se nachází ve vnější oblasti té druhé kružnice. Tyto kružnice nazýváme v*nější tečné* *různoběžné kružnice*, zkráceně **vnější tečny**. Ve druhém případě se jedna z kružnic nachází ve vnitřní oblasti té druhé. Tyto kružnice nazýváme *vnitřní tečné různoběžné kružnice*, zkráceně **vnitřní tečny**.

Mimoběžné kružnice nemají žádný společný bod. Jejich vzájemné polohy najdeme stejně jako u tečných kružnic. Stačí pouze tyto dvě kružnice od sebe nepatrně oddálit tak, aby už neměly žádný společný bod. Snadno tak určíme dvě nové polohy kružnic – *vnější mimoběžné různoběžné kružnice*, zkráceně **vnější mimoběžky** a *vnitřní mimoběžné různoběžné kružnice*, zkráceně **vnitřní mimoběžky**.

<table>
<tr><th>VNITŘNÍ TEČNY
[internally tangent circles]</th><th>VNĚJŠÍ TEČNY
[externally tangent circles]</th></tr>
<tr><td>


Pro vnitřní tečné kružnice platí, že mají 1 společný bod (bod dotyku – T) a střed alespoň jedné z kružnic se nachází ve vnitřní oblasti (kruhu) druhé z kružnic, tedy: $S \in L(O) \quad \vee \quad O \in K(S)$.
</td><td>


Pro vnější tečné kružnice platí, že mají 1 společný bod (bod dotyku – T) a středy obou kružnic se nacházejí ve vnějších oblastech druhých kružnic, tedy: $S \notin L(O) \quad \wedge \quad O \notin K(S)$.
</td></tr>
<tr><th>VNITŘNÍ MIMOBĚŽKY
[internally disjoint circles]</th><th>VNĚJŠÍ MIMOBĚŽKY
[externally disjoint circles]</th></tr>
<tr><td>


Pro vnitřní mimoběžné kružnice platí, že nemají žádný společný bod a střed alespoň jedné z kružnic se nachází ve vnitřní oblasti (kruhu) druhé z kružnic, tedy: $S \in L(O) \quad \vee \quad O \in K(S)$.
</td><td>


Pro vnější mimoběžné kružnice platí, že nemají žádný společný bod a středy obou kružnic se nacházejí ve vnějších oblastech druhých kružnic, tedy: $S \notin L(O) \quad \wedge \quad O \notin K(S)$.
</td></tr>
</table>

Pro označení kruhu (tedy kružnice společně s její vnitřní oblastí) se používá stejného symbolu jako pro označení samotné kružnice s tím rozdílem, že kruh se označí velkým písmenem (stejným jako kružnice). Tedy např. kruh se středem S, který přísluší kružnici $k(S)$ označíme jako $K(S)$.
Znak $\vee$, který byl použit výše, slouží ke spojení dvou podmínek. Na rozdíl od znaku $\wedge$, který říká, že musí platit obě spojené podmínky současně, znak $\vee$ říká, že stačí, aby platila pouze jedna z uvedených podmínek (ale je možné, aby platili obě současně).

Ve všech předchozích případech jsme narazili na *různoběžné kružnice*. Lze ale najít mezi tečnými a mimoběžnými kružnicemi také *rovnoběžné kružnice*? V případě tečných kružnic se nám to nejspíš nepodaří. Pokud totiž mají kružnice pouze jeden společný bod, musí být nutně různoběžné a pokud by náhodou byly rovnoběžné, pak by měly společných bodů nekonečně mnoho, a byly by tedy totožné – zkuste si tyto případy rozmyslet ☺. U mimoběžných kružnic však tento případ nastat může. Jak už bylo řečeno výše, rovnoběžné kružnice mají společný střed. Pokud mají společný střed, musí se jedna z kružnic nacházet ve vnitřní oblasti té druhé a jednalo by se tedy o *vnitřní mimoběžné rovnoběžné kružnice*. Zkráceně bychom je pak mohli pojmenovat jako **mimoběžné rovnoběžky**.

Tak, to máme za sebou polohy dvou kružnic. Teď je čas na vzájemné polohy dvou přímek. Na první pohled to vypadá jednoduše. Tečné přímky jsou různoběžky, protože mají 1 společný bod a mimoběžné přímky jsou rovnoběžky, protože nemají žádný společný bod. **BOHUŽEL TAK TO ALE NENÍ!** ☹

> Nyní, prosím, dávejte dobrý pozor! V následujících odstavcích se dozvíte informace, které platí pouze pro inverzní geometrii a v klasické (tzv. euklidovské) geometrii neplatí. Tyto informace jsou **zásadním rozdílem** mezi oběma geometriemi a je potřeba si vždy rozmyslet, zda pracujeme v inverzní geometrii, kde platí, nebo naopak v euklidovské geometrii, kde neplatí!

Dvě rovnoběžné přímky nemají žádný společný bod. To je pravda pravdoucí v klasické euklidovské geometrii. Možná jste ale už někde slyšeli, že dvě rovnoběžné přímky se protínají v nekonečnu. Jsou stále rovnoběžné, stále od sebe stejně vzdálené, ale v nekonečnu se protnou. Často se taková věc vysvětluje na příkladu železničních kolejnic. Kolejnice jsou příkladem rovnoběžek, protože jsou od sebe stále stejně vzdálené (jinak by vlaky moc daleko nedojely ☺). Když se na ně však podíváte z určitého úhlu, vypadá to, jako by se někde hodně daleko sbíhaly do jediného bodu. Víme, že tomu tak není, protože jsou od sebe stále stejně vzdálené, ale vypadá to, jako by se někde setkaly. Tím místem je právě nekonečno – v nekonečnu se obě rovnoběžky protínají v jednom jediném bodě.

Ve skutečnosti to není pravda. Dvě rovnoběžky se v inverzní geometrii v nekonečnu neprotínají, ale **dotýkají se**. Na první pohled v tom není žádný velký rozdíl, ale časem uvidíte, že se jedná o rozdíl zásadní! Každopádně v inverzní geometrii neplatí, že dvě rovnoběžné přímky nemají žádný společný bod. Mají totiž jeden společný bod a tím je bod v nekonečnu. Z toho však plyne, že dvě rovnoběžné přímky jsou přímky tečné – mají totiž 1 společný bod. Správně se tedy jedná o *tečné rovnoběžné přímky*, zkráceně **tečné rovnoběžky**.

Existují vůbec mimoběžné přímky? Zdá se, že ne, protože rovnoběžky mají společný bod dotyku a různoběžky zase společný průsečík. Neexistují tedy přímky, které by neměly žádný společný bod. Mimoběžné přímky v rovině tedy nenajdeme – tam budou mít vždy nějaký společný bod.

Vyvstává otázka, co jsou zač různoběžné přímky? Jsou to také tečné přímky nebo ne? Mají přece jeden společný bod, jejich průsečík. Ale nějak to nesedí… Nevypadá to, že by se různoběžky nějak „dotýkaly". Spíš vypadají, jako by jedna „sekala" druhou. Ale bod mají společný jen jeden… Jak to tedy vlastně je?!

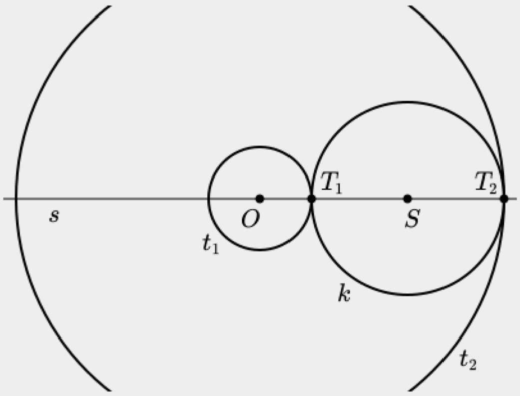
Různoběžné přímky jsou ve skutečnosti přímky sečné. Naše obrazová představivost nám nelhala, přímky totiž opravdu vypadají, jako že jedna „seká" tu druhou. Nicméně dvě sečné kružnice nebo přímka a kružnice, které jsou sečny mají vždy 2 společné body zvané *průsečíky*. Je to tedy u přímek nějak jinak? Jsou přímky nějakou výjimkou? Ve skutečnosti ne. Dvě libovolné různoběžné přímky se totiž v inverzní geometrii **protínají** v nekonečnu, tj. v tom bodě, kde se rovnoběžné přímky dotýkaly. Různoběžky tak mají, stejně jako jakékoliv jiné sečny, dva společné body – 2 průsečíky. Jedním je průsečík, který všichni známe a druhým je právě bod v nekonečnu.

Inverzní geometrie se od klasické euklidovské geometrie liší právě tím, že pracuje s nekonečnem, respektive s **bodem v nekonečnu**. Žádný takový bod v euklidovské geometrii přirozeně neexistuje. Pokud jste dávali v úvodní kapitole dobrý pozor (a nepřeskočili ji), pak víte, že Euklides se zabýval pouze těmi geometrickými objekty, které lze postřehnout pouhým zrakem – a to bod někde daleko v nekonečnu určitě není!

To, čím se inverzní geometrie od té klasické tak dramaticky liší je právě ta vlastnost přímek, že jakékoliv dvě přímky budou mít vždy alespoň 1 společný bod. **Všechny přímky v inverzní geometrii totiž prochází bodem v nekonečnu!** Pokud jsou to *rovnoběžné přímky*, tak se v nekonečnu pouze dotýkají a mají jeden společný bod. Pokud jsou to *různoběžné přímky*, tak se v nekonečnu protínají a mají dva společné body – průsečík a samotný bod v nekonečnu.

Na závěr povídání o tečnách uvádíme postup konstrukce tečných kružnic k zadané kružnici v případě, že je zadaný střed těchto tečných kružnic. Postup je obdobný jako při hledání tečné kružnice k přímce. Sestrojíme přímku vedoucí oběma středy (středem zadané kružnice a středem budoucích tečných kružnic). Její průsečíky se zadanou kružnicí jsou hledané body dotyku. V případě, že leží střed tečných kružnic ve vnější oblasti zadané kružnice, získáme jednu vnitřní a jednu vnější tečnu kružnici. V případě, že střed leží ve vnitřní oblasti zadané kružnice, získáme dvě vnitřní tečny.

Tečné kružnice ke kružnici – zápis konstrukce



Je dána kružnice $k(S)$ a střed O tečných kružnic.

1. $s;\ S, O \in s$
   Sestrojíme přímku s, která prochází středem kružnice $k(S)$ a bodem O.
2. $T_1;\ T_1 \in k(S) \cap s$
   $T_2;\ T_2 \in k(S) \cap s \quad \wedge \quad T_2 \neq T_1$
   Označíme body T_1 a T_2, které jsou průsečíky kružnice $k(S)$ a přímky s.
   Body T_1 a T_2 jsou **body dotyku** hledaných tečných kružnic s kružnicí $k(S)$.
3. $t_1(O);\ T_1 \in t_1(O)$
   $t_2(O);\ T_2 \in t_2(O)$
   Sestrojíme kružnici t_1 se středem O, která prochází bodem T_1 a kružnici t_2 se středem O, která prochází bodem T_2.

Kružnice $t_1(O)$ a $t_2(O)$ jsou hledané **tečné kružnice** kružnice $k(S)$ s body dotyku T_1 a T_2.

Zkrácený zápis:

$$t_1(O);\; t_1(O) \cap k(S) = \{T_1\}$$
$$t_2(O);\; t_2(O) \cap k(S) = \{T_2\} \quad \wedge \quad T_2 \neq T_1$$

3.7.3.2 Sečny a kolmice

Sečné křivky mají vždy 2 společné body, které se nazývají **průsečíky**. To platí jak pro vzájemnou polohu přímky a kružnice, tak pro dvě kružnice i dvě přímky, jak bylo vysvětleno výše. Sečné křivky nemůžeme rozdělit na vnitřní a vnější, protože z logiky věci vždy prochází oběma oblastmi určené danou křivkou – jedině tak mohou danou křivku „sekat“.

U vzájemné polohy dvou sečných křivek existuje jedna speciální vlastnost, která určitou polohu odlišuje od ostatních. Nazýváme ji **kolmost** a rozlišujeme tak *kolmé sečné křivky* od *obecných sečných křivek*. Co to znamená pro dvě křivky být na sebe kolmé, je kupodivu mnohem složitější vysvětlit, než by se zdálo. Pojďme to ale zkusit ☺.

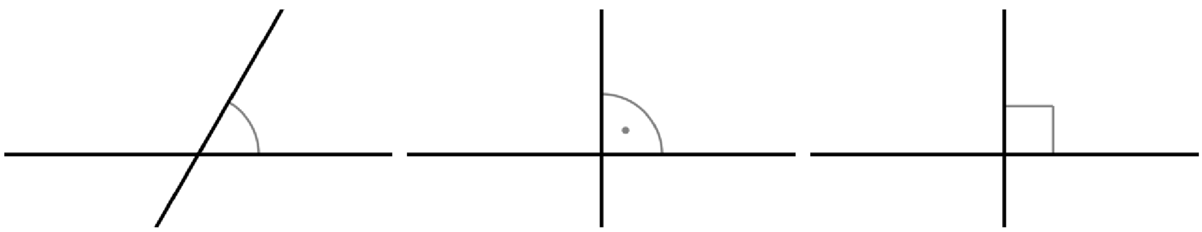
Ve škole se tradičně učí, že kolmost poznáme tak, že dané přímky svírají pravý úhel. Je tu však otázka, jak poznáme, že dvě přímky svírají pravý úhel? Nemáme k dispozici žádný „úhloměr“ a podobné věci! Další problém je, že už vůbec nevíme, jak poznáme pravý úhel mezi přímkou a kružnicí, natož mezi dvěma kružnicemi. A co je to vůbec úhel mezi dvěma kružnicemi??

Nejdřív si musíme udělat pořádek v různých pojmech! Začneme u úhlu. **Úhel** je pojem, který **souvisí s otáčením**. Jak už víme z kapitoly o otočení, úhel nám říká, jak moc se máme otáčet (a orientovaný úhel také říká, kam se máme otáčet). Euklides ve svých *Základech* také mluví o úhlech; má ale na mysli úplně něco jiného:

„Úhel je vzájemný sklon dvou čar, které se stýkají v jednom bodě.“

Zaprvé Euklides mluví o dvou čarách, což znamená dvě křivky! Euklides tedy uměl určovat „úhel“ mezi dvěma přímkami, ale i mezi dvěma kružnicemi nebo mezi přímkou a kružnicí – prostě mezi dvěma křivkami. Zadruhé Euklides nemluví o žádném otáčení, ale o vzájemném *sklonu* dvou křivek. To, co myslí pojmem *úhel* je tedy něco, co bychom dnes označili jako **odchylka**. Odchylka dvou přímek nám říká, jak moc jsou dvě přímky od sebe „rozevřené“.

Bohužel dnes se v matematice pojmy *úhel* i *odchylka* míchají do sebe a je mnohdy těžké je odlišit. Odchylku dvou přímek označujeme malým obloučkem, který se také používá pro označení úhlu (a o tom je řeč ☹). V případě, že se jedná o pravý úhel, který je mezi všemi úhly speciální, značí se taktéž obloučkem, ale dovnitř tohoto obloučku je přidána tečka. My si zavedeme ještě jedno nové značení, a to označení největšího možného „rozevření“, tedy *odchylky* dvou přímek. Takové přímky, které mají maximální odchylku (jsou co nejvíc od sebe „rozevřené“), jsou přímky na sebe **kolmé**. Zavedeme tedy nové označení pro kolmé křivky a tím bude malý čtvereček. Všechna tři označení vypadají takto:



úhel *pravý úhel* *kolmost*

Teď si asi říkáte, že přece pravý úhel a kolmost je jedno a to samé, takže na co máme dvě různá označení? Není to však úplně pravda. Pokud nějaké dvě přímky svírají pravý úhel, pak musí být na sebe kolmé. A pokud jsou nějaké dvě přímky na sebe kolmé, pak musí svírat pravý úhel. Je to tak a ne jinak. Pravý úhel a kolmost spolu velmi úzce souvisí. ALE! Rozdíl mezi pravým úhlem a kolmostí je ten, že **pravý úhel** souvisí s *otáčením* (protože se jedná o úhel) a **kolmost** je určitá *vlastnost*, kterou má dvojice přímek – je to speciální vzájemná poloha dvou přímek. Kolmost tedy souvisí s *odchylkou*. Navíc odchylku můžeme mít mezi libovolnými křivkami, zatímco pravý úhel tradičně určujeme pouze mezi dvěma přímkami (případně úsečkami, ale to jsou jen části přímek).

Pojmy máme vyřešené, teď se vrhneme na to, jak poznáme, zda jsou dvě přímky na sebe kolmé. Stejně jako u rovnoběžek, tak i nyní použijeme pro určení kolmosti její **definici**. Tady je:

„Dvě přímky jsou na sebe kolmé, pokud libovolný bod jedné z nich
má stejnou vzdálenost k oběma krajním bodům libovolné úsečky, která
leží na druhé z přímek a jejíž střed je totožný s průsečíkem obou přímek.“

Vítejte v pekle! Když člověk vidí něco podobného v učebnici, rázem ho přejde chuť se jakoukoliv matematiku učit. Pojďme to ale na chvíli překousnout a společně se tou pekelnou větou prokousat, abychom ji pochopili. Číst si to stále dokola jako modlitbu a čekat, že nás něco osvítí, asi nebude tím správným řešením. Nejlepší způsob, jak pochopit dlouhou matematickou větu plnou pojmů je si ji rozkouskovat na několik částí, ty se snažit samostatně pochopit a pak si to vše složit dohromady. Pojďme na to!

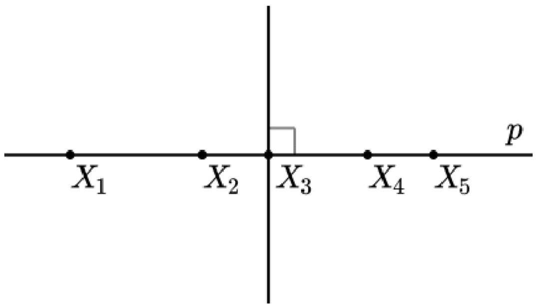
„Dvě přímky jsou na sebe kolmé, pokud...“

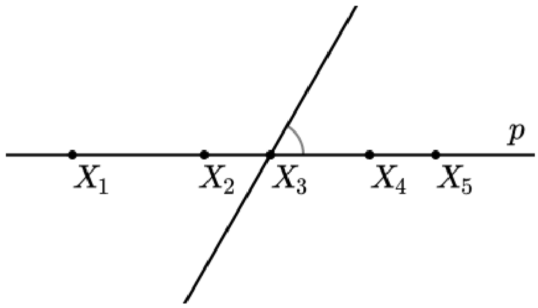
To je pohodička. Začátek věty nám říká, že v případě, kdy vše ostatní, co ve větě následuje bude pravda, tak potom jsou dvě dané přímky kolmé. Je to vlastně uvedení podmínky kolmosti – pokud je to co ve větě následuje splněno, pak jsou dvě přímky kolmé.

„...libovolný bod jedné z nich...“

Tady nám začíná první podmínka, která musí být splněna. Libovolný bod jedné z nich. Jedné z čeho? Nějak to nedává smysl, takže se musíme vrátit ve větě zpět, abychom věděli, o čem se mluví. V předchozí části se mluvilo o dvou přímkách, takže „jedna z nich“ bude jedna z těch dvou přímek. Část věty tedy mluví o libovolném bodě jedné z přímek – těch přímek, které mají být kolmé.

Nyní je na čase si udělat nějakou představu. Nejlépe konkrétní, a tedy začít si kreslit obrázek toho, co nám věta říká, protože obrázek vydá za tisíc slov. Také bude vhodné si veškeré pojmy/objekty, o kterých matematická věta hovoří nějak označit, abychom se v nich vyznali. Libovolný bod tedy označme jako bod X a jednu z přímek označme jako přímku p. Je jedno, která z obou přímek to bude.

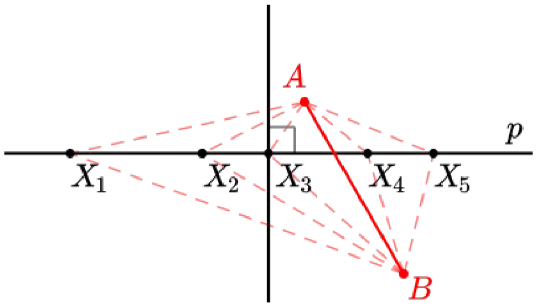


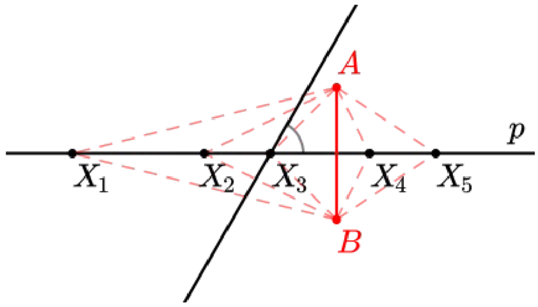


Vše názorně ukazují výše uvedené obrázky. Jsou tu dva; jeden, na kterém jsou přímky kolmé a druhý, na kterém jsou obecné. To proto, že chceme ukázat, že v případě kolmých přímek věta opravdu funguje a v případě obecných nefunguje. Na obrázku je také několik bodů X a to z toho důvodu, že můžeme použít libovolný bod a chceme tedy ukázat, že pro všechny body věta platí nebo naopak neplatí.

„ …*má stejnou vzdálenost k oběma krajním bodům libovolné úsečky,* … “

Má stejnou vzdálenost. Co má stejnou vzdálenost? V předchozí části věty se mluví o libovolném bodě, tedy námi označený bod X má mít stejnou vzdálenost k oběma krajním bodům libovolné úsečky. Označme si tyto krajní body úsečky jako A a B a zakresleme libovolnou úsečku AB do obrázku:





Když se teď podíváme na naše obrázky, zjistíme, že jsme v háji ☹. U kolmých přímek jsme zvolili nějakou úsečku, ale pro žádný z vyznačených bodů X nám neplatí, že $|AX| = |BX|$. U obecných přímek jsme navíc našli takovou polohu úsečky AB, že naopak pro všechny body platí $|AX| = |BX|$. Zdá se, že všechno je naopak, že vše je špatně.

Evidentně je něco v nepořádku. Že by daná věta neplatila? Možné je vše, ale spíš jsme někde udělali chybu; jenže kde? Když se navíc ještě podíváme na obrázky, zjistíme, že to jestli je libovolný bod X přímky p stejně vzdálený od krajních bodů úsečky AB vůbec nezávisí na druhé přímce, ale pouze na poloze úsečky AB!

Kde je tedy chyba?? Chyba je v tom, že neumíme číst! Když se koukneme zpět na část věty, kterou momentálně řešíme, uvidíme, že na konci této části věty se nachází čárka. Tato čárka nám říká dvě věci. Zaprvé to, že věta zde nekončí a bude ještě pokračovat. Zadruhé bychom si měli uvědomit, že po čárce většinou následují doplňující informace k předmětu z předchozí části věty. Tímto předmětem je v naší větě úsečka – tedy po čárce ve větě se bude ještě mluvit o dané úsečce a najdeme tam nějaké doplňující informace.

i

Jaké je tedy poučení z předchozí situace? Ne vždy je možné větu rozsekat na malé kousky a ty poté postupně skládat. Někdy je třeba některé části přeskočit a vrátit se k nim později, aby celá věta dávala smysl, a hlavně abychom se nedopustili obdobné chyby – tedy že v posloupnosti kroků vypustíme nějakou zásadní informaci, která se ale nalézá v dalších částech věty!

Co tedy teď? Část věty, kterou jsme právě řešili přeskočíme a půjdeme dál. Ale pozor, musíme se k ní pak zase vrátit! Takže co máme ve větě dál:

„ …úsečky, která… “

No a je to jasný. Kdybychom se hned podívali za čárku a uviděli slovo která, tak by nám hned bylo jasné, že máme ve čtení pokračovat dál ☺.

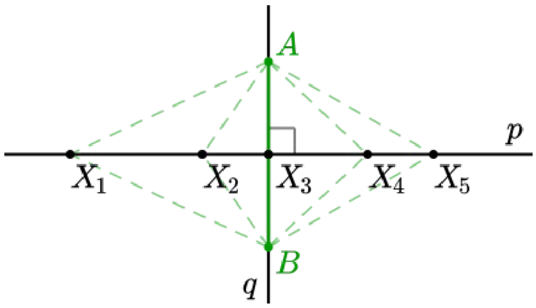
„ …leží na druhé z přímek a… “

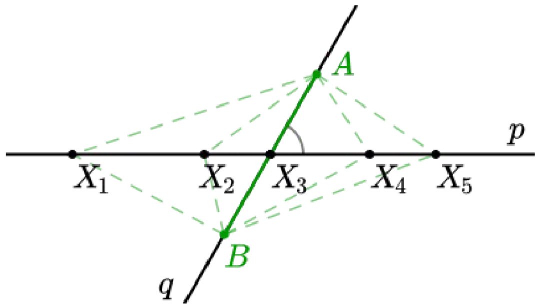
Takže řešíme úsečku námi označenou AB a už víme, že nemůže být libovolná (i když se to v té větě vlastně psalo – hmm, to je nějaký divný…). Podle této části věty musí tato úsečka ležet na druhé přímce. Tu si označíme jako q a podle této části věty má platit, že $A, B \in q$. Pojďme si to tedy nakreslit.

STOP! Neudělejme stejnou chybu dvakrát! Naše část věty končí *spojkou a*, takže ještě budou pokračovat další informace o úsečce AB. Kdybychom teď začali opět kreslit, riskujeme, že to budeme mít znovu špatně. Takže čtěme dál:

„ …jejíž střed je totožný s průsečíkem obou přímek.“

Střed úsečky AB tedy má být totožný s průsečíkem přímek p a q. Tento průsečík už máme označený jako bod X_3, stačí tedy, aby pro úsečku AB byly splněné dvě podmínky: $A, B \in q$ a $|AX_3| = |BX_3|$. Pojďme se podívat na obrázek, abychom neztratili přehled o tom, co děláme:





Úsečku AB již máme správně, vrátíme se tedy k části věty, kterou jsme přeskočili:

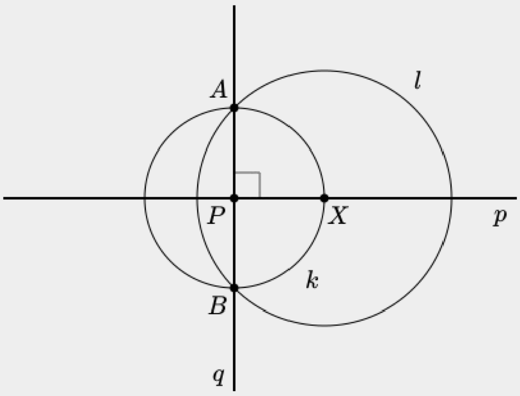
„ …má stejnou vzdálenost k oběma krajním bodům libovolné úsečky, která… “

Tento úryvek říká, že krajní body libovolné úsečky AB (která však splňuje podmínky $A, B \in q$ a $|AX_3| = |BX_3|$) mají mít stejnou vzdálenost k libovolnému bodu $X \in p$, tedy $|AX| = |BX|$. Pokud tato rovnost platí pro libovolný bod X, pak jsou přímky p a q kolmé. Pokud pro libovolný bod tato rovnost neplatí, pak přímky kolmé nejsou. Pokud se koukneme na animaci výše, zjistíme, že vše sedí 😉.

Počkat! Určitě vše sedí? Co když si vybereme za libovolný bod X právě bod X_3? Neznamenalo by to, že jsou pak všechny přímky kolmé? Označení **libovolný bod** znamená v podstatě **každý bod**. Pokud něco platí pouze pro jeden takový bod, nic to neznamená. Podmínka musí platit pro všechny body. V případě, že existuje jediný bod, který tuto podmínku nesplňuje, pak podmínka pro libovolný bod neplatí. A v případě obecných přímek existuje jediný bod (a to bod X_3), pro který podmínka platí; zato však nekonečně mnoho dalších bodů, kde podmínka neplatí. Je tedy vše v pořádku.

Povídání o kolmicích ukončíme praktickou konstrukcí, která nám umožní určit, zda jsou dvě přímky kolmé či nikoliv. Sestrojíme kružnici se středem v průsečíku obou kružnic s libovolným poloměrem. Ta nám na jedné z přímek vytne dva body, které mají stejnou vzdálenost od středu kružnice, tj. průsečíku. Tyto dva body jsou krajními body úsečky AB. Na druhé z přímek nám kružnice určí dva další body; z nich si vybereme jediný, který bude náš bod X. Sestrojíme další kružnici se středem v bodě X, která prochází bodem A. Pokud tato kružnice prochází též bodem B, znamená to, že bod B má stejnou vzdálenost od bodu X jako bod A od bodu X, a tudíž jsou přímky kolmé. Pokud kružnice bodem B neprochází, vzdálenosti jsou různé a přímky na sebe nejsou kolmé.

Test kolmosti dvou přímek – zápis konstrukce



Jsou dány různoběžné přímky p a q.
Jsou na sebe tyto přímky kolmé?

1. $P;\ P \in p \cap q$
   Označíme bod P, který je průsečíkem přímek p a q.
2. $X;\ X \in p \quad \wedge \quad X \neq P$
   Na přímce p zvolíme libovolný bod X, který je různý od bodu P.
3. $k(P);\ X \in k(P)$
   Sestrojíme kružnici k se středem P, která prochází bodem X.
4. $A;\ A \in k(P) \cap q$
   $B;\ B \in k(P) \cap q \quad \wedge \quad B \neq A$
   Označíme body A a B, které jsou průsečíky kružnice $k(P)$ a přímky q.

5. $l(X);\ \ A \in l(X)$

Sestrojíme kružnici l se středem X, která prochází bodem A.

$$\boxed{B \in l(X) \ \Leftrightarrow \ p \perp q}$$

Bod B leží na kružnici $l(X)$, což znamená, že přímka p **je kolmá** na přímku q.

$$\boxed{B \notin l(X) \ \Leftrightarrow \ p \not\perp q}$$

Bod B neleží na kružnici $l(X)$, což znamená, že přímka p **není kolmá** na přímku q.

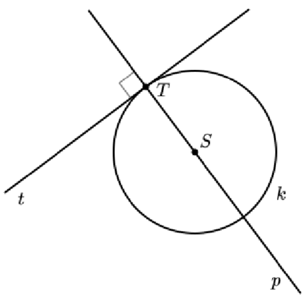
Tak a máme za sebou celé povídání o kolmých přímkách. Pokud to pro vás bylo náročné, doporučuji si zde dát pauzu! Možná jste něco úplně nepochopili. Nevadí. Odpočiňte si a vraťte se k této části později ☺. Pokud máte dostatek sil, budeme pokračovat. Kromě kolmých přímek ještě totiž musíme dořešit kolmou přímku a kružnici a také dvě kružnice. Pojďme na to!

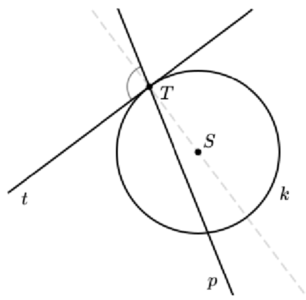
Přímku kolmou na kružnici (a naopak kružnici kolmou na přímku) jsme v této učebnici řešili již několikrát. Bylo řečeno, že pokud přímka prochází středem kružnice, jsou obě dvě křivky na sebe kolmé. Nyní si vysvětlíme, proč tomu tak je.

Nejprve však musíme definovat, kdy je kružnice kolmá k jiné křivce, protože v původní definici kolmosti jsme řešili pouze dvě přímky. Zde je tedy **definice** kolmosti **pro kružnici**:

„Kružnice je kolmá na jinou křivku, pokud je na tuto křivku kolmá tečna dané kružnice sestrojená v průsečíku této kružnice s danou křivkou.“

Nyní doporučuji si tuto větu několikrát přečíst, rozebrat si ji stejným způsobem jako minulou definici a snažit se pochopit co přesně znamená. Jinými slovy tato definice říká, že kružnici stačí nahradit její tečnou v průsečíku, kde zkoumáme kolmost. Pokud je tato tečna kolmá k dané křivce, je kolmá i sama kružnice. Srovnejte si toto tvrzení s uvedenou definicí! A jako obvykle, obrázek vydá za tisíc slov:

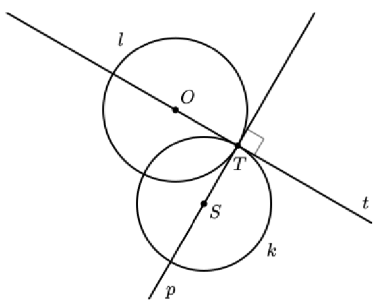


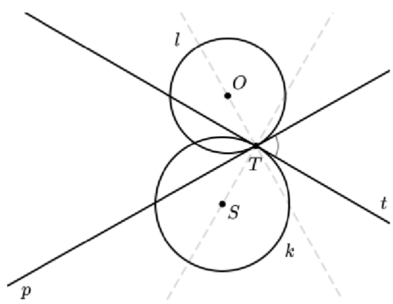


Nyní slibované vysvětlení. Zjišťujeme, zda je přímka p (procházející středem kružnice S) kolmá na kružnici $k(S)$. Tečna t kružnice $k(S)$ v libovolném bodě T je vždy kolmá na přímku spojující bod dotyku T a střed kružnice S (viz kapitolu *Co je třeba znát!*, část **Tečny ke kružnici**). Touto tečnou t nahradíme kružnici $k(S)$ a zjišťujeme, zda je kolmá na přímku p. Tečna t vznikla jako kolmice na přímku spojující body S a T. Přímka p prochází středem S a její průsečík s kružnicí $k(S)$ je bod T. Z toho vyplývá, že přímka p je totožná s přímkou procházející body S a T a tudíž je kolmá k tečně t; a tím pádem je i kolmá ke kružnici $k(S)$. Pokud by přímka p neprocházela středem S, nebyla by totožná s přímkou procházející body S a T (obě přímky by měly společný pouze bod T). Kolmice k tečně t v bodě T však existuje pouze jedna, a tudíž by přímka p nebyla kolmá k tečně t a tím pádem ani ke kružnici $k(S)$.

Ze všech těch písmenek jde hlava kolem, ale zkuste si vše projít s pomocí obrázků výše, pomalu a v klidu. Uvidíte, že toto vysvětlení dává smysl.

Zbývá nám poslední případ, a to dvě vzájemně kolmé kružnice. Vypadá to, že potřebujeme další definici na to, kdy jsou na sebe dvě kružnice kolmé, ale není to tak! Stačí nám předchozí definice kolmosti kružnice na jinou křivku. Jak to? Představte si dvě kružnice. Řešíme, kdy jsou na sebe kolmé. Vezmeme výše uvedenou definici a to tak, že jednu kružnici považujeme za kružnici a druhou za zmiňovanou křivku. Z první kružnice tedy uděláme tečnu v průsečíku a řešíme případ, kdy je tato tečna kolmá ke druhé kružnici. A tento případ jsme tu před chvilkou řešili. Z druhé kružnice uděláme tečnu v průsečíku a řešíme, zda jsou obě tečny na sebe kolmé. V případě dvou kružnic tedy obě kružnice nahradíme jejich tečnou v průsečíku a pak už jen zkoumáme, zda jsou tyto tečny na sebe kolmé. Vše si ještě názorně projděte s obrázky:





Gratuluji! Právě jste se prokousali asi nejtěžší částí této učebnice. Samotná geometrie zas tak náročná není, ale všechny ty věty a definice… Pokud jste všechno hned pochopili, jste borci! Pokud ne, vůbec to nevadí. Zkuste se k této části vrátit později (a mezitím si přečíst něco dál nebo si dát pár dní oddech). Uvidíte, že věci, které se dříve zdály málo pochopitelné či naprosto nepochopitelné jsou najednou jednodušší a pochopitelnější.

Pokud se vám tato část zdála stejně jednoduchá jako ty ostatní, je tu pro vás výzva! Zkuste přijít na to, jak sestrojit kružnici $q(O)$, která je kolmá ke kružnici $k(S)$, pokud máte zadaný pouze střed O a kružnici $k(S)$.

Konstrukce kolmé kružnice

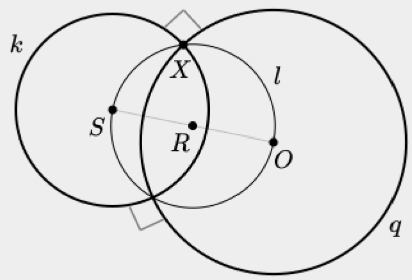
Pokud jsou na sebe dvě kružnice kolmé, musí tečna každé kružnice sestrojená v jejich průsečíku procházet středem druhé kružnice. To je podmínka toho, aby na sebe byly dvě kružnice kolmé. My máme zadanou kružnici a střed druhé kružnice. Bohužel však neznáme jejich průsečíky. Ty právě musíme najít, abychom kolmou kružnici sestrojili!

To, že tečna v průsečíku jedné kružnice prochází středem druhé kružnice, však také znamená, že tečna vedená ze středu druhé kružnice má s první kružnicí společný bod dotyku, který je právě průsečíkem kolmých kružnic! Je to prostě jen obrácená logika zdůvodnění toho, proč jsou na sebe dvě kružnice kolmé.

V tom případě je ale vše velmi jednoduché. Ze zadaného středu vedeme k zadané kružnici tečnu. Tato tečna bude mít se zadanou kružnicí jeden společný bod (*bod dotyku*), který bude průsečíkem obou kružnic. Nyní jen jednoduše sestrojíme kružnici se zadaným středem procházející tímto průsečíkem a máme hotovo! Navíc v konstrukci nemusíme ani zmiňovanou tečnu použít, protože sama tato tečna je zbytečná. Tu potřebujeme pouze proto, abychom našli bod dotyku, a ten v případě konstrukce tečny z bodu nalezneme pomocí *Thaletovy kružnice* sestrojené nad průměrem, který určují oba středy kolmých kružnic.

Pokud se ve vysvětlení z předchozího odstavce trochu ztrácíte, projděte si následující konstrukci a pak si předchozí odstavec znovu přečtete:

Kolmá kružnice – zápis konstrukce



Je dána kružnice $k(S)$ a střed O kolmé kružnice.

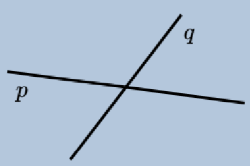
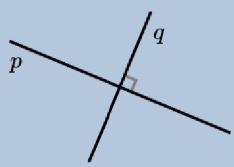
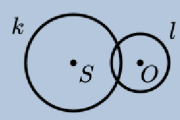
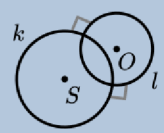
1. $l(R);\ \tau_{SO}$
   Sestrojíme *Thaletovu kružnici* $l(R)$ nad průměrem SO.
2. $X;\ X \in k(S) \cap l(R)$
   Označíme bod X, který je průsečíkem kružnic $k(S)$ a $l(R)$.
3. $q(O);\ X \in q(O)$
   Sestrojíme kružnici q se středem O, která prochází bodem X.

Kružnice $q(O)$ je hledaná **kolmá kružnice** na kružnici $k(S)$.

Zkrácený zápis konstrukce:

$$\boxed{q(O);\ \ q(O) \perp k(S)}$$

Na závěr uvádíme vzájemnou polohu *sečných křivek*, a to dvou přímek a dvou kružnic, protože polohu přímky a kružnice jsme již řešili dříve. Dvě *různoběžné* přímky mohou být *obecné sečné přímky*, zkráceně **sečné přímky** nebo v případě jejich kolmosti *kolmé sečné přímky*, zkráceně **kolmé přímky**. Stejně tak dvě *různoběžné* kružnice mohou být *obecné sečné kružnice*, zkráceně **sečné kružnice** a v případě jejich kolmosti *kolmé sečné kružnic*e, zkráceně **kolmé kružnice** (těm se také někdy říká *ortogonální kružnice*).

SEČNÉ PŘÍMKY ***[intersecting lines]***	**KOLMÉ PŘÍMKY** ***[perpendicular lines]***	**SEČNÉ KRUŽNICE** ***[intersecting circles]***	**KOLMÉ KRUŽNICE** ***[orthogonal circles]***
			
Obecné sečné přímky mají **1 společný bod** (*průsečík*). Označení sečných přímek: $p \nparallel q$.	Kolmé sečné přímky mají **1 společný bod** (*průsečík*). Označení kolmých přímek: $p \perp q$. Vzájemná odchylka obou přímek je největší možná!	Obecné sečné kružnice mají **2 společné body** (*průsečíky*). Sečné kružnice nemají žádné speciální označení.	Kolmé sečné kružnice mají **2 společné body** (*průsečíky*). Označení kolmých kružnic: $k(S) \perp l(O)$. Tečny *ortogonálních* kružnic v jejich průsečících jsou vzájemně kolmé a procházejí středy těchto kružnic!

3.7.4 Kritéria vzájemné polohy křivek

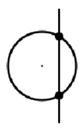
Pojďme si ještě jednou shrnout všechny možné vzájemné polohy dvou křivek a to, jak je vzájemně rozlišit. Na úvod poznamenejme, že kolmé křivky jsou speciálním případem sečných křivek a v následující podkapitole je nebudeme rozlišovat. Stejně tak soustředné kružnice jsou speciálním případem vnitřních mimoběžných kružnic.

Vzájemná poloha dvou přímek – rozlišujeme 2 vzájemné polohy: *sečné přímky* (*různoběžky*) a *tečné přímky* (*rovnoběžky*). Kritérium pro jejich rozlišení je počet společných bodů těchto přímek. *Sečné přímky* mají **1 společný bod**, *tečné přímky* nemají **žádný společný bod**. V případě, že bychom do společných bodů počítali i bod v nekonečnu (čímž se odlišuje inverzní geometrie od klasické), budou mít sečné přímky 2 společné body a tečné přímky 1 společný bod; každopádně v obou případech mají sečné přímky o jeden společný bod více.

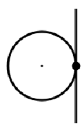
různoběžky
1 bod

rovnoběžky
žádný bod

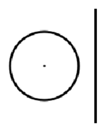
Vzájemná poloha přímky a kružnice – rozlišujeme 3 vzájemné polohy: *sečny*, *tečny* a *mimoběžky*. Kritérium pro jejich rozlišení je opět počet společných bodů. *Sečny* mají **2 společné body**, *tečny* **1 společný bod** a *mimoběžky* nemají **žádný společný bod**.



sečny
2 body



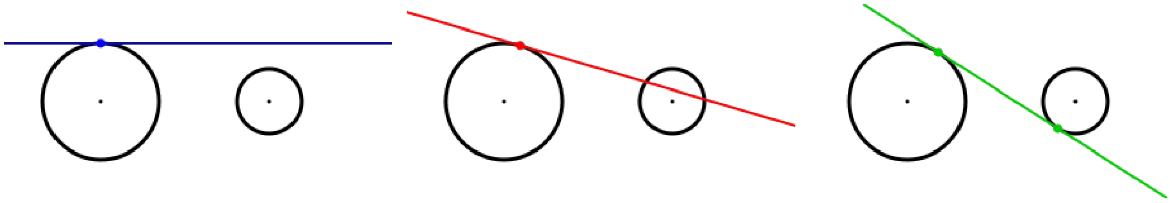
tečny
1 bod



mimoběžky
0 bodů

Vzájemná poloha dvou kružnic – rozlišujeme celkem 5 vzájemných poloh: *sečny*, *vnitřní tečny*, *vnější tečny*, *vnitřní mimoběžky* a *vnější mimoběžky*. Kritérium pro jejich rozlišení nyní nebude společný počet bodů! Proč? Protože vnitřní a vnější tečny i vnitřní a vnější mimoběžky mají stejný počet společných bodů. Museli bychom tak ke společným bodům přidat ještě nějakou další podmínku, která by nám určila, zda se jedná o vnitřní nebo vnější kružnice. Takový způsob je možný, ale existuje i mnohem elegantnější způsob rozlišení těchto poloh. Tímto kritériem jsou tzv. *společné tečny*.

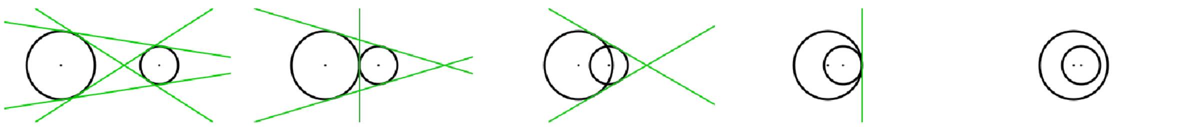
Co jsou to společné tečny? Představme si dvě vnější mimoběžné kružnice. Na jedné z kružnic si vybereme libovolný bod a tímto bodem vedeme k dané kružnici tečnu. Tato tečna zaujímá vůči druhé kružnici jistou polohu. Může být ke druhé kružnici mimoběžná, může k ní být sečná, a nebo k ní může být tečná – tedy bude s ní mít pouze jeden společný bod, bod dotyku. V tomto třetím případě se jedná o tzv. **společnou tečnu**, protože je tato přímka tečná k oběma daným kružnicím. Vše jasně shrnují následující obrázky:



mimoběžná tečna *sečná tečna* *tečná tečna (společná tečna)*

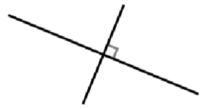
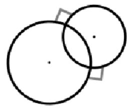
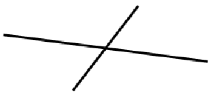
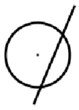
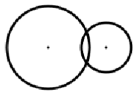
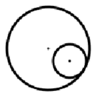
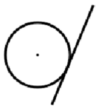
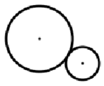
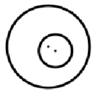
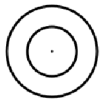
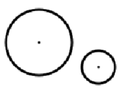
Společných tečen může být i více než jedna; popravdě většina kružnic má společných více než jednu tečnu. Maximální počet společných tečen, které mohou dvě kružnice mít, jsou čtyři. Počet společných tečen však závisí na vzájemné poloze obou kružnic. U různých poloh je počet společných tečen různý – a právě proto používáme počet společných tečen jako kritérium pro vzájemnou polohu dvou kružnic.

Vnější mimoběžné kružnice mají celkem **4 společné tečny**, *vnější tečné kružnice* o jednu míň, tedy **3 společné tečny**, *sečné kružnice* pouze **2 společné tečny**, *vnitřní tečné kružnice* dokonce jen **1 společnou tečnu**, a nakonec *vnitřní mimoběžné kružnice* nemají **žádnou společnou tečnu**. Proč tomu tak je je poměrně jasné z následujících obrázků:



vnější mimoběžky **4 tečny** *vnější tečny* **3 tečny** *sečny* **2 tečny** *vnitřní tečny* **1 tečna** *vnitřní mimoběžky* **0 tečen**

Na závěr si zopakujme všechny různé vzájemné polohy dvou křivek, které jsme doposud probrali (jsou to všechny možné existující polohy). Vše přehledně shrnuje následující tabulka:

KŘIVKY		**RŮZNOBĚŽKY**			**ROVNOBĚŽKY**
		dvě přímky	***přímka a kružnice***	***dvě kružnice***	
SEČNY 2 body	***kolmé***	 *kolmé přímky*	 *kolmice*	 *kolmé kružnice*	
	obecné	 *sečné přímky*	 *sečny*	 *sečné kružnice*	
TEČNY 1 bod	***vnitřní***			 *vnitřní tečny*	 *tečné rovnoběžky*
	vnější		 *tečny*	 *vnější tečny*	
MIMOBĚŽKY 0 bodů	***vnitřní***			 *vnitřní mimoběžky*	 *mimoběžné rovnoběžky*
	vnější		 *mimoběžky*	 *vnější mimoběžky*	

3.8 5. KAPITOLA: Inverze

3.8.1 Kruhová inverze

Kruhová inverze, inverze podle kruhu, inverze podle kružnice nebo kruhová souměrnost, souměrnost podle kruhu, souměrnost podle kružnice nebo kruhová symetrie, symetrie podle kruhu a symetrie podle kružnice. To vše jsou různé možné názvy pro zobrazení, které v této učebnici nazýváme **inverze**.

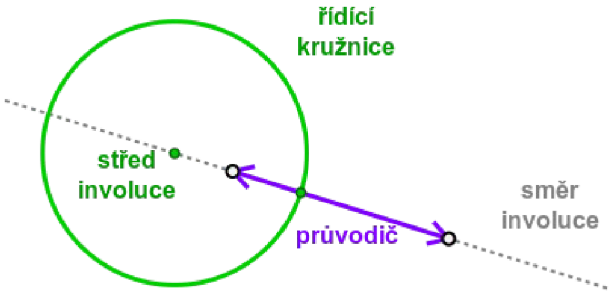
Kritérium (pravidlo) určující kruhovou inverzi je tzv. **řídící kružnice**. Pro zadání pravidla kruhové inverze tedy stačí **3 body**, které jednoznačně tuto kružnici určují (libovolné 3 nekolineární body vždy leží na jediné kružnici). Stejně jako u ostatních involucí (souměrností) nerozlišujeme u kruhové inverze *vzor* a *obraz*, ale pouze **souměrně sdružené** objekty.

Každý bod zaujímá v libovolné souměrnosti určitou polohu vůči řídícímu objektu, kterou znázorňujeme orientovanou úsečkou zvanou **průvodič** daného bodu. Průvodič vychází z řídícího objektu a směřuje do daného bodu. Souměrně sdružené body mají průvodič **stejného směru, ale opačné orientace**. Tento směr se nazývá *směr involuce*. Středu řídící kružnice se někdy říká *střed involuce*.

Odkud přesně vychází průvodič bodu? Stejně jako u zrcadlení platí, že průvodič musí být kolmý na řídící křivku, tedy průvodič každého bodu bude kolmý na řídící kružnici. Jak poznáme, že je úsečka kolmá na kružnici? **Libovolná přímka, která prochází středem kružnice je na tuto kružnici kolmá.** Pokud je tedy úsečka částí takové přímky, je pak kolmá na danou kružnici. Jinými slovy: *Průvodič bodu je taková orientovaná úsečka, která při prodloužení prochází středem involuce.* Hledáme-li na řídící kružnici bod, ze kterého průvodič vychází, nalezneme jej jako průsečík kružnice s přímkou, která prochází středem řídící kružnice a bodem jehož průvodič hledáme. V tomto případě to NUTNĚ MUSÍ BÝT průsečík blíže danému bodu (tedy ten, který se nachází mezi bodem a středem involuce)!

Stejně jako u souměrnosti (a naopak oproti zrcadlení) existují u kruhové inverze **libovolné směry involuce**. Všechny směry involuce vychází ze středu involuce a mohou tak mít libovolný směr.

Následující obrázek ukazuje vztah dvou sdružených bodů v **inverzi** (tedy v *kruhové inverzi*). Průvodiče obou bodů vycházejí z *řídící kružnice*, na kterou jsou kolmé, mají stejný směr (směr involuce), ale opačnou orientaci. **Velikost průvodičů je** v inverzi na rozdíl od souměrnosti či zrcadlení **různá**, a tedy i vzdálenost obou sdružených bodů od řídící kružnice je jiná.



3.8.2 Zobrazení bodu

Když jsme si vysvětlovali všechna předchozí zobrazení, vždy jsme začínali od obrazu bodu a poté jsme si ukazovali, jak se zobrazují přímky a kružnice. U kruhové inverze však takto postupovat nebudeme. Proč? Důvod je prostý, zobrazení bodu v kruhové inverzi je poměrně náročné. Místo toho si nejprve ukážeme, jak se zobrazují přímky a kružnice a teprve úplně nakonec se dostaneme k zobrazení bodu. Tímto postupem si ušetříme mnohá trápení a nakonec nám bude vše daleko srozumitelnější ☺.

3.8.3 Zkoumání zobrazení

V této podkapitole nebudeme prozkoumávat inverzi podobným způsobem jako v předchozích kapitolách. Zobrazení jako osová a středová souměrnost se na školách normálně probírají a zobrazení posunutí a otočení jsou jednoduchá a názorná. Z toho důvodu jsme si mohli dovolit pečlivě zkoumat jejich různé vlastnosti, protože jsme s nimi měli doposud mnohé zkušenosti. Kruhová inverze je však pro nás naprosto nové a neznámé zobrazení a při jeho zkoumání bychom se mohli dostat do slepých uliček. Proto si v této podkapitole všechny důležité vlastnosti pouze uvedeme a detailně zkoumat je budeme až v dalších dílech učebnice; až poté co se s inverzí více seznámíme a zvykneme si na ni.

Zachovává inverze VELIKOST geometrického objektu?

Inverze obecně nezachovává velikost žádného geometrického objektu. Proč? Hlavním důvodem je především to, že velikost průvodičů všech bodů nějakého objektu a průvodičů jejich obrazů je různá, což souvisí s tím, že se jedná o *nelineární zobrazení*. Většina lineárních zobrazení (ale ne všechna) zachovává velikosti objektů, ale zobrazení, které lineární nejsou si velikosti nezachovávají – je to dáno tím, že se úsečky u nelineárních zobrazení nezobrazí vždy na úsečky.

Existují však speciální případy úseček a kružnic, které si velikost zachovávají. U takových objektů je pak velkým dobrodružstvím přijít na to, v kterých případech tomu tak je a proč.

Zachovává inverze TVAR geometrického objektu?

Inverze opět obecně nezachovává tvar žádného geometrického objektu, a to ze stejného důvodu jako u zachování velikosti – průvodiče sdružených bodů mají různou velikost, a tudíž se nezachovávají vzájemné úhly mezi různými body geometrického objektu.

I zde existují speciální případy úseček, které si tvar zachovávají. A nejen to! Nás především zajímají **přímky** a **kružnice**. U nich je zachování tvaru mnohem pozoruhodnější. V některých případech se totiž jejich tvar zachovává (tzn. přímky zůstávají přímkami a kružnice kružnicemi), v jiných případech se naopak přímky mění v kružnice a kružnice v přímky. A o tom, kdy se tyto objekty mění či nemění, budou pojednávat následující kapitoly 😎.

Zachovává inverze UMÍSTĚNÍ geometrického objektu?

Řekli jsme si, že osová souměrnost a kruhová inverze mají mnoho společných vlastností. Pojďme si tedy srovnat, jak to je se zachováním umístění (neboli se *samodružností*) různých objektů u zrcadlení a inverze.

Víme, že u zrcadlení je samodružný takový bod, který je incidentní s řídící přímkou. U inverze je to naprosto stejné. Body incidentní s řídící kružnicí jsou všechny samodružné, tedy **řídící kružnice je silně samodružná kružnice**.

Dále se zabývejme *slabě samodružnými objekty*. Mezi ty patří i speciální případy úseček, ale stejně jako u ostatních vlastností se jimi nebudeme nijak zvlášť zabývat. Pro nás mnohem zajímavější budou samodružné přímky a kružnice.

U zrcadlení platilo, že slabě samodružná přímka musela být kolmá na řídící přímku a slabě samodružná kružnice byla taková, jejíž střed ležel na řídící přímce. My ale víme, že pokud střed kružnice leží na nějaké přímce, jsou tato kružnice a přímka na sebe kolmé. Tedy u zrcadlení byly slabě samodružné křivky takové, které byly kolmé na řídící přímku. A protože má zrcadlení v tomto stejné vlastnosti jako inverze, musí to platit i pro kruhovou inverzi. Tedy **křivky kolmé na řídící kružnici jsou slabě samodružné**.

Zachovává inverze POLOHU geometrického objektu?

Úsečky a přímky zachovávaly u zrcadlení svou polohu v případě, že byly *rovnoběžné* nebo *kolmé* k řídící přímce. Jak je to u inverze? Oba objekty si i u inverze zachovávají polohu v případě, že jsou **kolmé** k řídící kružnici. Zachovávaly by se, i kdyby byly rovnoběžné, ale takové úsečky ani přímky neexistují 😀.

Ještě by nás mohlo napadnout, že by si polohu mohly zachovávat také rovnoběžné nebo kolmé kružnice, ale my už víme, že kružnice má jen jednu polohu a ta se zachovává stále (pokud se tedy výsledný objekt na kružnici zobrazí).

Zachovává inverze ORIENTACI geometrického objektu?

Inverze obecně nezachovává orientaci žádného geometrického objektu. Stejně jako zrcadlení, tak i inverze mění orientaci geometrických objektů. Ale POZOR! U zrcadlení to platilo vždy. U inverze existují výjimky – speciální případy, u nichž se orientace zachovává. Nebudeme zatím vysvětlovat kdy a proč tomu tak je. Pro zvídavé ale uvedeme, že to souvisí s tím, že u inverze (na rozdíl od zrcadlení) existuje tzv. *střed involuce*. Díky existenci tohoto středu pak mohou nastat případy, u nichž se orientace nemění, ale zůstává zachována.

Následující tabulka shrnuje všechny výše uvedené vlastnosti inverze.

OBJEKT	*VELIKOST*	*TVAR*	*UMÍSTĚNÍ*	*POLOHA*	*ORIENTACE*
BOD	⊖	⊖	(!)	⊖	⊖
ÚSEČKA	(!)	(!)	(!)	(!)	⊖
PŘÍMKA	⊖	(!)	(!)	(!)	⊖
KRUŽNICE	(!)	(!)	(!)	⊖	(!)
MNOHOÚHELNÍK	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗

3.8.4 Zobrazení přímky a kružnice

Když si prohlédneme tabulku vlastností výše, vidíme, že se toho u inverze moc nezachovává. U mnohoúhelníků se nezachovává prakticky nic. Je to způsobené tím, že každý mnohoúhelník má minimálně tři strany a když se podíváme, jak je to s úsečkami, zjistíme, že ty se zachovávají pouze ve speciálních případech. V obecném případě se u mnohoúhelníku nezachová žádná strana a všechny jeho strany se v inverzi změní na oblouky.[23]

Pokud má mnohoúhelník vhodnou polohu, zachová se při inverzi jedna jeho strana (tím je myšleno, že se zobrazí opět na úsečku). Při velmi vhodné poloze se nám podaří zachovat dvě strany mnohoúhelníku. Více stran však zachovat není možné. Z toho důvodu se ani libovolný trojúhelník (jako nejjednodušší z mnohoúhelníků) nikdy nemůže zobrazit opět na trojúhelník! Vznikne pouze jakýsi objekt složený z oblouků a případně jedné či dvou úseček. To platí pro všechny mnohoúhelníky.

Z těchto důvodů nemá smysl se u inverze jakkoliv zabývat mnohoúhelníky. Naši pozornost zaměříme především na přímky a kružnice a na to kdy, proč a jak se při inverzi mění jedna křivka na druhou či naopak zůstávají křivkou stejnou. O obou křivkách, a to jakým způsobem se zobrazují v kruhové inverzi, pojednávají následující dvě kapitoly. V této kapitole si už jen shrneme, co zatím o inverzi víme a upozorníme na podobnosti se zrcadlením. Některé informace poněkud předbíhají následující kapitoly, takže pokud vám bude něco připadat nesrozumitelné nebo nelogické, v dalších kapitolách to bude objasněno.

3.8.5 Inverze

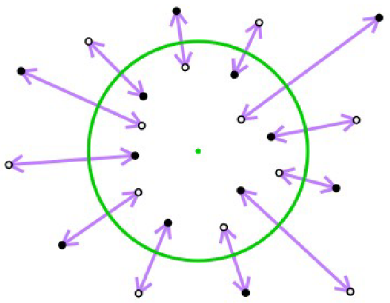
Inverze (nebo také *kruhová inverze*) je kruhové (nelineární) zobrazení, které je určeno *řídící kružnicí*, tedy třemi body (tři body tuto kružnici určují – kružnice jimi prochází). Z této kružnice kolmo vychází orientované úsečky zvané **průvodiče**, které směřují ke všem ostatním bodům. Body, které mají průvodič stejného směru (ale různé velikosti), avšak opačné orientace se nazývají **souměrně sdružené body**. Díky existenci těchto párů bodů nerozlišujeme u jakéhokoliv zobrazení souměrnosti (involuce) mezi vzorem a obrazem.

23 ***Proč zrovna na oblouky?*** – Mnohoúhelníky se skládají z úseček a úsečky jsou části přímek. Protože se v inverzi mění některé přímky na kružnice, mění se i části přímek na části kružnic – tedy úsečky na (kruhové) oblouky.

Zobrazení nezachovává u geometrických objektů obecně žádné zkoumané vlastnosti. Nezachovává se velikost ani tvar, umístění, poloha ani orientace. Existují však speciální případy, kdy se některé z vlastností zachovávají (např. poloha úseček a přímek *kolmých* k řídící kružnici).

Inverze má **nekonečně mnoho samodružných bodů** (všechny tvoří *řídící kružnici*) a **žádné samodružné směry** což znamená, že obraz přímky libovolného směru nebude obecně rovnoběžný s jejím vzorem. Přímky a kružnice jsou slabě samodružné pouze pokud jsou kolmé k řídící kružnici. Řídící kružnice sama je pak silně samodružná.

INVERZE
[inversion]

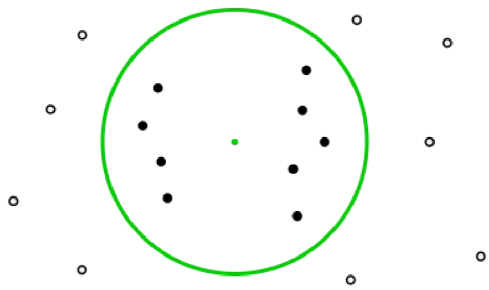


Inverze je zobrazení **inverze určené kružnicí**, ve kterém existují dvojice souměrně sdružených bodů určené *průvodičem* různé velikosti ale stejného směru, avšak opačné orientace.

Značí se velkým písmenem I (*inverze*) s dolním indexem, který určuje pravidlo zobrazení (*řídící kružnici*), např.: $I_{\omega(S)}$.

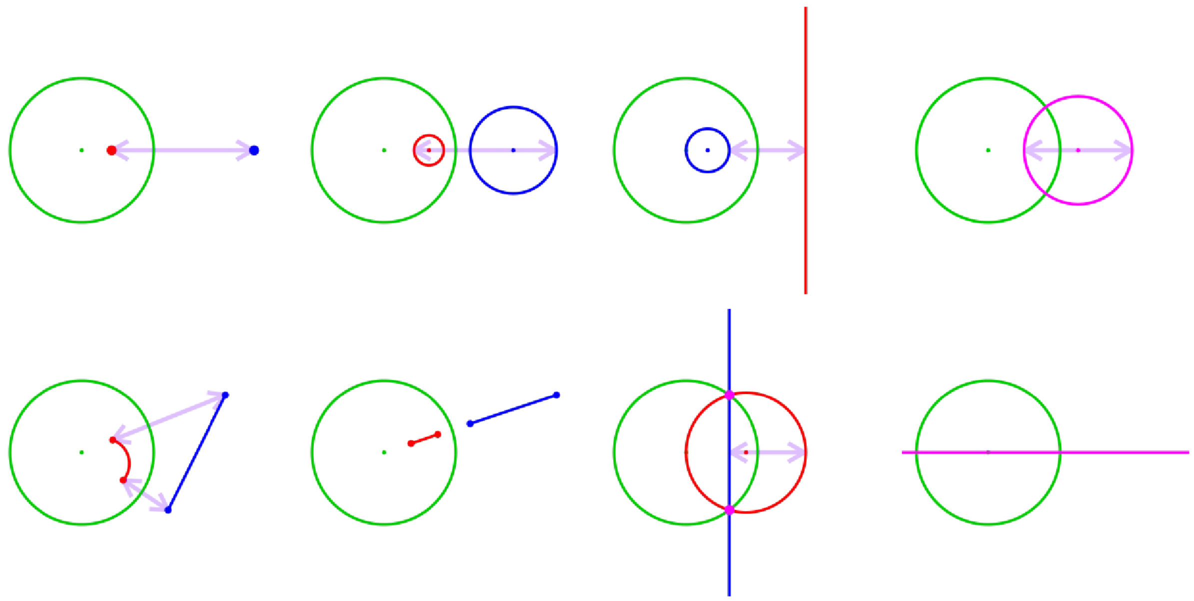
Stejně jako u zrcadlení tak i v případě inverze rozděluje *řídící křivka* (v případě inverze tedy řídící kružnice) rovinu na dvě části – *vnitřní* a *vnější oblast* kružnice. Na rozdíl od zrcadlení nejsou tyto dvě oblasti shodné, každá má trochu jiné vlastnosti. Co je však pro obě zobrazení stejné je to, že VŠECHNY body z jedné oblasti se zobrazí do druhé oblasti a naopak!

Každý bod ze souměrně sdruženého páru se nachází v jiné oblasti určené řídící křivkou!



V zobrazení inverze se tedy vyskytují *3 navzájem různé části* roviny – **2 oblasti** a **1 křivka**. Tyto oblasti jsou *vnitřní* a *vnější oblast* kružnice, které zobrazují své body vždy do té druhé oblasti a touto křivkou je *řídící kružnice*, která zobrazuje své body samy na sebe – je to tedy **silně samodružná kružnice**.

Pro úplné shrnutí ještě slouží následující obrázky, na nichž můžeme vidět vzory a obrazy jednotlivých geometrických objektů s příslušnou řídící kružnicí:



3.9 6. KAPITOLA: Inverze přímek

3.9.1 Zobrazení přímek

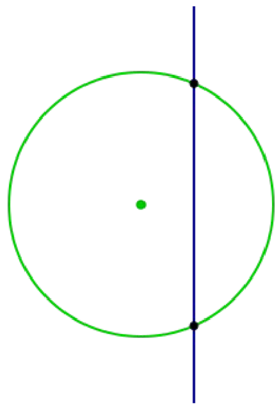
O přímkách už tu snad bylo řečeno vše. Pojďme si ale ještě jednou, pro jistotu, zopakovat co jsme se o nich zatím dozvěděli a co bude pro další studium potřeba. Udělejme to však jen ve zkratce v pár bodech:

- přímka je nekonečně dlouhá rovná čára procházející *bodem v nekonečnu*
- každá přímka je určena libovolnými dvěma body, jimiž tato přímka prochází
- tři libovolné body, které leží na jedné přímce se nazývají *kolineární*
- vůči kružnici může mít přímka celkem 4 různé polohy: *sečna*, *tečna*, *mimoběžka* a *kolmice*
- libovolná přímka, která prochází středem kružnice je na tuto kružnici kolmá
- přímka si v kruhové inverzi zachovává svou polohu a umístění v případě, že je kolmá na *řídící kružnici*
- přímka se v kruhové inverzi zobrazí na přímku nebo na kružnici

Vybaveni těmito znalostmi si postupně projdeme všechny polohy přímky vůči řídící kružnici. Ukážeme si, jakým způsobem se tato přímka zobrazí, a jak obraz této přímky narýsovat.

3.9.1.1 Sečná přímka

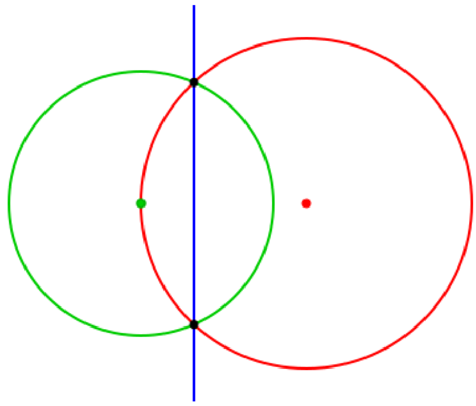
Nejprve začneme sečnou přímkou, protože tato poloha je pro pochopení zobrazení v inverzi nejnázornější a nejjednodušší. Vše si jasně a přehledně vysvětlíme na obrázcích. Nejprve si představme řídící kružnici (na obrázku v zelené barvě) a sečnou přímku (na obrázku v barvě modré, průsečíky s kružnicí jsou vyznačeny černě).



Jaký bude obraz této přímky v inverzi? Máme dvě možnosti; bude to přímka nebo kružnice. Z minulé kapitoly víme, že řídící kružnice je silně samodružná, neboli libovolný bod této kružnice se zobrazí sám na sebe. Sečná přímka má s řídící kružnicí dva společné body (*průsečíky*). Tyto průsečíky leží na řídící kružnici, a tudíž jsou samodružné. To ovšem znamená, že výsledný obraz modré přímky bude také procházet těmito dvěma body.

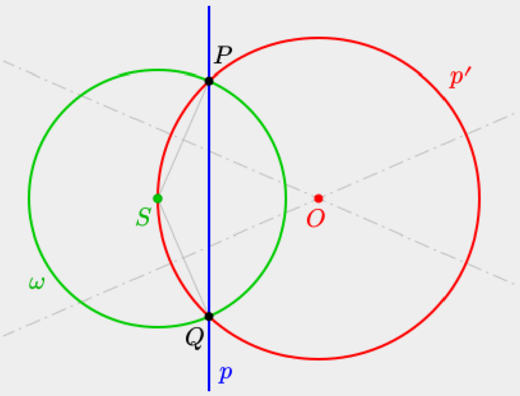
Dvěma body je určena přímka a tím pádem by obraz modré přímky mohla být opět přímka, která by procházela stejnými dvěma průsečíky. To by ovšem znamenalo, že by obrazem modré přímky byla totožná přímka (protože by procházela stejnými body). Totožná znamená také samodružná, ale my z předchozí kapitoly víme, že samodružná přímka musí být kolmá na řídící kružnici, a to modrá přímka není (neprochází totiž středem involuce). Z toho vyplývá, že obrazem modré přímky nemůže být přímka. Musí to tedy nutně být kružnice. Ale jaká?

Dvěma body může procházet nekonečně mnoho kružnic. Abychom kružnici (a tedy i obraz přímky) určili přesně, potřebujeme ještě třetí bod, kterým kružnice prochází. Jaký bod to ale je? Tato informace je posledním dílkem skládačky, který nám pomůže pochopit všechna zobrazení přímek a kružnic v inverzi. Berte ji jako definici: **Obraz libovolné přímky v inverzi VŽDY prochází středem involuce!** Proč tomu tak je? To se dozvíme na samotném konci této učebnice. Je to velice zajímavé a je to něco, co odlišuje inverzi od všech ostatních zobrazení. Zatím však musíme být trpěliví a brát to jako fakt, kterému musíme věřit, abychom mohli pracovat dále.



Nicméně teď už jsme hotovi. Protože jsou průsečíky řídící kružnice a přímky samodružné, musí těmito dvěma body procházet i výsledný obraz modré přímky. Tento obraz také musí procházet středem řídící kružnice (podle právě uvedené definice). Víme, že obrazem bude kružnice (na obrázku v červené barvě) a máme celkem tři body, kterými tato kružnice musí procházet. To je vše, co potřebujeme k jejímu sestrojení. Stačí už jen nalézt střed této kružnice – to jsme si vysvětlovali v úvodní kapitole. Celá konstrukce je uvedená zde:

Inverze přímky (sečny) – zápis konstrukce



Je dána řídící kružnice $\omega(S)$ a k ní sečná přímka p.

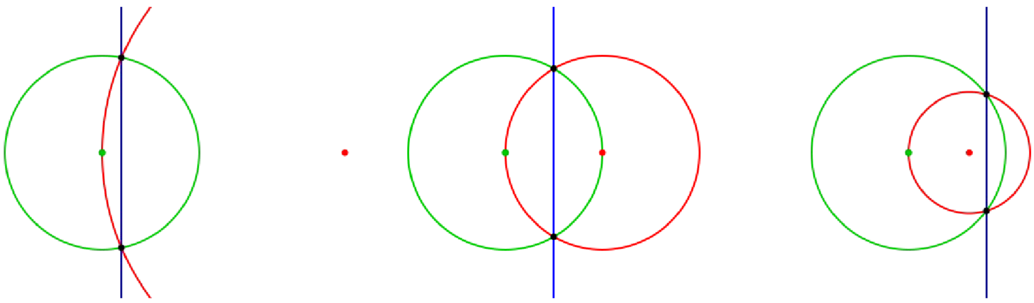
1. $P;\ P \in p \cap \omega(S)$
   $Q;\ Q \in p \cap \omega(S) \quad \wedge \quad Q \neq P$
   Označíme body P a Q, které jsou průsečíky přímky p a řídící kružnice $\omega(S)$.
2. $O;\ |OS| = |OP| = |OQ|$
   Sestrojíme bod O, který je středem kružnice procházející body S, P a Q.
3. $p'(O);\ \ S, P, Q \in p'(O)$
   Sestrojíme kružnici p' se středem O, která prochází body S, P a Q.

Kružnice $p'(O)$ je hledaný **obraz** přímky p v **inverzi** podle kružnice $\omega(S)$.

Zkrácený zápis konstrukce:

$$\boxed{p'(O);\ I_{\omega(S)}[\,p\,]}$$

Než se pustíme do dalšího výkladu, pojďme se ještě zabývat otázkou, jak se mění obraz přímky, když se mění poloha přímky vůči řídící kružnici. Stále chceme, aby přímka zůstala její sečnou. Protože nezáleží na tom, jak bude přímka vůči kružnici „natočená“, bude nás zají-mat pouze to, jak se mění obraz v případě, že se přímka vzdaluje či přibližuje vůči středu řídící kružnice. Následující obrázky by nám měly na tuto otázku odpovědět:

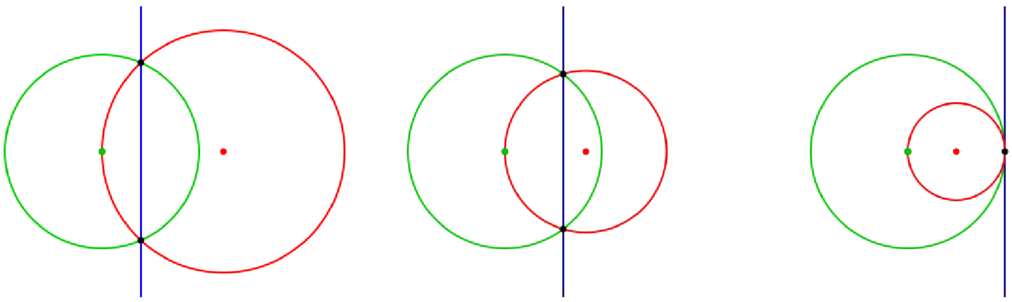


Jak je vidět, obraz modré přímky (tedy červená kružnice) stále prochází průsečíky modré přímky a (zelené) řídící kružnice a také středem involuce. Vidíme, že čím blíže je přímka středu řídící kružnice, tím větší je poloměr červené kružnice a naopak. Čím vzdálenější je přímka od středu involuce, tím menší je poloměr výsledného obrazu.

3.9.1.2 Tečná přímka

Pokud začneme posunovat přímku dál a dál od středu involuce, průsečíky přímky s řídící kružnicí se začnou pohybovat po kružnici a přibližovat se k sobě (teoreticky se vlastně otáčí, přičemž střed otáčení je střed řídící kružnice). V určité vzdálenosti přímky od středu involuce (tato vzdálenost je rovna poloměru řídící kružnice) se pak oba *průsečíky* stanou totožným bodem – *bodem dotyku*; přímka se pak stane *tečnou* řídící kružnice. Podobnou úvahu jsme již prováděli při vysvětlování principu *Thaletovy kružnice*.

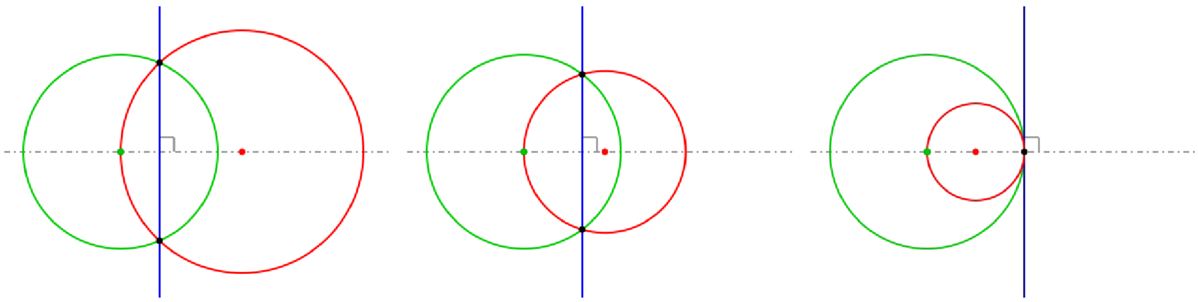
Jaký bude obraz tečné přímky? Víme, že to musí být opět kružnice, protože tečná přímka není kolmá na řídící kružnici a že bude procházet dvěma body – středem involuce a bodem dotyku. To nám ale bohužel nestačí ☹. Abychom přesně určili kružnici, která má být obrazem, musíme mít minimálně tři body. Žádný další bod však už nemáme, nicméně asi už tušíme, jak bude tato kružnice vypadat. Pro úplnou představu jsou tu ještě obrázky:



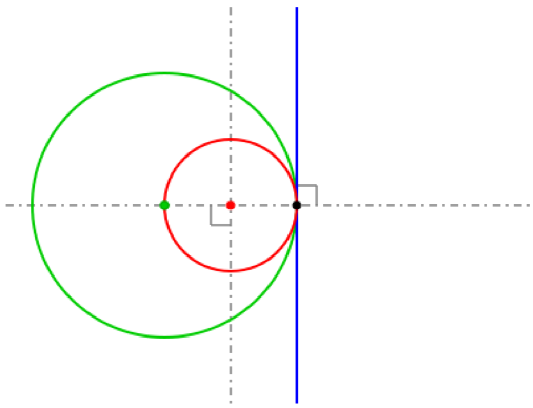
Pokud nemůžeme nalézt další bod, kterým má výsledná kružnice procházet, musíme pro její určení nalézt alespoň střed. Když se nám povede nalézt střed výsledné kružnice, lze ji pak jednoduše sestrojit, protože už známe dva body, kterými prochází. Vraťme se tedy zpět k výše uvedeným obrázkům a zkusme si na nich všimnout kde a jakým způsobem se pohybuje střed výsledné kružnice.

Vypadá to, že střed výsledné (červené) kružnice se pohybuje po přímce. Dá se tedy předpokládat, že pokud by toto platilo pro všechny případy sečné přímky, bude to platit i ve speciálním případě tečné přímky. Tedy v případě, kdy oba průsečíky splynou v jeden bod (zde používáme stejnou logiku jako v případě *Thaletovy kružnice*). Jaká je to ale přesně přímka, po které se střed pohybuje?

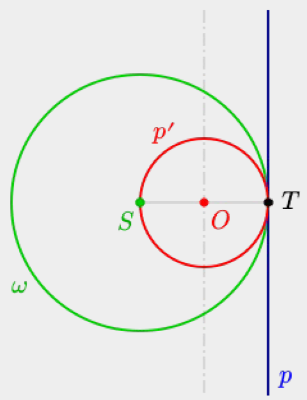
Přímka, na níž se vždy nachází střed červené kružnice je taková přímka, která je kolmá na modrou přímku a která zároveň prochází středem zelené kružnice (tedy řídící kružnice čili středem involuce). Proč? Víme, že střed kružnice, která prochází dvěma libovolnými body, se nachází na ose úsečky, jejíž krajní body jsou ony dva dané body (viz kapitola *Otočení*, část **Pohyb po kružnici**). Z geometrie bychom pak měli vědět, že pokud takové dva body leží na kružnici (v našem případě se jedná o ony dva *průsečíky*), pak osa úsečky, kterou tyto dva body tvoří, prochází středem této kružnice. Tedy osa úsečky, jejíž krajní body jsou průsečíky modré přímky se zelenou kružnicí, prochází středem zelené kružnice. Na této ose pak vždy leží střed červené kružnice.



Hledáme střed červené kružnice (což je obraz modré přímky v inverzi; modrá přímka je vzor). Víme, že prochází dvěma body – středem involuce a bodem dotyku. Ale střed kružnice, která prochází dvěma body, se nachází na ose úsečky tvořené těmito body! Podívejme se na obrázek níže a bude nám hned jasné, kde přesně se střed červené kružnice nachází.



Z obrázku je pak jasně patrné, že pro sestrojení červené kružnice stačí sestrojit *Thaletovu kružnici* nad úsečkou (průměrem), jejíž krajní body jsou střed involuce a bod dotyku:

Inverze přímky (tečny) – zápis konstrukce	
	Je dána řídící kružnice $\omega(S)$ a k ní tečná přímka p. 1. $T;\ T \in p \cap \omega(S)$ Označíme bod T, který je bodem dotyku přímky p a řídící kružnice $\omega(S)$. 2. $p'(O);\ \tau_{ST}$ Sestrojíme *Thaletovu kružnici* $p'(O)$ nad průměrem ST. Kružnice $p'(O)$ je hledaný **obraz** přímky p v **inverzi** podle kružnice $\omega(S)$.

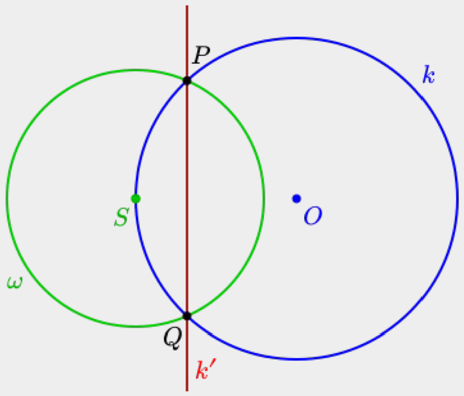
3.9.2 Incidentní kružnice

Prozatím jsme se naučili sestrojit obraz dvou typů přímek – sečné a tečné přímky (vůči řídící kružnici). Ve skutečnosti ale už umíme vytvořit i obraz dvou typů kružnic! Opravdu?? Ale ano. Vzpomeňme si na jednu důležitou věc, která je společná všem zobrazením involuce (souměrnosti) – a sice to, že u nich nerozlišujeme *vzor* a *obraz* (nazýváme je *sdružené objekty*), protože **obraz obrazu je původní vzor**! Pokud tedy máme nějaký objekt a jeho vzor, pak obraz tohoto vzoru je zpátky původní objekt. A protože už víme, že obrazy sečné a tečné přímky jsou nějaké kružnice, tak už známe také obrazy těchto kružnic ☺.

Obrazem *sečné přímky* je **sečná kružnice**, která prochází středem involuce (to musí kvůli definici). Obrazem (*vnější*) *tečné přímky* je **vnitřní tečná kružnice**, která také prochází středem řídící kružnice. Je tedy jasné, že obraz sečné kružnice procházející středem involuce bude sečná přímka a obraz vnitřní tečné kružnice procházející středem involuce bude tečná přímka.

Obě kružnice procházejí středem řídící kružnice. Můžeme také říct, že jsou incidentní se středem řídící kružnice. Zkráceně pak označujeme tyto kružnice jako *incidentní*, což znamená že jsou incidentní se středem involuce. Protože konstrukce jejich obrazů je v jistém smyslu pouze obrácený postup původních konstrukcí, je konstrukce obrazů těchto incidentních kružnic poměrně jednoduchá. U sečné kružnice nalezneme průsečíky s řídící kružnicí a těmito dvěma body vedeme výslednou přímku. U tečné kružnice stačí pouze sestrojit tečnu k řídící kružnici v bodě dotyku.

Inverze kružnice (incidentní sečny) – zápis konstrukce



Je dána řídící kružnice $\omega(S)$ a k ní sečná kružnice $k(O)$ procházející středem involuce S.

1. $P;\ P \in k(O) \cap \omega(S)$

   $Q;\ Q \in k(O) \cap \omega(S) \quad \wedge \quad Q \neq P$

   Označíme body P a Q, které jsou průsečíky kružnice $k(O)$ a řídící kružnice $\omega(S)$.

2. $k';\ P, Q \in k'$

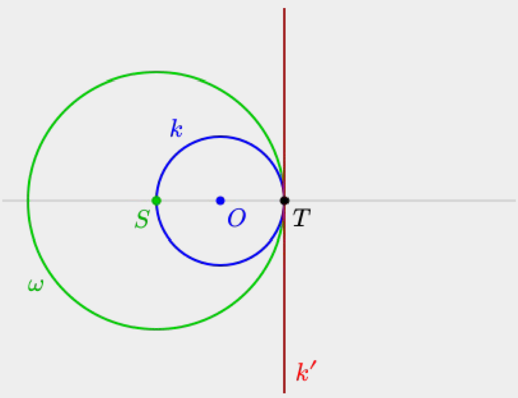
   Sestrojíme přímku k', která prochází body P a Q.

Přímka k' je hledaný **obraz** kružnice $k(O)$ v **inverzi** podle kružnice $\omega(S)$.

Zkrácený zápis konstrukce:

$$\boxed{k';\ I_{\omega(S)}[\,k(O)\,]}$$

Inverze kružnice (incidentní vnitřní tečny) – zápis konstrukce



Je dána řídící kružnice $\omega(S)$ a k ní vnitřní tečná kružnice $k(O)$ procházející středem involuce S.

1. $T;\ T \in k(O) \cap \omega(S)$

   Označíme bod T, který je bodem dotyku kružnice $k(O)$ a řídící kružnice $\omega(S)$.

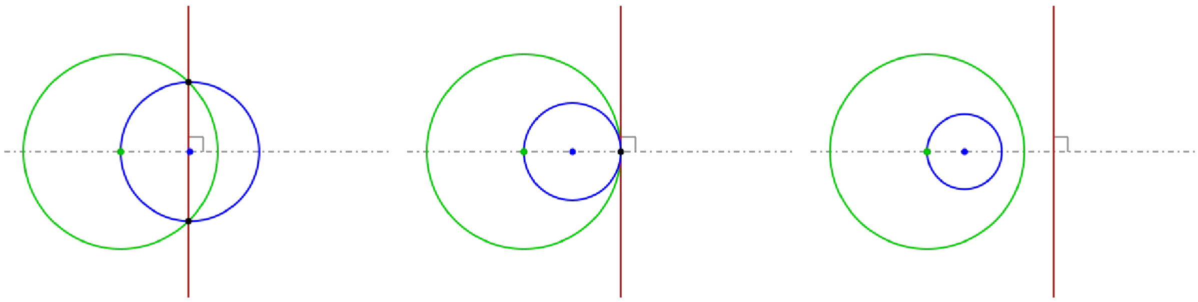
2. $k';\ k' \cap \omega(S) = \{T\}$

   Sestrojíme přímku k', která je tečnou kružnice $\omega(S)$ s bodem dotyku T.

Přímka k' je hledaný **obraz** kružnice $k(O)$ v **inverzi** podle kružnice $\omega(S)$.

Kromě incidentní sečné kružnice a incidentní vnitřní tečné kružnice existuje ještě incidentní vnitřní mimoběžná kružnice (vnější tečna a mimoběžka být incidentní nemohou – důvod je myslím pochopitelný). Jaký bude obraz incidentní vnější mimoběžné kružnice? Tak především je jasné, že to bude přímka. Obraz přímky totiž vždy (z definice) prochází středem involuce. Tím pádem, pokud nějaká křivka prochází středem involuce (je tzv. *incidentní*) musí být její vzor přímkou. A protože můžeme prohodit vzor a obraz, tak i její obraz musí být přímkou. Jak už bylo řečeno, u zobrazení souměrnosti je jedno, která křivka je vzor a která obraz.

Vraťme se k úvahám a obrázkům, které jsme viděli u sečné a tečné přímky v předchozí podkapitole, ale vztáhněme je nyní k incidentní kružnici (ta je na obrázcích níže vyobrazena modře). Když se střed této kružnice přibližuje směrem ke středu involuce, poloměr kružnice se zmenšuje (logicky) a obraz této kružnice (červená přímka) se vzdaluje od středu involuce. Co by se dělo s obrazem modré kružnice, kdyby se její střed posunul ještě blíže ke středu involuce a stala by se tedy mimoběžnou vnitřní kružnicí vůči řídící kružnici? Obrazem by stále byla přímka, protože by kružnice byla incidentní. Když se poloměr modré kružnice zmenšoval, červená přímka se vzdalovala od středu involuce; dá se tedy očekávat, že tomu tak bude i nadále, viz následující obrázky.



Na první pohled to vypadá, že máme docela problém. Když byla modrá kružnice sečnou řídící kružnice, znali jsme dva body, kterými má výsledný obraz (červená přímka) procházet. U tečny jsme znali pouze jeden bod, ale ten určoval tečnu kružnice, takže nám stačil. V tomto případě, kdy je modrá kružnice mimoběžkou řídící kružnice, však neznáme žádný bod, kterým bude červená přímka procházet!

Situace ale není tak tragická, jak to vypadá. I když neznáme žádný bod, kterým bude červená přímka procházet, víme jednu věc! Totiž to, že červená přímka bude kolmá na přímku, po níž se pohybuje střed modré kružnice (na obrázcích výše je tato přímka šedá a čerchovaná). Stačí nám tedy nějak najít libovolný bod červené přímky a pak už z něj jen spustit kolmici na šedou přímku.

Jednotlivé body v inverzi však zatím neumíme zobrazovat – říkali jsme si, že se to naučíme až v závěru této učebnice. Abychom tedy mohli červenou přímku sestrojit, budeme potřebovat nějaký *figl*, který nám s tím pomůže. Ještě předtím si však musíme vysvětlit něco, co se nazývá *zákon zachování incidence*…

3.9.2.1 Zákon zachování incidence

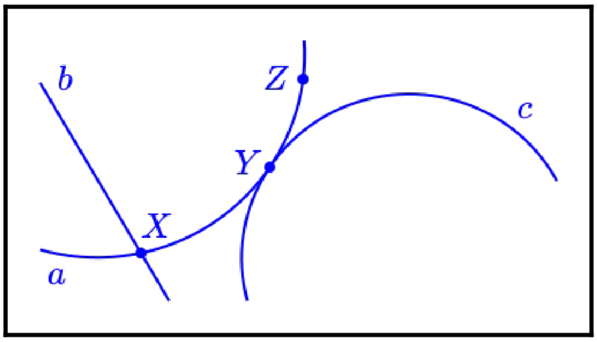
Zní to jako něco hrozně učeného a strašně složitého, ale opak je pravdou 😎. Zákon zachování incidence je něco, co všichni známe. Něco úplně samozřejmého, a to až tak, že jsme se o tom doposud nepotřebovali ani zmiňovat. Teď ale přišel ten čas, protože díky tomuto zákonu budeme moci použít náš fígl k nalezení obrazu incidentní mimoběžné kružnice.

Už dříve jsme v předchozích kapitolách u zobrazení zkoumali, zda se zachovávali určité vlastnosti, např. poloha, orientace apod. U některých zobrazení se některé vlastnosti zachovávali, jiné se nezachovávali (např. u zrcadlení se vždy zachovávala velikost a tvar, ale nikdy se nezachovávala orientace). Nicméně u všech zobrazení (a to jak lineárních, tak i jiných) se VŽDY zachovává incidence. Proto se tomu říká zákon, protože to platí u všech zobrazení.

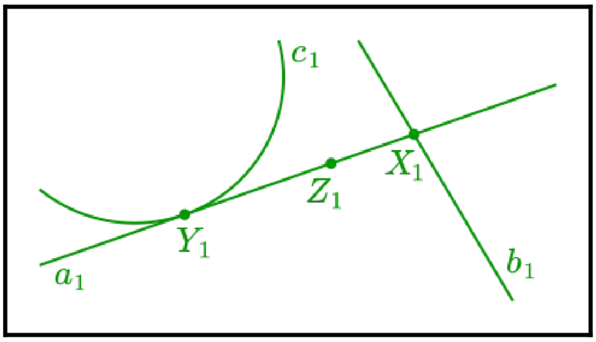
Zákon zachování incidence říká, že pokud máme nějakou křivku a na této křivce leží nějaký bod, pak obraz tohoto bodu bude ležet na obrazu této křivky. Jinými slovy, nesmí se nikdy stát, že na nějaké křivce bude ležet bod, ale na obrazu této křivky už nebude ležet obraz zmíněného bodu. Díky tomu, že existuje zákon zachování incidence, se můžeme spolehnout na to, že libovolný bod nějaké křivky si zachová svou **incidenci** k této křivce – tedy že si zachová vlastnost „ležet na této křivce“. Ostatně nic jiného by nás asi ani nenapadlo, to že by tento zákon neplatil, vypadá absurdně. To je také důvod, proč jsme se o něm zatím nezmiňovali – nebylo to potřeba, protože s ním každý automaticky počítal.

To byl případ incidence bodu ke křivce. Existuje však i případ incidence dvou křivek, který je pro nás mnohem důležitější! V tomto případě říká zákon zachování incidence, že **pokud mají dvě křivky společné nějaké body, pak mají i jejich obrazy společné body a tyto společné body jsou obrazy těch bodů, které byly společné jejich vzorům**. Počet společných bodů a jejich *typ* zůstává zachován. Takže jinými slovy, pokud byly dvě křivky vzájemně sečné a měly společné dva průsečíky, pak i jejich obrazy budou vzájemně sečné a budou mít společné dva průsečíky. Pokud byly dvě křivky tečné se společným bodem dotyku, pak i jejich obrazy budou tečné s jedním bodem dotyku. Tento bod dotyku bude obrazem bodu dotyku původních dvou tečen. Stejně tak průsečíky obrazů v předchozím případě budou obrazy průsečíků vzorových křivek.

Pojďme si vše ukázat na příkladech. Nejprve případ, kdy v nějakém (neznámém) zobrazení zákon zachování incidence platí:



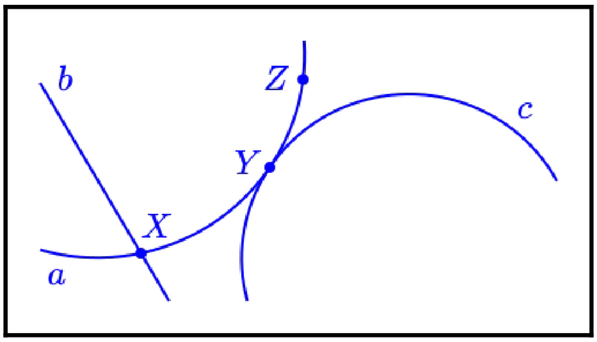
$X \in a \cap b, \quad Y \in a \cap c, \quad Z \in a$



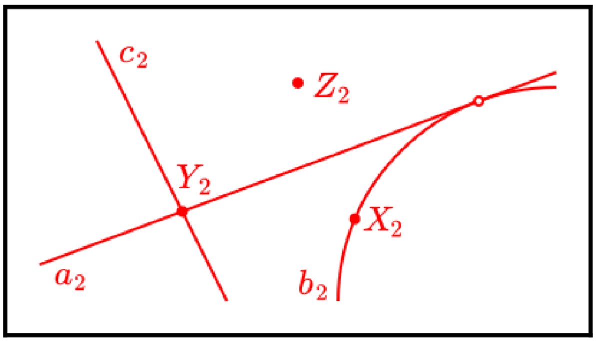
$X_1 \in a_1 \cap b_1, \quad Y_1 \in a_1 \cap c_1, \quad Z_1 \in a_1$

Vidíme, že křivky a a b jsou sečné křivky s průsečíkem X. Stejně tak křivky a_1 a b_1 jsou sečné a jejich průsečíkem je bod X_1. Křivky a a c jsou tečné s bodem dotyku Y. Obrazem jsou křivky a_1 a c_1, které jsou taktéž tečné a mají bod dotyku Y_1, který je obrazem bodu Y. Vše tedy zatím funguje. Nakonec bod Z leží na křivce a, což platí i pro jejich obrazy – bod Z_1 leží na křivce a_1.

Nyní si ukažme případ, v němž zákon zachování incidence neplatí:



$X \in a \cap b, \quad Y \in a \cap c, \quad Z \in a$



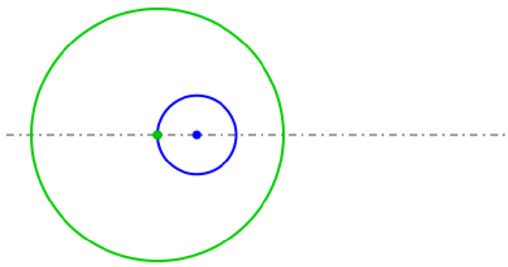
$X_2 \in b_2, \quad Y_2 \in a_2 \cap c_2, \quad Z_2 \notin a_2$

Křivky a a b jsou sečné křivky s průsečíkem X. Když se však podíváme na jejich obrazy, zjistíme, že křivky a_2 a b_2 jsou tečné, nikoliv sečné. Navíc jejich společný bod (který byl původně průsečíkem a nyní je bodem dotyku) není obrazem bodu X. Bod X se zobrazil na bod X_2 a zachoval si incidenci ke křivce b_2, ale už si nezachoval incidenci ke křivce a_2! Společným bodem křivek a a c je bod Y. Zde to vypadá, že se incidence zachovala, protože společný bod křivek a_2 a c_2 je bod Y_2, tedy obraz bodu Y. Avšak nezachoval se *typ* vzájemné polohy těchto křivek. Bod Y byl bodem dotyku dvou tečen, ale bod Y_2 je průsečíkem dvou sečen. V jistém smyslu se tak ani v tomto případě incidence nezachovala… Nakonec bod Z byl incidentní s křivkou a, ale jejich obrazy incidentní nejsou – to je myslím zřejmé.

Pokud je vám vše jasné, směle pokračujte dále! V případě, že zákonu zachování incidence nerozumíte, zkuste si projít tuto část ještě jednou, a nebo se k ní vrátit později ☺.

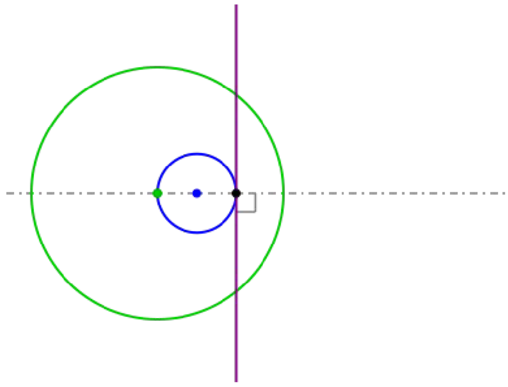
3.9.2.2 *Fígl s přímkou*

Díky zákonu zachování incidence můžeme sestrojit obraz incidentní mimoběžné kružnice a to pomocí tzv. *fíglu s přímkou*. V následující části si vysvětlíme jak a proč tento fígl vlastně funguje. Začněme nejprve obrázkem, který ukazuje naši situaci. Máme řídící kružnici (zelená) a incidentní mimoběžnou kružnici (modrá), kterou chceme v inverzi zobrazit. Víme, že obrazem bude přímka (červená) a víme, že bude kolmá na přímku procházející středy obou daných kružnic (šedá). Bohužel neznáme žádný bod, kterým by tato přímka (červená) měla procházet, a tudíž nevíme, kde přesně se bude nacházet; proto na obrázku zatím chybí.

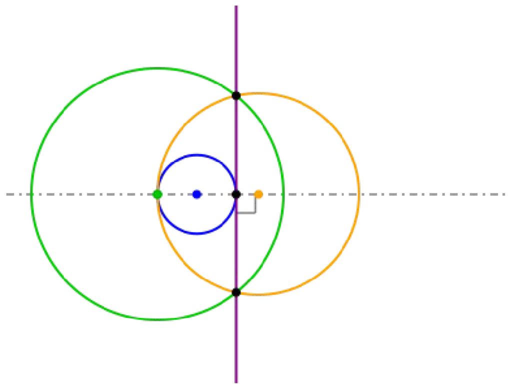


No a co teď? Vypadá to, že jsme v koncích… To, co nás nakonec zachrání je právě *zákon zachování incidence*. Sám o sobě je nám ale k ničemu. Funguje jenom ve spojení s oním zmiňovaným *fíglem s přímkou*. Tak už tedy nezdržujme a vysvětleme si, co to ten fígl je a jak a proč funguje!

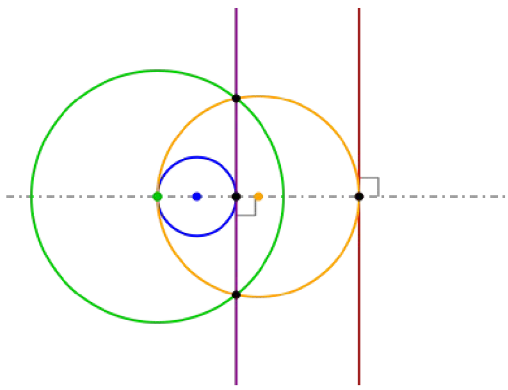
Do obrázku si přidáme další přímku (fialovou) – to bude ta přímka, se kterou provedeme onen fígl. Tato přímka musí být **tečna** modré kružnice. Teoreticky můžeme použít libovolnou tečnu modré kružnice, ale my si vybereme takovou, která je zároveň kolmá na šedou přímku, a která neprochází středem involuce. Je to z toho důvodu, že takto bude celý fígl o dost jednodušší než s jinou přímkou. Pro lepší představu je tu opět obrázek:



K čemu nám bude taková přímka dobrá? V tom je právě ten figl! Takovou přímku (fialovou) umíme totiž zobrazit v kruhové inverzi – je to totiž sečna řídící kružnice, a to byl hned první případ, který jsme se naučili na začátku této kapitoly. Do obrázku tedy přidáme obraz této fialové přímky – bude to incidentní sečná kružnice (oranžová).



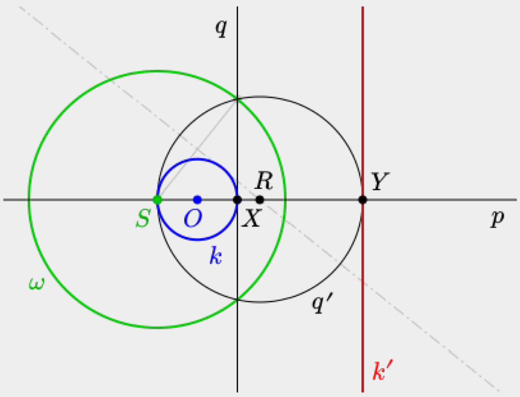
A teď přichází na řadu zákon zachování incidence! Modrá kružnice a fialová přímka jsou tečné křivky a mají jeden společný bod (bod dotyku). Podle zákona zachování incidence musí být jejich obrazy (v libovolném zobrazení) také tečné křivky a mít také jeden společný bod. Naše hledaná červená přímka tedy bude kolmá na šedou přímku a zároveň bude tečnou oranžové kružnice. Taková přímky existují sice dvě, ale jedna z nich by procházela středem involuce a to víme, že červená přímka neprochází. Zbývá už tedy jen jediná možnost, kde může červená přímka být. 😎



Náš problém jsme nakonec vyřešili! Kružnice, kterou jsme chtěli zobrazit (modrá) byla „schovaná“ uvnitř řídící kružnice. Neměla tak s řídící kružnicí žádné společné body, o kterých víme, že jsou samodružné a tím pádem by byly i součástí výsledného obrazu (jak tomu bylo u ostatních případů). My jsme si ale poradili tím, že jsme si na tuto kružnici „dosáhli“ přímkou (fialovou), ke které umíme v inverzi sestrojit obraz. A díky *zákonu zachovávání incidence* a tomu, že tato naše přímka (fialová) byla **tečnou** vzorové kružnice (modré), jsme nakonec našli způsob, jak obraz sestrojit.

Pro úplnost ještě jako obvykle, uvádíme podrobný postup krok po kroku:

Inverze kružnice (incidentní vnitřní mimoběžky) – zápis konstrukce



Je dána řídící kružnice $\omega(S)$ a k ní vnitřní mimoběžná kružnice $k(O)$ procházející středem involuce S.

1. $p;\ S, O \in p$
   Sestrojíme přímku p, která prochází body S a O.
2. $X;\ X \in p \cap k(O) \quad \wedge \quad X \neq S$
   Označíme bod X, který je průsečíkem přímky p a kružnice $k(O)$ a je různý od bodu S.
3. $q;\ q \perp p \quad \wedge \quad X \in q$
   Sestrojíme kolmici q k přímce p procházející bodem X.
4. $q'(R);\ I_{\omega(S)}[\,q\,]$
   Sestrojíme kružnici $q'(R)$, která je obrazem přímky q v inverzi podle kružnice $\omega(S)$.
5. $Y;\ Y \in p \cap q'(R) \quad \wedge \quad Y \neq S$
   Označíme bod Y, který je průsečíkem přímky p a kružnice $q'(R)$ a je různý od bodu S.
6. $k';\ k' \perp p \quad \wedge \quad Y \in k'$
   Sestrojíme kolmici k' k přímce p procházející bodem Y.

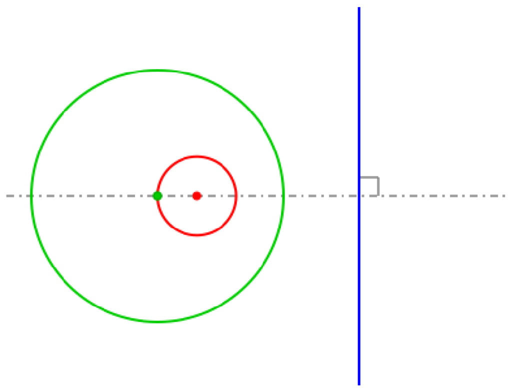
Přímka k' je hledaný **obraz** kružnice $k(O)$ v **inverzi** podle kružnice $\omega(S)$.

3.9.3 Zobrazení přímek (pokračování)

Naučili jsme se, jak sestrojit obraz sečné a tečné přímky vůči řídící kružnici. Poté jsme si udělali malou odbočku a řekli jsme si, jak sestrojit obrazy incidentních kružnic – sečné, tečné a mimoběžné. Nyní je načase vrátit se zpět k přímkám a dokončit zbylé dvě polohy přímky vůči řídící kružnici. Pojďme na to!

3.9.3.1 Mimoběžná přímka

Při hledání obrazu mimoběžné přímky řídící kružnice máme obdobný problém jako při hledání obrazu incidentní mimoběžné kružnice. Když byla přímka sečnou řídící kružnice, znali jsme tři body, kterými má výsledný obraz procházet. U tečny jsme znali pouze dva body, ale nakonec jsme si nějak poradili. V tomto případě, kdy je přímka mimoběžkou řídící kružnice, však známe jediný bod, kterým bude výsledná kružnice procházet! A tím je podle definice střed involuce, tedy střed řídící kružnice.

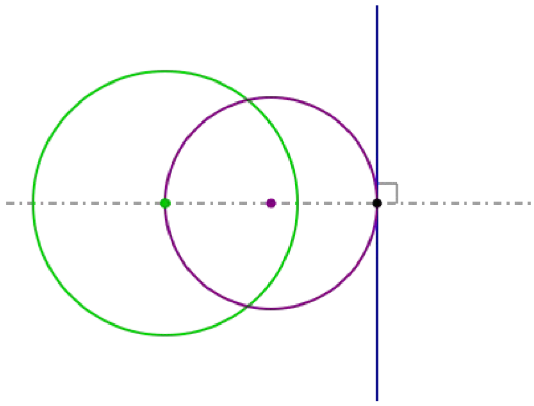


Protože neznáme žádný další bod výsledné kružnice, ani neumíme určit její střed, budeme si muset opět pomoci nějakým fíglem. Tentokrát to bude tzv. *fígl s kružnicí.*

3.9.3.2 Fígl s kružnicí

Fígl s kružnicí funguje prakticky úplně stejně jako fígl s přímkou, akorát obráceně. Co to znamená? Když jsme řešili případ incidentní mimoběžné kružnice, měli jsme ten problém, že tato kružnice neměla s řídící kružnicí žádné společné body, protože byla „schovaná“ uvnitř řídící kružnice. A abychom na ni „dosáhli“, museli jsme použít sečnou přímku (to byla ta fialová).

Tentokrát máme problém opačný. Řešíme mimoběžnou přímku, která je od řídící kružnice tak vzdálená, že s ní nemá žádné společné body. Prostě nám jaksi „utekla“. A my si na ni potřebujeme zase nějak „dosáhnout“. Tím, co nám pomůže, bude incidentní sečná kružnice. Koukněte na obrázek, kde je tato kružnice fialová:

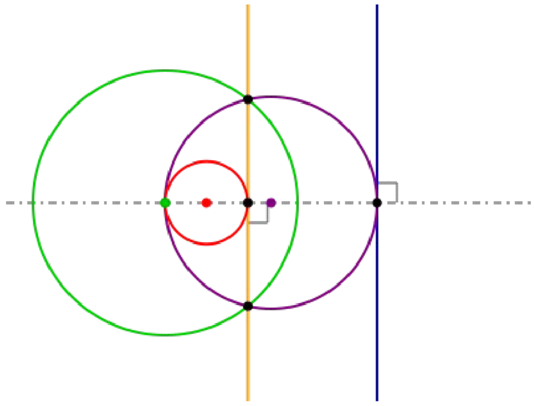


Princip obou fíglů je tento:

- máme křivku, která nemá žádný společný bod s řídící kružnicí (je mimoběžná)
- abychom sestrojili obraz, potřebujeme použít nějakou další *pomocnou* křivku
- tato pomocná křivka je **tečna** naší zadané mimoběžky a je to **sečna** řídící kružnice
- protože umíme jednoduše udělat obraz sečny a známe *zákon zachování incidence*, můžeme sestrojit obraz původní křivky

Ještě jednou a konkrétně: Máme incidentní mimoběžnou kružnici, která nemá s řídící kružnicí žádný společný bod. Tato kružnice je „schovaná“ uvnitř řídící kružnice (té zelené) a musíme na ni nějak „dosáhnout“. Musíme použít jinou křivku, která bude s řídící kružnicí sečná a bude procházet vnitřní oblastí řídící kružnice – to bude sečná přímka. Tuto sečnou přímku zvolíme jako tečnu incidentní mimoběžné kružnice, a to nám pomůže sestrojit její obraz.

U mimoběžné přímky je to stejné! Mimoběžná přímka nemá s řídící kružnicí žádný společný bod. Tato přímka nám „utekla“ mimo řídící kružnici a musíme na ni nějak „dosáhnout“. Musíme použít jinou křivku, která bude s řídící kružnicí sečná a bude procházet vnější oblastí řídící kružnice – to bude incidentní sečná kružnice. Tuto incidentní sečnou kružnici zvolíme jako tečnu mimoběžné přímky, a to nám pomůže sestrojit její obraz.



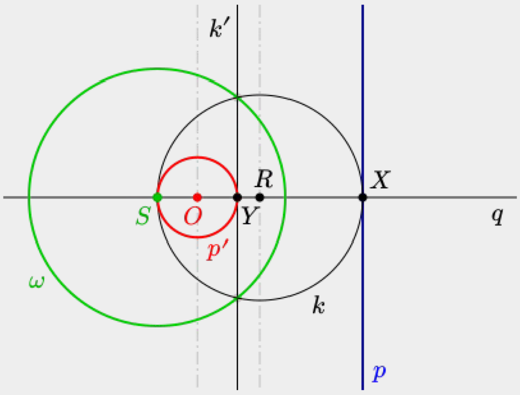
Sledujme výše uvedený obrázek. Řídící kružnice je zelená, mimoběžná přímka modrá. Fígl spočívá v použití incidentní sečné kružnice, která je zároveň tečnou naší modré přímky – to je ta fialová kružnice. Jak nám tato kružnice pomůže? Umíme sestrojit její obraz; na obrázku to je oranžová přímka. Víme, že tato oranžová přímka musí být tečna výsledné červené kružnice. Červená kružnice má procházet středem involuce (zelený bod), její střed má ležet na šedé přímce a má být tečnou oranžové přímky. Taková kružnice existuje pouze jedna.

Princip tohoto fíglu je stejný jako u fíglu s přímkou. Pokud jste nějaké části neporozuměli, zkuste se vrátit zpět k fíglu s přímkou, ten si pečlivě projít a pak se vrátit sem na fígl s kružnicí – ten by měl být úplně stejný, ale opačný. V podstatě, když uděláte fígl s přímkou pozpátku, měli byste dostat fígl s kružnicí a naopak 🙃.

Pokud jste fígly prozatím nepochopili, dejte si chvíli pauzu a po nějakém čase se vraťte zpět a zkuste si vše přečíst znova! V další kapitole budeme tyto fígly potřebovat mnohem více a je důležité, abyste jim rozuměli. Nestačí jim jen věřit a naučit se, **jak** fungují. Pokud umíte fígl použít pro sestrojení obrazu nějaké křivky, ale nechápete **proč** vlastně funguje, budou pro vás další kapitoly o dost náročnější. Takže lepší je si dát chvíli času a až vám to začne dávat smysl, tak jít dál 😉.

Nyní ještě klasický postup konstrukce obrazu mimoběžné přímky:

Inverze přímky (mimoběžky) – zápis konstrukce



Je dána řídící kružnice $\omega(S)$ a k ní mimoběžná přímka p.

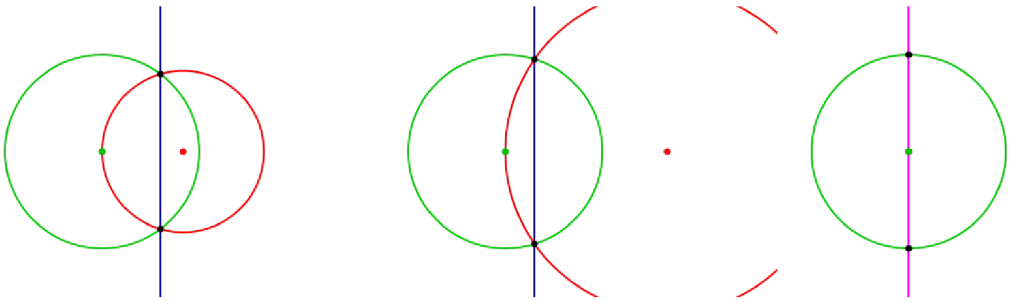
1. $q;\ q \perp p \quad \wedge \quad S \in q$
   Sestrojíme kolmici q k přímce p procházející bodem S.
2. $X;\ X \in p \cap q$
   Označíme bod X, který je průsečíkem přímek p a q.
3. $k(R);\ \boldsymbol{\tau}_{SX}$
   Sestrojíme *Thaletovu kružnici* $k(R)$ nad průměrem SX.
4. $k';\ I_{\omega(S)}[\,k(R)\,]$
   Sestrojíme přímku k', která je obrazem kružnice $k(R)$ v inverzi podle kružnice $\omega(S)$.
5. $Y;\ Y \in k' \cap q$
   Označíme bod Y, který je průsečíkem přímek k' a q.
6. $p'(O);\ \boldsymbol{\tau}_{SY}$
   Sestrojíme *Thaletovu kružnici* $p'(O)$ nad průměrem SY.

Kružnice $p'(O)$ je hledaný **obraz** přímky p v **inverzi** podle kružnice $\omega(S)$.

3.9.3.3 Kolmá přímka

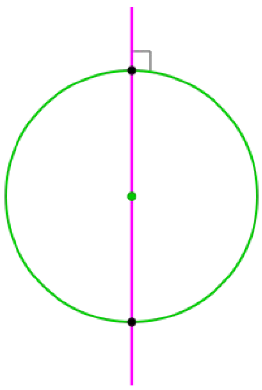
Posledním případem polohy přímky vůči řídící kružnici je přímka kolmá. V předchozích případech jsme začínali se sečnou přímkou, která se postupně oddalovala od středu involuce a stávala se tečnou a nakonec mimoběžkou. Čím dále od středu involuce byla, tím menší poloměr měla incidentní kružnice, která byla jejím obrazem. Naopak v případě, že se přímka ke středu involuce přibližovala, její poloměr se zvětšoval.

Co se stane, když přímku nejen velmi přiblížíme ke středu řídící kružnice, ale nakonec ji posuneme tak, aby středem involuce procházela? Poloměr výsledné kružnice začne být při velmi malých vzdálenostech od středu involuce obrovský. Čím menší vzdálenost mezi středem řídící kružnice a sečnou přímkou bude, tím více se bude výsledná kružnice podobat přímce. A ve chvíli, kdy bude přímka středem involuce procházet, se výsledná kružnice SKUTEČNĚ přímkou stane; nejen že se jí bude podobat! Podívejme se na obrázky:



Jak je to ale možné?! Je to všechno pravda? Ano, pojďme si říci proč. Nejprve jeden málo uspokojující důvod. V předchozí kapitole jsme si o inverzi řekli, že přímka, která je kolmá na řídící kružnici, je samodružná. Jediný důvod, který jsme k tomu měli, byl ten, že jsme si ukazovali podobnost mezi zrcadlením (osovou souměrností) a inverzí (kruhovou souměrností). U zrcadlení je křivka, která je kolmá na řídící přímku samodružná. Totéž jsme předpokládali i u kruhové inverze.

Je nějaký lepší důvod? Ano! Víme, že obraz sečné přímky je kružnice, která prochází středem involuce (tedy *incidentní kružnice*) a zároveň prochází oběma průsečíky přímky s řídící kružnicí. Máme tedy tři body, kterými musí tento obraz procházet. V případě, že posuneme sečnou přímku tak, aby procházela středem involuce, stane se z ní kolmá přímka. A v tom okamžiku se oba průsečíky společně se středem involuce stanou **kolineárními body**. To znamená, že všechny tři body budou ležet na jedné přímce (no jasně, na té kolmé přece!). A víme, že obraz má těmito třemi body procházet. Ale když jsou tyto body kolineární, nemůže být obrazem kružnice – taková kružnice prostě neexistuje. Obrazem tedy musí být **přímka**! Přímka kolmá na řídící kružnici je tedy *samodružná* a nyní už víme proč.



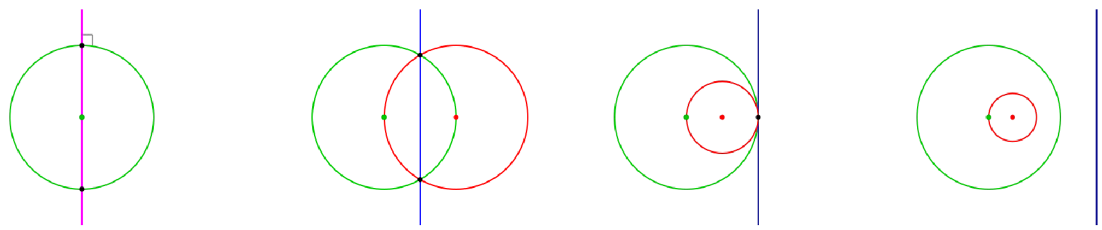
3.9.4 Shrnutí

Úplně na závěr této kapitoly si ještě projděme všechny čtyři polohy přímky vůči řídící kružnici a jejích obrazů v inverzi:

- obrazem **(obecné) sečné přímky** je **incidentní sečná kružnice**,
- obrazem **(vnější) tečné přímky** je **incidentní vnitřní tečná kružnice**,
- obrazem **(vnější) mimoběžné přímky** je **incidentní vnitřní mimoběžná kružnice** a
- obrazem **kolmé (sečné) přímky** je **kolmá (sečná) přímka**.

Všimněte si, že obrazem *sečné* křivky je opět *sečná* křivka, obrazem *tečné* křivky *tečná* křivka a obrazem *mimoběžné* křivky *mimoběžná* křivka. Vzájemná poloha křivky vůči řídící kružnici tedy zůstává zachována. To platí i pro *kolmost* – pokud byla křivka vůči řídící kružnici kolmá, zůstane kolmá; pokud byla obecná, zůstane obecná.

Naopak co se mění, je typ křivky! Přímka se stává incidentní kružnicí a naopak. Také oblast, v níž se křivka nachází, se mění – *vnitřní* křivky se stávají *vnějšími* a naopak. Vše shrnují tyto poslední obrázky:



3.10 7. KAPITOLA: Inverze kružnic

3.10.1 Zobrazení kružnic

Pomalu, ale jistě se blížíme ke konci této učebnice. Pokud jste doposud vše zvládli a pochopili, můžete si teď připadat jako farmář, který začíná sklízet svou úrodu. V předchozích kapitolách jsme tvrdě pracovali! Zorali jsme pole (zopakovali základy geometrie), zaseli jsme (prozkoumali lineární zobrazení), zalévali a pleli (naučili se zobrazovat přímky v inverzi a dva figly, které nám k tomu pomohou). Teď přichází nejnáročnější část učebnice, ale pokud jste se vše doteď naučili a porozuměli tomu, bude to pro vás kupodivu jednoduchá a příjemná práce ☺. Takže dost řečí a jdeme na to!

Stejně jako v minulé kapitole zopakujeme v pár bodech zásadní informace, které jsme se o kružnicích zatím dozvěděli:

- každá kružnice je určena libovolnými třemi (*nekolineárními*) body, jimiž tato kružnice prochází
- vůči kružnici může mít jiná kružnice celkem 6 různých poloh: *sečna*, *vnitřní* a *vnější tečna*, *vnitřní* a *vnější mimoběžka* a *kolmice*
- kružnice si v kruhové inverzi zachovává své umístění v případě, že je kolmá na *řídící kružnici*
- kružnice se v kruhové inverzi zobrazí na kružnici nebo na přímku

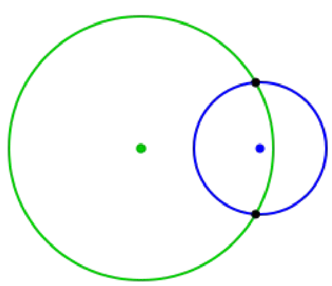
Kružnice můžeme rozdělit na dvě velké skupiny:

1. *incidentní* kružnice – procházejí středem involuce (mají s ním společný bod)
2. neincidentní kružnice – neprocházejí středem involuce (nemají s ním společný bod)

Všechny možné incidentní kružnice jsme již probrali v předchozí kapitole. Jsou to obrazy přímek, nebo též jejich obrazy jsou přímky. V této kapitole se budeme zabývat pouze neincidentními kružnicemi, tedy těmi, které neprochází středem řídící kružnice. Postupně si projdeme všechny polohy neincidentních kružnic vůči řídící kružnici a ukážeme si, jakým způsobem se tyto kružnice zobrazí a jak tyto obrazy narýsovat. Ještě je potřeba si říct, že obraz takové kružnice (neincidentní) bude opět **kružnice**. Nemůže to být přímka, protože vzorem přímky musí být kružnice incidentní se středem involuce.

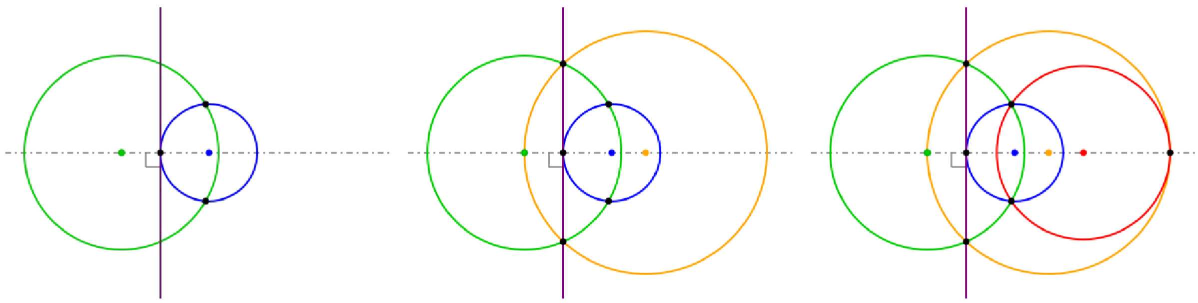
3.10.1.1 Sečná kružnice

Sečná kružnice (na obrázku v modré barvě) má s řídící kružnicí (na obrázku v barvě zelené) společné dva průsečíky (na obrázku vyznačeny černě). Zde je obrázek:

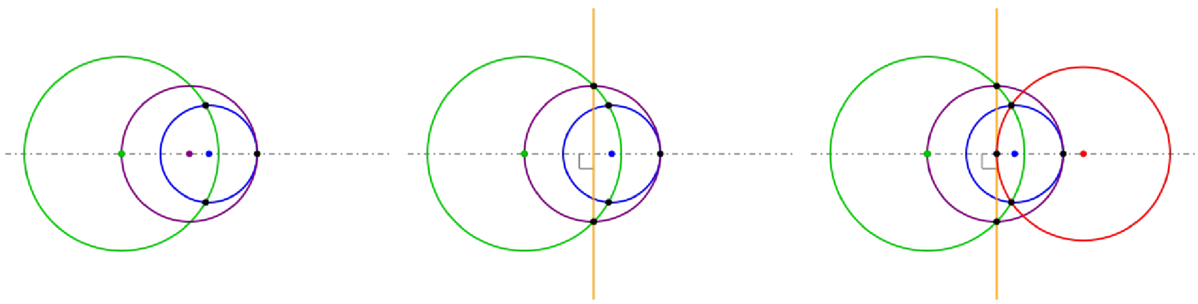


Jaký bude obraz této kružnice v inverzi? Víme, že to bude kružnice a víme, že bude procházet oběma průsečíky (protože jsou to samodružné body). Dvěma body může procházet nekonečně mnoho kružnic. Abychom výslednou kružnici určili přesně, potřebujeme ještě třetí bod, kterým výsledná kružnice prochází. Když jsme řešili případ sečné přímky, byl třetím bodem střed involuce. V případě sečné kružnice to tak ale, jak víme, nebude. Jsme tedy v koncích; žádný další bod se nám již najít nepodaří. Musíme tedy použít jeden z figlů (nic jiného totiž už neumíme).

Který figl ale použít? Fígl s přímkou nám pomáhá, pokud potřebujeme udělat tečnu ve *vnitřní oblasti* řídící kružnice; figl s kružnicí funguje v případě, že chceme udělat tečnu ve *vnější oblasti* řídící kružnice. Sečná kružnice ale zasahuje do obou oblastí, takže si můžeme vybrat jakýkoliv figl! Nejlépe ten, který více umíme, více chápeme, ten, který nám je sympatičtější… prostě je to jedno! Jak oba dva figle použít ukazují následující obrázky:

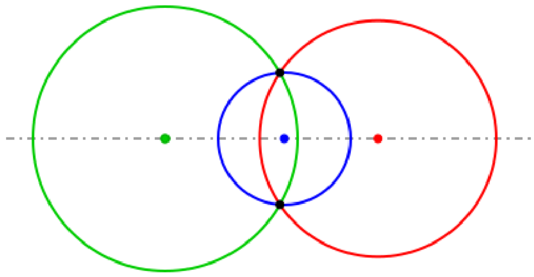


Při použití figlu s přímkou sestrojíme tečnou přímku (fialovou) k modré kružnici, která je kolmá na šedou přímku (mimochodem tato přímka je *směrem involuce* pro střed modré kružnice). Uděláme obraz fialové přímky (oranžová kružnice) a víme, že výsledný obraz (červená kružnice) musí procházet oběma průsečíky modré a zelené kružnice a zároveň být tečnou oranžové kružnice. Takové kružnice existují pouze dvě, ale jedna z nich prochází středem involuce a tuto variantu nechceme. Proto existuje jediné možné řešení, kde sestrojit červenou kružnici, viz obrázek.



U fíglu s kružnicí postupujeme víceméně obdobně. Sestrojíme fialovou kružnici, která je tečná k modré kružnici a prochází středem involuce (tzn. je to incidentní sečná kružnice vůči řídící přímce). Nalezneme její obraz (oranžová přímka), který je kolmý na směr involuce středu modré kružnice (tj. na šedou přímku). Výsledná červená kružnice musí opět procházet oběma průsečíky a zároveň být tečnou oranžové přímky. Taková kružnice existuje pouze jedna, viz obrázek.

Pro lepší názornost ještě uvádíme obrázek, na němž je pouze vzor a obraz (modrá a červená kružnice) a řídící kružnice (zelená):



Možná teď někoho napadne, že by místo fíglu s kružnicí mohl použít fígl s přímkou, ale tak, že by se přímka nedotýkala vzoru ve vnitřní oblasti řídící kružnice, ale ve vnější oblasti. Všechny přímky přece už umíme zobrazovat a práce s přímkou je tak nějak jednodušší. Představme si tedy, že máme najít obraz sečné (neincidentní) kružnice a použijeme fígl s přímkou tak, aby se tato přímka dotýkala vzoru ve vnější oblasti řídící kružnice.

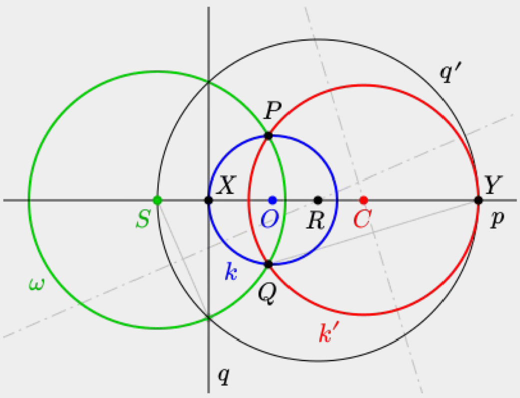
Bude to fungovat? No ano, bude. Uděláme obraz této *pomocné* přímky a naše hledaná kružnice se musí dotýkat obrazu této pomocné přímky. ALE! Jak uděláme obraz mimoběžné přímky? Na to přece potřebujeme fígl s kružnicí!! Takže jsme si vůbec nijak nepomohli. Stejně musíme nakonec použít fígl s kružnicí a ta mimoběžná přímka je tam úplně zbytečně! Zkuste si nakreslit obrázek a promyslet si to.

Stejně tak to bude, kdybychom chtěli použít fígl s kružnicí pro dotyk ve vnitřní oblasti řídící kružnice. Je to zbytečné, protože pro sestrojení obrazu této *pomocné* kružnice bychom zase potřebovali fígl s přímkou! Takže z toho plyne následující poučení:

Fígl s přímkou používáme v případě, kdy potřebujeme udělat tečnu ve *vnitřní oblasti* řídící kružnice; fígl s kružnicí používáme v případě, kdy potřebujeme udělat tečnu ve *vnější oblasti* řídící kružnice.

Podrobný postup při použití obou fíglů ukazují následující konstrukce:

Inverze kružnice (sečny) – zápis konstrukce



Je dána řídící kružnice $\omega(S)$ a k ní sečná kružnice $k(O)$.

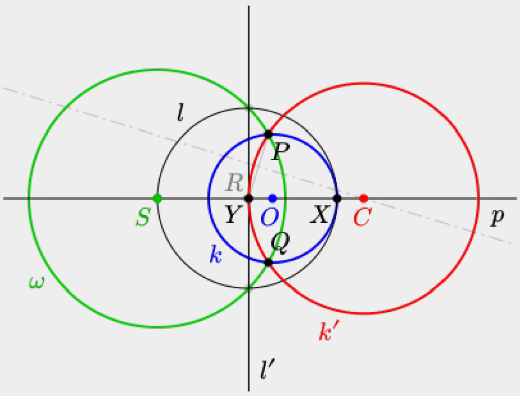
1. $P;\ P \in k(O) \cap \omega(S)$
   $Q;\ Q \in k(O) \cap \omega(S) \quad \wedge \quad Q \neq P$
   Označíme body P a Q, které jsou průsečíky kružnice $k(O)$ a řídící kružnice $\omega(S)$.
2. $p;\ S, O \in p$
   Sestrojíme přímku p, která prochází body S a O.
3. $X;\ X \in p \cap k(O) \quad \wedge \quad |SX| < |SO|$
   Označíme bod X, který je průsečíkem přímky p a kružnice $k(O)$ a leží ve vnitřní oblasti řídící kružnice $\omega(S)$.
4. $q;\ q \perp p \quad \wedge \quad X \in q$
   Sestrojíme kolmici q k přímce p procházející bodem X.
5. $q'(R);\ I_{\omega(S)}[\ q\ ]$
   Sestrojíme kružnici $q'(R)$, která je obrazem přímky q v inverzi podle kružnice $\omega(S)$.
6. $Y;\ Y \in p \cap q'(R) \quad \wedge \quad Y \neq S$
   Označíme bod Y, který je průsečíkem přímky p a kružnice $q'(R)$ a je různý od bodu S.
7. $C;\ |CY| = |CP| = |CQ|$
   Sestrojíme bod C, který je středem kružnice procházející body Y, P a Q.
8. $k'(C);\ Y, P, Q \in k'(C)$
   Sestrojíme kružnici k' se středem C, která prochází body Y, P a Q.

Kružnice $k'(C)$ je hledaný **obraz** kružnice $k(O)$ v **inverzi** podle kružnice $\omega(S)$.

Zkrácený zápis konstrukce:

$$\boxed{k'(C);\ I_{\omega(S)}[\ k(O)\ ]}$$

Inverze kružnice (sečny) – zápis konstrukce

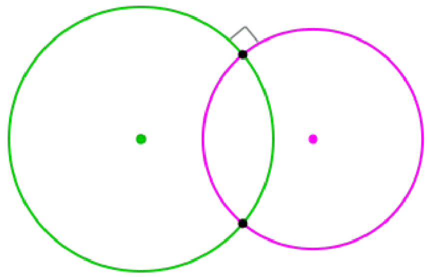


Je dána řídící kružnice $\omega(S)$ a k ní sečná kružnice $k(O)$.

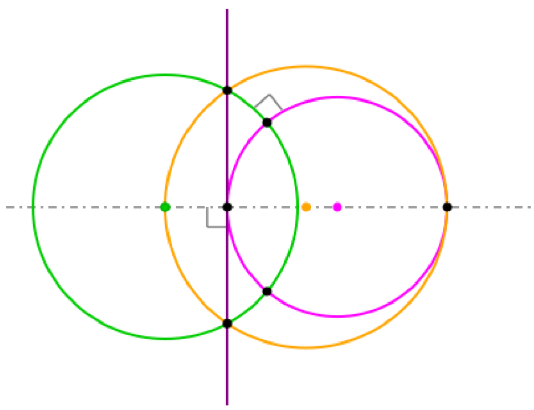
1. $P;\ P \in k(O) \cap \omega(S)$
   $Q;\ Q \in k(O) \cap \omega(S) \quad \wedge \quad Q \neq P$
   Označíme body P a Q, které jsou průsečíky kružnice $k(O)$ a řídící kružnice $\omega(S)$.
2. $p;\ S, O \in p$
   Sestrojíme přímku p, která prochází body S a O.
3. $X;\ X \in p \cap k(O) \quad \wedge \quad |SX| > |SO|$
   Označíme bod X, který je průsečíkem přímky p a kružnice $k(O)$ a leží ve vnější oblasti řídící kružnice $\omega(S)$.
4. $l(R);\ \tau_{SX}$
   Sestrojíme *Thaletovu kružnici* $l(R)$ nad průměrem SX.
5. $l';\ I_{\omega(S)}[\,l(R)\,]$
   Sestrojíme přímku l', která je obrazem kružnice $l(R)$ v inverzi podle kružnice $\omega(S)$.
6. $Y;\ Y \in p \cap l'$
   Označíme bod Y, který je průsečíkem přímek p a l'.
7. $C;\ |CY| = |CP| = |CQ|$
   Sestrojíme bod C, který je středem kružnice procházející body Y, P a Q.
8. $k'(C);\ Y, P, Q \in k'(C)$
   Sestrojíme kružnici k' se středem C, která prochází body Y, P a Q.

Kružnice $k'(C)$ je hledaný **obraz** kružnice $k(O)$ v **inverzi** podle kružnice $\omega(S)$.

Mezi sečné kružnice patří jako její speciální případ i kružnice kolmá na řídící přímku. Ta bude stejně jako kolmá přímka při inverzi samodružná. Pokud tedy víme, že je kružnice kolmá (*ortogonální*) na řídící kružnici, nemusíme již dělat žádnou konstrukci.



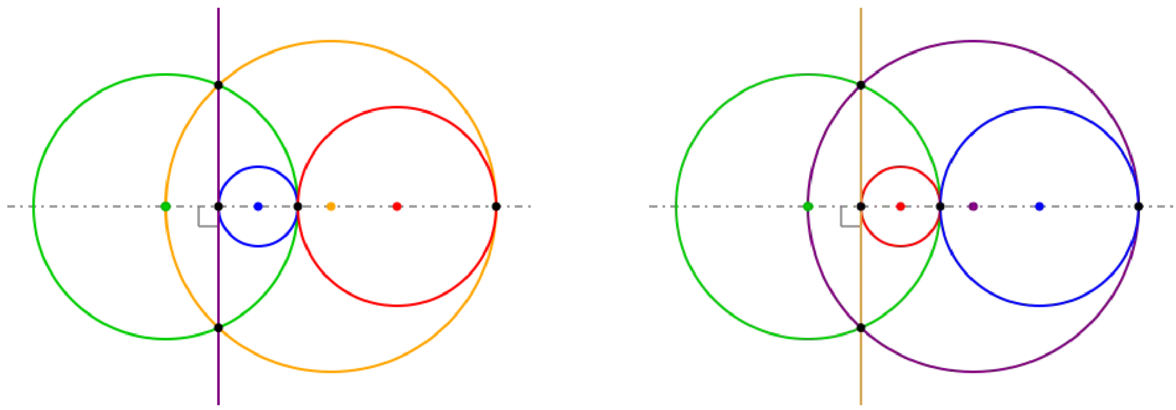
Co by se stalo, kdybychom chtěli použít figl s přímkou nebo kružnicí? Víme, že když použijeme *pomocnou* přímku/kružnici, která je tečná ke vzoru, tak její obraz bude také tečný k obrazu hledané kružnice. Ale když je kružnice kolmá, a tudíž samodružná, tak vzor i obraz jsou jedno a to samé. A pokud je pomocná přímka tečná ke kolmé kružnici, musí být i její obraz tečný k této kolmé kružnici. A je tomu skutečně tak; podívejte se na obrázek níže. Konstrukce figlu k ničemu neslouží, protože vzor a obraz kolmé kružnice jsou totožné. Můžeme si díky němu pouze ověřit, že je daná kružnice kolmá.



3.10.1.2 Tečné kružnice

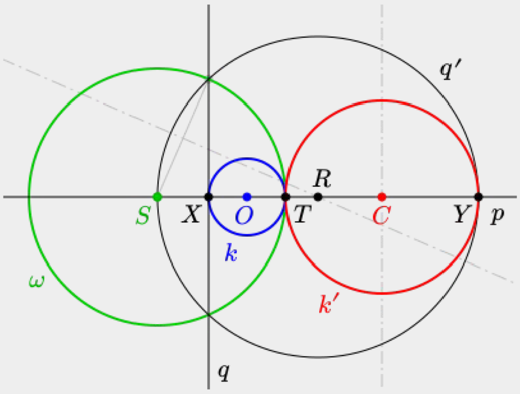
Tečné kružnice (na obrázcích v modré barvě) mohou být vnitřní nebo vnější. S řídící kružnicí (na obrázku v barvě zelené) budou mít jeden společný bod – bod dotyku (na obrázku vyznačen černě). Zde jsou obrázky:

Jak sestrojíme obrazy těchto tečných kružnic? Máme jeden bod, kterým musí kružnice procházet (bod dotyku) a víme, že střed obrazu bude ležet na přímce (na obrázcích níže je to ta šedá čerchovaná), která je *směrem involuce* středu vzoru (tj. středu modré kružnice). Opět nám chybí další body, kterými by výsledný obraz procházel, takže musíme použít figl – je to stále stejná písnička. Pro vnitřní tečnu figl s přímkou, pro vnější tečnu figl s kružnicí.



Princip figlů je stále stejný. Obraz (oranžový) pomocné křivky (fialové) musí být tečný s hledaným obrazem modré kružnice (s červenou kružnicí). Protože všechny středy leží na stejné přímce, při konstrukci nám stačí najít průsečík obrazu pomocné křivky s šedou přímkou a sestrojit *Thaletovu kružnici*; viz názorný postup konstrukce níže.

Inverze kružnice (vnitřní tečny) – zápis konstrukce

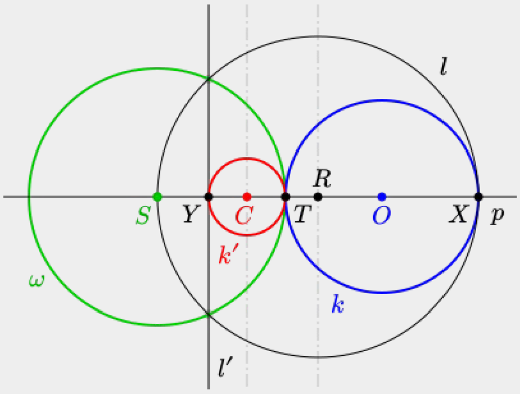


Je dána řídící kružnice $\omega(S)$ a k ní vnitřní tečná kružnice $k(O)$.

1. $T;\ \ T \in k(O) \cap \omega(S)$
   Označíme bod T, který je bodem dotyku kružnice $k(O)$ a řídící kružnice $\omega(S)$.
2. $p;\ \ S, O, T \in p$
   Sestrojíme přímku p, která prochází kolineárními body S, O a T.
3. $X;\ \ X \in p \cap k(O) \quad \wedge \quad X \neq T$
   Označíme bod X, který je průsečíkem přímky p a kružnice $k(O)$ a je různý od bodu T.
4. $q;\ \ q \perp p \quad \wedge \quad X \in q$
   Sestrojíme kolmici q k přímce p procházející bodem X.
5. $q'(R);\ \ I_{\omega(S)}[\,q\,]$
   Sestrojíme kružnici $q'(R)$, která je obrazem přímky q v inverzi podle kružnice $\omega(S)$.
6. $Y;\ \ Y \in p \cap q'(R) \quad \wedge \quad Y \neq S$
   Označíme bod Y, který je průsečíkem přímky p a kružnice $q'(R)$ a je různý od bodu S.
7. $k'(C);\ \ \tau_{TY}$
   Sestrojíme *Thaletovu kružnici* $k'(C)$ nad průměrem TY.

Kružnice $k'(C)$ je hledaný **obraz** kružnice $k(O)$ v **inverzi** podle kružnice $\omega(S)$.

Inverze kružnice (vnější tečny) – zápis konstrukce



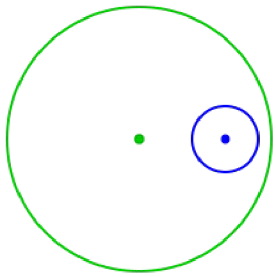
Je dána řídící kružnice $\omega(S)$ a k ní vnější tečná kružnice $k(O)$.

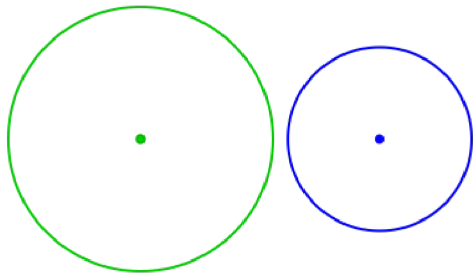
1. $T;\ \ T \in k(O) \cap \omega(S)$
   Označíme bod T, který je bodem dotyku kružnice $k(O)$ a řídící kružnice $\omega(S)$.
2. $p;\ \ S, T, O \in p$
   Sestrojíme přímku p, která prochází kolineárními body S, T a O.
3. $X;\ \ X \in p \cap k(O) \quad \wedge \quad X \neq T$
   Označíme bod X, který je průsečíkem přímky p a kružnice $k(O)$ a je různý od bodu T.
4. $l(R);\ \ \tau_{SX}$
   Sestrojíme *Thaletovu kružnici* $l(R)$ nad průměrem SX.
5. $l';\ \ I_{\omega(S)}[\,l(R)\,]$
   Sestrojíme přímku l', která je obrazem kružnice $l(R)$ v inverzi podle kružnice $\omega(S)$.
6. $Y;\ \ Y \in p \cap l'$
   Označíme bod Y, který je průsečíkem přímek p a l'.
7. $k'(C);\ \ \tau_{TY}$
   Sestrojíme *Thaletovu kružnici* $k'(C)$ nad průměrem TY.

Kružnice $k'(C)$ je hledaný **obraz** kružnice $k(O)$ v **inverzi** podle kružnice $\omega(S)$.

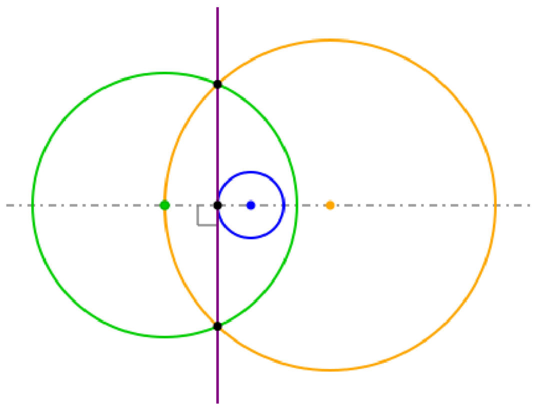
3.10.1.3 Mimoběžné kružnice

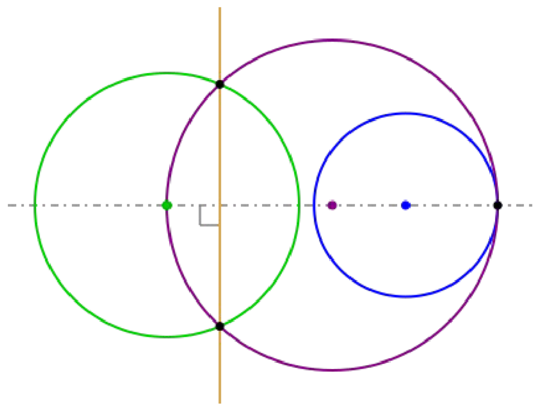
Mimoběžné kružnice mohou být opět vnitřní nebo vnější. S řídící kružnicí nebudou však mít žádný společný bod. Pro představu uvádíme opět obrázky se stejným barevným značením jako v předchozích případech:





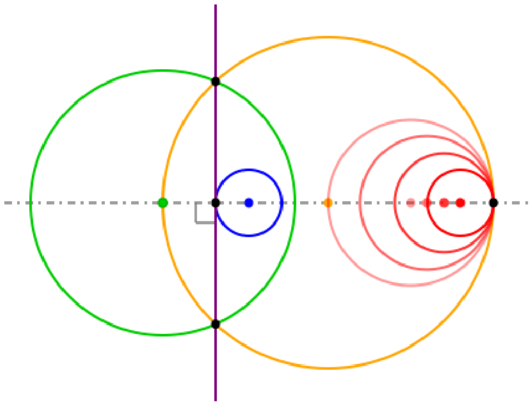
Nemáme žádné body, kterými by výsledný obraz (červená kružnice) měl procházet, ale z předchozích případů víme, že střed výsledné kružnice bude ležet na přímce, spojující střed vzorové a řídící kružnice (šedá přímka, *směr involuce* středu modré kružnice). Jako obvykle, když nám chybí body pro sestrojení obrazu, použijeme jeden z figlů; u vnitřní mimoběžky figl s přímkou, u vnější mimoběžky figl s kružnicí. Pojďme na to.

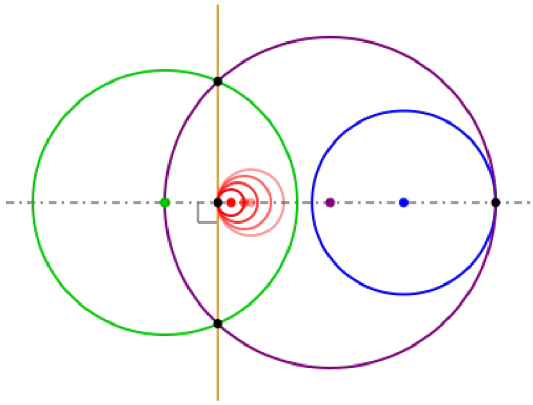




Střed červené kružnice bude ležet na šedé přímce a kružnice se bude dotýkat oranžové křivky (přímky nebo kružnice – v závislosti na použitém figlu). Stejně jako v předcházejících případech bude bod dotyku s oranžovou křivkou ležet na šedé přímce, protože i původní bod dotyku modré kružnice s fialovou křivkou ležel na šedé přímce. Takže máme jeden bod, kterým bude červená kružnice procházet a víme, že střed červené kružnice bude ležet na šedé přímce. Teď už jen sestrojíme červenou kružnici, která bude procházet tímto bodem a jejíž střed bude… bude…

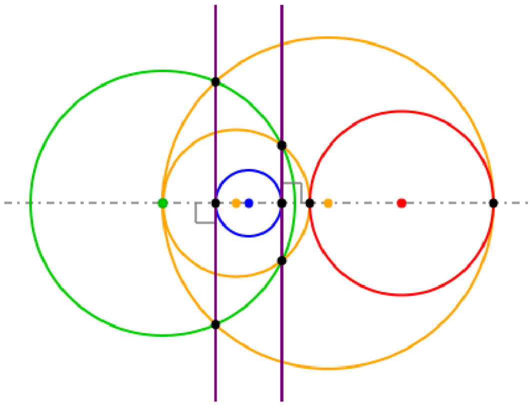
Hmm a jsme v háji! Kde přesně bude střed červené kružnice, to prostě nevíme. Bohužel máme pouze jeden bod, kterým bude kružnice procházet, takže její střed může být teoreticky kdekoliv. Prakticky kdekoliv být nemůže, protože výsledná kružnice má být mimoběžná. Ale kde přesně má být to nevíme. Obrázky níže názorně ukazují, že možností, kde by střed a výsledná kružnice mohly být, je více.

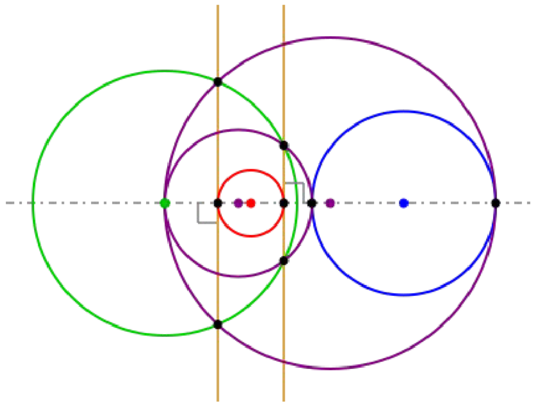




Když se pozorně zadíváme na výše uvedené obrázky, zjistíme, kde se skrývá náš problém. Výslednou červenou kružnici z jedné strany (u vnější kružnice zprava, u vnitřní zleva) „omezuje“ oranžová křivka (obraz fialové pomocné křivky v inverzi), ale z druhé strany nemá žádné „omezení“. Proto na obrázcích existuje více možností, kde by se mohla červená kružnice nacházet.

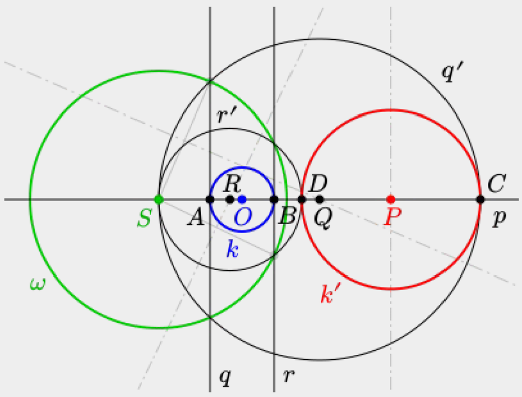
Proč je červená kružnice vlastně z jedné strany „omezená“? Je to kvůli použití *pomocné* křivky a zákonu zachování incidence. Protože jsme modrou kružnici (vzor) „omezili“ z jedné strany fialovou tečnou, bude „omezená“ i červená kružnice (obraz) z jedné strany oranžovou tečnou. Naším současným problémem ale je, že z druhé strany „omezení“ neexistuje. Řešení tohoto problému je vám už tedy možná jasné. Potřebujeme „omezit“ vzorovou kružnici i z druhé strany, takže použijeme místo jedné pomocné křivky **dvě pomocné křivky**. Díky tomuto *dvojitému figlu* už jednoduše sestrojíme požadované obrazy (červené kružnice), viz obrázky:





Pokud vám teď není něco jasné, zkuste si předchozí text projít ještě jednou. Použití dvou figlů (pomocných křivek) není vysvětleno úplně dopodrobna. Předpokládáme však, že jejich hlavní myšlenka tu už zazněla několikrát, a proto již není potřeba zabředávat do všech detailů. Pokud i přesto něčemu úplně nerozumíte, je lepší dát si chvíli pauzu, k textu se vrátit později a přečíst si předchozí části znova. ☺ Na závěr jako obvykle přidáváme podrobný popis konstrukce obou mimoběžných kružnic.

Inverze kružnice (vnitřní mimoběžky) – zápis konstrukce

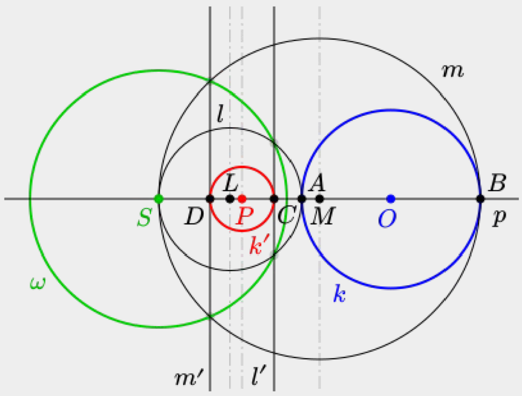


Je dána řídící kružnice $\omega(S)$ a k ní vnitřní mimoběžná kružnice $k(O)$.

1. $p;\ S, O \in p$
   Sestrojíme přímku p, která prochází body S a O.
2. $A;\ A \in p \cap k(O)$
   $B;\ B \in p \cap k(O) \quad \wedge \quad B \neq A$
   Označíme bod A a B, které jsou průsečíky přímky p a kružnice $k(O)$.
3. $q;\ q \perp p \quad \wedge \quad A \in q$
   $r;\ r \perp p \quad \wedge \quad B \in r$
   Sestrojíme kolmici q k přímce p procházející bodem A a kolmici r k přímce p procházející bodem B.
4. $q'(Q);\ I_{\omega(S)}[\,q\,]$
   $r'(R);\ I_{\omega(S)}[\,r\,]$
   Sestrojíme kružnici $q'(Q)$, která je obrazem přímky q v inverzi podle kružnice $\omega(S)$ a kružnici $r'(R)$, která je obrazem přímky r v inverzi podle kružnice $\omega(S)$.
5. $C;\ C \in p \cap q'(Q) \quad \wedge \quad C \neq S$
   $D;\ D \in p \cap r'(R) \quad \wedge \quad D \neq S$
   Označíme bod C, který je průsečíkem přímky p a kružnice $q'(Q)$ a je různý od bodu S a bod D, který je průsečíkem přímky p a kružnice $r'(R)$ a je různý od bodu S.
6. $k'(P);\ \tau_{CD}$
   Sestrojíme *Thaletovu kružnici* $k'(P)$ nad průměrem CD.

Kružnice $k'(P)$ je hledaný **obraz** kružnice $k(O)$ v **inverzi** podle kružnice $\omega(S)$.

Inverze kružnice (vnější mimoběžky) – zápis konstrukce



Je dána řídící kružnice $\omega(S)$ a k ní vnější mimoběžná kružnice $k(O)$.

1. $p;\ S,O \in p$
   Sestrojíme přímku p, která prochází body S a O.
2. $A;\ A \in p \cap k(O)$
   $B;\ B \in p \cap k(O) \quad \wedge \quad B \neq A$
   Označíme bod A a B, které jsou průsečíky přímky p a kružnice $k(O)$.
3. $l(L);\ \boldsymbol{\tau}_{SA}$
   $m(M);\ \boldsymbol{\tau}_{SB}$
   Sestrojíme *Thaletovu kružnici* $l(L)$ nad průměrem SA a *Thaletovu kružnici* $m(M)$ nad průměrem SB.
4. $l';\ I_{\omega(S)}[\,l(L)\,]$
   $m';\ I_{\omega(S)}[\,m(M)\,]$
   Sestrojíme přímku l', která je obrazem kružnice $l(L)$ v inverzi podle kružnice $\omega(S)$ a přímku m', která je obrazem kružnice $m(M)$ v inverzi podle kružnice $\omega(S)$.
5. $C;\ C \in p \cap l'$
   $D;\ D \in p \cap m'$
   Označíme bod C, který je průsečíkem přímek p a l' a bod D, který je průsečíkem přímek p a m'.
6. $k'(P);\ \boldsymbol{\tau}_{CD}$
   Sestrojíme *Thaletovu kružnici* $k'(P)$ nad průměrem CD.

Kružnice $k'(P)$ je hledaný **obraz** kružnice $k(O)$ v **inverzi** podle kružnice $\omega(S)$.

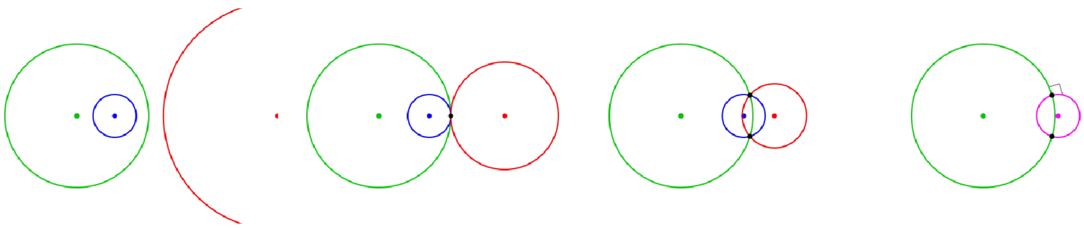
3.10.2 Shrnutí

Na závěr si opět projděme všechny polohy (neincidentní) kružnice vůči řídící kružnici a jejích obrazů v inverzi:

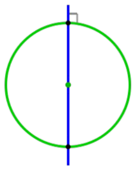
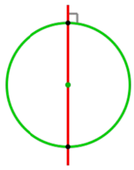
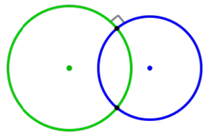
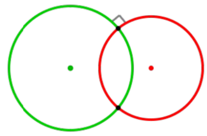
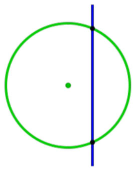
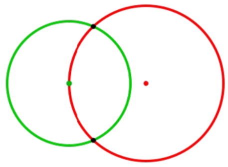
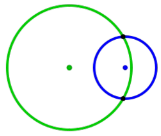
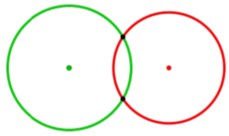
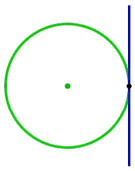
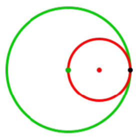
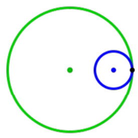
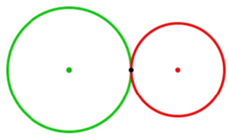
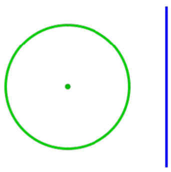
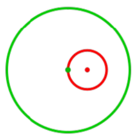
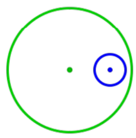
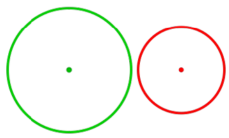
- obrazem **(obecné) sečné kružnice** je **(obecná) sečná kružnice**,
- obrazem **kolmé (sečné) kružnice** je **kolmá (sečná) kružnice**,
- obrazem **vnější tečné kružnice** je **vnitřní tečná kružnice**,
- obrazem **vnitřní tečné kružnice** je **vnější tečná kružnice**,
- obrazem **vnější mimoběžné kružnice** je **vnitřní mimoběžná kružnice** a
- obrazem **vnitřní mimoběžné kružnice** je **vnější mimoběžná kružnice**.

Stejně jako u přímek je obrazem *sečné* křivky *sečná* křivka, obrazem *tečné* křivky *tečná* křivka a obrazem *mimoběžné* křivky *mimoběžná* křivka. Dále pak obrazem *obecné* křivky *obecné* křivka a *kolmé* křivky *kolmá* křivka.

Obrazem neincidentních kružnic jsou opět neincidentní kružnice; žádná neincidentní kružnice se nemění v přímku! Stejně jako u přímek se však mění oblast, v níž se křivka nachází – *vnitřní* křivky se stávají *vnějšími* a naopak. Vše shrnují následující obrázky:



Vzory a obrazy všech poloh přímek a kružnic přehledně shrnuje následující tabulka:

INVERZE	**PŘÍMKA**		**KRUŽNICE**	
	vzor	***obraz***	***vzor***	***obraz***
kolmice	 *kolmá přímka*	 *kolmá přímka*	 *kolmá kružnice*	 *kolmá kružnice*
sečna	 *sečná přímka*	 ***incidentní*** *sečná kružnice*	 *sečná kružnice*	 *sečná kružnice*
tečna	 *tečná přímka*	 ***incidentní*** *tečná kružnice*	 ***vnitřní*** *tečná kružnice*	 ***vnější*** *tečná kružnice*
mimoběžka	 *mimoběžná přímka*	 ***incidentní*** *mimoběžná kružnice*	 ***vnitřní*** *mimoběžná kružnice*	 ***vnější*** *mimoběžná kružnice*

3.11 EPILOG: Bod

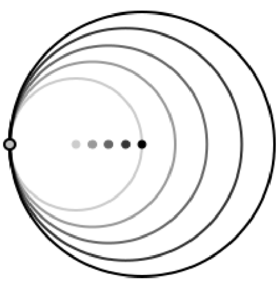
3.11.1 Kruhové křivky

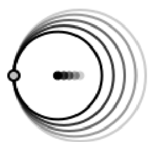
Naše cesta za poznáním kruhové inverze se pomalu blíží ke konci. Prozkoumali jsme několik známých lineárních zobrazení a řekli jsme si vše možné i nemožné o přímkách a kružnicích. Nakonec jsme si ukázali, jak pomocí vlastností inverze, zákona zachování incidence a figlů s křivkami sestrojit obrazy přímek a kružnic s různou polohou vůči řídící kružnici.

Nyní přišel čas vše završit a to tím, že si ukážeme, jak sestrojit obraz samotného bodu v inverzi. Možná budete překvapeni tím, že zjistíte, že už to vlastně dávno umíte, i když o tom ještě nevíte . Každopádně ještě před tím, než se do toho pustíme, musíme se naposledy podívat na něco, co se v celé této učebnici omílá stále dokola – na kružnici. Především na to, co to vlastně je kružnice…

3.11.1.1 Kružnice

Pojďme spolu udělat následující myšlenkový pokus. Představte si kružnici. Na kružnici zvolíme libovolný bod, kterému budeme říkat **fixní bod**, protože se během pokusu nebude hýbat – bude zůstávat stále na stejném místě. Nyní si představme, že vezmeme střed kružnice a budeme jej oddalovat či naopak přibližovat k našemu fixnímu bodu. Vyvstává otázka, co se bude dít s naší kružnicí, když se bude měnit vzdálenost jejího středu od fixního bodu. Pro lepší představivost jsou tu následující obrázky (fixní bod je označen šedě):

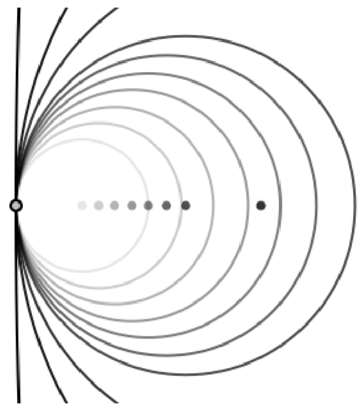




Vidíme, že když oddalujeme střed kružnice od fixního bodu, poloměr kružnice se zvětšuje. Když se střed přibližuje k fixnímu bodu, poloměr kružnice se zmenšuje. Asi si teď říkáte: „Wow, tak tahle informace právě změnila celý můj život a pohled na geometrii!“ Uvádíme zde tuto naprosto banální věc z toho důvodu, že ji za chvíli použijeme v jiné souvislosti, kde už nemusí být tak naprosto zřejmá. Možná vám to bude připadat úplně jasné i bez toho, ale možná se toto připomenutí hodí.

3.11.1.2 Přímka

Čím je střed kružnice vzdálenější od fixního bodu, tím větší poloměr má tato kružnice. V kapitole o inverzi přímek (v části ***Kolmá přímka***) jsme si na animaci ukázali, že čím větší má kružnice poloměr, tím více se podobá přímce. Pokud tedy budeme střed kružnice stále více oddalovat od fixního bodu, bude se kružnice v okolí fixního bodu stále více podobat přímce. Ale bude se pouze podobat!



Teď však uděláme něco, co se vám možná nebude líbit. Posuneme střed kružnice hóóódně daleko. Jak daleko? I když bude megadaleko, tak se kružnice bude stále jen podobat přímce. Ale když posuneme střed kružnice až do **nekonečna**, tato kružnice se přestane přímce podobat, ale stane se SKUTEČNOU přímkou!

Můžeme tedy říct tuto podivnou větu: **Přímka je kružnice s nekonečným poloměrem!**

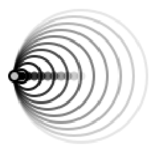
POZOR! Tato věta platí pouze v **inverzní geometrii**. V klasické *Euklidovské geometrii* toto neplatí, protože v klasické geometrii žádné nekonečno neexistuje. „Nekonečno“ v klasické geometrii znamená, že můžeme úsečky (čili i *poloměry*) libovolně prodlužovat v jejich směru (až se nakonec stanou přímkami). Ale i tyto přímky ubíhají stále stejným směrem až do „nekonečna“.

V inverzní geometrii však existuje **bod v nekonečnu**, který v Euklidovské geometrii neexistuje. Všechny přímky tedy v inverzní geometrii neubíhají do „nekonečna“, ale právě do tohoto **bodu v nekonečnu**. Rozdíl vám může připadat zanedbatelný, nebo také žádný, ale věřte tomu, že tento rozdíl je zásadní!

Pokud je přímka vlastně kružnice s nekonečným poloměrem, kde najdeme střed této kružnice? Ten nenajdeme, protože jak jsme si říkali, střed se posunul do bodu v nekonečnu a ten se nedá nikde narýsovat (ale existuje 😎). Pokud jste dostatečně zvídaví, doporučuji se teď na chvíli zastavit a promyslet si co všechno to znamená. Můžete si zkusit si vymyslet různé teorie, co a jak funguje či nefunguje a nejlépe si je i někam zapsat. Po dočtení celé učebnice byste na ně mohli sami nalézt odpovědi, a pokud ne, mohlo by vás to inspirovat ve studiu inverzní geometrie a přečtení dalšího dílu této učebnice 😉.

3.11.1.3 Bod

Čím je střed kružnice blíže k fixnímu bodu, tím menší poloměr má tato kružnice. Pokud tedy budeme střed kružnice přibližovat k fixnímu bodu, bude se kružnice v okolí fixního bodu stále více podobat bodu. Ale bude se pouze podobat!



Ve chvíli, kdy přiblížíme střed kružnice k fixnímu bodu natolik, že jejich vzdálenost bude nulová (tzn. že střed kružnice a fixní bod budou totožné body), bude nulový i poloměr kružnice a celá kružnice se stane pouhým jedním bodem!

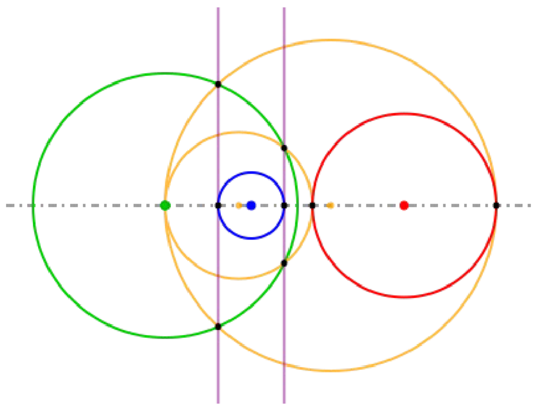
Můžeme tedy vyslovit tuto větu: **Bod je kružnice s nulovým poloměrem!**

Ukázali jsme si tedy, že všechny tři objekty (bod, přímka a kružnice) jsou v jistém smyslu všechno kružnice; i když to vlastně není pravda. Ve skutečnosti jsou tyto tři objekty něco, čemu se říká **kruhové křivky**. Kruhová křivka je objekt, který má svůj *střed* a *poloměr*. Pokud je poloměr tzv. *reálný* (tzn. dá se změřit jeho velikost), je kruhová křivka kružnicí s daným středem a poloměrem. Pokud je poloměr nekonečný, je kruhová křivka přímkou a jejím středem je bod v nekonečnu. Nakonec pokud je poloměr nulový, stává se kruhová křivka pouhým bodem (který je zároveň jejím středem).

Více o tom, co to jsou kruhové křivky a jaké mají vlastnosti (především v inverzi) se dozvíte v dalším díle této učebnice. Nyní, když víme jak z kružnice „vyrobit“ bod, pojďme konečně zjistit, jak sestrojit obraz bodu v inverzi!

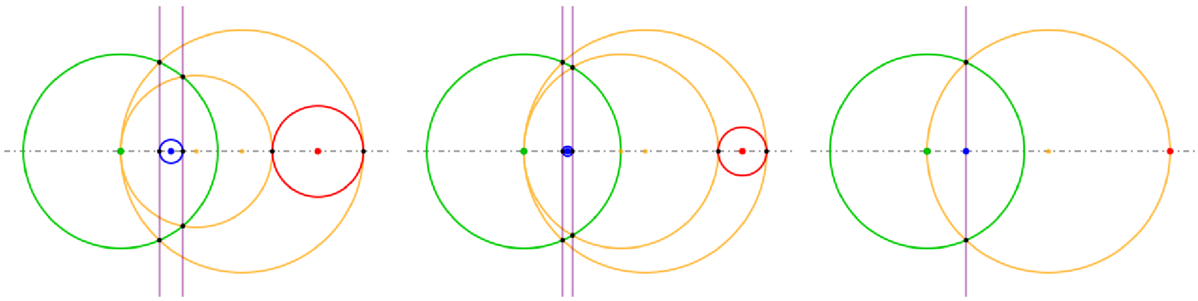
3.11.2 Bod v inverzi

Pojďme si ukázat, jak díky zmenšování poloměru kružnice na nulu vytvoříme z kružnice bod a tím se také naučíme tento bod v inverzi sestrojit. Pro ilustraci si vybereme polohu mimoběžné vnitřní kružnice vůči řídící kružnici, ale stejným způsobem bychom mohli použít jakoukoliv jinou polohu. Pro sestrojení obrazu mimoběžné vnitřní kružnice musíme použít dvojitý fígl s přímkou, jak ukazuje tento obrázek:



Nyní si zvolme jako fixní bod jeden z bodů dotyku modré kružnice s fialovou pomocnou přímkou a začněme posouvat střed modré kružnice směrem k tomuto fixnímu bodu. Na obrázcích níže vidíme, jak se poloměr modré kružnice zmenšuje a spolu s ním se pohybuje i druhá pomocná přímka. S tím, jak se pohybuje druhá pomocná přímka, mění se i její obraz v inverzi, tedy pomocná oranžová kružnice. A s tím, jak se mění tato oranžová kružnice, mění se i výsledný obraz – červená kružnice, jejíž poloměr se též zmenšuje.

Jak se k sobě fialové pomocné přímky přibližují (a „zmačkávají“ mezi sebou modrou kružnici), tak se k sobě také přibližují pomocné oranžové kružnice (které naopak „umačkávají“ červenou kružnici). Ve chvíli, kdy se stane střed modré kružnice totožný s fixním bodem, splynou též obě fialové pomocné přímky (stanou se také totožnými). V tu chvíli splynou i oranžové kružnice, které tak „zmáčknou“ červenou kružnici na pouhý bod. Vše je krásně vidět na následujících obrázcích:



No a to je vše. Nyní už umíme sestrojit obraz libovolného bodu v inverzi ☺.

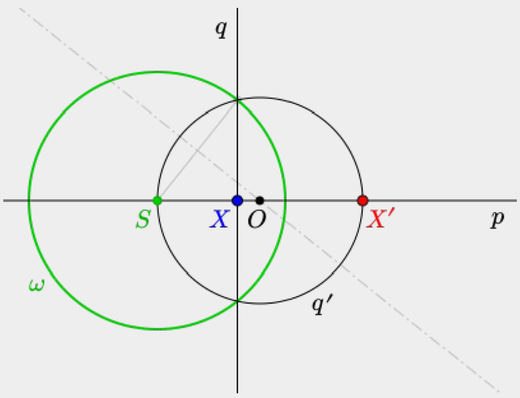
3.11.2.1 Konstrukce obrazu bodu

Takže jak to vlastně všechno funguje?? Fígl s přímkou/kružnicí funguje; to máme ověřeno. Můžeme ho použít na mimoběžnou kružnici a té pak libovolně zmenšovat poloměr; fungovat bude stále. A když nakonec tento poloměr zmenšíme na nulu, není důvod, aby fígl dál nefungoval.

Konstrukce bodu v podstatě také používá fígl s přímkou (v případě bodu ve vnitřní oblasti řídící kružnice) či s kružnicí (v případě bodu ve vnější oblasti řídící kružnice). Fígl s pomocnou křivkou je založen na zákoně zachování incidence. A ten platí i u bodu. Jestliže má být pomocná přímka/kružnice incidentní s nějakým bodem, musí tato křivka daným bodem procházet – což se v našem případě děje. Výsledný obraz pak nalezneme jako **průnik obrazu pomocné křivky se směrem involuce** původního vzoru. V případě bodu jsou vzor, obraz i střed involuce kolineární a přímka na níž leží, je právě *směrem involuce* daného vzoru a obrazu.

O směru involuce jsme se zmínili v 5. kapitole. I když se o něm pak v dalších kapitolách nehovořilo, používali jsme ho při konstrukcích, v nichž byl použit fígl s přímkou nebo s kružnicí. Při použití fíglů jsme směr involuce nemuseli nutně použít (a proto se o něm ani moc nemluvilo), ale my jsme ho použili proto, že pak byly konstrukce daleko jednodušší. Nyní při konstrukci obrazu bodu směr involuce použít musíme! Jedině díky němu nalezneme na obrazu pomocné křivky přesné umístění obrazu hledaného bodu. Projděte si následující dvě konstrukce a popřemýšlejte o nich:

Inverze bodu (vnitřní oblasti řídící kružnice) – zápis konstrukce



Je dána řídící kružnice $\omega(S)$ a bod X, který leží ve vnitřní oblasti této kružnice.

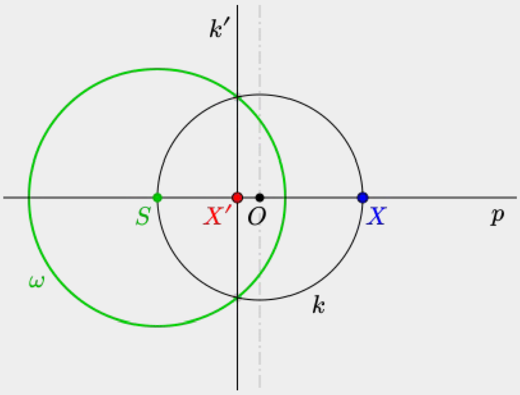
1. $p;\ S, X \in p$
   Sestrojíme přímku p, která prochází body S a X.
2. $q;\ q \perp p \quad \wedge \quad X \in q$
   Sestrojíme kolmici q k přímce p procházející bodem X.
3. $q'(Q);\ I_{\omega(S)}[\, q \,]$
   Sestrojíme kružnici $q'(Q)$, která je obrazem přímky q v inverzi podle kružnice $\omega(S)$.
4. $X';\ X' \in p \cap q'(Q) \quad \wedge \quad X' \neq S$
   Označíme bod X', který je průsečíkem přímky p a kružnice $q'(Q)$ a je různý od bodu S.

Bod X' je hledaný **obraz** bodu X v **inverzi** podle kružnice $\omega(S)$.

Zkrácený zápis konstrukce:

$$\boxed{X';\ I_{\omega(S)}[\, X \,]}$$

Inverze bodu (vnější oblasti řídící kružnice) – zápis konstrukce



Je dána řídící kružnice $\omega(S)$ a bod X, který leží ve vnější oblasti této kružnice.

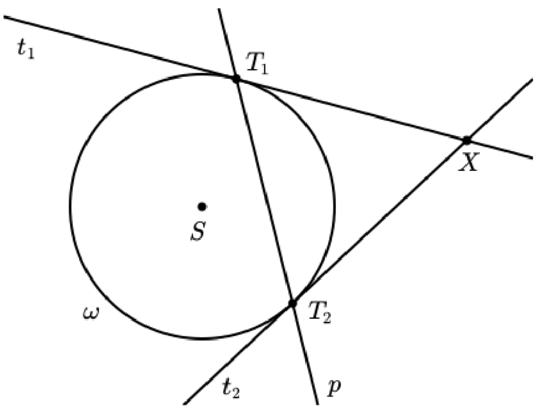
1. $p;\ S, X \in p$
   Sestrojíme přímku p, která prochází body S a X.
2. $k(O);\ \tau_{SX}$
   Sestrojíme *Thaletovu kružnici* $k(O)$ nad průměrem SX.
3. $k';\ I_{\omega(S)}[\,k(O)\,]$
   Sestrojíme přímku k', která je obrazem kružnice $k(O)$ v inverzi podle kružnice $\omega(S)$.
4. $X';\ X' \in p \cap k'$
   Označíme bod X', který je průsečíkem přímek p a k'.

Bod X' je hledaný **obraz** bodu X v **inverzi** podle kružnice $\omega(S)$.

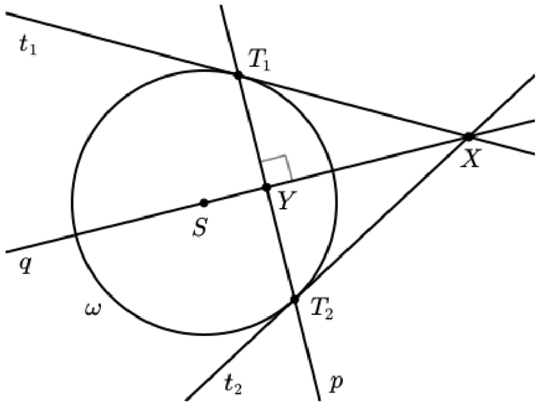
3.11.2.2 Tečny řídící kružnice a polára

Ukažme si jednu zajímavost, která souvisí s obrazem bodu. Pokud je vzorem bod ve vnější oblasti řídící kružnice, můžeme tímto bodem vést k řídící kružnici dvě tečny. Sledujte obrázek níže. Řídící kružnici si označíme jako $\omega(S)$, bod ve vnější oblasti jako X. Tečny budou přímky t_1 a t_2 a každá z nich vytne na řídící kružnici bod dotyku – T_1 a T_2.

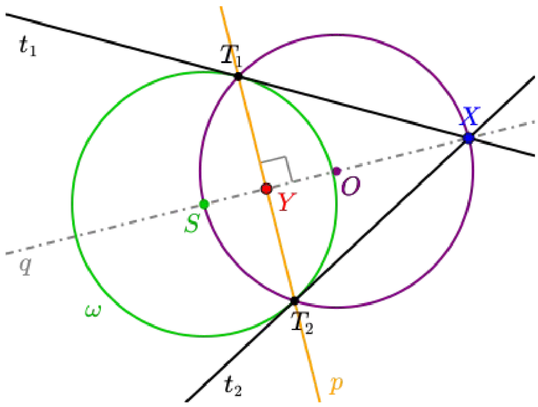
Body T_1 a T_2 můžeme vést přímku; označme ji jako p. Tato přímka se nazývá polára bodu X vzhledem ke kružnici $\omega(S)$. Polára je tedy přímka, která přísluší určitému bodu (ten se nazývá *pól*) a prochází oběma body dotyku tečen vedených z tohoto bodu k dané kružnici.



Polára má velice zajímavé vlastnosti. Pokud sestrojíme na poláru kolmici q, která bude zároveň procházet bodem X, zjistíme, že tato kolmice prochází i středem S dané kružnice. Označme si průnik této kolmice q se samotnou polárou p jako bod Y. **Bod Y je pak obrazem bodu X v inverzi podle kružnice $\omega(S)$!**



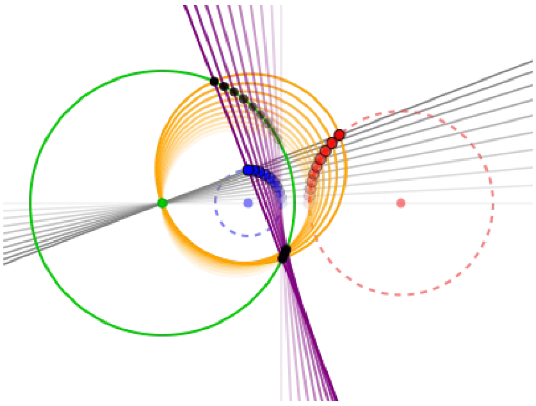
Jak je to možné? Při konstrukci obrazu bodu nacházejícího se ve vnější oblasti řídící kružnice musíme použít figl s kružnicí. Ten spočívá v tom sestrojit *Thaletovu kružnici* $k(O)$ nad průměrem SX. *Thaletova kružnice* se ale používá i při konstrukci tečen ke kružnici z určitého bodu; díky ní nalezneme body dotyku. A právě proto jsou průsečíky *Thaletovy kružnice* $k(O)$ s řídící kružnicí $\omega(S)$ body dotyku tečen vedoucích z bodu X. Tedy **polára** p bodu X není nic jiného, než obraz pomocné kružnice použité při konstrukci bodu ležícího ve vnější oblasti řídící kružnice.



To jen tak pro zajímavost. 🙃

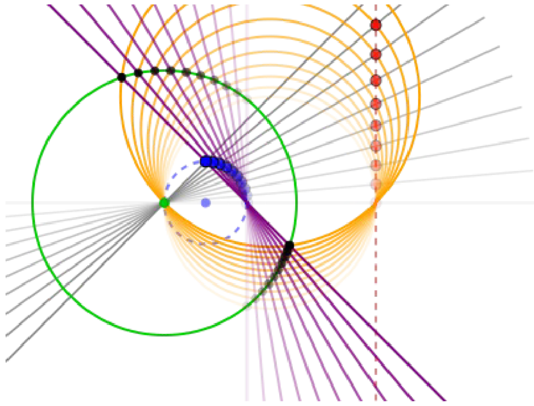
3.11.2.3 Zákon zachování incidence

Platí zákon zachování incidence. To znamená, že obraz libovolného bodu, který leží na nějaké křivce, leží na obrazu této křivky. Oba dva vzájemně sdružené body budou ležet na přímce (zvané *směr involuce*), která je kolmá na řídící kružnici, a tudíž prochází středem involuce. Na následujícím obrázku se můžete sami přesvědčit, že každý bod nějaké křivky má svůj obraz na obrazu této křivky. Všimněte si, že každý bod vnitřní oblasti řídící kružnice má svůj obraz ve vnější oblasti řídící kružnice a naopak. Bod ležící na řídící kružnici je samozřejmě samodružný!



Všimněte si, že v případě neincidentních kružnic protíná směr involuce vzorovou i výslednou křivku téměř vždy ve dvou bodech. Obraz bodu bližšího ke středu involuce leží na výsledné křivce dál od středu involuce a naopak (vzdálenější bod leží na obrazu blíže). Můžeme to také říci jinak. Obraz bodu bližšího k řídící kružnici leží na výsledné křivce blíže (k řídící kružnici) a obraz vzdálenějšího bodu od řídící kružnice leží dál (od řídící kružnice).

Výjimkou je pouze případ, kdy je směr involuce tečnou neincidentní kružnice – pak existuje pouze jedna dvojice sdružených bodů. Tady je potřeba zmínit jednu důležitou věc, která vůbec není samozřejmá! Totiž že **střed involuce je průnikem společných tečen dvou neincidentních kružnic sdružených v inverzi** (což znamená, že jedna je obrazem druhé). Nemuselo by to tak totiž být. Tato informace nám přijde vhod v dalším díle této učebnice, když se budeme zabývat novým zobrazením zvaným *homotetie*. Ale o tom až později. 😎



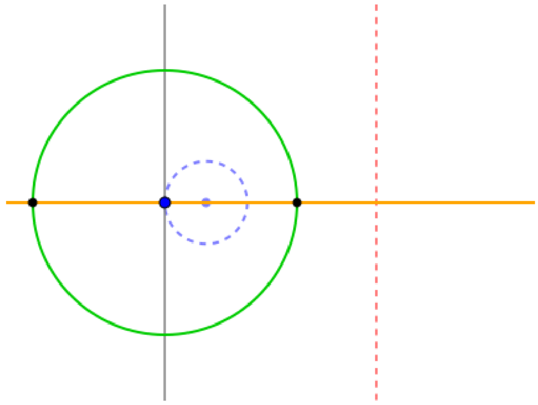
V případě incidentních kružnic, kde je jejich obrazem přímka, už směr involuce protíná obě sdružené křivky vždy jen v jednom bodě. To je velká výhoda, protože v případě že potřebujeme rychle najít obraz bodu ležícího na jedné z křivek, stačí pouze tímto bodem a středem involuce vést přímku (*směr involuce*) a najít pak průnik této přímky s druhou křivkou. Ten bude pouze jeden a na něm bude ležet hledaný obraz bodu.

V podstatě to samé můžeme učinit i v případě neincidentních kružnic, jen musíme počítat s tím, že pokud nebude zrovna směr involuce tečnou k daným kružnicím, pak obdržíme vždy dva průsečíky a musíme vědět který z nich je ten správný! To znamená, že bod bližší ke středu involuce je vzdálenější od středu involuce nebo že bod bližší k řídící kružnici je blíže k řídící kružnici.

3.11.2.4 Bod v nekonečnu

Možná už vás napadla otázka, kam se zobrazí střed involuce? Když hledáme obraz nějakého bodu a máme k dispozici dvě sdružené křivky, stačí vést daným bodem a středem involuce přímku a na průniku s druhou křivkou nalezneme tento obraz. Tady je ale zásadní problém! Jak vést přímku určenou dvěma body, z nichž jeden je střed involuce a druhý je střed involuce? Jedním bodem žádná přímka určená není, tímto bodem může procházet nekonečně mnoho přímek!

Když se podíváme na animace výše, zjistíme, že v případě kdy se zobrazoval střed involuce, byl směr involuce rovnoběžný s přímkou, která byla obrazem incidentní kružnice; pro jistotu je to i na obrázku níže. Je to opět obdobný případ, jako jsme měli úplně na začátku učebnice při výkladu o *Thaletově kružnici* – dva body určovaly nějakou přímku i ve chvíli kdy byly totožné (viz kapitola *Co je třeba znát!*, část **Tečny ke kružnici**).



Takže když uvěříme, že daný směr involuce je správný, stačí najít průnik s přímkou, která je obrazem incidentní kružnice a máme hotovo. Že obě přímky žádný průnik nemají? Ale no ták! Vždyť přece dvě přímky se dotýkají v nekonečnu, takže mají jeden společný bod, a to *bod v nekonečnu*. Pokud jste teď zmatení nebo nevěříte tomu, co vám vaše logika říká, dejte si na chvíli pauzu a promyslete si to. Každopádně všechny indicie směřují k jasnému závěru: **obrazem středu involuce v inverzi je bod v nekonečnu**.

Pamatujete na zákon zachování incidence? Ten říká, že každý bod jedné křivky má svůj obraz na druhé křivce, která je s tou první sdružená. A každá přímka prochází bodem v nekonečnu, takže tento bod v nekonečnu musí být obrazem nějakého jiného bodu. A protože přímka je obrazem incidentní kružnice a kružnice bodem v nekonečnu neprochází, musí být vzorem bodu v nekonečnu nějaký bod na této kružnici. A protože VŠECHNY přímky prochází bodem v nekonečnu, musí mít všechny tyto kružnice nějaký společný bod, který je vzorem bodu v nekonečnu. A všechny tyto kružnice jsou incidentní se středem involuce, takže jediný logický závěr je, že střed involuce je vzorem bodu v nekonečnu.

Pokud jste předchozí odstavec ještě nerozdýchali, doporučuji tento přeskočit. Pokud vám naopak připadal geniální, mám tu pro vás ještě jednu bombu: **Ve všech případech* prochází směr involuce vždy dvěma dvojicemi vzájemně sdružených bodů!** U neincidentních kružnic to jsou dvě dvojice sdružených bodů ležící na těchto kružnicích, jak bylo ukázáno výše. U incidentní kružnice a přímky je to jedna dvojice sdružených bodů a druhou dvojici tvoří střed involuce (ležící na kružnici) a bod v nekonečnu (ležící na přímce). Směr involuce totiž vždy prochází středem involuce, a protože je to přímka, prochází i bodem v nekonečnu. Geniální!

*) *Ne ve všech případech! Tady jsou výjimky:*

1. *V případě neincidentní kružnice a jejího obrazu bude směr involuce procházet pouze jednou dvojicí sdružených bodů, pokud bude směr involuce zároveň společnou tečnou těchto kružnic.*
2. *Může se stát, že jedna z dvojic sdružených bodů bude samodružným bodem (pak se ze čtyř bodů stanou fakticky tři).*
3. *V případě ortogonální kružnice vůči řídící kružnici nalezneme vždy pouze jednu dvojici sdružených bodů!*
4. *Podobně v případě kolmé přímky na řídící kružnici bude existovat pouze jeden směr involuce, v němž se bude nacházet nekonečně mnoho sdružených dvojic bodů.*

Původní větu bychom mohli správně zformulovat asi takto: ***V případě, že je směr involuce sečnou libovolné nesamodružné křivky a jejího obrazu v inverzi, pak na těchto dvou křivkách vytíná dvě dvojice vzájemně sdružených bodů (nezávisle na tom o jaký typ křivky se jedná).***

3.11.3 K čemu je to všechno dobré?

Tak a naše cesta za poznáním inverzní geometrie je už opravdu u konce; tedy co se týče tohoto dílu učebnice. Možná jste z této poslední kapitoly úplně zničení a potřebujete si dát od geometrie nějakých pár let pauzu. Možná vám to po přečtení poslední kapitoly najednou všechno začalo dávat smysl. A nebo jste někde na půli cesty, ale těšíte se až to jednoho dne všechno nakonec pochopíte. Tak či onak, musíme se pomalu rozloučit. Na závěr se však pokusíme zodpovědět jednu z velmi oblíbených otázek žáků a studentů a sice: **K čemu je to všechno dobré?**

Popravdě řečeno do života to ani moc k ničemu není ☺. Ale je to krásné, to musíte uznat. Každopádně v geometrii nám může být inverze velmi užitečná! Existují totiž poměrně zajímavé úlohy zvané *Pappovy* a *Apolloniovy úlohy*, které lze s pomocí inverze řešit mnohem jednodušeji než bez ní. Navíc některé z těchto úloh nemůžeme bez inverze vyřešit vůbec!

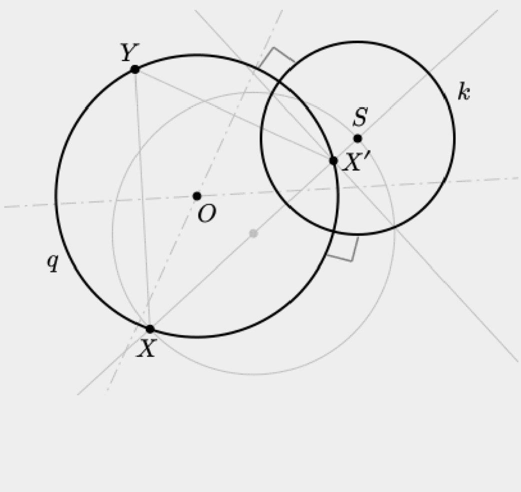
Inverzní geometrie nám také může v mnohém pomoci při studiu *projektivní geometrie*. A to je zase co?? Existuje totiž mnoho různých geometrií s různými pravidly. Například klasická *Euklidovská geometrie* nemá žádný bod v nekonečnu. *Inverzní geometrie* naopak tento bod v nekonečnu má. A *projektivní geometrie* má těchto bodů v nekonečnu nekonečně mnoho – pro každý směr jeden!

Bohužel toho z inverzní geometrie umíme zatím jen velmi málo, pouhé základy, a tak si nemůžeme úplně dobře říci k čemu je to všechno dobré. Ale existuje jedna věc, kterou díky inverzní geometrii umíme a kterou bychom bez ní vůbec neuměli! A co to tedy je? Umíme totiž vyřešit následující úlohu: **Je dána kružnice a dva různé body, které na ní neleží a nejsou kolineární s jejím středem. Sestrojte k této kružnici ortogonální kružnici, která bude danými dvěma body procházet.**

Nejprve poznamenejme, že ani jeden z bodů nemůže být středem zadané kružnice, protože v tom případě by byla výsledkem přímka a ne kružnice (promyslete si proč!). Stejně tak body nesmí být kolineární se středem zadané kružnice, protože v tom případě taková kružnice neexistuje (respektive výsledkem by byla opět přímka), nebo (ve vzácném případě) jich existuje nekonečně mnoho. Dále umíme sestrojit ortogonální kružnici k jiné kružnici, pokud známe střed této ortogonální kružnice (v případě, že jste řešili výzvu v kapitole *Přímky a kružnice*, na konci části **Sečny a kolmice**). Každopádně, ať děláme co děláme, ortogonální kružnici, která má procházet dvěma zadanými body bez jejího středu sestrojit neumíme. V klasické geometrii na to neexistuje žádný známý postup. Abychom mohli vyřešit tento problém, potřebujeme inverzi!

Díky inverzi je to hračka ☺. Víme, že ortogonální kružnice k řídící kružnici je slabě samodružná! Představte si tedy, že zadaná kružnice je řídící kružnicí. Stačí pak už sestrojit obraz jednoho ze dvou zadaných bodů v inverzi podle této řídící kružnice a máme hotovo! Jak to? Protože je ortogonální kružnice slabě samodružná, obraz libovolného jejího bodu bude opět ležet na této kružnici. Když tedy sestrojíme obraz jednoho ze dvou zadaných bodů, budeme mít tři body, které na výsledné kružnici leží! Stačí pak už jen nalézt střed těchto tří bodů a sestrojit kružnici, která těmito třemi body prochází. Díky vlastnostem kružnic v inverzi pak máme zajištěno, že tato kružnice bude k té zadané kolmá. Zde je shrnut celý postup:

Ortogonální kružnice – zápis konstrukce



Je dána kružnice $k(S)$ a body X a Y, které nejsou se středem S kolineární.

1. $X'; \ I_{k(S)}[X]$
   Sestrojíme bod X', který je obrazem bodu X v inverzi podle kružnice $k(S)$.
2. $O; \ |OX| = |OX'| = |OY|$
   Sestrojíme bod O, který je středem kružnice procházející body X, X' a Y.
3. $q(O); \ X, X', Y \in q(O)$
   Sestrojíme kružnici q se středem O, která prochází body X, X' a Y.

Kružnice $q(O)$ je hledaná **ortogonální kružnice** vůči kružnici $k(S)$, procházející body X a Y.

Zkrácený zápis konstrukce:

$$\boxed{q(O);\ q(O) \perp k(S) \quad \wedge \quad X, Y \in q(O)}$$

Díky inverzi umíme skutečně něco, co jsme dosud neuměli. Nicméně opět je tu otázka: a k čemu je zase toto dobré? Umět sestrojit kolmou kružnici k jiné kružnici, která bude procházet nějakými dvěma body může vypadat jako úplně náhodná dovednost, kterou už nikdy nikde nepoužijeme. Opak je však pravdou. Při studiu *hyperbolické geometrie* (cože, další geometrie?!?) bude dovednost sestrojit takovou kružnici vlastně jednou ze základních, bez které se v této geometrii dále nepohnete. Nějak více to vysvětlovat nemá smysl, protože o této geometrii zatím (asi) nic nevíte, takže musíte pouze věřit, že to tak je.

Ať už věříte či nevěříte, tohle je již úplný konec. Víc už se z této učebnice nedozvíte. No a co teď dál? Především si užívejte ten báječný pocit, že jste se pravděpodobně naučili něco zajímavého a něco, o čem moc žáků, studentů ale i učitelů téměř nic neví. Všechny nabyté znalosti navíc určitě zúročíte v dalším studiu geometrie! Pokud vás učebnice zaujala či přímo pohltila, nezbývá než se vrhnout na další díl a poodkrýt další taje kruhové inverze, jako jsou ***lineární transformace*** a jejich skládání, ***homotetie***, ***kruhové křivky***, ***kuželosečky*** a mnoho mnoho dalšího. Časem se pak můžete pustit do studia dalších zajímavých geometrií, jako je už zmíněná projektivní či hyperbolická geometrie (nebo také třeba nezmíněná *eliptická geometrie*). Svět geometrie se vám právě pomalu, ale jistě otevírá dokořán…

ZÁVĚR

Cílem této diplomové práce bylo vytvořit digitální učebnici s tématem kruhové inverze určené pro samostudium nadaných žáků posledního ročníku základní školy. Po prostudování současného RVP ZV a některých konkrétních ŠVP bylo identifikováno souhrnné učivo geometrie na druhém stupni ZŠ, z něhož učebnice vychází a rozvíjí ho. První část učebnice je věnována lineárním geometrickým zobrazením, které znají žáci z výuky. Kromě opakování a prohlubování poznatků o daných zobrazeních se tato část učebnice věnuje též aktivnímu zkoumání těchto zobrazení, což žák využije ve druhé části učebnice. Ta se již plně soustředí na téma kruhové inverze a jeho metodicky přiměřený výklad.

Digitální učebnice byla realizována jako webová aplikace na platformě HTML5, která umožňuje zprostředkovat veškerý potřebný multimediální obsah a interaktivní prvky. Z hlediska dostupnosti se jedná o ideální řešení, protože k prohlížení webové stránky stačí v současnosti libovolné zobrazovací zařízení s připojením k internetu. Učebnice je primárně postavena na motivaci a expozici daného tématu a chybí zde prvky fixace a diagnostiky. Aplikace některých poznatků je pak využívána při expozici dalšího učiva.

Jedním z dílčích cílů práce bylo vytvoření uceleného systému značení geometrických konstrukcí, protože některé z nich jsou v současné školské praxi zapisovány pouze slovně bez vlastního symbolického zápisu. Výsledek tohoto snažení může čtenář nalézt v Příloze č. 1. Během návrhu tohoto systému vznikla nutná potřeba rozlišit označení přímek a kružnic a některé dosud běžně užívané symboly vyřadit. Konkrétní změny a jejich zdůvodnění nalezne čtenář v oddíle 2.4.2.

V digitální verzi učebnice je k dispozici tzv. laboratoř. Jedná se o interaktivní aplikaci dostupnou v první části učebnice (v podkapitolách *Zkoumání zobrazení*), v níž je možné manipulovat s předdefinovanými geometrickými objekty, volit si jejich umístění a polohu, ale především aplikovat na tyto objekty dané zobrazení a měnit jejich kritéria. Díky tomu mohou žáci s daným zobrazením experimentovat, vytvářet a potvrzovat si či vyvracet své hypotézy a aktivně tak získat vlastní cenné zkušenosti, které nejsou pouze pasivně zprostředkované. Součástí celé digitální učebnice je i aplikace umožňující postupné vykreslování jednotlivých kroků geometrických konstrukcí, čímž by se měla znatelně zvýšit přehlednost a „čtivost“ těchto konstrukcí a ve výsledku pak i jejich hlubší pochopení.

Práce samotná nabízí několik možností jejího dalšího rozvoje. Především je tu otázka vytvoření dalšího dílu učebnice určeného pro žáky středních škol (což slibuje i samotný text), který by na ni plynule navazoval a rozvíjel a prohluboval dál myšlenky geometrických zobrazení i kruhové inverze. Dále je tu akutní potřeba tvorby vhodných a zajímavých praktických příkladů, na nichž by žáci své nabyté znalosti aplikovali a které v učebnici momentálně chybí. S tím také souvisí využití plného potenciálu digitální formy učebnice. Je totiž možné k ní tyto praktické příklady postupně přidávat a vytvořit tak sbírku úloh. Dále pak připrogramovat diagnostické nástroje, které by žákovi tyto úlohy nabízely, např. v závislosti na jejich obtížnosti a na tom, jak by tyto nástroje vyhodnotily míru žákova pochopení určitého tématu. Bylo by možné digitální verzi učebnice více fragmentovat a propojit ji množstvím odkazů, čímž by ztratila svoji lineárnost a byla tak flexibilnější pro větší množství čtenářů (např. by mohla dobře posloužit i vysokoškolským studentům, kteří se chtějí s kruhovou inverzí seznámit, ale nepotřebují si opakovat základní geometrická zobrazení). K takto zpracované učebnici by pak bylo možné vytvořit krátká výuková videa, která by organicky doplňovala výkladový text. Možností dalšího zpracovaní této problematiky se tak nabízí nespočet.

SEZNAM LITERATURY

Anon., 1988. *Názvy a značky školské matematiky: doporučená terminologie školské matematiky na zákl. a stř. školách*, Praha: SPN. Odborná lit. pro učitele.

BALADOVÁ Gabriela a Kamila SLADKOVSKÁ, 2009. Výuka metodou CLIL. In: *Metodický portál RVP.CZ* [online]. 2009-02-12 [cit. 2023-05-22]. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/clanek/o/z/2965/vyuka-metodou-clil.html

BAMBASOVÁ, Kateřina, 2017. *Analýza multimediální učebnice s ohledem na její strukturu*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy. Diplomová práce. Dostupné z: https://otik.uk.zcu.cz/bitstream/11025/27929/1/Diplomova%20prace.pdf

BUDÍNOVÁ, Irena, 2014. *Konstrukční úlohy – základní geometrické konstrukce a symbolika* [online]. 2014-06-30 [cit. 2023-05-28]. Dostupné z: https://educoland.muni.cz/matematika/novinky-z-oboru/konstrukcni-ulohy-zakladni-geometricke-konstrukce-a-symbolika/

CARESWELL, Nick, 2011. *Problematika péče o nadané žáky na základních a středních školách: metodická příručka + soubor pracovních listů* [online]. Turnov: Vzdělávací centrum Turnov [cit. 2023-06-04]. ISBN 978-80-260-0185-0. Dostupné z: https://edu.ceskatelevize.cz/storage/worksheet/ochrance/problematika-pece-o-nadane-zaky.pdf

EUKLEIDES, 2008. *Základy. Knihy I–IV: Komentované Petrem Vopěnkou*. Přeložil František SERVÍT. Nymburk: Otevřeně prospěšná společnost. Prameny evropské vzdělanosti. ISBN 978-80-903773-7-0.

HEATH, Sir Thomas Little. *The thirteen books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg with introduction and commentary*. Three volumes. University Press, Cambridge, 1908. Second edition: University Press, Cambridge, 1925. Reprint: Dover Publ., New York, 1956. Reviewed: *Isis* 10 (1928), 60-62.

CHODOROVÁ, Marie, 2013. *Projektivní geometrie*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta. Skripta. ISBN 978-80-244-4000-2. Dostupné z: https://kag.upol.cz/m-dg/texty/Projektivni_geometrie.pdf

KONEČNÁ, Helena, 2009. *Výukové strategie v práci s nadanými žáky*. Brno: Masarykova Univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra pedagogiky. Diplomová práce. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/106814/pedf_m_b1/DP_P_tisk.pdf

LÁLOVÁ, Eva, 2019. *Kruhová inverze a její aplikace v geometrii*. V Českých Budějovicích: Jihočeská univerzita, Přírodovědecká fakulta, Ústav matematiky. Diplomová práce. Dostupné z: https://theses.cz/id/emgmf3/30148733

NEUMAJER, Ondřej, 2013. Ideál elektronické učebnice. In: *Ondřej Neumajer – blog na Eduin*. 2013-04-21 [cit. 2023-05-08]. Dostupné z: https://neumajer-blog.eduin.cz/2013/04/21/ideal-elektronicke-ucebnice/

PAVLAS, Tomáš et. al., 2022. *Podpora vzdělávání nadaných a mimořádně nadaných žáků v základních a středních školách: tematická zpráva* [online]. Praha: Česká školní inspekce. ISBN 978-80-88087-98-4. Dostupné z: https://www.csicr.cz/CSICR/media/Prilohy/2022_p%C5%99%C3%ADlohy/Dokumenty/TZ_Podpora_vzdelavani-nadanych-zaku.pdf

PIRKLOVÁ, Petra, 2013. *Axiomatická výstavba planimetrie* [online]. Liberec: Technická univerzita v Liberci, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Pomocný učební text. [cit. 2023-06-04]. Dostupné z: https://kma.fp.tul.cz/images/stories/vyuka/pirklova-prednasky/AxiomatikaPlanimetrie.pdf

REJZEK, Jiří, 2012. *Český etymologický slovník*. 2., nezměn. vyd. Voznice: Leda. ISBN 978-80-7335-296-7.

SLABIHOUDKOVÁ, Denisa, 2020. *Nadaný žák na 1. stupni základní školy v Jihočeském kraji*. V Českých Budějovicích: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra pedagogiky a psychologie. Diplomová práce. Dostupné z: https://theses.cz/id/v0bzs9/39119232

VESELÁKOVÁ, Jana, 2020. *Historie matematických pojmů v českých základních školách od roku 1850*. Brno: Masarykova Univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky. Diplomová práce. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/c1ipa/DP_JanaVeselakova.pdf

VYORALOVÁ, Kateřina, 2018. *Nadaný žák v matematice*. Brno: Masarykova Univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra pedagogiky. Diplomová práce. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/numks/DP_Vyoralova.pdf

ZAPLETALOVÁ, Jana, 2007. Informace ke vzdělávání dětí, žáků a studentů mimořádně nadaných: zabezpečující realizaci ustanovení § 17 zákona č. 561/2004 Sb. a části třetí vyhlášky č. 73/2005 Sb. In: *Učitelské noviny*, 110(7), s. 16-17. ISSN 0139-5718. Dostupné z: https://deti.mensa.cz/res/f/informace-ke-vzdelavani-mnd.pdf

PŘÍLOHY

Příloha č. 1: Značení geometrických konstrukcí

	NÁZEV	ZÁPIS KONSTRUKCE	
	Volný bod	X	
	Vázaný (incidentní) bod	$X;\ X \in p$	*bod leží na přímce*
		$X;\ X \in k(S)$	*bod leží na kružnici*
	Průsečík	$X;\ X \in p \cap q$	*průsečík přímek*
		$X;\ X \in p \cap k(S)$	*průsečík přímky a kružnice*
		$X;\ X \in k(S) \cap l(O)$	*průsečík kružnic*
	Úsečka	AB	
	Osa úsečky	$o;\ o \perp AB \quad \wedge \quad \lvert Ao \rvert = \lvert Bo \rvert$	
	Střed úsečky	$S;\ S \in AB \quad \wedge \quad \lvert SA \rvert = \lvert SB \rvert$	
	Přímka	$p;\ X, Y \in p$	
	Kolmice	$q;\ q \perp p \quad \wedge \quad X \in q$	*kolmice přímky*
		$q;\ q \perp k(S) \quad \wedge \quad X \in q$	*kolmice kružnice*
	Rovnoběžka	$r;\ r \parallel p \quad \wedge \quad X \in r$	
	Tečna v bodě	$t;\ t \cap k(S) = \{T\}$	
	Tečny z bodu	$t_1;\ t_1 \cap k(S) = \{T_1\} \quad \wedge \quad X \in t_1$	
		$t_2;\ t_2 \cap k(S) = \{T_2\} \quad \wedge \quad X \in t_2$	
	Kružnice (střed a bod)	$k(S);\ X \in k(S)$	
	Thaletova kružnice	$k(S);\ \tau_{AB}$	
	Střed kružnice	$S;\ \lvert SA \rvert = \lvert SB \rvert = \lvert SC \rvert$	
	Kružnice (tři body)	$k(S);\ A, B, C \in k(S)$	

Kolmá kružnice	$q(O);\ q(O) \perp p \quad \wedge \quad X \in q(O)$ $q(O);\ q(O) \perp k(S)$	*kolmice přímky* *kolmice kružnice*
Ortogonální kružnice	$q(O);\ q(O) \perp k(S) \quad \wedge \quad X, Y \in q(O)$	
Rovnoběžná kružnice	$r(S);\ r(S) \parallel k(S) \quad \wedge \quad X \in r(S)$	
Tečná kružnice k přímce	$t(O);\ t(O) \cap p = \{T\}$	
Tečná kružnice ke kružnici	$t_1(O);\ t_1(O) \cap k(S) = \{T_1\}$ $t_2(O);\ t_2(O) \cap k(S) = \{T_2\}$	
Orientovaná úsečka	$\overrightarrow{AB}$	
Orientovaný úhel	$\widehat{AVB}$	
Přenesení orient. úhlu	$\widehat{CUD};\ \lvert\widehat{CUD}\rvert = \lvert\widehat{AVB}\rvert$	
Posunutí (translace)	$X';\ T_{\overrightarrow{AB}}[X]$ $p';\ T_{\overrightarrow{AB}}[p]$ $k'(S');\ T_{\overrightarrow{AB}}[k(S)]$	*posunutí bodu* *posunutí přímky* *posunutí kružnice*
Otočení (rotace)	$X';\ R_{S,\lvert\widehat{AVB}\rvert}[X]$ $p';\ R_{S,\lvert\widehat{AVB}\rvert}[p]$ $k'(O');\ R_{S,\lvert\widehat{AVB}\rvert}[k(O)]$	*otočení bodu* *otočení přímky* *otočení kružnice*
Souměrnost (symetrie)	$X';\ S_S[X]$ $p';\ S_S[p]$ $k'(O');\ S_S[k(O)]$	*souměrnost bodu* *souměrnost přímky* *souměrnost kružnice*
Zrcadlení (inverze)	$X';\ I_o[X]$ $p';\ I_o[p]$ $k'(S');\ I_o[k(S)]$	*zrcadlení bodu* *zrcadlení přímky* *zrcadlení kružnice*
Inverze	$X';\ I_{\omega(S)}[X]$ $p';\ I_{\omega(S)}[p] \qquad p'(O);\ I_{\omega(S)}[p]$ $k';\ I_{\omega(S)}[k(O)] \quad k'(C);\ I_{\omega(S)}[k(O)]$	*inverze bodu* *inverze přímky* *inverze kružnice*

Příloha č. 2: Česko-anglický slovníček geometrických pojmů

pojem	*concept*	pojem	*concept*
bod	*point*	zobrazení	*mapping*
přímka	*line*	vzor (zobrazení)	*preimage*
kružnice	*circle*	obraz (zobrazení)	*image*
křivka	*curve*	orientovaná úsečka	*directed line segment*
poloměr	*radius*	počáteční bod	*initial point*
průměr	*diameter*	koncový bod	*terminal point*
kruh	*disc*	orientovaný úhel	*directed angle*
rovnoběžník	*parallelogram*	počáteční rameno	*initial side*
(ideální) pravítko	*straightedge*	koncové rameno	*terminal side*
(ideální) kružítko	*compass*	vrchol (úhlu)	*vertex*
osa úsečky	*line segment bisector*	posunutí	*translation*
střed úsečky	*line segment midpoint*	otočení	*rotation*
střed kružnice	*center of circle*	středová souměrnost	*point reflection*
kolmice	*perpendicular line*	osová souměrnost	*reflection*
rovnoběžka	*parallel line*	kruhová inverze	*circle inversion*
sečna (kružnice)	*secant line*	soustředné kružnice	*concentric circles*
tečna (kružnice)	*tangent line*	sečné kružnice	*intersecting circles*
vnější přímka (kružnice)	*exterior line*	kolmé kružnice	*orthogonal circles*

pojem	*concept*
vnitřní tečné kružnice	*internally tangent circles*
vnější tečné kružnice	*externally tangent circles*
vnitřní mimoběžné kružnice	*internally disjoint circles*
vnější mimoběžné kružnice	*externally disjoint circles*

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Bc. Jan Pospíšil
Katedra nebo ústav:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. David Nocar, Ph.D.
Rok obhajoby:	2023

Název práce:	Učebnice kruhové inverze pro sekundární vzdělávání
Název v angličtině:	Circle inversion textbook for secondary education
Anotace práce:	Diplomová práce se zabývá tématem kruhové inverze ve vztahu k nadaným žákům ZŠ. První kapitola pojednává o podpoře nadaných žáků a na jejím základě je pak vytvořena digitální učebnice sloužící k obohacení učiva. Specifika učebnice jsou detailně popsány ve druhé kapitole této práce. Třetí kapitola obsahuje přepis vytvořené digitální učebnice. Učebnice je zpřístupněná na následující webové adrese: http://inverzni-geometrie.kvalitne.cz/
Klíčová slova:	kruhová inverze, nadaný žák, obohacování učiva, digitální učebnice, geometrické konstrukce, geometrická zobrazení, posunutí, otočení, středová souměrnost, osová souměrnost
Anotace v angličtině:	This diploma thesis deals with the topic of circle inversion in relation to gifted elementary school students. The first chapter discusses the support for gifted students, which led to the creation of a digital textbook aimed at enriching the curriculum. The specifics of the textbook are described in detail in the second chapter of this thesis. Additionally, the third chapter includes a transcript of the created digital textbook. You can access the textbook by visiting the following link: http://inverzni-geometrie.kvalitne.cz/
Klíčová slova v angličtině:	circle inversion, gifted student, curriculum enrichment, digital textbook, geometric constructions, geometric transformations, translation, rotation, point reflection, reflection
Přílohy vázané v práci:	Příloha č. 1: Značení geometrických konstrukcí Příloha č. 2: Česko-anglický slovníček geometrických pojmů
Rozsah práce:	211 stran
Jazyk práce:	český jazyk