

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STAVEBNÍ  
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING  
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

EXPLICITNÍ A IMPLICITNÍ METODY V NELINEÁRNÍ  
DYNAMICE

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Bc. ADÉLA VANĚČKOVÁ



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STAVEBNÍ  
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING  
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

# EXPLICITNÍ A IMPLICITNÍ METODY V NELINEÁRNÍ DYNAMICE

EXPLICIT AND IMPLICIT NUMERICAL METHODS IN NONLINEAR DYNAMICS

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Bc. ADÉLA VANĚČKOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

doc. Ing. IVAN NĚMEC, CSc.

BRNO 2017



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

STUDIJNÍ PROGRAM	N3607 Stavební inženýrství
TYP STUDIJNÍHO PROGRAMU	Navazující magisterský studijní program s prezenční formou studia
STUDIJNÍ OBOR	3607T009 Konstrukce a dopravní stavby
PRACOVISŤE	Ústav stavební mechaniky

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

DIPLOMANT	<b>Bc. Adéla Vaněčková</b>
NÁZEV	Implicitní a explicitní metoda v nelineární dynamice
VEDOUCÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE	doc. Ing. Ivan Němec, CSc.
DATUM ZADÁNÍ	31. 3. 2016
DATUM ODEVZDÁNÍ	13. 1. 2017

V Brně dne 31. 3. 2016

  
.....  
prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.

Vedoucí ústavu



  
.....  
prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc., MBA

Děkan Fakulty stavební VUT

## **PODKLADY A LITERATURA**

Němec et al.: Finite Element Analysis of Structures

## **ZÁSADY PRO VYPRACOVÁNÍ (ZADÁNÍ, CÍLE PRÁCE, POŽADOVANÉ VÝSTUPY)**

Prozkoumání možností nelineárního dynamického řešení lan na kladkách.

## **STRUKTURA BAKALÁŘSKÉ/DIPLOMOVÉ PRÁCE**

**VŠKP vypracujte a rozčleňte podle dále uvedené struktury:**

1. Textová část VŠKP zpracovaná podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (povinná součást VŠKP).
2. Přílohy textové části VŠKP zpracované podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (nepovinná součást VŠKP v případě, že přílohy nejsou součástí textové části VŠKP, ale textovou část doplňují).



**doc. Ing. Ivan Němec, CSc.**

Vedoucí diplomové práce

## **ABSTRAKT**

Diplomová práce „Explicitní a implicitní metody v nelineární dynamice“ řeší problematiku geometricky a fyzikálně nelineární analýzy stavební konstrukce vystavené seismickému zatížení metodou přímé integrace pohybových rovnic. Je porovnáváno řešení explicitní a implicitní metodou pro tři materiálové modely. Zatímco rozdíly ve výsledcích explicitní a implicitní Newmarkovy metody jsou podle očekávání malé, mezi výsledky pro různé materiálové modely jsou rozdíly podstatné. Tyto rozdíly však jsou vysvětleny a jsou plně v souladu s teoretickými předpoklady odpovídajícími jednotlivým materiálovým modelům. Závěrem diplomové práce je prověření správnosti výsledků nového modulu DYNAM-PRO programového systému RFEM pro obě použité numerické metody a všechny tři řešené materiálové modely (lineárně elastický, plastický Drucker-Prager a model poškození podle Mazarse). Při dostatečné přesnosti numerického řešení se z hlediska rychlosti výpočtu ukázaly obě numerické metody, explicitní i implicitní, jako vhodné k seismickým analýzám. Implicitní metoda sice může poskytnout i několikanásobné zvýšení rychlosti ve srovnání s Implicitní metodou, ale určení optimálního časového kroku je pro tuto metodu problematické a časově náročné, takže ve výsledku je vhodnost použití obou metod pro analýzu seismického zatížení staveb srovnatelná.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

MKP, Materiálová nelinearita, Geometrická Nelinearita, RFEM, Nelineární dynamika

## **ABSTRACT**

The final thesis „Explicit and Implicit methods in nonlinear dynamics“ deals with the issue of geometrical and physical nonlinear analysis of structures exposed to seismic loading by the methods of direct integration of equations of motion. Solution by the explicit and the implicit method is compared for three material models. While the differences between the results of the explicit method and the implicit Newmark method are small as expected, the differences are substantial between the results of different material models. However, these differences are explained and they are in full concordance with the theoretical assumptions for the pertinent material models. The conclusion of the final thesis is check of correctness of the results of the new module of the program system RFEM for both tested numerical methods and all three analyzed material models. (linear elastic, plastic Drucker-Prager and the Mazars damage model). With sufficient precision of results, both explicit and implicit numerical methods showed to be suitable for seismic analysis. The implicit method can provide several times faster calculation than the explicit one, but the determination of the optimal time step is problematic and time consuming, so the suitability of use of both methods for seismic analysis is comparable.

## **KEYWORDS**

FEM, Material non-linearity, Geometrical non-linearity, RFEM, Non-linear dynamics

VANĚČKOVÁ, Adéla *Explicitní a implicitní metody v nelineární dynamice*: diplomová práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, 2017. 132 s. Vedoucí práce byl doc. Ing. Ivan Němec, CSc.

**Prohlášení:**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval(a) samostatně a že jsem uvedl(a) všechny použité informační zdroje.

Brno .....

.....  
(podpis autora)

### **Poděkování:**

Ráda bych poděkovala vedoucímu diplomové práce panu doc. Ing. Ivanu Němcovi, CSc. za odborné vedení, konzultace, trpělivost a podnětné návrhy k práci. Dále firmě FEM consulting, s.r.o. a Ing. Václavu Rekovi za rady a pomoc při zpracování.



# OBSAH

Úvod	12
<b>1 Základy nelineární mechaniky</b>	<b>13</b>
1.1 Geometrická nelinearita	14
1.1.1 Základní pojmy	14
1.1.2 Míry deformace	20
1.1.3 Míry napjatosti	25
1.1.4 Objektivita a objektivní tenzory	28
1.1.5 Dvě formulace geometrické nelinearity v MKP	36
1.2 Materiálová nelinearita	44
1.2.1 Jednoosá napjatost	44
1.2.2 Obecná napjatost	50
1.2.3 Saint Venantův – Kirchhoffův materiál	50
1.2.4 Hyperelastické materiály	51
1.2.5 Hypoelastické materiály	52
1.2.6 Plasticita podle kritéria Drucker-Prager	53
1.2.7 Model poškození podle Mazarse	62
1.3 Metody řešení nelineárních algebraických rovnic	67
<b>2 Nelineární dynamika</b>	<b>72</b>
2.1 Základní principy mechaniky kontinua	72
2.1.1 Zákon zachování - obecně	72
2.1.2 Zákon zachování hybnosti	73
2.1.3 Zákon zachování momentu hybnosti - symetrie Cauchyho tenzoru napětí	74
2.2 Numerické řešení problémů elastodynamiky	74
2.2.1 Princip virtuálních prací	75
2.2.2 Hamiltonův zákon a Hamiltonův princip variace akce	75
2.2.3 Prostorová diskretizace pomocí konečných prvků	77
2.2.4 Numerické řešení pohybových rovnic	78
<b>3 Numerická analýza budovy zatížené seismickými účinky</b>	<b>82</b>
3.1 Řešené příklady	82
3.2 Porovnání výsledků programů RFEM a ANSYS	102
3.3 Srovnání výsledků podle numerických metod	109
3.4 Srovnání výsledků podle materiálových modelů	115

3.4.1	Kvalitativní porovnání odezvy budovy na seismicitu pro různé materiálové modely . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Závěr</b>	<b>120</b>
	<b>Literatura</b>	<b>122</b>
	<b>Seznam symbolů, veličin a zkratk</b>	<b>123</b>
	<b>Seznam příloh</b>	<b>125</b>
<b>A</b>	<b>Přílohy</b>	<b>126</b>
A.1	Vstupní data pro explicitní metodu - model plasticity dle Drucker-Pragera . . . . .	126

# SEZNAM OBRÁZKŮ

1.1	Eulerovská síť konečných prvků . . . . .	14
1.2	Lagrangeovská síť konečných prvků . . . . .	14
1.3	Nedeformovaná (počáteční) a deformovaná (běžná) konfigurace tělesa . . . . .	15
1.4	Mapování liniového elementu v referenční konfiguraci na běžnou konfiguraci pomocí deformačního gradientu. . . . .	15
1.5	Gradient rychlosti . . . . .	19
1.6	Původní a výsledná konfigurace tělesa . . . . .	25
1.7	Vztah mezi inženýrskou deformací a inženýrskou napjatostí . . . . .	45
1.8	Vztah mezi skutečnou napjatostí a skutečnou deformací . . . . .	46
1.9	Pracovní diagramy různých materiálů při zatěžování a odlehčování . . . . .	47
1.10	Srovnání funkcí $w$ a $s$ pro stabilní materiál [a) Konvexní funkce $w$ ; b) Pracovní diagram] . . . . .	49
1.11	Srovnání funkcí $w$ a $s$ pro nestabilní materiál [a) Nekonvexní funkce $w$ ; b) Odpovídající pracovní diagram] . . . . .	49
1.12	Druckerovo-Pragerovo kritérium . . . . .	54
1.13	Ilustrace návratu napětí do vrcholu kužele Druckerova-Pragerova kritéria (de Souza Neto at al., 2008). . . . .	60
1.14	Ilustrace různého chování materiálu: (a) elastické s poškozením, (b) elastoplastické, (c) elastoplastické s poškozením (Jason at al., 2006). . . . .	62
1.15	Chování betonu v jednoosém (a) tahu, (b) tlaku (Voyiadjis at al., 2008). . . . .	62
1.16	Ilustrace modelu poškození na jednoosé napjatosti (Jirásek, 2004) . . . . .	63
1.17	Ilustrace zatěžování a odtěžování u modelu poškození (Jason at al., 2006) . . . . .	64
1.18	Princip Newton–Raphsonovy metody . . . . .	70
1.19	Princip modifikované Newton–Raphsonovy metody . . . . .	70
1.20	Kombinace Newton–Raphsonovy a modifikované Newton–Raphsonovy metody . . . . .	70
2.1	Kontrolní objem. . . . .	72
2.2	Kontinuum v pohybu. . . . .	73
2.3	Aproximace posunů. . . . .	78
2.4	Plocha aproximační funkce akcelerace. . . . .	78
3.1	akcelerogram Umbro-Marchigiana, stanice Colfiorita-Casermette . . . . .	82
3.2	Schéma řešení budovy . . . . .	83
3.3	Lineární elastický model I . . . . .	84
3.4	Lineární elastický model II . . . . .	85
3.5	Lineární elastický model III . . . . .	86
3.6	Lineární elastický model IV . . . . .	86

3.7	Model plasticity dle Drucker-Pragera I . . . . .	87
3.8	Model plasticity dle Drucker-Pragera II . . . . .	88
3.9	Model plasticity dle Drucker-Pragera III . . . . .	89
3.10	Model plasticity dle Drucker-Pragera IV . . . . .	89
3.11	Model poškození dle Mazarse I . . . . .	90
3.12	Model poškození dle Mazarse II . . . . .	91
3.13	Model poškození dle Mazarse III . . . . .	92
3.14	Model poškození dle Mazarse IV . . . . .	92
3.15	Lineární elastický model I . . . . .	93
3.16	Lineární elastický model II . . . . .	94
3.17	Lineární elastický model III . . . . .	95
3.18	Lineární elastický model IV . . . . .	95
3.19	Model plasticity dle Drucker-Pragera I . . . . .	96
3.20	Model plasticity dle Drucker-Pragera II . . . . .	97
3.21	Model plasticity dle Drucker-Pragera III . . . . .	98
3.22	Model plasticity dle Drucker-Pragera IV . . . . .	98
3.23	Model poškození dle Mazarse I . . . . .	99
3.24	Model poškození dle Mazarse II . . . . .	100
3.25	Model poškození dle Mazarse III . . . . .	101
3.26	Model poškození dle Mazarse IV . . . . .	101
3.27	Porovnání posunů implicitní metodou . . . . .	102
3.28	Porovnání UX . . . . .	103
3.29	Porovnání UY . . . . .	104
3.30	Porovnání UX . . . . .	105
3.31	Porovnání UX . . . . .	106
3.32	Porovnání UY . . . . .	107
3.33	Porovnání UY . . . . .	108
3.34	Porovnání explicitní a implicitní metody . . . . .	111
3.35	Graf posunutí horního uzlu pro časový krok 0,0001s. . . . .	112
3.36	Graf posunutí horního uzlu pro časový krok 0,0005s. . . . .	113
3.37	Graf posunutí horního uzlu pro časový krok 0,001s. . . . .	113
3.38	Graf posunutí horního uzlu pro časový krok 0,002s. . . . .	114
3.39	Graf posunutí horního uzlu pro časový krok 0,005s. . . . .	114
3.40	Posunutí horního uzlu pro lineární materiál. . . . .	116
3.41	Posunutí horního uzlu pro model plasticity dle Drucker-Pragera. . . . .	117
3.42	Posunutí horního uzlu pro model poškození dle Mazarse. . . . .	117

## ÚVOD

Ve stavební projekci se jeví rostoucí potřeba provádění nelineárních dynamických výpočtů. Projevuje se to i ve zvýšené poptávce uživatelů po vytvoření modulu pro dynamickou analýzu s respektováním geometrické i materiálové nelinearity. V souvislosti se zvýšenou poptávkou po nelineární dynamické analýze z praxe bylo také zvoleno téma diplomové práce „Explicitní a implicitní metody v nelineární dynamice“.

Původně bylo předpokládáno, že nelineárně dynamická analýza bude prověřena na lanových konstrukcích s kladkami. Vzhledem k tomu, že se v programu RFEM vyskytly problémy s řešením přejezdu lanovek přes kladky už ve staticce, nebylo možno se vůbec do dynamické analýzy lan na kladkách pustit. Vzhledem k tomu, že se vyskytla naléhavá potřeba řešení seismicity s respektováním plasticity, eventuálně poškozením materiálu ze strany uživatelů programu RFEM, rozhodl vedoucí diplomové práce, že prověření možností nelineární dynamické analýzy bude provedeno na úloze, po které je v současné době největší poptávka, tj. na seismické analýze staveb.

Cílem diplomové práce bylo prozkoumat možnosti využití explicitní a implicitní metody přímé integrace pohybových rovnic v seismické analýze s respektováním materiálové nelinearity. Pro analýzu byly vybrány tři materiálové modely: lineárně elastický, plastický dle Druckera-Pragera a materiál s poškozením dle Mazarse. Jako typická stavební konstrukce byla pro řešení zvolena stěna šestipodlažní budovy. Vzhledem k největší poptávce uživatelů a geografické blízkosti byl zvolen akcelrogram z Itálie.

Ve studii bylo třeba jednak zjistit vhodnost požití explicitní a implicitní metody dynamické analýzy pro seismicitu a také prověřit chování různých materiálových modelů.

# 1 ZÁKLADY NELINEÁRNÍ MECHANIKY

## *Klasifikace nelinearity*

V mechanice těles je možno rozlišovat dva typy nelinearity:

- **Geometrická nelinearita:** zdrojem nelinearity jsou tzv. geometrické rovnice, tj. vztahy mezi posunutím a přetvořením.
- **Materiálová (fyzikální nelinearita):** zdrojem nelinearity jsou nelineární konstitutivní vztahy (fyzikální rovnice) tj. vztahy mezi napětím a přetvořením. Do tohoto druhu nelinearity je možno logicky začlenit i nelinearity způsobené nelineárním chováním podpor (např. vylučování tahu v podporách či podloží).

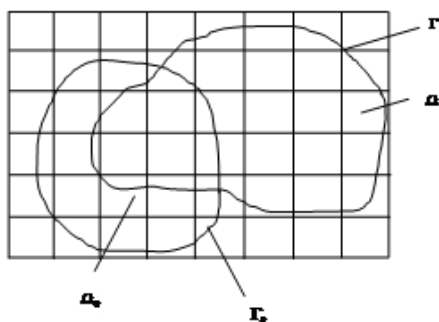
## *Základní rovnice, Eulerovské a Lagrangeovské prvky*

Celá mechanika je založena na pěti základních systémech rovnic:

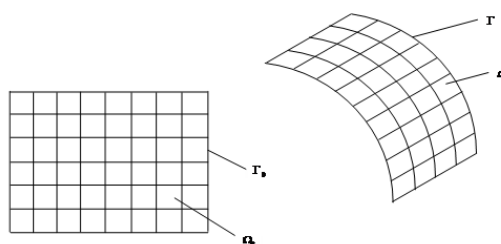
1. Zákon zachování hmoty
2. Zákon zachování hybnosti (lineární i úhlové)
3. Zákon zachování energie
4. Geometrické rovnice (míra deformace)
5. Konstitutivní vztahy (vztahy mezi deformací a napjatostí)

Zatímco první tři rovnice mají charakter fyzikálních zákonů, poslední dvě definují vlastnosti námi zvoleného modelu kontinua. Je vznesen též požadavek na spojitost neboli kompatibilitu deformací. Rovnice rovnováhy je možno chápat jako zvláštní případ zákona o zachování hybnosti při vyloučení setrvačných sil. Příslušné rovnice pak přejdou v Cauchyho rovnice rovnováhy. Poslední dva systémy rovnic mohou být nelineární, pak hovoříme o nelinearitě fyzikální nebo geometrické.

Numerické metody používané pro řešení nelineárních úloh jsou však společné, tedy nečiní principiální problém, řešíme-li nelinearitu komplexně, tedy současně fyzikální i geometrickou. Pro řešení geometrické nelinearity je třeba nově definovat některé pojmy. Obecně prvky (sítě) v geometrické nelinearitě mohou být geometricky neměnné, nebo se mohou deformovat současně s pohybem hmoty. Z tohoto hlediska rozlišujeme prvky (sítě) na Eulerovské, které nemění svou geometrii a hmota přechází z jednoho prvku do druhého a Lagrangeovské, které se deformují společně s hmotou (jako by byly na ni nakresleny). Zatímco v mechanice plynů, nebo kapalin je mnohdy nutno použít Eulerovské sítě, protože může dojít k libovolným turbulencím, v mechanice těles jsou v oblibě Lagrangeovské sítě. V dalším se budeme soustředit výhradně na ně.



Obr. 1.1: Eulerovská síť konečných prvků



Obr. 1.2: Lagrangeovská síť konečných prvků

## 1.1 Geometrická nelinearita

### 1.1.1 Základní pojmy

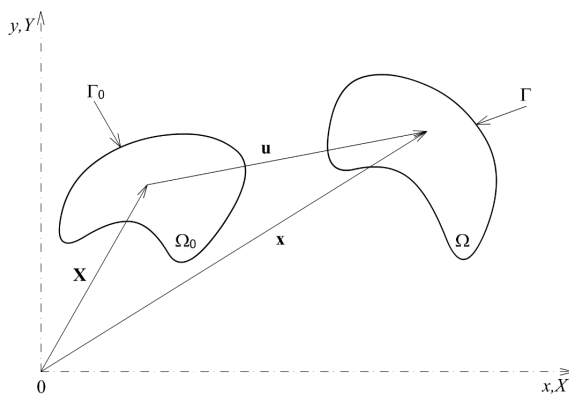
#### *Souřadné systémy v nelineární mechanice*

Je účelné definovat dva základní souřadné systémy používané v geometricky nelineární analýze. **Prostorové** (nebo také Eulerovské event. globální) souřadnice budeme označovat  $\mathbf{x}$ . Určují polohu bodu v prostoru. **Materiálové** (nebo také Lagrangeovské event. lokální) souřadnice, které budeme označovat  $\mathbf{X}$ , označují bod tělesa. Každý materiálový bod má jedny materiálové souřadnice, které jsou obvykle totožné s prostorovými souřadnicemi v počáteční (obvykle nedeformované) konfiguraci tělesa. Posunutí bodu v prostoru je potom definováno vektorem

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{x} - \mathbf{X},$$

platí také

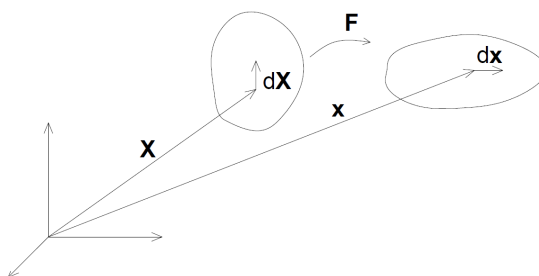
$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$$



Obr. 1.3: Nedeformovaná (počáteční) a deformovaná (běžná) konfigurace tělesa

### Deformační gradient

Deformační gradient je fundamentální míra deformace v mechanice kontinua. Je to tenzor druhého řádu, který mapuje liniový element v referenční konfiguraci na liniový element (sestavující se ze stejných hmotných částic) v běžné konfiguraci.



Obr. 1.4: Mapování liniového elementu v referenční konfiguraci na běžnou konfiguraci pomocí deformačního gradientu.

Deformační gradient  $\mathbf{F}$  je definován vztahem

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \equiv \nabla_0 \mathbf{x} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \equiv \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u} \quad F_{iJ} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J},$$

platí tedy

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad dx_i = F_{iJ}dX_J.$$

Malá písmena v dolních indexech v indexové notaci naznačují vztah příslušné veličiny k prostorovým souřadnicím, zatímco velká písmena označují vztah příslušné veličiny k materiálovým souřadnicím (například  $F_{iJ} = \partial x_i / \partial X_J$ ). V matematice je deformační gradient také nazýván Jacobiho matice transformace (mezi původní a běžnou konfigurací). Povšimněme si, že deformační gradient je totožný s materiálovým gradientem prostorových souřadnic. Determinant deformačního gradientu



(jakobián transformace) má fyzikální význam jako poměr objemu deformovaného a nedeformovaného elementu.

Pro důležitost deformačního gradientu jej rozepíšeme v expandované formě.

$$\mathbf{F} \equiv \nabla_0 \mathbf{x} \equiv \text{Grad } \mathbf{x} = \mathbf{I} + \text{Grad } \mathbf{u}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Symbolem  $\nabla_0$  značíme operátor gradientu vektorového pole v materiálových souřadnicích (materiálový gradient) a symbolem  $\nabla$  operátor gradientu vektorového pole v prostorových souřadnicích (prostorový gradient). Podobně velké písmeno  $G$  v "Grad" naznačuje, že se jedná o materiálový gradient.

Přidáme-li k pohybu bodů tělesa konstantní vektor  $\mathbf{c}$ , tedy  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{c}$ , potom  $\mathbf{F}' = \text{Grad}(\mathbf{x} + \mathbf{c}) = \text{Grad}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}$ . Deformační gradient tedy neudává polohu tělesa v prostoru. Pokud se těleso pouze posune jako tuhý celek, tedy  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{c}$ , potom platí  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ , ale  $\mathbf{x} \neq \mathbf{X}$ . Jestliže se těleso pouze pootočí jako tuhý celek, potom  $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ , kde  $\mathbf{R}$  je tenzor rotace. Matice  $\mathbf{R}$  je ortogonální, tedy platí  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ .

Inverzní deformační gradient mapuje prostorový liniový element  $d\mathbf{x}$  na materiálový liniový element  $d\mathbf{X}$ . Je definován takto:

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad } \mathbf{X}, \quad F_{Ij}^{-1} = \frac{\partial X_I}{\partial x_j},$$

tedy platí

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}, \quad dX_I = F_{Ij}^{-1} dx_j,$$

s uvážením, že

$$\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} \quad F_{iM} F_{Mj}^{-1} = \delta_{ij}.$$

Pomocí báзовých vektorů materiálových a prostorových souřadnic ( $\mathbf{E}, \mathbf{e}$ ) můžeme deformační gradient vyjádřit následovně:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_J} \otimes \mathbf{E}_J = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_J \\ \mathbf{F}^{-1} &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_j} \otimes \mathbf{e}_j = \frac{\partial X_I}{\partial x_j} \mathbf{E}_I \otimes \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

Tedy např.  $\mathbf{F} d\mathbf{X} = (\partial x_i / \partial X_J) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_J (dX_M \mathbf{E}_M) = (\partial x_i / \partial X_J) dX_J \mathbf{e}_i = d\mathbf{x}$ .

Uvedme některé důležité vztahy s využitím deformačního gradientu:

$$\begin{aligned}\text{grad}(a) &= \text{Grad}(a) \mathbf{F}^{-1} \equiv \nabla_0 a \mathbf{F}^{-1} \\ \text{grad}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) &= \text{Grad}(\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{X})) \mathbf{F}^{-1} \equiv \nabla_0(\mathbf{X}) \mathbf{F}^{-1} \\ \text{div}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) \equiv \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \text{Grad}(\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{X})) : \mathbf{F}^{-T} \equiv \nabla_0 \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) : \mathbf{F}^{-T},\end{aligned}$$

kde  $a$  je skalární funkce,  $\bar{\mathbf{v}}$  a  $\mathbf{v}$  jsou stejné vektory, první v materiálových a druhý v prostorových souřadnicích. Podobně  $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$  a  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  jsou stejné tenzory 2. řádu v materiálových a prostorových souřadnicích. Platí totiž

$$\begin{aligned}\nabla_0 \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{F} = \nabla \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{X}) \mathbf{F} \\ \nabla \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{X}) &= \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_0 \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{X}) \mathbf{F}^{-1} = \nabla_0 \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{F}^{-1},\end{aligned}$$

tudíž  $\bar{\mathbf{v}}$  a  $\mathbf{v}$  jsou stejné vektory, také platí, že i jejich gradienty jsou stejné

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{v} &= \nabla \bar{\mathbf{v}} \\ \nabla_0 \mathbf{v} &= \nabla_0 \bar{\mathbf{v}}.\end{aligned}$$

### *Polární dekompozice, Cauchy-Greenovy deformační tenzory, stretch tenzory*

Vztah mezi původní a výslednou konfigurací, který je dán deformačním gradientem  $\mathbf{F}$ , lze rozdělit na rotaci danou tenzorem rotace  $\mathbf{R}$  a deformaci danou buď pravým stretch tenzorem  $\mathbf{U}$ , nebo levým stretch tenzorem  $\mathbf{V}$ . Záleží, jestli je v infinitezimální části tělesa myšleně provedena nejdříve rotace a potom deformace, nebo naopak. Vztahy mezi deformačním gradientem  $\mathbf{F}$  a tenzory  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  můžeme tedy popsat následující rovnicí:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}.$$

Nejdříve je tedy provedena deformace  $\mathbf{U}$  a potom rotace  $\mathbf{R}$ , nebo nejdříve rotace  $\mathbf{R}$  a potom deformace  $\mathbf{V}$ . Tenzory  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  jsou symetrické ( $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}$ ). Lze ukázat, že platí

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}} = \sqrt{\mathbf{C}} \\ \mathbf{V} &= \sqrt{\mathbf{F} \mathbf{F}^T} = \sqrt{\mathbf{B}},\end{aligned}$$

kde  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{B}$  je pravý, resp. levý Cauchy-Greenův deformační tenzor.

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad C_{IJ} = F_{kI} F_{kJ} = \frac{\partial x_k}{\partial X_I} \frac{\partial x_k}{\partial X_J} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{F} \mathbf{F}^T, \quad B_{ij} = F_{iK} F_{jK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \frac{\partial x_j}{\partial X_K}\end{aligned}$$

Levý Cauchy-Greenův deformační tenzor  $\mathbf{B}$  je také často nazýván Fingerův deformační tenzor.

Připomeňme, že pro umocňování a odmocňování matic platí stejné vztahy jako pro umocňování a odmocňování čísel, tedy jestliže pro obecnou čtvercovou matici  $\mathbf{A}$  platí  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{H}$  (nikoliv  $|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ ), tak potom  $\sqrt{\mathbf{H}} = \mathbf{A}$ .

S využitím báze vektorů prostorových a materiálových souřadnic můžeme psát

$$\mathbf{C} = \left( \frac{\partial x_k}{\partial X_I} \mathbf{E}_I \otimes \mathbf{e}_k \right) \left( \frac{\partial x_m}{\partial X_J} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{E}_J \right) = \frac{\partial x_k}{\partial X_I} \frac{\partial x_k}{\partial X_J} \mathbf{E}_I \otimes \mathbf{E}_J.$$

Tenzor  $\mathbf{C}^{-1}$  je nazýván Piolův deformační tenzor a  $\mathbf{B}^{-1}$  je nazýván Cauchyho deformační tenzor. Mezi levým a pravým Cauchy-Greenovým tenzorem platí vztahy

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{C} \mathbf{F}^{-1}$$

a rovnost invariantů obou tenzorů. Např. pro 1. invariant platí

$$\text{tr} \mathbf{C} = \text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \text{tr}(\mathbf{F} \mathbf{F}^T) = \text{tr} \mathbf{B}.$$

Obecně platí, že každou regulární čtvercovou matici lze rozložit na součin matice rotace  $\mathbf{R}$  a symetrické matice. Tento rozklad regulární čtvercové matice je nazýván polární dekompozice. Teorém polární dekompozice umožňuje extrakci tenzoru rotace  $\mathbf{R}$  z deformačního gradientu. Tenzor  $\mathbf{R}$  reprezentuje průměrnou rotaci hmotného bodu.

Jestliže  $d\mathbf{X}$  je infinitezimální hmotná úsečka v původní konfiguraci, tj. v materiálových souřadnicích, potom odpovídající úsečka v běžné (deformované)  $d\mathbf{x}$  konfiguraci bude dána vztahem

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}.$$

Determinant deformačního gradientu  $\mathbf{F}$  je označen  $J$ . V matematice je také nazýván Jakobián transformace.

$$J = \det(\mathbf{F}) = \frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \frac{\rho_0}{\rho},$$

kde  $d\Omega_0 = dX dY dZ$ ,  $d\Omega = dx dy dz$ ,  $\rho_0$  a  $\rho$  jsou hustoty v materiálových a prostorových souřadnicích. Jakobián transformace je užíván v integrálech ve vztazích mezi různými konfiguracemi tělesa. Např.

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} f_0(\mathbf{X}) J d\Omega_0.$$

Povšimněme si, že platí

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}.$$

Platí totiž

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I}$$

a

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}$$

Proces zobrazení z původní konfigurace na deformovanou konfiguraci se v literatuře nazývá "push forward".

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t).$$

Opačný proces, tedy mapování z běžné (deformované) konfigurace na původní se nazývá "pull back".

$$\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t).$$

### Rychlost deformace

Definujme nejdříve gradient rychlosti  $\mathbf{L}$ , který je používán jako míra rychlosti, kterou se materiál deformuje. Uvažujme dva sousední body  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  (obr.1.5). Rychlosti hmotných částic v těchto bodech jsou  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  a  $\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$ . Můžeme napsat následující vztah mezi rychlostmi v obou bodech:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x},$$

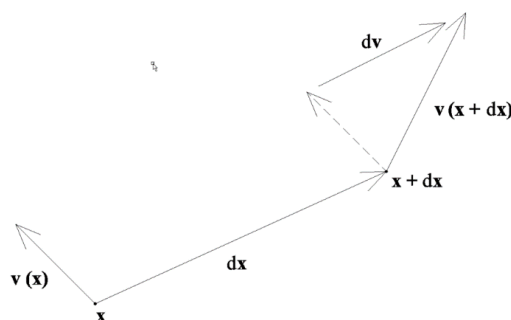
poměrná rychlost mezi oběma body je

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} \equiv \mathbf{L} d\mathbf{x} = \frac{d}{dt}(d\mathbf{x}).$$

kde

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \mathbf{v} = \text{grad} \mathbf{v}, \quad L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

kde  $\mathbf{v}$  je vektor rychlosti ( $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}}$ , tečka značí derivaci podle času).



Obr. 1.5: Gradient rychlosti

Výše uvedený vzorec pro prostorový gradient  $\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \mathbf{v} = \text{grad} \mathbf{v}$  zdůrazňuje tenzorový charakter prostorového gradientu rychlosti. Jeho fyzikální význam se stane

jasnějším po jeho rozložení na symetrickou a antisymetrickou část. Tensor  $\mathbf{L}$  může být rozložen na symetrickou a antisymetrickou (skew symmetric) část.

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = \mathbf{D} + \mathbf{W}.$$

Rychlost deformace (rate-of-deformation)  $\mathbf{D}$  je tenzor definovaný jako symetrická část gradientu rychlosti  $\mathbf{L}$ .

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Druhou, antisymetrickou část tenzoru  $\mathbf{L}$  označíme jako spin  $\mathbf{W}$ .

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T), \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Tenzor rychlosti deformace  $\mathbf{D}$  může být vyjádřen také pomocí Greenova tenzoru deformace následujícím způsobem:

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1}.$$

Prostorový gradient rychlosti  $\mathbf{L}$  je běžně používán v mechanice těles i v mechanice tekutin. Méně často používaný je materiálový gradient rychlosti, který je vztážen k rychlosti změny deformačního gradientu:

$$\text{Grad} \mathbf{V} = \nabla_0 \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left( \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right) = \dot{\mathbf{F}}.$$

Je užitečné zdůraznit skutečnost, že vzhledem k tomu, že  $\mathbf{X}$  a  $t$  jsou nezávislé proměnné, je pořadí derivací podle času a podle materiálových souřadnic (materiálový gradient) libovolné.

### 1.1.2 Míry deformace

#### *Green – Lagrangeův tenzor deformace ( $\mathbf{E}$ )*

Green Lagrangeův tenzor deformace, podobně jak Euler-Almansiho tenzor, dává přímou informaci o změně čtverce délky elementu  $d\mathbf{X}$ .

$$\frac{|d\mathbf{x}|^2 - |d\mathbf{X}|^2}{2} = \frac{1}{2} [d\mathbf{X} \mathbf{C} d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}] = \frac{1}{2} (d\mathbf{X} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) d\mathbf{X}) \equiv d\mathbf{X} \mathbf{E} d\mathbf{X}.$$

Tento tenzor deformace má jako základ původní nedeformovanou konfiguraci. Derivace jsou tedy prováděny podle materiálových souřadnic. Z binomického rozvoje druhé odmocniny bere první dva členy, tedy k lineárnímu výrazu známého

z lineární mechaniky přibývají kvadratické členy. Uveďme několik způsobů zápisu definice Green - Lagrangeova tenzoru deformace. Indexový zápis:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,J} + u_{j,I} + u_{k,I} u_{k,J}),$$

kde

$$u_{i,J} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}.$$

S využitím deformačního gradientu  $\mathbf{F}$ , ev. pravého Cauchy-Greenova deformačního tenzoru může být výraz pro Green - Lagrangeův tenzor deformace zapsán následujícím způsobem:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (F_{ik}^T F_{kj} - \delta_{ij}) \equiv \frac{1}{2} (C_{IJ} - \delta_{ij}),$$

kde  $\delta_{ij}$  je zde Kroneckerovo delta ( $\delta_{ii} = 1$ , pro  $j \neq i$   $\delta_{ij} = 0$ ). Tenzorový, resp. maticový zápis:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right),$$

kde  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  je pravý Cauchy - Greenův deformační tenzor (right Cauchy - Green deformation tensor). S využitím materiálového gradientu vektoru posunutí  $\mathbf{u}$  vypadá vzorec následovně:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( (\nabla_0 \mathbf{u})^T + \nabla_0 \mathbf{u} + (\nabla_0 \mathbf{u})^T \cdot \nabla_0 \mathbf{u} \right),$$

kde  $\nabla_0 \mathbf{u}$  je gradient vektorového pole posunutí v materiálových souřadnicích.

### *Euler - Almansiho tenzor deformace (e)*

Tento tenzor deformace (který je také nazýván Almansi - Hamelův, nebo Eulerovský) je vztažen k výsledné, deformované konfiguraci. Derivace jsou prováděny v prostorových souřadnicích. Podobně jako Green-Lagrangeův tenzor deformace dává i Euler-Almansiho tenzor přímou informaci o změně čtverce délky elementu  $d\mathbf{X}$ .

$$\frac{|d\mathbf{x}|^2 - |d\mathbf{X}|^2}{2} = \frac{1}{2} [d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{x} \mathbf{B}^{-1} d\mathbf{x}] = \frac{1}{2} (d\mathbf{x} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) d\mathbf{x}) \equiv d\mathbf{x} e d\mathbf{x}.$$

V indexové notaci můžeme zapsat definici Euler - Almansiho tenzoru deformace takto:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}),$$

kde  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  nebo s využitím deformačního gradientu  $\mathbf{F}$ , ev. levého Cauchy-Greenova deformačního tenzoru  $\mathbf{B}$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - F_{ik}^{-T} F_{kj}^{-1}) = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - B_{ij}^{-1}).$$

Tenzorový, resp. maticový zápis:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right), \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$  je levý Cauchy - Greenův deformační tenzor (Cauchy strain tensor, nebo Finger deformation tensor). S využitím prostorového gradientu vektorového pole posunutí, lze vzorec napsat následovně

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \nabla \mathbf{u} \right).$$

Mezi tenzory deformace  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{e}$  platí následující vztahy :

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}. \end{aligned}$$

První z těchto rovnic je v literatuře nazývána operace "push forward" pro Greenovu deformaci, druhá pak operace "pull back" pro Almansiho deformaci. Platnost vztahů mezi Green-Lagrangeovým a Euler-Almansiovým tenzorem deformace lze dokázat tím, že vzájemným dosazením jedné z těchto rovnic do druhé obdržíme identity.

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{e} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

### Logaritmická (Henckyho) míra deformace ( $\varepsilon_n$ )

Tato míra je definována přírůstkově a je v každém přírůstku vztažena k běžné konfiguraci. Je také nazývána jako opravdová, nebo přirozená míra deformace (true strain, natural stain). Uvedme zde její vyjádření pro 1D.

$$d\varepsilon_n = \frac{dl}{l} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_n = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = [\ln l]_{l_0}^l = \ln l - \ln l_0 = \ln \left( \frac{l}{l_0} \right) = \ln (1 + \varepsilon_x),$$

kde  $\varepsilon_x$  je lineární deformace,  $l_0$  je počáteční délka a  $l$  je výsledná délka. Pro 2D a 3D můžeme definovat logaritmickou míru deformace pomocí pravého stretch tenzoru  $\mathbf{U}$ .

$$\varepsilon_n = \ln \mathbf{U} = \ln \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}},$$

kde  $\mathbf{U}$  je tenzor 2.řádu a logaritmický tenzor deformace  $\varepsilon_n$  může být určen jeho spektrální dekompozicí

$$\varepsilon_n = \sum_{i=1}^N \ln(\lambda_i) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T,$$

kde  $\lambda$ ,  $\mathbf{e}_i$  jsou vlastní čísla a vlastní vektory matice  $\mathbf{U}$  a  $N$  je dimenze prostoru. Logaritmická míra deformace je vhodná pro velké deformace ( $|\varepsilon_x| > 0,05$ ). U konstrukčních materiálů není dosahováno tak velkých deformací, takže použití této míry deformace není pro stavební konstrukční materiály nutné.

### *Infinitezimální tenzory deformace ( $\varepsilon$ ), ( $\hat{e}$ )*

Je-li deformace tak malá, že lze zanedbat členy 2.řádu v Greenovu tenzoru deformace dostaneme tzv. infinitezimální tenzor deformace, který je totožný s lineárním tenzorem deformace  $\varepsilon$ . V indexové notaci můžeme tedy psát

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

V maticové, resp. tenzorové notaci můžeme výraz pro  $\varepsilon$  zapsat následujícími způsoby :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{1}{2} (\nabla_0 \mathbf{u} + (\nabla_0 \mathbf{u})^T) = \frac{1}{2} (\mathbf{F} + \mathbf{F}^T) - \mathbf{I}.$$

$\nabla_0$  je materiálový gradient a  $\varepsilon$  je tedy symetrická část materiálového gradientu posunutí  $\nabla_0 \mathbf{u}$ . Je třeba také definovat infinitezimální tenzor deformace definovaný v prostorových souřadnicích  $\hat{e}$ . Výrazy jsou obdobou vztahů pro  $\varepsilon$ , derivace ale jsou prováděny v prostorových souřadnicích  $\mathbf{x}$ . V indexové notaci můžeme psát

$$\hat{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}),$$

v tenzorové notaci můžeme výraz pro  $\hat{e}$  napsat:

$$\hat{e} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) = \mathbf{I} - \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T}).$$

Při odvození posledního výrazu bylo využito vztahu  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ , tedy

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1}.$$

$\nabla$  je prostorový gradient, tenzor  $\hat{e}$  je tedy symetrická část prostorového gradientu posunutí  $\nabla \mathbf{u}$ . Význam infinitezimálního tenzoru  $\hat{e}$  plyne z faktu, že tento tenzor deformace je energeticky konjugovaný s Cauchyho napětím  $\sigma$ .

### *Seth-Hill rodina tenzorů deformace, jiné míry deformace*

Tato rodina tenzorů deformace je definována jednotným vzorcem ve tvaru

$$\mathbf{E}(m) = \frac{1}{2m} (\mathbf{U}^{2m} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{C}^m - \mathbf{I}).$$



Pro jednotlivé hodnoty  $m$  dostáváme: Green-Lagrangeův tenzor,  $m = 1$

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}),$$

Biotův tenzor,  $m = 1/2$

$$\mathbf{E}(1/2) = \mathbf{U} - \mathbf{I} = \mathbf{C}^{1/2} - \mathbf{I},$$

logaritmický, Henckyho, opravdový, přirozený tenzor,  $m = 0$

$$\mathbf{E}(0) = \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{C},$$

$m = -1$

$$\mathbf{E}(-1) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{U}^{-2}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}).$$

Tento tenzor je v některé literatuře označen, jako Almansiho tenzor, ale je jiný, než Euler-Almansiho tenzor  $\mathbf{e} = 1/2(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})$ , i když je také definován v prostorových souřadnicích. Aproximaci druhého řádu Seth-Hillovy rodiny tenzorů deformace lze zapsat takto

$$\mathbf{E}(m) = \varepsilon + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u})^T \cdot \nabla \mathbf{u} - (1 - m)\varepsilon^T \cdot \varepsilon,$$

kde  $\varepsilon$  je infinitezimální tenzor. Jako míry deformace lze též použít i některé jiné tenzory, např.

- deformační gradient  $\mathbf{F}$
- levý Cauchy – Greenův deformační tenzor  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$
- pravý Cauchy – Greenův deformační tenzor  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$

Je možno připustit mnoho dalších tenzorů deformace za předpokladu, že budou splňovat následující podmínky:

- při pohybu tuhého tělesa musí přetvoření být nulové
- závislost tenzoru deformace na gradientu posunutí  $\nabla \mathbf{u}$  musí být spojitá, spojitě diferencovatelná a monotonní
- je také požadováno, aby při deformacích konvergujících k nule ( $|\nabla \mathbf{u}| \rightarrow 0$ ) deformační tenzor konvergoval k infinitezimálnímu tenzoru deformace  $\varepsilon$

Jako příklad uvedme následující soubor tenzorů deformace, který nepatří do Seth-Hillovy rodiny tenzorů deformace, ale má stejnou aproximaci druhého řádu jako jako Seth-Hillova míra deformace pro  $m = 0$  pro libovolnou hodnotu

$$\mathbf{E}^{(n)} = \frac{(\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{-n})}{2n}.$$

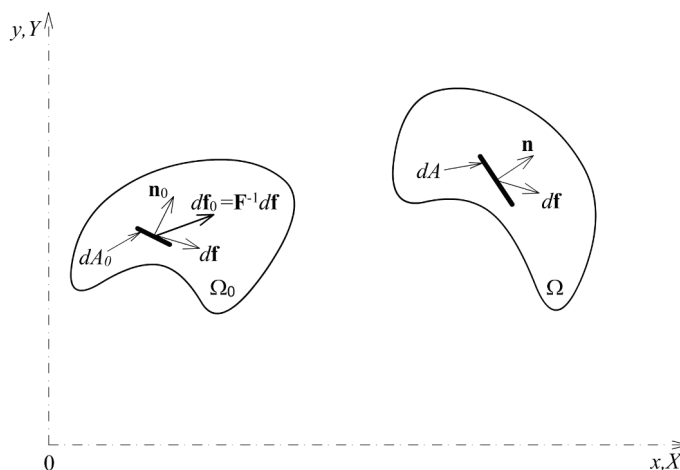
Pro každou míru deformace by měla být nalezena energeticky konjugovaná míra napjatosti.

### 1.1.3 Míry napjatosti

Vzhledem k tomu, že při deformaci se mění směr i velikost plošky pomocí které napětí definujeme, je možno představit několik tenzorů napjatosti v závislosti na tom, co je definováno na původní konfiguraci (tedy materiálových souřadnicích) a co na výsledné konfiguraci (tedy v prostorových souřadnicích). Představme si zde několik nejdůležitějších:

1. Cauchyho napětí  $\sigma$
2. První napětí Piola – Kirchhoff  $\mathbf{P}$
3. Druhé napětí Piola – Kirchhoff  $\mathbf{S}$
4. Korotační napětí  $\hat{\sigma}$
5. Kirchhoffovo napětí  $\tau$
6. Biotovo napětí  $\mathbf{T}$

Nejdříve si definujeme některé pojmy, které budeme potřebovat.



Obr. 1.6: Původní a výsledná konfigurace tělesa

- (a)  $dA_0$  infinitezimální ploška v tělese v původní konfiguraci
- (b)  $dA$  infinitezimální ploška ve výsledné (resp. běžné) konfiguraci odpovídající plošce  $dA_0$
- (c)  $d\mathbf{f}_0$  síla na nedeformovanou plošku  $dA_0$  transformovaná do materiálových souřadnic
- (d)  $d\mathbf{f}$  síla na plošku  $dA$  (resp.  $dA_0$ ) v prostorových souřadnicích
- (e)  $\mathbf{t}_0$  vektor napětí působící na plošku  $dA_0$  v materiálových souřadnicích
- (f)  $\bar{\mathbf{t}}_0$  vektor napětí působící na plošku  $dA_0$  v prostorových souřadnicích
- (g)  $\mathbf{t}$  vektor napětí působící na plošku  $dA$  v prostorových souřadnicích
- (h)  $\mathbf{n}_0$  jednotková normála k plošce  $dA_0$  v materiálových souřadnicích
- (i)  $\mathbf{n}$  jednotková normála k plošce  $dA$  v prostorových souřadnicích

- (j)  $dA_0$  vektor orientované plochy v materiálových souřadnicích ( v původní konfiguraci )  
 (k)  $dA$  vektor orientované plochy v prostorových souřadnicích  
 Mezi silou  $d\mathbf{f}$  a vektory napětí  $\bar{\mathbf{t}}_0$  a  $\mathbf{t}$  platí následující vztahy

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t} \cdot dA = \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot dA_0.$$

Podobně platí na počáteční konfiguraci (v materiálových souřadnicích)

$$df_0 = t_0 \cdot dA_0.$$

Vektory  $\mathbf{t}$  a  $\bar{\mathbf{t}}_0$  mají tedy stejný směr v prostorových souřadnicích, jsou ale přepočítány na jiné plochy. Vektor  $\bar{\mathbf{t}}_0$  je vektorem  $\mathbf{t}$  přepočítaným na původní plochu. Pro vektory orientovaných ploch platí vztahy:

$$dA_0 = n_0 \cdot dA_0, \quad dA = n \cdot dA.$$

Probereme stručně každý s výše uvedených tenzorů napětí zvlášť

### Cauchyho napětí ( $\boldsymbol{\sigma}$ )

Cauchyho napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  je definováno Cauchyho zákonem (1. Cauchyho teorém). Tenzor napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  je lineárním mapováním vektoru napětí  $\mathbf{t}$  na vektor normály  $\mathbf{n}$ .

$$d\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dA = d\mathbf{f} = \mathbf{t} dA \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}.$$

Tenzor  $\boldsymbol{\sigma}$  je symetrický ( $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$ ). Cauchyho napětí je plně definováno na výsledné, nebo běžné konfiguraci tělesa. Protože představuje opravdové napětí měřené v daném okamžiku na deformovaném tělese. Je proto nazýváno také „skutečné napětí“ (true stress ).

### Nominální napětí ( $\mathbf{N}$ ), první napětí Piola – Kirchhoff ( $\mathbf{P}$ )

Tento tenzor napětí je definován podobně jako Cauchyho tenzor napětí, ale je vztažen k nedeformované ploše  $dA_0$ .

$$d\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{N} = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{N} dA_0 = d\mathbf{f} = \bar{\mathbf{t}}_0 dA_0 \Rightarrow \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{N} = \bar{\mathbf{t}}_0.$$

První napětí Piola-Kirchhoff je transposicí nominálního napětí.

$$\mathbf{P} = \mathbf{N}^T.$$

Tenzory napjatosti  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{N}$  nejsou symetrické. Tenzor  $\mathbf{P}$  je v některé literatuře nazýván nominální napětí a jeho transpozice potom první napětí Piola- Kirchhoff.

*Druhé napětí Piola – Kirchhoff ( $\mathbf{S}$ )*

Připomeňme, že platí  $d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}$ . Analogicky může být síla  $d\mathbf{f}$  v prostorových souřadnicích na deformovanou plošku  $d\mathbf{A}$  transformována na sílu  $d\mathbf{f}_0$  v materiálových souřadnicích na nedeformovanou plošku  $d\mathbf{A}_0$

$$d\mathbf{f}_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1} \cdot (d\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{N}) = d\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^{-T} \equiv d\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{S},$$

tedy

$$\mathbf{S} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}.$$

Je možno ukázat, že platí vztah

$$\mathbf{t}_0 \cdot dA_0 = \mathbf{n}_0 \cdot dA_0 \cdot \mathbf{S}.$$

Analogicky s Cauchyho zákonem můžeme tedy na původní konfiguraci ( v materiálových souřadnicích ) napsat definici tenzoru  $\mathbf{S}$  takto :

$$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 = \mathbf{t}_0.$$

Pravá strana této rovnice je vektor napětí na elementární plošku  $d\mathbf{A}_0$  transformovaný na původní konfiguraci. Tensor  $\mathbf{S}$  je podobně jako  $\boldsymbol{\sigma}$  také symetrický ( $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$ ).

*Korotační napětí ( $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ )*

Jedná se v podstatě o Cauchyho napětí, ale vyjádřené v souřadném systému, který se otáčí společně s materiálem. Tento koncept je vhodný pro typy konstrukcí, které pracují s vnitřními silami, např. skořepina, nebo prut. Korotační napětí získáme jednoduše transformací tenzoru  $\boldsymbol{\sigma}$  do pootočené soustavy.

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}.$$

Protože tenzor  $\boldsymbol{\sigma}$  je symetrický, je samozřejmě i  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  symetrický tenzor.

*Kirchhoffovo napětí ( $\boldsymbol{\tau}$ )*

Tento tenzor napětí je definován následujícím vztahem:

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma},$$

kde  $J = \det(\mathbf{F})$ . Vzhledem k symetrii tenzoru  $\boldsymbol{\sigma}$  je i tenzor  $\boldsymbol{\tau}$  symetrický.

### Biotovo napětí ( $\mathbf{T}$ )

Užitečnost Biotova napětí spočívá v tom, že je energeticky konjugovaný s pravým stretch tenzorem  $\mathbf{U}$ . Biotovo napětí je definováno jako symetrická část tenzoru  $\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{R}$  kde  $\mathbf{U}$  je tenzor rotace získaný polární dekompozicí deformačního gradientu. Takto je Biotovo napětí definováno jako

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{R}) = \frac{1}{2} (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{N}^T + \mathbf{N} \cdot \mathbf{R}).$$

Biotovo napětí je také nazýváno Jaumannovo napětí.

### Transformace mezi napětími

Uvedme zde přehledně transformační vztahy mezi výše uvedenými mírami napětí ve formě tabulky:

	$\boldsymbol{\sigma}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{S}$	$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$	$\boldsymbol{\tau}$
$\boldsymbol{\sigma}$		$J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$	$J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$	$\mathbf{R} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{R}^T$	$J^{-1} \boldsymbol{\tau}$
$\mathbf{N}$	$J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}$		$\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$	$J \mathbf{U}^{-1} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{R}^T$	$\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}$
$\mathbf{S}$	$J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$	$\mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^{-T}$		$J \mathbf{U}^{-1} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{U}^{-1}$	$\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T}$
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$	$\mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}$	$J^{-1} \mathbf{U} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{R}$	$J^{-1} \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}$		$J^{-1} \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}$
$\boldsymbol{\tau}$	$J \boldsymbol{\sigma}$	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$	$J \mathbf{R} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{R}^T$	

$\mathbf{U}$  je pravý stretch tenzor.

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{F},$$

kde  $\mathbf{R}$  je tenzor rotace.

### 1.1.4 Objektivita a objektivní tenzory

Koncept objektivit v přírodních vědách znamená, že kvalitativní a kvantitativní popis fyzikálního jevu je nezávislý na pozorovateli.

Uvažujme událost v Euklidovském prostoru charakterizovanou párem  $(x_0, t_0)$  a  $(x, t)$  kde  $\mathbf{x}$  je vektor polohy a  $t$  je čas. Tento pár je mapovaný na jiný, označený horním indexem  $*$ . Mapování je provedeno ortogonálním, časově závislým, tenzorem druhého řádu  $\mathbf{Q}(t)$  tak, že vzdálenost mezi párem zůstane stejná. Tedy

$$\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0^* = \mathbf{Q}(t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

kde  $\mathbf{Q}(t)$  je matice rotace a je ortogonální, tedy  $\mathbf{Q}(t)^{-1} = \mathbf{Q}(t)^T$ . Toto mapování se nazývá ortogonální transformace. Zavedením posunutí v prostoru  $\mathbf{c}(t)$  a posunutí v čase  $\alpha$  může být vztah mezi  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x}^*$  a vyjádřen následovně:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \mathbf{x},$$

kde  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}_0^* - \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}_0$  a  $\alpha = t^* - t = t_0^* - t_0$ .

Toto mapování se nazývá Euklidovská transformace. Ukažme si její aplikaci na některé kinematické veličiny.

### **Posunutí**

Fyzikální veličiny, jako posunutí, by měly být nezávislé na pozorovateli. Uvažujme jednu událost zaznamenanou dvěma pozorovateli. Pro pozorovatele O se bod  $\mathbf{x}_0$  posune do  $\mathbf{x}$  zatímco pro pozorovatele  $O^*$  se stejný bod  $\mathbf{x}_0^*$  posune do  $\mathbf{x}^*$ . Pro pozorovatele O je posunutí  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ . Na druhé straně pro pozorovatele  $O^*$  můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0^* \\ &= \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} - \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{Q}(t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= \mathbf{Q}(t) \mathbf{u} \end{aligned}$$

Každé vektorové pole  $\mathbf{u}$ , které se transformuje ortogonální transformací

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{Q}(t) \mathbf{u},$$

je objektivní protože velikost vektoru je nezávislá na pozorovateli, tedy  $|\mathbf{u}^*| = |\mathbf{u}|$

### **Rychlost**

Matice  $\mathbf{Q}(t)$  je ortogonální a platí tedy  $\mathbf{Q}(t)^T \mathbf{Q}(t) = \mathbf{I}$  kde  $\mathbf{I}$  je jednotková diagonální matice. Použitím tohoto vztahu může být inverzní Euklidovská transformace napsána následovně:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}(t)^T [\mathbf{x}^* - \mathbf{c}(t)].$$

Rychlost může být získána derivováním tohoto výrazu podle času:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{Q}}(t)^T [\mathbf{x}^* - \mathbf{c}(t)] + \mathbf{Q}(t)^T [\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{c}}(t)].$$

Po úpravě této rovnice můžeme psát:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*, t) &= \mathbf{Q}(t) \mathbf{v} + \dot{\mathbf{c}}(t) - \mathbf{Q}(t) \dot{\mathbf{Q}}(t)^T [\mathbf{x}^* - \mathbf{c}(t)] \\ &= \mathbf{Q}(t) \mathbf{v} + \dot{\mathbf{c}}(t) - \boldsymbol{\Omega}(t) [\mathbf{x}^* - \mathbf{c}(t)] \end{aligned}$$

Je antisymetrický tenzor reprezentující spin transformační matice mezi bází pozorovatele O vzhledem k bázi pozorovatele  $O^*$ .

Z výše uvedeného vztahu plyne, že rychlost není objektivní kvůli výrazům  $\dot{\mathbf{c}}(t)$  a  $\boldsymbol{\Omega}(t) [\mathbf{x}^* - \mathbf{c}(t)]$ . Nicméně rychlostní pole může být objektivizováno omezením změny pozorovatele podmínkou:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{c}_0 + \mathbf{Q}_0 \mathbf{x}$$

kde  $\dot{\mathbf{c}}_0 = 0$  a  $\dot{\mathbf{Q}}_0 = 0$ .

### **Zrychlení**

Prostorové zrychlení  $\mathbf{a}(t)$  je materiálová derivace prostorové rychlosti  $\mathbf{v}(t)$  podle času. Derivováním výrazu pro prostorovou rychlost podle času získáme:

$$\mathbf{a}^*(t) = \dot{\mathbf{v}}^*(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t) \mathbf{v}(t) + \mathbf{Q}(t) \mathbf{a}(t) + \ddot{\mathbf{c}}(t) + \dot{\mathbf{\Omega}}(t) (\mathbf{v}(t) - \dot{\mathbf{c}}(t))$$

Což může být přepsáno následujícím způsobem:

$$\mathbf{a}^*(t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{a}(t) + \ddot{\mathbf{c}}(t) + \dot{\mathbf{\Omega}}(t) (\mathbf{x}^* - \mathbf{c}(t)) + \mathbf{\Omega}(t) (\mathbf{v}(t) - \dot{\mathbf{c}}(t))$$

Stejně jako prostorová rychlost, také zrychlení není objektivní veličina. Pro obecnou změnu báze pozorovatele. A stejně jako u prostorové rychlosti, lze také zrychlení objektivizovat omezením změny pozorovatele. Jednou z možností by byla časově nezávislá transformace tuhého tělesa uvedená výše.

### **Objektivita pro tenzory vyššího řádu**

Tenzorové pole n-tého řádu zapsané pomocí tenzorového součinu n vektorů  $\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_n$  je objektivní jestliže při obecné změně pozorovatele je transformace dána výrazem

$$(\mathbf{u}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_n)^* = \mathbf{Q}\mathbf{u}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{Q}\mathbf{u}_n$$

Například pro tenzor druhého řádu  $\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2)$  je možno s využitím výše uvedené definice objektivit napsat:

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2)^* = \mathbf{Q}\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{Q}\mathbf{u}_2 = \mathbf{Q} (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T$$

Obecnou podmínku objektivit pro tenzorové pole n-tého řádu je možno aplikovat také na skalární pole  $\Phi$ , tedy pro n=0. Dostaneme:

$$\Phi^* = \Phi$$

Znamená to tedy, že skalární pole je nezávislé na pozorovateli. Skalárním polem je například teplota a je zřejmé že teplota pro daný bod a čas bude mít stejnou hodnotu pro libovolného pozorovatele.

### *Eukleidovská transformace pro některé kinematické veličiny*

#### **Deformační gradient**

Deformační gradient v bodě  $\mathbf{x}$  a k němu přidruženému bodu  $\mathbf{x}^*$  je tenzor druhého řádu

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \text{ a } \mathbf{F}^* = \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{X}}$$

kde  $\mathbf{X}$  jsou materiálové souřadnice. Užitím řetězového pravidla o derivování dostaneme:

$$\mathbf{F}^* = \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{QF}$$

Z této rovnice můžeme učinit závěr, že deformační gradient  $\mathbf{F}$  je objektivní, i když se transformuje jako vektor a ne jako konvenční tenzor druhého řádu. Je to proto, že jeden z jeho indexů je popisuje materiálové souřadnice  $\mathbf{X}$ , které jsou nezávislé na pozorovateli. Jedná se o tzv. dvoubodový tenzor jejichž transformace je popsána v kapitole Transformace tenzorů druhého řádu.

### *Cauchyho tenzor napětí*

Cauchyho vektor napětí  $\mathbf{t}$  je vztážen ke Cauchyho tenzoru napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  v daném bodě  $\mathbf{x}$  prostřednictvím vnější normály  $\mathbf{n}$  k infinitezimální plošce tak, že platí  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ . Cauchyho vektor napětí je pro jiného pozorovatele transformován tak, že platí  $\mathbf{t}^* = \boldsymbol{\sigma}^*\mathbf{n}^*$ , kde  $\mathbf{t}$  a  $\mathbf{n}$  jsou objektivní vektory. Potom můžeme psát:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^* &= \boldsymbol{\sigma}^*\mathbf{n}^* \\ \rightarrow \mathbf{Qt} &= \boldsymbol{\sigma}^*\mathbf{Qn} \\ \rightarrow \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} &= \boldsymbol{\sigma}^*\mathbf{Qn} \\ \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^* &= \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T \end{aligned}$$

Tím je prokázáno, že Cauchyho tenzor napětí je objektivní.

### *Piola-Kirchhoffovy tenzory napětí*

První Piola-Kirchhoffův tenzor napětí  $\mathbf{P}$  je definován následujícím vztahem:

$$\mathbf{PF}^T = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}$$

kde  $J = \det(\mathbf{F})$ . Je také zajímavé vědět, že protože  $\mathbf{P}$  je matice rotace, tedy  $\det(\mathbf{P}) = 1$ , platí:

$$J^* = \det(\mathbf{F}^*) = \det(\mathbf{QF}) = \det(\mathbf{Q})\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F})$$

S využitím výše odvozených identit můžeme psát:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^*(\mathbf{F}^*)^T &= \mathbf{J}^*\boldsymbol{\sigma}^* \\ \rightarrow \mathbf{P}^*(\mathbf{QF})^T &= \mathbf{J}\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T \\ \rightarrow \mathbf{P}^*\mathbf{F}^T\mathbf{Q}^T &= \mathbf{Q}\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T \\ \rightarrow \mathbf{P}^*\mathbf{F}^T\mathbf{Q}^T &= \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{F}^T\mathbf{Q}^T \\ \rightarrow \mathbf{P}^* &= \mathbf{Q}\mathbf{P} \end{aligned}$$



Tím je dokázáno, že první napětí Piola-Kirchhoff je objektivní. Podobně jako v případě deformačního gradientu je tento tenzor druhého řádu dvouvektor a transformuje se jako vektor.

Tenzor druhého napětí Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}$  je také objektivní a transformuje se jako skalární pole. To může být jednoduše dokázáno:

$$\mathbf{S}^* = (\mathbf{F}^*)^{-1} \mathbf{P}^* = (\mathbf{QF})^{-1} \mathbf{QP} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{QP} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{S}$$

Bylo ukázáno, že tenzory napětí  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{S}$  jsou objektivní. Jsou tedy vhodné pro popis odezvy materiálu a konstitutivních vztahů, protože jsou nezávislé na pozorovateli.

### *Objektivní toky napětí*

Bylo ukázáno, že i když vektorové pole posunutí  $\mathbf{S}$  je objektivní, vektorové pole rychlosti  $\dot{\mathbf{u}}$  objektivní není. Objektivní vektor  $\mathbf{u}^* = \mathbf{Q}\mathbf{u}$  a objektivní tenzor  $\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T$  obvykle nezachovávají svoji objektivitu při derivování podle času, jak je ukázáno níže:

$$\dot{\mathbf{u}}^* = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{u} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{u}}$$

$$\dot{\mathbf{A}}^* = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{A}\dot{\mathbf{Q}}^T$$

Z důvodů zachování objektivity byly zavedeny tzv. objektivní toky, což jsou modifikované materiálové derivace podle času. Než ukážeme některé objektivní toky, připomeňme některé již dříve uvedené veličiny. Prostorový gradient rychlosti

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$$

kde rychlost deformace  $\mathbf{D}$  je symetrický tenzor a spin  $\mathbf{W}$  je antisymetrický tenzor. Pro dané  $\mathbf{L}$  jsou  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{W}$  jednoznačně určeny. Eukleidovská transformace prostorového gradientu rychlosti může být napsána takto:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^* &= \dot{\mathbf{F}}^* (\mathbf{F}^*)^{-1} \\ &= (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}) (\mathbf{QF})^{-1} \\ &= (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q}^T \\ &= \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \\ &= \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^{-1} \\ &= \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^{-1} \end{aligned}$$

dosazením  $L = D + W$ ,  $L^* = D^* + W^*$  a  $\Omega = \dot{Q}Q^T$  získáme následující rovnice:

$$\dot{Q} = W^*Q - QW$$

$$\dot{Q}^T = -Q^TW^* + WQ^T$$

Dosazením těchto výsledků do dříve uvedeného výrazu pro  $\dot{u}^*$  dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{u}^* &= \dot{Q}u + Q\dot{u} \\ &= (W^*Q - QW)u + Q\dot{u} \\ &= W^*u^* - QWu + Qu^* \\ &\rightarrow (\dot{u} - Wu)^* = Q(\dot{u} - Wu) \\ &\rightarrow \bar{u}^* = Q\bar{u}\end{aligned}$$

kde korotační tok objektivního vektorového pole  $u$  je definováno

$$\bar{u} = \dot{u} - Wu$$

a reprezentuje objektivní veličinu. Podobně, s použitím výše uvedených vztahů, můžeme získat korotační tok objektivního tenzoru druhého řádu  $A$ .

$$\begin{aligned}(\dot{A} - WA + AW)^* &= Q(\dot{A} - WA + AW)Q^T \\ \rightarrow \bar{A}^* &= Q\bar{A}Q^T\end{aligned}$$

$\bar{A}$  je korotační tenzor druhého řádu definovaný výrazem

$$\bar{A} = \dot{A} - WA + AW$$

Tento objektivní tok je znám jako Jaumann-Zarembův tok a je často využíván v teorii plasticity. Je možno odvodit mnoho dalších objektivních toků. V mechanice kontinua jsou objektivní toků důležité z toho důvodu, protože jsou požadovány pro konstitutivní modely, které jsou vyjádřeny derivacemi napětí, nebo deformace podle času, aby byly nezávislé na pozorovateli.

### *Jaumannův tok napětí*

Jaumannův tok Cauchyho napětí  $\sigma$  je dán vztahem

$$\sigma^{\nabla J} = \frac{D\sigma}{Dt} - W \cdot \sigma - \sigma \cdot W^T$$

$W$  je spin.

Konstitutivní vztah potom můžeme napsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} = \mathbf{C}^{\sigma J} : \mathbf{D}$$

### *Truesdellův tok napětí*

Truesdellův tok Cauchyho napětí je dán vztahem

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T} = \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} + \operatorname{div}(\mathbf{v})\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}^T$$

V rovnici je  $\mathbf{L}$  gradient rychlosti daný rovnicí a  $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{v}$  je divergence vektoru rychlosti. Konstitutivní rovnice potom bude mít tvar

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T} = \mathbf{C}^{\sigma T} : \mathbf{D}$$

### *Energeticky konjugované míry deformace a napjatosti*

Energie a práce jsou skalární veličiny nezávislé na souřadném systému. Princip virtuální práce, který je dán vztahem

$$\delta W = \delta W^{\text{int}} + \delta W^{\text{ext}} = 0$$

musí platit pro jakoukoliv volbu míry deformace. Toto však je splněno tehdy, jestliže k příslušné míře deformace je přiřazena příslušná, energeticky konjugovaná, míra napjatosti. Virtuální práce vnitřních sil je totiž dána součinem tenzoru napjatosti a přírůstku deformace. Dá se ukázat, že platí

$$\delta W^{\text{int}} = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} d\Omega_0 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \hat{\mathbf{e}} d\Omega = \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \nabla_0 \mathbf{u} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \mathbf{T} : \delta \mathbf{U} d\Omega_0$$

Energeticky konjugované dvojice napětí a deformace tedy tvoří v prvním případě Green – Lagrangeův tenzor deformace  $\mathbf{E}$  a druhé napětí Piola – Kirchhoff  $\mathbf{S}$  (oba tenzory jsou definovány v materiálových souřadnicích, tj. v původní konfiguraci). Ve druhém případě tvoří energeticky konjugovanou dvojici dvojice tenzorů definovaných v běžné konfiguraci. Jedná se o lineární část Euler – Almansiho tenzoru deformace tedy tzv. infinitezimální tenzor deformace definovaný v prostorových souřadnicích  $\hat{\mathbf{e}}$  a Cauchyho tenzor napětí  $\boldsymbol{\sigma}$ .

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{X}^T}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (\mathbf{F} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \cdot (\mathbf{F}^T - \mathbf{I}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \right) = \mathbf{I} - \frac{1}{2} \left( \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \right) \end{aligned}$$

V odvození byly použity vztahy

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{x} - \mathbf{X} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} - \mathbf{I} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{X}} - \mathbf{I} = \mathbf{F}^T - \mathbf{I}\end{aligned}$$

První dvě energeticky konjugované dvojice uvedené v rovnici pro  $\delta W^{int}$  mají fundamentální význam, protože jsou základem dvou nejdůležitějších formulací úloh v geometrické nelinearitě, tj. formulace „total Lagrangian“, která je plně definována v materiálových souřadnicích a deformace i napjatost je vztahována k původní, tj. tedy nedeformované konfiguraci a formulaci „updated Lagrangian“, která je definována v prostorových souřadnicích a deformace i napjatost je vztahována k poslední známé konfiguraci (tj. k běžné konfiguraci). U konceptu „total Lagrangian“ je tedy užíván Green – Lagrangeův tenzor deformace  $\mathbf{E}$  a druhé napětí Piola – Kirchhoff  $\mathbf{S}$  a u konceptu „updated Lagrangian“ je užíván Euler – Almansiho tenzor deformace  $\mathbf{e}$ , resp. jeho lineární část  $\hat{\mathbf{e}}$  a Cauchyho tenzor napětí  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Je možné určit i jiné energeticky konjugované dvojice napětí a deformace, ale jejich význam je menší. Např. pro první napětí Piola – Kirchhoff  $\mathbf{P}$  je energeticky konjugované míra deformace dána výrazem  $\mathbf{F} - \mathbf{I} \equiv \nabla_0 \mathbf{u}$ . Pro korotační napětí  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  je energeticky konjugované infinitezimální tenzor deformace  $\hat{\mathbf{e}}$  (lineární část Euler–Almansiho tenzor napjatosti), ale transformovaný do stejných souřadnic jako  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ , tedy  $\mathbf{R}^T \cdot \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{R}$ .

V literatuře jsou často uváděny vztahy, které místo s deformací pracují s rychlostí deformace, tj. derivací deformace podle času. Potom můžeme pro výkon vnitřních sil napsat vztahy pro některé výkonově konjugované páry tenzorů napjatosti a deformačních rychlostí.

$$\begin{aligned}\dot{W}^{int} &= \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} d\Omega_0 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \frac{D\hat{\mathbf{e}}}{Dt} d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} d\Omega_0 = \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\mathbf{D}} d\Omega = \int_{\Omega_0} \mathbf{T}^T : \dot{\mathbf{U}} d\Omega_0\end{aligned}$$

U vztahu s tenzorem  $\mathbf{P}$  bylo uváženo, že platí

$$\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} = 0$$

$\hat{\mathbf{D}}$  je rychlost deformace transformovaná do stejných souřadnic jako korotační napětí  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ . Ve výše uvedené rovnici je využito rovnosti

$$\frac{D\hat{\mathbf{e}}}{Dt} = \mathbf{D}$$

kteřou lze snadno dokázat. Infinitezimální tenzor deformace je v běžné konfiguraci definován vztahem

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} \right)$$

Ze základního požadavku nezávislosti energie a práce na souřadném systému a zvolené míře napjatosti jsme definovali energeticky konjugované dvojice měř deformace a napjatosti.

### 1.1.5 Dvě formulace geometrické nelinearity v MKP

V mechanice těles obvykle používáme Lagrangeovské sítě. Při diskretizaci jsou pak možné dvě formulace úlohy podle toho v jaké konfiguraci tělesa je úloha popsána. Je-li úloha formulována v běžné konfiguraci tělesa (tedy v prostorových souřadnicích) jedná se o formulaci „updated Lagrangian“ a je-li úloha formulována v referenční (původní) konfiguraci (tedy v materiálových souřadnicích) jedná se o formulaci „total Lagrangian“. Ve formulaci updated Lagrangian jsou derivace prováděny v prostorových (Eulerovských) souřadnicích a integrály jsou prováděny na deformovaném tělese (na „běžné“ konfiguraci). Ve formulaci total Lagrangian jsou derivace prováděny v materiálových souřadnicích a integruje se na počáteční (referenční) konfiguraci (na nedeformovaném tělese).

V mechanice těles používáme těchto základních rovnic:

Zákon zachování hmoty

Zákon zachování hybnosti (lineární i úhlové)

Zákon zachování energie

Konstitutivní rovnice, tj. vztahy mezi deformací a napjatostí

Geometrické rovnice, tj. vztahy mezi přetvořením a posunutím.

První skupinu rovnic tvoří zákony o zachování dobře známé z fyziky a další skupina vyjadřuje vlastnosti standartního Boltzmannova continua a nemá charakter přírodních zákonů.

Na těchto rovnicích stojí celá mechanika těles. Popíšme si nyní podrobněji obě formulace nelinearity v MKP.

*Formulace na běžné konfiguraci (updated Lagrangian)*

***Formulace základních rovnic***

**Zákon o zachování hmoty**

Tento zákon určuje, jak se mění hustota tělesa v závislosti na deformaci.

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{\det(\mathbf{F})} = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{J}$$

kde  $\rho_0$  je původní hustota (na referenční konfiguraci)

$\rho$  je běžná hustota (na deformovaném tělese)

Platí totiž  $d\Omega = Jd\Omega_0$ ,  $dm = \rho d\Omega$  a  $dm_0 = \rho_0 d\Omega_0$ . Dosadíme-li tyto vztahy do požadavku na rovnost hmot, dostaneme výše uvedenou rovnici pro zákon o zachování hmoty.

**Zákon o zachování hybnosti**

a) Zákon o zachování lineární hybnosti

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$$

kde  $\dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{u}}$  je vektor zrychlení daného bodu tělesa.

$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$  je prostorová divergence Cauchyho napětí

$\mathbf{f} = \rho \mathbf{b} - \mathbf{f}_d$  je vektor objemových sil včetně tlumících sil

$\mathbf{b}$  je nejčastěji vektor gravitačního zrychlení

$\mathbf{f}_d$  je vektor objemových tlumících sil, je-li tlumení pouze viskózní, potom bude vektor tlumících sil dán vztahem  $\mathbf{f}_d = c\mathbf{v}$ , kde  $c$  je součinitel viskózního útlumu. Potom může být rovnice pro zákon o zachování hybnosti přepsána takto:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} - c\mathbf{v} = \rho \dot{\mathbf{v}}$$

b) Zákon o zachování točivosti (úhlové hybnosti)

Tento zákon generuje při zanedbání setrvačných sil momentové podmínky rovnováhy a také z něj plyne symetrie tenzoru napjatosti  $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$$

Tato rovnice vyjadřuje známou větu o vzájemnosti tangenciálních napětí ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ).

**Zákon o zachování energie**

Tento zákon v mechanice těles znamená, že rychlost změny celkové energie tělesa je rovna součtu výkonu vnitřních sil  $\mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma}$  (který je roven výkonu zatížení), tepelného toku a výkonu zdroje energie. Zanedbáme-li zdroje tepelné energie potom

zákon vyjadřuje skutečnost, že rychlost změny hustoty potenciální energie je dána rozdílem výkonu zatížení a rychlosti disipace.

$$J\dot{w}^{int} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

$\dot{w}^{int}$  je rychlost změny hustoty potenciální energie vnitřních sil (hyperelastického potenciálu) na původní konfiguraci ( $\mathbf{S} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}}$ )

$\mathbf{D}$  je tenzor rychlosti deformace daný vztahem

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \frac{D\hat{\mathbf{e}}}{Dt}$$

kde  $\mathbf{L}$  je gradient rychlosti

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \mathbf{v}$$

$\mathbf{q}$  je vektor tepelného toku (upozorňujeme, že divergence  $\nabla \cdot \mathbf{q}$  je skalár). Nenulový tepelný tok se projeví nenulovým vektorem tlumících sil  $\mathbf{f}_d$  v pohybové rovnici. Pro viskózní tlumení bychom mohli přepsat rovnici pro zákon o zachování energie přepsat takto

$$J\dot{w}^{int} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} - c\mathbf{v}^T \mathbf{v}$$

### ***Konstitutivní rovnice***

Tato rovnice vyjadřuje vztah mezi napětím a deformací na běžné konfiguraci tělesa (na deformovaném tělese)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}, t, \dots)$$

V přírůstkové formě je možno vztah linearizovat

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{\sigma e}(\mathbf{e}, t) : \delta \mathbf{e}$$

Ve Voigtově notaci můžeme napsat přírůstkovou formu konstitutivní rovnice takto:

$$\delta \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}^{\sigma e}(\mathbf{e}, t)] \delta \{\mathbf{e}\}$$

$\mathbf{C}^{\sigma e}$  je tečný modul materiálu ze vztahu mezi Cauchyho tenzorem napjatosti a Euler-Almansiho tenzorem deformace (jedná se o tenzor 4. řádu).

Nejobecněji můžeme konstitutivní rovnici napsat v infinitezimální (rychlostní) formě

$$\boldsymbol{\sigma}^\nabla = \mathbf{S}_t^{\sigma D}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\sigma}, K \dots)$$

$\mathbf{S}_t^{\sigma D}$  je funkce závislá na Cauchyho napětí rychlosti deformace a případně i dalších proměnných

$\boldsymbol{\sigma}^\nabla$  je některý objektivní tok napětí.

Pro širokou třídu tzv. hypoelastických materiálů můžeme psát lineární závislost mezi rychlostí napětí a deformace

$$\boldsymbol{\sigma}^\nabla = \mathbf{C}^\sigma : \mathbf{D}$$

kde  $\boldsymbol{\sigma}^\nabla$  je některý z objektivních toků napětí a  $\mathbf{C}^\sigma$  je tenzor modulů pružnosti, který je pro daný objektivní tok napětí definován. Takto můžeme psát např. pro Jaumannův tok napětí

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} = \mathbf{C}^{\sigma J} : \mathbf{D}$$

nebo pro Truesdellův tok

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T} = \mathbf{C}^{\sigma T} : \mathbf{D}$$

### *Geometrické rovnice (míra deformace)*

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1})$$

Ve formulaci updated Lagrangian se používá Euler–Almansiho tenzor deformace  $\mathbf{e}$  definovaný na deformovaném tělese.

### *Diskretizace MKP pro formulaci na běžné konfiguraci (updated Lagrangian)*

Diskretizace je zde definována na deformovaném tělese  $\Omega$ . Je-li definován vztah mezi virtuálním přírůstkem Euler – Almansiho tenzoru deformace zapsaným ve Voigtově notaci  $\delta \{\mathbf{e}\}$  a virtuálním přírůstkem vektoru parametrů deformace  $\delta \mathbf{d}$  v běžné konfiguraci.

$$\delta \{\mathbf{e}\} = \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{d}$$



potom může být důležitý vektor vnitřních uzlových sil počítán podle vzorce

$$\mathbf{f}^{int} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} d\Omega$$

Tento vzorec má fundamentální význam pro Newton-Raphsonovu metodu řešení soustavy nelineárních algebraických rovnic, stejně jako pro explicitní a implicitní metodu při řešení přímé integrace pohybových rovnic.

### ***Tečná matice tuhosti***

Tečná matice tuhosti charakterizuje běžnou tuhost v daném okamžiku, tedy respektující změnu geometrie, tečnou tuhost materiálu i vliv napjatosti v daném okamžiku. Napíšeme-li soustavu nelineárních rovnic pro deformační variantu MKP ve formě

$$\mathbf{K}(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{f}$$

je  $\mathbf{K}$  tzv. sečnová matice tuhosti. V přírůstkové formě bychom rovnici mohli napsat takto:

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{d}^{(i)}) \cdot \delta \mathbf{d}^{(i+1)} = \delta \mathbf{f}^{(i+1)}$$

kde  $\mathbf{d}^{(i+1)}$  se vypočítá postupnou sumací

$$\mathbf{d}^{(i+1)} = \mathbf{d}^{(i)} + \delta \mathbf{d}^{(i+1)}$$

$\mathbf{K}_T$  je tečná matice tuhosti, kterou v běžné konfiguraci  $\mathbf{d}^{(i)}$  můžeme definovat takto :

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_\sigma$$

Uvedme zde algoritmy výpočtu obou složek tečné matice tuhosti. Zdůrazněme, že příslušné integrace jsou provedeny na běžné konfiguraci  $\Omega$ .

***Tečná materiálová matice tuhosti  $K_M$*** 

$$K_M = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T [\mathbf{C}^\sigma(\mathbf{e}, t)] \mathbf{B} d\Omega$$

$\mathbf{B}$  je matice prostorových derivací bázových funkcí,  $[\mathbf{C}^\sigma]$  je tečná konstitutivní matice pro formulaci v běžné konfiguraci, tedy přesněji tečný tenzor pružnosti materiálu definovaný pro danou objektivní míru napětí zapsaný ve Voigtově notaci.

***Tečná geometrická matice tuhosti  $K_\sigma$*** 

Standartní algoritmus výpočtu geometrické matice tuhosti

Uvedme obecný algoritmus výpočtu geometrické matice tuhosti (v angličtině se také používá název „stress stiffness matrix“, nebo také „initial stress matrix“) ve formulaci updated Lagrangian.

Nechť platí následující vztah pro každou složku  $u_i$  vektoru posunutí  $\mathbf{u}$ :

$$u_i = \sum_{a=1}^n N_a u_{ia}$$

kde je hodnota posunutí  $u_i$  v uzlu  $a$  a  $n$  je počet uzlů prvku

Definujme matici  $\mathbf{N}$  takto:

$$\mathbf{N} = [N_1 \mathbf{I}, N_2 \mathbf{I}, \dots, N_n \mathbf{I}]$$

Kde  $\mathbf{I}$  je jednotková diagonální matice řádu 3x3 (3 je zde dimenze úlohy). Potom může být napsán následující vztah pro vektor posunutí:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}$$

kde  $\mathbf{d}$  je vector parametrů deformace prvku obsahující všechny složky  $u_{ia}$  v takovém uspořádání, že pro každý uzel  $a$  jsou uvedeny všechny složky  $u_i$ .

Definujme matici  $\mathbf{g}_a$  obsahující první derivace bázových funkcí pro bod  $a$  podle prostorových souřadnic.

$$\mathbf{g}_a = \frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{x}^T} \otimes \mathbf{I} = \begin{bmatrix} N_{a,x} \mathbf{I} \\ N_{a,y} \mathbf{I} \\ N_{a,z} \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

a matici  $\mathbf{G}$ , která se skládá ze submatic  $\mathbf{g}_a$ .

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}^T} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_a, \dots, \mathbf{g}_n]$$

Dále definujeme matici  $\Sigma$  vynásobením každého členu Cauchyho tenzoru napjatosti jednotkovou diagonální maticí.

$$\Sigma = \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}\mathbf{I} & \sigma_{xy}\mathbf{I} & \sigma_{xz}\mathbf{I} \\ & \sigma_{yy}\mathbf{I} & \sigma_{yz}\mathbf{I} \\ \text{sym.} & & \sigma_{zz}\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Operátor  $\otimes$  označuje Kroneckerův (tenzorový) maticový součin.

Jesliže stav napjatosti není zanedbatelný, může být potenciální energie vyjádřena následujícím vztahem:

$$\Pi_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} (\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{I}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^T} d\Omega = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \mathbf{x}} \Sigma \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}^T} d\Omega \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K}_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{d}$$

Kde  $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\sigma}}$  je geometrická matice tuhosti prvku vyjádřená vzorcem:

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \mathbf{x}} \Sigma \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}^T} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \Sigma \mathbf{G} d\Omega$$

Integrace je provedena na deformovaném tělese  $\Omega$  (tzv. běžná konfigurace) a derivace jsou provedeny podle prostorových souřadnic.

Složka (submatice) geometrické maticetuhosti pro vztah mezi uzly  $a$  a  $b$  může také být definována v následující maticové notaci

$$\mathbf{K}_{\sigma ab} = \int_{\Omega} (\nabla N_a \cdot \boldsymbol{\sigma} \nabla N_b) \mathbf{I} d\Omega$$

nebo v indexové notaci

$$K_{\sigma abij} = \int_{\Omega} \frac{\partial N_a}{\partial x_k} \sigma_{kl} \frac{\partial N_b}{\partial x_l} \delta_{ij} d\Omega, j = 1, 2, 3$$

Podobná formulace platí také pro geometrickou matici ve formulaci total Lagrangian, ale Cauchyho tenzor napjatosti musí být nahrazen druhým napětím Piola-Kirchhoff, integrace musí být provedena na nedeformovaném tělese a derivace musí být provedeny v materiálových souřadnicích.

### *Formulace na referenční konfiguraci (total Lagrangian)*

Vzhledem k tomu, že vlastní řešení úloh souvisejících s diplomní prací bylo prováděno ve formulaci updated Lagrangian, tak uvedme algoritmy pro formulaci total Lagrangian jen velmi stručně.

V této koncepci jsou derivace prováděny v materiálových souřadnicích a integrály jsou provedeny na nedeformovaném tělese (na referenční konfiguraci). Základní rovnice jsou na referenční konfiguraci formulovány následovně:

**Zákon o zachování hmoty**

$$\rho J = \rho_0$$

**Zákon o zachování hybnosti**

a) Zákon o zachování lineární hybnosti :

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{N} + \mathbf{f}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}$$

kde  $\ddot{\mathbf{u}}$  je vektor zrychlení daného bodu tělesa.

$\nabla_0 \cdot \mathbf{N}$  je materiálová divergence nominálního napětí

$\mathbf{f}_0 = \rho_0 \mathbf{b} + \mathbf{c}_0$  je vektor objemových sil v materiálových souřadnicích

$\mathbf{b}$  je nejčastěji vektor gravitačního zrychlení

$\mathbf{c}_0$  je vektor objemových tlumících sil na původní konfiguraci

Při zanedbání setrvačných sil se rovnice redukuje na rovnici statické rovnováhy

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{N} + \rho_0 \mathbf{b} = 0$$

Připomeňme, že  $\nabla_0$  je materiálová divergence a  $\ddot{\mathbf{u}}$  vektor zrychlení.

b) Zákon o zachování točivosti :

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^T$$

nebo také

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$$

Důsledkem tohoto zákona je tedy symetrie tenzoru  $\mathbf{S}$ .

**Zákon o zachování energie**

$$\dot{w}^{int} = \dot{\mathbf{F}}^T : \mathbf{N} - \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_0$$

$$\mathbf{q}_0 = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q}$$

$\dot{w}^{int}$  je rychlost změny hustoty potenciální energie vnitřních sil (hyperelastického potenciálu)  $\mathbf{q}$  je vektor tepelného toku v prostorových souřadnicích  $\mathbf{q}_0$  je vektor tepelného toku v materiálových souřadnicích  $\nabla_0 \cdot \mathbf{q}_0$  je materiálová divergence tepelného toku

Tedy při zanedbání zdroje energie zákon vyjadřuje skutečnost, že rychlost změny potenciální energie je dána rozdílem výkonu zatížení (který je roven výkonu vnitřních sil  $\dot{\mathbf{F}}^T : \mathbf{N}$ ) a rychlosti disipace (tj. úniku energie ve formě rozptýleného tepla).

### *Konstitutivní rovnice*

Tato rovnice vyjadřuje vztah mezi druhým napětím Piola – Kirchhoff  $\mathbf{S}$  a Green – Lagrangeovým tenzorem deformace  $\mathbf{E}$ .

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E}, \dots)$$

V přírůstkové, linearizované formě lze konstitutivní vztahy napsat takto :

$$\delta \mathbf{S} = \mathbf{C}^{SE} : \delta \mathbf{E}$$

nebo ve Voigtově notaci

$$\delta \{\mathbf{S}\} = [\mathbf{C}^{SE}] \delta \{\mathbf{E}\}$$

$\mathbf{C}^{SE}$  a  $[\mathbf{C}^{SE}]$  je tečná materiálová tuhost v tenzorovém, resp. Voigtově zápisu vyjádřená na referenční konfiguraci.

Pro infinitezimální přírůstky přejde vztah do rychlostní formy, ve které je linearizace nezávadná a pro hypoelastické materiály můžeme napsat konstitutivní rovnici

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}^{SE} : \dot{\mathbf{E}}$$

$\mathbf{C}^{SE}$  je tenzor tečné tuhosti materiálu.

### *Geometrické rovnice (míra deformace)*

Ve formulaci na referenční konfiguraci je jako míra deformace používán Green – Lagrangeův tenzor deformace  $\mathbf{E}$ .

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

## 1.2 Materiálová nelinearita

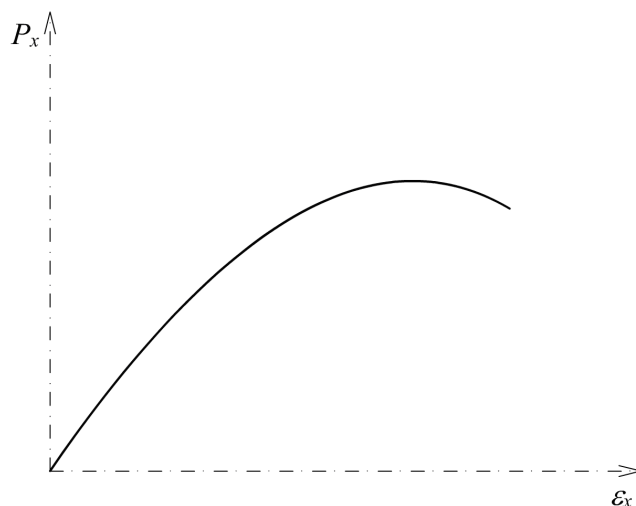
### 1.2.1 Jednoosá napjatost

Pro uvedení do problematiky uvažme nejdříve případ jednoosé napjatosti. Mějme prut o počáteční délce  $l_0$  a počáteční průřezové ploše  $A_0$ . Zatížíme-li prut osovou silou  $F$  dostaneme nominální (inženýrské) napětí  $N_x = P_x = \frac{F}{A_0}$  (totožné s prvním

napětím Piola - Kirchhoff pro 1D). Inženýrská (lineární) deformace je definována vztahem

$$\varepsilon_x = \frac{\delta l}{l_0} = \lambda_x - 1$$

kde  $\delta l$  je protažení prutu a  $\lambda_x$  je roztažení prutu (stretch)  $\lambda_x = \frac{l}{l_0}$ .



Obr. 1.7: Vztah mezi inženýrskou deformací a inženýrskou napjatostí

Alternativně může být odezva také vyjádřena ve vztahu ke skutečnému napětí. Skutečné (Cauchyho) napětí je dáno výrazem

$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$

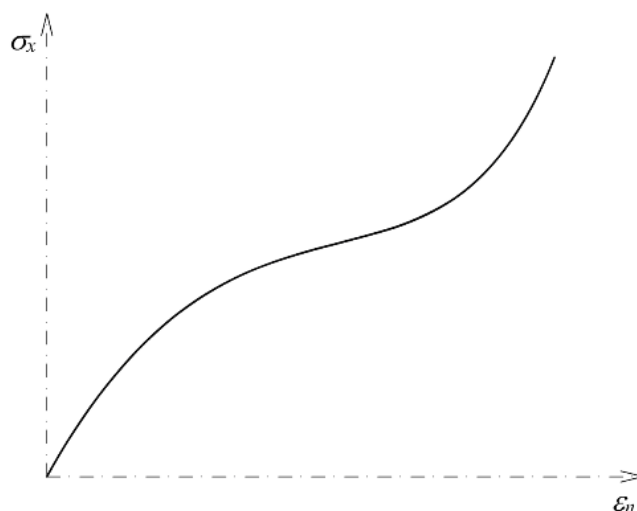
kde  $A$  je běžná plocha, tj. proměnná v průběhu roztahování prutu. Alternativní míra deformace je odvozena uvážením přírůstku deformace jako změny délky na jednotku běžné délky, tj.

$$\varepsilon_n = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \left( \frac{l}{l_0} \right) = \ln \lambda_x$$

Deformace  $\varepsilon_n$  je nazývána logaritmičká, nebo také skutečná, deformace.

Průřezová plocha  $A$  se bude během protahování prutu měnit. Je možno ji vyjádřit následujícím vztahem :

$$A = \frac{JA_0 l_0}{l} = \frac{JA_0}{\lambda_x}$$



Obr. 1.8: Vztah mezi skutečnou napjatostí a skutečnou deformací

$J$  je Jakobian transformace mezi počáteční a běžnou konfigurací. pro Cauchyho napětí můžeme potom psát

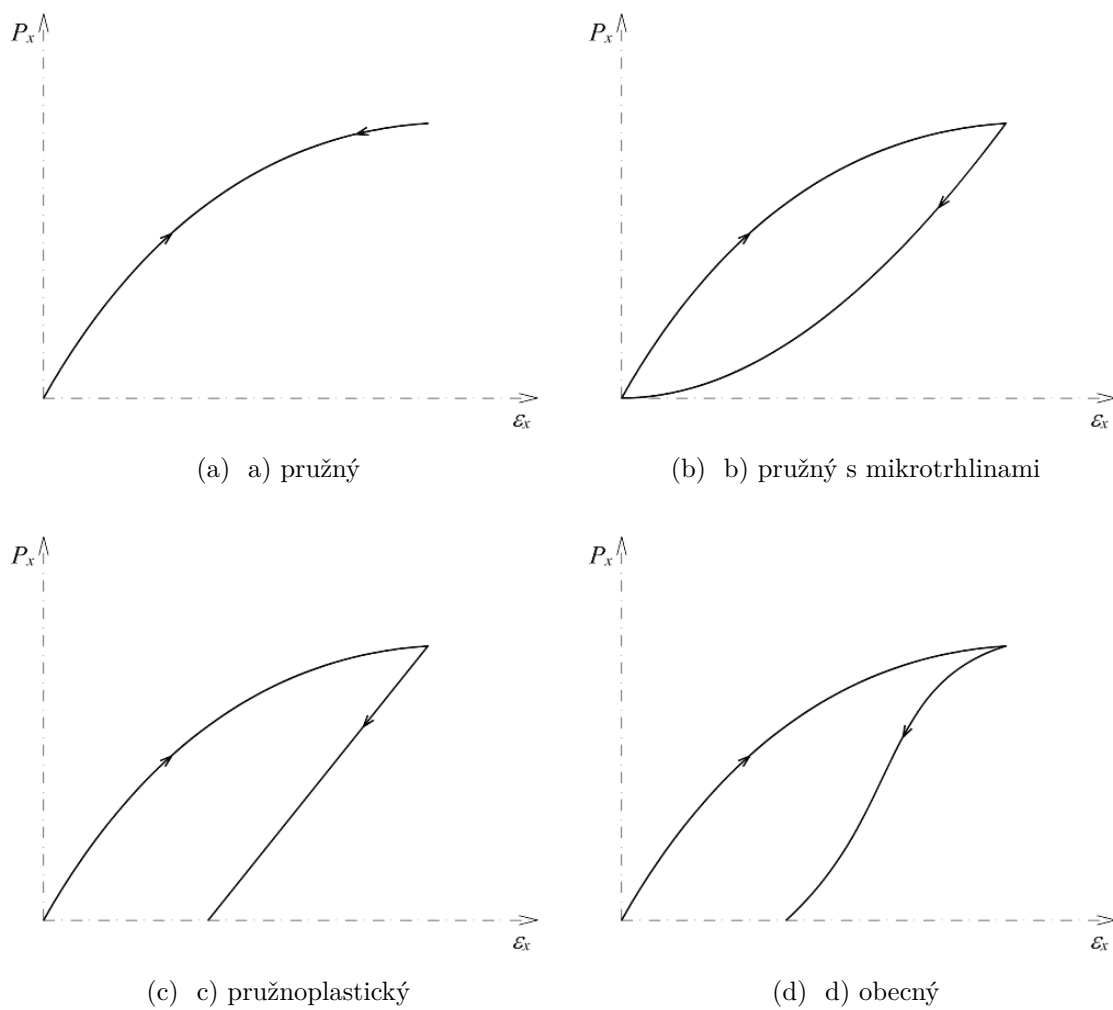
$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \lambda_x \frac{F}{JA_0} = \lambda_x J^{-1} P_x$$

Vztah mezi deformacemi a napětím může být závislý na rychlosti deformace, ale zde se omezme na materiál, který je na rychlosti deformace nezávislý.

Ve vztahu mezi napětím a deformací nebylo zatím uvažováno odlehčování.

Ukažme si, jak může tento vztah vypadat při odlehčování pro různé typy materiálů. U dokonale pružného materiálu je křivka vztahu mezi napětím a deformací při zatěžování i odlehčování totožná (obr. (a)).

Pro pružnoplastický materiál je sklon křivky při odlehčování typicky stejný jako lineární (počáteční) část křivky při zatěžování (obr. (b)). Materiál, který je při zatěžování porušen mikrotrhlkami se při odlehčování může vrátit do původního tvaru, když se trhlinky uzavřou (obr. (c)). Obecný materiál může být kombinací těchto ideálních případů (obr. d)). V dalším se omezíme jen na pružný materiál, nezávislý na rychlosti deformace.



Obr. 1.9: Pracovní diagramy různých materiálů při zatěžování a odlehčování



*Jednoosá nelineární pružnost*

Pro nelineární pružný materiál při jednoosé napjatosti může konstitutivní vztah být napsán jako

$$\sigma_x = s(\varepsilon_x)$$

kde  $\sigma_x$  je Cauchyho napjatost a  $\varepsilon_x$  je inženýrská (lineární) deformace. Je předpokládáno, že  $s(\varepsilon_x)$  je monotónně rostoucí funkce. Příklad  $\frac{ds}{d\varepsilon_x} < 0$  by indikoval materiálovou nestabilitu.

Jak již bylo řečeno, u pružného materiálu je odlehčovací křivka na pracovním diagramu totožná se zatěžovací křivkou, což implikuje skutečnost, že nedochází k žádné disipaci energie při deformaci. Všechna práce vynaložená na deformaci tělesa je v tělese uchována ve formě potenciální energie pružné napjatosti. Existuje tedy potenciální funkce, pro kterou platí, že

$$\sigma_x = s(\varepsilon_x) = \frac{dw(\varepsilon_x)}{d\varepsilon_x}$$

kde  $w(\varepsilon_x)$  je hustota potenciální energie pružné napjatosti tělesa. Z rovnice plyne

$$dw(\varepsilon_x) = \sigma_x d\varepsilon_x$$

což po integraci dá vztah pro hustotu energie pružné napjatosti.

$$w = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x$$

Pro nejjednodušší případ lineárně pružného tělesa v 1D platí Hookův zákon

$$\sigma = E\varepsilon$$

Pro potenciální energii můžeme napsat:

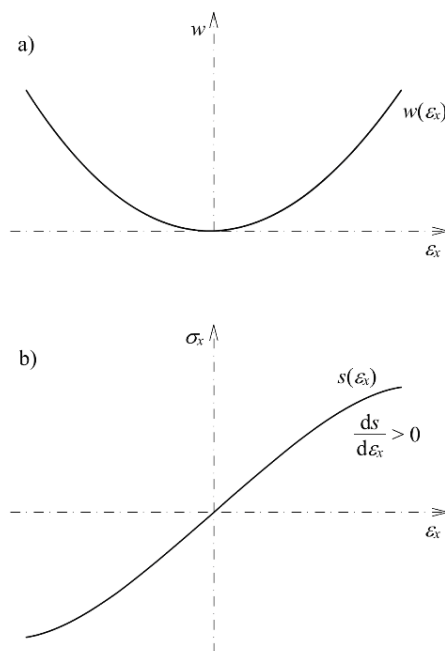
$$w = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} E\varepsilon d\varepsilon = E \left[ \frac{\varepsilon^2}{2} \right]_0^{\varepsilon} = \frac{1}{2} E\varepsilon^2$$

Derivací potenciální energie podle přetvoření je napjatost

$$\frac{\partial w}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \left( \frac{1}{2} E\varepsilon^2 \right)}{\partial \varepsilon} = E\varepsilon = \sigma$$

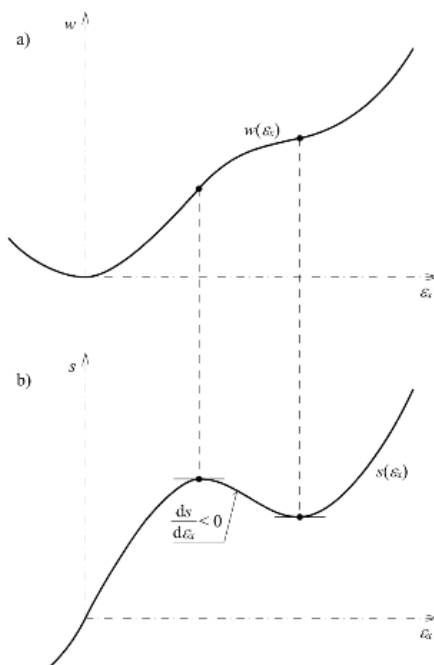
Hustota energie  $w$  je obvykle konvexní funkce deformace, tedy platí, že

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_x^2} \geq 0$$



Obr. 1.10: Srovnání funkcí  $w$  a  $s$  pro stabilní materiál [a) Konvexní funkce  $w$ ; b) Pracovní diagram]

V případě, že funkce  $w$  není konvexní jedná se o deformační změknutí materiálu a jeho nestabilitu ( $\frac{ds}{d\varepsilon_x} < 0$ ).



Obr. 1.11: Srovnání funkcí  $w$  a  $s$  pro nestabilní materiál [a) Nekonvexní funkce  $w$ ; b) Odpovídající pracovní diagram]

Zobecnění pružnosti na velké deformace, je možno pro jednoosou napjatost provést jednoduše. Je pouze nutné zvolit geometricky nelineární míru deformace a k ní energeticky konjugovaný míru napjatosti.

Pokud zvolíme Green – Lagrangeovu míru deformace a druhé napětí Piola – Kirchhoff, můžeme psát

$$S_x = \frac{\partial w}{\partial E_x}$$

### 1.2.2 Obecná napjatost

Zde můžeme prezentovat obecnější konstitutivní vztahy. Vzhledem k existenci různých měr deformace a napjatosti je také možno stejné konstitutivní vztahy napsat různými způsoby.

### 1.2.3 Saint Venantův – Kirchhoffův materiál

Řada inženýrských aplikací vede na malé deformace ale velké rotace (např. rybářský prut). Odezva takového materiálu může být modelována jako jednoduché rozšíření lineárního zákona pružnosti nahrazením inženýrské deformace Green – Lagrangeovým tenzorem deformace a napjatosti druhým napětím Piola – Kirchhoff (PK2). Můžeme tedy psát.

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$$

nebo v tenzorovém zápise

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E}$$

Pro tenzor 4.řádu  $\mathbf{C}$  platí symetrie

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$$

Saint – Venantův – Kirchhoffův materiál je nezávislý na dráze a má tedy pružný energetický potenciál. Výraz pro hustotu energie můžeme napsat následovně:

$$w = \int^S dE_{ij}$$

Napětí je dáno výrazem

$$S_{ij} = \frac{\partial w}{\partial E_{ij}}$$

nebo v tenzorovém zápise

$$\mathbf{S} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}}$$

Hustota energie  $w$  je nezáporná ( $w \geq 0$ ) a je rovna nule je pro  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ .

$\mathbf{C}$  je pozitivně definitní tenzor 4.řádu.

Hladkost potencionálu  $w$  (spojitost C1) implikuje symetrii tenzoru  $\mathbf{C}$ .

Maticе pružných konstant ev. tečné materiálové tuhosti jsou obvykle zapsány ve Voigtově notaci

$$\{\mathbf{S}\} = [\mathbf{C}] \{\mathbf{E}\}$$

Symetrie  $C_{ijkl} = C_{klij}$  implikuje symetrii matice  $[\mathbf{C}]$ , takže pro 3D platí

$$\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & sym & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{13} \\ 2E_{12} \end{pmatrix}$$

Pro obecný anizotropní Kirchhoffův materiál tedy matice  $[\mathbf{C}]$  obsahuje 21 nezávislých konstant. Pro ortotropní materiál s hlavními osami ortotropie totožnými s osami  $X_1, X_2, X_3$  je možno konstitutivní vztah napsat v jednodušší formě

$$\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{13} \\ 2E_{12} \end{pmatrix}$$

#### 1.2.4 Hyperelastické materiály

Pružný materiál je takový materiál pro který je napětí jednoznačně určeno deformací. Pružné materiály, pro které je práce nezávislá na dráze, nazýváme hyperelastické. U těchto materiálů je možno napětí získat derivováním hustoty potenciální energie vnitřních sil  $w$  podle deformace. Platí pro ně vztah

$$\mathbf{S} = \frac{\partial w(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}$$

Saint Venantův – Kirchhoffův materiál patří mezi hyperelastické materiály.

Pro linearizovanou formu konstitutivních vztahů je možno tečnou tuhost materiálu definovat vztahem

$$C_{ijkl}^{SE} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}}$$

nebo

$$\mathbf{C}^{SE} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 w(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}}$$

$\mathbf{C}^{SE}$  vyjadřuje tečnou tuhost materiálu pro přírůstkovou formu vztahu mezi napětím a deformací

$$\delta \mathbf{S} = \mathbf{C}^{SE} : \delta \mathbf{E}$$

V rychlostní formě můžeme konstitutivní rovnici napsat takto

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}^{SE} : \dot{\mathbf{E}}$$

Tensor tečné tuhosti materiálu  $\mathbf{C}^{SE}$  se také nazývá druhý tenzor pružnosti.

V běžné konfiguraci bychom vztah  $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}^{SE} : \dot{\mathbf{E}}$  mohli napsat

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla C} = \mathbf{C}^{\tau} : \mathbf{D}$$

$\boldsymbol{\tau}^{\nabla C}$  je konvekční tok Kirchhoffova napětí definovaný vztahem

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla C} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{L}^T$$

$\mathbf{L}$  je gradient rychlosti  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}$

$\mathbf{C}^{\tau}$  je tzv. čtvrtý tenzor pružnosti daný vztahem :

$$C_{ijkl}^{\tau} = F_{im} F_{jn} F_{kp} F_{lq} C_{mnpq}^{SE}$$

### 1.2.5 Hypoelastické materiály

Hypoelastické materiály jsou takové materiály, které je možno definovat konstitutivním vztahem

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$$

$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla}$  je objektivní míra napětí, rychlost deformace  $\mathbf{D}$  je také objektivní. Funkce  $\mathbf{f}$  musí také být objektivní funkcí napětí a rychlosti deformace.

Široká třída hypoelastických konstitutivních vztahů může být zapsána lineárním vztahem mezi objektivní mírou toku napětí a rychlostí deformace.

$$\boldsymbol{\sigma}^\nabla = \mathbf{C}^\sigma : \mathbf{D}$$

$\mathbf{C}^\sigma$  je tenzor pružnosti materiálu definovaný pro danou objektivní míru napětí.

### 1.2.6 Plasticita podle kritéria Drucker-Prager

Toto kritérium bylo navrženo Druckerem a Pragerem (1952) kvůli aproximaci Mohrova-Coulombova kritéria hladkou funkcí. Tato aproximace byla udělána rozšířením von Misesova kritéria o výraz, který zohledňuje rozdílné chování materiálu v tahu a tlaku. Má následující tvar

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\epsilon}^p) = \sqrt{J_2(\mathbf{s})} + c_1 \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma}) - c_2 \text{coh}(\bar{\epsilon}^p),$$

kde konstanta  $c_2$  je nejčastěji definována  $c_2 = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{9}c_{1,flow}^2}$ , konstanta  $c_1$  a koheze  $\text{coh}$  jako parametr zpevnění lze vypočítat z pracovního diagramu daného materiálu zapsáním kritéria pro jednoosou napjatost a stanovením dvou podmínek pro příslušné meze kluzu v tahu a tlaku z pracovního diagramu. Konstanta  $c_1$ ,  $flow$  je definována v souvislosti s plastickým potenciálem (viz. text níže).  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}I_1(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}$  je deviatorová část tenzoru napětí,  $J_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s}$  je druhý invariant deviatoru napětí,  $I_1(\boldsymbol{\sigma})$  je první invariant tenzoru napětí a  $\bar{\epsilon}^p$  je skalární veličina udávající kumulovanou hodnotu přírůstků normy tenzoru plastického přetvoření (definice normy je uvedena dále v textu).

Druckerovo-Pragerovo kritérium pro 1D napjatost má následující tvar pro tahovou i tlakovou část pracovního diagramu:

$$f_t\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{c_1}{3}\right) = c_2 \text{coh}$$

$$f_c\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{c_1}{3}\right) = c_2 \text{coh}$$

kde  $f_t$  a  $f_c$  jsou meze kluzu materiálu v tahu a tlaku (obojí zapsány jako kladné hodnoty).

Z těchto dvou podmínek lze vypočítat příslušné koeficienty Druckerova-Pragerova kritéria:

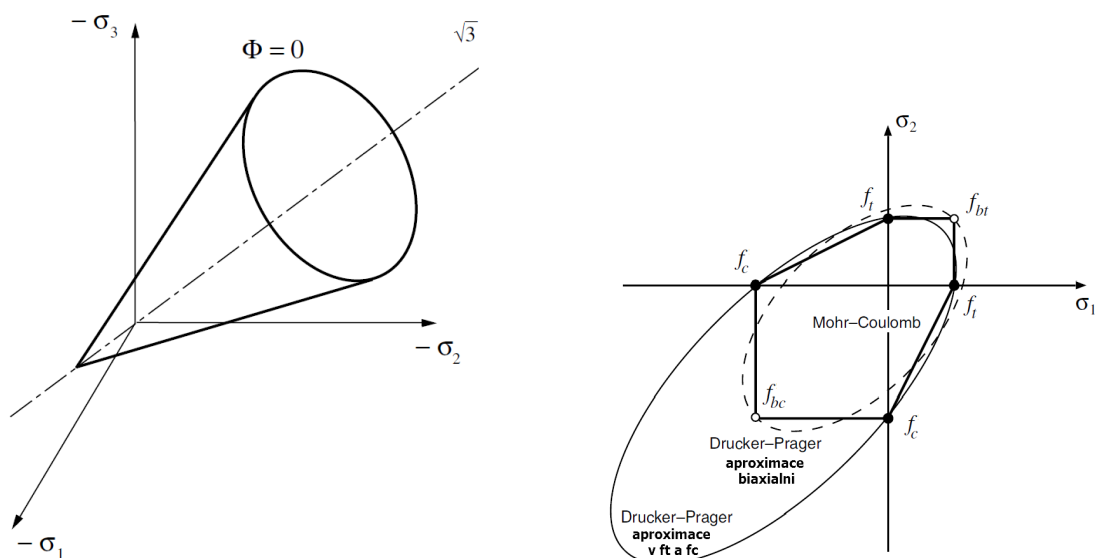
$$c_1 = \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{f_c - f_t}{f_c + f_t} \quad a \quad c_2 \text{coh} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{f_c f_t}{f_c + f_t},$$

$$kde \quad c_2 = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{9}c_{1,flow}^2}, \quad a \quad proto$$

$$coh = \frac{1}{c_2} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{f_c f_t}{f_c + f_t}$$

Za předpokladu  $m = \frac{f_c(\bar{\epsilon}^p)}{f_t(\bar{\epsilon}^p)} = konst.$  během zpevnění lze zapsat výraz pro zpevnění koheze pomocí zpevnění materiálu v tahu následovně

$$coh(\bar{\epsilon}^p) = \frac{1}{c_2} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{f_c(\bar{\epsilon}^p) f_t(\bar{\epsilon}^p)}{f_c(\bar{\epsilon}^p) + f_t(\bar{\epsilon}^p)} = \frac{1}{c_2} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m f_t^2(\bar{\epsilon}^p)}{f_t(\bar{\epsilon}^p) + (m + 1)} = \frac{1}{c_2} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m}{(m + 1)} f_t(\bar{\epsilon}^p).$$



(a) Druckerovo-Pragerovo kritérium v 3D prostoru hlavních napětí (de Souza Neto a spol., 2008)

(b) Druckerovo-Pragerovo kritérium v 2D prostoru hlavních napětí (rovinná napjatost) (de Souza Neto a spol., 2008)

Obr. 1.12: Druckerovo-Pragerovo kritérium

Plastický potenciál nutný pro výpočet plastického toku má následující tvar

$$\Psi = \sqrt{J_2(\mathbf{s})} + c_{1,flow} \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma}).$$

Derivací plastického potenciálu podle tenzoru napětí získáme tenzor, který udává směr plastického toku

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \mathbf{s} + \frac{1}{3} c_{1,flow} \mathbf{I}.$$

Přírůstek tenzoru plastického přetvoření je dán nejen směrem plastického toku  $\mathbf{N}$ , ale i hodnotou přírůstku skalární veličiny  $\gamma$

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N} = \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \mathbf{s} + \frac{1}{3} c_{1,flow} \mathbf{I} \right).$$

Norma přírůstku tenzoru plastického přetvoření je definována následovně

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\epsilon}^{\dot{p}} : \boldsymbol{\epsilon}^{\dot{p}}}.$$

Dosazením za  $\dot{\bar{\epsilon}}^p$  a provedením příslušného součinu (zúžení) dostaneme

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\epsilon}^{\dot{p}} : \boldsymbol{\epsilon}^{\dot{p}}} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} c_{1,flow}^2}$$

a to za předpokladu  $\dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\gamma} c_2$  dává výraz pro výpočet konstanty  $c_2$

$$c_2 = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} c_{1,flow}^2}$$

### *Implicitní metoda řešení plasticity podle kritéria Drucker-Prager*

U implicitního výpočtu jsou všechny veličiny počítané vzhledem k výslednému stavu (např. derivace plastického potenciálu podle tenzoru napětí se vyčíslí pro výsledné napětí, apod.). Musí se pak řešit systém rovnic s neznámými veličinami, které není možné vyjádřit explicitně.

Plasticita se řeší pomocí přírůstků, kterými se přibližně počítá plastické přetvoření, jehož přesné řešení je dáno integrálem

$$\epsilon^p = \int_0^{t_{end}} \dot{\epsilon}^p dt.$$

Čas  $t$  může být reálný (u dynamických úloh nebo obecně jakýchkoliv úloh závislých na reálném čase) nebo může jít jen o tzv. pseudočas u statických úloh.

Přesnost výpočtu u nelineárních úloh tedy obecně závisí na počtu přírůstků resp. na velikosti přírůstku zatížení nebo přetvoření.

V následujícím textu se předpokládá, že je známo řešení na konci  $n$ -tého přírůstku a cílem je vypočítat řešení na konci  $(n+1)$ -tého přírůstku. Jsou tedy známy hodnoty veličin z konce předchozího kroku  $n$  a cílem je vypočítat tyto hodnoty v následujícím kroku  $n+1$ . Na vstupu je:  $\Delta \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_n^e$ ,  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p$

Lze odvodit soustavu tří rovnic o třech neznámých - jednoho symetrického tenzoru  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e$  a dvou skalárech  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^p$  a  $\Delta \gamma$ . Pro 3D napjatost jde o soustavu  $6 + 1 + 1 = 8$  rovnic o 6-ti neznámých složkách elastického přetvoření  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e$  a dvou neznámých skalárních hodnotách  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^p$  a  $\Delta \gamma$ :

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^p) = 0$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\epsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\epsilon} - \Delta \gamma \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^p)$$



$$\bar{\epsilon}_{n+1}^p = \bar{\epsilon}_n^p + \Delta\gamma \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\epsilon}_{n+1}^p)$$

Poznámka:  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e$ .

Protože platí  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e,trial} \equiv \boldsymbol{\epsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n^p$ , tak lze na vstupu místo  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$  a  $\boldsymbol{\epsilon}_n^e$  použít celkové přetvoření  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$  a plastické přetvoření z předchozího kroku  $\boldsymbol{\epsilon}_n^p$

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\epsilon}_{n+1}^p) = 0$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n^p - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e - \Delta\gamma \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\epsilon}_{n+1}^p) = 0$$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^p - \bar{\epsilon}_n^p + \Delta\gamma \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\epsilon}_{n+1}^p) = 0$$

Výsledná soustava pro řešení plasticity podle kritéria Drucker-Prager je následující

$$\begin{aligned} \sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})} + c_1 \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) - c_2 \text{coh}(\bar{\epsilon}_{n+1}^p) &= 0 \\ \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\epsilon}_n^p + \Delta\gamma \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \mathbf{s}_{n+1} + \frac{1}{3} c_{1,flow} \mathbf{I} \right), \\ \bar{\epsilon}_{n+1}^p &= \bar{\epsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} c_{1,flow}^2} \end{aligned}$$

kde jsou tři neznámé veličiny  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ,  $\bar{\epsilon}_{n+1}^p$  a  $\Delta\gamma$ . Místo  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  lze považovat za neznámou  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e$ , protože jednu na druhou lze dopočítat jednoduše pomocí Hookova zákona.

Okamžitě jde vidět, že výše uvedená soustava tří rovnic o třech neznámých veličinách jde redukovat na dvě rovnice o dvou neznámých veličinách  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  a  $\Delta\gamma$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})} + c_1 \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) - c_2 \text{coh}(\bar{\epsilon}_{n+1}^p) &= 0 \\ \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\epsilon}_n^p + \Delta\gamma \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \mathbf{s}_{n+1} + \frac{1}{3} c_{1,flow} \mathbf{I} \right). \end{aligned}$$

Je to z toho důvodu, že neznámá veličina  $\bar{\epsilon}_{n+1}^p$  explicitně závisí na  $\Delta\gamma$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^p = \bar{\epsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} c_{1,flow}^2}.$$

Počáteční (zkušební, testovací, trial) volba neznámých pro řešení soustavy je následující:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e,trial} \equiv \boldsymbol{\epsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n^p$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{p,trial} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p$$

$$\Delta\gamma^{trial} = 0$$

A podobně jako u von Misesova kritéria lze tuto soustavu zredukovat pouze na jednu rovnici o jedné neznámé  $\Delta\gamma$ . Při redukci na jednu rovnici o jedné neznámé se postupuje následovně:

Výsledné napětí  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p) - \mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p$  se pomocí elastického (trial) odhadu napětí  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e,trial} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon}_n^e - \Delta\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n^p)$  vyjádří následovně

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \mathbf{C} : \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^p).$$

Potom se vyjádří výraz  $\mathbf{C} : \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^p)$  pomocí elastických odhadů a příslušných korekcí pomocí jediné neznámé  $\Delta\gamma$

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^p) \equiv \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|\boldsymbol{s}_{n+1}\|} \boldsymbol{s}_{n+1} + \frac{1}{3} c_{1,flow} \mathbf{I}$$

$$\mathbf{C} : \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^p) = 2G \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|\boldsymbol{s}_{n+1}\|} \boldsymbol{s}_{n+1} + K \frac{1}{3} c_{1,flow} \mathbf{I} = G \frac{1}{\sqrt{J_2(\boldsymbol{s}_{n+1})}} \boldsymbol{s}_{n+1} + K \frac{1}{3} c_{1,flow} \mathbf{I}.$$

Za předpokladu rovnosti  $\frac{1}{\|\boldsymbol{s}_{n+1}\|} \boldsymbol{s}_{n+1} = \frac{1}{\|\boldsymbol{s}_{n+1}^{trial}\|} \boldsymbol{s}_{n+1}^{trial}$  platí následující vztah

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \left( G \frac{1}{\sqrt{J_2(\boldsymbol{s}_{n+1}^{trial})}} \boldsymbol{s}_{n+1}^{trial} + K \frac{1}{3} c_{1,flow} \mathbf{I} \right).$$

Tímto jsme dostali výraz pro výpočet výsledného tenzoru napětí pomocí jediné neznámé  $\Delta\gamma$  a elastických odhadů příslušných veličin.

Pak platí

$$\boldsymbol{s}_{n+1} = \boldsymbol{s}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma G \frac{1}{\sqrt{J_2(\boldsymbol{s}_{n+1}^{trial})}} \boldsymbol{s}_{n+1}^{trial} = \left( 1 - \Delta\gamma G \frac{1}{\sqrt{J_2(\boldsymbol{s}_{n+1}^{trial})}} \right) \boldsymbol{s}_{n+1}^{trial}$$

$$p_{n+1} = p_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma K c_{1,flow}$$

a kritérium plasticity lze přepsat do následujícího tvaru

$$\sqrt{J_2(s_{n+1}^{trial})} - \Delta\gamma G + c_1(p_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma K c_{1,flow}) - c_2 coh(\bar{\varepsilon}_n^p + c_2\Delta\gamma) = 0,$$

což je jedna rovnice o jedné neznámé  $\Delta\gamma$ . Tato rovnice je obecně nelineární a její analytické řešení není možné, proto se vyřeší numericky např. pomocí Newtonovy-Raphsonovy metody. Na začátku iteračního procesu se volí  $\Delta\gamma = 0$  a provede se Newton-Raphsonova iterace (značení iterace je v horním indexu  $i \rightarrow i + 1$ ). Pro odečtení hodnoty koheze  $coh$  během zpevnění na začátku volíme  $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p$ , protože  $\bar{\varepsilon}_n^p + c_2\Delta\gamma$ .

$$\Delta\gamma^{i+1} = \Delta\gamma^i - \Phi^i \left( \frac{d\Phi^i}{d\Delta\gamma} \right)^{-1},$$

kde

$$\Phi^i = \sqrt{J_2(s_{n+1}^{trial})} - \Delta\gamma^i G + c_1(p_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma^i K c_{1,flow}) - c_2 coh(\bar{\varepsilon}_n^p + c_2\Delta\gamma^i) = 0,$$

$$H^i = \frac{dcoh}{d\bar{\varepsilon}^p}(\bar{\varepsilon}_n^p + c_2\Delta\gamma^i), \quad \frac{d\Phi^i}{d\Delta\gamma} = -G - K c_1 c_{1,flow} - c_2^2 H^i.$$

Po iteračním výpočtu  $\Delta\gamma$  (konvergovaném) lze vypočítat výsledný tenzor napětí, elastického přetvoření a plastického přetvoření

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \left( G \frac{1}{\sqrt{J_2(s_{n+1}^{trial})}} s_{n+1}^{trial} + K \frac{1}{3} c_{1,flow} I \right)$$

$$\varepsilon_{n+1}^e = C^{-1} : \sigma_{n+1}$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^e.$$

Poznámka:  $s_{n+1}^{trial} = s(\sigma_{n+1}^{trial}) = \sigma_{n+1}^{trial} - \frac{1}{3} I_1(\sigma_{n+1}^{trial}) I$  je známý tenzor deviatoru napětí. neplatila rovnost  $\frac{1}{\|s_{n+1}\|} s_{n+1} = \frac{1}{\|s_{n+1}^{trial}\|} s_{n+1}^{trial}$ , tak by nebyla redukce na jednu rovnici možná! Tato rovnost znamená, že počáteční (zkušební, testovací, trial) deviator napětí  $s_{n+1}^{trial}$  je „rovnoběžný“ (kolineární) s výsledným deviatorem napětí  $s_{n+1}$ .

### *Konstitutivní tenzor pro hladkou plochu kužele Druckerova-Pragerova kritéria*

V případě materiálových modelů, kde se pracuje pouze s rostoucími křivkami pracovního diagramu, je nejvhodnější použít tečného konstitutivního tenzoru  $C^{ep}$  definovaného následovně

$$C^{ep} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}.$$

Ještě o něco lepší je použít tzv. konzistentní tečný tenzor (konzistentní s daným algoritmem pro návrat napětí na plochu plasticity), který zajistí kvadratickou konvergenci (Souza).

$$C^{ep} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial}} = \frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial}} + \mathbf{I} \otimes \frac{\partial p_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e,trial}}$$

$$C^{ep} = 2G \left( 1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^{e,trial}\|} \right) \mathbf{P}_d + 2G \left( \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^{e,trial}\|} - GA \right) \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} \\ - \sqrt{2} GAK c_1 \mathbf{D} \otimes \mathbf{I} - \sqrt{2} GAK c_{1,flow} \mathbf{I} \otimes \mathbf{D} + K (1 - K c_1 c_{1,flow} A) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I},$$

kde  $A = \frac{1}{G + K c_1 c_{1,flow} + c_2^2 H}$ ,  $\mathbf{D} \equiv \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^{e,trial}}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^{e,trial}\|}$  je jednotkový tenzor 2. řádu rovnoběžný s  $\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^{e,trial}$ ,  $\mathbf{P}_d = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$  je projekční tenzor 4. řádu definovaný

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d = \mathbf{P}_d : \boldsymbol{\varepsilon},$$

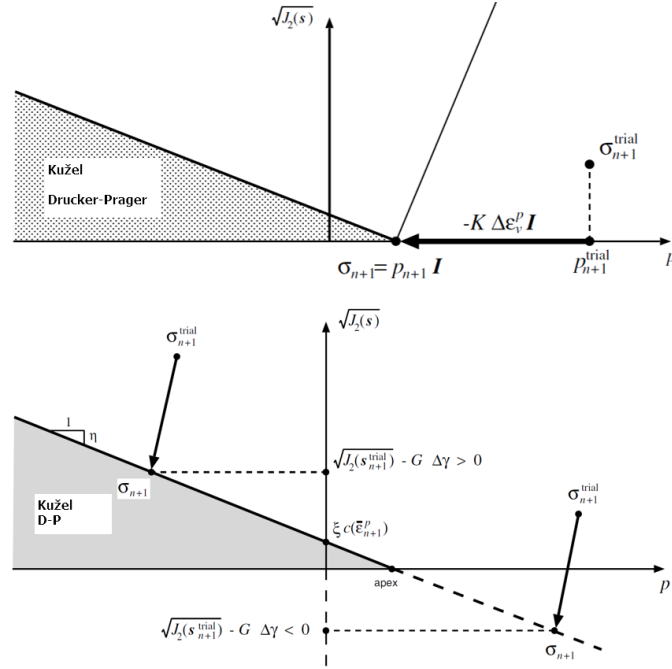
$$\text{kde } \boldsymbol{\varepsilon}_d = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}.$$

Odvození tohoto analytického vyjádření konzistentního tečného tenzoru přesahuje rámec této práce a lze jej nalézt v knize (de Souza Neto a spol., 2008).

### *Ošetření vrcholu (singulárního bodu) Druckerova-Pragerova kritéria*

Vždy se první začne s návratem elastického testovacího odhadu napětí na hladkou plochu kužele Druckerovy-Pragerovy podmínky plasticity (viz. výše popsany algoritmus) a teprve až potom se zkontroluje, zda bylo napětí skutečně navráceno na hladkou plochu kužele nebo jestli padlo mimo tento kužel.

Pokud  $\sqrt{J_2(s_{n+1}^{trial})} - \Delta\gamma G \geq 0$ , tak se opravdu jednalo o návrat na plochu kužele Druckerovy-Pragerovy podmínky plasticity a výpočet lze ukončit s navrácením opraveného tenzoru napětí, plastického přetvoření a konstitutivního tečného tenzoru.



Obr. 1.13: Ilustrace návratu napětí do vrcholu kužele Druckerova-Pragerova kritéria (de Souza Neto at al., 2008).

Jinak pokud  $\sqrt{J_2(s_{n+1}^{trial})} - \Delta\gamma G < 0$ , tak se musí veškeré výpočty zahodit a je třeba provést nové řešení s návratem přímo do vrcholu kužele Druckerovy-Pragerovy podmínky plasticity podle obrázku a postupu popsaneho níže.

Z předpokladu návratu napětí do vrcholu kužele podle obrázku plyne, že deviatorová část tenzoru napětí je nulová a výsledný tenzor napětí je roven

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = p_{n+1} \mathbf{I},$$

$$\text{kde } p_{n+1} = \left( p_{n+1}^{trial} - K \Delta \epsilon_V^p \right) \mathbf{I},$$

$$\text{a proto } \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left( p_{n+1}^{trial} - K \Delta \epsilon_V^p \right) \mathbf{I}.$$

Definujme  $\alpha \equiv \frac{c_2}{c_1}, \beta \equiv \frac{c_2}{c_{1,flow}}$ , tak pak lze návrat na plochu plasticity zapsat následovně  $p_{n+1}^{trial} - K \Delta \epsilon_V^p - coh(\bar{\epsilon}_n^p + \alpha \Delta \epsilon_V^p) \beta = 0$ .

Tato rovnice o jedné neznámé  $\Delta \epsilon_V^p$  je tedy obecně nelineární a její analytické řešení není možné, proto se vyřeší numericky např. pomocí Newtonovy-Raphsonovy metody.

Na začátku iteračního procesu se volí  $\Delta \epsilon_V^p = 0$  a provede se Newton-Raphsonova iterace (značení iterace je v horním indexu  $i \rightarrow i+1$ ). Pro odečtení hodnoty koheze  $coh$  během zpevnění na začátku volíme  $\bar{\epsilon}_{n+1}^p = \bar{\epsilon}_n^p$ , protože  $\bar{\epsilon}_{n+1}^p = \bar{\epsilon}_n^p + \alpha \Delta \epsilon_V^p$ .

$$\Delta \epsilon_V^{p,i+1} = \Delta \epsilon_V^{p,i} - r^i \left( \frac{dr^i}{d\Delta \epsilon_V^p} \right)^{-1},$$

kde  $r^i = p_{n+1}^{trial} - K \Delta \varepsilon_V^{p,i} - coh \left( \bar{\varepsilon}_n^p + \alpha \Delta \varepsilon_V^{p,i} \right) \beta$ ,  $H^i = \frac{dcoh}{d\bar{\varepsilon}^p} \left( \bar{\varepsilon}_n^p + \alpha \Delta \varepsilon_V^{p,i} \right)$ ,  $\frac{dr^i}{d\Delta \varepsilon_V^p} = -K - \beta H^i \alpha$ .

Po iteračním výpočtu  $\Delta \varepsilon_V^p$  (konvergovaném) lze vypočítat výsledné napětí, elastické přetvoření a plastické přetvoření

$$\sigma_{n+1} = \left( p_{n+1}^{trial} - K \Delta \varepsilon_V^p \right) \mathbf{I}$$

$$\varepsilon_{n+1}^e = C^{-1} : \sigma_{n+1}$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^e.$$

*Konstitutivní tenzor pro vrchol kužele Druckerova-Pragerova kritéria*

Ve vrcholu kužele Druckerovy-Pragerovy podmínky plasticity pro tenzor napětí platí

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = p_{n+1} \mathbf{I}.$$

Derivace tohoto tenzoru napětí podle přetvoření je potom následující

$$C^{ep} \equiv \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}^{e,trial}} = \mathbf{I} \otimes \frac{\partial p_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}^{e,trial}}.$$

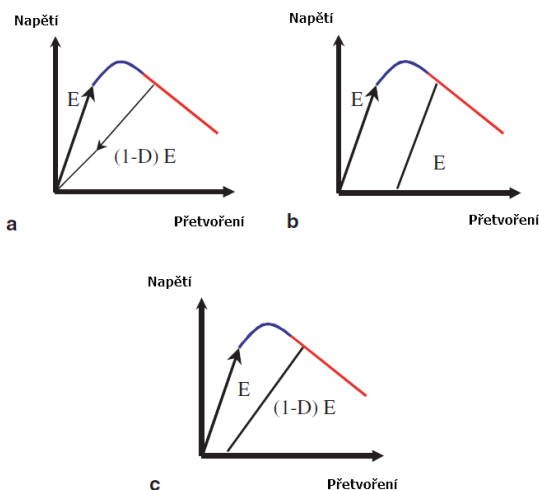
Po derivaci tlaku podle přetvoření se dostane výsledné vyjádření konzistentního tečného konstitutivního tenzoru

$$\mathbf{C}^{ep} = K \left( 1 - \frac{K}{K + \alpha \beta H} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}.$$

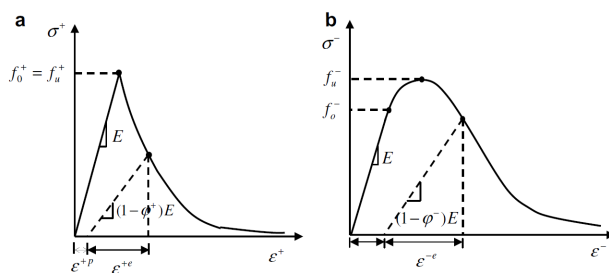
### 1.2.7 Model poškození podle Mazarse

#### *Spojité modely poškození*

Pro modelování materiálů s pracovním diagramem obsahujícím klesající větev, jako je například beton, je potřeba vyvinout konstitutivní zákon zohledňující toto změkčení materiálu. Nejčastěji používané jsou modely poškození, které se někdy kombinují s elastoplastickými modely.

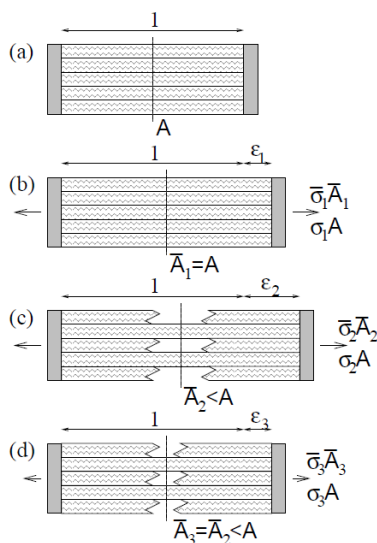


Obr. 1.14: Ilustrace různého chování materiálu: (a) elastické s poškozením, (b) elastoplastické, (c) elastoplastické s poškozením (Jason at al., 2006).



Obr. 1.15: Chování betonu v jednoosém (a) tahu, (b) tlaku (Voyiadjis at al., 2008).

Spojité modely poškození se dělí na izotropní a anizotropní.



Obr. 1.16: Ilustrace modelu poškození na jednoosé napjatosti (Jirásek, 2004)

### *Izotropní spojité modely poškození*

Uvažujme jednoosou napjatost a materiál jako sadu vláken rovnoběžných se směrem zatížení (řízená deformace - protažení) (a). Ze začátku zatěžování (pro malou úroveň přetvoření) je odezva materiálu elastická (b). Potom při dalším protažení se některá vlákna přetrhnou (materiál se poruší) (c). Při odtížení se materiál vrací elasticky, ale jen pomocí zbylých (nepřetržených) vláken (d).

Podle výše uvedeného obrázku lze pro elastický model s poškozením předpokládat  $\sigma = \frac{\bar{A}}{A} \bar{\sigma}$ , kde  $\frac{\bar{A}}{A}$  je poměr charakterizující celistvost materiálu.

Míru poškození pak můžeme definovat

$$d = 1 - \frac{\bar{A}}{A}.$$

Efektivní napětí ve vláknech se vypočítá

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon$$

a výsledné napětí

$$\sigma = (1 - d) \bar{\sigma} = (1 - d) E\varepsilon.$$

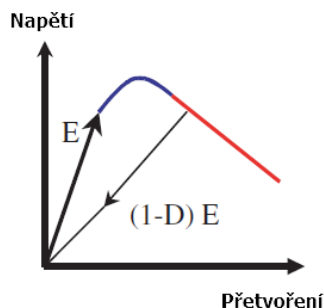
Lze výše uvedené zapsat jako

$$\sigma = E^s \varepsilon,$$

kde  $E^s = (1 - d) E$  je sečná tuhost materiálu.



### Izotropní spojité modely poškození



Obr. 1.17: Ilustrace zatěžování a odtěžování u modelu poškození (Jason at al., 2006)

V případě víceosé napjatosti se výsledné napětí spočítá analogicky jako v jednoosé napjatosti

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \bar{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon},$$

a proto se sečný tenzor vypočítá také analogicky  $\mathbf{C}^s = (1 - d) \mathbf{C}$ .

### Modifikovaný Mazarsův model poškození

Mazarsův izotropní model poškození je modifikován do jednoduchého anizotropního modelu poškození, aby lépe zohledňoval různé chování betonu v tahu a tlaku. Proto je třeba provést dekompozici tenzoru napětí do tahové a tlakové části

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t + \boldsymbol{\sigma}^c$$

podle jeho vlastních čísel (hlavních napětí)  $\sigma$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i.$$

Pro tuto dekompozici je vhodné nadefinovat projekční tenzory 4. řádu pro tah  $\mathbf{P}^t$  i tlak  $\mathbf{P}^c$ :

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \mathbf{P}^t : \boldsymbol{\sigma},$$

$$\boldsymbol{\sigma}^c = \mathbf{P}^c : \boldsymbol{\sigma},$$

kde

$$\mathbf{P}^t = \sum_{i=1}^{dim} \langle \sigma_i \rangle (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i),$$

$$\mathbf{P}^c = \delta_{ik}\delta_{jl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l - \mathbf{P}^t$$

kde  $\langle * \rangle$  je Macaulayova závorka (pro kladné číslo vrátí přesně to stejné reálné číslo a jinak vrátí nulu) a  $\dim$  udává dimenzi úlohy ( $\dim = 2$  pro rovinnou napjatost,  $\dim = 3$  pro prostorovou napjatost).

Hustota energie vnitřních sil při elastickém přetvoření se vypočítá následovně

$$w = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^t : \boldsymbol{\varepsilon}^e = w^t + w^c.$$

Dále se předpokládá, že hustota energie vnitřních sil  $w$  po poškození v tahu i tlaku se změní na  $w_d$ :

$$w_d = w_d^t + w_d^c$$

kde

$$w_d^t = (1 - d^t) w_d^t$$

$$w_d^c = (1 - d^c) w_d^c$$

Veličiny  $d^t$  a  $d^c$  jsou tzv. parametry poškození v tahu a tlaku, které se počítají z pracovního diagramu, jak bude popsáno níže.

### *Výpočet výsledného tenzoru napětí*

Výpočet výsledného tenzoru napětí se provede pomocí elastických odhadů napětí  $\boldsymbol{\sigma}^{trial}$  a parametrů poškození  $d^t$  a  $d^c$  následovně

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= (1 - d^t) \boldsymbol{\sigma}^t + (1 - d^c) \boldsymbol{\sigma}^c = (1 - d^t) \mathbf{P}^t : \boldsymbol{\sigma}^{trial} + (1 - d^c) \mathbf{P}^c : \boldsymbol{\sigma}^{trial} = \\ &= \left[ (1 - d^t) \mathbf{P}^t + (1 - d^c) \mathbf{P}^c \right] : \boldsymbol{\sigma}^{trial}, \end{aligned}$$

kde  $\boldsymbol{\sigma}^{trial} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$ .

Parametry poškození  $d^t$  a  $d^c$  se odvodí z pracovního diagramu, kde se použijí ekvivalentní přetvoření vypočítaná podle Mazarse a spol. (2014):

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{I_\varepsilon}{2(1-2\nu)} + \frac{\sqrt{J_\varepsilon}}{2(1+\nu)} \\ \varepsilon_c &= \frac{I_\varepsilon}{5(1-2\nu)} + \frac{6\sqrt{J_\varepsilon}}{5(1+\nu)}, \end{aligned}$$

kde

$$I_\varepsilon = I_1(\varepsilon) = \text{trace}(\varepsilon)$$

$$[J_\varepsilon = 3J_2(\varepsilon) = \frac{1}{2} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]].$$

S těmito ekvivalentními přetvořeními se jde do pracovního diagramu a odečte se správná hodnota napětí  $\sigma$ . Poměr této hodnoty napětí z diagramu a elastického odhadu napětí  $\sigma/\sigma^{trial}$  charakterizuje celistvost materiálu. Pokud odečteme tento poměr od hodnoty 1, tak dostaneme příslušnou míru poškození materiálu v tahu i tlaku:

$$\begin{aligned} d^t &= 1 - \frac{\sigma(\varepsilon_t)}{\sigma^{trial}(\varepsilon_t)} \\ d^c &= 1 - \frac{\sigma(\varepsilon_c)}{\sigma^{trial}(\varepsilon_c)}. \end{aligned}$$

Pokud chceme jako výsledek dostat jen jednu hodnotu parametru poškození, která by charakterizovala celkové poškození (dohromady v tahu i tlaku), tak lze udělat následující vážený průměr získaných dvou parametrů poškození v tahu a tlaku:

$$d = rd_t + (1 - r)d_c,$$

kde  $r = \frac{\sum_{i=1}^{\dim} \langle \sigma_i^{trial} \rangle}{\sum_{i=1}^{\dim} |\sigma_i^{trial}|}$  a  $|*|$  je absolutní hodnota čísla  $*$ .

### *Konstitutivní tenzor*

Pro materiálové modely simulující poškození materiálu je lepší použít sečný tenzor než tečný, protože u sečného tenzoru je zaručena pozitivní definitnost, kdežto u tečného nikoliv (v případě, že se dostaneme do oblasti klesající větve pracovního diagramu).

Sečný konstitutivní tenzor  $\mathbf{C}^s$  je definován následovně

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Výsledné napětí se vypočítá následovně

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[ (1 - d^t) \mathbf{P}^t + (1 - d^c) \mathbf{P}^c \right] : \boldsymbol{\sigma}^{trial} = \left[ (1 - d^t) \mathbf{P}^t + (1 - d^c) \mathbf{P}^c \right] : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon},$$

proto se sečný konstitutivní tenzor vypočítá tímto způsobem

$$\mathbf{C}^s = \left[ (1 - d^t) \mathbf{P}^t + (1 - d^c) \mathbf{P}^c \right] : \mathbf{C}.$$

### Izotropní poškození

V případě izotropního poškození je situace jednodušší, protože výsledné napětí se spočítá z elastického odhadu napětí pouhým vynásobením jedním skalárem charakterizující „celkovou průměrnou“ míru poškození  $d$

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \boldsymbol{\sigma}^{trial} = (1 - d) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon},$$

a proto se sečný tenzor vypočítá také jednoduše  $\mathbf{C}^s = (1 - d) \mathbf{C}$ .

## 1.3 Metody řešení nelineárních algebraických rovnic

Formulace MKP řešení nelineárních diferenciálních rovnic vede na nelineární algebraické rovnice, které můžeme napsat v následující formě

$$\mathbf{K}(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{f}$$

kde:

$\mathbf{K}$  je matice tuhosti konstrukce

$\mathbf{d}$  je vektor neznámých, obvykle uzlových parametrů deformace

$\mathbf{f}$  je vektor pravých stran, obvykle uzlových sil.

Matice  $\mathbf{K}$  je funkcí  $\mathbf{d}$  a nemůže tedy být vyhodnocena bez znalosti vektoru kořenů soustavy  $\mathbf{d}$ . Protože nemůžeme tuto nelineární soustavu řešit přímo, užíváme iteračních procedur, které jsou založeny na postupném zpřesňování řešení. Každý iterační krok je linearizován.

Je-li řešení  $i$  – tého kroku  $\mathbf{d}^{(i)}$ , potom můžeme rovnici přepsat do tvaru

$$\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(i)}) \cdot \mathbf{d}^{(i+1)} = \mathbf{f}$$

tedy

$$\mathbf{d}^{(i+1)} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{d}^{(i)}) \cdot \mathbf{f}$$

Procedura může být opakována, dokud není dosaženo potřebné přesnosti, která je založena na rozdílu vektorů  $\mathbf{d}^{(j)}$  a  $\mathbf{d}^{(i+1)}$ .

Ukážeme si zde 3 nejčastěji užívané metody :

1. Picardova iterační metoda,
2. Newton – Raphsonova iterační metoda,
3. Riksova metoda zvaná též arc length.

Jednotlivé metody ukažme na jedné nelineární rovnici.

Uvažujme nelineární rovnici

$$K(d)d = f$$

nebo

$$r(d) = 0$$

kde  $d$  je neznámé řešení.  $K(d)$  je známá funkce  $d$ ,  $f$  je známá pravá strana (obvykle síla) a  $r$  je residuum (nevyvážené zatížení).

$$r(d) = K(d)d - f$$

Čára daná rovnicí  $r(d, f) = 0$  je rovnovážná cesta nazývaná též pracovní diagram. Pro jakoukoliv hodnotu  $d^{(i)}$  je  $K(d^{(i)})$  je sečna křivky v  $d = d^{(i)}$  a  $K_T = \left(\frac{\partial r}{\partial d}\right) \Big|_{d^{(i)}}$  a je tečna ke křivce v bodě  $d = d^{(i)}$ .

### *Newton – Raphsonova iterační metoda*

Hledáme řešení, při kterém jsou nevyvážené síly  $r(d)$  nulové.

Provedme rozvoj  $r(d)$  kolem známého řešení  $d^{(i-1)}$  do Taylorovy řady.

$$r(d) = r(d^{(i-1)}) + \left(\frac{\partial r}{\partial d}\right) \Big|_{d^{(i-1)}} \delta d^{(i)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial d^2}\right) \Big|_{d^{(i-1)}} (\delta d^{(i)})^2 + \dots = 0$$

$\delta d^{(i)}$  je přírůstek

$$\delta d^{(i)} = d^{(i)} - d^{(i-1)}$$

Zanedbáme-li členy druhého a vyšších řádů, můžeme rovnici  $r(d)$  přepsat následovně:

$$r(d^{(i-1)}) + \left(\frac{\partial r}{\partial d}\right) \Big|_{d^{(i-1)}} \delta d^{(i)} = 0$$

Pro přírůstek parametru deformace můžeme potom zapsat následující vztah

$$\begin{aligned} \delta d^{(i)} &= - \left(K_T(d^{(i-1)})\right)^{-1} r(d^{(i-1)}) = \\ &= \left(K_T(d^{(i-1)})\right)^{-1} (f - K(d^{(i-1)})d^{(i-1)}) \end{aligned}$$

kde

$$K_T = \left( \frac{\partial r}{\partial d} \right) \Big|_{d^{(i-1)}}$$

je sklon (tangenta) čáry  $r(d)$  v  $d^{(i-1)}$ ,  $K$  je sklon sečny, procházející body  $r(0) = 0$  a  $r(d)$ . V mechanice při řešení úloh deformační variantou MKP nazýváme  $K_T$  tečnou tuhostí  $K$  sečnou tuhostí. Výraz  $K(d^{(i-1)})d^{(i-1)}$  představuje přenesené zatížení v kroku  $(i-1)$ . Reziduum neboli nevyvážená síla  $r(d)$  postupně klesá k nule pokud procedura konverguje.

V každé iteraci je vypočítán přírůstek neznámé veličiny  $d$ . Dosažené řešení v  $i$ -té iteraci je získáno postupnou sumací přírůstků

$$d^{(i)} = d^{(i-1)} + \delta d^{(i)}$$

Pro soustavu nelineárních rovnic můžeme zapsat Newton–Raphsonovu proceduru takto :

$$\delta \mathbf{d} = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{r}$$

kde  $\mathbf{K}_T$  je tečná matice

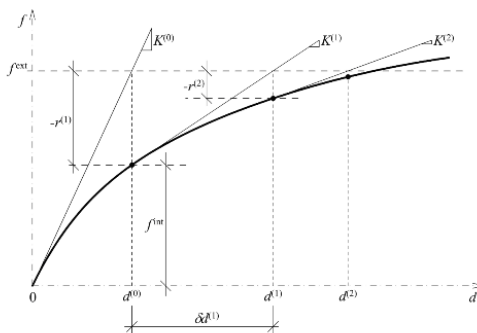
$$\mathbf{K}_T^{(i)} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}} \Big|_{\mathbf{d}^{(i-1)}}$$

$\mathbf{r}$  je vektor nevyváženého zatížení

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}^{int} - \mathbf{f}^{ext}$$

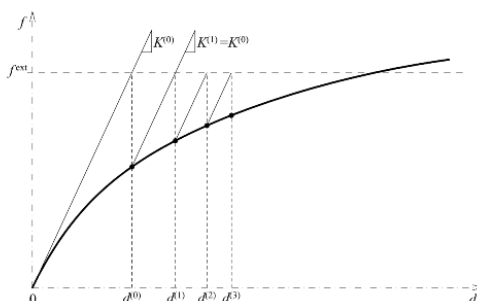
$\mathbf{f}^{ext}$  je zatěžovací vektor a  $\mathbf{f}^{int}$  je vektor uzlových vnitřních sil (vypočítaný jako energetický ekvivalent vnitřních sil).

Newton–Raphsonova metoda vyžaduje sestavení matice levých stran soustavy rovnic v každém iteračním kroku. Takže v každém iteračním kroku se musí také znovu provést dekompozice (faktorizace) matic při řešení Gaussovou, nebo Choleského metodou. Někdy je výhodnější ponechat levé strany soustavy rovnic beze změny a měnit pouze pravou stranu. Této metodě říkáme modifikovaná Newton–Raphsonova metoda. Obecně vyžaduje podstatně více iterací, než normální Newton–Raphsonova metoda, ale vzhledem k tomu, že dekompozice matice soustavy rovnic je provedena pouze jednou, jsou iterace mnohem rychlejší. Princip modifikované Newton–Raphsonovy metody viz Obr. 1.18.



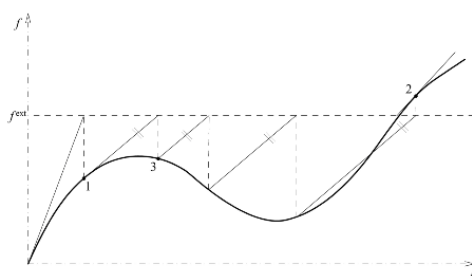
Obr. 1.18: Princip Newton–Raphsonovy metody

Princip modifikované Newton–Raphsonovy metody viz Obr. 1.19.



Obr. 1.19: Princip modifikované Newton–Raphsonovy metody

Někdy je výhodné obě metody kombinovat. Cílem je jednak úspora času potřebného pro řešení úlohy, ale kombinace metod může také umožnit řešení i takových úloh, pro které by řešení nemodifikovanou Newton–Raphsonovou metodou selhalo. Na Obr. 1.20 je znázorněn možný takový případ. V bodě 1 je řešení přepnuto na modifikovanou Newton–Raphsonovu metodu, v bodě 2 je řešení přepnuto zpět na nemodifikovanou metodu.



Obr. 1.20: Kombinace Newton–Raphsonovy a modifikované Newton–Raphsonovy metody

*Numerické metody řešení dynamicky namáhaných konstrukcí*

Soustavu pohybových rovnic lineárního diskrétního modelu konstrukce zatížené dynamickým zatížením lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t)$$

Obecně jsou matice ve výše uvedeném vztahu proměnné v čase, a tedy soustava je řešitelná pouze metodami přímé numerické integrace. V případě, že jsou matice hmotnosti a tuhosti konstantní a matice tlumení splňuje jisté předpoklady, lze soustavu řešit metodou rozkladu podle vlastních tvarů kmitání.

Numerické metody řeší pohybovou rovnici v konečném počtu časových okamžiků  $t_0, t_1, \dots, t_m$ . Vzdálenost jednotlivých okamžiků  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  se nazývá délka integračního kroku. Velikosti integračních kroků  $\Delta t_i$  ovlivňují přesnost, stabilitu i rychlost řešení. Nedílnou součástí soustavy pohybové rovnice jsou zadané počáteční podmínky. Za počátek považujeme čas  $t = 0$ , ve kterém platí  $\{u(t_0)\} = \{u_0\}$ ,  $\{\dot{u}(t_0)\} = \{\dot{u}_0\}$ . Pohybovou rovnici můžeme tedy napsat ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{K}\mathbf{u}_i = \mathbf{F}_i$$

Numerické metody rozlišujeme zpravidla na metody :

1. explicitní
2. implicitní

Metody považujeme za základní. Explicitní i implicitní metoda jsou integrační metodou, podle toho, ve kterém časovém okamžiku využívá celou soustavu pohybových rovnic.



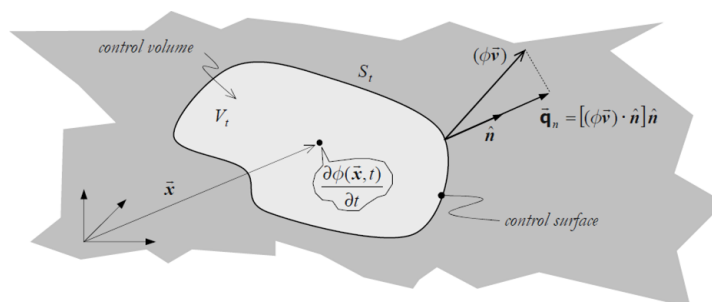
## 2 Nelineární dynamika

### 2.1 Základní principy mechaniky kontinua

Základní rovnice jsou založeny na principu zákona "zachování" nějaké fyzikální veličiny. Jedná se o 5 principů, které jsou potřebné pro sestavení okrajové úlohy s počátečními podmínkami (Initial Boundary Value Problem - IBPV).

1. Zákon zachování hmoty (The principle of conservation of mass).
2. Zákon zachování hybnosti (The principle of conservation of linear momentum).
3. Zákon zachování momentu hybnosti (The principle of conservation of angular momentum).
4. Zákon zachování energie (The principle of conservation of energy).
5. Zákon nevratnosti (The principle of irreversibility).

#### 2.1.1 Zákon zachování - obecně



Obr. 2.1: Kontrolní objem.

Pokud aplikujeme zákon zachování na nějakou konkrétní fyzikální veličinu definovanou na jednotku objemu v části uvažované domény, tak říká, že žádná fyzikální veličina (hmota, energie, atd.) nemůže být vytvořena ani zničena, může se pouze přesunovat z jednoho místa na jiné. Zákon zachování je sestavený na základě Reynoldsovy transportní věty:

$$\frac{D}{Dt} \int_B \Phi(\mathbf{x}, t) dV \equiv \int_B \left( \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\Phi(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}) \right) dV.$$

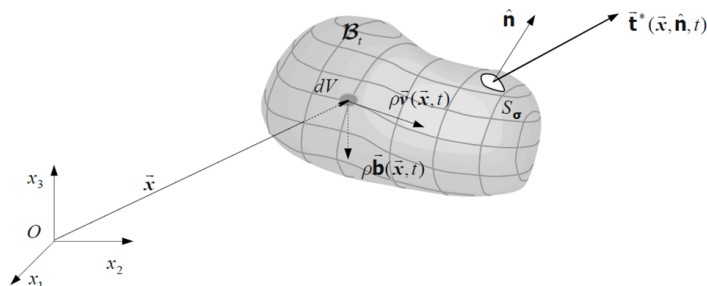
Zdrojem může být například vnitřní teplo generované během hydratace cementové pasty. Efekt takovéto chemické reakce na makroskopické úrovni může být reprezentovaný proměnnou, která poskytuje množství tepla generovaného na jednotku objemu, za jednotku času.

Výraz  $\Phi(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}$  v rovnici potom reprezentuje tepelný tok  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ , obecně ale "nějaký" energetický tok.

Zákon zachování je znám jako rovnice kontinuity:

$$Q = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\Phi(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}).$$

### 2.1.2 Zákon zachování hybnosti



Obr. 2.2: Kontinuum v pohybu.

Zákon zachování hybnosti je založený na druhém Newtonově zákonu, který říká, že rychlost změny hybnosti libovolné části spojitého média je roven výsledné síle, která na tuto část působí. Pro odvození použijeme právě obecnou formulaci "zákona zachování" popsané v části 2.1.1. Zachovávaná veličina je v tomto případě hybnost  $\Phi(\mathbf{x}, t) = \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , působící síly jsou objemové  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  a povrchové síly  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA + \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV. \quad (2.1)$$

Aplikací Gauss-Green-Ostrogradského věty na povrchové síly a úpravou rovnice (2.1) dostaneme:

$$\int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{a} dV = \int_{\mathcal{B}} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)) dV.$$

Stejně rovnice můžeme dostat přímo z prvního zákona termodynamiky. Jelikož rovnice platí pro celou doménu  $\mathcal{B}$ , tak platí i lokálně, to potom vede na Cauchyho formulaci první pohybové rovnice (Cauchy's first equation of motion). Společně s okrajovými a počátečními podmínkami, rovnicemi pro konstitutivními vztahy a geometrickými rovnicemi tvoří IBPV (15 rovnic + počáteční a okrajové podmínky):

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \rho \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ on } \Gamma_N, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ on } \Gamma_D, \quad \mathbf{u}(t_0) = \bar{\mathbf{u}}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(t_0) = \dot{\bar{\mathbf{u}}}_0.$$

Ve speciálním případě, kdy  $\rho \dot{\mathbf{v}}(t) \rightarrow 0$  (nulové setrvačné síly), tak Cauchyho první pohybová rovnice přechází na známou Cauchyho rovnici statické rovnováhy:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ on } \Gamma_N, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ on } \Gamma_D.$$

Tohoto efektu, kdy vymizí setrvačné síly, se dále použije v numerické metodě Dynamické relaxace (metoda ustalování) pro řešení statiky konstrukcí.

### 2.1.3 Zákon zachování momentu hybnosti - symetrie Cauchyho tenzoru napětí

Formulace zákona zachování momentu hybnosti je obdobná zákonu zachování hybnosti (2.1). Změna momentu hybnosti k nějakému bodu je rovná výslednému momentu, ke stejnému bodu, produkovanému všemi silami, které působí na těleso (doména  $\mathcal{B}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) \, dV &= \int_{\partial \mathcal{B}} (\mathbf{x} \times \mathbf{t}) \, dA + \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}) \, dV \\ &= \dots \implies \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \end{aligned}$$

Důležitým výsledkem tohoto druhého Cauchyho pohybového zákona (Cauchy's second law of motion) je právě symetrie Cauchyho tenzoru napětí  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ . Tento zákon je znám také jako Boltzmannův postulát (Boltzmann postulate).

## 2.2 Numerické řešení problémů elastodynamiky

Výchozí rovnicí pro nás bude rovnice 2.2. Tato obecně nelineární parciální diferenciální rovnice spolu s geometrickými a konstitutivními vztahy, okrajovými a počátečními podmínkami, tvoří základ pro odvození integro-diferenciálních rovnic, které se dále použijí pro aplikaci konečných prvků. Výsledkem bude soustava obecně nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, které se dále řeší některou z implicitních nebo explicitních metod přímé integrace pohybových rovnic.

Zdrojem nelinearit jsou konstitutivní vztahy (nelineární elasticita, plasticita, poškození, atd.), nelineární geometrické vztahy (velké deformace, rotace), nekonzervativní vnější zatížení (sledující deformovanou konstrukci) a změna okrajových podmínek (kontaktní úlohy).

K získání formulace, která je dále použita pro diskretizaci konečnými prvky (projekce v Galerkinově smyslu), využijeme princip virtuálních prací (obecná metoda reprezentující slabou formulaci diferenciálních rovnic). Obecně tento princip již stačí, ale pro další účely budeme dále spíše využívat Hamiltonův variační princip a Hamiltonův zákon variace akce. Takto vzniklé rovnice dále slouží jako zdroj k aplikaci Euler-Lagrangeových rovnic (případně pak pro Hamiltonovské rovnice), které se používají v řadě oborů (teoretická fyzika, kvantová mechanika, robotika, elektrotechnika, obecně v technické kybernetice, atd.).

### 2.2.1 Princip virtuálních prací

Budeme vycházet z rovnice 2.2 zapsané v Lagrangeovských souřadnicích. Pozice částice v referenční konfiguraci se nazývá materiálový bod, který se označuje  $\mathbf{X} \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}_3$  (oproti Eulerovským souřadnicím, které se používají především v dynamice tekutin, sledují pohyb částice, pro lineární problémy jsou vzniklé Eulerovské a Lagrangeovské formulace totožné). Pohyb tělesa je pak popsán zobrazením  $\mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) : \mathcal{B} \times \overline{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3, \forall t \in \overline{\mathcal{T}} = [t_0, t_1]$ .  $\mathcal{B}$  označuje referenční konfiguraci spojitého tělesa s hranicí  $\partial\mathcal{B}$ .

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P} + \varrho_0 \mathbf{b}_0 = \varrho_0 \mathbf{A}, \quad (2.3)$$

kde  $\mathbf{P} = J\sigma \cdot \mathbf{F}^{-T}$  je první Piola-Kirchhoffovo (objektivní) napětí (The first Piola-Kirchhoff stress),  $\varrho_0 \mathbf{b}_0(\mathbf{X}, t)$  je hustota objemových sil v nedeformované referenční konfiguraci a  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$  je pole Lagrangeovských zrychlení.

Rovnici 2.3 vynásobíme virtuálními posuny  $\delta \mathbf{u}$  a integrujeme přes celou doménu  $\mathcal{B}$

$$\int_{\mathcal{B}} (\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} + \varrho_0 \mathbf{b}_0 - \varrho_0 \mathbf{A}) \cdot \delta \mathbf{u} \cdot dV = 0,$$

kde  $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  je kinematicky admisibilní pole posunů, pro které platí  $\delta \mathbf{u} = \delta \bar{\mathbf{u}} = 0$  pro  $(\mathbf{X}, t) \in \partial\mathcal{B} \times \overline{\mathcal{T}}$ .

Roznásobením a úpravou pak dostaneme

$$\int_{\mathcal{B}} \varrho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} \, dV = \int_{\mathcal{B}} \varrho_0 \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) \, dV, \quad (2.4)$$

kde původní výraz  $(\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P}) \cdot \delta \mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) - \mathbf{P} : \delta \mathbf{F}$ . Výraz  $\int_{\mathcal{B}} \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) \, dV = \int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV$ .

Rovnice 2.4 je dále použita k prostorové diskretizaci pomocí konečných prvků.

### 2.2.2 Hamiltonův zákon a Hamiltonův princip variace akce

V tomto případě vycházíme z rovnice 2.4 odvozené v části 2.2.1, z které využijeme některé členy. Hamiltonův zákon a Hamiltonův princip variace akce vychází ze sestavení tzv. "Lagrangianu", který dále po prostorové diskretizaci pomocí konečných prvků dosadíme do Euler-Lagrangeových rovnic, jejichž výsledkem je soustava pohybových rovnic pro přímou integraci. Je zde uvažován jednoduchý standardní materiál, který se dá plně popsat pomocí potenciálu Helmholtzovy volné energie.

Pro sestavení Lagrangianu  $\mathcal{L}$  je nutné sestavit skalární funkce reprezentující potenciální energii  $\mathcal{U}$  a kinetickou energii  $\mathcal{K}$ . Lagrangian je potom  $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U}$ .

Uvažujme jednodušší případ, kdy externí síly uvažujeme jako konzervativní, potom

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathbf{u}) &= \int_{\mathcal{B}} \varrho_0 \Psi(\mathbf{X}) \, dV - \\ &- \int_{\partial \mathcal{B}} (\mathbf{t}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X})) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \, dA - \\ &- \int_{\mathcal{B}} \varrho_0 \mathbf{B}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \, dV, \end{aligned} \quad (2.5)$$

kde  $\Psi(\mathbf{X})$  označuje hustotu Helmholtzovy volné energie v referenční konfiguraci. Dále sestavíme kinetickou energii deformovatelného spojitého tělesa  $\mathcal{K}$  následovně:

$$\mathcal{K}(\dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \varrho_0 \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dV. \quad (2.6)$$

Rovnice 2.4 s uvážením 2.5 a 2.6 může být přepsána následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{K}(\dot{\mathbf{u}}) - \delta \mathcal{U}(\mathbf{u}) - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \varrho_0 \dot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV &= 0, \\ \delta \mathcal{L}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \varrho_0 \dot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Integrací obou stran rovnice 2.7 přes uzavřený časový interval  $\overline{\mathcal{T}} = [t_0, t_1]$  dostaneme:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) - \left[ \int_{\mathcal{B}} \varrho_0 \dot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV \right]_{t_0}^{t_1} = 0. \quad (2.8)$$

Rovnice 2.8 je známá jako Hamiltonův zákon variace akce. Ve speciálním případě (dáno geometrickými omezeními), kdy variace posunů  $\delta \mathbf{u}$  v časových hladinách  $t_0$  a  $t_1$  je nulová, potom vede rovnice na Hamiltonův princip (variační princip)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = 0.$$

Dále zapíšeme Lagrangian ve smyslu Lagrangianské hustotní funkce

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) &= \int_{\mathcal{B}} \overline{\mathcal{L}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{F}) \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}} (\mathbf{t}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X})) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \, dA \\ \overline{\mathcal{L}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{F}) &= \frac{1}{2} \varrho_0 \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) - \varrho_0 \Psi(\mathbf{F}) + \varrho_0 \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \end{aligned}$$

Variace Lagrangianu  $\delta \mathcal{L}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$  v konečném důsledku vede na Lagrangianskou verzi slabé formulace

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_{\mathcal{B}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\mathcal{B}} \left( \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial \mathbf{F}} \right) : \delta \mathbf{F} \, dV - \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV \right) - \\ &- \int_{\partial \mathcal{B}} (\mathbf{t}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X})) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \, dA. \end{aligned} \quad (2.9)$$

### 2.2.3 Prostorová diskretizace pomocí konečných prvků

Uvažujme admisibilní pole aproximačních funkcí  $\tilde{\mathbf{u}}$  v Lagrangeovských souřadnicích jako lineární kombinaci bázových funkcí  $\mathbf{N}_i(\mathbf{X})$  a vektoru posunů  $\underline{\mathbf{d}}_i^e(t)$  následovně

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \approx \tilde{\mathbf{u}}^h(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i(\mathbf{X}) \underline{\mathbf{d}}_i^e(t). \quad (2.10)$$

Dosadíme 2.10 do 2.9 a dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{e=1}^n \left( \int_{\mathcal{B}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}^h}{\partial \dot{\mathbf{u}}^h} \right) \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}}^h \, dV - \int_{\mathcal{B}} \left( \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}^h}{\partial \tilde{\mathbf{F}}^h} \right) : \delta \tilde{\mathbf{F}}^h \, dV - \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}^h}{\partial \tilde{\mathbf{u}}^h} \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}}^h \, dV \right) - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \sum_{e=1}^n \int_{\partial \mathcal{B}} (\mathbf{t}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X})) \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}}^h(\mathbf{X}, t) \, dA, \end{aligned} \quad (2.11)$$

kde

$$\bar{\mathcal{L}}(\tilde{\mathbf{u}}^h, \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^h, \tilde{\mathbf{F}}^h) = \frac{1}{2} \varrho_0 \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^h(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^h(\mathbf{X}, t) - \varrho_0 \Psi(\tilde{\mathbf{F}}^h) + \varrho_0 \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^h(\mathbf{X}, t).$$

Následně slabá forma daná rovnicí 2.11 vede na známý tvar

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{e=1}^n (\mathbf{M}^e \ddot{\underline{\mathbf{d}}}^e(t) + \mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext}) \cdot \delta \underline{\mathbf{d}}^e(t) \right) dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{M} \ddot{\underline{\mathbf{d}}} + \mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

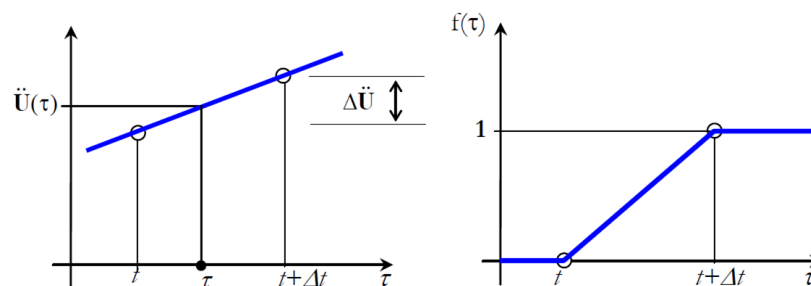
### 2.2.4 Numerické řešení pohybových rovnic

Po konečné prvkové aproximaci získáme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 2.řádu (pokud již nemáme takovéto rovnice přímo k dispozici - metoda tuhých konečných prvků RFE), lineárních či nelineárních, pro jejichž řešení můžeme využít některou z mnoha numerických metod, a to implicitního nebo explicitního charakteru.

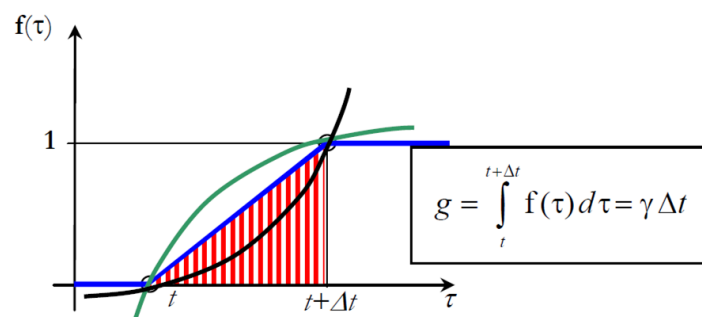
Nejznámější je rodina Newmarkových metod (implicitní, explicitní), Houboltova metoda, Wilson- $\theta$  atd. V případě, že řešíme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1.řádu, tak potom máme k dispozici jednokrokové i vícekrokové metody, implicitní i explicitní. Z nejpoužívanějších zmiňme rodinu metod Runghe-Kutta.

#### *Newmarkova metoda*

Jedná se o pravděpodobně nejpoužívanější rodinu numerických metod pro řešení semi-diskrétních pohybových rovnic. Je to jednokroková implicitní metoda, která je nepodmíněně stabilní v lineárně elastických problémech dynamiky. To se samozřejmě netýká její explicitní formy, která je podmíněně stabilní (centrálně diferenční metoda).



Obr. 2.3: Aproximace posunů.



Obr. 2.4: Plocha aproximační funkce akcelerace.

Implicitní charakter metody vychází s předpokladu závislosti akcelerace na aktuálním časovém kroku:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{t+\Delta t} &= \phi_1\left(\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}, \mathbf{u}^t, \dot{\mathbf{u}}^t, \ddot{\mathbf{u}}^t\right) \\ \dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} &= \phi_2\left(\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}, \mathbf{u}^t, \dot{\mathbf{u}}^t, \ddot{\mathbf{u}}^t\right).\end{aligned}$$

Hlavní rozdíl oproti klasické diferenční metodě je, že rychlost a posuny nevycházejí přímo z aproximace časových derivací, ale z integrace zrychlení mezi dvěma časovými hladinami, respektive jeho aproximace:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{t+\Delta t} &= \mathbf{u}^t + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^t + \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} ((t+\Delta t) - \tau) \cdot \left(\ddot{\mathbf{u}}^t + f(\tau) (\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{u}}^t)\right) d\tau \\ \dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{u}}^t + \int_t^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}^t d\tau + \int_t^{t+\Delta t} f(\tau) (\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{u}}^t) d\tau\end{aligned}$$

Po jistých úpravách dostaneme:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{t+\Delta t} &= \mathbf{u}^t + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}^t + \\ &+ \int_0^{\Delta t} \left( (\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{u}}^t) \cdot \int_0^\tau f(\tau) d\tau \right) d\tau \\ \dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{u}}^t + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}^t + (\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{u}}^t) \cdot \int_0^{\Delta t} f(\tau) d\tau,\end{aligned}$$

kde  $\int_0^\tau f(\tau) d\tau = \gamma \Delta t$  (jedná se o plochu lineární aproximační funkce mezi dvěma časovými hladinami  $t$  a  $t + \Delta t$ ) a  $\int_t^{t+\Delta t} (\int_0^\tau f(\tau) d\tau) d\tau = \beta \Delta t^2$ . Parametry  $\gamma$  a  $\beta$  řídí stabilitu metody. Výsledný tvar je následující:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}^n + \beta \Delta t^2 (\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} - \ddot{\mathbf{u}}^n) \\ \dot{\mathbf{u}}^{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}^n + \gamma \Delta t (\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} - \ddot{\mathbf{u}}^n).\end{aligned}$$

Jako startující proceduru je nutné vyčíslit akceleraci v čase  $t = 0$ :

$$\ddot{\mathbf{u}}^0 = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{f}^0 - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}^0 - \mathbf{K} \mathbf{u}^0).$$

Metoda je nepodmíněně stabilní pro  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  a  $\beta \geq \frac{1}{4} (0.5 + \gamma)^2$ . Nastavením parametrů  $\gamma$  a  $\beta$  dostaneme další metody:

1.  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 0$ : Dostaneme metodu centrálních diferencí. Metoda je explicitní, podmínečně stabilní.



2.  $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$ : Dostaneme metodu průměrné akcelerace. Metoda je implicitní, nepodmíněně stabilní.
3.  $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6}$ : Dostaneme metodu lineární akcelerace. Metoda je implicitní, podmíněně stabilní.
4.  $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{12}$ : Dostaneme metodu Fox-Goodwin. Metoda je implicitní, podmíněně stabilní.

### Metoda Houboltova

Jedná se o metodu, která byla jako první použita ve výpočtech v dynamice konstrukcí. Je založená na aproximaci kubickým polynomem procházejícím přes 4 časové hladiny. Tvar aproximačních formulí je následující:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}^{n+1} &= \frac{1}{6\Delta t} (11\mathbf{u}^{n+1} - 18\mathbf{u}^n + 9\mathbf{u}^{n-1} - 2\mathbf{u}^{n-2}) \\ \ddot{\mathbf{u}}^{n+1} &= \frac{1}{\Delta t^2} (2\mathbf{u}^{n+1} - 5\mathbf{u}^n + 4\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}^{n-2})\end{aligned}$$

Dosazením do pohybových rovnic s tlumením získáme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1}.$$

Počáteční podmínky nám jsou schopny posunů v čase  $t = 0$ , netýká se to předchozích dvou časových úrovní, a to  $t^{n-1}$  a  $t^{n-2}$ . Díky svému charakteru metoda vyžaduje speciální startovací proceduru pro získání posunů v předchozích dvou časových úrovních.

### Metoda Wilson- $\theta$

Jedná se o rozšíření metody průměrné akcelerace, v které je lineární variace akcelerace v časovém intervalu  $(t_n, t_n + \theta\Delta t)$  předpokládána následovně:

$$\ddot{\mathbf{u}}^{n+\tau} = \ddot{\mathbf{u}}^n + \frac{\tau}{\theta\Delta t} (\ddot{\mathbf{u}}^{n+\theta} - \ddot{\mathbf{u}}^n),$$

kde  $\theta$  je volný parametr použitý ke kontrole stability a přesnosti algoritmu.

Metoda je dána následujícím předpisem:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} &= \frac{6}{\theta^2\Delta t^2} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) - \frac{6}{\theta}\dot{\mathbf{u}}^n - 2\ddot{\mathbf{u}}^n \\ \dot{\mathbf{u}}^{n+1} &= \frac{3}{\theta\Delta t} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) - 2\dot{\mathbf{u}}^n - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{\mathbf{u}}^n,\end{aligned}$$

kde index  $n + 1 = t_n + \theta\Delta t$ . Dosazením do pohybových rovnic s tlumením získáme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1},$$

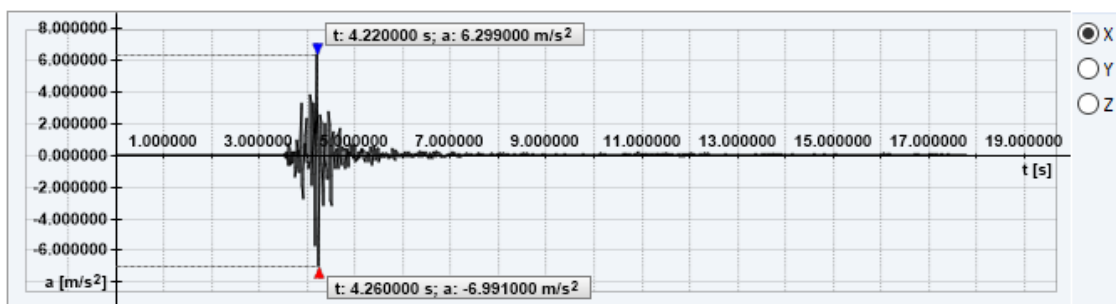
kde  $\mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \theta(\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n)$ .

Jedná se o implicitní metodu. Oproti Houboltově metodě nevyžaduje žádnou startující proceduru, požaduje pouze vyčíslení zrychlení v čase  $t = 0$ . Je nepodmínečně stabilní pouze pro  $\theta = 1.37$ . Má dobré numerické disipační vlastnosti kontrolované parametrem  $\theta$ .

## 3 NUMERICKÁ ANALÝZA BUDOVY ZATÍŽENÉ SEISMICKÝMI ÚČINKY

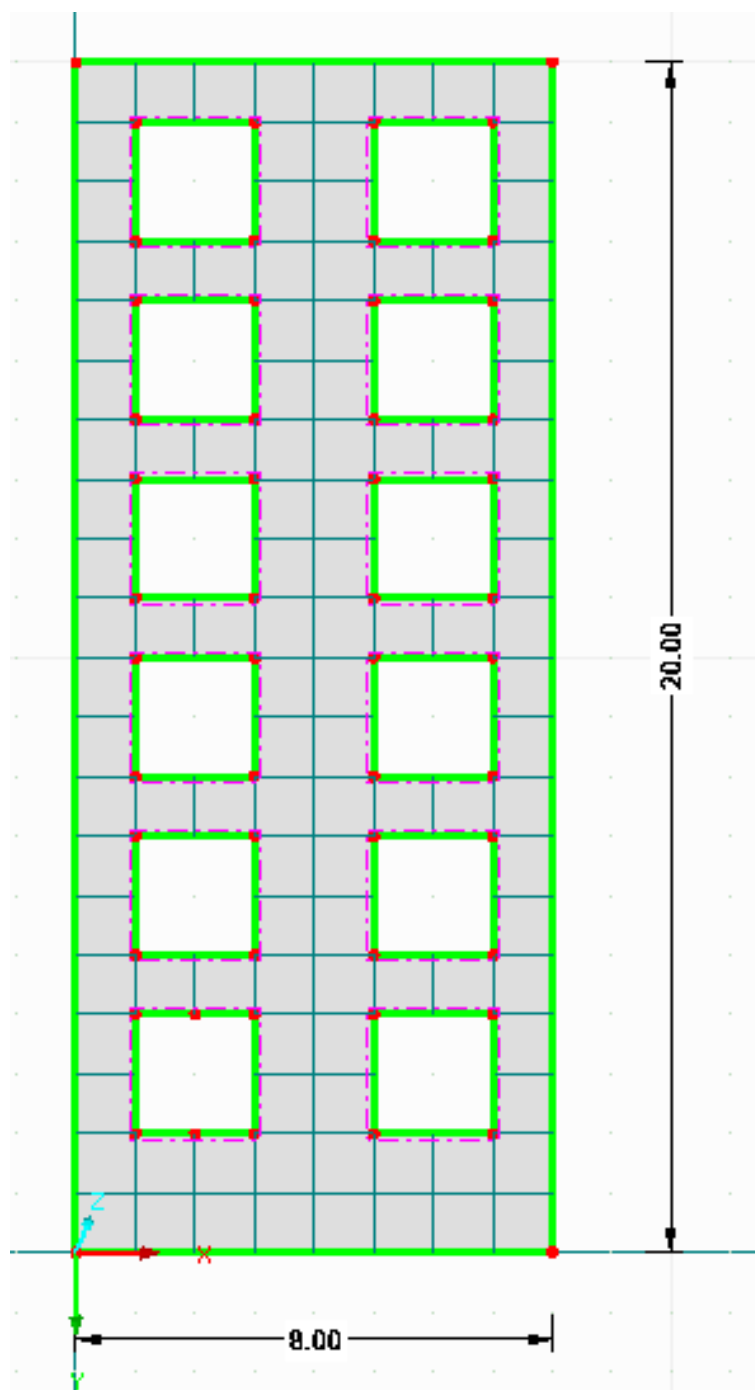
### 3.1 Řešené příklady

Jako příklad pro srovnání explicitní a implicitní Newmarkovy metody pro seismickou analýzu budov byla zvolena stěna šestipodlažní budovy oslabené okenními otvory zatížená seismickým buzením ve směru rovnoběžném se stěnou. Materiál stěny byl zvolen tak, aby při vybraném akcelerogramu buzení došlo k jeho zplastizování, nebo porušení. Pro výpočet byl z italské databáze zvolen akcelerogram Umbro-Marchigiana, stanice Colfiorita-Casermette ze dne 16.10.1997, který má zrychlení v rozmezí  $-6,991\text{m/s}^{-2}$  a  $+6,299\text{m/s}^{-2}$ :



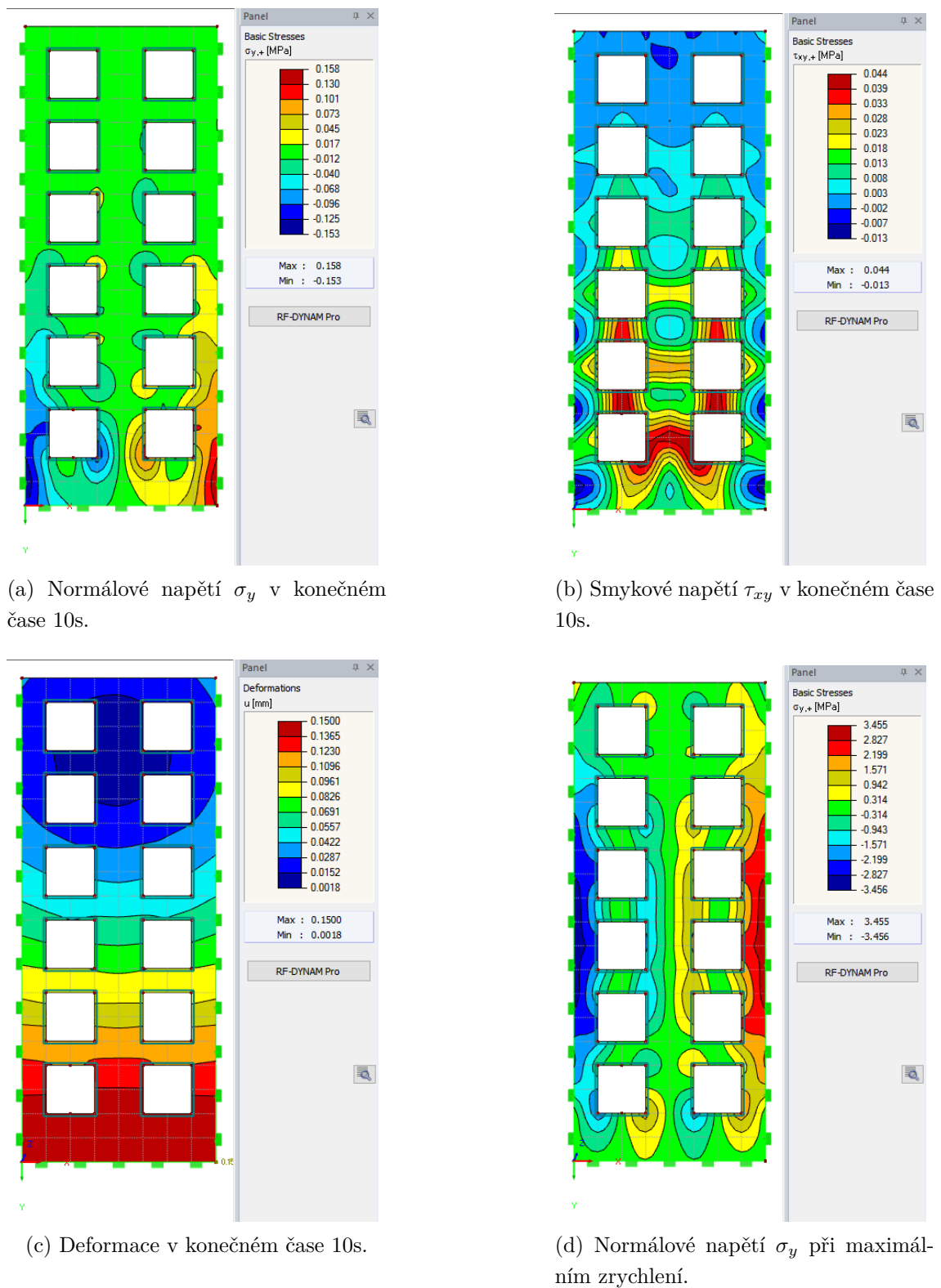
Obr. 3.1: akcelerogram Umbro-Marchigiana, stanice Colfiorita-Casermette

Kompletní protokol se vstupními daty je uveden v příloze. Pro výše uvedený akcelerogram bylo provedeno celkem šest variant řešení. Byly řešeny následující materiálové modely: lineárně elastický, elastoplastický dle Drucker-Pragera a elastický s poškozením dle Mazarse. Pro každý z materiálových modelů bylo provedeno numerické řešení explicitní a Newmarkovou implicitní metodou pro seismické buzení akcelerogramem Umbro-Marchigiana v trvání 10 s. Časový krok byl v základní sérii řešení zvolen 0.0001 s. Následuje geometrie řešené stěny a ukázky výsledků řešení pro jednotlivé varianty:

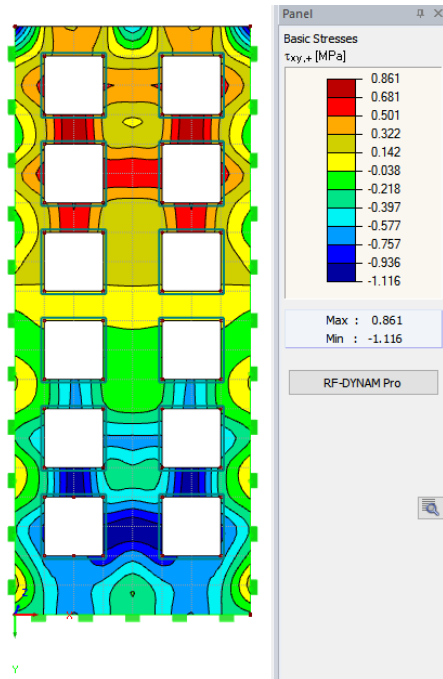
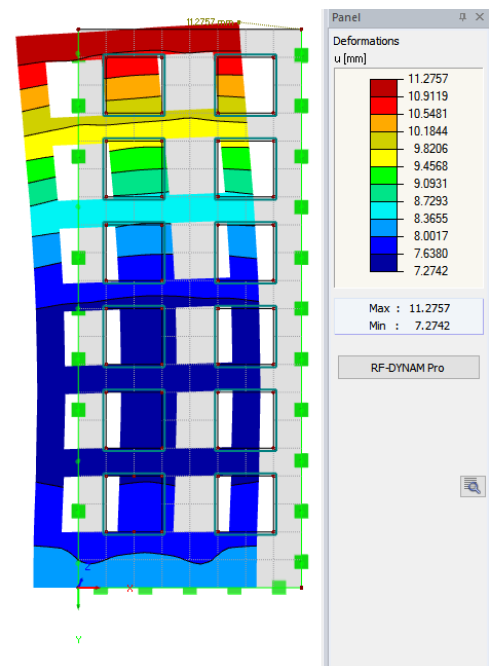


Obr. 3.2: Schéma řešené budovy

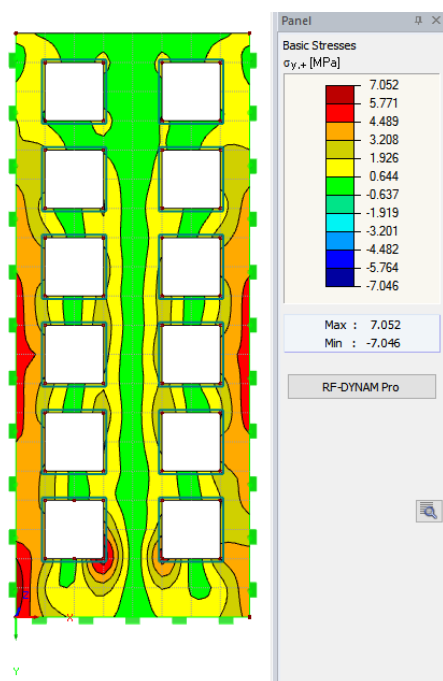
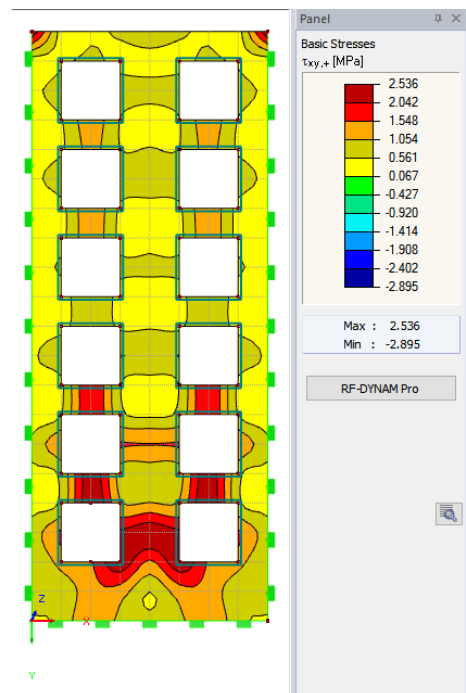
## Explicitní metoda pro lineárně elastický model



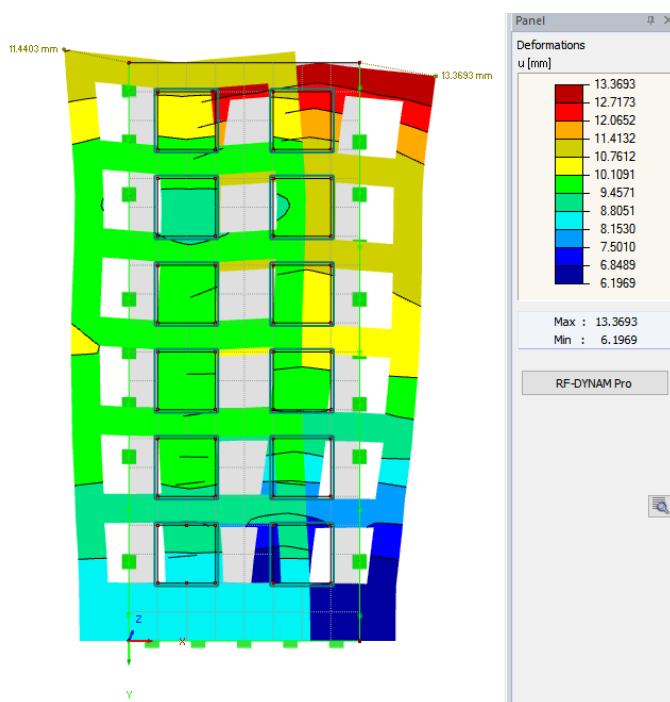
Obr. 3.3: Lineární elastický model I

(a) Smykové napětí  $\tau_{xy}$  při maximálním zrychlení.

(b) Deformace při maximálním zrychlení.

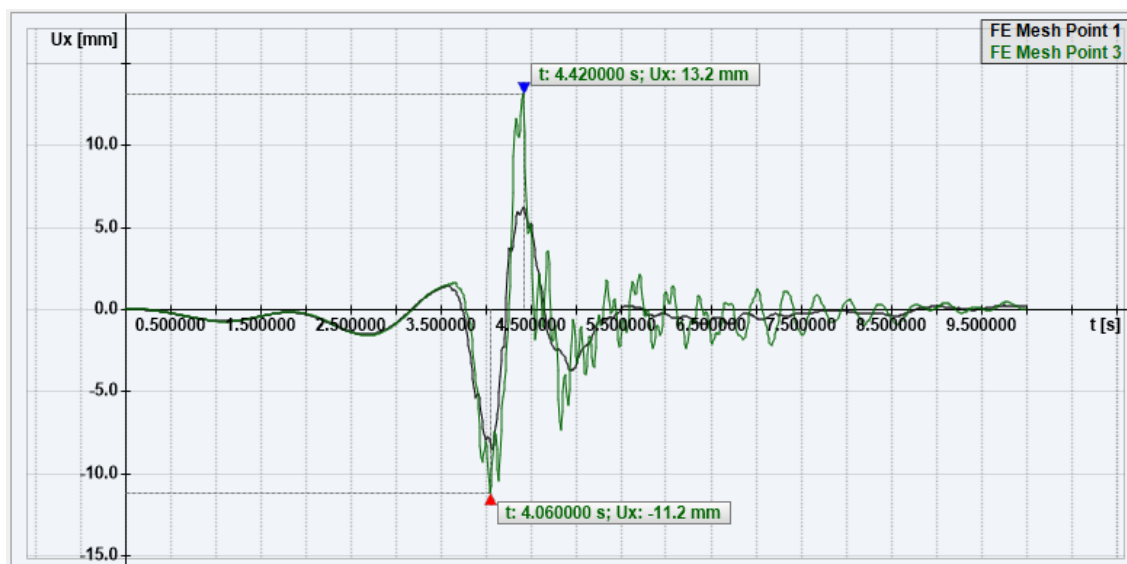
(c) Dynamická obálka normálového napětí  $\sigma_y$ .(d) Dynamická obálka smykového napětí  $\tau_{xy}$ .

Obr. 3.4: Lineární elastický model II



(a) Dynamická obálka posunu.

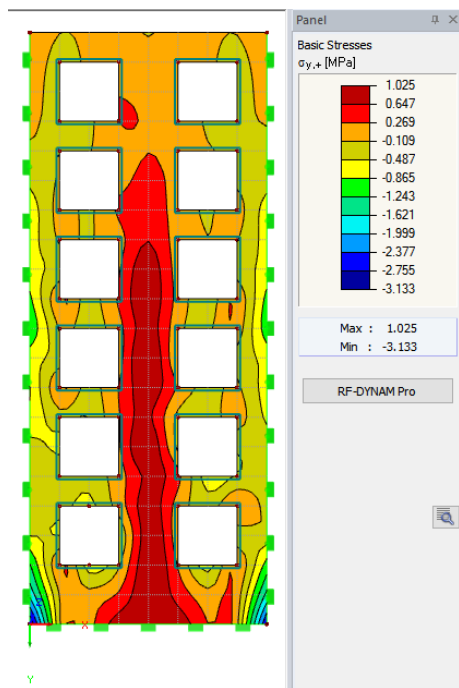
Obr. 3.5: Lineární elastický model III



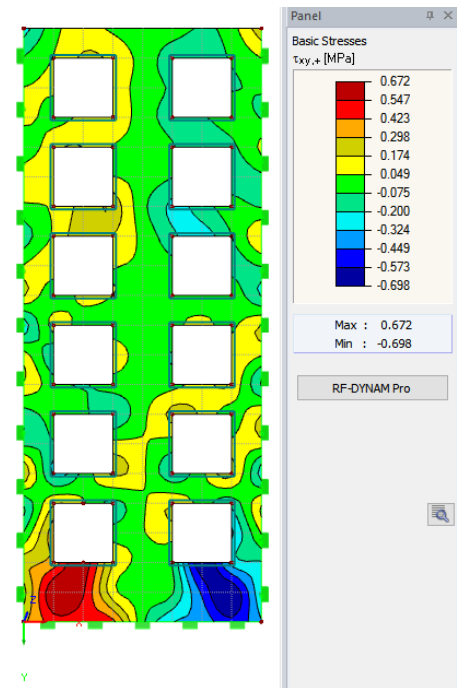
(a) Dynamická obálka pro deformaci v čase.

Obr. 3.6: Lineární elastický model IV

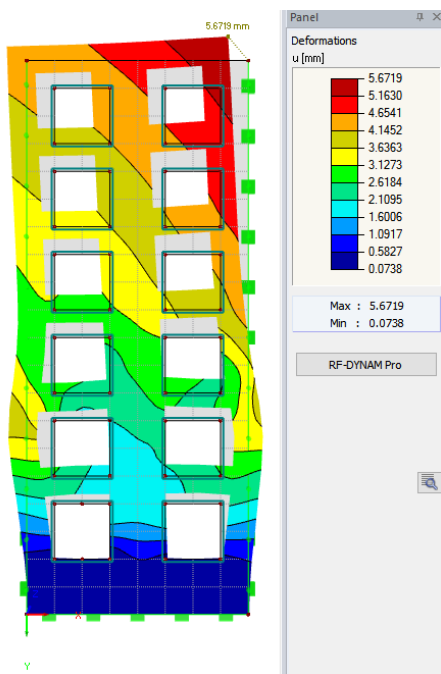
## Explicitní metoda pro model plasticity dle Drucker-Pragera



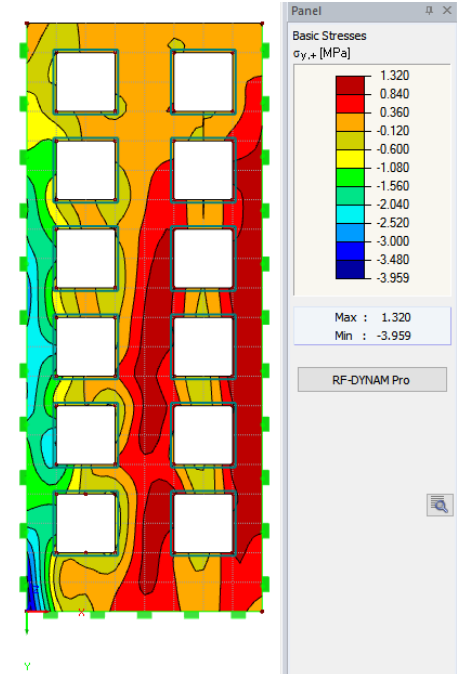
(a) Normálové napětí  $\sigma_y$  v konečném čase 10s.



(b) Smykové napětí  $\tau_{xy}$  v konečném čase 10s.



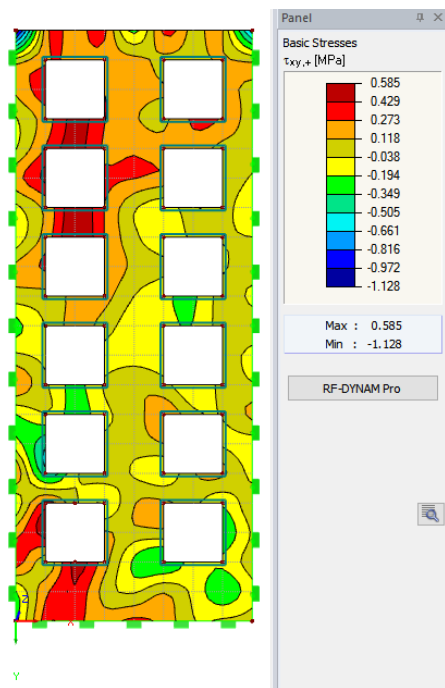
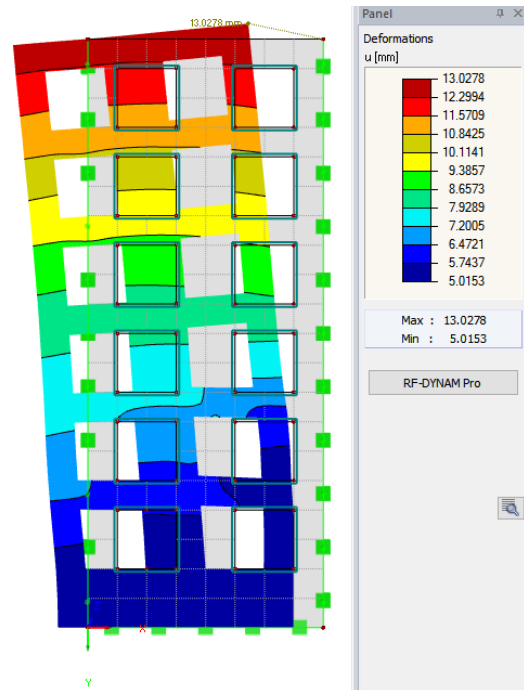
(c) Deformace v konečném čase 10s.



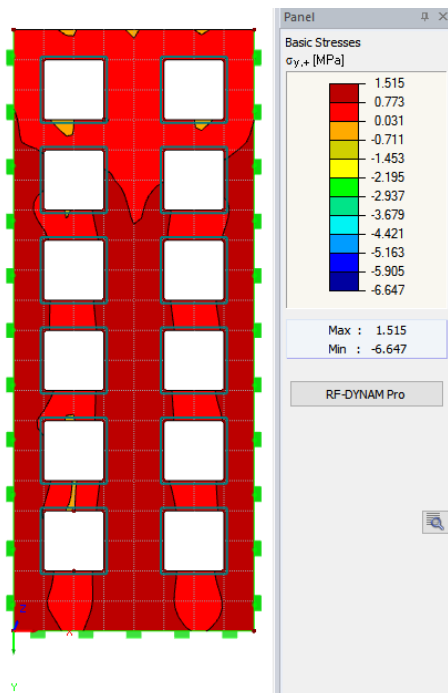
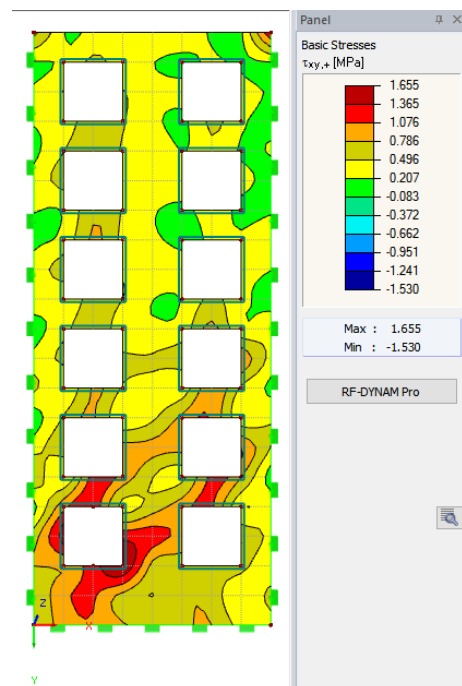
(d) Normálové napětí  $\sigma_y$  při maximálním zrychlení.

Obr. 3.7: Model plasticity dle Drucker-Pragera I

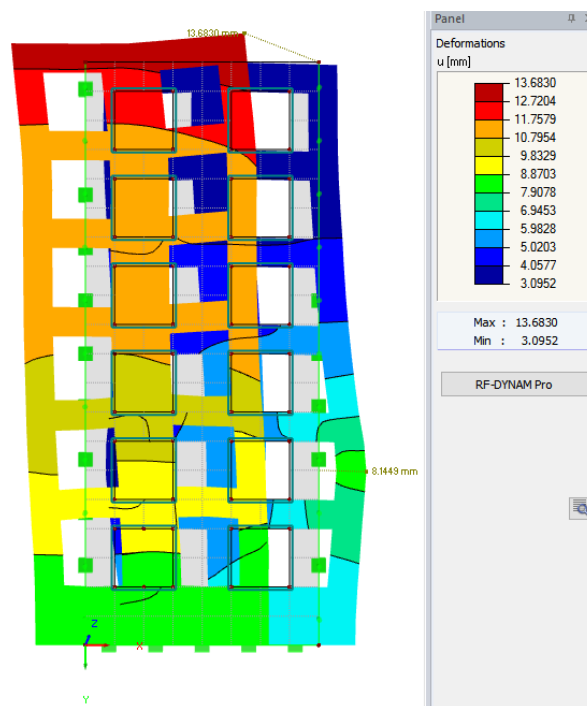


(a) Smykové napětí  $\tau_{xy}$  při maximálním zrychlení.

(b) Deformace při maximálním zrychlení.

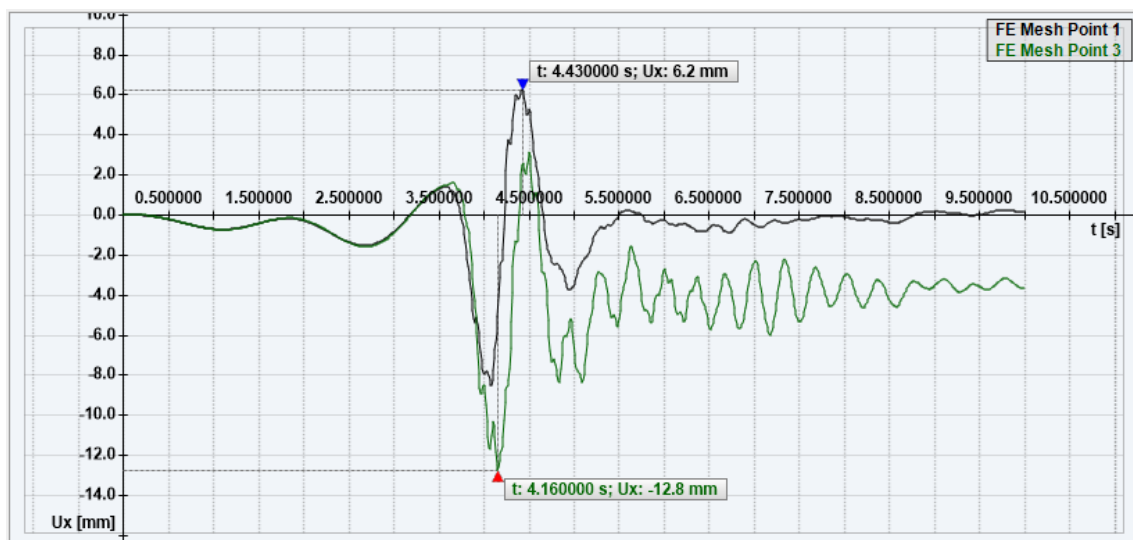
(c) Dynamická obálka normálového napětí  $\sigma_y$ .(d) Dynamická obálka smykového napětí  $\tau_{xy}$ .

Obr. 3.8: Model plasticity dle Drucker-Pragera II



(a) Dynamická obálka posunu.

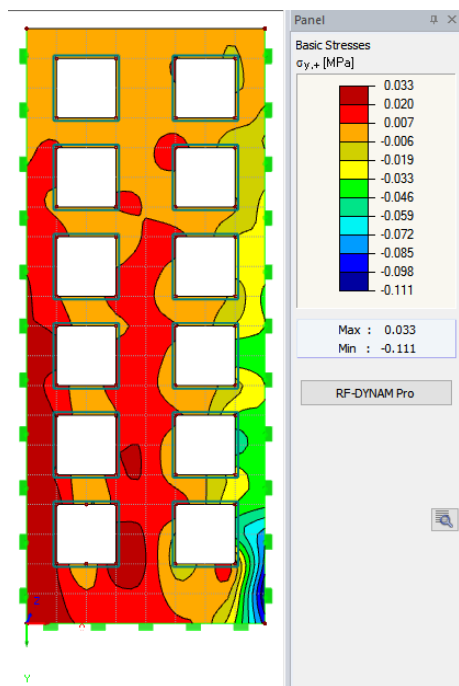
Obr. 3.9: Model plasticity dle Drucker-Pragera III



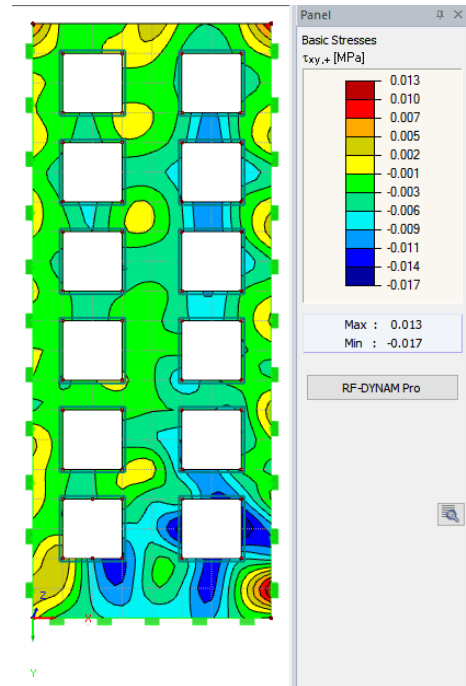
(a) Dynamická obálka pro deformaci v čase.

Obr. 3.10: Model plasticity dle Drucker-Pragera IV

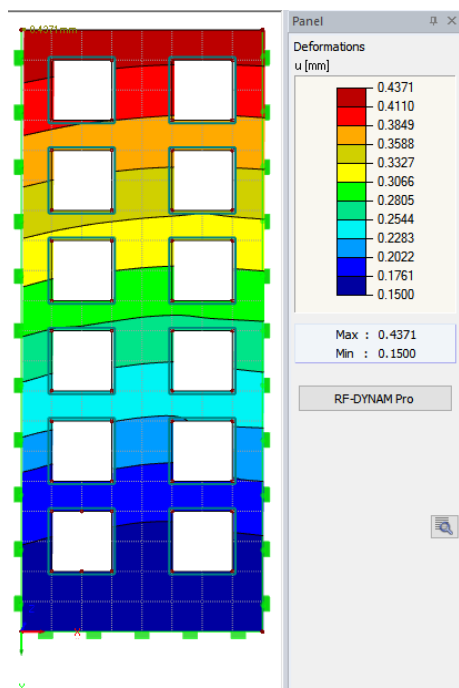
## Explicitní metoda pro model poškození dle Mazarse



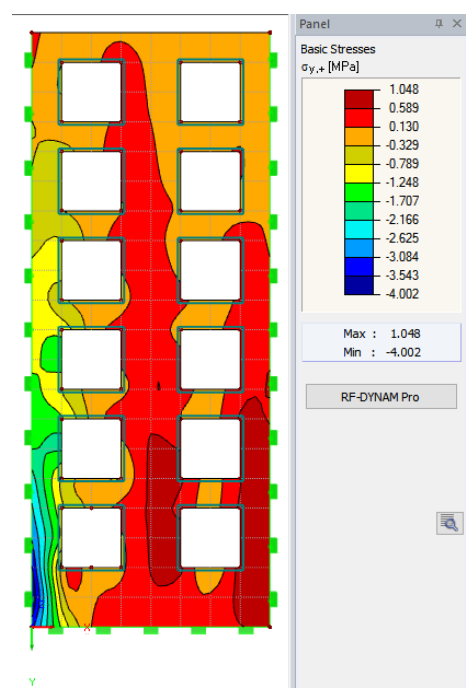
(a) Normálové napětí  $\sigma_y$  v konečném čase 10s.



(b) Smykové napětí  $\tau_{xy}$  v konečném čase 10s.

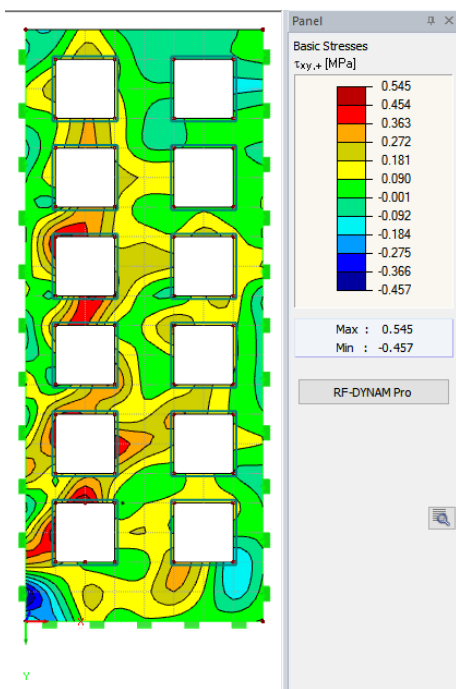
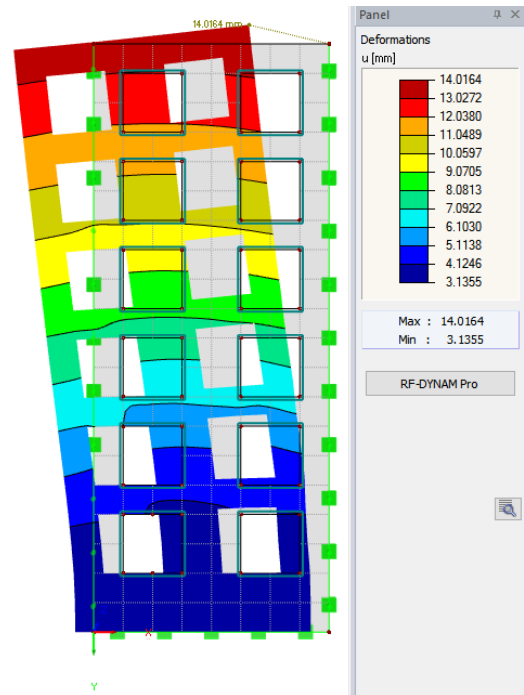


(c) Deformace v konečném čase 10s.

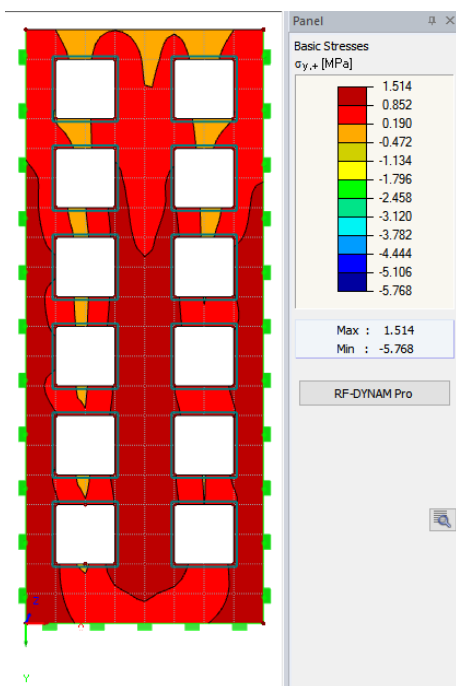
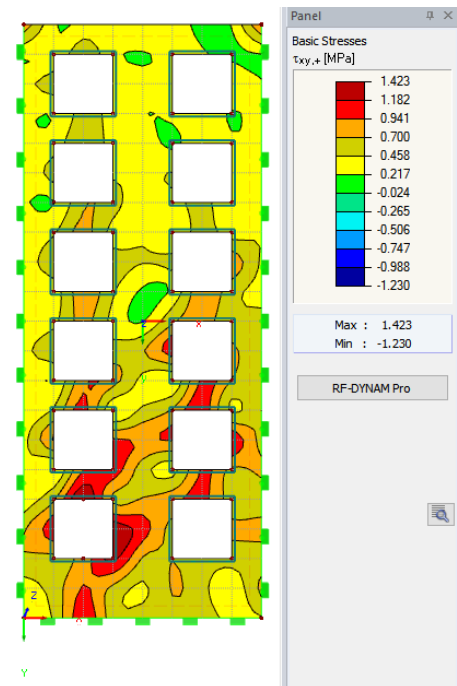


(d) Normálové napětí  $\sigma_y$  při maximálním zrychlení.

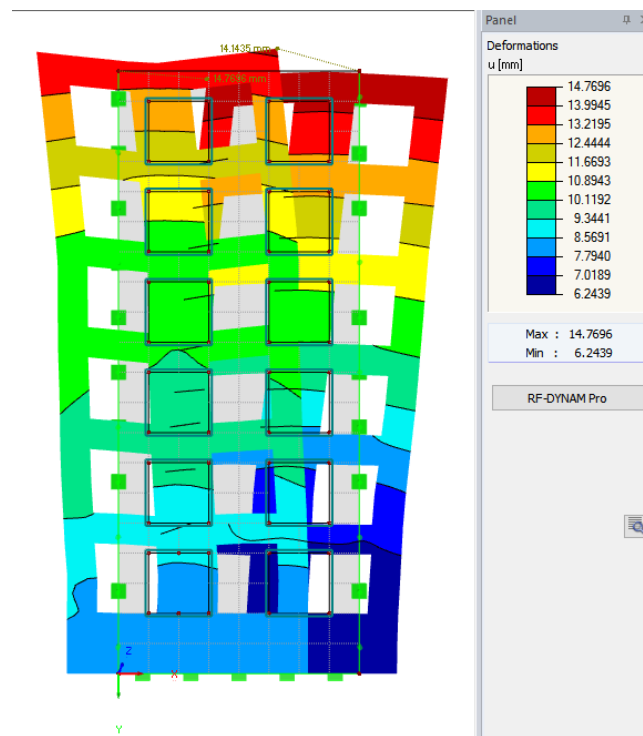
Obr. 3.11: Model poškození dle Mazarse I

(a) Smykové napětí  $\tau_{xy}$  při maximálním zrychlení.

(b) Deformace při maximálním zrychlení.

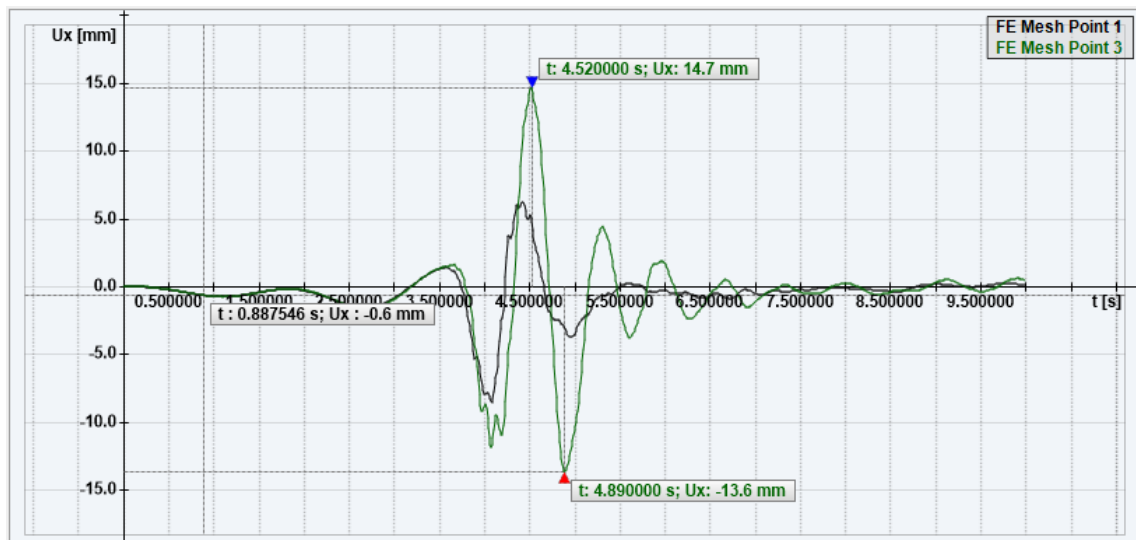
(c) Dynamická obálka normálového napětí  $\sigma_y$ .(d) Dynamická obálka smykového napětí  $\tau_{xy}$ .

Obr. 3.12: Model poškození dle Mazarse II



(a) Dynamická obálka posunu.

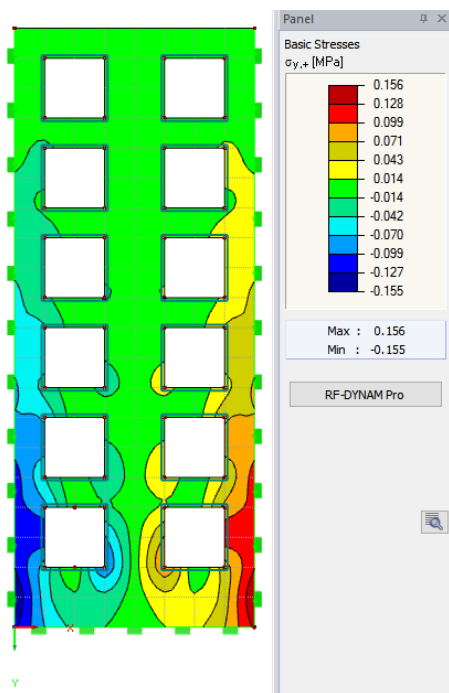
Obr. 3.13: Model poškození dle Mazarse III



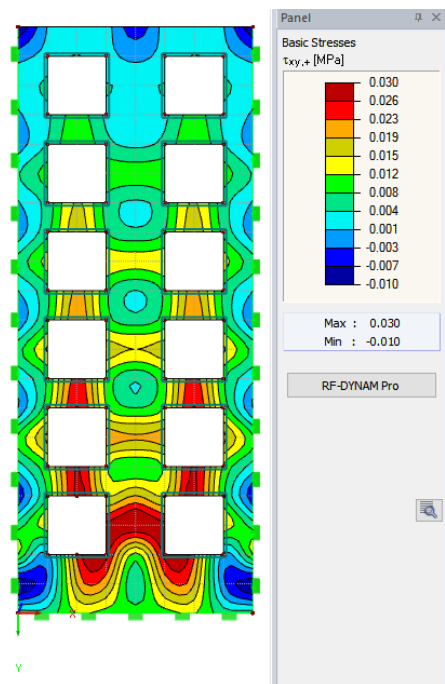
(a) Dynamická obálka pro deformaci v čase.

Obr. 3.14: Model poškození dle Mazarse IV

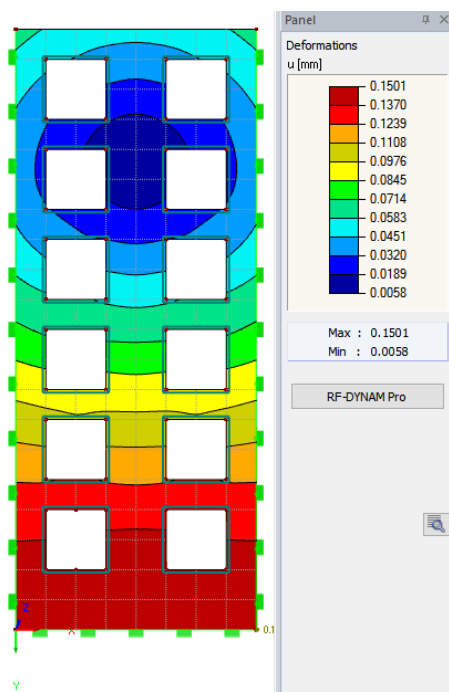
## Implicitní metoda pro lineárně elastický model



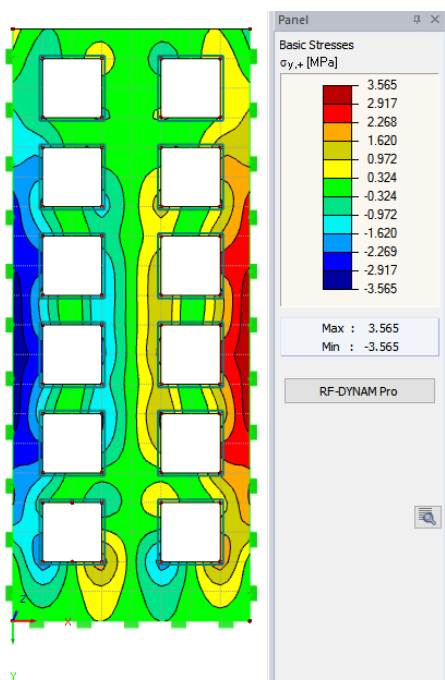
(a) Normálové napětí  $\sigma_y$  v konečném čase 10s.



(b) Smykové napětí  $\tau_{xy}$  v konečném čase 10s.

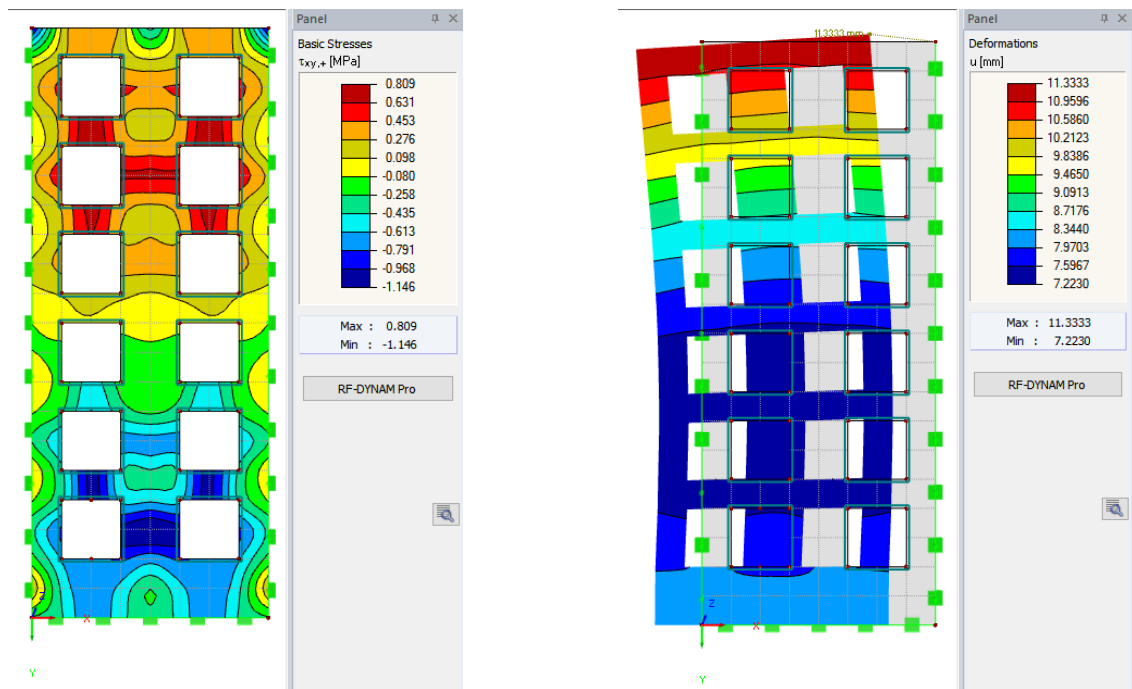


(c) Deformace v konečném čase 10s.



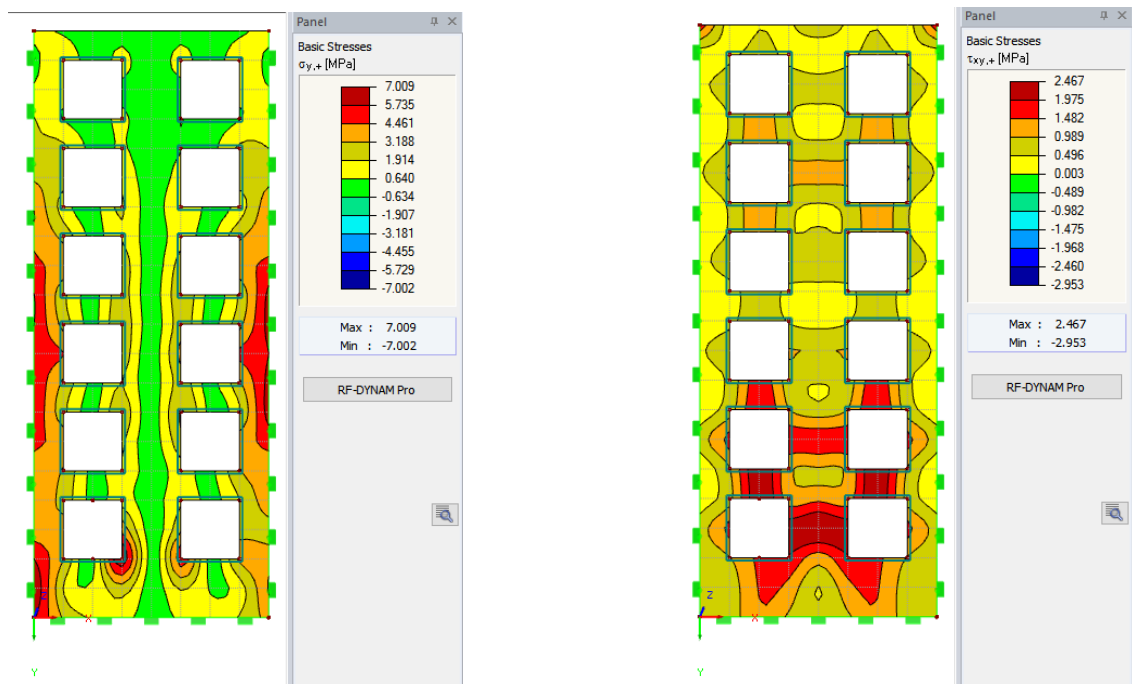
(d) Normálové napětí  $\sigma_y$  při maximálním zrychlení.

Obr. 3.15: Lineární elastický model I



(a) Smykové napětí  $\tau_{xy}$  při maximálním zrychlení.

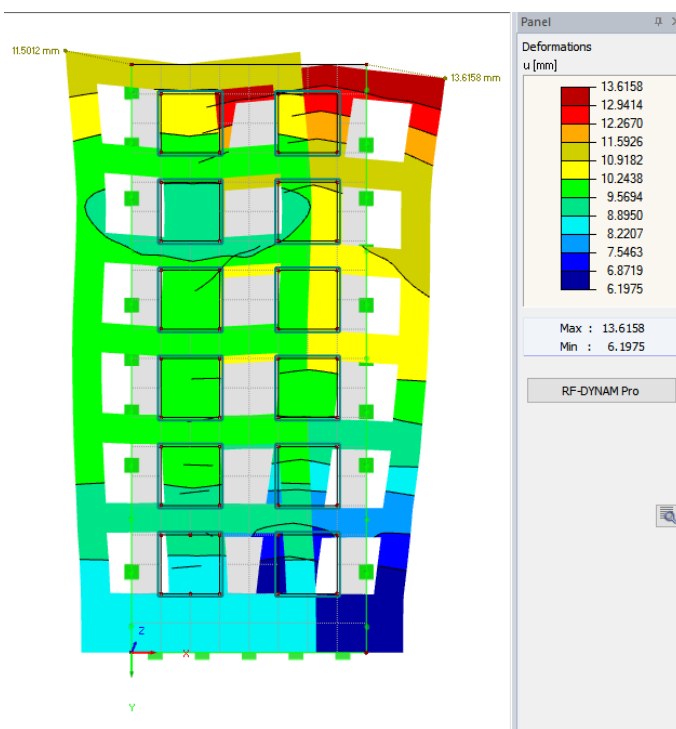
(b) Deformace při maximálním zrychlení.



(c) Dynamická obálka normálového napětí  $\sigma_y$ .

(d) Dynamická obálka smykového napětí  $\tau_{xy}$ .

Obr. 3.16: Lineární elastický model II



(a) Dynamická obálka posunu.

Obr. 3.17: Lineární elastický model III

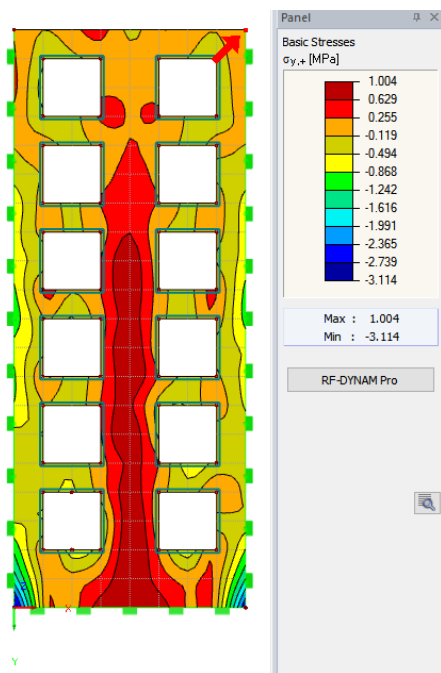
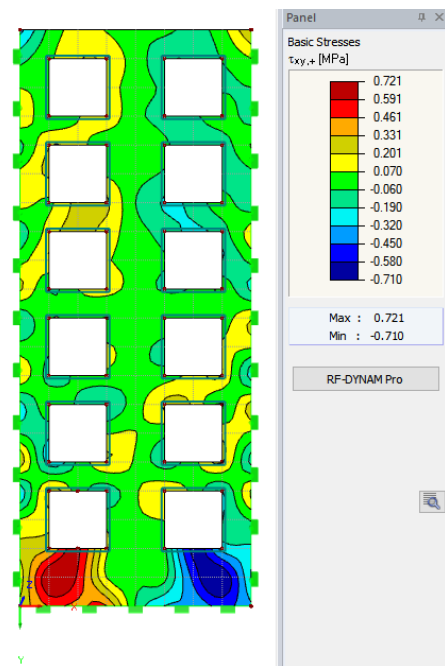
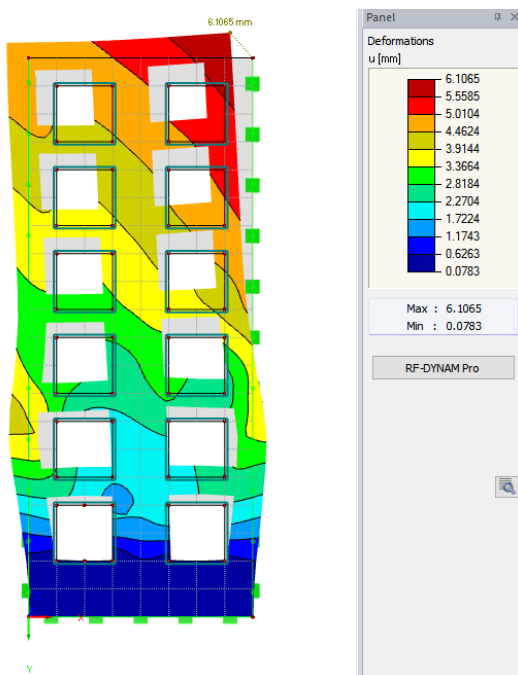


(a) Dynamická obálka pro deformaci v čase.

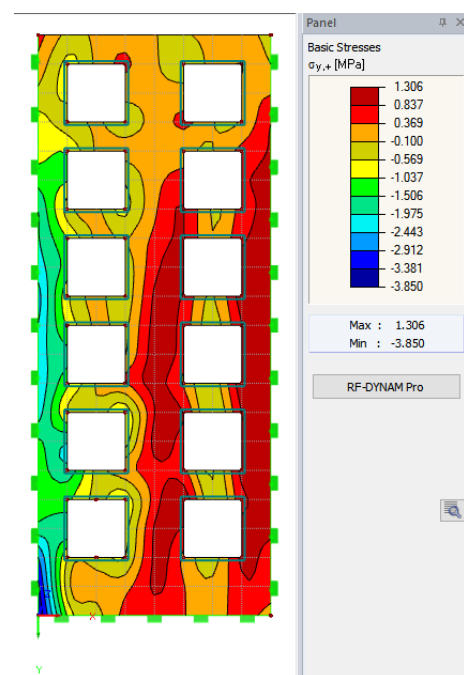
Obr. 3.18: Lineární elastický model IV



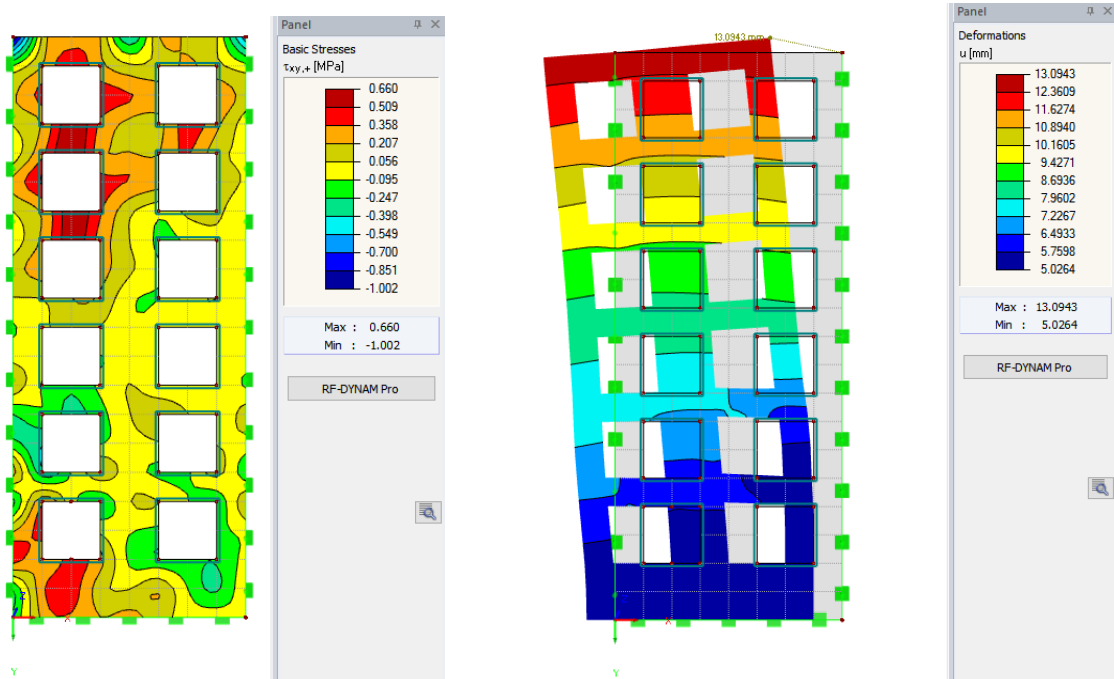
## Implicitní metoda pro model plasticity dle Drucker-Pragera

(a) Normálové napětí  $\sigma_y$  v konečném čase 10s.(b) Smykové napětí  $\tau_{xy}$  v konečném čase 10s.

(c) Deformace v konečném čase 10s.

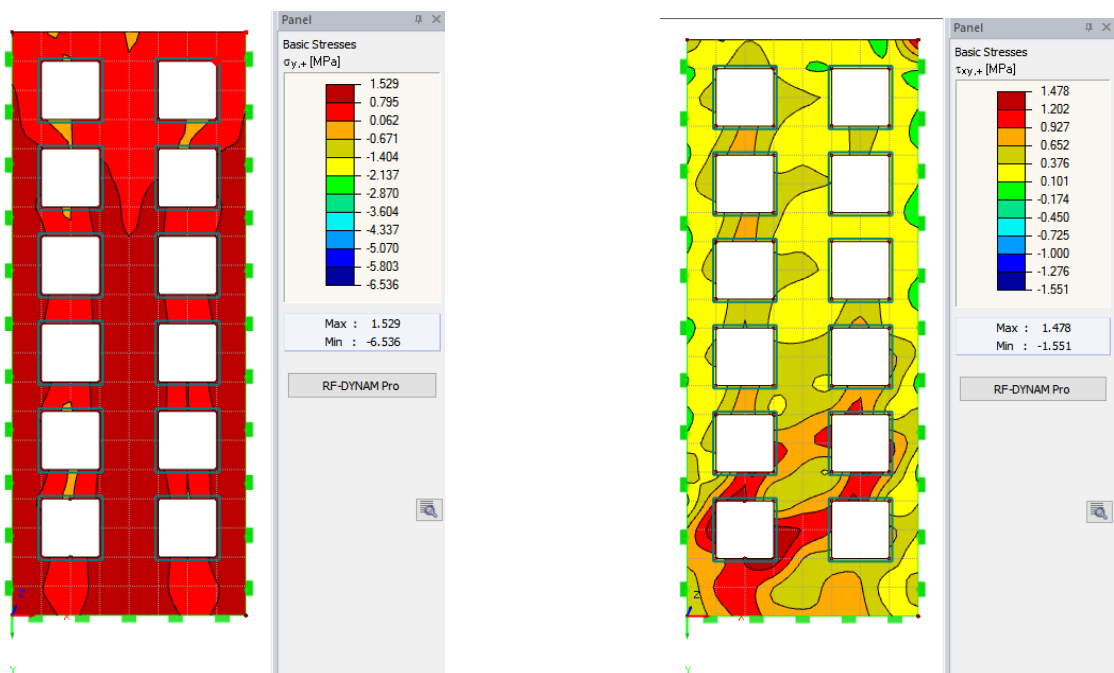
(d) Normálové napětí  $\sigma_y$  při maximálním zrychlení.

Obr. 3.19: Model plasticity dle Drucker-Pragera I



(a) Smykové napětí  $\tau_{xy}$  při maximálním zrychlení.

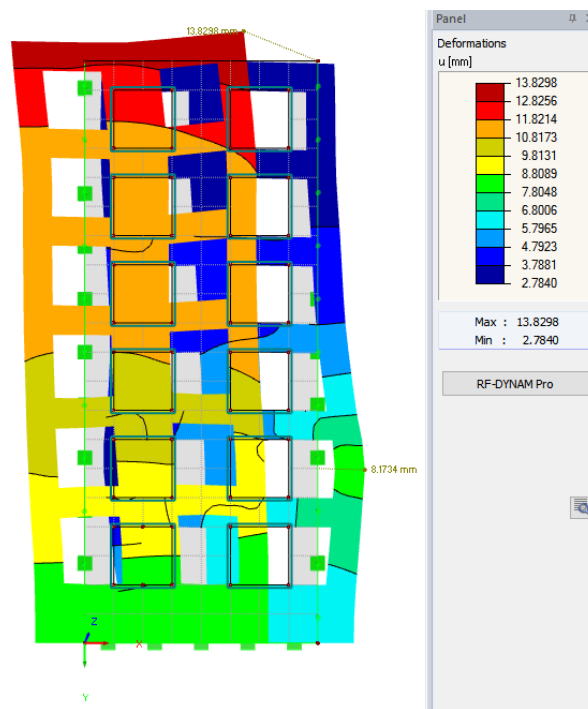
(b) Deformace při maximálním zrychlení.



(c) Dynamická obálka normálového napětí  $\sigma_y$ .

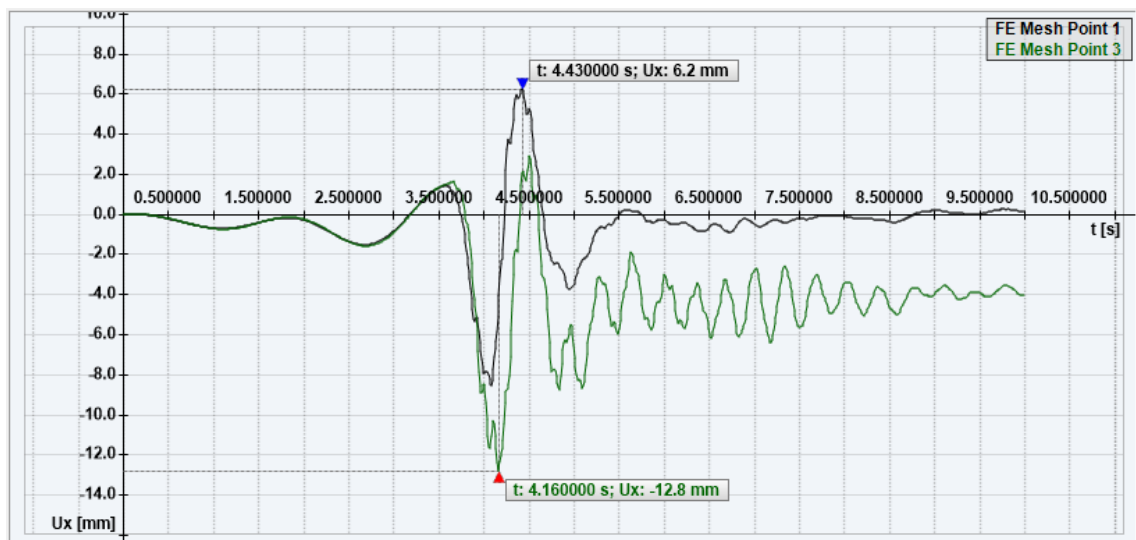
(d) Dynamická obálka smykového napětí  $\tau_{xy}$ .

Obr. 3.20: Model plasticity dle Drucker-Pragera II



(a) Dynamická obálka posunu.

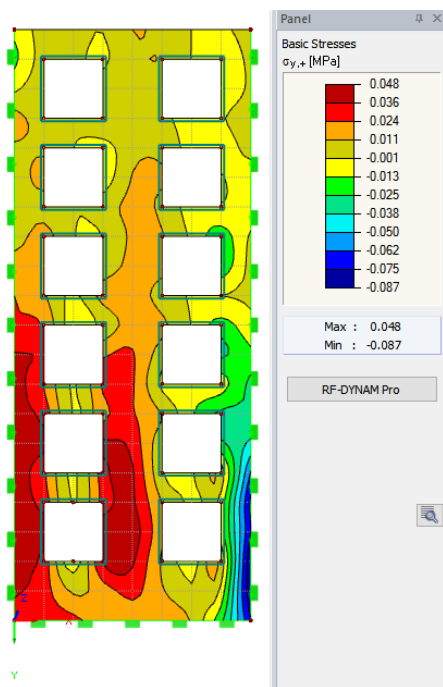
Obr. 3.21: Model plasticity dle Drucker-Pragera III



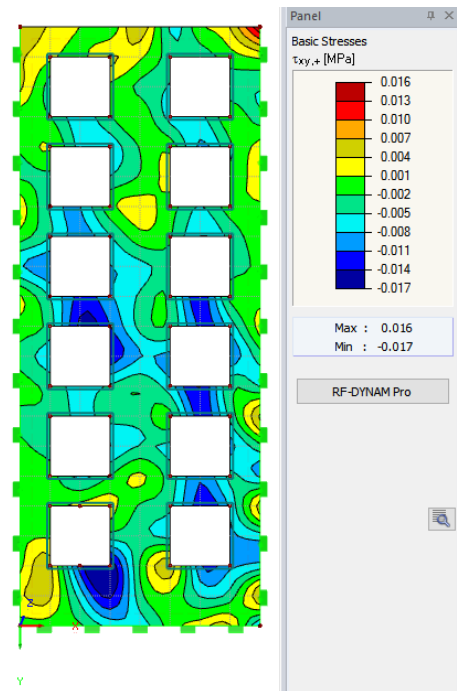
(a) Dynamická obálka pro deformaci v čase.

Obr. 3.22: Model plasticity dle Drucker-Pragera IV

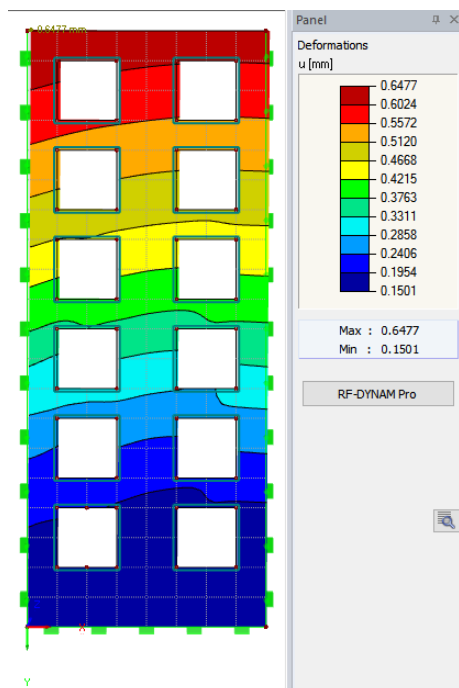
## Implicitní metoda pro model poškození dle Mazarse



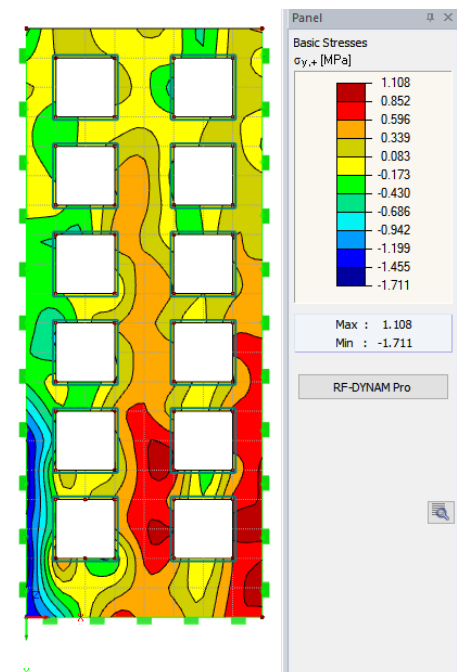
(a) Normálové napětí  $\sigma_y$  v konečném čase 10s.



(b) Smykové napětí  $\tau_{xy}$  v konečném čase 10s.

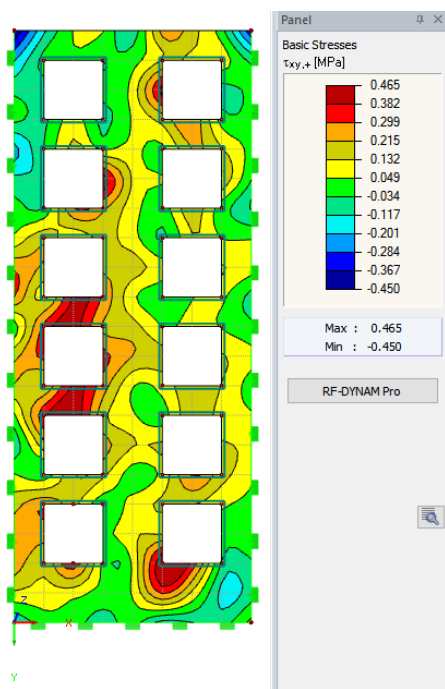
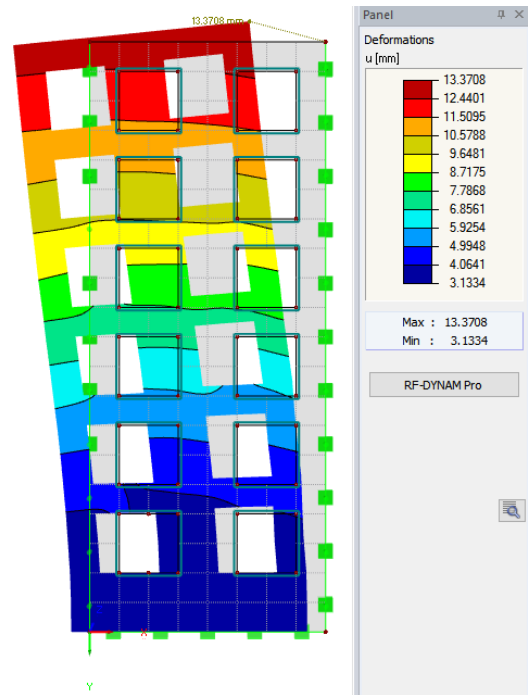


(c) Deformace v konečném čase 10s.

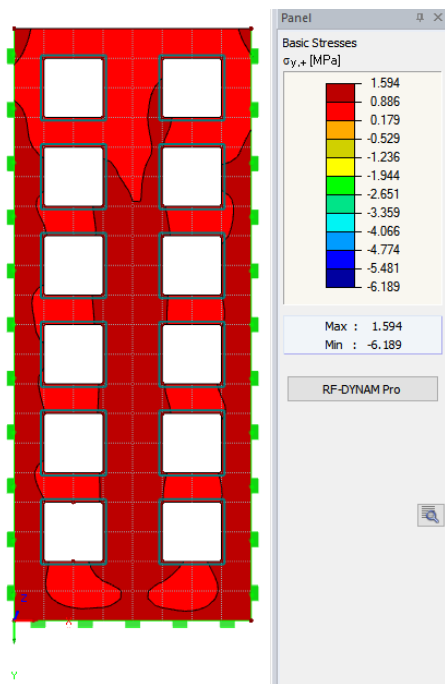
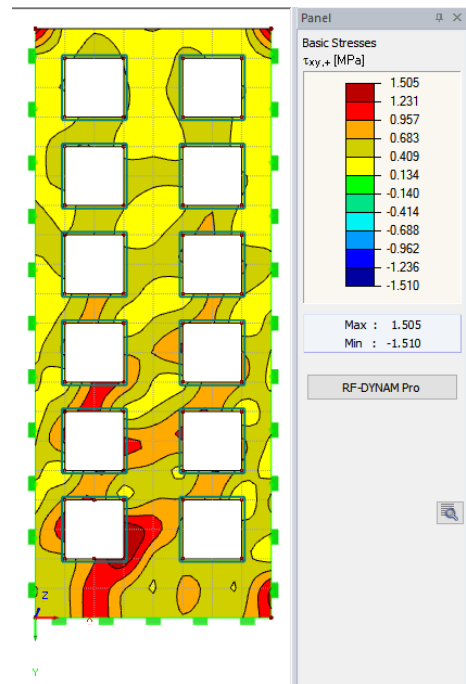


(d) Normálové napětí  $\sigma_y$  při maximálním zrychlení.

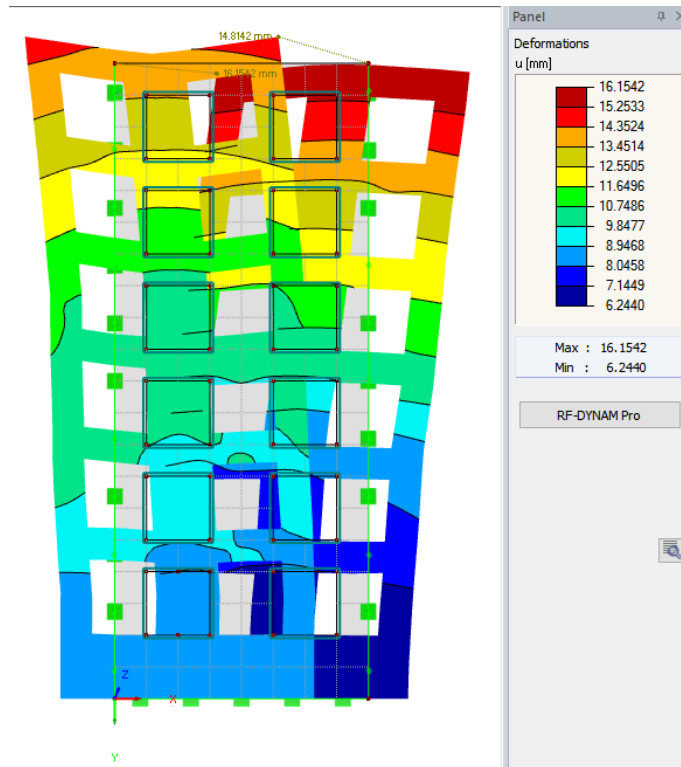
Obr. 3.23: Model poškození dle Mazarse I

(a) Smykové napětí  $\tau_{xy}$  při maximálním zrychlení.

(b) Deformace při maximálním zrychlení.

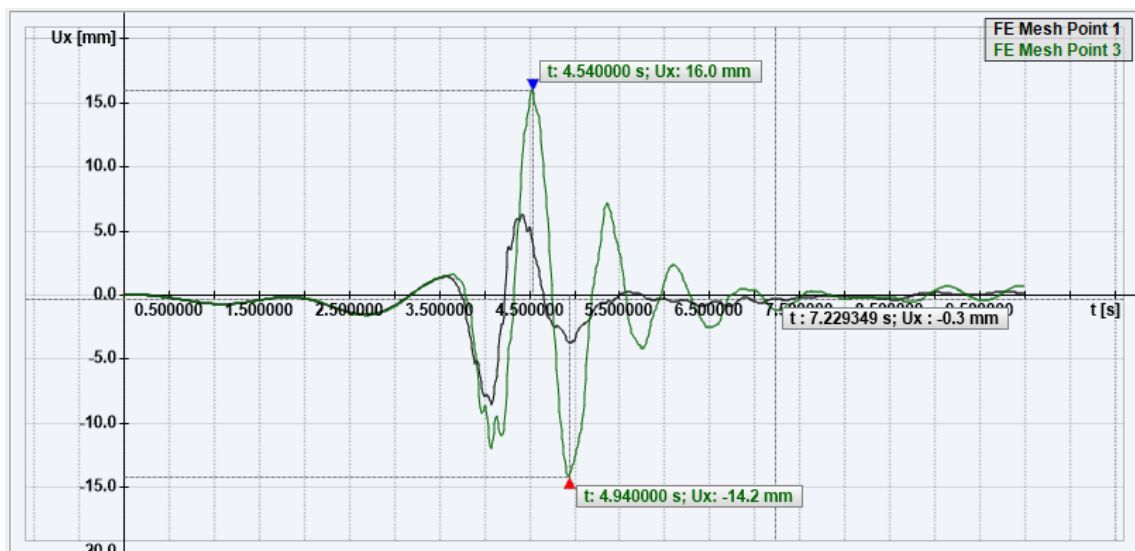
(c) Dynamická obálka normálového napětí  $\sigma_y$ .(d) Dynamická obálka smykového napětí  $\tau_{xy}$ .

Obr. 3.24: Model poškození dle Mazarse II



(a) Dynamická obálka posunu.

Obr. 3.25: Model poškození dle Mazarse III



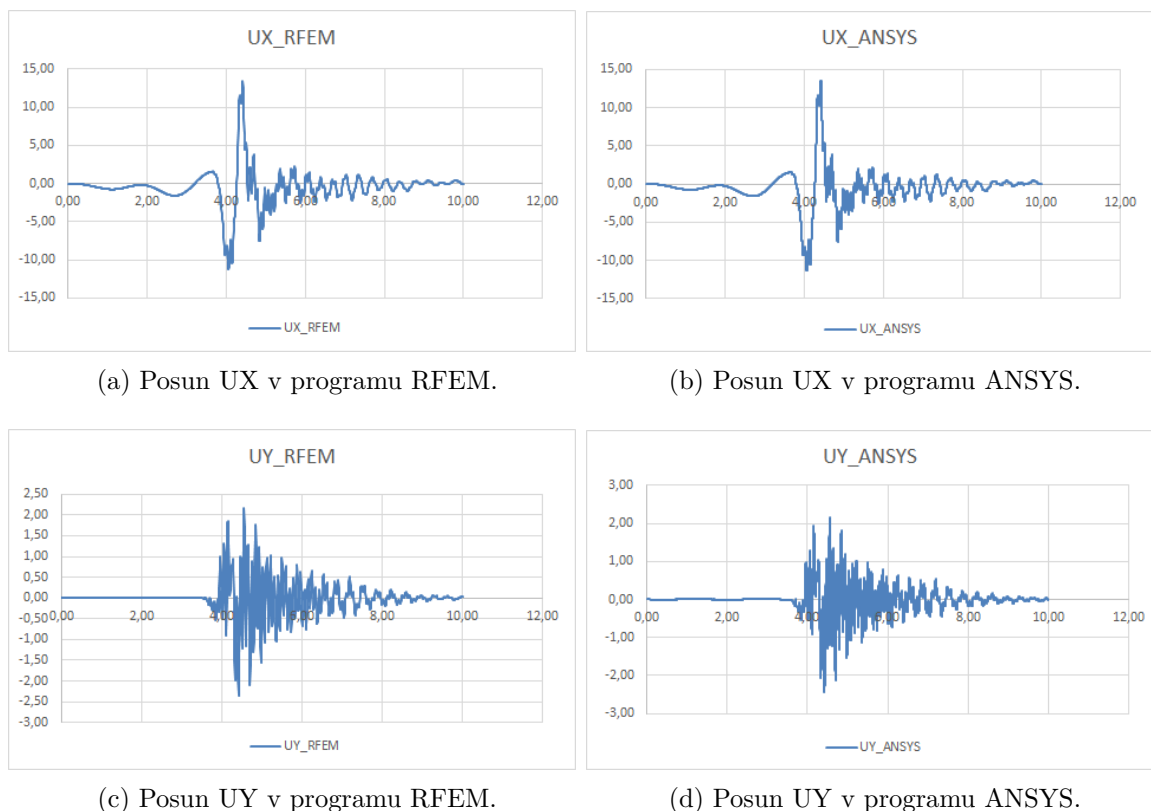
(a) Dynamická obálka pro deformaci v čase.

Obr. 3.26: Model poškození dle Mazarse IV

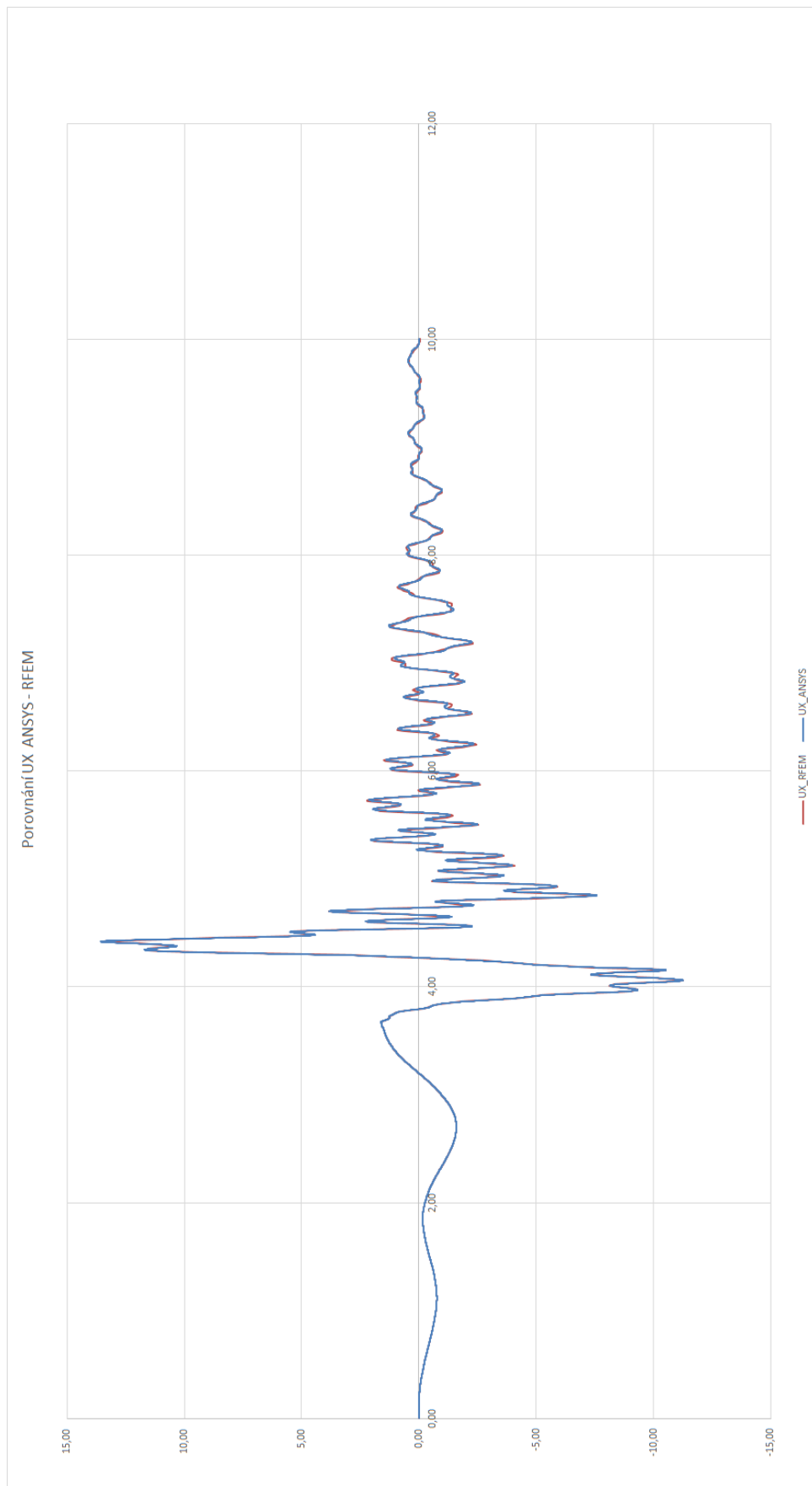
## 3.2 Porovnání výsledků programů RFEM a ANSYS

Vzhledem k tomu, že modul DYNAM-PRO systému RFEM je nový a jeho vývoj probíhal souběžně s diplomovou prací, bylo nutno provést porovnání některých nelineárně dynamických výpočtů se všeobecně respektovaným programem jako je ANSYS. Byla porovnána varianta řešení konstrukce pro lineárně elastický materiál při zatížení stejným akcelerogramem jako u ostatních variant řešení a to pro implicitní i explicitní metodu.

Na následujících grafech je porovnání časového průběhu složek posunutí ve vodorovném a svislém směru v horním rohu stěny v programu Excel pro implicitní metodu



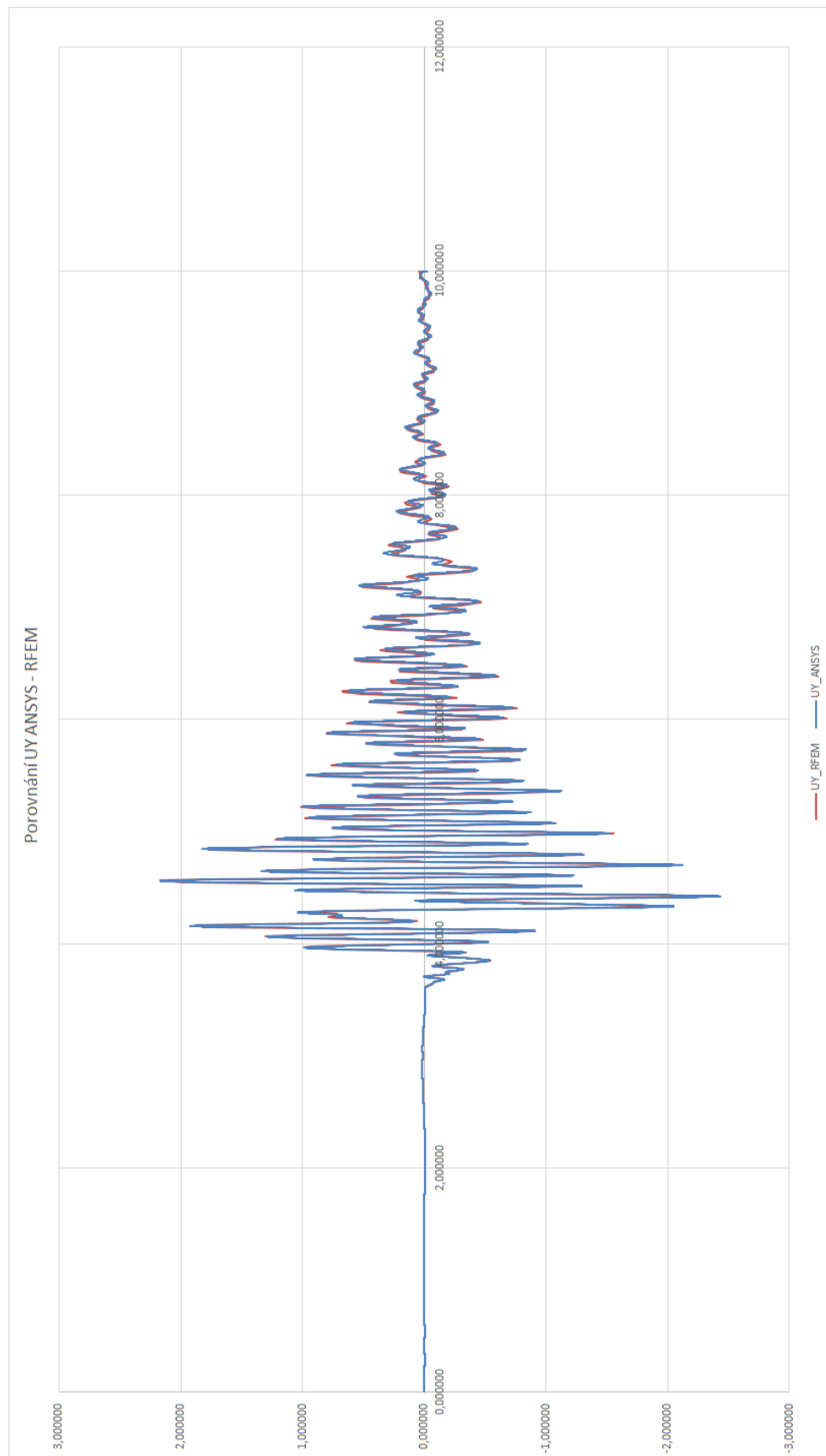
Obr. 3.27: Porovnání posunů implicitní metodou



(a) Porovnání posunů UX.

Obr. 3.28: Porovnání UX





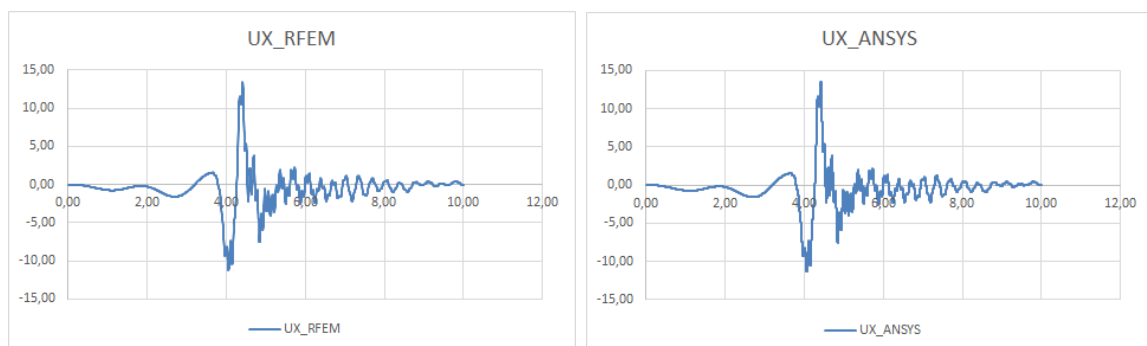
(a) Porovnání posunů UY.

Obr. 3.29: Porovnání UY

Z porovnání výsledků programů RFEM a ANSYS plyne, že pro lineárně elastický materiál bylo u obou programů pro implicitní metodu dosaženo prakticky naprosto stejných výsledků. Nejlépe je to vidět u spojených grafů kde červený graf překresleným druhým, modrým grafem jen téměř nezatelně proniká v pravé části diagramu.

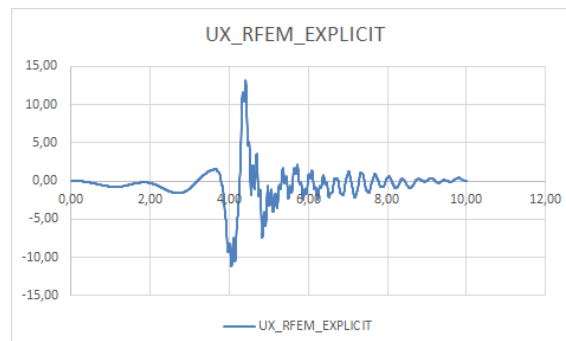
Na následujících grafech je porovnání časového průběhu složek posunutí ve vodorovném a svislém směru v horním rohu stěny z programu Excel pro explicitní i implicitní metodu z programu RFEM a implicitní metodu z programu ANSYS.

Srovnání explicitní metody s programem ANSYS nebylo možné, protože výpočet programem ANSYS pro stejné dělení při použití standardních prvků nebyl stabilní. Dobré výsledky byly v ANSYSU dosaženy až při podstatně jemnějším dělení.



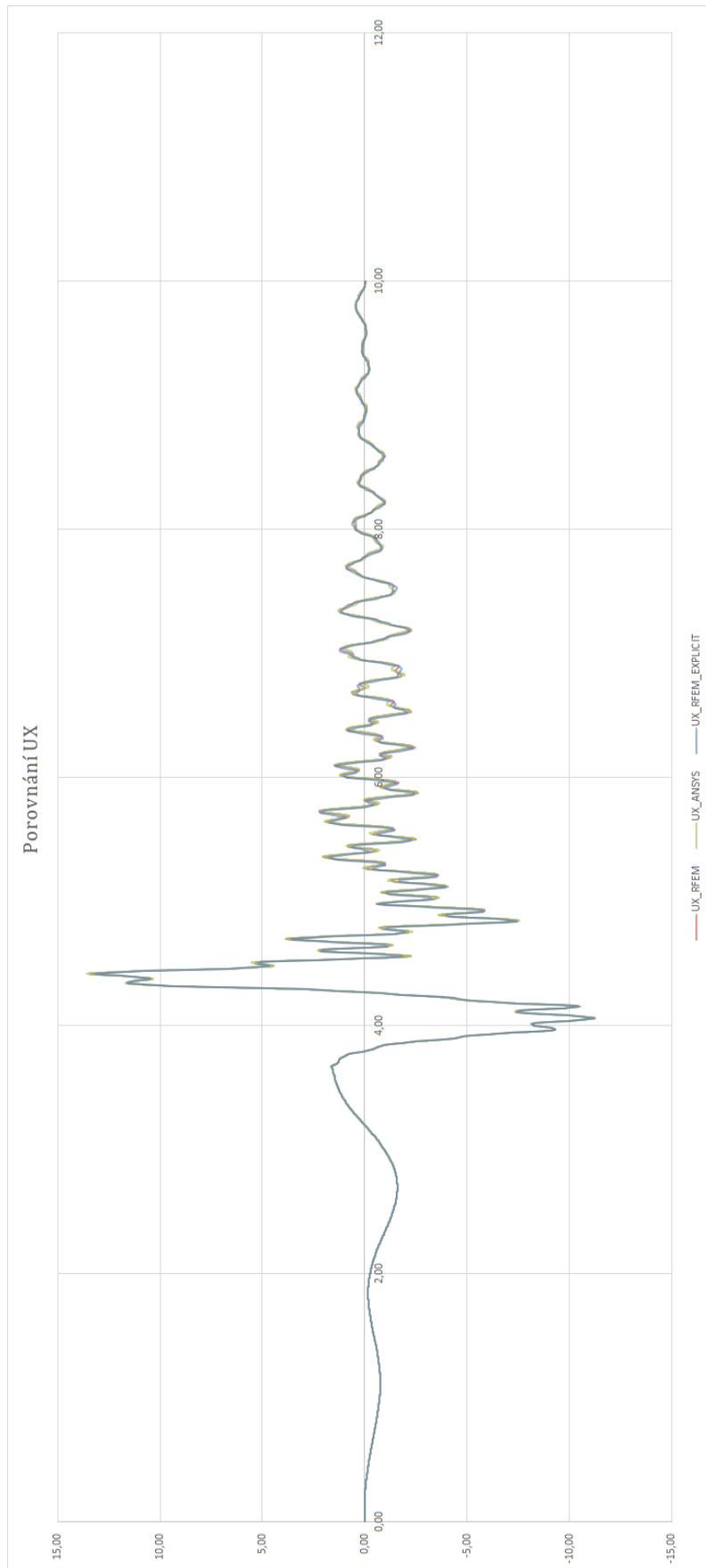
(a) Posun UX v programu RFEM.

(b) Posun UX v programu ANSYS.



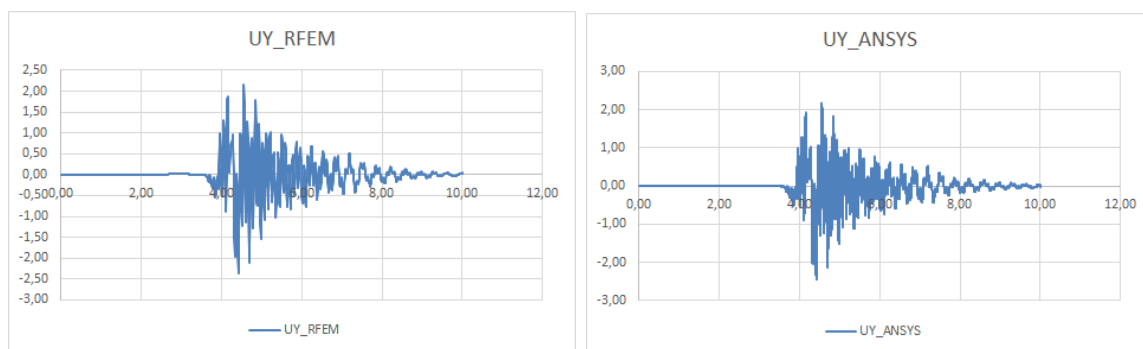
(c) Posun UX v programu RFEM pro explicitní metodu

Obr. 3.30: Porovnání UX



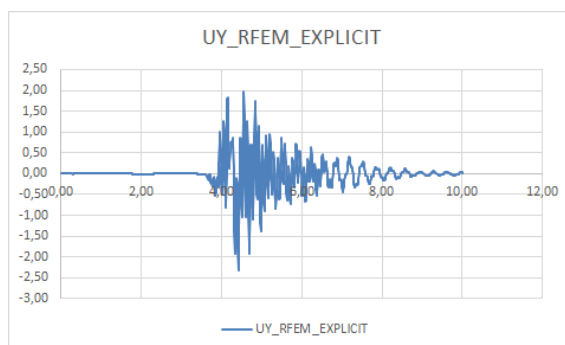
(a) Porovnání posunů UX.

Obr. 3.31: Porovnání UX



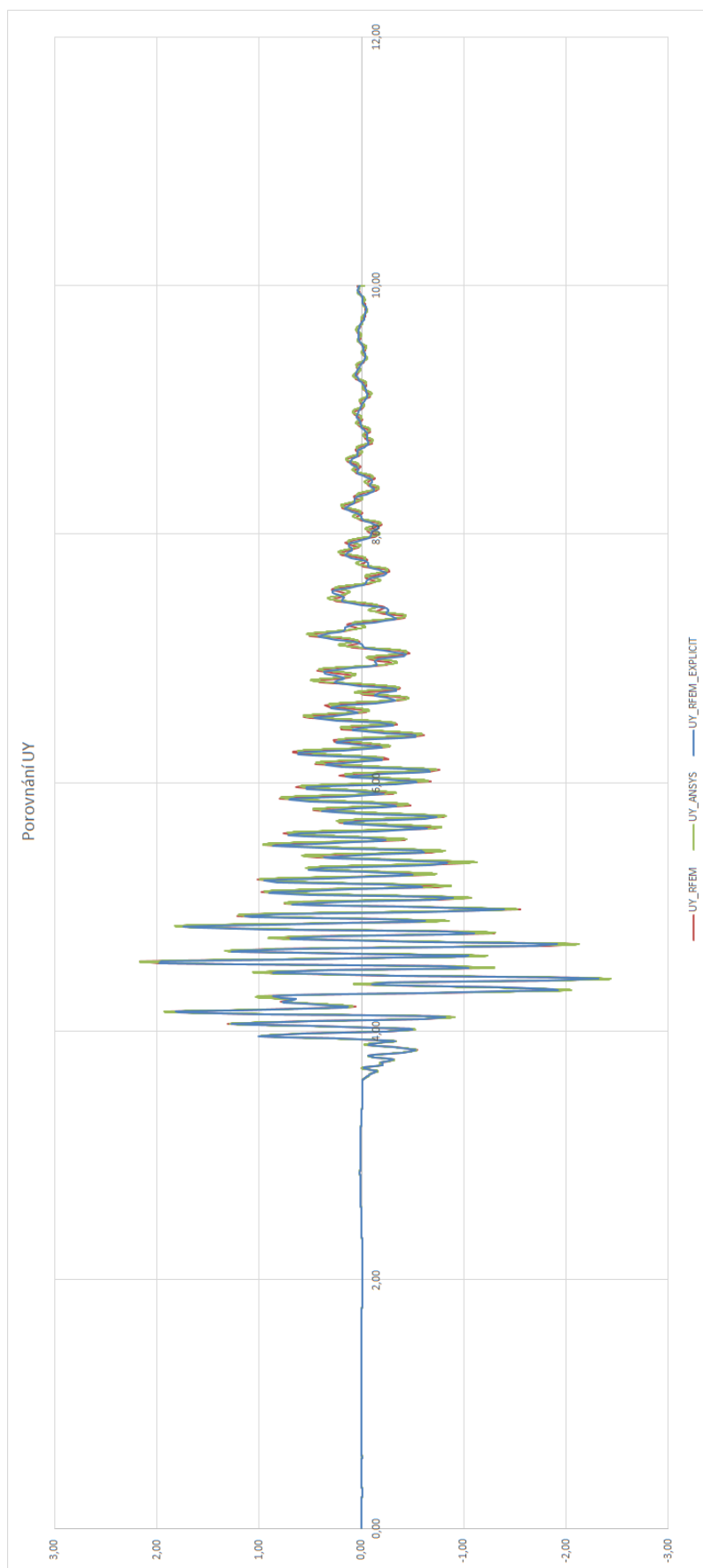
(a) Posun UY v programu RFEM.

(b) Posun UY v programu ANSYS.



(c) Posun UY v programu RFEM pro explicitní metodu

Obr. 3.32: Porovnání UY



(a) Porovnání posunů UY.

Obr. 3.33: Porovnání UY

Z grafů je vidět výbornou shodu implicitní metody z programů RFEM a ANSYS. O něco větší, ale stále technicky přijatelná odchylka, je mezi implicitní a explicitní metodou.

### 3.3 Srovnání výsledků podle numerických metod

Důležitým cílem diplomové práce je porovnání vhodnosti použití explicitní a implicitní Newmarkovy metody pro seismickou analýzu staveb. Obecně je známo, že explicitní metoda je vhodná pro krátké časové děje, jako jsou například nárazy dopravních prostředků, nebo výbuchy. Časový krok nutný z hlediska stability řešení je dán nejkratším časem, ve kterém zvuk dorazí z libovolného uzlu konstrukce do sousedního uzlu. Ten je potřeba ještě snížit určitým součinitelem bezpečnosti, jehož hodnota může být např. 0,7. Na velikost nutného časového kroku má tedy vliv Youngův modul a hustota materiálu (druhá odmocnina jejich podílu je rychlost zvuku v daném materiálu) a nejkratší vzdálenost uzlů. Z toho plyne, že například zahuštění sítě dělení si vyžádá snížení velikosti časového kroku a tím i prodloužení času nutného pro výpočet. Z této podmínky vyplyne nutnost použít velmi malého časového kroku, u stavebních konstrukcí obvykle v řádu sta tisícín sekundy. Jen tehdy je totiž možné neřešit v časových krocích soustavu rovnic rovnováhy, ale řešit jen pro každý parametr deformace jednu pohybovou rovnici. U dějů, jako jsou nárazy, nebo výbuchy, si časový průběh zatížení rovněž vyžádá velmi malý časový krok, takže nutnost malého časového kroku daná stabilitou řešení explicitní metody nevádí.

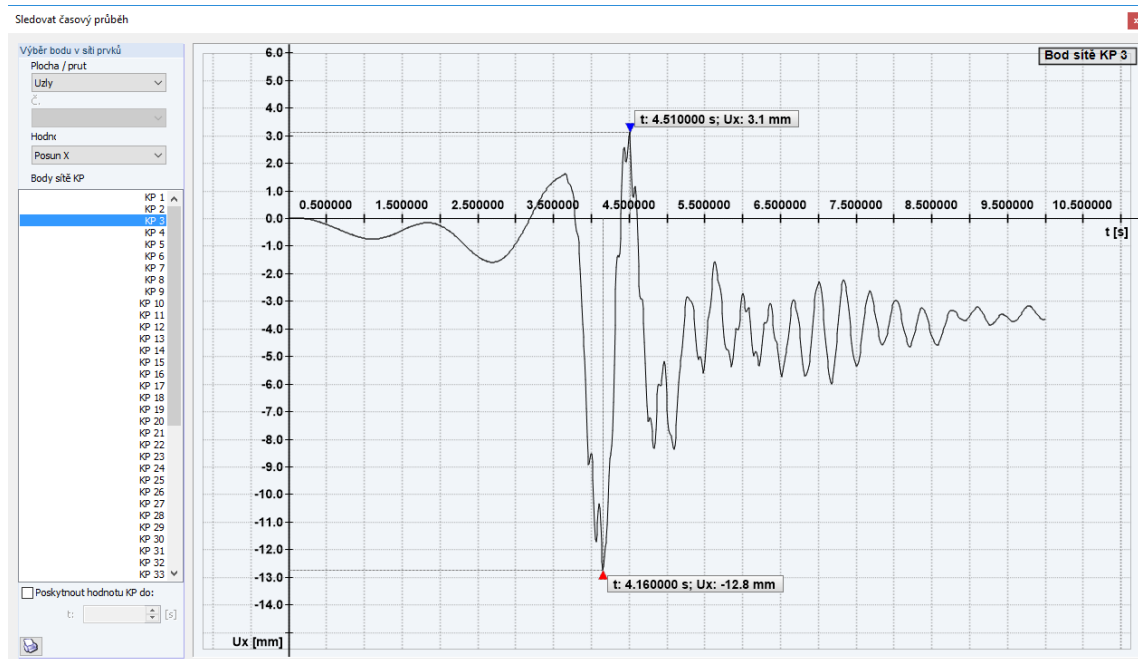
Implicitní metody řešení soustavy diferenciálních rovnic jsou charakteristické tím, že se v časových krocích řeší soustava rovnic. U řešení dynamických úloh se jedná o rovnice rovnováhy. Newmarkova implicitní metoda zajistí tedy v každém časovém kroku splnění podmínek rovnováhy. Tato metoda nevyžaduje tak malý časový krok, jako explicitní metoda a obvykle bývá vhodná pro řešení dynamických úloh v časech delších, než několik sekund. Nutnost použití krátkých časových kroků bude spíše dána nutností vystihnout příslušný časový diagram zatížení. Tato otázka vyvstává v případě řešení odezvy budov na seismické zatížení. Akcelerogramy jsou totiž zadány ve formě polygonů se vzdáleností extrémů zrychlení ve zlomcích (cca. sta tisícín) sekundy. Aby se časová funkce zatížení vystihla dostatečně přesně a chyba řešení zůstala v přijatelných mezích, je třeba volit dostatečně malý časový krok při numerickém řešení.

V souvislosti s akcelerogramem bylo v průběhu diplomové práce navrženo a implementováno významné zlepšení příslušného programového modulu v systému RFEM. Původně bylo pro řešení v časových krocích z příslušného akcelerogramu odečítáno zrychlení a to aplikováno v řešení. Studie během diplomové práce ukázala,

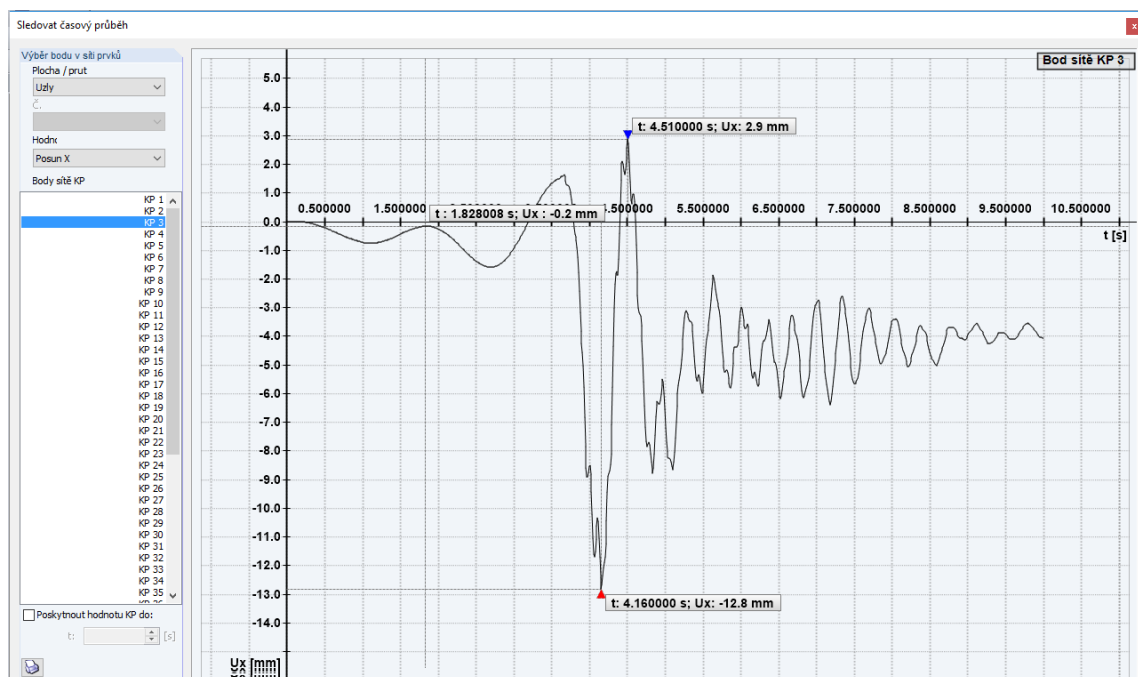
že toto řešení není dostatečně přesné kvůli nedostatečně přesné numerické integraci zrychlení. Bylo navrženo a realizováno podstatné vylepšení. V programu RFEM se nyní na začátku řešení přesně numericky akcelerogram dvakrát zintegruje a při časových krocích se do řešení nebere zrychlení, ale přesné posunutí podpory v daném čase. Toto zlepšení programu, které bylo realizováno na základě řešení diplomové práce se ukázalo jako významné zpřesnění seismické analýzy implicitní Newmarkovou metodou. U explicitní metody, kde časové kroky jsou ze stabilitních důvodů menší, není zlepšení přesnosti tak výrazné, jako u implicitní metody, ale přesto i zde ke zpřesnění dochází.

Pro srovnání vhodnosti použitých numerických modelů byl použit materiálový model Drucker-Prager. Srovnání numerických metod bylo provedeno s ohledem na přesnost a rychlost výpočtu. Pro explicitní metodu byl s ohledem na stabilitu řešení zvolen časový krok 0.0001 sekundy. Stejný časový krok byl zvolen jako základní i pro implicitní metodu s tím, že toto řešení bude považováno za jako dostatečně přesný základ pro další výpočty.

Z následujících grafů zobrazujících vodorovný průběh výchylky horního rohu budovy v čase, je patrná velice dobrá shoda mezi výsledky explicitní a implicitní metody podle modelu plasticity dle Drucker-Pragera.



(a) Vodorovný průběh výchylky - explicitní metoda dle Drucker-Pragera

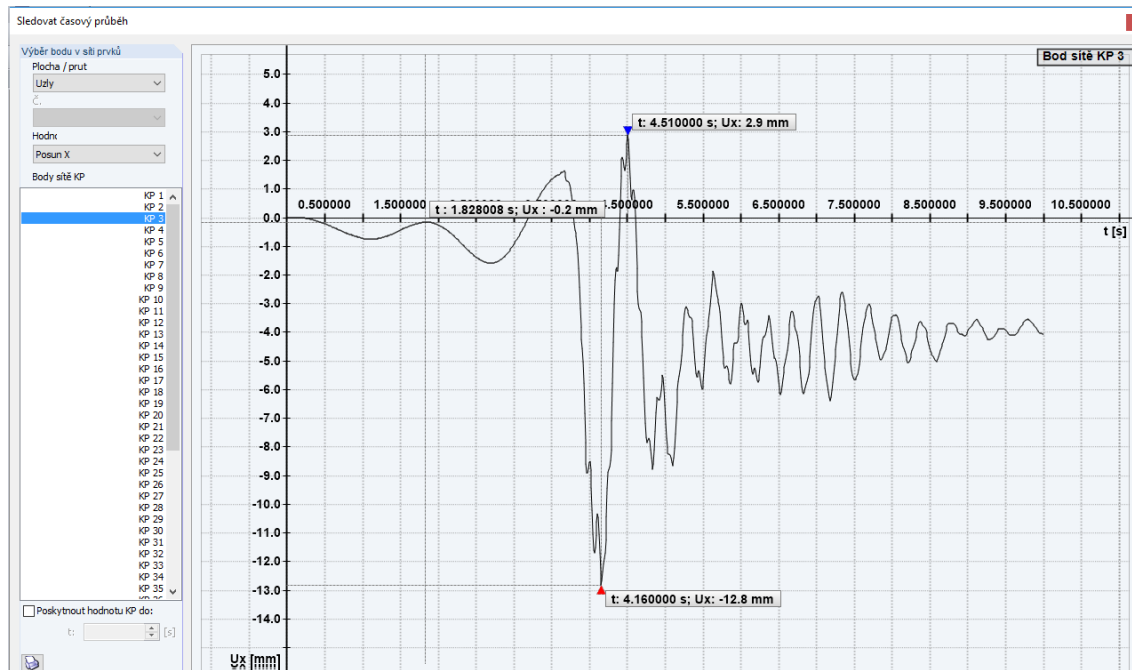


(b) Vodorovný průběh výchylky - implicitní metoda dle Drucker-Pragera

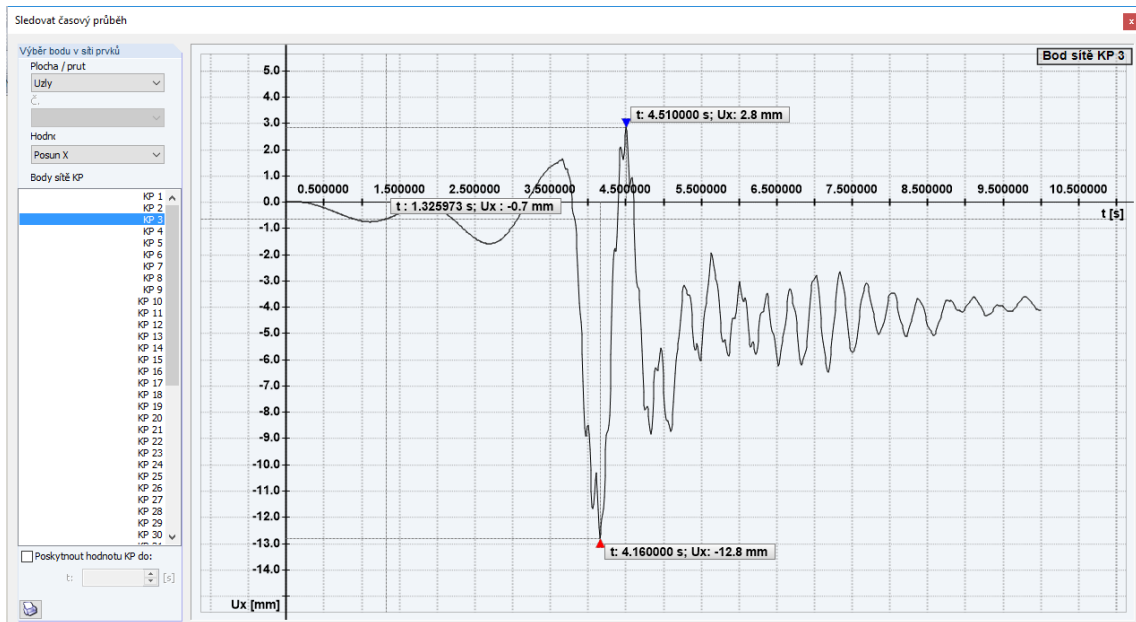
Obr. 3.34: Porovnání explicitní a implicitní metody



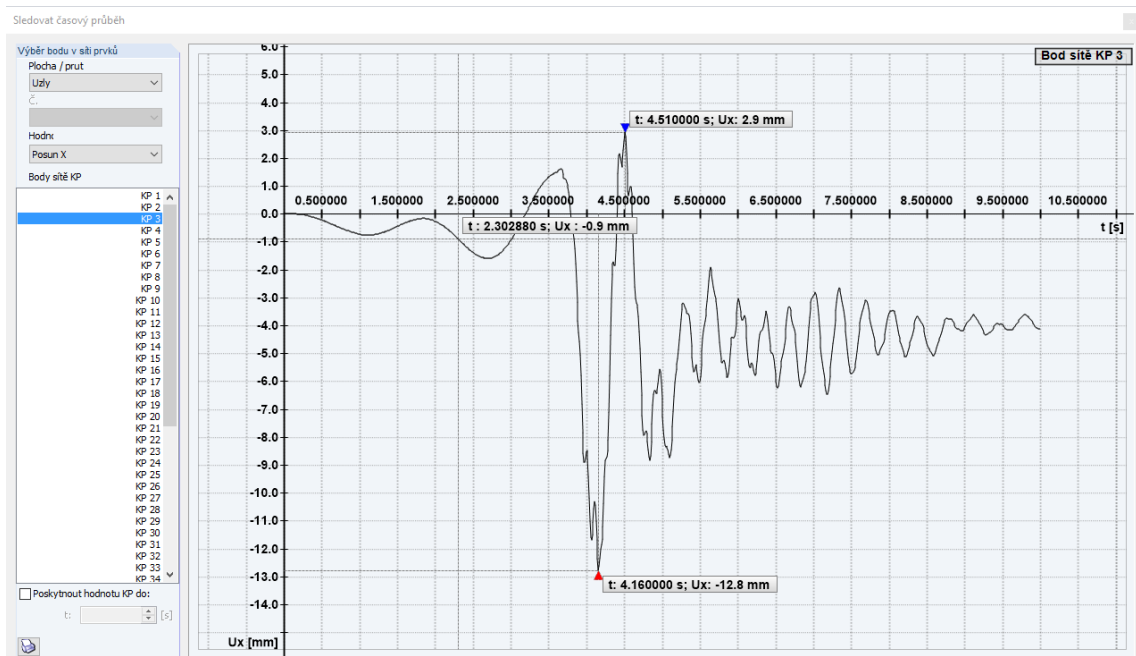
Podle očekávání výpočet implicitní metodou byl mnohem pomalejší (cca 5x). Pro implicitní metodu byl následně zvýšen časový krok 5x. Čas řešení byl v tomto případě zhruba stejný pro obě metody. Výsledky řešení byly stále prakticky totožné (srovnávány byly největší výchylky). Poté byl časový krok u implicitní metody zvětšen ještě 2x, tedy na desetinásobek kroku u explicitní metody. Výsledky zůstaly stále prakticky přesné. Při dalším zvětšení časového kroku na padesátinásobek kroku u explicitní metody došlo však už ke zhoršení přesnosti výsledků pod přijatelnou mez (některé extrémy se snížily až o 17%). Úprava kroku na dvacetinásobek explicitní metody poskytla konečný odhad nutného časového kroku pro řešení seismické odezvy pro danou stavební konstrukci. Extrémní hodnoty jsou pro tento časový krok jen o cca 1% nižší, což je ještě technicky přijatelné. Tedy podobné výsledky byly u implicitní metody získány za 4x nižší výpočetní čas, než u explicitní metody. Vzhledem k tomu, že horní hranici časového kroku pro implicitní Newmarkovu metodu nelze dostatečně přesně předem odhadnout je možno konstatovat, že obě metody jsou pro seismickou analýzu použitelné a srovnatelné, s mírnou preferencí implicitní Newmarkovy metody. Odhad časového kroku pro Newmarkovu metodu je sice možný s pomocí Fourierovy transformace, která postup potvrdila. Odhad je však pracný a v praxi bude výhodnější použít kvůli bezpečnosti menší časový krok, což částečně znehodnocuje objektivní výhodu implicitní metody ve srovnání s explicitní metodou.



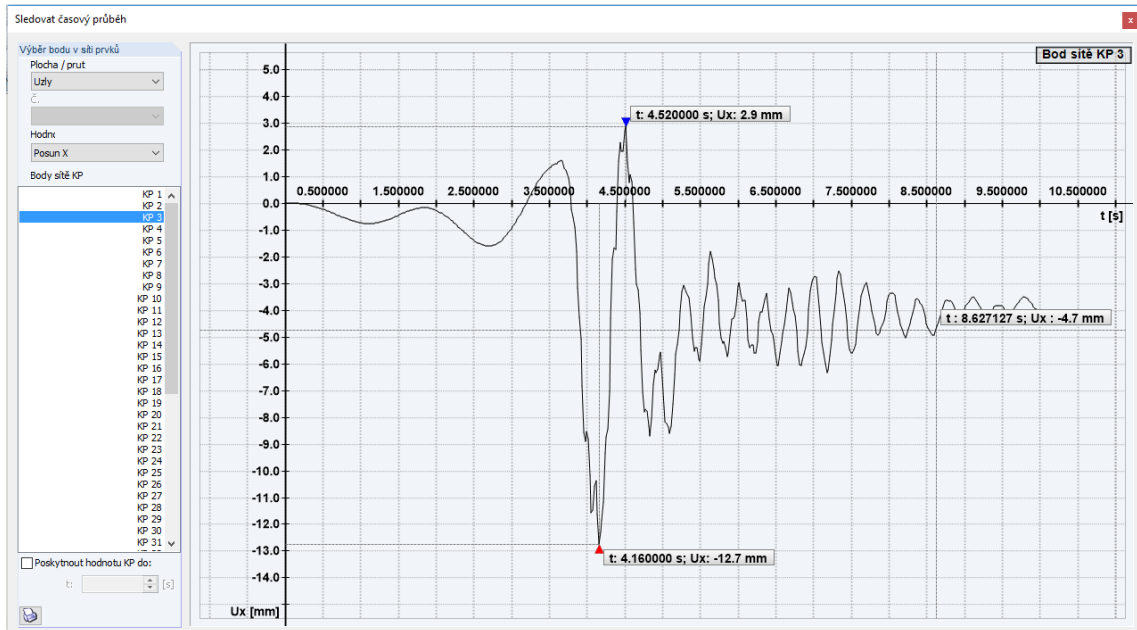
Obr. 3.35: Graf posunutí horního uzlu pro časový krok 0,0001s.



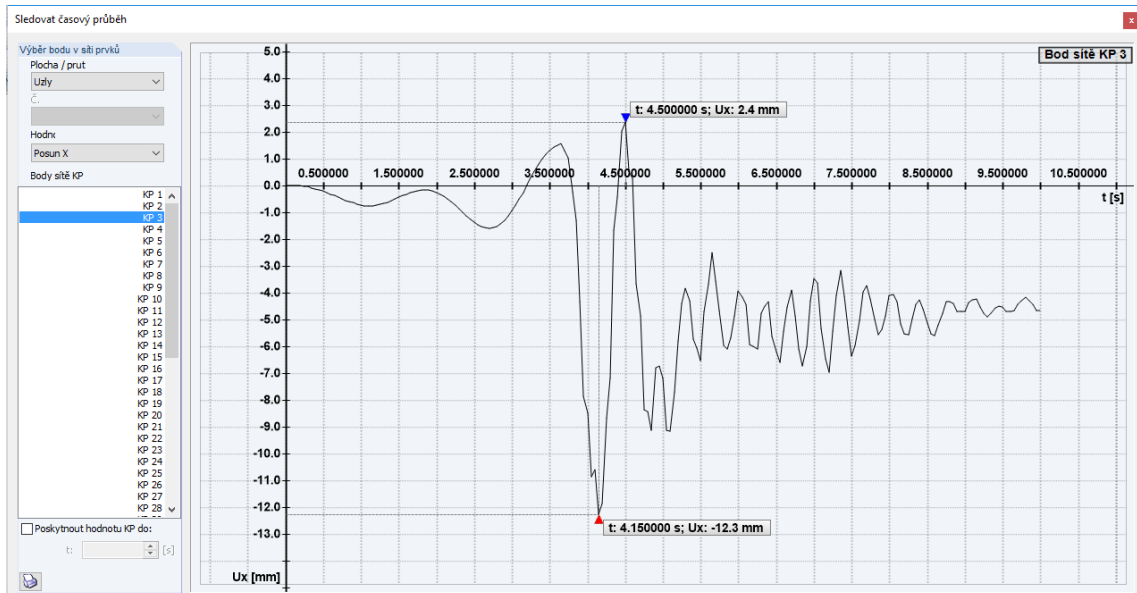
Obr. 3.36: Graf posunutí horního uzlu pro časový krok 0,0005s.



Obr. 3.37: Graf posunutí horního uzlu pro časový krok 0,001s.



Obr. 3.38: Graf posunutí horního uzlu pro časový krok 0,002s.



Obr. 3.39: Graf posunutí horního uzlu pro časový krok 0,005s.

## 3.4 Srovnání výsledků podle materiálových modelů

Byly použity tři různé materiálové modely: lineárně elastický, plastický dle Drucker-Pragera a spojitý model poškození podle Mazarse. U všech výpočtů byla použita geometrická nelinearita, ale její vliv je vzhledem k relativně malým hodnotám posunutí a rotací poměrně malý.

### *Lineárně elastický model*

Základním modelem pro srovnávání je lineárně elastický model. Je předpokládáno, že během zemětřesení nedojde ke zplastizování ani k poškození. Po skončení zemětřesení se řešená konstrukce vrátí k původní geometrii před zemětřesením, tj. vektorové pole posunutí bude v celé oblasti řešené stěny nulové. Podobně také bude nulové i tenzorové pole přírůstku napětí.

### *Model plasticity dle Drucker-Pragera*

Nastavení parametrů modelu bylo provedeno tak, aby při daném akcelerogramu došlo k přiměřené míře zplastizování v nejexponovanějších oblastech konstrukce. Cílem práce není totiž provedení výpočtu skutečné budovy, ale jen porovnání vhodnosti použití různých numerických metod a chování různých materiálových modelů. Během trvání účinky zemětřesení došlo v některých částech konstrukce ke zplastizování. To se projevilo zvětšením útlumu a změnou rozložení napětí vzhledem k lineárnímu materiálu. Ve shodě s očekáváním je na výsledcích v čase 10 s, čili prakticky po skončení seismicity, patrné, že došlo k trvalé deformaci tvaru budovy. Došlo k celkovému zvýšení budovy, i k jejímu rozšíření v oblasti zplastizování. Ve vyšších patrech, kde ke zplastizování nedošlo, zůstala šířka budovy stejná. Zvýšení a částečné rozšíření budovy se může zdát na první pohled překvapivé, ale je zdůvodnitelné tím, že ke zplastizování došlo pouze v tahu a vzhledem ke kývání budovy na obě strany docházelo ke zplastizování na obou stranách budovy, což způsobilo zvýšení celé budovy a ne pouze k jejímu naklonění. Z podobných důvodů došlo i k rozšíření budovy.

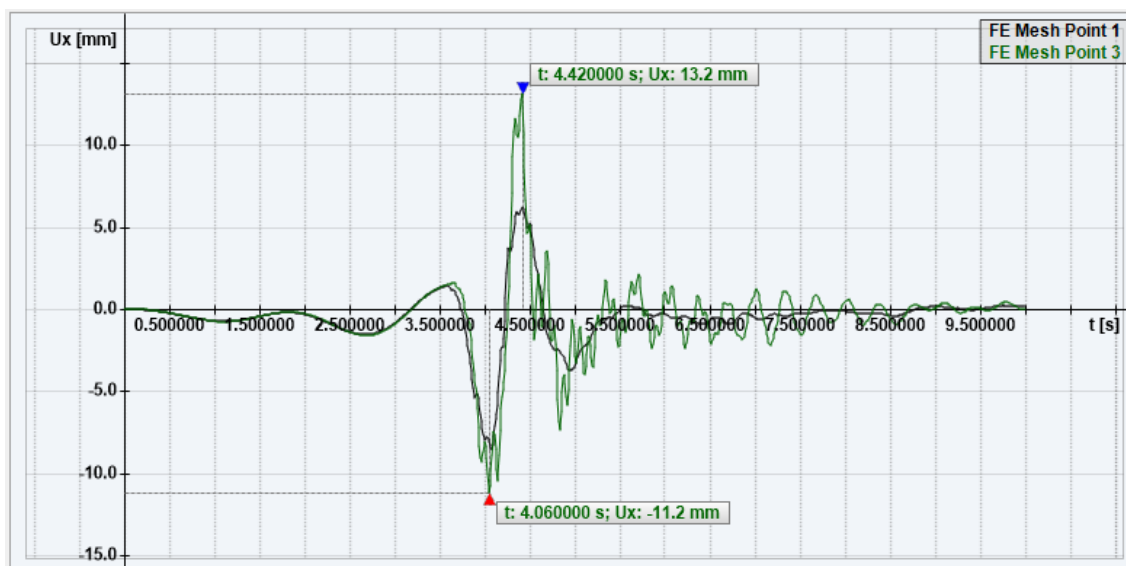
### *Model poškození dle Mazarse*

Model dle Mazarse předpokládá porušení konstrukce mikrotrhlinkami. Trhlinky nejsou lokalizované, ale předpokládá se, že k nim dochází spojitě (smeared cracking model). Z grafu pracovního diagramu materiálu dle Mazarse, který je uveden v teoretické části diplomové práce, plyne, že po vymizení napětí dojde k uzavření mikrotrhlinek a deformace vymizí podobně, jako se tomu stalo i v případě lineárně elastického

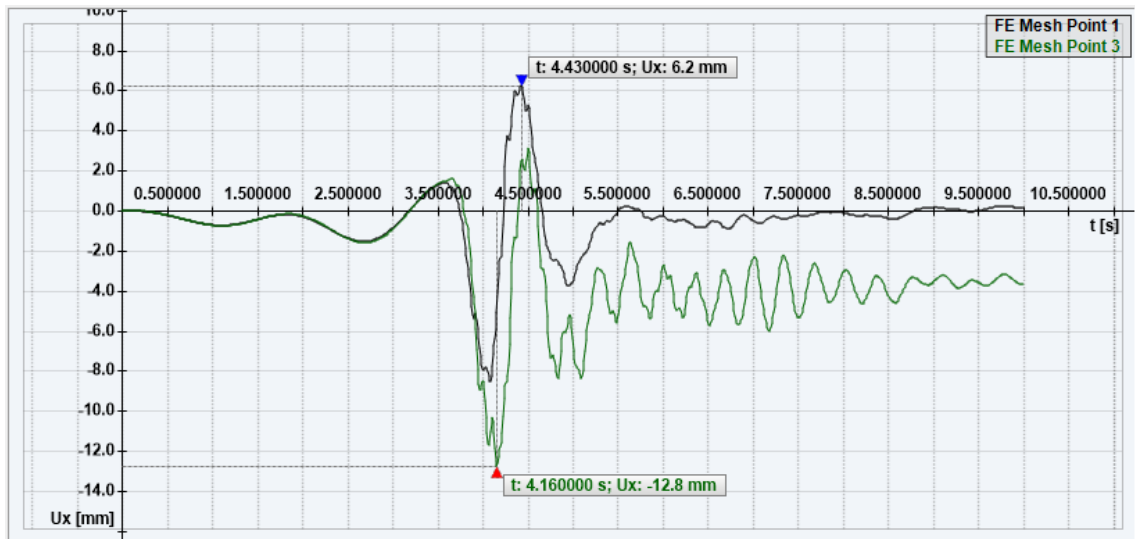
modelu. K porušení ovšem došlo. Projevilo se to tak, že při odtěžování probíhal graf pracovního diagramu po jiné dráze, a došlo tak k disipaci energie a v důsledku toho k útlumu kmitání. Po skončení seismicity, sice na rozdíl od plastického materiálu nezůstala žádná trvalá deformace ani napjatost, ale v oblastech porušení došlo k trvalému snížení tuhosti materiálu a v důsledku toho ke změně odezvy konstrukce na zatížení, v tomto případě na pokračující seismické účinky. Snížení tuhosti se samozřejmě dynamice projeví ve snížení vlastních frekvencí kmitání. Na následujících obrázcích jsou vidět rozdíly o odezvě konstrukce na stejné seismické zatížení při různých materiálových modelech. Vedle sebe vhodné výsledky obou materiálových modelů. Např. Výsledné deformace a napětí a totéž v čase maximální výchylky.

### 3.4.1 Kvalitativní porovnání odezvy budovy na seismicitu pro různé materiálové modely

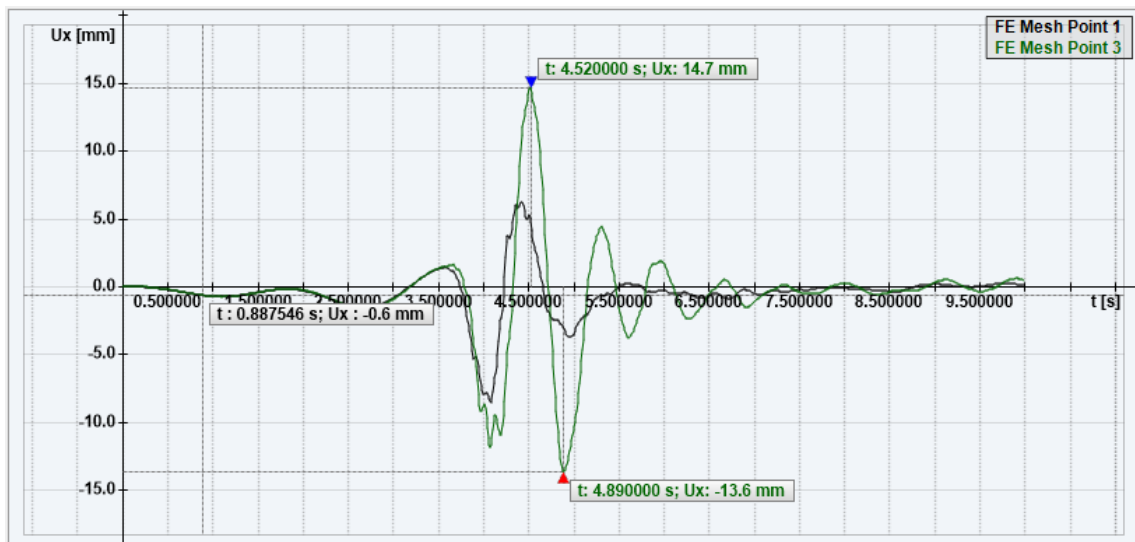
Vliv chování materiálových modelů budeme studovat na výsledcích explicitní metody. Pro srovnání použijme hlavně časové grafy posunutí horního rohu budovy ve směru x.



Obr. 3.40: Posunutí horního uzlu (bod 3) a dolního uzlu (bod 1) pro lineární materiál.



Obr. 3.41: Posunutí horního uzlu (bod 3) a dolního uzlu (bod 1) pro model plasticity dle Drucker-Pragera.



Obr. 3.42: Posunutí horního uzlu (bod 3) a dolního uzlu (bod 1) pro model poškození dle Mazarse.

Porovnání poskytuje zajímavý kvalitativní pohled na chování budovy pro různé materiálové modely. Uvedme některá charakteristická porovnání:

#### *Výsledný tvar budovy po odeznění seismicity*

Z grafů pro vodorovné posunutí horního rohu budovy je patrné, že pro lineární materiál a model poškození dle Mazarse maximální posunutí konverguje k nule, tedy deformace budovy se vrátí do původního tvaru před seismicitou. Pro plastický materiál dle Druckera-Pragera zůstane v důsledku plastických deformací maximální výchylka trvalá v hodnotě cca. -3.7 mm.

#### *Výsledná napjatost po odeznění seismicity*

Z grafického zobrazení složek napětí  $\sigma_y$  a  $\tau_{x,y}$  je vidět že výsledný přírůstek napjatosti u lineárního materiálu a u materiálu dle Mazarse konverguje po odeznění seismicity k nule. V případě materiálového modelu Drucker-Prager zůstává v řešené konstrukci v důsledku zplastizování podstatné vnitřní pnutí.

#### *Výsledné vlastní frekvence budovy*

Z kmitání horního rohu budovy v čase po maximálním zrychlení je vidět, že vlastní frekvence budovy je pro lineární materiál a plastický model Drucker-Prager stejná a odpovídá tomu, že tuhost materiálu zůstává ve shodě s teorií stejná i po zplastizování materiálu. U modelu poškození dle Mazarse dochází v důsledku snížení tuhosti poškozeného materiálu ke zpomalení vlastní frekvence asi na polovinu.

#### *Maximální a minimální amplituda*

První tři největší amplitudy po nástupu největšího zrychlení vypadají kvantitativně následovně:

1. Lineární materiál	-11.2	+13.2	-7.0
2. Drucker-Prager	-12.8	+4.5	-8.3
3. Mazars	-11.8	+14.8	-13.7

Číselné hodnoty ukazují na rozdílné chování konstrukce u různých materiálů. U plastického materiálu dle Druckera-Pragera dojde už během první maximální výchylky k podstatnému zplastizování, které vede nejen k trvalé výchylce, ale také k podstatné disipaci energie a v důsledku toho u tohoto materiálu nedojde následně ke zhruba stejně velké výchylce na opačnou stranu, jako je tomu u lineárního materiálu, ale jen zhruba ke třetinové velikosti výchylky. Naproti tomu u materiálového modelu dle Mazarse dojde k podstatně menší disipaci, než u Druckera-Pragera a současně se

materiál stane měkčím, takže nakumulovaná pružná energie umožní podstatně větší výchylku na opačnou stranu, než u obou dalších modelů. Zhodnocení výsledků pro různé materiálové modely ukazuje, že jejich chování při seismicitě je v kvalitativním souladu s příslušnými teoretickými předpoklady.



## 4 ZÁVĚR

Hlavním cílem diplomové práce bylo ověřit vhodnost použití implicitních a explicitních metod integrace pohybových rovnic při seismické analýze budov. Akcelerogram a parametry materiálových modelů byly zvoleny tak, aby došlo k částečnému porušení, či zplastizování stěn budovy. Zvolený časový krok pro numerické řešení musí být zvolen dostatečně malý s ohledem na akcelerogram, tak aby zohlednil všechny lokální extrémy (špice) akcelerogramu. Maximální velikost časového kroku pro explicitní metodu je také dána hustotou dělení konstrukce a rychlostí zvuku v materiálu, tak, aby byly splněny nutné podmínky stability řešení. V daném případě, stejně jako ve většině možných jiných případů, bude druhá podmínka pro stanovení časového kroku pro explicitní metodu rozhodující. Při seismické analýze implicitní metodou bude naopak rozhodující první podmínka. V daném případě byl pro explicitní metody stanoven časový krok 1/10000 s. Řešení bylo ve všech případech stabilní a výsledky analýzy byly dostatečně přesné. Pro porovnání přesnosti výsledků bylo použito jednak řešení implicitní metodou pro stejný časový krok (tedy v případě implicitní metody až zbytečně přesné) a také srovnání s výsledky řešení získané programem ANSYS. Podle očekávání výpočet implicitní metodou byl mnohem pomalejší (cca 5x). Pro implicitní metodu byly následně zvyšovány časové kroky a byla přitom sledována přesnost a čas řešení. Pro porovnání přesnosti byla sledována maximální a minimální vodorovná výchylka v horním rohu budovy (uzel 3). Byly provedeny výpočty pro časové kroky 0.0001 s, 0.0005 s, 0.001 s, 0.002 s a 0.005 s. U nejvyššího časového kroku již byly výsledky značně nepřesné, tak byl jako největší možný časový krok pro implicitní metodu stanovena hodnota 0.002 s, tedy dvacetinásobek nutného kroku pro explicitní metodu. Výpočetní čas byl pro tento časový krok cca 4x kratší, než u explicitní metody. Vzhledem k tomu, že horní hranici časového kroku pro implicitní Newmarkovu metodu nelze dostatečně přesně předem odhadnout je možno konstatovat, že obě metody jsou pro seismickou analýzu použitelné a srovnatelné, s mírnou preferencí implicitní Newmarkovy metody.

Důležitým závěrem diplomové práce je zjištění že obě základní metody přímé integrace pohybových rovnic, tedy explicitní metoda a Newmarkova implicitní metoda jsou pro analýzu odezvy budov na seismické zatížení prakticky použitelné a vhodné. Z výsledků numerické analýzy je vidět výbornou shodu implicitní metody z programů RFEM a ANSYS. O něco větší, ale stále technicky přijatelná odchylka, je mezi implicitní a explicitní metodou.

Dalším cílem diplomové práce bylo srovnání odezvy na seismické zatížení pro různé materiálové modely, konkrétně modelu plasticity dle Drucker-Pragera a modelu porušení dle Mazarse. Na první pohled vypadaly výsledky trochu překvapivě, ale při podrobnějším prozkoumání se ukázalo, že jsou správné a odpovídají pří-

slušným materiálovým modelům. U Drucker-Pragera zůstala budova po odeznění zemětřesení mírně nakloněná (což bylo očekáváno), ale také celkově vyšší širší (což na první pohled překvapilo). Tento na první pohled trochu překvapivý výsledek je zdůvodněn tím, že ke zplastizování došlo pouze v tahu, a vzhledem ke kymácení budovy na obě strany docházelo ke zplastizování tahem postupně na obou stranách budovy. Výsledkem bylo celkové zvýšení budovy. Z podobných důvodů zůstala budova po skončení zemětřesení také širší. V případě modelu porušení dle Mazarse, geometrie budovy zůstala po skončení zemětřesení naprosto stejná, jako před zemětřesením, i když došlo k porušení materiálu. Přesto však k poškození budovy došlo. Mikrotrhlinky se ale po odeznění zatížení zavřely a deformace i napětí od seismicity zůstaly nulové. Poškození se projevilo jen sníženou tuhostí materiálu v poškozených oblastech. Únik energie ve formě tepla se při numerickém řešení projevilo zvětšeným útlumem. Závěrem je možno konstatovat, že cíle diplomové práce byly splněny v plném rozsahu.

## LITERATURA

- [1] I. Němec, V. Kolář, I. Ševčík, Z. Vlk, J. Blaauwendraat, J. Buček, B. Teplý, D. Novák, V. Štembera: *Finite Element Analysis of Structures, Principles and Praxis*, Shaker Verlag, 2010.
- [2] E. A. de Souza Neto, D. Peric, D. R. J. Owen: *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, 2008.
- [3] Shen R. Wu, Lei Gu: *Introduction to the Explicit Finite Element Method for Nonlinear Transient Dynamics*, John Wiley & Sons, 2012.
- [4] C. Tabarrok, F.P. Rimrott: *Variational Methods and Complementary Formulations in Dynamics (Solid Mechanics and Its Applications)*, Springer, 1994.
- [5] E. WV Chaves: *Notes on Continuum Mechanics (Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences)*, Springer, 2013.
- [6] S. Oller: *Nonlinear Dynamics of Structures (Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences)*, Springer, 2014.
- [7] J. Har, K. Tamma: *Advances in Computational Dynamics of Particles, Materials and Structures*, John Wiley & Sons, 2012.
- [8] J. Rodriguez, G. Rio, J.M. Cadou, J. Troufflard: *Numerical study of dynamic relaxation with kinetic damping applied to inflatable fabric structures with extensions for 3D solid element and non-linear behavior*, Thin-Walled Structures, Vol. 49(11), pp. 1468-1474, Elsevier, 2011.
- [9] J. Alamatian: *A new formulation for fictitious mass of the Dynamic Relaxation method with kinetic damping*, Computers & Structures, Vol. 90-91, pp. 42-54, Elsevier, 2012.
- [10] M. Brio: *Numerical Time-Dependent Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Academic Press, 2010.
- [11] M. Zlámal: *On the finite element method*, Numerische Mathematik, Vol. 12(5), pp. 394-409, Springer, 1968.
- [12] R. Courant, K. O. Fredrichs, H. Lewy: *On the partial difference equations of mathematical physics*, IBM Journal of Research and Development, 11 (2): 215-234, 1967.

## SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

$\mathbf{a}$	vektor zrychlení
$\mathbf{C}$	matice tlumení
$D_k$	hlavní minory matice tuhosti
$E$	modul pružnosti materiálu
$\mathbf{F}$	vektor zatížení
$I$	moment setrvačnosti
$\mathbf{K}$	materiálová matice tuhosti
$\mathbf{K}_G$	geometrická matice tuhosti
$\mathbf{K}_{G,S}$	geometrická matice tuhosti složená z části časově nezávislé
$\mathbf{K}_{G,T}$	geometrická matice tuhosti složená z části měnící se v čase
$\mathbf{K}_T$	matice tuhosti
$\mathbf{M}$	matice hmotnosti
$\mathbf{q}$	nenulový vektor vlastního tvaru ztráty stability konstrukce
$\mathbf{r}$	vektor nevyvážených sil (reziduum)
$t$	čas
$T$	perioda
$\mathbf{u}$	vektor přemístění
$\dot{\mathbf{u}}$	vektor rychlostí
$\ddot{\mathbf{u}}$	vektor zrychlení
$\mathbf{v}$	vektor rychlostí
$x, z, y$	souřadnice
$\beta, \gamma$	Newmarkovy parametry
$\varepsilon$	přesnost
$\lambda$	kritický součinitel zatížení

$\varphi$  pootočení

$\omega_0$  vlastní kruhová frekvence

$\omega$  kruhová frekvence budící síly

$\tilde{\mathbf{u}}^h$  testovací funkce posunutí

Další označení jsou vysvětlena v textu při jejich zavedení.

## SEZNAM PŘÍLOH

<b>A Přílohy</b>	<b>126</b>
A.1 Vstupní data pro explicitní metodu - model plasticity dle Drucker-Pragera . . . . .	126

## A PŘÍLOHY

### A.1 Vstupní data pro explicitní metodu - model plasticity dle Drucker-Pragera



Projekt: Model: 01.08\_DruckerPrager\_ft1p2MPa\_fc100MPa\_Ep31 .. Datum: 05.01.2017

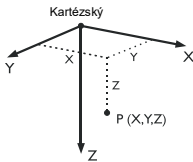
## MODEL - ZÁKLADNÍ ÚDAJE

Obecné	Název modelu	: 01.08_DruckerPrager_ft1p2MPa_fc100MPa_Ep310MPa_Ex_plicit_10s
	Typ modelu	: 3D
	Kladný směr globální osy Z	: Dolů
	Klasifikace zatěžovacích stavů a kombinací	: Podle normy: EN 1990 Národní příloha: ČSN - Česká Republika
Možnosti	<input type="checkbox"/> RF-FORM-FINDING - Hledání počátečních rovnovážných tvarů membránových a lanových konstrukcí	
	<input type="checkbox"/> RF-CUTTING-PATTERN	
	<input type="checkbox"/> Analýza potrubí	
	<input type="checkbox"/> Použít pravidlo CQC	
	<input type="checkbox"/> Umožnit CAD/BIM model	
	<input type="checkbox"/> Duktilita podle EN 1998-1	
	Tíhové zrychlení g	: 10.00 m/s <sup>2</sup>

## NASTAVENÍ SÍTĚ PRVKŮ

Obecné	Požadovaná délka konečných prvků	$l_{FE}$	: 1.0 m
	Maximální vzdálenost mezi uzlem a linií pro integrování do linie	$\epsilon$	: 0.0 m
	Maximální počet uzlů sítě KP v tisících		: 500
Pruty	Počet dělení lanových prutů, prutů s pružným podložím, s náběhy nebo plastickými vlastnostmi:		: 10
	<input checked="" type="checkbox"/> Aktivovat dělení prutů pro analýzu velkých deformací resp. postkritickou analýzu <input checked="" type="checkbox"/> Dělit pruty na nich ležícím uzlem		
Plochy	Maximální poměr diagonál obdélníku KP	$\Delta_D$	: 1.800
	Maximální přípustný odklon 2 prvků sítě od roviny	$\alpha$	: 0.50 °
	Tvar konečných prvků:		: Trojúhelníky a čtyřúhelníky <input checked="" type="checkbox"/> Generovat stejné čtverce, kde je to možné

## 1.1 UZLY



Uzel č.	Typ uzlu	Vztažný uzel	Souřadný systém	X [m]	Y [m]	Z [m]	Komentář
1	Standard	-	Kartézský	8.000	0.000	0.000	
2	Standard	1	Kartézský	-8.000	0.000	0.000	
3	Standard	-	Kartézský	8.000	-20.000	0.000	
4	Standard	-	Kartézský	0.000	-20.000	0.000	
5	Standard	-	Kartézský	7.000	-2.000	0.000	
6	Standard	-	Kartézský	5.000	-2.000	0.000	
7	Standard	-	Kartézský	5.000	-4.000	0.000	
8	Standard	-	Kartézský	7.000	-4.000	0.000	
9	Standard	-	Kartézský	3.000	-4.000	0.000	
10	Standard	-	Kartézský	3.000	-2.000	0.000	
11	Standard	-	Kartézský	1.000	-2.000	0.000	
12	Standard	-	Kartézský	1.000	-4.000	0.000	
13	Standard	-	Kartézský	7.000	-7.000	0.000	
14	Standard	-	Kartézský	7.000	-5.000	0.000	
15	Standard	-	Kartézský	5.000	-5.000	0.000	
16	Standard	-	Kartézský	5.000	-7.000	0.000	
17	Standard	-	Kartézský	7.000	-10.000	0.000	
18	Standard	-	Kartézský	7.000	-8.000	0.000	
19	Standard	-	Kartézský	5.000	-8.000	0.000	
20	Standard	-	Kartézský	5.000	-10.000	0.000	
21	Standard	-	Kartézský	7.000	-13.000	0.000	
22	Standard	-	Kartézský	7.000	-11.000	0.000	
23	Standard	-	Kartézský	5.000	-11.000	0.000	
24	Standard	-	Kartézský	5.000	-13.000	0.000	
25	Standard	-	Kartézský	7.000	-16.000	0.000	
26	Standard	-	Kartézský	7.000	-14.000	0.000	
27	Standard	-	Kartézský	5.000	-14.000	0.000	
28	Standard	-	Kartézský	5.000	-16.000	0.000	
29	Standard	-	Kartézský	7.000	-19.000	0.000	
30	Standard	-	Kartézský	7.000	-17.000	0.000	
31	Standard	-	Kartézský	5.000	-17.000	0.000	
32	Standard	-	Kartézský	5.000	-19.000	0.000	
33	Standard	-	Kartézský	3.000	-7.000	0.000	
34	Standard	-	Kartézský	3.000	-5.000	0.000	
35	Standard	-	Kartézský	1.000	-5.000	0.000	
36	Standard	-	Kartézský	1.000	-7.000	0.000	
37	Standard	-	Kartézský	3.000	-10.000	0.000	
38	Standard	-	Kartézský	3.000	-8.000	0.000	
39	Standard	-	Kartézský	1.000	-8.000	0.000	
40	Standard	-	Kartézský	1.000	-10.000	0.000	
41	Standard	-	Kartézský	3.000	-13.000	0.000	
42	Standard	-	Kartézský	3.000	-11.000	0.000	
43	Standard	-	Kartézský	1.000	-11.000	0.000	
44	Standard	-	Kartézský	1.000	-13.000	0.000	
45	Standard	-	Kartézský	3.000	-16.000	0.000	
46	Standard	-	Kartézský	3.000	-14.000	0.000	





Projekt: Model: 01.08\_DrukerPrager\_ft1p2MPa\_fc100MPa\_Ep31 .. Datum: 05.01.2017

### 1.1 UZLY

Uzel č.	Typ uzlu	Vztažný uzel	Souřadný systém	X [m]	Y [m]	Z [m]	Komentář
47	Standard	-	Kartézský	1.000	-14.000	0.000	
48	Standard	-	Kartézský	1.000	-16.000	0.000	
49	Standard	-	Kartézský	3.000	-19.000	0.000	
50	Standard	-	Kartézský	3.000	-17.000	0.000	
51	Standard	-	Kartézský	1.000	-17.000	0.000	
52	Standard	-	Kartézský	1.000	-19.000	0.000	
73	Standard	-	Kartézský	2.000	-4.000	0.000	
74	Standard	-	Kartézský	2.000	-2.000	0.000	

### 1.2 LINIE

Linie č.	Typ linie	Uzly č.	Délka linie L [m]		Komentář
1	Polylinie	1,2,4,3,1	56.000	XY	
2	Polylinie	3,1	20.000	Y	
3	Polylinie	1,2	8.000	X	
4	Polylinie	2,4	20.000	Y	
5	Polylinie	4,3	8.000	X	
6	Polylinie	5,6	2.000	X	
7	Polylinie	6,7	2.000	Y	
8	Polylinie	7,8	2.000	X	
9	Polylinie	8,5	2.000	Y	
10	Polylinie	9,10	2.000	Y	
12	Polylinie	11,12	2.000	Y	
13	Polylinie	12,7,3	1.000	X	
14	Polylinie	13,14	2.000	Y	
15	Polylinie	14,15	2.000	X	
16	Polylinie	15,16	2.000	Y	
17	Polylinie	16,13	2.000	X	
18	Polylinie	17,18	2.000	Y	
19	Polylinie	18,19	2.000	X	
20	Polylinie	19,20	2.000	Y	
21	Polylinie	20,17	2.000	X	
22	Polylinie	21,22	2.000	Y	
23	Polylinie	22,23	2.000	X	
24	Polylinie	23,24	2.000	Y	
25	Polylinie	24,21	2.000	X	
26	Polylinie	25,26	2.000	Y	
27	Polylinie	26,27	2.000	X	
28	Polylinie	27,28	2.000	Y	
29	Polylinie	28,25	2.000	X	
30	Polylinie	29,30	2.000	Y	
31	Polylinie	30,31	2.000	X	
32	Polylinie	31,32	2.000	Y	
33	Polylinie	32,29	2.000	X	
34	Polylinie	33,34	2.000	Y	
35	Polylinie	34,35	2.000	X	
36	Polylinie	35,36	2.000	Y	
37	Polylinie	36,33	2.000	X	
38	Polylinie	37,38	2.000	Y	
39	Polylinie	38,39	2.000	X	
40	Polylinie	39,40	2.000	Y	
41	Polylinie	40,37	2.000	X	
42	Polylinie	41,42	2.000	Y	
43	Polylinie	42,43	2.000	X	
44	Polylinie	43,44	2.000	Y	
45	Polylinie	44,41	2.000	X	
46	Polylinie	45,46	2.000	Y	
47	Polylinie	46,47	2.000	X	
48	Polylinie	47,48	2.000	Y	
49	Polylinie	48,45	2.000	X	
50	Polylinie	49,50	2.000	Y	
51	Polylinie	50,51	2.000	X	
52	Polylinie	51,52	2.000	Y	
53	Polylinie	52,49	2.000	X	
54	Polylinie	74,11	1.000	X	
95	Polylinie	74,10	1.000	X	
97	Polylinie	9,7,3	1.000	X	

### 1.3 MATERIÁLY

Mat. č.	Modul E [MPa]	Modul G [MPa]	Poissonův souč. ν [-]	Objem. tíha γ [kN/m³]	Souč. tepl. roz. α [1/°C]	Souč. spolehlivosti γ <sub>M</sub> [-]	Materiálový model
1	Beton C25/30   EN 31000.000	Modul 12916.700   EN 1992-1-1:2004/AC:2010	0.200	25.00	1.00E-05	1.00	Izotropní plastický 2D/3D...
Další parametry pro materiály budou zadány v dialogu Materiálový model							
2	Beton C25/30   DIN 31000.000	Modul 12916.700   DIN 1045-1:2008-08	0.200	25.00	1.00E-05	1.00	Izotropní lineárně elastický



Projekt: Model: 01.08\_DruckerPrager\_ft1p2MPa\_fc100MPa\_Ep31 .. Datum: 05.01.2017

### 1.3.4 MATERIÁLY - MATERIÁLOVÝ MODEL - IZOTROPNÍ PLASTICKÝ 2D/3D

Mat. č.	Typ definice	Tečení Kritérium	Mez kluzu [MPa] f <sub>y,t</sub>   f <sub>y,c</sub>		Modul zpevnění E <sub>p</sub> [MPa]	Definice diagramu Krok   ε [-]   σ [MPa]		
1	Beton C25/30   EN 1992-1-1:2004/AC:2010 <input type="checkbox"/> Pouze lineárně elastický	Bilineární   Drucker-Prager	2.600	100.000	310.000	-	-	-

### 1.4 PLOCHY

Plocha č.	Typ plochy		Hraniční linie č.	Mat. č.	Tloušťka		Plocha A [m <sup>2</sup> ]	Hmotnost G [kg]
	Geometrie	Tuhost			Typ	d [mm]		
1	Rovinná	Standard	2-5	1	Konstantní	100.0	112.000	28000.0

### 1.4.2 PLOCHY - INTEGROVANÉ OBJEKTY

Plocha č.	Integrované objekty č.			Otvory	Komentář
	Uzly	Linie			
1		1		1-24	

### 1.6 OTVORY

Otvor č.	Hraniční linie č.	V ploše č.	Plocha A [m <sup>2</sup> ]	Komentář
1	52-50,53	1	4.000	
2	32-30,33	1	4.000	
3	48-46,49	1	4.000	
4	28-26,29	1	4.000	
5	44-42,45	1	4.000	
6	24-22,25	1	4.000	
7	40-38,41	1	4.000	
8	20-18,21	1	4.000	
9	36-34,37	1	4.000	
10	16-14,17	1	4.000	
11	12,54,95,10,97,13	1	4.000	
12	7,6,9,8	1	4.000	

### 1.8 LINIOVÉ PODPORY

Podpora č.	Na liniích č.	Vztažný systém	Natočení β [°]	Stěna v Z	Podepření resp. vetknutí					
					u <sub>x</sub>	u <sub>y</sub>	u <sub>z</sub>	φ <sub>x</sub>	φ <sub>y</sub>	φ <sub>z</sub>
1	3	Globální		<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
2	2,4	Globální		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### 2.1 ZATĚŽOVACÍ STAVY

Zatěž. stav	Označení zatěž. stavu	EN 1990   ČSN Kategorie účinků	Vlastní tíha - Součinitel ve směru			
			Aktivní	X	Y	Z
ZS1	Vlastní tíha	Stálé	<input checked="" type="checkbox"/>	0.000	1.000	0.000
ZS2	užitné	Stálé/užitné	<input type="checkbox"/>			
ZS3	Vlastní tíha	Stálé/užitné	<input checked="" type="checkbox"/>	1.000	0.000	0.000

### 2.1.1 ZATĚŽOVACÍ STAVY - PARAMETRY VÝPOČTU

Zatěž. stav	Označení zatěž. stavu	Parametry výpočtu	
		Způsob výpočtu	Aktivovat součinitele tuhosti:
ZS1	Vlastní tíha	<ul style="list-style-type: none"> <li><input checked="" type="radio"/> Teorie I. řádu (geometrický lineární výpočet)</li> <li><input checked="" type="radio"/> Metoda pro řešení systému nelineárních algebraických rovnic</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><input checked="" type="checkbox"/> Průřezy (součinitel pro J, I<sub>y</sub>, I<sub>z</sub>, A, A<sub>y</sub>, A<sub>z</sub>)</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Pruty (faktor pro G<sub>J</sub>, E<sub>I<sub>y</sub></sub>, E<sub>I<sub>z</sub></sub>, EA, GA<sub>y</sub>, GA<sub>z</sub>)</li> </ul>
ZS2	užitné	<ul style="list-style-type: none"> <li><input checked="" type="radio"/> Teorie I. řádu (geometrický lineární výpočet)</li> <li><input checked="" type="radio"/> Metoda pro řešení systému nelineárních algebraických rovnic</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><input checked="" type="checkbox"/> Průřezy (součinitel pro J, I<sub>y</sub>, I<sub>z</sub>, A, A<sub>y</sub>, A<sub>z</sub>)</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Pruty (faktor pro G<sub>J</sub>, E<sub>I<sub>y</sub></sub>, E<sub>I<sub>z</sub></sub>, EA, GA<sub>y</sub>, GA<sub>z</sub>)</li> </ul>
ZS3	Vlastní tíha	<ul style="list-style-type: none"> <li><input checked="" type="radio"/> Teorie I. řádu (geometrický lineární výpočet)</li> <li><input checked="" type="radio"/> Metoda pro řešení systému nelineárních algebraických rovnic</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><input checked="" type="checkbox"/> Průřezy (součinitel pro J, I<sub>y</sub>, I<sub>z</sub>, A, A<sub>y</sub>, A<sub>z</sub>)</li> <li><input checked="" type="checkbox"/> Pruty (faktor pro G<sub>J</sub>, E<sub>I<sub>y</sub></sub>, E<sub>I<sub>z</sub></sub>, EA, GA<sub>y</sub>, GA<sub>z</sub>)</li> </ul>

### 3.1 ZATÍŽENÍ NA UZEL - PO KOMPONENTECH - SOUŘADNÝ SYSTÉM

ZS2: užitné

č.	Na uzlech č.	Souřadný systém	Síla [kN]			Moment [kNm]		
			P <sub>x</sub>	P <sub>y</sub>	P <sub>z</sub>	M <sub>x</sub>	M <sub>y</sub>	M <sub>z</sub>
1	4	0   Globální XYZ	10.000	10.000	0.000	0.000	0.000	0.000

ZS2  
užitné

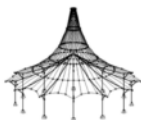


Projekt: Model: 01.08\_DruckerPrager\_ft1p2MPa\_fc100MPa\_Ep31 .. Datum: 05.01.2017

RF-DYNAM  
PŘ1  
Dynamická analýza

## 1.1 ZÁKLADNÍ ÚDAJE

Zvolená metoda:	<input checked="" type="checkbox"/> Vlastní tvary	
	<input type="checkbox"/> Buzená kmitání	
	<input type="checkbox"/> Náhradní břemena	
Počet nejmenších vlastních hodnot:	4	
Hledat frekvence	<input type="checkbox"/>	
Použít vlastní tíhu jako hmotu s faktorem:	<input checked="" type="checkbox"/> 1.00	
Vliv normálových sil aktivován	<input type="checkbox"/>	
Metoda výpočtu:	Lanczosova metoda	
Účinek hmot ve:	<input checked="" type="checkbox"/> Směru X	<input checked="" type="checkbox"/> Rotační X
	<input checked="" type="checkbox"/> Směru Y	<input checked="" type="checkbox"/> Rotační Y
	<input checked="" type="checkbox"/> Směru Z	<input checked="" type="checkbox"/> Rotační Z
Typ matice hmot:	Diagonální s torzními členy	
Normování vlastních tvarů:	Na 1 tak, že $ u  = 1$	
Vnitřní dělení prutů	<input type="checkbox"/>	



Projekt: Model: 01.08\_DruckerPrager\_ft1p2MPa\_fc100MPa\_Ep31 .. Datum: 05.01.2017

## 1.1 OBECNÉ ÚDAJE

Aktivita	<input checked="" type="checkbox"/> Modální analýza (vlastní tvary) <input type="checkbox"/> Hmotové kombinace <input checked="" type="checkbox"/> Buzená kmitání <input type="checkbox"/> Spektrum odezvy <input checked="" type="checkbox"/> Akcelerogramy <input checked="" type="checkbox"/> Časové diagramy <input type="checkbox"/> Metoda náhradního zatížení
Nastavení	Gravitační zrychlení : 10.00 m/s <sup>2</sup>

## 1.2.1 HMOTOVÉ STAVY - OBECNÉ

No.	Označení hmot. stavu	Parameters
HS1	Typ hmot. stavu : Stálé Hmoty	<input checked="" type="checkbox"/> : Od vlastní tíhy konstrukce <input checked="" type="checkbox"/> : Ručně definované přídatné hmoty na plochy

HS1

## 1.2.5 HMOTOVÉ STAVY - PŘÍDAVNÉ HMOTY NA PLOCHÁCH

č.	Seznam ploch s hmotami	Hmoty m [kg/m <sup>2</sup> ]	Komentář
1	1	2000.000	

## 1.4.1 STAV VLASTNÍHO KMITÁNÍ - OBECNÉ

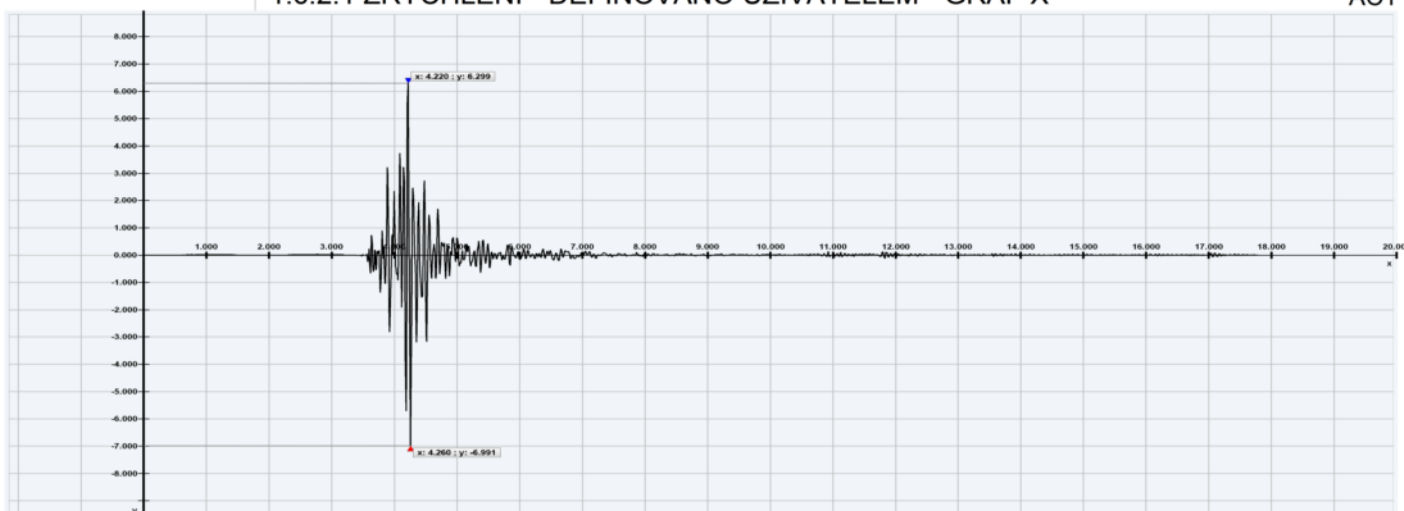
Případ vlast. kmi	Popis stavu vlastního kmitání	Parametry
PVK1	HS1	Počet nejmenších vlastních čísel : 1 Působící hmoty : HS1 Hmoty uvažované v : <input checked="" type="checkbox"/> Směr X <input checked="" type="checkbox"/> Směr Y <input checked="" type="checkbox"/> Okolo Z

## 1.4.2 STAV VLASTNÍHO KMITÁNÍ - PARAMETRY VÝPOČTU

Případ vlast. kmi	Popis stavu vlastního kmitání	Parametry výpočtu
PVK1	HS1	Typ matice hmotnosti : Diagonální matice Zvětšení vlastních tvarů kmitání : Max {u <sub>j</sub> } = 1 Metoda řešení vlastních čísel : Lanczosova metoda

## 1.6.2.1 ZRYCHLENÍ - DEFINOVÁNO UŽIVATELEM - GRAF X

AC1



## 1.8.1 DYNAMICKÉ ZATĚŽOVACÍ STAVY - OBECNÉ

DZS Stav	Označení dynamických zatež. stavů	Parametry
DZS1	seismicita	Typ metody : Časová analýza - seizmická (nutný akcelerogram) Přidat vlastní kmitání : Stav vlastního kmitání: PVK1
DZS2	časová fce	Typ metody : Časová analýza - dynamické zatížení (vyžaduje časový diagram) Přidat vlastní kmitání : Stav vlastního kmitání:



Projekt: Model: 01.08\_DruckerPrager\_ft1p2MPa\_fc100MPa\_Ep31 .. Datum: 05.01.2017

### 1.8.1 DYNAMICKÉ ZATĚŽOVACÍ STAVY - OBECNÉ

DZS Stav	Označení dynamických zatež. stavů	Parametry
DZS3	POMOCNY	PVK1 Typ metody : Časová analýza - seizmická (nutný akcelerogram) Přiřadit vlastní kmitání : Stav vlastního kmitání: PVK1

### 1.8.4.1 DYNAMICKÉ ZATĚŽOVACÍ STAVY - ČASOVÁ ANALÝZA DYNAMICKÉHO ZATÍŽENÍ

DZS Stav	Označení dynamických zatež. stavů	Parametry
DZS2	časová fce	Zatěžování - sady časových diagramů: Počet = 1 Přiřadit graf závislosti zatížení na čase: Sady podpor 1: Zatěžovací stav / Kombinace zatížení ZS2 - užiténé Časový diagram ČD1 Součinitel násobení 1.000 Součinitel násobení 1.000 Parametry integrace: <input checked="" type="checkbox"/> Ručně Časový krok: $\Delta t = 0.000040$ [s] Maximální čas: $t_{max} = 2.000000$ [s] Aktivovat: <input type="checkbox"/> Počáteční deformace od zatěžovacího stavu Vygenerovat: <input type="checkbox"/> Výsledky vybraných časových kroků v zatěžovacích stavech / v kombinacích výsledků (obálka): Rayleighův útlum: $\alpha = 0.00001$ [rad/s] $\beta = 0.00000$ [rad/s]