VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

MATEMATIKA PRO ELEKTROMAGNETISMUS

MATHEMATICS FOR ELECTROMAGNETISM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

MICHAEL RÁRA

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.

BRNO 2017

Abstrakt
Cílem práce je pomocí vybraných kapitol matematiky, konkrétně tenzorů, vektorových polí, orientovaných křivkových a plošných integrálů a integrálních vět, popsat elektromagnetické zákony včetně odvození Maxwellových rovnic pomocí diferenciálního, integrálního i tenzorového počtu s následnou ukázkou užitečnosti tenzorového zápisu těchto rovnic.

Abstract
The goal of this thesis is the description of elektromagnetism by means of selected parts of mathematics, in particular tensors, vector fields, integral calculus and integral theorems. Maxwell's equations will be derived by means of these notions in integral form, differential form and tensor form, we also show usefulness of tensor form of these equations.

klíčová slova
Elektromagnetismus, Tenzory, Vektorová pole, Integrální věty, Maxwellovy rovnice.

keywords
Elektromagnetism, Tensors, Vector fields, Integral theorems, Maxwell's equations.

RÁRA, M.*Matematika pro elektromagnetismus*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 36s. Vedoucí bakalářské práce prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc, dr. h. c

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně dle pokynů vedoucího a za použití uvedené literatury

Michael Rára

Děkuji panu prof. RNDr. Miroslavu Doupovcovi, CSc., dr. h. c. za vstřícný přístup, rady a poskytnutí literatury. Stejně tak děkuji panu prof. RNDr. Petru Dubovi, CSc.

Michael Rára

Obsah

1 Úvod

Elektrické a magnetické pole se v přírodě zcela běžně vyskytují. Magnetické pole je například kolem Země a svým působením vychyluje střelku kompasu na sever. Blesky při bouřkách jsou zase typickými představiteli elektrických sil. Elektromagnetické pole je potom takové pole, kde je přítomno magnetické i elektrické pole.

Elektromagnetické zákony se velmi často uplatňují v technických disciplínách, zejména elektrotechnice a elektronice, proto je nutné umět elektromagnetické pole s jeho účinky správně matematicky popsat, což umožní provádět korektní výpočty.

Pro tento popis se užívá zejména teorie vektorových polí a tenzorů, doplněná o diferenciální a integrální počet, v němž se uplatňuje zejména orientovaný křivkový a orientovaný plošný integrál s následným využitím integrálních vět.

Ačkoliv byly elektřina a magnetismus dlouhou dobu považovány za zcela oddělené disciplíny, je v dnešní době díky objevu zákonu elektromagnetické indukce známo, že tyto dva jevy tvoří dvě strany jedné mince. Nejzákladnější kapitolou této problematiky jsou Maxwellovy rovnice elektromagnetismu, které elektromagnetismus zcela popisují.

Pro popsání elektromagnetického pole je důležité vědět, že výsledky, které v něm měříme, jako např. intenzita elektrického pole a intenzita magnetické indukce, jsou závislé na souřadné soustavě. Z toho důvodu je nutné zavést vhodně transformační vztahy, které umožní přepočítat výsledky mezi dvěma různými souřadnými systémy. Nejobecnější popis elektromagnetismu je vhodné provádět pomocí tenzoru elektromagnetického pole a jeho transformací. Výhodnost tenzorového popisu dále spočívá v jednoduchém odvození vybraných fyzikálních vztahů

Předložená práce má tedy dvě části, které se navzájem doplňují. Jednak je to matematická část, kde shrneme matematický aparát potřebný pro popis Maxwellových rovnic. Zvláštní pozornost zde věnujeme tenzorům, kde ukážeme ekvivalentnost intuitivního zadání tenzoru jako „čísel s indexy, které se jistým způsobem transformují při změně souřadnic“ a korektní matematické definice tenzoru jako multilineárního zobrazení. Fyzikální část práce se zabývá základními zákony elektromagnetismu s následným odvozením Maxwellových rovnic v integrálním, diferenciálním a tenzorovém tvaru a je obsahem 8. a 9. kapitoly. Poznamenejme, že veškeré uvedené fyzikální vztahy jsou uvažovány v prostředí vakua.

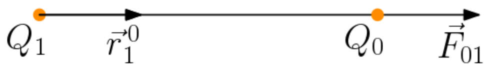
2 Úvod do elektromagnetismu

2.1 Elektrický náboj a Coulombův zákon

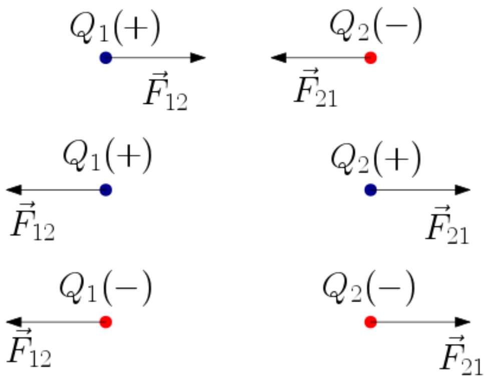
Na nabitou částici s nábojem Q_0 působí částice s nábojem Q_1 elektrickou silou podle vztahu známého jako Coulombův zákon

$$\vec{F}_{01} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0 Q_1}{r_{01}^2}\vec{r}^{\,0}_{01} \tag{2.1}$$

kde $\vec{r}^{\,0}_{01}$ je polohový vektor částice 0 vůči částici 1 (viz obrázek 1). Konstanta $\varepsilon_0 = 8,854187818 \cdot 10^{-12}$ se nazývá permitivita vakua.



(a) Coulombův zákon pro $Q_0 Q_1 > 0$.



(b) Síly mezi nabitými částicemi.

Obrázek 1

Elektrický náboj Q, který může být kladný, nebo záporný, je charakteristikou částice. Elektrický náboj se zachovává a je kvantován[1]

$$Q = ne, \qquad \text{pro } n \in Z \tag{2.2}$$

přičemž $e = 1,602176565(35) \cdot 10^{-19}$ C je elementární náboj.

Základními stavebními prvky atomů jsou tři částice, a sice neutron bez elektrického náboje, elektron s negativním nábojem $-e$ a pozitivně nabitý proton o náboji e. Samotný neutron je z hlediska elektromagnetismu nezajímavý, neboť jeho nulový náboj způsobuje, že tato částice neinteraguje se samotným elektrickým či magnetickým polem. Zbylé dvě částice jsou předmětem zájmu studia elektromagnetismu a jsou označovány jako nosiče náboje.

Pohybuje-li se náboj, vzniká elektrický proud, který lze definovat následovně

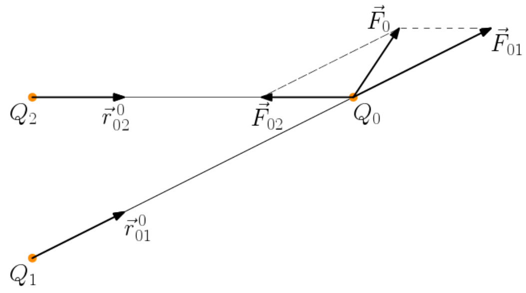
$$I = \frac{dQ}{dt}. \tag{2.3}$$

Pro elektrickou sílu platí princip superpozice. Jsou-li v okolí částice o náboji Q_0 dvě částice s náboji Q_1 a Q_2, potom síla, která působí na částici 0, je dána vztahem (viz obrázek 2)

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02}. \tag{2.4}$$

Princip superpozice platí pro libovolný systém sil.

[1] Na tuto skutečnost je navázáno v poslední kapitole.



Obrázek 2: Princip superpozice pro situaci, kdy platí $Q_0, Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$.

2.2 Elektrické pole

Intenzitu elektrického pole definujeme vztahem

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{Q_0} \tag{2.5}$$

kde $\vec{F}_0$ je elektrická síla, která působí na zkušební náboj Q_0. Elektrické pole je vektorovým polem[2], tento matematický pojem je v problematice elektromagnetismu významný, proto bude v dalším textu podrobněji vysvětlen. V elektrickém poli je každému bodu dané oblasti Ω popsaného polohovým vektorem $\vec{r}$, přiřazen vektor $\vec{E}$.

Elektrické pole znázorňujeme pomocí siločar. Siločáry jsou myšlené křivky, pomocí nichž můžeme snadno znázornit intenzitu a směr elektrického pole. Intenzitu pole vyjadřuje hustota siločar, kde místa s vyšší intenzitou obsahují větší počet siločar, než místa s intenzitou nižší a směr je určen orientací křivek, přičemž tečna siločáry v bodě je vektor elektrické intenzity. Platí, že siločáry z kladně nabitých částic vybíhají a končí v částicích nabitých záporně.

Pro intenzitu elektrického pole platí princip superpozice. Vytváří-li náboj Q_1 v bodě P elektrické pole $\vec{E}_1$ a náboj Q_2 vytváří v témže bodě pole $\vec{E}_2$, potom intenzita $\vec{E}$ výsledného pole v tomto bodě (vytvářené současně oběma náboji Q_1, Q_2) je dána vztahem

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Jakmile známe intenzitu elektrického pole v bodě P, pak síla, kterou elektrické pole působí na náboj v tomto bodě, je dána vztahem

$$\vec{F}_0 = Q_0\vec{E}.$$

Poznamenejme, že elektrické pole není jen matematickou konstrukcí, ale je fyzikální entitou. Elektrické pole má energii, jejíž hustota w_e je úměrná čtverci intenzity elektrického pole $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$.

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že práce elektrické síly dané vztahem (2.1) nezávisí na trajektorii

$$W = \int\limits_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{dr} = Q_0 \int\limits_{\gamma} \vec{E} \cdot \vec{dr} = E_{pi} - E_{pf}. \tag{2.6}$$

[2]Pojem je přesně zadefinován v kapitole 3.

Symbolem γ myslíme libovolnou křivku spojující body i, f a E_{pi}, E_{pf} jsou potenciální energie v bodě i a bodě f. Pole, v němž platí, že orientovaný křivkový integrál[3] nezávisí na tvaru křivky[4], nazveme polem potenciálovým.[5]

Z Coulombova zákona plyne Gaussův zákon elektrostatiky, který říká, že tok vektoru intenzity elektrického pole libovolnou uzavřenou plochou je úměrný náboji uvnitř této plochy.

Pro popis elektromagnetismu potřebujeme orientovaný křivkový a orientovaný plošný integrál[6], proto budou v dalším textu podrobně vysvětleny.

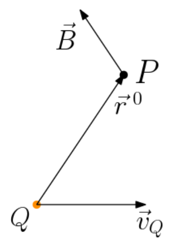
Nakonec poznamenejme, že jsme se dosud zabývali pouze elektrickým polem buzeným náboji v klidu.

2.3 Magnetické pole

Pohybující se elektrické náboje budí nejen elektrické, ale i magnetické pole. Magnetické pole je opět vektorové pole a je popsáno vektorem magnetické indukce $\vec{B}$. Magnetické pole náboje Q, který se pohybuje rychlostí $\vec{v_Q}$ ($v_Q \ll c$), je v bodě P dáno vztahem (viz Biotův-Savartův zákon, který je podrobně popsán v [4])

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\vec{v}_Q \times \vec{r}^{\,0}}{r^2}$$

kde $\vec{r}^{\,0}$ je polohový vektor bodu P vůči poloze náboje Q a $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ TmA^{-1} je permeabilita vakua.



Obrázek 3: Magnetické pole buzené kladným nábojem Q pohybujícím se rychlostí $\vec{v}_Q$. Vektor $\vec{B}$ je kolmý k vektorům $\vec{r}, \vec{v}_Q$ a vystupuje ze stránky.

Magnetické pole pak vzniká kolem vodiče jímž prochází elektrický proud.

Doplňme, že princip superpozice platí i pro magnetické pole, a tedy diferenciální rovnice popisující tato pole musí být lineární.

Magnetické pole můžeme stejně jako pole elektrické znázornit graficky pomocí indukčních čar, pro které používáme stejná pravidla popisu jako pro siločáry. Zatímco siločáry statického elektrického pole mají začátek a konec, indukční čáry nikde nezačínají ani nekončí, jsou to tedy uzavřené křivky. To znamená, že tok vektoru magnetické indukce $\vec{B}$ libovolnou uzavřenou plochou je roven nule. Tento zákon, který ve svém matematickém zápisu využívá orientovaný plošný integrál, se nazývá Gaussův zákon pro magnetické pole a bude podrobněji vyložen v kapitolách 8 a 9.

[3]Pojem je přesně zadefinován v kapitole 6.

[4]Pojem je přesně zadefinován v kapitole 5.

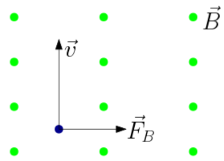
[5]Plné znění je vektorové potenciálové pole. První přívlastek se však často vynechává. Přesné zadefinování tohoto pojmu je v kapitole 3.

[6]Oba pojmy jsou přesně zadefinovány v kapitole 6.

Platí, že magnetické pole působí pouze na nabitou částici, která se pohybuje. Experimentálně bylo zjištěno, že síla, zvaná Lorentzova, působící na částici o náboji Q_0 a pohybující se rychlostí v vůči magnetickému poli, je dána vztahem,

$$\vec{F}_B = Q_0 \vec{v} \times \vec{B}.$$

Obrázek 4 znázorňuje působení magnetického pole vystupujícího ze stránky, znázorněného zelenými tečkami, na kladně nabitou částici, znázorněnou modře, pohybující se rychlostí v. Jestliže vektory $\vec{v}$, $\vec{B}$ jsou kolmé, nabitá částice se v magnetickém poli pohybuje po



Obrázek 4: Vliv magnetického pole na kladně nabitou částici.

kružnici, pokud má rychlost nenulový průmět do směru $\vec{B}$, nabitá částice se pohybuje po šroubovici.

2.4 Elektromagnetické pole

V roce 1831 Michael Faraday experimentálně zjistil, že proměnné magnetické pole budí pole elektrické. Pokud plochou, která je ohraničená uzavřenou vodivou smyčkou prochází v čase proměnný tok magnetické indukce, pak se v této smyčce indukuje elektromotorické napětí.

Maxwell později ukázal, že platí i opačná relace, tedy že proměnný tok elektrického pole procházející oblastí ohraničenou uzavřenou křivkou, indukuje magnetické pole a všechny rovnice elektromagnetismus shrnul do čtyřech rovnic, které nesou jeho jméno viz. kapitoly 8 a 9. Z těchto rovnic vyplynulo, že elektromagnetické pole se šíří prostorem v podobě elektromagnetických vln. Existenci těchto vln v roce 1887 experimentálně prokázal Heinrich Rudolf Hertz.

Elektrické i magnetické pole závisí na vztažné soustavě. Měříme-li intenzitu elektrického a magnetického pole v jedné vztažné soustavě a poté v jiné, tak naměříme rozdílné hodnoty. Proto je důležité zavést obecné transformace, které nám umožní přepočítávat naměřené výsledky z jedné inerciální vztažné soustavy do jiné. Tyto transformační vztahy využívají Minkowského prostor[7] a popis elektromagnetického pole pomocí tenzorů[8].

3 Vektory a vektorová pole

3.1 Vektory

Nyní připomeneme matematický aparát potřebný pro popsání problematiky vektorových polí

Definice 3.1. Nechť V je neprázdná množina taková, že platí:

[7] Bude definovaný v kapitole 9.

[8] Budou definovány v kapitole 4.

1. Existuje zobrazení $f : V \times V \to V$, splňující pro $\forall x, y \in V$ tyto podmínky
   - x+y=y+x.
   - x+(y+z)=(x+y)+z.
   - $\exists!$ prvek z V, který značíme symbolem 0, takový, že pro všechny prvky z V platí x+0=x. Tento prvek se nazývá prvek neutrální.
   - Pro každý prvek $y \in V$ existuje prvek (-y), přičemž platí y+(-y)=0. Takový prvek se nazývá prvek inverzní.
2. Existuje zobrazení $g : V \times C \to V$, splňující pro $\forall \alpha, \beta \in C$ tyto podmínky
   - $\alpha(\beta$x)=($\alpha\beta$)x.
   - 1·x=x.
   - $(\alpha + \beta)$x=αx+βx.
   - α(x+y)=αx+αy.

   Symbolem C rozumíme množinu komplexních čísel, která je nadmnožinou k množině reálných čísel R.

Množina V s uvedenými vlastnostmi se pak nazývá vektorový prostor a to buď komplexní nebo reálný, podle toho zda jsou čísla α, β komplexní či reálná. Prvky množiny V označujeme pojmem vektory a čísla α, β skaláry.

Vektorový prostor je tedy množina V, kde je definováno sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem.

3.2 Vektorová pole

Intenzita elektrického pole $\vec{E}$ a intenzita magnetického pole $\vec{B}$ jsou pole vektorová, proto nyní zavedeme matematický aparát potřebný k matematickému popisu vektorových polí, která budou dále užita při zavádění integrálních vět.

Nechť $f_1, .., f_n : R^n \to R$ je n funkcí n proměnných. Pak

$$\vec{F} := (f_1, .., f_n)$$

se nazývá vektorové pole. Platí tedy

$$\vec{F} : R^n \to R^n,\ F(A) = (f_1(A), ..., f_n(A)),\ A \in R^n.$$

Vektorové pole $\vec{F}$ je tedy vektor, jehož souřadnice jsou funkce n proměnných. Vektorové pole $\vec{F}$ se pak nazývá diferencovatelné (popř. třídy C^r), pokud tuto vlastnost mají všechny jeho složky $f_1, .., f_n$.

Příkladem vektorového pole je gradient funkce více proměnných $f(x_1, ..., x_n)$,

$$grad\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

V tomto případě $V = R^n$, proto $grad\, f$ je vektorové pole tvaru $grad\, f : R^n \to R^n$,

$$grad\, f(A) = \left(\frac{\partial f(A)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f(A)}{\partial x_n}\right),\ A \in R^n.$$

Pro $n = 2$, vektorové pole nazýváme rovinné, pro $n = 3$ používáme název prostorové.

Pro vektorové pole zavádíme několik základních operátorů využívajících parciální derivace. Prvním z nich je Hamiltonův operátor ∇. Jde o diferenciální operátor prvního řádu

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Hamiltonův operátor tedy vyjadřuje parciální derivace a pro diferencovatelné vektorové pole jej lze využít třemi různými způsoby:

- Jestliže jej aplikujeme na funkci f o n proměnných, výsledkem bude gradient této funkce
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$
- Hamiltonův operátor lze také využít ve formě skalárního součinu s vektorovým polem
$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial a_n}{\partial x_n}.$$
Výsledkem je skalární funkce zvaná divergence. O divergenci platí, že je nezávislá na souřadném systému a jejím výsledkem je skalární pole. V případě divergence rozeznáváme tři základní případy, jenž se vztahují k pevně zvolenému bodu vektorového pole:
  1. Jestliže pro vektorové pole platí: $\nabla \cdot \vec{a} = o$ potom jde o nezřídlové pole.
  2. Body vektorového pole v nichž platí: $\nabla \cdot \vec{a} > 0$ se označují jako zřídla, či zdroje.
  3. Body vektorového pole v nichž platí: $\nabla \cdot \vec{a} < 0$ se označují jako nory, či propady.
- Pomocí vektorového součinu Hamiltonova operátoru a vektorového pole definujeme rotaci tohoto pole následovně:
$$\nabla \times \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}, \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right).$$
I zde se se podle výsledné hodnoty $\nabla \times \vec{a}$ pole dělí na dvě skupiny:
  1. Vektorové pole pro které platí: $\nabla \times \vec{a} = \vec{o}$ se nazývá nevírové.
  2. Vektorové pole pro které platí: $\nabla \times \vec{a} \neq \vec{o}$ se nazývá vírové.

Snadno se ukáže, že platí:
1. $\nabla \cdot (\nabla f) = \triangle f$, výsledkem je skalární pole, kde $\triangle f$ je Laplaceův operátor.
2. $\nabla \times (\nabla f) = \vec{o}$.
3. $\nabla(\nabla \cdot \vec{a})$, výsledkem je vektorové pole.
4. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = o$.
5. $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$.

S problematikou vektorových polí dále souvisí následující pojmy.

Definice 3.2. Nechť je na jednoduše souvislé oblasti Ω definováno vektorové pole $\vec{a} : R^n \to R^n$ a reálná funkce $f : R^n \to R$, pro niž platí
$$\vec{a} = \nabla f$$
potom $\vec{a}$ nazveme potenciálovým vektorovým polem a funkci f jeho potenciálem.

Z předchozího textu plyne, že pro potenciálové pole platí $\nabla \times \vec{a} = \vec{o}$. Dále platí, že pokud je oblast Ω jednoduše souvislá a konvexní, tak z $\nabla \times \vec{a} = \vec{o}$ plyne, že $\vec{a}$ je potenciálové.

4 Tenzory

Chceme-li popsat přírodní děje, obvykle si vystačíme se skalárními hodnotami jako např. teplota, nebo vektory např. pohyb tekutiny. Vyskytují se však také veličiny, které pro jednoznačné popsání v soustavě souřadnic potřebují více hodnot. Takové veličiny se nazývají tenzory a popisujeme je souřadnicemi $T^{ij...k}_{lm...n}$, kde písmena i, j, k, l, m, n jsou indexy. Tyto souřadnice se mění se souřadnou soustavou. V této kapitole ukážeme korektní matematický postup pro zavádění tenzorů a pojmů s nimi souvisejícími, který srovnáme s více intuitivním postupem užívaným ve fyzice.

Dále budeme využívat Einsteinovu sumační symboliku, která v součtu zapsaném sumou např. $\sum_{i=1}^{n} x^i y_i$ vypouští znak sumy, když se sčítací index i vyskytuje u jednoho výrazu nahoře a u jiného dole.

Věta 4.1. *Nechť vektorový prostor V má bázi $\{e_1, ..., e_n\}$ (dále jen e), pak pro vektor $u \in V$ se souřadnicemi $(u^1, ..., u^n)$ v bázi e a souřadnicemi $(\overline{u}^1, ..., \overline{u}^n)$ v bázi $\{b_1, ..., b_n\}$ (dále jen b) existuje transformační vztah využívající matice přechodu od báze b k bázi e $A = A^i_j$, $\overline{A} = A^{-1}$, podle následujícího pravidla:*

$$u^i = A^i_j \overline{u}^j,\ \overline{u}^i = \overline{A}^i_j u^j,\ i = 1, ..., n.$$

Důkaz lze nalézt v [2].

K definování pojmu tenzor je nutné nejprve zavést definici lineární formy a s ní související definicí duálního vektorového prostoru.

Definice 4.2. Lineární formou nazýváme reálnou funkci $f : V \to R$, kde V je vektorový prostor, pro kterou platí

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \Rightarrow f(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{a}) + \beta f(\mathbf{b}), \alpha, \beta \in R, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V.$$

Lineární formy na V se také nazývají kovektory vektorového prostoru V. Zobrazení $g : V \to W$, kde W je také vektorový prostor, splňující výše zmíněné podmínky označujeme pojmem lineární zobrazení. Je-li g bijektivní, pak se nazývá izomorfismus vektorových prostorů V a W.

Definice 4.3. Lineární formy na V tvoří vektorový prostor nazývaný duální vektorový prostor k V označovaný symbolem V^*. Platí, že $dimV = dimV^*$.

Uveďme jednoduchý a názorný příklad lineární formy.

Příklad 1 Nechť $\{e_1, ..., e_n\}$ je báze V, potom lze každý vektor z V vyjádřit ve tvaru $v = v^i e_i$, kde symboly v^i rozumíme souřadnice v, tj. $v = (v^1, ..., v^n)$. Uvažujme zobrazení $e^i : V \to R$, $e^i(v) = v^i$. Toto zobrazení je lineární formou na V, které každému vektoru $v \in V$ přiřazuje jeho $i - tou$ souřadnici v bázi $\{e_1, ..., e_n\}$. Zřejmě platí, že $e^i(e_j) = \delta^i_j$, kde δ^i_j je Kroneckerův delta-symbol definovaný vztahem

$$\delta^i_j = \begin{cases} 0 & \text{pro i} \neq \text{j} \\ 1 & \text{pro i = j} \end{cases}.$$

Každá báze $\{e_1, ..., e_n\}$ vektorového prostoru V tedy indukuje n lineárních forem $e^i, ..., e^n \in V^*$.

Definice 4.4. Nechť vektorový prostor V je určen bází $\{e_1, ..., e_n\}$. Pojmem duální báze se označuje báze $\{e^1, ..., e^n\}$ duálního prostoru V^*, která je definovaná vztahem $e^i(e_j) = \delta^i_j$.

Věta 4.5. *Má-li V bázi $\{e_1, ..., e_n\}$, tak potom lineární formy $e^i, ..., e^n \in V^*$ z příkladu 1 tvoří bázi duálního prostoru V^*.*

Důkaz této věty lze nalézt v [2].

Definice 4.6. Nechť je na vektorovém prostoru V s bází $\{e_1, ..., e_n\}$ definovaná lineární forma $f : V \to R$, pak pro každý vektor $x = x^i e_i \in V$, platí $f(x) = f(x^i e_i) = x^i f_i$, kde symbolem f_i rozumíme $f_i := f(e_i)$. Vidíme, že $f(x)$ je lineárním výrazem souřadnic x^i vektoru x a čísla f_i nazýváme souřadnicemi lineární formy f vzhledem k bázi $\{e_1, ..., e_n\}$.

Podle následující věty je možné matici přechodu využít i pro transformaci souřadnic lineárních forem.

Věta 4.7. *Nechť lineární forma $f : V \to R$ má souřadnice $(f_1, ..., f_n)$ vzhledem k bázi $\{e_1, ..., e_n\}$ vektorového prostoru V a souřadnice $(\overline{f}_1, ..., \overline{f}_n)$ vzhledem k jiné bázi $\{b_1, ..., b_n\}$ téhož V. Dále uvažujme matici přechodu A^i_j od báze $\{e_1, ..., e_n\}$ k bázi $\{b_1, ..., b_n\}$. Potom platí*

$$\overline{f}_i = A^j_i f_j, \; i = 1, ..., n.$$

Důkaz této věty lze nalézt v [2].

Definice 4.8. Bilineární forma je zobrazení $g : V \times V \to R$ na V, které je lineární v obou svých vektorových argumentech $\forall u, v, w \in V, c \in R$, tj.

$$g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w), \qquad g(c \cdot u, v) = c \cdot g(u, v)$$

$$g(u, v + w) = g(u, v) + g(u, w), \qquad g(u, c \cdot v) = c \cdot g(u, v).$$

Bilineární forma je symetrická, pokud $g(u, v) = g(v, u)$ $\forall u, v \in V$. Když $g(v, v) > 0$ $\forall v \in V, v \neq 0$ nazývá se pozitivně definitní. Skalární součin je taková symetrická bilineární forma, která je pozitivně definitní. Skalární součin dvou vektorů se často značí $u \cdot v$.

Souřadnice bilineární formy vzhledem k dané bázi definujeme následovně.

Definice 4.9. Souřadnice bilineární formy v bázi $\{e_i, ..., e_n\}$ jsou čísla $g_{ij} := g(e_i, e_j)$. Matice $G = (g_{ij})$ je maticí bilineární formy g.

Následující věta popisuje, jak se transformují souřadnice bilineární formy při změně báze.

Věta 4.10. *Nechť $G = (g_{ij})$ je matice bilineární formy g v bázi $\{e_i, ..., e_n\}$ a $\bar{G} = \bar{g}_{ij}$ je matice stejné bilineární formy g v bázi $\{b_1, ..., b_n\}$, potom platí*

$$\bar{g}_{ij} = A^r_i A^s_j g_{rs}$$

kde $A = (A^i_j)$ je matice přechodu od báze $\{e_i, ..., e_n\}$ k bázi $\{b_1, ..., b_n\}$.

Pomocí matice přechodu tedy můžeme transformovat souřadnice dané bilineární formy v jiné bázi.

Pro libovolný prvek $u \in V$ definujme funkci $\tilde{g}_u : V \to R$ předpisem $\tilde{g}_u(v) = g(u, v)$. Tato funkce je lineární formou na V a platí, že každému vektoru $u \in V$ lze pomocí skalárního součinu g na V přiřadit lineární formu $f := \tilde{g}_u \in V^*$ podle následujícího pravidla

$$f_i = g_{ij} u^j, \text{ kde } g_{ij} \text{ je metrický tenzor.}$$

Věta 4.11. *Nechť V je konečněrozměrný vektorový prostor, na němž je definovaný skalární součin g. Tento skalární součin potom určuje izomorfismus $F : V \to V^*$ vztahem $F(u) = \tilde{g}_u$.*

Zobrazení mezi všemi vektory $u \in V$ a lineárními formami $f \in V^*$ je tedy izomorfismem. Důkaz této věty lze nalézt v [2].

S využitím předchozích definic a vět je nyní možno korektně definovat tenzor.

Definice 4.12. Nechť má vektorový prostor V konečnou dimenzi, potom zobrazení

$$F : V \times \cdots \times V \times V^* \times \cdots \times V^* \to R$$

v němž se V vyskytuje r-krát a V^* s-krát se nazývá r-krát kovariantním a s-krát kontravariantním tenzorem na V, nebo že F je tenzorem typu (s,r) na V.

Pro lepší pochopení nyní uvedeme vybrané příklady tenzorů.

Příklady tenzorů

1. Lineární forma je zobrazení $F : V \to R$, jde tedy o tenzor typu $(0, 1)$.
2. Vektory jsou zobrazení $F : V^* \to R$, jde tedy o tenzor typu $(1, 0)$.
3. Nechť zobrazení $F : V \times V^* \to R$ je definováno následovně: $F(v, f) = f(v)$, pak F je tenzor typu $(1, 1)$.
4. Tenzor utvořený předpisem

$$\varepsilon_{i_1,...,i_n} = \begin{cases} 1 & \text{, když } (i_1,...,i_n) \text{ je sudá permutace z čísel } (1,...,n) \\ -1 & \text{, když } (i_1,...,i_n) \text{ je lichá permutace z čísel } (1,...,n) \\ 0 & \text{, pro ostatní případy} \end{cases} \tag{4.1}$$

se nazývá Levi-Civitův tenzor. Příkladem sudé permutace indexů je např. $\varepsilon_{1,2,3} = \varepsilon_{2,3,1} = \varepsilon_{3,1,2} = 1$ a příkladem liché permutace indexů je např. $\varepsilon_{1,3,2} = \varepsilon_{2,1,3} = \varepsilon_{3,2,1} = -1$.
5. Tenzorem je i bilineární forma. Je-li bilineární forma symetrická, pak je označována pojmem metrický tenzor[9] tj. symetrické bilineární zobrazení $g : V \times V \to R$.

Uveďme příklad tenzorového zápisu. Znovu uvažujme vektorový prostor V s bází $\{e_1, ..., e_n\}$ a k němu duální vektorový prostor V^* s bází $\{e^1, ..., e^n\}$ a tenzor F typu $(s, r) \neq (0, 0)$. Ve V uvažujme r vektorů a v V^* s lineárních forem. S využitím Einsteinovy sumační symboliky lze každý vektor i lineární formu zapsat ve zkráceném tvaru $v_p = v_p^i e_i$, $f^q = f_j^q e^j$, kde $p = 1, ..., r, q = 1, ..., s$. Potom

$$F(v_1, ..., v_r, f^1, ..., f^s) = F(v_1^{i_1} e_{i_1}, ..., v_r^{i_r} e_{i_r}, f_{j_1}^1 e^{j_1}, ..., f_{j_s}^s e^{j_s}) =$$

$$v_1^{i_1} ... v_r^{i_r} f_{j_1}^1 ... f_{j_s}^s F(e_{i_1}, ..., e_{i_r}, e^{j_1}, ..., e^{j_s}).$$

Definice 4.13. Čísla $a_{i_1...i_r}^{j_1...j_s} = F(e_{i_1}, ..., e_{i_r}, e^{j_1}, ..., e^{j_s})$, kde $j, i, r, s = 1, ..., n$ nazýváme souřadnicemi tenzoru F vzhledem k bázi $\{e_1, ..., e_n\}$. Horní indexy se nazývají kontravariantní indexy a dolní indexy se nazývají kovariantní indexy.

Následující věta pracuje s transformací složek tenzorů, což se velmi často využívá a bude i v dalším textu ukázáno, při tenzorovém popisu elektromagnetismu, kdy je tenzor elektromagnetismu vyjádřen ve tvaru antisymetrického tenzoru.

[9] Místo pojmu metrický tenzor se užívá i výraz skalární součin.

Věta 4.14. *Nechť F je tenzor typu (s, r) se souřadnicemi $a^{j_1...j_s}_{i_1...i_r}$ v prostoru V určeném bázovými vektory $\{e_1, ..., e_n\}$ (tuto množinu budeme dále značit symbolem e). Uvažujme jinou bázi $\{b_1, ..., b_n\}$ (tuto množinu budeme dále značit symbolem b), téhož prostoru V, kterou lze z první bázové soustavy získat pomocí matice přechodu A vztahem $b = A \cdot e$, která má inverzní matici $\tilde{A} = A^{-1}$, potom souřadnice $a^{-q_1...q_s}_{p_1...p_s}$ tenzoru F v bázi b jsou určeny vztahem*

$$\bar{a}^{q_1...q_s}_{p_1...p_r} = A^{i_1}_{p_1}....A^{i_r}_{p_r}\tilde{A}^{q_1}_{j_1}...\tilde{A}^{q_s}_{j_s}a^{j_1...j_s}_{i_1...i_r}. \tag{4.2}$$

Důkaz. Důkaz se provede přímo pomocí matice přechodu, pomocí níž spočítáme vektory báze b z báze e následovně

$$\bar{a}^{q_1...q_s}_{p_1...p_r} = F(A^{i_1}_{p_1}e_{i_1}, ..., A^{i_r}_{p_r}e_{i_r}, \tilde{A}^{q_1}_{j_1}e^{j^1}, ..., \tilde{A}^{q_s}_{j_s}e^{j^s}).$$

□

Výše zmíněným dvěma vztahům se někdy říká tenzoriální transformační vztahy.

Věta 4.15. *Čísla $a^{j_1...j_s}_{i_1...i_r}$ jsou souřadnicemi tenzoru F typu (s, r) závisejícími na volbě báze vektorového prostoru V právě tehdy, když se při změně báze V tato čísla $a^{j_1...j_s}_{i_1...i_r}$ transformují pomocí vztahu* (4.2).

Důkaz lze nalézt v [2]. Tato věta se někdy používá k definování tenzoru a je využívána obzvláště ve fyzice, kde na tenzor nahlížíme jako na objekt který transformujeme.

Mnohé problémy, které popisujeme pomocí tenzorů jsou vyjádřeny ve tvaru antisymetrického tenzoru, proto jej nyní definujeme a s ním uvedeme i definici tenzoru symetrického.

Definice 4.16. Uvažujme kovariantní tenzor F, tedy tenzor typu (0, r). Tento tenzor je antisymetrický, když pro libovolné indexy $1 \leq i < j \leq r$ a pro libovolné vektory $v_1, ..., v_r \in V$ platí

$$F(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_r) = -F(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_r)$$

a symetrický, když platí

$$F(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_r) = F(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_r).$$

Operace s tenzory

Nyní zavedeme základní operace s tenzory, které budeme v dalším potřebovat.

Definice 4.17. Tenzorovým součinem tenzorů F typu (s_1, r_1) a G typu (s_2, r_2) rozumíme tenzor $F \otimes G$ typu $(s_1 + s_2, r_1 + r_2)$, definovaný následovně:

$$(F \otimes G)(v_1, ..., v_{r_1+r_2}, f^1, ..., f^{s_1+s_2}) = F(v_1, ..., v_r, f^1, ..., f^{s_1}) \cdot G(v_{r_1+1}, ..., v_{r_1+r_2}, f^{s_1+1}, ..., f^{s_1+s_2}).$$

Příklad tenzorového součinu Nechť F je tenzor typu $(2,1)$ a G typu $(1,2)$, potom tenzorovým součinem těchto dvou tenzorů získáme tenzor $H = F \otimes G$ typu $(3,3)$, definovaný následovně:

$$H(v_1, v_2, v_3, f^1, f^2, f^3) = F(v_1, f^1, f^2) \cdot G(v_2, v_3, f^3).$$

Pomocí souřadnic tuto operaci zapíšeme ve tvaru

$$h^{jkq}_{ilm} = f^{jk}_i \cdot g^q_{lm}.$$

Tenzorový součin obecně není komutativní operace.

Druhou operací, kterou budeme dále potřebovat je úžení, neboli kontrakce tenzoru.

Definice 4.18. Nechť F je smíšený tenzor typu (s,r). Vyberme jeden kontravariantní index $j_0 \in \{1,...,s\}$ a jeden kovariantní index $i_0 \in \{1,...,r\}$. Kontrakcí (zúžením) tenzoru F podle těchto dvou indexů získáme tenzor C typu $(s-1, r-1)$ definovaný následovně (na pravé straně rovnice sčítáme přes k):

$$C(v_1,...,v_{r-1}, f^1,...,f^{s-1}) = F(v_1,...,v_{i_0-1}, e_k, v_{i_0+1},...,v_{r-1}, f^1,...,f^{j_0-1}, e^k, f^{j_0+1},...,f^{s-1}).$$

Platí, že definice kontrakce nezávisí na volbě báze. Odůvodnění lze nalézt v [2].

Jediná možná kontrakce tenzoru typu $(1,1)$ je číslo a^i_i, což je stopa matice.

Příklad úžení tenzoru Nechť F je tenzor typu $(2,3)$ se souřadnicemi f^{lm}_{ijk}. Výsledkem kontrakce tohoto tenzoru podle druhého horního a prvního dolního indexu je tenzor B typu $(1,2)$ se souřadnicemi $b^l_{jk} = f^{lr}_{rjk}$.

Posledními operacemi, které budeme potřebovat jsou zvedání a spouštění indexu tenzoru. K tomuto účelu se v elektromagnetismu často využívá metrického tenzoru[10] definovaného v Minkowského čtyřrozměrném prostoru.

Definice 4.19. Řekneme, že tenzor S typu (s,r) definovaný vztahem:

$$S(v_1,...,v_r, h^1,...,h^{i-1}, \tilde{g}_{v_{r+1}}, h^{i+1},...,h^s) = T(v_1,...,v_{r+1}, h^1,...,h^{i-1}, h^{i+1},...,h^s) \quad (4.3)$$

vznikl z tensoru T typu $(s-1, r+1)$ zvednutím indexu.

Poznamenejme, že $r+1$-ní dolní index tenzoru T přešel v i-tý horní index tenzoru S. Opačnou operací k zvedání indexu je spouštění indexu, kterou lze definovat pomocí vztahu (4.3), kdy ze zadaného tenzoru S typu (s,r) vznikne spuštěním indexu tenzor T typu $(s-1, r+1)$.

Příklad zvedání indexů Zvednutím indexu s u tenzoru a^i_{ls} získáme tenzor a^{ik}_l definovaný předpisem $a^{ik}_l = a^i_{ls} g^{sk}$, kde g^{sk} je metrický tenzor.

Toto je veškerý aparát z oblasti tenzorů, který budeme dále potřebovat. Další problematika tenzorového počtu je popsána například v [1], [3], [6], [10].

[10] Bude uveden v předposlední kapitole.

5 Zavedení křivek a ploch

Předchozí informace o vektorových polích využijeme k zavedení orientovaného křivkového a orientovaného plošného integrálu, s jejichž pomocí poté odvodíme Maxwellovy rovnice. Nejprve definujeme základní pojmy potřebné k přesnému pochopení zavedení zmíněných integrálů. Pro popis některých fyzikálních zákonů se používají také dvojné a trojné Riemannovy integrály, ty však zavádět nebudeme, neboť jejich odvození je založeno na zobecnění Riemannova integrálu jedné proměnné.

5.1 Křivky

V klasické diferenciální geometrii se snadno ukáže, že rovinnou křivku lze ekvivalentně zadat jakoukoliv z uvedených možností.

- Explicitně, jako graf funkce jedné proměnné: $x_2 = g(x_1)$, kde g je hladká funkce, tedy taková, která je alespoň třídy C1.
- Parametricky: $x_1 = \phi_1(t), x_2 = \phi_2(t)$, pro t $\in R$, přičemž funkce ϕ_1, ϕ_2, jsou hladké.
- Implicitně: $G(x_1, x_2) = 0$, v takovém případě jde o křivku v rovině, např. rovnice kuželoseček.

V dalším připomeneme zavedení parametrických rovnic křivky v E_m ve tvaru $a : I \to E_m$, kde I je otevřený interval (a, b), E_m je m-rozměrný Eukleidovský prostor a zavedeme korektní definici křivky.

Definice 5.1. Vektorová funkce a má v bodě $t_0 \in I$ limitu $a_0 \in E_m$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, tak že platí

$$|t - t_0| < \delta, t \neq t_0 \Rightarrow \|a(t) - a_0\| < \varepsilon.$$

Limitu označujeme zápisem

$$a_0 = \lim_{t \to t_0} a(t).$$

Definice 5.2. Derivací vektorové funkce $a(t)$ v bodě t_0 rozumíme limitu (za předpokladu její existence) $\lim_{t\to t_0} \frac{a(t)-a(t_0)}{t-t_0}$. Značíme $\frac{dv(t_0)}{dt}$ nebo $a'(t_0)$.

Vektorová funkce $a(t)$ má v bodě definovanou derivaci právě tehdy když každá její složka v tomto bodě má derivaci. Jestliže má vektorová funkce a na I spojité všechny derivace až do řádu r včetně něj, pak říkáme, že je tato vektorová funkce třídy C^r.

Následující definice jsou nutné pro definování termínu jednoduché křivky.

Definice 5.3. Zobrazení $F : I \to E_m$ se nazývá pohyb v prostoru E_m. Vektor $y' = \frac{dF}{dt}$, $t \in I$ se nazývá vektor rychlosti pohybu F.

Definice 5.4. Jestliže pro pohyb $F : I \to E_m$, platí $\frac{dF(t)}{dt} \neq \vec{o}, \forall t \in I$, pak je pohyb F regulární.

Definice 5.5. Pohyb $F : I \to E_m$ je jednoduchý, když platí $t_1 \neq t_2 \Rightarrow F(t_1) \neq F(t_2)$, neboli slovy, nedochází k samoprotnutí. Připouštíme výjimku, kdy $F(a) = F(b)$, pro uzavřené křivky (jejich definici uvedeme později).

Definice 5.6. Jednoduchou křivkou třídy C^r myslíme množinu $\mathbf{C} \subset E_m$, takovou že existuje jednoduchý regulární pobyb $f : I \to E_m$, třídy C^r pro který platí $f(I) = \mathbf{C}$. Zobrazení f pak nazýváme parametrizací jednoduché křivky $f(I)$.

Definice 5.7. Uvažujme takovou podmnožinu $C \subset E_m$, že pro každý její bod $x \in C$ existuje okolí U v E_m, takové, že průnik $C \cap U$ je jednoduchá křivka třídy C^r. Lokální parametrizací křivky C rozumíme parametrizaci průniků $C \cap U$.

Příkladem křivky je jednotková kružnice. Takovou křivku nelze jako celek vyjádřit jako jednoduchou křivku, ale lze ji lokálně parametrizovat např. jako horní a dolní polokružnici.

Definice 5.8. Křivka je uzavřená pokud interval I je uzavřený tj. $< a, b >$ a zároveň platí $F(a) = F(b)$.

Definice 5.9. Ke křivce můžeme přiřadit jednotkové tečné pole dvojím způsobem

$$\frac{a'(t)}{\|a'(t)\|}, \text{ nebo } \frac{-a'(t)}{\|a'(t)\|}.$$

Orientací křivky rozumíme výběr jedné z těchto dvou možností.

Křivka je třídy C^r jestliže je téže třídy jako zobrazení. Když řekneme, že křivka je po částech třídy C^1, rozumíme tím, že je spojitá a její derivace má konečně mnoho bodů nespojitosti.

5.2 Plochy

Zjednodušeně lze říci, že plochu $S \subset E_3$, lze považovat za zdeformovanou část roviny, bez bodů v nichž neexistuje tečná rovina. Nyní pojem přesně definujeme.

Definice 5.10. Jednoduchá plocha třídy C^r je množina $S \subseteq E_3$, jestliže existuje injektivní zobrazení třídy C^r, nazývané parametrizace plochy, $f : D \to E_3$, kde $D \subseteq R^2$ je otevřená množina, která je nazývána oblast parametrů, takové, že $S = f(D)$ a vektory f'_u, f'_v jsou lineárně nezávislé v každém bodě z oblasti D.

Podmínku lineární nezávislosti vektorů f'_u, f'_v, lze zapsat vzorcem

$$f'_u \times f'_v \neq \vec{o}.$$

Tato podmínka říká, že v každém bodě jednoduché plochy existuje tečná rovina, která je určená vektory f'_u, f'_v.

Definice 5.11. Plochou třídy C^r rozumíme množinu $S \subset E_3$, jestliže pro každý její bod $x \in S$ existuje takové jeho okolí U_x, že $U_x \cap S$ je jednoduchá plocha třídy C^r. Pojmem lokální parametrizace plochy S rozumíme parametrizaci průniků $U_x \cap S$.

Definice 5.12. Řekneme, že plocha $f : D \to E_3$ je uzavřená, jestliže pro každý hraniční bod $U \in D$ existuje jiný hraniční bod $V \in D, U \neq V$, tak že $f(U) = f(V)$.

Plocha je po částech třídy C^r, když je sjednocením konečného počtu ploch třídy C^r.

Orientovatelné plochy

Mějme bod A ležící na ploše S, přímka kolmá k tečné rovině, procházejícím tímto bodem se nazývá normála plochy S v bodě A. Tuto normálu lze analyticky zapsat pomocí bodu A a jedním ze dvou jednotkových směrových opačně orientovaných vektorů normály. Budeme-li takto postupovat pro každý bod plochy S, získáme dvě normálová pole této plochy, která budou mít opačný směr. Výběrem jednoho z těchto dvou normálových polí plochu S zorientujeme.

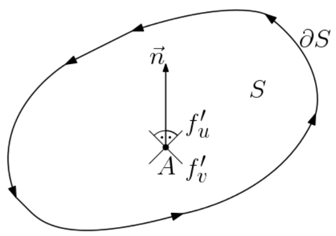
Plocha se nazývá neorientovatelná, když existuje uzavřená křivka c na uvažované ploše, že při spojitém pohybu normály po této křivce dojde ke změně orientace normály tj. nastane situace kdy se $\vec{n}$ změní na $\vec{-n}$.

Pokud je plocha zadaná parametricky jako zobrazení $f : D \subseteq R^2 \to E_3$, tak v každém bodě plochy je k ní určen normálový jednotkový vektor vztahem

$$\vec{n} = \frac{f'_u \times f'_v}{\|f'_u \times f'_v\|}.$$

Každá jednoduchá plocha je orientovatelná. V případě neorientovatelné plochy platí, že ji vždy lze orientovat alespoň lokálně. Klasickým příkladem neorientovatelných ploch jsou Moebiova páska nebo Kleinova láhev.

Důležitou relací je vztah mezi orientací plochy S a uzavřenou křivkou ∂S, která je její hranicí. Řekneme, že S je se svou hranicí ∂S kladně orientovaná, jestliže při pohybu po hranici v kladném smyslu (tj. proti směru chodu hodinových ručiček) zůstává oblast S po její levé straně. Takto zadefinovaná orientace mezi plochou a její hranicí se často kontroluje pomocí pravidla pravé ruky, kdy malíkovou hranu pravé dlaně položíme na hraniční křivku, přičemž prsty jsou namířeny shodně s orientací hranice a vztyčený palec udává směr orientaci plochy, aby byla se svou hranicí kladně orientovaná, jak je znázorněno na obrázku 5.



Obrázek 5: Plocha kladně orientovaná se svou hranicí.

6 Integrální počet pro popis vektorového pole

6.1 Orientovaný křivkový integrál

Pomocí tohoto integrálu lze vyjádřit například práci vykonané na dané křivce. K zavedení tohoto orientovaného křivkového integrálu, či křivkového integrálu druhého typu je třeba následující:

- $\gamma : I \to R^m$, jde o orientovanou křivku v prostoru R^m.
- $\vec{a} : R^m \to R^m$, jde o vektorové pole na prostoru R^m.

- $Dom\,\vec{a} \supseteq I_m\,\gamma$, celá křivka γ leží v definičním oboru vektorového pole $\vec{a}$.

Uvažujme jednoduchou orientovatelnou křivku $\gamma : I \to R^m$ třídy C^1, interval $I = < a, b >$ a dále uvažujme vektorové pole $\vec{a} : R^m \to R^m$, přičemž $Dom\,\vec{a} \supseteq I_m\,\vec{a}$. Orientovaným křivkovým integrálem rozumíme

$$\int_\gamma \vec{a} \cdot \vec{ds} = \int_a^b \vec{a}(\gamma(t)) \cdot \gamma' dt =$$

$$= \beta \int_a^b (a_1(\gamma_1(t), ..., \gamma_m(t)), ..., a_m(\gamma_1(t), ..., \gamma_m(t))) \cdot (\gamma_1'(t), ..., \gamma_m'(t)) dt =$$

$$= \beta \int_\gamma a_1 dx_1 + ... + a_m dx_m. \tag{6.1}$$

Rovnice (6.1) je klasickým způsobem zapsání křivkového integrálu druhého druhu. Platí, že pokud zadaná orientace křivky souhlasí s orientací vyplývající z parametrizace potom $\beta = 1$. V opačném případě $\beta = -1$. Zobecněná verze této rovnice je ve tvaru

$$\beta \int_\gamma a_1(x_1, ..., x_m) dx_1 + ... + a_m(x_1, ..., x_m) dx_m.$$

Věta 6.1. *Jestliže je vektorové pole $\vec{a}$ potenciálové, pak orientovaný křivkový integrál $\int_\gamma \vec{a} \cdot \vec{ds}$ nezávisí na křivce γ, ale jen na jejích koncových bodech.*

Důkaz.

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{a} \cdot \vec{ds} = \int_{\vec{\gamma}} (f'_{x_1}(\vec{\gamma}(t)), ..., f'_{x_m}(\vec{\gamma}(t))) \cdot (\gamma_1'(t), ..., \gamma_m'(t))\, dt =$$

$$\int_a^b (f'_{x_1} \cdot \gamma_1' + ... + f'_{x_m} \cdot \gamma_m') = \int_a^b \frac{df(\gamma(t))}{dt} dt = \int_a^b df(\gamma(t))\, dt =$$

$$[f(\gamma(t))]_a^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(a) - f(b).$$

□

Důsledkem této věty je, že v potenciálovém poli, kde je křivka γ uzavřená, kvůli splynutí prvního a posledního bodu intervalu I platí

$$\oint_\gamma \vec{a} \cdot \vec{ds} = 0.$$

Kroužek v integrálu značí, že křivka po níž se integruje je uzavřená.

6.2 Orientovaný plošný integrál

Nejčastěji se používají k vyjádření toku tekutiny, magnetického či elektrického danou plochou. K zavedení tohoto orientovaného plošného integrálu, či plošného integrálu druhého typu je třeba následující:

- $f : M \to R^3$, jde o orientovanou plochu v prostoru R^3, přičemž M je dvourozměrná oblast.
- $\vec{a} : R^3 \to R^3$, jde o vektorové pole prostoru R^3.
- $Dom\,\vec{a} \supseteq I_m\,\Omega$, celá plocha Ω leží v definičním oboru vektorového pole $\vec{a}$.

Uvažujme orientovanou jednoduchou plochu Ω třídy C^1, takovou že $f : M \to R^3$, kde f je funkce tvaru: $f_1(s,t), f_2(s,t), f_3(s,t)$ a dále jednotkové normálové pole

$$\vec{n} = \frac{f'_s \times f'_t}{\|f'_s \times f'_t\|}, \text{nebo}\,\vec{n} = -\left(\frac{f'_s \times f'_t}{\|f'_s \times f'_t\|}\right)$$

a vektorové pole $\vec{a} : R^3 \to R^3$, přičemž $Dom\,\vec{a} \supseteq f(M)$. Nechť je vektorové pole $\vec{a}$ dáno vztahem

$$\vec{a}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Orientovaným plošným integrálem rozumíme

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{a}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\Omega} (P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy) =$$

$$\beta \iint\limits_{M} (P(f_1(s,t), f_2(s,t), f_3(s,t)), Q(f_1(s,t), f_2(s,t), f_3(s,t)), R(f_1(s,t), f_2(s,t), f_3(s,t)))\cdot\vec{n}dsdt$$

kde $\vec{n}$ je normálový vektor a $\beta = 1$ v případě, kdy orientace normály $\vec{n}$ souhlasí se zadanou orientací plochy, v opačném případě $\beta = -1$ Tento integrál též nazýváme tokem danou plochou.

7 Integrální věty

Následující tři věty dávají do souvislosti vztahy mezi jednotlivými integrály. Díky těmto větám jsou výpočty mnohdy mnohem jednodušší a samotné věty jsou využívány pro popis elektromagnetismu.

První z nich je Gaussova-Ostrogradského věta.

Věta 7.1. *Nechť je plocha $\partial\Omega$ uzavřená, kladně orientovaná, jednoduchá, po částech hladká a ohraničuje trojrozměrnou oblast $\Omega \subseteq R^3$ a přitom celá tato plocha leží v definičním oboru vektorového pole $\vec{a}$ daného funkcí*

$$\vec{a}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

přičemž pro funkce P, Q, R platí, že jsou spojité na hranici oblasti Ω a mají spojité derivace $\frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial z}$ na celé oblasti Ω. Jsou tedy třídy C^1 na oblasti Ω. Pak nastává shodnost mezi trojným a orientovaným plošným integrálem podle rovnice vyjádřené tvarem

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \vec{a}\cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{\Omega} \nabla\cdot\vec{a}\,dxdydz.$$

Rovnici lze také zapsat ve tvaru

$$\iint\limits_{\partial\Omega} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Další větou, kterou budeme potřebovat je Stokesova věta.

Věta 7.2. *Nechť je $\partial\Omega$ uzavřená křivka, jenž je hranicí po částech hladké orientované plochy Ω, přičemž $\partial\Omega$ i Ω jsou souhlasně orientované. Vektorové pole je definováno předpisem*

$$\vec{a}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

a funkce P, Q, R jsou třídy C^1. Potom existuje identita mezi orientovaným křivkovým a orientovaným plošným integrálem daná vztahem:

$$\int\limits_{\partial\Omega} \vec{a}(x,y,z) \cdot \vec{ds} = \iint\limits_{\Omega} \nabla \times \vec{a}(x,y,z) \vec{dS}.$$

Další možný tvar téže rovnice je tvaru

$$\int\limits_{\partial\Omega} (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \vec{dS}.$$

Poslední integrální větou je Greenova věta, kterou v dalším textu potřebovat nebudeme a zmiňujeme ji pouze pro úplnost.

Věta 7.3. *Nechť je $\partial\Omega$ uzavřená křivka, jež je hranicí dvourozměrné oblasti Ω a je k ní kladně orientovaná. Je dáno zobrazení $f : D \to \Omega$, $D \subseteq R^2$ a $f = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ je třídy C^1 v množině Ω. Potom podle následujícího předpisu existuje rovnost mezi dvojným a orientovaným křivkovým integrálem*

$$\int\limits_{\partial\Omega} f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dxdy.$$

8 Základní zákony elektromagnetismu

Pro úspornost zápisu budeme dále označovat orientovaný plošný integrál zápisem $\int \vec{a} \cdot \vec{dS}$ a orientovaný křivkový integrál zápisem $\int \vec{a} \cdot \vec{ds}$.

8.1 Gaussův zákon elektrostatiky

Gaussův zákon, který plyne z Coulombova zákona, říká, že tok vektoru intenzity elektrického pole Φ_E uzavřenou plochou Ω [11]

$$\Phi_E = \oint\limits_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

je přímo úměrný celkovému náboji Q_c uvnitř uzavřené plochy Ω

$$\oint\limits_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_c}{\varepsilon_0}. \tag{8.1}$$

[11] Kroužek v integrálu zdůrazňuje, že se jedná o orientovaný plošný integrál, jehož hranicí je uzavřená plocha, resp. orientovaný křivkový integrál, kde křivka po níž se integruje je uzavřená.

8.2 Ampérův zákon

Ampérův zákon je analogií Gaussova zákona elektrostatiky a pojednává o cirkulaci vektoru magnetické indukce. Cirkulací myslíme výraz

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot \vec{ds}$$

v němž integrujeme podél orientované uzavřené křivky γ. Ampérův zákon říká, že cirkulace vektoru $\vec{B}$ je přímo úměrná celkovému proudu I_c, jenž prochází plochou ohraničenou křivkou γ

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 I_c. \tag{8.2}$$

Poznamenejme, že celkový proud I_c je dán součtem všech proudů procházející touto plochou. Celkový proud lze výstižně vyjádřit ve tvaru

$$I_c = \sum_{i=1}^{n} I_i$$

kde jednotlivým proudům $I_1, I_2, ..., I_n$ přiřazujeme znaménko $+$, nebo $-$ podle pravidla pravé ruky tzn. proudu I přiřadíme kladné znaménko, když se jeho orientace shoduje s orientací normály, která udává orientaci plochy, kterou tento proud prochází.

8.3 Gaussův zákon pro magnetické pole

Gaussův zákon pro magnetické pole vyjadřuje experimentální poznatek o neexistenci magnetických monopólů, což způsobuje, že magnetické pole je nezřídlové, a tedy tok vektoru magnetické indukce libovolnou uzavřenou plochou Ω je nulový

$$\oint_{\Omega} \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0.$$

8.4 Faradayův zákon elektromagnetické indukce

K zapsání Faradayova zákona je nejprve zapotřebí nadefinovat potřebné veličiny. První veličinou je magnetický indukční tok, vyjadřující tok magnetického pole procházejícího plochou Ω ohraničenou uzavřenou orientovanou křivkou $\partial\Omega$ podle vztahu

$$\Phi_B = \int_{\Omega} \vec{B} \cdot \vec{dS}. \tag{8.3}$$

Druhou veličinou je indukované elektromotorické napětí ε ve smyčce, které je definováno jako cirkulace vektoru intenzity elektrického pole

$$\varepsilon = \oint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

kde integrujeme podél orientované uzavřené křivky $\partial\Omega$. Faradayův zákon elektromagnetické indukce říká, že indukované elektromotorické napětí ve smyčce je dáno rychlostí změny magnetického indukčního toku plochou, která má za okraj tuto smyčku. Slovní formulaci tohoto zákona lze snadno zapsat rovnicí

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{ds} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{8.4}$$

Z rovnice plyne, že proměnné magnetické pole vytváří pole elektrické, a to i za situace, kdy v magnetickém poli není vodivá smyčka. Siločáry zobrazující indukované elektrické pole jsou uzavřené, a proto tok vektoru intenzity indukovaného elektrického pole libovolnou uzavřenou plochou je nulový. Záporné znaménko na pravé straně rovnice (8.4) je vysvětleno Lenzovým zákonem, jehož znění je následující:

Proud vznikající ve vodivé smyčce vlivem proměnného magnetického toku touto smyčkou jde ve směru, v němž magnetické pole tímto proudem buzené, působí proti změně magnetického indukčního toku, který tento proud vyvolal.

8.5 Maxwellův zákon magnetoelektrické indukce

Úvahy o symetrii ve fyzice přivedly Maxwella k domněnce, že podobně jako proměnné magnetické pole indukuje pole elektrické, tak i proměnné eletrické pole indukuje pole magnetické. Zákon magnetoelektrické indukce má (v analogii se zákonem elektromagnetické indukce) tvar

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{8.5}$$

kde

$$\Phi_E = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

je tok vektoru intenzity elektrického pole plochou Ω, která má za okraj orientovanou uzavřenou křivku $\partial\Omega$ podle níž integrujeme na levé straně rovnice (8.5).

8.6 Ampérův-Maxwellův zákon

Magnetické pole je buzeno nejen elektrickým proudem, ale také proměnným elektrickým polem. Spojením Ampérova zákona (8.2) a zákona magnetoelektrické indukce (8.5), dostáváme obecně platný Ampérův-Maxwellův zákon

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + I_c \tag{8.6}$$

kde tok vektoru elektrické intenzity je dán vztahem

$$\Phi_E = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{dS} \tag{8.7}$$

v němž integrujeme přes plochu, která má za okraj uzavřenou křivku, podle níž integrujeme na levé straně rovnice (8.6). Jestliže je první člen na pravé straně rovnice (8.6) nulový a druhý nenulový, získáváme rovnici Ampérova zákona (8.2), pro situaci, kdy je první člen na pravé straně nenulový a druhý nulový rovnice přechází v tvar Maxwellova zákona magnetoelektrické indukce (8.5).

9 Maxwellovy rovnice a jejich důsledky

Veškeré zákony elektromagnetismu jsou zahrnuty ve čtyřech rovnicích nazývané Maxwellovy rovnice[12], v nichž vystupují veličiny charakterizující elektrické a magnetické pole. Těmito veličinami jsou $\vec{E}$ a $\vec{B}$, a elektrický náboj s elektrickým proudem.

9.1 Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru

1. **Gaussův zákon pro elektrické pole**
   Vzhledem k tomu, že indukované elektrické pole je nezřídlové, rovnice vyjadřující Gaussův zákon (8.1) platí obecně, tedy

$$\oint\limits_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_c}{\varepsilon_0}.$$

   Celkový náboj Q_c v oblasti Ω ohraničené plochou $\partial\Omega$ můžeme vyjádřit pomocí hustoty elektrického náboje, která je definována funkcí $\rho : \Omega \ni \vec{r} \to \rho(\vec{r})$.

$$Q_c = \iiint\limits_{\Omega} \rho dV.$$

   Gaussův zákon pro elektrické pole potom vyjádříme ve tvaru

$$\oint\limits_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_{\Omega} \rho dV. \tag{9.1}$$

2. **Gaussův zákon pro magnetické pole**

$$\oint\limits_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{9.2}$$

   kde integrujeme přes libovolnou uzavřenou plochu Ω.
3. **Faradayův zákon**
   Dosadíme-li na pravou stranu rovnice (8.4) magnetický indukční tok z rovnice (8.3) a vyjádříme-li tok intenzity elektrického pole Φ_E pomocí (8.7) dostaneme

$$\oint\limits_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{9.3}$$

   kde $\partial\Omega$, je křivka ohraničující plochu Ω.

[12]Sepsal je skotský fyzik James Clerk Maxwell v roce 1865.

4. **Ampérův-Maxwellův zákon**
Z rovnic (8.6), (8.7) dostaneme

$$\oint\limits_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \mu_0 I_c. \tag{9.4}$$

Proud procházející plochou Ω určíme pomocí hustoty elektrického proudu, která je definována jako vektorové pole $\vec{j}$ na Ω

$$\vec{j} : \Omega \ni \vec{r} \to \vec{j}(r)$$

využijeme ve vztahu:

$$I_c = \int\limits_{\Omega} \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Ampérův-Maxwellův zákon potom můžeme vyjádřit rovnicí

$$\oint\limits_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \int\limits_{\Omega} \vec{j} \cdot d\vec{S}. \tag{9.5}$$

Tyto čtyři rovnice jsou uvedeny v integrálním tvaru, ale stejně tak často se uvádějí ve tvaru diferenciálním, jež nyní odvodíme.

9.2 Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru

S využitím Gaussovy-Ostrogradského integrální věty a Stokesovy integrální věty, lze předchozí podobu Maxwellových rovnic převést do diferenciálního tvaru. Při odvozování je třeba mít na paměti podmínky, které jsou nutnými předpoklady k využití těchto dvou vět.

1. **Gaussův zákon elektrostatiky**
V Gaussovu zákonu vystupuje na pravé straně integrál přes oblast Ω a na levé straně integrál přes její hranici $\partial\Omega$. Použijeme-li na levé straně rovnice (9.1) Gaussovu-Ostrogradského větu dostaneme

$$\iiint\limits_{\Omega} \nabla \cdot \vec{E}\ dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_{\Omega} \rho\ dV.$$

Převedeme-li pravou stranu rovnice na stranu levou a využijeme-li vlastnosti aditivity integrálu, získáme tutéž rovnici ve tvaru

$$\iiint\limits_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{E}\ - \frac{\rho}{\varepsilon_0})\ dV = 0.$$

Protože Ω je libovolně pevně zvolená oblast musí platit

$$\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

neboli

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{9.6}$$

Tato rovnice vyjadřuje Gaussův zákon elektrostatiky v diferenciálním tvaru.

2. **Gaussův zákon pro magnetické pole**
   Vzhledem k tomu, že neexistují magnetické monopóly je divergence vektoru $\vec{B}$ nulová:
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \tag{9.7}$$
3. **Faradayův zákon**
   Ve Faradayově zákonu (9.3) na pravé straně vystupuje integrál přes plochu a na levé straně integrál přes její hranici, jíž je uzavřená křivka. Levou stranu (9.3) lze pomocí Stokesovy věty vyjádřit ve tvaru
$$\iint\limits_{\Omega} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint\limits_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$
   Jsou-li splněny matematické podmínky, lze výraz dále upravit do tvaru:
$$\iint\limits_{\Omega} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$
   a dále s využitím aditivity integrálu
$$\iint\limits_{\Omega} \left(\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0.$$
   Díky tomu, že Ω je libovolně pevně zvolená oblast, musí platit
$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$
   Po převedení druhého členu rovnice na pravou stranu
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{9.8}$$
   Tato rovnice vyjadřuje Faradayův zákon v diferenciálním tvaru.
4. **Ampérův zákon**
   Podobně jako jsme odvodili z rovnice (9.3) rovnici Faradayova zákona (9.8), odvodíme z rovnice (9.4) Ampérův-Maxwellův zákon v diferenciálním tvaru
$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}. \tag{9.9}$$

Tato čtveřice je soustavou parciálních lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu a pro jednoznačné řešení je třeba zadat příslušný počet okrajových podmínek a počátečních podmínek. Vlastnost linearity rovnic umožňuje použít princip superpozice.

Předchozí vztahy uvažovaly elektromagnetické pole v čase proměnné, kvůli tomu ve vztazích vystupovaly parciální derivace podle času. Jestliže budeme podle Maxwellových rovnic vyšetřovat situaci pro elektromagnetické pole v čase konstantní, tak členy s parciální derivací podle času nabudou nulových hodnot. Maxwellovy rovnice pro pole v čase neměnné mají tedy následující tvar[13]

[13] Relativnost polí.

- Elektrostatika
  1. $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.
  2. $\nabla \times \vec{E} = 0$.
- Magnetostatika
  1. $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 j$.
  2. $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

Nyní uvedeme příklad znázorňující proč je nutné při odvozování fyzikálních zákonů dbát na matematické podmínky daných operací.

Uvažujme plochu Ω s hranicí $\partial\Omega$ (obrázek 6). Všude vyjma plochy Ω, nechť je $\nabla \times \vec{E} = 0$. Touto plochou tedy protéká časově proměnné magnetické pole. Na vnější oblasti Ω (označme Ω') magnetické pole není, a tedy pole $\vec{E}$ je mimo oblast Ω nevírové.

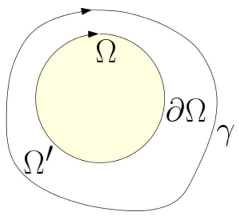
I když je pole $\vec{E}$ na oblasti Ω' nevírové, nelze jej vyjádřit jako gradient funkce, protože Ω' není jednoduše souvislá oblast. Podél křivky γ vzniká elekromotorické napětí

$$\varepsilon = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot \vec{ds} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

kde Φ_B je magnetický indukční tok na oblasti Ω vyjádřený vztahem

$$\Phi_B = \int_{\Omega} \vec{B} \cdot \vec{dS}.$$

Aby elektrické pole bylo na oblasti Ω' potenciálové je tedy nutné, aby oblast Ω', ohraničená křivkou γ byla jednoduše souvislá.



Obrázek 6: Pro oblast Ω platí $\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \neq 0$.

9.3 Potenciály elektromagnetického pole

Vzhledem k tomu, že v Coulombovu zákonu pro elektrické pole a Ampérovu-Maxwellovu zákonu vystupují elektrický náboj a elektrický proud a ve zbývajících dvou rovnicích vystupují jen veličiny popisující pole samotné, tj. vektor elektrické intenzity $\vec{E}$ a vektor magnetické indukce $\vec{B}$, je vhodné seskupit Maxwellovy rovnice do dvou skupin. První pár tvoří rovnice, kde vystupují jen veličiny $\vec{B}$ a $\vec{E}$. Těmito rovnicemi jsou rovnice Gaussova zákon pro magnetické pole a Faradayova zákona:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \; \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{9.10}$$

Druhý pár tvoří rovnice, kde vystupuje i elektrický náboj a elektrický proud. Jde tedy o Gaussův zákon pro elektrické pole a Ampérův-Maxwellův zákon

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},\, \nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}. \tag{9.11}$$

Rovnice (9.10) umožňují zavést tzv. potenciály elektromagnetického pole. Z rovnice $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ plyne, že magnetickou indukci $\vec{B}$, lze vyjádřit jako rotaci vektorového pole $\vec{A}$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \tag{9.12}$$

Dosadíme-li (9.12) do druhé rovnice prvního páru Maxwellových rovnic (9.10), tedy do Faradayova zákona elektromagnetické indukce, dostaneme

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}).$$

Jsou-li splněny matematické podmínky, lze předchozí vztah uvést ve tvaru

$$\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

odkud

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \tag{9.13}$$

Je-li uvažovaná oblast jednoduše souvislá, potom z rovnice (9.13) plyne, že vektor $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, lze vyjádřit jako gradient skalární funkce. Takto zavedeme skalární potenciál φ.

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi. \tag{9.14}$$

Záporné znaménko je zvoleno proto, aby v případě elektrostatiky φ vyjadřoval potenciál elektrického pole.

Jestliže k vektorovému potenciálu $\vec{A}$ přičteme vektor vzniklý gradientem skalárního pole, dostaneme týž vektor $\vec{B}$, protože $\nabla \times (\nabla f) = 0$ (za splnění předpokladu, že funkce f je dvakrát diferencovatelná). Současně je třeba transformovat i skalární potenciál φ. Přímým dosazením výrazů

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f,\, \varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t} \tag{9.15}$$

do (9.12) a (9.13) se přesvědčíme, že potenciály $\vec{A}', \varphi'$ udávají stejné elektrické a magnetické pole jako potenciály $\vec{A}, \varphi$. Elektromagnetické pole a rovnice, které je popisují, jsou invariantní vzhledem k transformaci (9.15). Tuto vlastnost nazýváme kalibrační invariantnost.

9.4 Speciální teorie relativity a čtyřvektorový formalismus

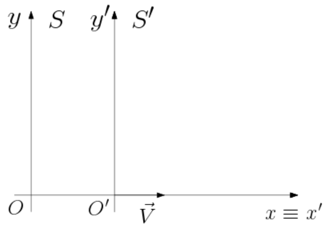
Elektrické a magnetické pole, která jsou svázána Maxwellovými rovnicemi, závisejí na vztažné soustavě (obr. 7). Již v roce 1890 holandský fyzik H. A. Lorentz zjistil, že Maxwellovy rovnice jsou kovariantní vůči transformaci, která po něm byla nazvána Lorentzovou transformací:

$$x = \gamma(x' + Vt') \tag{9.16}$$
$$y = y' \tag{9.17}$$
$$z = z' \tag{9.18}$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) \tag{9.19}$$

kde γ je Lorentzův faktor daný vztahem

$$\gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Albert Einstein pak v roce 1905 odvodil tuto transformaci na základě postulátu o rychlosti světla.



Obrázek 7: Inerciální vztažné soustavy S, S' se vzájemně pohybují rychlostí o velikosti V. Souřadnice a čas naměřené v jedné a druhé soustavě jsou spojeny Lorentzovou transformací.

Ve speciální teorii relativity (dále jen STR) zavedeme čtyřrozměrný časoprostor $V(T, S)$, kde symbolem T rozumíme časovou složku časoprostoru a symbolem S jeho složku prostorovou. Zavedeme-li bázové vektory e_0, e_1, e_2, e_3,[14] lze každý vektor $\vec{u} \in V(T, S)$ zapsat jako

$$u_0e_0 + u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3.$$

Časoprostor tedy lze vyjádřit ve tvaru

$$V(T, S) = \{u_0e_0 + u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3, u_i \in R \text{ pro } i = 0, 1, 2, 3\}.$$

Pro sčítání vektorů a násobení skalárem platí stejné zákony jako v nižších dimenzích. V prostoru $V(T, S)$ dále definujeme Minkowského skalární součin.

Definice 9.1. Nechť $V(T, S)$ je čtyřrozměrný prostor určený bází e_0, e_1, e_2, e_3, potom Minkowského skalární součin vektorů[15] $u = u_0e_0 + u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ a $v = v_0e_0 + v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ je reálné číslo určené podle vztahu:

$$(u, v) = u_0v_0 - u_1v_1 - u_2v_2 - u_3v_3.$$

[14] Je zvykem, že složka vektoru e s indexem 0 tj. e_0 vyjadřuje časovou složku časoprostoru a zbylé tři složky jsou prostorové.

[15] Jde o bilineární formu, která narozdíl od skalárního součinu nemusí být pozitivně definitní.

Definice 9.2. Minkowského prostor je takový čtyřrozměrný prostor, na němž je definován Minkowského skalární součin.

V Minkowském prostoru je metrický tenzor dán vztahem

$$g^{ij} = g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{9.20}$$

Pomocí něho můžeme snižovat nebo zvyšovat indexy,

$$u_i = g_{ik}u^k, \text{nebo}\, u^i = g^{ik}u_k.$$

Výraz $u_iu^i = g_{ik}u^iu^k = g^{ik}u_iu_k$ je pak invariant. Veličiny ct, x, y, z určující událost ve čtyřrozměrném Minkowském prostoru jsou složky čtyřvektoru

$$x^i = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$$

resp.

$$x_i = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\vec{r}).$$

Podobně skalární potenciál φ a vektorový potenciál $\vec{A}$ tvoří čtyřvektor potenciálu

$$A^i = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right), \text{resp. } A_i = \left(\frac{\varphi}{c}, -\vec{A}\right)$$

tak hustota náboje a hustota proudu $\vec{j}$, také tvoří čtyřvektor

$$j^i = (\rho c, \vec{j}\,), \text{resp. } j_i = (\rho c, -\vec{j}\,)$$

který nazýváme čtyřvektor proudové hustoty.

Užitím čtyřvektorového formalismu vyjádříme Lorentzovu transfromaci následovně

$$x^i = \Lambda^i_k x'^k$$

kde

$$x'^k = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (ct', x', y', z') = (ct', \vec{r'})$$

a

$$\Lambda^i_k = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{V}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{V}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.21}$$

Pomocí matice Λ se transformují všechny čtyřvektory, čili i čtyřvektor potenciálu nebo čtyřvektor proudové hustoty.

9.5 Tenzor elektromagnetického pole

Z rovnic (9.12), (9.13) víme, že magnetickou indukci $\vec{B}$ a intenzitu elektrického pole $\vec{E}$ dostaneme derivací potenciálů podle času a prostorových proměnných. Užitím čtyřvektorového formalismu se přímým výpočtem přesvědčíme, že antisymetrický tenzor F_{ik}, který se nazývá tenzor elektromagnetického pole, definovaný vztahem

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \tag{9.22}$$

je sestaven ze složek vektorů $\vec{E}$ a $\vec{B}$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.23}$$

Zvýšením obou indexů pomocí metrického tenzoru.

$$F^{ik} = g^{ij} g^{kl} F_{jl} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.24}$$

Přímým výpočtem se snadno dokáže, že transformací složek tenzoru F^{ik} pomocí dvou matic Λ obdržíme tenzor

$$F^{ik} = \Lambda^i_j \Lambda^k_l F'^{jl}$$

ve tvaru

$$F^{ik} = \frac{\gamma}{c} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E'_x}{c} & \gamma(-\frac{E'_y}{c} - B'_z\beta) & \gamma(-\frac{E'_z}{c} + B'_y\beta) \\ \frac{E'_x}{c} & 0 & \gamma(-B'_z - \frac{E'_y}{c}\beta) & \gamma(B'_y - \frac{E_z}{c}\beta) \\ -\gamma(-\frac{E'_y}{c} - B'_z\beta) & -\gamma(-B'_z - \frac{E'_y}{c}\beta) & 0 & -B'_x \\ -\gamma(-\frac{E'_z}{c} + B'_y\beta) & -\gamma(B'_y - \frac{E_z}{c}\beta) & B'_x & 0 \end{pmatrix} \tag{9.25}$$

kde $\beta = \frac{V}{c}$. Převedeno do vektorů intenzity a indukce

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma(E'_y + VB'_z), \quad E_z = \gamma(E'_z - VB'_y),$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \gamma(B'_y - \frac{V}{c^2}E'_z), \quad B_z = \gamma(B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y).$$

Z tenzoru elektromagnetického pole lze zkonstruovat invarianty. Protože tento tenzor je antisymetrický, jeho zúžení dává identicky nulu. Tedy máme až kvadratické výrazy,

$$F_{ik}F^{ik} = inv \tag{9.26}$$

$$\varepsilon^{ikmn} F_{ik} F_{mn} = inv \tag{9.27}$$

kde ε^{ikmn} je Levi-Civitův tenzor. Dosadíme-li do (9.26) a (9.27) získáme

$$F_{ik}F^{ik} = -2\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2\right) \tag{9.28}$$

$$\varepsilon^{ikmn}F_{ik}F_{mn} = 4 \cdot \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{c}. \tag{9.29}$$

Z vyjádření tenzoru elektromagnetického pole pomocí potenciálu (9.22) plyne

$$\varepsilon^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0. \tag{9.30}$$

Nultá komponenta dává tvrzení o nezřídlovém charakteru magnetického pole (9.7), to jest Gaussův zákon pro magnetické pole, další tři komponenty Faradayův indukční zákon (9.8). Rovnice (9.30) je tedy prvním párem Maxwellových rovnic.

V druhém páru Maxwellových rovnic vystupují kromě derivací pole $\vec{E}$ a $\vec{B}$, které tvoří tenzor elektromagnetického pole, také hustota náboje ρ a hustota proudu $\vec{j}$, které tvoří čtyřvektor proudové hustoty. Přímým výpočtem se přesvědčíme, že z rovnice

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\mu_0 j^i \tag{9.31}$$

dostáváme druhý pár Maxwellových rovnic. Z nulté komponenty rovnice (9.31)

$$\frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = -\mu_0 j^0$$

neboli

$$-\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = -c^2\mu_0\rho$$

dostáváme Gaussův zákon pro elektrické pole ve tvaru (9.6), kde jsme užili vztahu $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$. Z dalších třech komponent rovnice (9.31),

$$\frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = -\mu_0 j^1$$

$$\frac{\partial F^{20}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{23}}{\partial x^3} = -\mu_0 j^2$$

$$\frac{\partial F^{30}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x^2} = -\mu_0 j^3$$

neboli

$$\frac{\partial E_x}{c^2\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 j_x$$

$$\frac{\partial E_y}{c^2\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} = -\mu_0 j_y$$

$$\frac{\partial E_z}{c^2\partial t} - \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\mu_0 j_z$$

dostáváme Ampérův-Maxwellův zákon (9.9).

9.6 Důsledky Maxwellových rovnic

Nyní odvodíme dva důsledky plynoucí z Maxwellových rovnic, rovnici kontinuity a vlnovou rovnici.

9.6.1 Rovnice kontinuity

Z druhého páru Maxwellových rovnic (9.31) plyne

$$\frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i \partial x^k} = -\mu_0 \frac{\partial j^i}{\partial x^i}$$

kde operátor $\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}$ je symetrický. Působí-li symetrický operátor na antisymetrický tenzor F^{ik}, dostáváme nulu. Proto také

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0$$

neboli

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

což je rovnice kontinuity vyjadřující zákon zachování elektrického náboje.

9.6.2 Vlnová rovnice

Jsou-li náboje a proudy rovny nule, na pravé straně Maxwellových rovnic (9.31) je nula, tedy

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0. \tag{9.32}$$

Vyjádříme-li tenzor elektromagnetického pole pomocí čtyřpotenciálu (viz(9.22))

$$F^{ik} = g^{ij} g^{kl} \left(\frac{\partial A_l}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^l} \right) = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k}.$$

Z rovnice (9.32) dostaneme

$$\frac{\partial^2 A^k}{\partial x_i \partial x^k} - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = 0. \tag{9.33}$$

Maxwellovy rovnice jsou invariantní vůči kalibrační transformaci, a proto můžeme položit

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0. \tag{9.34}$$

Tato podmínka, která se nazývá Lorentzova kalibrační podmínka, zjednoduší (9.33) do tvaru

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = 0 \tag{9.35}$$

neboli

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \triangle \varphi \tag{9.36}$$

a

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \triangle \vec{A}. \tag{9.37}$$

Dvojice rovnic (9.36), (9.37) tvoří vlnovou rovnici pro potenciály elektromagnetického pole a popisuje šíření elektromagnetických vln v prostoru.

Budeme hledat řešení vlnové rovnice ve tvaru monochromatické rovinné vlny

$$A^j = a^j e^{-ik^l x_l} \tag{9.38}$$

kde čtyřvektor

$$k^l = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \tag{9.39}$$

je tvořen úhlovou frekvencí záření $\omega = 2\pi f$ (kde f je frekvence) a jeho vlnovým vektorem $\vec{k}$, jehož velikost souvisí s vlnovou délkou záření λ podle vztahu $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Dosadíme-li (9.38) do (9.35)

$$k_j k^j = 0$$

neboli

$$\left(\frac{\omega}{c}\right) - k^2 = 0$$

a odtud dostáváme

$$f = \frac{c}{\lambda}.$$

Dosadíme-li (9.38) do (9.34) dostaneme

$$a^j k_j = 0. \tag{9.40}$$

Zvolíme-li $\varphi = 0$, to jest $a^0 = 0$, dostáváme z (9.40)

$$\vec{k} \cdot \vec{A} = 0 \tag{9.41}$$

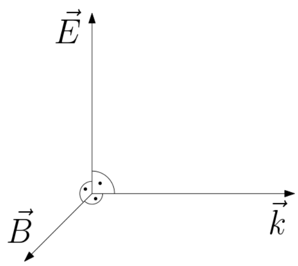
tedy platí, že $\vec{A}$ a $\vec{k}$ jsou kolmé. Elektrické a magnetické pole v rovinné vlně, dostaneme ze vztahů (9.12) a (9.14)

$$\vec{E} = i\omega\vec{A} \tag{9.42}$$

$$\vec{B} = i\vec{k} \times \vec{A} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} = \frac{1}{c}\vec{k^0} \times \vec{E} \tag{9.43}$$

kde $k^0 = \frac{\vec{k}}{|k|}$ Z těchto rovnic a rovnice (9.41) vyplývá, že vektory $\vec{B}, \vec{E}, \vec{k}$ jsou vzájemně kolmé a tvoří pravotočivý systém (viz. obrázek 8).

Mezi velikostmi elektrického a magnetického pole v rovinné elektromagnetické vlně platí vztah $E = cB$. Vzhledem k tomu, že výrazy $\frac{E^2}{c^2} - B^2$ a $\vec{E} \cdot \vec{B}$ jsou invarianty (viz (9.28), (9.29)), je struktura rovinné vlny stejná ve všech inerciálních vztažných soustavách, to jest vektory $\vec{E}, \vec{B}$ jsou kolmé a velikost elektrického pole a magnetického pole v rovinné vlně jsou svázány rychlostí světla.



Obrázek 8: Elektrické a magnetické pole v rovinné elektromagnetické vlně.

10 Příloha: Fyzika pro matematiku

V této kapitole ukážeme, jak některé matematické pojmy nacházejí uplatnění v daných oblastech fyziky. Všechny matematické definice, které budou v této kapitole zmíněny nebudou z důvodů rozsáhlosti dále uváděny.

10.1 Elementární náboj jako grupa

Všechny možné náboje lze vyjádřit množinou G ={n·e; n ∈ Z}. Binární operace + je zobrazení tvaru

$$G + G \to G$$

neboť pro $m \neq n$ i $m = n$, m ∈ Z, n ∈ Z, platí m·e+n·e=(m+n)·e, (m+n) ∈ Z. Jde tedy o zobrazení z G do G. Toto zobrazení dále splňuje podmínku asociativity, komutativity, existenci neutrálního prvku jímž je nulový náboj neutronu a ke každému prvku množiny G s operací + existuje prvek inverzní. Množina elementárních nábojů pro operaci + je tedy komutativní grupou, značíme (G,+). Díky tomu je nutně i pologrupou, neboli asociativním grupoidem. Samotná množina G je v algebře označována jako nosič.

Dále pro grupu (G,+) platí, že je i grupou cyklickou, neboť každý její prvek jde vyjádřit jako násobek náboje e nebo $-e$. Tyto dva prvky grupy (G,+) označujeme jako generátory grupy. Pro množinu prvků, jež jsou generátorem grupy používáme značení $< e, -e >$. Jediná existující konečná podgrupa (H,+) grupy (G,+) je triviální grupa tj. taková grupa, která obsahuje pouze jeden prvek, je tedy řádu jedna. V našem případě je daným prvkem nulový náboj 0.

Protože pro atomy prvků ležících v periodické tabulce platí, že jejich výsledný náboj je nulový, pak z hlediska elektrického náboje platí, že každý prvek periodické tabulky též leží v grupě G.

Množina elementárních nábojů G je i vektorovým prostorem nad tělesem celých čísel.

10.2 Elementární náboje jako bázové vektory

Jak bylo zmíněno výše, mezi základní poznatky o atomech patří fakt, že jsou tvořeny protony, elektrony a neutrony, přičemž každý atom periodické tabulky prvků je jednoznačně určen atomovým číslem. Zvláštní skupinu tvoří izotopy, atomy se stejným protonovým číslem, ale jiným počtem neutronů v jádře.

V chemii se běžně každý prvek popisuje pomocí protonového a nukleonového čísla. Když se matematicky zamyslíme nad tím, jak popsat každý prvek periodické tabulky, tak si také vystačíme jen s množstvím protonů, neutronů a elektronů, protože elementární náboje e, $-e$, 0 jsou bázové vektory v prostoru prvků periodické tabulky.

Zdůrazněme, že prvky e, $-e$, 0 nyní považujeme za vektory, a aby nedocházelo k nedorozumění, tak pro tuto trojici bázových vektorů použijeme zažitější a ve fyzice tradiční způsob zápisu i, j, k. Symbol 0 na třetím místě má význam neutrálního prvku, nikoliv nuly.

Pokusíme se popsat například atom sodíku Na pomocí tohoto vektorového zápisu. Tento prvek se skládá z 11 protonů, 11 elektronů a 12 neutronů. Tradiční chemický zápis je ${}^{23}_{11}Na$. Pomocí nově vzniklého matematického přístupu je možno stejný prvek popsat trojicí vektorů

$$Na = (11i, 11j, 12k).$$

Atom sodíku se tedy skládá z 11 protonů, 11 elektronů a 12 neutronů. Atom uhlíku tvořený 6 protony, 6 elektrony a 6 neutrony, lze zapsat ve tvaru

$$C = (6i, 6j, 6k).$$

Atom chlóru je tvořen 17 protony, 17 elektrony, 18 neutrony a jeho zápis má tvaru

$$Cl = (17i, 17j, 18k).$$

Atom dusíku je tvořen 7 protony, 7 elektrony, 7 neutrony a jeho zápis je tvaru

$$N = (7i, 7j, 7k).$$

Díky zavedení tří bázových vektorů by se zprvu mohlo zdát, že dimenze prostoru prvků periodické tabulky je rovna třem, ale díky pravidlu o elektrické neutrálnosti každého prvku si vystačíme pouze s vektory $(i,\ k)$ nebo $(j,\ k)$. Původně trojrozměrný souřadnicový systém se zmenšil na rovinu s dimenzí 2 kolmou k rovině dané vektory $(i,\ j)$, přičemž průsečnice, označme τ, této roviny s rovinou $(i,\ j)$, svírá se souřadnými osami i, j úhel 45 stupňů.

Rovina $(i,\ j)$ je tedy přímkou τ rozdělena na dvě části. Uvažujme, že souřadná osa daná vektorem i je vodorovná a souřadná osa daná vektorem j je svislá. Body, jež leží na přímce τ znázorňují jednotlivé prvky, které se již od sebe mohou lišit pouze počtem neutronů v jádře, jímž jsou také jednoznačně určeny. Zdůrazněme, že se stále jedná o diskrétní rozložení, nikoliv spojité. Bereme v úvahu pouze první kvadrant souřadné roviny, protože ostatní kvadranty postrádají význam.

Oblast pod přímkou τ je oblast kde je počet protonů věší než počet elektronů, a proto v této oblasti leží kladně nabité ionty, neboli kationty. V druhé polorovině leží anionty, ionty kde počet elektronů převažuje nad počtem protonů. Ve vektorovém zápisu by byl tedy počet elektronů různý od počtu protonů, čímž bychom po grafickém vykreslení dostali trojrozměrný souřadný systém.

Popisovat kationty, nebo anionty nově vzniklým vektorovým zápisem se však příliš nehodí, protože tento zápis nám udává pouze počet nabitých částic a neutronů, například ze zápisu

$$(28i, 27j, 32k)$$

jde jen těžko poznat, že se jedná o kationt kobaltu. První dvě složky vektoru nám napoví, že jde buď o prvek na 28., nebo 27. místě v periodické tabulce a podle počtu neutronů se již můžeme dopočítat k výslednému prvku. Odhad 27. nebo 28. místa jsme provedli za předpokladu, že rozdíl mezi protony a elektrony v daném iontu je roven jedné. Tento kationt kobaltu má o tedy jeden proton navíc. Problém nastává, když kationty, nebo anionty mají přebytek jedněch nabytých částic větší nebo rovný dvěma. Kvůli možnosti vzniku této situace je tento způsob zápisu velmi nevýmluvný, tedy nepoužitelný, a je lepší používat klasický zápis užívaný v chemii.

10.3 Uspořádání množiny elementárních nábojů

Z diskrétní matematiky víme, že relace R na množině P, která je reflexivní, antisymetricka a tranzitivní se nazývá uspořádání a značí se symbolem $\leq$. Dvojice (P, R) se označuje pojmem uspořádaná množina. Tento pojem je dále rozšířen o termín lineární, tedy lineárně uspořádaná množina a to tehdy když pro každé dva prvky z množiny P platí, že $a \leq b$ nebo $b \leq a$.

Tedy množina G je lineární uspořádání a její Hasseův diagram má tvar svislé přímky, na níž jsou podle relace R rozmístěny prvky množiny G. Dále platí, že tato množina je nejen svazem, ale i distributivním svazem.

11 Závěr

Tato bakalářská práce popisuje odvození Maxwellových rovnic pomocí vybraných kapitol matematiky zejména teorie tenzorů, vektorových polí, orientovaných křivkových a plošných integrálů a integrálních vět. Všechny tyto pojmy jsou včetně definic a vět na ně navazujících rozebrány v kapitolách 2-7. Důkazy jsou často vynechány, neboť nejsou přímo zmíněny v zadání práce, přesto je vždy uveden odkaz na příslušnou literaturu, která daný důkaz obsahuje, stejně je to s definicí pojmů, které v textu nejsou stěžejní.

V kapitole 8 jsou stručně zopakovány základní zákony elektromagnetismu, které jsou dále shrnuty nejprve do integrálního tvaru Maxwellových rovnic a následně pomocí integrálních vět a definováním několika málo nových pojmů převedeny do diferenciálního tvaru Maxwellových rovnic.

Dále práce pokračuje vysvětlením pojmu kalibrační invariantnost polí, které se dále využije například při odvozování vlnové rovnice pro potenciály elektromagnetického pole. Navazuje kapitola o speciální teorii relativity a čtyřvektorovém formalismu, v níž je vysvětlen význam Lorentzovy transformace Maxwellových rovnic a zaveden Minkowského prostor, nezbytný pro popsání elektromagnetismu v čase i prostoru (třírozměrném) proměnném.

Nakonec je uveden tenzor elektromagnetického pole, s jehož pomocí se Maxwellovy rovnice velmi snadno zapíší do mnohem stručnějšího tvaru. Další výhodnost tohoto zápisu je ukázána na krátkém odvození rovnice kontinuity a vlnové rovnice. Z řešení vlnové rovnice vyplývá, že vektor elektrické intenzity $\vec{E}$ a magnetické indukce $\vec{B}$ jsou na sebe v jakékoliv souřadné soustavě kolmé a jejich velikosti jsou vzájemně svázány rychlostí světla podle vztahu $E = cB$.

Vhodnou navazující a především rozšiřující literaturou tohoto textu je publikace The Geometry of Physics sepsaná Theodore Frankel.

Reference

[1] BOČEK, L.: *Tenzorový počet*, Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1976. 152 p.

[2] DOUPOVEC, M.: *Diferenciální geometrie a tenzorový počet*, Brno: VUTIUM, 1999. 86 p.

[3] FEYNMAN, Richard Phillips, Robert B. LEIGHTON a Matthew SANDS. : *Feynmanove prednášky z fyziky 3.*, 4. vyd. Bratislava: Alfa, 1988. Edícia matematicko-fyzikálnej literatúry.

[4] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER, DUB, Petr, ed.: *Fyzika. 2.*, přeprac. vyd. Přeložil Miroslav ČERNÝ. Brno: VUTIUM, c2013. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-4123-1.

[5] KARÁSEK, a Ladislav SKULA.: *Obecná algebra*, Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008. ISBN 978-80-214-3794-4.

[6] KORBEL, Filip.: *TENSORY A JEJICH APLIKACE* , [online]. Brno, 0016n. l. [cit. 2017-02-24]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=127125. Bakalářská práce. VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ. Vedoucí práce Prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.

[7] KUREŠ, Miroslav.: *Přednášky matematické analýzy VUT FSI Brno.*

[8] LANDAU, Lev Davidovič a Jevgenij Michajlovič LIFŠIC.: *Úvod do teoretickej fyziky*, Bratislava: Alfa, 1980. Edícia teoretickej literatúry.

[9] LOMTATIDZE, Alexander.: *Lineární funkcionální analýza*, [Brno: Masarykova univerzita. Středisko pro pomoc studentům se specifickými nároky, 2007].

[10] LORIMER, Peter.: *The special theory of relativity for mathematics students*, Singapore: Teaneck, N.J, 1990. ISBN 9810202547.

[11] MATEMATIKA II. : *Matematika online*, [online]. Brno: Ústav matematiky FSI VUT ©2005 [cit.2017-01-22]. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematika-II/sc-6-sr-1-a-25/default.aspx.

[12] PYRIH, Pavel, M. HUŠEK, et al. Matematická analýza.: *Matematika.cuni.cz: Portál pro vysokoškolskou matematiku*, [online]. Praha: Matematickofyzikální fakulta Univerzita Karlova, ©2000-2003 [cit.2017-01-22]. Dostupné z: http://matematika.cuni.cz/dl/analyza/index.htm.