



Pedagogická  
fakulta  
Faculty  
of Education

Jihočeská univerzita  
v Českých Budějovicích  
University of South Bohemia  
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematika

Rovinné mechanismy pro kreslení přímky

Straight line mechanisms

Bakalářská práce

Vypracovala: Petra Kubáková

Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, PhD.

České Budějovice, 2022

## Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG, provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů. V Českých Budějovicích dne 8. července 2022.

Petra Kubáková

*Podpis*

## Poděkování

Tímto bych velmi ráda poděkovala panu Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D. za inspiraci k tématu bakalářské práce, trpělivost a vedení. Dále bych chtěla poděkovat Evě Kubákové za korekturu práce a Andree Doudové za pomoc s překladem částí z anglického do českého jazyka.

## **Anotace**

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou rovinných mechanismů a následným využitím ve výuce matematiky. Jednou ze stěžejních částí, je představení vybraných pasáží knihy A. B. Kempeho "*How to draw a straight line*, která nikdy nebyla přeložena do českého jazyka. Vybrané pasáže popisují mechanismy, které následně využiji ve výuce formou projektu.

## **Klíčová slova**

James Watt, Pafmuty Lvovich Čebyšev, paralelní pohyb, Alfred Bray Kempe, Charles-Nicolas Peaucellier, Peaucellierův vynález, mechanismus, rovinný mechanismus

## **Abstract**

This bachelor's thesis deals with the issue of plane mechanisms and their subsequent use in the teaching of mathematics. One of the key parts is the presentation of selected passages of A. B. Kempe's book *How to draw a straight line*, which was never translated into Czech language. Selected passages describe the mechanisms that I will then use in teaching in the form of a project.

## **Key words**

James Watt, Pafnuty Lvovich Chebyshev, parallel motion, project day, Alfred Bray Kempe, Charles-Nicolas Peaucellier, Peaucellier's invention, history of the 18th and 19th century

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>7</b>
1.1 Úvod do problematiky . . . . .	7
1.2 Alfred Bray Kempe . . . . .	10
<b>2 Wattův paralelní pohyb</b>	<b>13</b>
2.1 Okolnosti vzniku . . . . .	13
2.2 Výpočet křivky . . . . .	17
2.3 Dnešní využití . . . . .	21
<b>3 Čebyševova křivka</b>	<b>22</b>
3.1 Okolnosti vzniku . . . . .	22
3.2 Matematické vyjádření křivky, kterou opisuje Čebyševův mechanismus	25
<b>4 Peaucellierův mechanismus</b>	<b>28</b>
4.1 Okolnosti vzniku . . . . .	28
4.2 Matematické vyjádření pohybu Peaucellierova mechanismu . . . . .	30
4.3 Matematický aspekt a dnešní využití Peaucellierova mechanismu . . .	36
<b>5 Implementace aktivizačních metod ve výuce geometrie na 2. stupni ZŠ s využitím popsaných mechanismů</b>	<b>41</b>
5.1 Harmonogram projektového dne . . . . .	43
<b>6 Závěr</b>	<b>46</b>
<b>A Příloha: Návod k sestavení Wattova paralelního spojení</b>	<b>53</b>
<b>B Příloha: Návod k sestavení Chebysheva mechanismu</b>	<b>54</b>
<b>C Příloha 3: Návod k sestavení Peaucellierova mechanismu</b>	<b>55</b>



# 1 Úvod

## 1.1 Úvod do problematiky

Přímka. Pojem, který zná každý ze školy. Ve škole nám učitelé vryli do paměti, že se jedná o "nejjednodušší geometrický útvar", ke kterému nám stačí rovné pravítko (případně trojúhelník) a tužka. Avšak postupem v této práci budeme zjišťovat, že se nejedná o banální věc, jak se může na první pohled zdát.

Velký geometr Euklid nám v díle Euklidovy základy definuje pojmy a vyžadoval, abychom byli schopní zvládat určité procesy. Pár jich budu citovat:

- 1) *Bod jest, co nemá dílu.*
- 2) *Čára pak délka bez šířky.*
- 3) *Hranicemi čáry jsou body.*
- 4) *Přímá jest čára (přímka), která svými body táhne se rovně.*

...[18][s.1]

Dále Euklid rovnou přímku popisuje jako "*čáru, která je vůči bodům na ni ležícím umístěna rovně.*" [19] Avšak tato definice není dostatečná, protože při rýsování přímky vezmeme pravítko. Zde zastává problém. Abychom měli rovnou přímku, musíme mít pravítko rovné hrany. Zde vyvstává otázka, jak uděláme rovnou hranu? Metoda jednoduchého pravítka by nám v tomto problému mohla pomoci. Stačí nám, aby opisující bod zachoval stejnou vzdálenost od středy (=poloměr). Středový bod, který si vybereme, zafixujeme v rovině a prostrčíme jím čep. Následně připevníme jakýkoliv materiál jakýkoliv rozměrů, který se bude otáčet v kruhu kolem čepu. [1] [s. 1-2]

Dalším slavným matematikem, který se zabýval problematikou křivek, byl Rene Descartes. Rene Descartes byl francouzský filozof, matematik a fyzik. Mezi jeho nejslavnější díla patří Rozprava o metodě, která vyšla v roce 1637 v Leydenu. Obsahuje 3 eseje. První z esejí byla Geometrie, která představovala revoluci v matematice. [20] [2]

Descartova Geometrie je rozdělena na tři části:

- 1) *Kniha první: O úlohách, které je možno sestrojiti pouhým užitím kružnic a přímek*
- 2) *Pojednání druhé: O povaze křivek*

### 3) *Knihy třetí? O konstrukci úloh tělesných a více než tělesných*

Více se zaměříme na druhou část knihy: O povaze křivek.

*„Starí si dobře všimli, že úlohy geometrie jsou zčásti rovinné (plans), zčásti tělesné (solids) a zčásti křivkové (lineaires), to znamená jedny, které lze konstruovat pouze pomocí přímek a kružnic, druhé, v nichž se použije aspoň jedna kuželosečka, zatímco třetí konečně vyžadují použití nějaké složitější křivky. Divím se však, že u těchto složitějších křivek nerozlišovali rozličné stupně a nechápu, proč je označovali jako mechanické a nikoli geometrické. Neboť kdyby chtěli říci, že je tomu tak proto, že je k jejich nakreslení zapotřebí určitých přístrojů (machines), pak by museli z téhož důvodu odmítnout i kružnice a přímky, neboť přece i ty kreslíme na papír pomocí kružítka a pravítka, které lze právě tak označit za přístroje.[8]*

V úvodu druhé knihy Descartes při diskusi otázky, které křivky by měly být zahrnuty do geometrie, odmítá starověké rozdělení křivek na geometrické (příkladem může být přímka nebo kružnice) a mechanické (spirála, kvadratrix, atd.) V následujících odstavcích dochází k vlastnímu vymezení křivek, které považuje za geometrické:

*Abych nakreslil všechny ty křivky, které zde hodlám zavést, nepotřebuji už žádný další předpoklad kromě toho, že je možné pohybovat současně dvěma nebo více přímkami a že jejich průsečíky vyznačují jinou křivku.[8]*

V dalším odstavci nám již blíže definuje pohyb přímek a geometrickými nazývá ty, které:

*[...] jsou opsány spojitým pohybem nebo několika takovými pohyby, z nichž následující jsou plně určeny předcházejícími[8]*

Tímto oddělil křivky jako kvadratrix atd., které můžeme opsat spojitými pohyby, ale tyto pohyby jsou na sobě nezávislé. Můžeme říct, že Descartes považoval křivky za geometrické ty křivky, které dnes označujeme jako algebraické a ostatní označoval jako mechanické (dnes je označujeme jako transcendentní)

Důkaz, že existuje mechanismus, který vykreslí jakoukoliv křivku, se dlouhou dobu od vydání knihy Geometrie neobjevil. Tento důkaz i důkaz Descartovy myšlenky provedl až v roce 1876, kdy byly objeveny inverzory, anglický matematik Alfred Bray Kempe. Důkaz provedl následujícím způsobem: sestrojil kloubové mechanismy a začal je mezi sebou kombinovat. Poukázal, že pro každou algebraickou křivku lze



vymyslet mechanický postup, jak z každého jednoduchého mechanismu sestavit takový, který by křivku vytvářel. Výsledek byl velmi složitý a nepoužívaný, ale šlo mu o důkaz této možnosti.

Během 19. století bylo sestaveno mnoho mechanismů, které převáděly otáčivý pohyb na přímočarý nebo naopak. Byly tak oblíbené, že se staly součástí sbírek vědeckých přístrojů.[2] Mnoho z těchto objevů obsahuje kniha A.B.Kempe, která vznikla v roce 1877 ze stejnojmenné přednášky s názvem: *Jak nakreslit úsečku. Nauka o mechanismech.*

## 1.2 Alfred Bray Kempe

Alfred Bray Kempe se narodil 6.7.1849 v Londýně. Kempe byl synem rektora anglikánského kostela Sv. Jakuba, reverenda Johna Edwarda Kempeho. Studoval na St Paul's School v Londýně a poté studoval na Trinity College v Cambridge, kde byl jedním z jeho učitelů Arthur Cayley (Cayley byl britský matematik, který se v matematice věnoval teorii matic a byl první, kdo podal moderní definici grupy). V roce 1872 získal bakalářský titul. I přes jeho zájem o matematiku pracoval jako advokát se specializací na církevní právo. V roce 1913 byl povýšen do šlechtického stavu. Dále získal čestný titul Doktor kanonického práva na Durhamské univerzitě. [17]

Cayley a Sylvester jej vyzdvihují jako „významnou osobnost světa matematiky a fyziky pro jeho výzkumy a objevy v oblasti kinematiky“. V roce 1881 byl zvolen do společnosti Královské společnosti. Roku 1897 byl zvolen do rady Královské společnosti. Kromě lásky k hudbě a matematice miloval i švýcarské Alpy, které navštívil téměř padesátkrát. [9]

Kempeovy rané příspěvky k matematice se zabývaly tématem mechanismů, zahrnujících aplikaci geometrie. Jeho další matematické příspěvky, ačkoli ne tak četné, byly prvotřídní kvality. Několik článků napsal převážně o algebře se zvláštními zákony, z nichž každý nese odkaz jeho impozantní schopnosti. Jeho právní vzdělání ho vždy vedlo k velmi jasným a přesným formulacím.

Během let 1892-94 byl prezidentem The London Mathematical Society a vždy bude připomínán pro svůj pozoruhodný přínos k filozofii matematiky. Jeho prezidentský příjem, když se ujímal vedení Londýnské matematické společnosti, měl název "Co je to matematika?".

Někteří odborníci považují jeho „Pojednání o teorii matematické formy“, publikované v The Philosophical Transactions The Royal Society v roce 1896, za jeho nejdůležitější práci. V této práci využil teorii grafů k vizualizaci matematických otázek, což mu poskytlo rámec pro nalezení nových matematických postupů.

V roce 1876 Kempe prokázal teorii o možnosti reprodukovat jakoukoli rovinnou křivku stupně  $n$  pomocí kloubového rovinného mechanismu, skládajícího se pouze z otočných a posuvných částí. V roce 1926 ruský matematik Semyon Aranovich Gershgorin založil na Kempeho úvahách svoji práci a použil komplexní variabilní metodu

k prokázání obecnější věty o možnosti konstruování podobných mechanismů pro libovolnou algebraickou funkci. Přesto ani Kempe, ani nikdo jiný nezavedli metodu pro návrh nejjednoduššího propojení a generování konkrétní křivky. Další ruský matematik Artobolevskij uvádí mnoho příkladů mechanismů pro vytváření křivek až do čtvrtého stupně, a dokonce i některé transcendentální křivky.[9]

V roce 1877 vydal Kempe monografii pod názvem „Jak nakreslit úsečku - přednáška o mechanismech“. Tato přednáška byla určena učitelům přírodních věd a byla vydána přesně po 100 letech. Problém vytváření přímky pomocí kloubového mechanismu je stejně starý jako parní stroj Jamese Watta. Isaac Newton zdůraznil, že „popis pravých čar a kružnic, na nichž je geometrie založena, patří k matematickým mechanismům. Geometrie nás nenaučí tyto čáry nakreslit, ale vyžaduje, aby byly sestrojeny.“ V geometrické konstrukci pouze zkopírujeme existující přímku. Kolem roku 1784 James Watt použil svůj slavný přímý mechanismus k vedení pístu parního stroje podél přibližné přímky. Tento Wattův mechanismus byl populární v padesátých letech 20. století, aby bylo možné zkonstruovat zadní nápravy v závodních autech. Sám James Watt v dopise svému synovi napsal, že je na vynález tohoto mechanismu velice pyšný.

Později bylo vyvinuta celá řada přibližných přímých mechanismů, jako například mechanismy Robertse, Evanse, Čebyševa a jiné. Ještě v roce 1993 byly publikovány první články o přímých mechanismech. V roce 1864, osm let po Wattově objevu, francouzský armádní inženýr Charles-Nicolas Peaucellier poprvé přišel s mechanismem, jehož bod generuje při pohybu mechanismu přesnou přímku.

Kempe začíná svoji knihu následujícím úvodem:

*Velký geometrik Eukleidés, než nám demonstroval nejrůznější tvrzení obsažené v jeho knize Základy geometrie, požaduje, abychom byli schopni dosáhnout určitých postupů. Tyto (postuláty), jak jsou požadavky nazývány, lze zhruba říci, že vyžadují, abychom byli schopni popsat přímky a kružnice. Tak veliká je úcta, kterou věnujeme tomuto geometrickému géniovi, že existuje mnoho těch, kteří by odmítli označení "geometrické" pro ukázkou, která vyžaduje jakoukoli jinou konstrukci, než jaká může být ovlivněna přímkami a kruhy. Proto se říká, že mnoho problémů - jako například trisekce úhlu - která lze provést jinými jednoduchými prostředky, avšak nemají geometrické řešení, protože nemohou být řešeny pouze přímkami a kružnicemi.[1]*

*Je zajímavé se ptát, jak můžeme tyto úvodní podmínky naplňovat, jak můžeme popsat tyto kružnice a přímky s takovou přesností, jaká se přiznává fyzikální situaci problému.[1]*

To, co navrhl Kempe před více než sto lety, bylo umožnit přiměřeně stupně volnosti v mechanismech, jehož pracovní bod vykresluje konkrétní křivku. Prostřednictvím své analytické metody vyřešil problém rigidních vztahů. Příklady nejslavnějších mechanismů se nacházejí v dalších kapitolách.

V roce 1919 ze zdravotních důvodů rezignoval na funkci pokladníka Královské společnosti. Předseda Sir J.J. Thomson vyjádřil pocity celé společnosti:

*Je obtížné najít slova, abychom vyjádřili naši vděčnost. Svým pracovním nasazením, dlouholetými zkušenostmi se záležitostmi společnosti a právními znalostmi poskytoval v našich řadách a v řízení politiky naší společnosti neocenitelnou službu[9]*

## 2 Wattův paralelní pohyb

### 2.1 Okolnosti vzniku

James Watt je dnes připomínán pro svou průkopnickou práci na parním stroji. Definoval jednotku výkonu, která byla po něm pojmenována. Byl to právě on, kdo vynalezl první stroj pro převádění přímočarého pohybu na otáčivý. Svou myšlenku popsal v dopise, který napsal Metthew Boultonovi (byl anglický podnikatel a pozdější Wattův obchodní partner) v červnu 1784:

*Zaznamenal jsem způsob, jak pohybovat tyčí pístu kolmo nahoru a dolů. Pouze ji upevním na kus železa, bez řetězů nebo kolmých vodítek.... vynalezl jsem jeden z nejgeniálnějších a nejjednodušších mechanismů.*

V 21 letech začal Watt pracovat v Glasgow jako univerzitní mechanik. Přestože je vynález parního stroje často připisován Wattovi, tento stroj byl sestaven již v roce 1712 anglickým kovářem Thomasem Newcomenem. Ten narazil na problém, jak otáčivý pohyb stroje převést tak, aby píst ve válci co nejméně drhnul a nedocházelo k jeho poškozování. Watt přišel s vylepšením, které dnes známe pod názvem Wattův paralelní pohyb.

V roce 1757 dostal za úkol opravit nefunkční model Newcomenova atmosférického parního stroje a ihned rozpoznal jeho nedostatky. Zjistil, že kotel stroje nevytváří dostatečné množství páry. Stávalo se také, že ve chvíli, kdy píst vykonal několik pohybů, bylo nutné stroj zastavit a doplnit vodu v kotli. Toto bylo pro Watta překážkou, a proto nejdříve musel pochopit vlastnosti páry. Watt ve spolupráci s profesorem Josephem Blackem (byl chemikem a fyzikem skotské národnosti, známý především díky objevení hořčíku, měrného tepla a oxidu uhličitého. Také se delší dobu zabýval vlastnostmi páry). Díky spolupráci zjistil, že teplota i tlak páry zůstává konstantní. Objevil, že díky neustálé výměně páry ve válci dochází ke srážení velkého množství vody, a tím se vodou zbytečně plýtvá. Chtěl docílit toho, aby co nejméně páry kondenzovalo ve válci (pro udržení chodu se zkondenzovaná voda musela vypouštět) a tím zamezit neustálému doplňování a ohřívání vody v kotli a plýtvání palivem pro tento ohřev. [4]

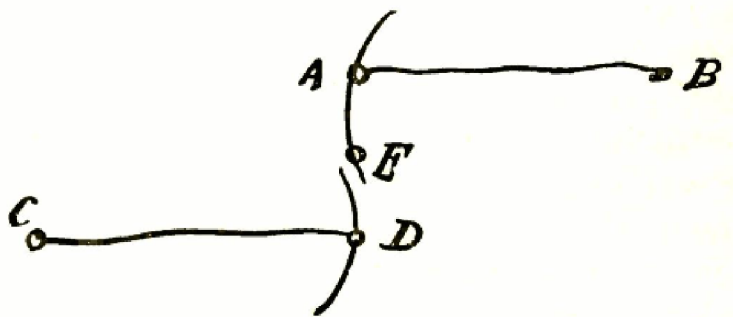
Po dlouhém přemýšlení jej napadlo, zda by pára místo ve válci nemohla kondenzovat v samostatném parním kondenzátoru, připojeném za válec. Přitom uvažoval,

že u takového modelu by válec nemusel být napřed vůbec ochlazen a rovněž by nebylo potřeba čerstvé páry k jeho zahřátí. Následně sestrojil výsledný model a stroj, jak on předpokládal, pracoval velmi dobře. Watt však ještě nebyl spokojen, neboť tento stroj dle jeho představ nebyl zcela dokonalý. A tak dále studuje a koná velké množství pokusů k dosažení lepších výsledků.

Hlavním Wattovým úkolem bylo soustředit se na udržování válce ve stále stejné teplotě a ochlazování kondenzátoru. Měl určitou myšlenku, jak k tomuto řešení dojít a vypracoval potřebné plány.

Jeho pokusy s parním strojem však vyžadovaly určitou finanční podporu, které se mu nedostávalo, a tak na čas od svých pokusů upustil a snažil se spíše nalézt nějakého zámožného podnikatele, který by mu umožnil v pokusech pokračovat. Tehdy Wattovi opět pomohl jeho přítel profesor Black, který jej doporučil svému známému Roebuckovi, majiteli známé železárny. V roce 1775 byl vyroben pístový válec, nejdůležitější součástka stroje, který byl tentokrát místo cínu, jako tomu bylo v předchozím případě, zhotoven z litého železa. Pokusný model s takto vyrobeným válcem pracoval velmi dobře a měl jen nepatrné nedostatky, které se později podařilo odstranit. Velkou zásluhu si na tom rovněž připisoval Wilkinson, majitel vyhlášené železárny, u něhož byl válec zhotoven. [4]

Konečně začátkem roku 1776 byl stroj uveden do chodu a pracoval již bez sebemenší chyby. Zdokonalení parního stroje způsobilo rozruch mezi majiteli dolů, kteří byli stále nešťastni ze záplav svých uhelných dolů a nebyli spokojeni s žádným čerpadlem, které by mohlo odčerpávat vodu a umožnilo bezpečnou práci horníků v jejich dolech. Ve Wattově parním stroji viděli naplnění svých tužeb. [4]



Obrázek 1: Původní nákres křivky (z webu wikimedia.org)

Alfred Bray Kempe popsal konstrukci Wattovy křivky ve své knize:

"První člověk, který se tímto problémem zabýval, byl James Watt. „Wattův paralelní pohyb“, vynalezený v roce 1784, je dobře znám každému inženýrovi a používá se téměř v každém parním stroji. Zařízení, redukováno na jeho nejjednodušší formu, je znázorněno na obr. 2. Radiální táhla mají stejnou délku – pro stručnost používám slovo „délka“ pro označení vzdálenosti mezi čepy; táhla mohou mít samozřejmě libovolnou délku nebo tvar, a vzdálenost mezi čepy případně délka členu, který je spojuje, je taková, že když jsou spojovací části rovnoběžné, linie spojující tyto čepy je kolmá ke spojovacím částím. Kreslicí bod je umístěn v polovině dráhy mezi čepy na pojezdové části.

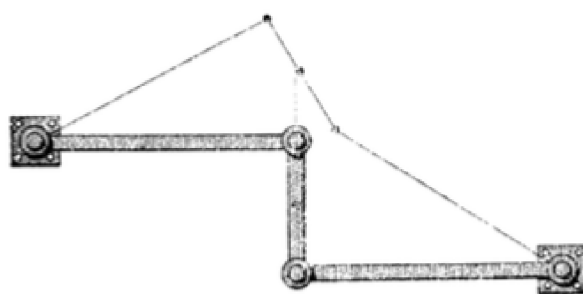


Fig. 2.

Obrázek 2: Wattova křivka (Kempe, 1877, str. 8)

Křivka popsaná kreslicím bodem, pokud se přístroj příliš neodchyluje od své střední polohy, se podobá číslu 8. Algebraická křivka nemůže jako svou část obsahovat úsečku. Důvodem je to, že kruhy tvořené konci spojovacích částí mají své konkávy otočené v opačných směrech a kreslicí bod je v polovině cesty, vzniká tedy linie, která není konkávní ani na jednu ani na druhou stranu, a výsledkem je křivka limitně blížící se přímce.

Tato křivka však není přesně přímá, protože pokud dovolím sledovacímu zařízení, aby popsalo celou dráhu, bude se po dosažení určité vzdálenosti od své střední polohy výrazně odchylovat od přímky, viz obr. č. 8, který nám vykresluje příslušnou číslu 8.

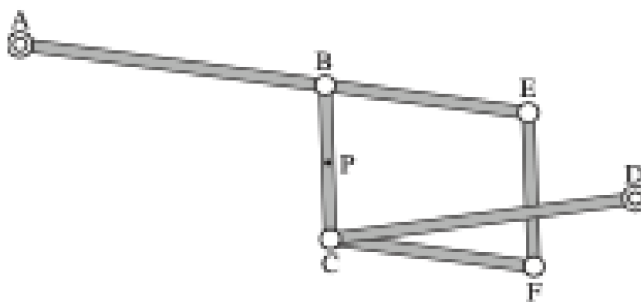
Pro mnoho účelů je přímka popsaná Wattovým přístrojem dostatečně přesná, ale pokud vyžadujeme ideální přímku, samozřejmě to neudělá a musíme to zkusit znovu. Nyní jsme schopni prokázat, že je nemožné vyřešit problém pomocí tří pohyblivých částí; lze se však přiblížit k pravdě více, než jak ji udává Watt, ale stále to není

ideální řešení." [1]

Tuto křivku dále zkoumal Phineas Crowther [21]. Jeho cílem bylo vylepšení konstrukce umístěním klikové hřídele přímo nad válec, přičemž byl píst omezen Wattovým paralelním pohybem. Jediným skutečným rozdílem mezi Wattovým a Crowtherovým řešením je pak jeho aplikace: Wattovo řešení bylo určeno pro parní motory, zatímco Crowther navrhoval své řešení pro konvenční pístové motory. [3]

Crowtherova vazba je u motoru docela zřejmá, ale u parního motoru je někdy obtížné rozlišit Wattovu část od ostatních částí. Kromě toho je rameno poměrně dlouhé a tyče stejné délky by zabraly příliš velké množství prostoru. Aby překonal tento problém, vyvinul Watt základní spojení do svého „úplného paralelního pohybu“, také zahrnutého do jeho původního patentu z roku 1784. Zatímco původní jednoduchý pohyb je u motorů ramena zřídka viditelný, úplný paralelní pohyb je mnohem běžnější. [3]

V uspořádání znázorněném na následujícím obrázku máme hlavní rameno motoru se středovým otočným čepem v bodu A (stejně jako předtím). Avšak bod B není na konci ramene, který je E, ale částečně na cestě. Tyč CD, která má stejnou délku jako AB a je známá jako radiální tyč, je spojena s ramenem kratším článkem BC. Střed P se bude pohybovat v přibližné přímce. Další články tvoří rovnoběžník BCEF, kdy čep F je spojen s pístní tyčí. Doporučujeme zvážit pohyb F, který je samozřejmě kritický. Nejjednodušší případ je, když se délka AB rovná délce BE, která není stejná jako délka znázorněná na obrázku.



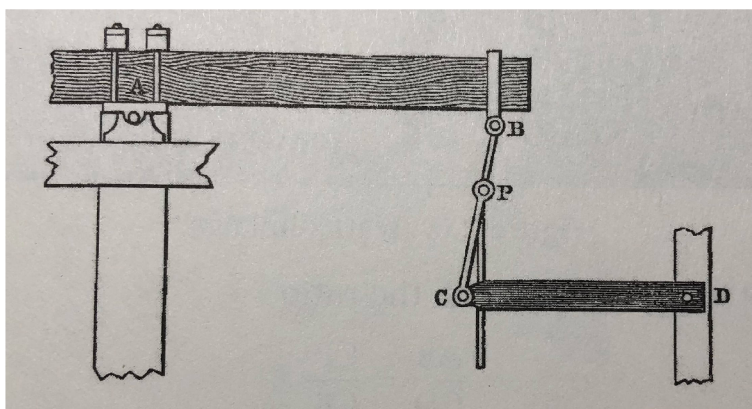
Obrázek 3: Úplná Wattova křivka (John Bryant, Chris Sangwin, 1934, str. 27)

Tento obrázek také naznačuje, proč byl původně používán termín „paralelní pohyb“, protože kromě toho, že má kompaktnější formu, vedou dva sloupky v rovnoběžníku jak tyč pístu, tak i ventilové převody.



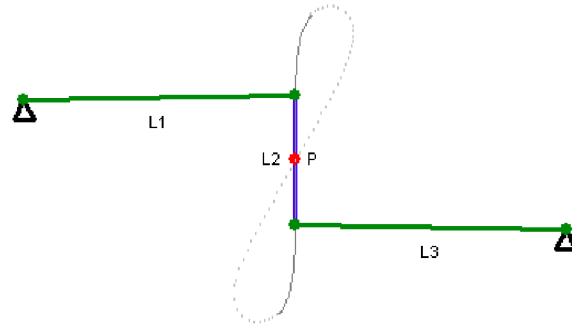
## 2.2 Výpočet křivky

V nejjednodušší formě se spojení skládá pouze ze tří částí, ale v obecné formě ji nalezneme na následujícím obrázku. V tomto modelu jsou body A a D upevněné, ale členy mechanismu v nich upevněné kolem nich mohou rotovat. Body C a B se pohybují po kružnicích, z čehož vyplývá, že části AB a CD tvoří oblouky, na které se odkazuje Watt. Pokud mají AB a CD stejnou délku, střed BC (můžeme ho označit jako P) se pohybuje vertikálně. Pokud bychom do bodu P dali tužku a začali jí pohybovat, zjistili bychom, že vzniklý obraz by nám v určité části připomínal přímku (jak popsal sám A. B. Kempe ve své knize). [3]



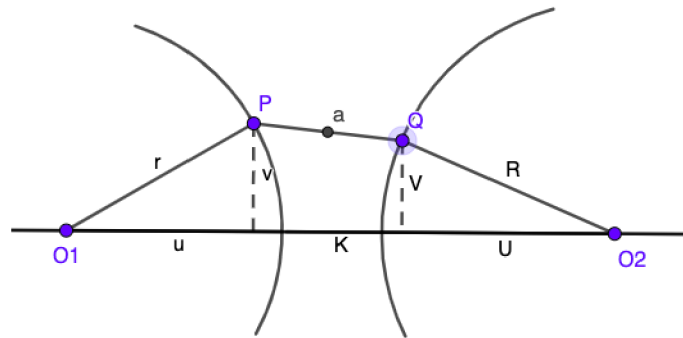
Obrázek 4: Obecná forma Wattovy křivky, (zdroj: John Bryant, Chris Sangwin, 1934, str. 23)

Existuje také forma Wattovy křivky, kde AB a CD nejsou stejně dlouhé. Poté pozici bodu P můžeme vypočítat jako vztah  $\frac{AB}{CD} = \frac{CP}{CB}$ . Z tohoto poměru vyplývá jeden poznatek. Čím delší budou AB a CD k BC, tím se křivka vykreslovaná bodem P bude blížit k přímce. Avšak musím upozornit na fakt, že iluze přímky je jen přibližná. [3]



Obrázek 5: Křivka vykreslená bodem P (zdroj: wikipedia.org)

Tuto křivku můžeme experimentálně nakreslit na papír pomocí kružítka nebo v programu GeoGebra.



Obrázek 6: Křivka v GeoGebře zdroj: vlastní

Při zkoumání křivky si musíme nejdříve zavést parametry ukotvených bodů  $O_1$  a  $O_2$  a pohyblivých bodů  $P$ ,  $Q$  v soustavě souřadnic:

$$O_1 = (-1, 0), \quad O_2 = (1, 0),$$

$$P = (x, y) = O_1 + (X, Y), \quad Q = (u, v) = O_2 + (U, V).$$

Poté

$$|O_1P|^2 = X^2 + Y^2, \quad |O_2Q|^2 = U^2 + V^2, \quad |QP|^2 = (2 + U - X)^2 + (V - Y)^2.$$

Z těchto parametrů můžeme již sestavit rovnici

$$X^2 + Y^2 = 1, \quad U^2 + V^2 = 1, \quad (2 + U - X)^2 + (V - Y)^2 = 1.$$

První dvě rovnice můžeme dosadit do třetí a zjednodušit ji

$$6 - 4(X - U) - 2(XU + YV) = 1.$$

Dále si definujeme úhly  $\alpha$  a  $\beta$ . Tyto úhly jsou  $\alpha = \sphericalangle O2O1P$  a  $\beta = \sphericalangle O1O2Q$

$$x = -1 + X = -1 + \cos\alpha, \quad y = Y = \sin\alpha$$

$$u = 1 + U = 1 - \cos\beta, \quad v = V = \sin\beta$$

a v rovině má křivka rovnici:

$$6 - 4(\cos\alpha + \cos\beta) + 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = 1$$

nebo

$$6 - 4(\cos\alpha + \cos\beta) + 2\cos(\alpha + \beta) = 1.$$

Rovnice jsou parametrizovány podle úhlů  $\alpha$  a  $\beta$ , ale úhly musí splňovat podmínku  $|\mathbf{QP}| = 1$ .

Pokud P, Q a O1 jsou kolineární, vyskytnou se extrémní hodnoty úhlu  $\alpha$ . Jedním z extrémů, které mohou nastat, je rovnoramenný trojúhelník O2PQ.

Křivka leží ve čtverci v mezích:

$$-\cos^{-1}\frac{1}{4} \leq \alpha, \beta \leq \cos^{-1}\frac{1}{4}$$

v rovině  $(\alpha, \beta)$ . Když  $\beta$  bude mít extrémní hodnotu,  $\alpha = 2\beta$ .

Dále můžeme parametrizovat křivku podle úhlu  $\beta$  následovně:

$$\alpha = \sphericalangle O2O1P = \sphericalangle O2O1Q + \sphericalangle QO1P$$

Pokud O1O2QP je konvexní,

Potom

$$\cos\sphericalangle O2O1Q = \frac{2 - \cos\beta}{|O1Q|}, \quad \sin\sphericalangle O2O1Q = \frac{\sin\beta}{|O1Q|}$$

a

$$\cos\sphericalangle QO1P = \frac{|O1Q|}{2}, \quad \sin\sphericalangle QO1P = \pm \frac{\sqrt{4 - |O1Q|^2}}{2}.$$

Podle vzorců trigonometrie dostáváme

$$\cos\alpha = \frac{2 - \cos\alpha}{2} \pm \frac{\sin\beta}{2} \sqrt{\frac{4\cos\beta - 1}{5 - 4\cos\beta}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin\beta}{2} \pm \frac{2 - \cos\beta}{2} \sqrt{\frac{4\cos\beta - 1}{5 - 4\cos\beta}}.$$

Dosadíme proměnné X, Y, U, V

$$X = \frac{(2 + U) - VR}{2}, \quad Y = \frac{V + (2 + U)R}{2}$$

kde

$$R^2 = -\frac{4U + 1}{5 + 4U}.$$

[5]

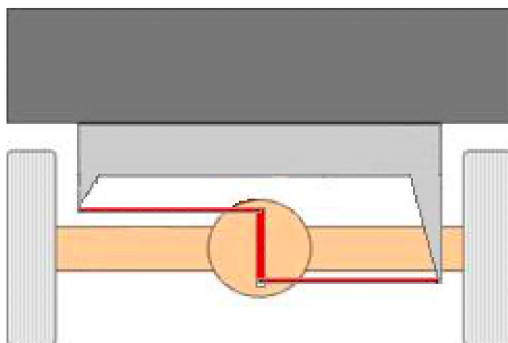
Pokud bychom ve výpočtech (velmi komplikovaných a nepřehledných) pokračovali dále, zjistili bychom, že se jedná o křivku šestého stupně.

## 2.3 Dnešní využití

V dnešní době se Wattova křivka objevuje nejen v parním stroji, ale zejména v oblasti automobilů jako závěs nápravy (říká se mu Wattův přímovod). Wattův přímovod se používá jako vylepšení Panhardovy tyče, která byla zkonstruována na začátku 20. století. Wattův přímovod je určen k zamezení příčného posunu mezi nápravou a skeletem vozidla a vyrovnává síly, které působí na nápravu. Jedná se však jen o svislý pohyb, proto střední část opisuje přesnou přímku.

Svým způsobem lze na Wattův přímovod nahlížet jako na dvě Panhardovy tyče montované proti sobě. Ve Wattově uspořádání jsou však protějšší zakřivené pohyby, způsobené otáčením Panhardových tyčí, kompenzovány krátkou svislou tyčí. Vazba může být obrácená, přičemž v tomto případě je střed P připojen k tělu a tyče jsou namontovány k nápravě. To snižuje neodpružené síly a mírně mění kinematiku. Toto uspořádání bylo používáno na australských V8 Supercars až do konce sezony 2012.

Wattův přímovod může být použit k zabránění pohybu nápravy v podélném směru vozu. Toto řešení zahrnuje dva Wattovy přímovody na každé straně nápravy, namontované kolmo k nápravě -> zejména u pérování závodních vozů. [23]



Obrázek 7: Ukázka použití Wattovy křivky na nápravě (zdroj: wikipedia.org)

## 3 Čebyševova křivka

### 3.1 Okolnosti vzniku

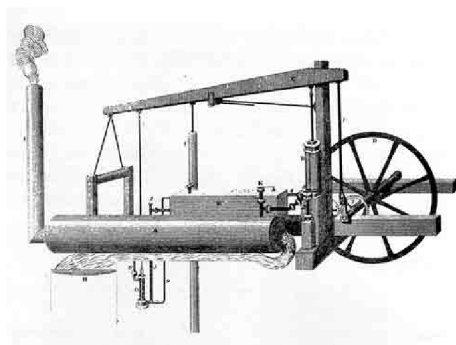
Problematikou převádění přímočarého pohybu na otáčivý se dále zabýval Pafnuty Lvovich Čebyšev. Čebyšev se narodil v roce 1821 nedaleko Moskvy a v roce 1837 vstoupil na moskevskou univerzitu.

Poté, co v roce 1853 navštívil Francii a Anglii a pozorně sledoval postup aplikované mechaniky v těchto zemích, napsal svůj první příspěvek k teorii mechanických vazeb. V příštích třiceti letech přinesl další řešení tohoto problému. Zjistil však, že nejbližší k řešení převedení přímého pohybu na otáčivý byly vynálezy Watta a Olivera Evanse[22]. Čebyšev zaznamenal nepřesnost vytvoření přímky těmito konstrukcemi a vypočítal odchylku pátého stupně, neboli asi 0,0008 palce na palec délky ramene. Navrhl úpravu Wattova paralelního pohybu tak, aby se zvýšila jeho přesnost, ale zjistil, že bude nutné více než zdvojnásobit délku pracovního ramene. Čebyšev však dospěl k závěru, že jeho modifikace přinese v praxi mnoho těžko řešitelných problémů.

Po mnoho let byl pevně přesvědčen, že vazby nemohou být nikdy navrženy tak, aby tvořily přesnou přímku. Při svých výzkumech přišel s objevnou modifikací, kde použil ramena Wattova spojení, dvě z nich zkřížil a třetí rameno opisovalo křivku, jejíž část lze vyjádřit jako přímku.[3]

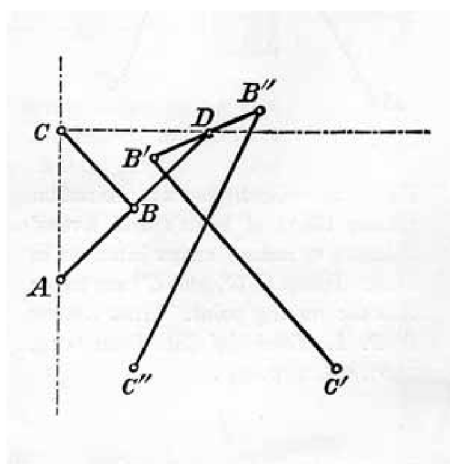
Výsledkem jeho snahy byla myšlenka, jak se lze přiblížit skutečné přímce, ne-li tohoto výsledku dosáhnout. Pokud by byl jeden mechanismus úspěšný, dosáhlo by se větší přesnosti užitím dvou mechanismů. Záměrem bylo jednoduše zkombinovat přibližné vazby čtyř článků a uspořádat je tak, aby se chyby postupně snižovaly.

Nejprve uvažoval o kombinaci Wattova a Evansova řešení, Uvědomil si, že pokud by bod D Wattova řešení následoval téměř přímku, bod A Evansova řešení by se od přímky odchýlil ještě méně. Vypočítal odchylku v tomto případě od jedenáctého stupně. Poté nahradil Wattovo řešení vazbou, která se obvykle nazývá Chebyshevův přímočarý mechanismus (obr. 10), čímž se zvýšila přesnost na 13. stupeň.



Obrázek 8: Evansovo řešení pro parní stroj [7]

Parní stroj, vystavený ve Vídni v roce 1873, měl toto spojení - Chebyshevův mechanismus byl zkombinován buď s Evansovým řešením nebo přibližným rovnoramenným spojením. Anglický návštěvník výstavy poznamenal, že „tak komplikovaný systém s tolika klouby, které je třeba mazat, je jen málo v praxi použitelný, zároveň však uznával, že uspořádání je geniální a v tomto ohledu důvěřoval jeho vynálezci.“

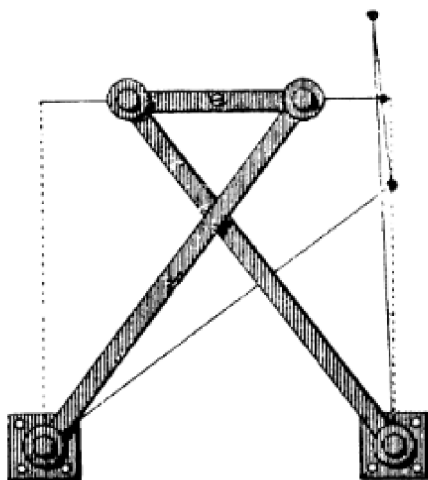


Obrázek 9: Návrh Chebysheva vynálezu[7]

Říká se, že profesor Čebyšev se snažil prokázat, že nelze vytvořit jakékoliv řešení, které by vytvářelo přesnou přímku, ale v encyklopedii Grande z konce 19. století je strohá zpráva o rozhovoru anglického vynálezce Jamese Silvestra s Čebyševem, že „dokázal neexistenci práce na pěti ramenech, která by byla schopna produkovat dokonalý paralelní pohyb. . . “. Bez ohledu na to, co se traduje o výroku Čebyševa, je dobře známo, že kapitán Peaucellier byl ten, kdo nakonec syntetizoval přesný přímočarý mechanismus, který nese jeho jméno.[7]

A.B.Kempe o Čebyševově objevu napsal toto:

"Druhý přístroj byl vynalezen profesorem Tchebichem z Petrohradu. Je to znázorněno na obrázku.



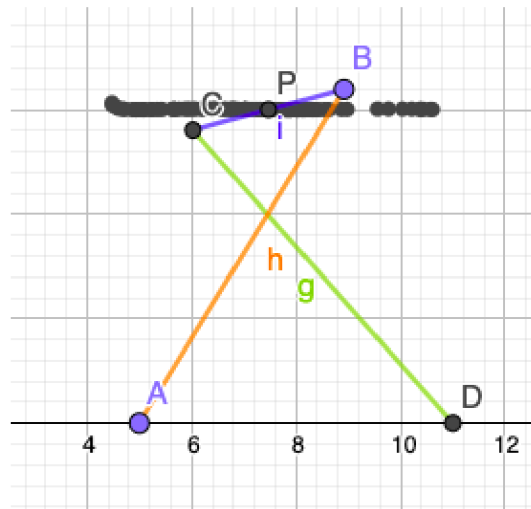
**Fig. 4.**

Obrázek 10: Chebyshevův vynález (zdroj: Kempe, 1877, str. 10)

Radiální tyče mají stejnou délku, každé je v mém malém modelu pět palců dlouhé. Vzdálenost mezi pevnými čepy musí pak být čtyři palce a vzdálenost mezi čepy nebo posuvem tyče jsou dva palce. Kreslicí bod je na polovině cesty mezi nimi. Pokud teď nakreslíme přímku prostřednictvím kreslicího bodu v jeho střední poloze, jak je znázorněno na obrázku, paralelně k pevným čepům, zjistíme, že stopa se bude shodovat s body linie, kterou svírají pevné čepy svislé tyče. Stejně jako v případě Robertsova paralelního pohybu se popsaná křivka limitně blíží k přímce, avšak s velmi malou odchylkou. "[1]



### 3.2 Matematické vyjádření křivky, kterou opisuje Čebyševův mechanismus



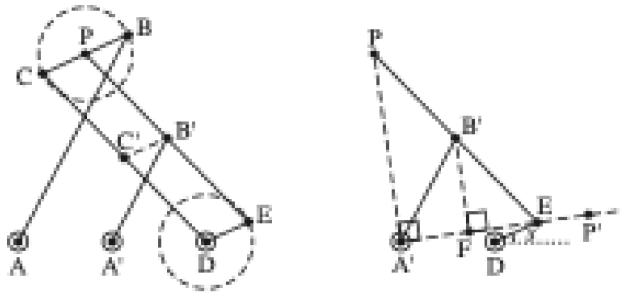
Obrázek 11: Čebyševův vynález v programu Geogebra (zdroj: vlastní)

Na obrázku si můžeme všimnout vyobrazení konstrukce v programu Geogebra. Prozatím si můžeme všimnout, že křivka se zdá být složena ze dvou částí, z nichž jedna se zdá být rovná a druhá zakřivená. Cesta bodu P ve skutečnosti nesleduje přímku. Nyní, abychom uvedli tento odklon od skutečné přímky v kontextu, vezmeme-li vzdálenost AD 100 mm, pak maximální odchylka od přímky je 0,25 mm.

Nejprve nakreslíme Čebyševův mechanismus[3] ABCD. Označíme P jako střed úsečky BC. Dále nakreslíme podobnou vazbu A'B'C'D' v poloviční velikosti, s A' na straně AD. Úsečka CP je tedy rovnoběžná s úsečkou B'C' a tyto vazby jsou stejné dlouhé. Nyní narýsujeme přímku přes PB' a prodloužíme ji tak, aby se délka rovnala CD. Vznikne nám parallelogram PCDE. Tak, jak se B a C pohybují po kruhu se středem v bodě P, se bod E bude pohybovat po kruhu se středem v bodě D.

A naopak, pokud se E pohybuje po kružnici o poloměru 1 cm se středem v bodě D, pak spojení A'B', PE, ED přinutí bod P pohybovat se podél středu přímky BC, kde B a C jsou součástí Čebyševova mechanismu. Pokud tedy sestavíme uspořádání sestávající pouze z DE, A'B' a EP, víme, že bod P bude procházet cestu původním Čebyševovým mechanismem. Toto je alternativní forma znázorněná na pravé straně obrázku.

V původní podobě mechanismu bod P se kříží přes dvě vazby AB a CD během



Obrázek 12: Úprava Chebyshevovy vazby[3]

jednoho úplného pohybu. Ve druhé formě je bod P volný a pohyb spoje může být řízen kruhovým pohybem bodu E. Alternativně lze nejrovnější část křivky získat zpětným pohybem E na kruhovém oblouku. Oba tyto aspekty jsou významnými částečnými úvahami, takže druhá forma je mnohem užitečnější. Je také snazší vypočítat cestu P z geometrických hledisek ve druhé podobě, protože známe, že  $A'B' = B'P = B'E$ . Začínáme s podrobným zkoumáním Čebyševova mechanismu. )

Připomínám, že  $A'B' = B'P = B'E$ . Dále  $PA'E$  je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem v bodě A'. Pokud spustíme kolmici z bodu B' na úsečku A'E a označíme tento bod jako F, pak můžeme vidět podobnost trojúhelníku podle věty sss:[4]

$$\frac{A'P}{A'E} = \frac{B'F}{FE} = 2 \frac{B'F}{A'E}.$$

Tuto rovnici dále upravíme a výsledek je:

$$A'P = 2B'F = 2\sqrt{(A'B')^2 - \frac{1}{4}(A'E)^2} = \sqrt{4(A'B')^2 - (A'E)^2}.$$

V případě potřeby prodloužíme přímkou A'E a označíme jako P' na A'E tak, aby  $A'P = A'P'$ . Počátek považujeme za A' a E, abychom měli souřadnice (x, y), potom P'

$$P' = \left( \frac{A'P}{A'E}x, \frac{A'P}{A'E}y \right).$$

Po transformaci bodu P bude mít souřadnice

$$P = \left( -\frac{A'P}{A'E}y, \frac{A'P}{A'E}x \right).$$

Bod E bude mít souřadnice

$$E = (x, y) = (A'D + DE\cos(s), DE\sin(s)),$$

pokud dáme všechny výše uvedené výpočty dohromady, získáme explicitní vzorec pro cestu bodu P, avšak pouze pokud jde o délku ramen a úhlu  $s$ .

Jak je vidět, nevede to k uspokojivému a jednoduchému vzorci. Je velká škoda, že tyto mechanismy, které jsou tak jednoduché, ať už v původní nebo obecnější formě, neposkytují úhledné matematické popisy v elementárních pojmech. Překvapivě existuje mnoho dalších uspořádání mechanismů, které také tuto křivku přesně vytvoří.

[3]

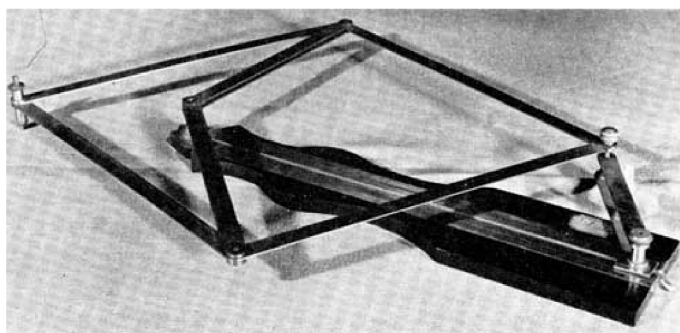
## 4 Peaucellierův mechanismus

### 4.1 Okolnosti vzniku

První plošný mechanismus vynalezl Charles-Nicolas Peaucellier v roce 1864, kdy byl služebním důstojníkem ve francouzské armádě. Vzhled Peaucellierova přesného přímočarého mechanismu z roku 1864 zůstal téměř bez povšimnutí. O deset let později, kdy zprávy o jeho vynálezu překročily kanál La Manche do Anglie, jeho vynález vzbudil velký zájem a jeho variace se staly po dlouhou dobu matematickým oříškem.

Charles-Nicolas Peaucellier, absolvent École Polytechnique a kapitán francouzského sboru inženýrů, napsal ve svých 32 letech krátký dopis redaktorovi Nouvelles Annales de mathématiques (ser. 2, svazek 3, str. 414-415) do Paříže. Upozornil na to, čemu říkal „složená kružidla“, tedy třídu mechanismů, které zahrnovaly Wattův paralelní pohyb, pantograf a polární planimetr (planimetr je přístroj k měření obsahů rovinných ploch libovolného tvaru). Navrhl mechanismus, který by popsal přímku, kružnici (jakéhokoliv poloměru) a kuželosečky. Ve svém dopise naznačil, že dospěl k řešení. Tento dopis zůstal bez ohlasu a během následujících 10 let tento problém vedl pouze k vyplnění několika akademických stránek Peaucellierem a Amédée Mannheimem (1831-1906, absolventem École Polytechnique, profesorem matematiky a autorem pravidla Mannheimova pravítka). Nakonec v roce 1873 dal kapitán Peaucellier své řešení čtenářům Nouvelles Annales. Jeho úvaha byla taková: pokud mechanismus vytváří křivku, kterou lze vyjádřit algebraicky, může být jakákoli další algebraická křivka vytvořena vhodným mechanismem - bylo pouze nutné najít vhodnou konstrukci. Pak předvedl geometrický důkaz pro svá přímá „složená kružidla“, navrhovaný Mannheimem.

V lednu 1874 na jedné ze "slavných týdenních přednášek" vystoupil James Joseph Sylvester, profesor matematiky na University of Virginia v Americe a později na Královské akademii ve Woolwichi. Tématem jeho přednášky byly „Poslední objevy v mechanické konverzi pohybu“. Ve své přednášce, kterou posluchači sledovali s velkým zaujetím, se zmínil o přeměně otáčivého pohybu na pohyb posuvný. „Dokonalý paralelní Peaucellierův pohyb vypadá tak jednoduše,“ poznamenal, „a pohybuje se tak snadno, že lidé, kteří to vidí v praxi, téměř všeobecně vyjadřují údiv, že se čekalo



Obrázek 13: Peaucellierův vynález[7]

tak dlouho, až bude objeven.“

Profesor Sylvester se skutečně zajímal více o matematické možnosti Peaucellierova mechanismu. Sdružování Peaucellierových mechanismů objevil nové možnosti a nespatořoval žádné limity pro výpočetní schopnosti mechanismů, které dosud nebyly objeveny.

## 4.2 Matematické vyjádření pohybu Peaucellierova mechanismu

Sám Alfred Bray Kempe popsal ve své přednášce:

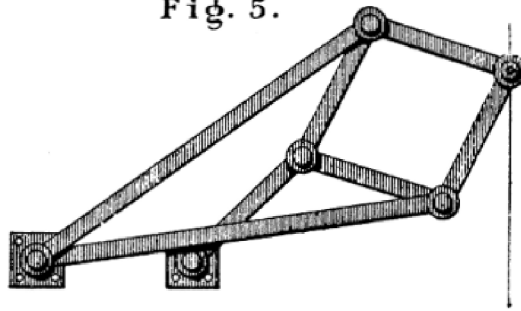
Přístroj Ch. Peaucelliera je zobrazen na obr. 5. Jak vidíte, má sedm částí čili ramen. V první řadě jsou zde dvě dlouhá ramena stejné délky. Obě jsou připevněna ke stejnému pevnému bodu; jejich druhé konce jsou připevněny čepem k protilehlým vrcholům kosočtverce, jenž je složen ze čtyř stejných kratších ramen. Část mechanismu, kterou jsem dosud popsal, na kterou je nahlíženo odděleně od pevné základny, je vazba nazývaná „Peaucellierův mechanismus“. Potom vezmeme další rameno a připevníme je do dalšího pevného bodu, jehož vzdálenost od prvního pevného bodu, ve kterém je článek otočen, je stejná jako délka tohoto ramene; druhý konec přídavného ramene je pak připojen čepem k jednomu z volných vrcholů kosočtverce; druhý vrchol kosočtverce má na svém čepu tužku. Tato tužka přesně popisuje přímku. "V roce 1864, osmdesát let po Wattově objevu, byl problém poprvé vyřešen Ch. Peaucellierem, který působil jako důstojník jednotky inženýrů ve francouzské armádě. Jeho objev nebyl zpočátku považován za hodnotný, takže upadl téměř do zapomnění, a byl znovu objeven až ruským studentem Lipmanem, který za svou údajnou originalitu získal od ruské vlády bohatou odměnu. Avšak zásluhy Ch. Peaucelliera byly nakonec uznány a získal za ně od francouzského institutu cenu Prix Montyon.

*Přístroj Ch. Peaucelliera je zobrazen na obr. 5. Jak vidíte, má sedm částí čili ramen. V první řadě jsou zde dvě dlouhá ramena stejné délky. Obě jsou připevněna ke stejnému pevnému bodu; jejich druhé konce jsou připevněny čepem k protilehlým vrcholům kosočtverce, jenž je složen ze čtyř stejných kratších ramen. Část mechanismu, kterou jsem dosud popsal, na kterou je nahlíženo odděleně od pevné základny, je vazba nazývaná „Peaucellierův mechanismus“. Potom vezmeme další rameno a připevníme je do dalšího pevného bodu, jehož vzdálenost od prvního pevného bodu, ve kterém je článek otočen, je stejná jako délka tohoto ramene; druhý konec přídavného ramene je pak připojen čepem k jednomu z volných vrcholů kosočtverce; druhý vrchol kosočtverce má na svém čepu tužku. Tato tužka přesně popisuje přímku.*

*Nyní musím trochu mírně odbočit k jednoduché geometrii. Je naprosto nezbytné, abych tak učinil, abyste pochopili princip našeho aparátu.*

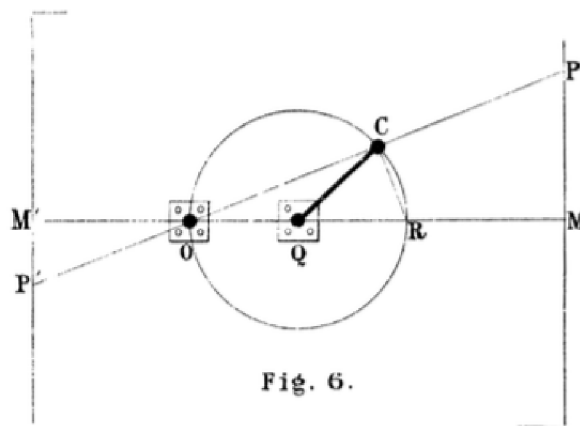
*Na obr. 6, je přídavné rameno  $QC$  připevněno čepem k pevnému bodu  $Q$ , druhý*

Fig. 5.



Obrázek 14: Zobrazení Peaucellierova vynálezu v knize "How to draw a straight line" od A. B. Kempe

čep ramene  $QC$  v bodě  $C$  popisuje kružnici  $OCR$ . Přímky  $PM$  a  $P'M'$  jsou kolmé k  $MRQOM'$ . Získáme úhel  $OCR$ , kde v bodě  $C$  vznikne pravý úhel. Z toho vyplývá, že trojúhelníky  $OCR$  a  $OMP$  jsou si podobné.



Obrázek 15: Geometrické zobrazení[1]

Tedy,

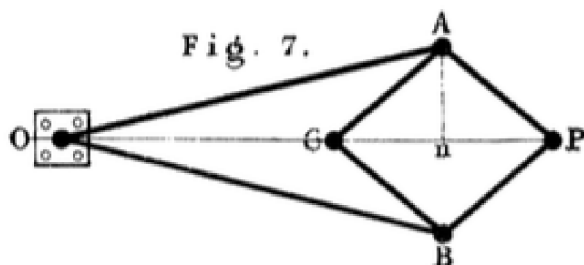
$$OC : OR :: OM : OP.$$

Tedy,

$$OCOP = OMOR$$

Bod  $C$  může ležet kdekoli na kružnici. To znamená, že  $OM$  a  $OR$  jsou konstantní, pokud se bod  $C$  pohybuje v kružnici jako bod  $P$ . Z toho plyne, že  $O$ ,  $C$ ,  $P$  leží na stejné přímce a  $OC \cdot OP'$  je vždy konstantní; potom  $P$  zobrazí přímku  $PM$  kolmou k přímce  $OQ$ . Je také zřejmé, že pokud vezmeme bod  $P'$  na druhé straně  $O$  a pokud je  $OC \cdot OP'$  konstanta,  $P'$  bude zobrazovat přímku  $P'M'$ .

Nyní, podíváme-li se na obr. 7, což je základní kresba Peaucellierova mechanismu, vidíme ze symetrie konstrukce, že všechny body  $O, C, P$  leží na stejné přímce, a pokud přímka procházející bodem  $A$  je kolmá k  $CP$  - musí to být stále přímka imaginární, protože jsme dosud neprokázali, že náš aparát dokáže nakreslit přímku - tedy  $Cn$  je rovno  $nP$ .



Obrázek 16: Základní kresba Peaucellierova článku

Nyní,

$$OA^2 = On^2 + An^2$$

$$AP^2 = Pn^2 + An^2$$

tedy,

$$OA^2 - AP^2 = On^2 - Pn^2$$

$$= (On - Pn) \cdot (On + Pn)$$

$$= OC \cdot OP.$$

Protože úsečky  $OA$  a  $AP$  jsou konstantní, jejich součin bude také vždy konstantní. Pokud je čep fixován k bodu  $O$  na obr. 6 a čep  $C$  vytvořen tak, aby opisoval kružnici na obrázku otočením na konec přídatného ramene, čep  $P$  splní všechny podmínky nezbytné k tomu, aby se pohyboval po přímce, a pokud tužka bude fixována na bod  $P$ , nakreslí přímku. Vzdálenost přímky od pevných čepů bude samozřejmě záviset na délce rozdílu  $OA^2 - OP^2$ , který se může libovolně lišit.

Doufám, že jasně chápete dva prvky, které tvoří tento aparát, přídatné rameno a článek. Doufám také, že chápete roli, kterou každý element hraje, jelikož vám nyní chci popsat některé modifikace článku. Další spojení zůstane stejné jako dříve a změna bude prováděna pouze v článku.



Pokud vezmu dva aparáty na obr. 8, které jsou známé jako deltoid a rovnoramenný trojúhelník, a umístím jedno na druhé tak, aby se dlouhé části jednoho shodovaly s částmi druhého a pak spojím shodné dlouhé části dohromady, dostaneme původní článek obr. 5 a 7. Pokud tedy budeme udržovat úhly mezi dlouhými rameny, nebo úhly mezi krátkými články, stejnými v deltoidu a "šipka kopí", vidíme, že výška deltoidu vynásobená výškou "šipky kopí" je konstantní.

Pojďme nyní namísto sloučení dlouhých ramen těchto dvou aparatur sloučit ty krátké. Potom dostaneme spojení z obr. 9; pokud je čep, kde se setkávají krátké spoje pevný, a jeden z dalších volných čepů vytváří pohyb po kružnici, viz. obr. 6, pomocí jeného ramena druhý opiše nikoli přímku  $PM$ , ale přímku  $P'M'$ . V této podobě, která je velmi kompaktní, byla tato verze aplikována na vzduchové motory, které se používají k ventilaci britské Sněmovny parlamentu. Snadnost práce a absence tření i hluku jsou velmi pozoruhodné. Motory byly zkonstruovány a inženýr Prim přizpůsobil Peaucellierův aparát potřebám Sněmovny parlamentu. "[1]

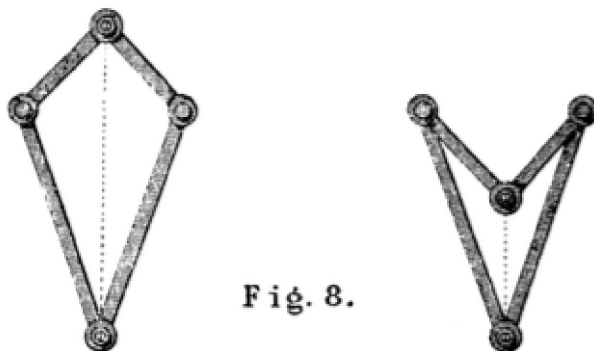


Fig. 8.

Obrázek 17: Další modifikace[1]

Jiné řešení než od Kempeho je takové:

Bez spojení  $CQ$  máme uspořádání, v němž jsou vztahy takové:

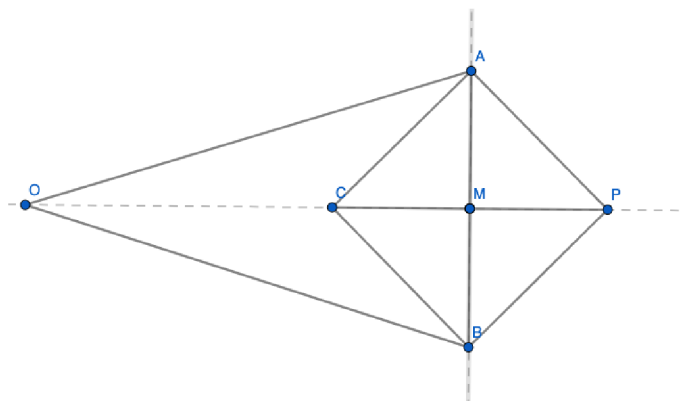
$$OA = OB = l_1,$$

$$AP = BP = AC = BC = l_2.$$

Pro usnadnění,  $AC \approx \frac{1}{3}OA$ , které určuje maximální rozevření dlouhých ramen:

$$\sin(x) = \frac{l_2}{l_1}.$$

Předtím, než vezmeme v úvahu celý mechanismus, musíme zvážit, zda může být rozdělen na deltoid  $OAPB$  a šipka  $OACB$ , znázorněné na obrázku níže.



Obrázek 18: Zobrazení Peaucellierovo vynálezu v programu GeoGebra

Pomocí Pythagorovy věty si odvodíme dvě rovnice:

$$(OM)^2 + (AM)^2 = l_1^2, \quad (PM)^2 + (AM)^2 = l_2^2.$$

Vyjádříme  $(AM)^2$ , obě rovnice odečteme

$$(OM)^2 - (PM)^2 = l_1^2 - l_2^2$$

a pravou stranu vyjádříme pomocí konstanty  $x^2$ , přičemž použijeme vztah  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

$$(OM - PM)(OM + PM) = x^2.$$

Protože  $(OM - PM)(OM + PM) = (OC)(OP)$ , pak

$$OC \cdot OP = x^2$$

Dokázali jsme, že součin vzdáleností  $OC$  a  $OP$  je konstantní. Pokud zvolíme jako proměnnou  $OC$ , pak  $OP = \frac{x^2}{OC}$ . Z toho vyplývá, že pokud máme křivku, po které se  $OC$  pohybuje, křivka, která následuje, se někdy nazývá inverzí. Následně si dokážeme, že inverze kružnice může být úsečka, čímž se náš problém vyřeší.

Nyní k dokončení propojení znázorněného na obrázku č. 19 přidáme konečnou přímku  $QC$  s tím, že  $OQ = OC$ . Podmínkou je, aby  $O$  a  $Q$  byly pevné body, takže bod  $C$  se pohybuje po kružnici se středem na  $Q$ . Vznikne nám trojúhelník  $OCR$ , který je pravouhlý. Vstýčíme kolmici z bodu  $P$  na přímku  $OQ$  a označíme bod průniku  $B$ , potom jsou trojúhelníky  $OCR$  a  $ONP$  podobné, takže

$$\frac{ON}{OP} = \frac{OC}{OR}.$$



### 4.3 Matematický aspekt a dnešní využití Peaucellierova mechanismu

Než budeme moci studovat matematické vztahy Peaucellierova mechanismu, musíme prozkoumat geometrii kružnic:

*Kružnice v rovině*

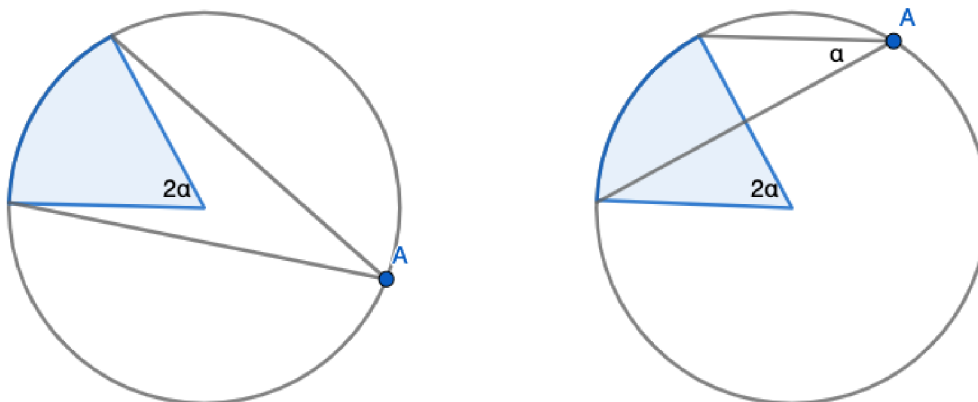
Při studiu kružnic budeme potřebovat dvě kritéria pro podobné trojúhelníky:

**Věta 1** (Kritérium SSS). *Je-li poloměr odpovídajících stran stejný, jsou trojúhelníky podobné.*

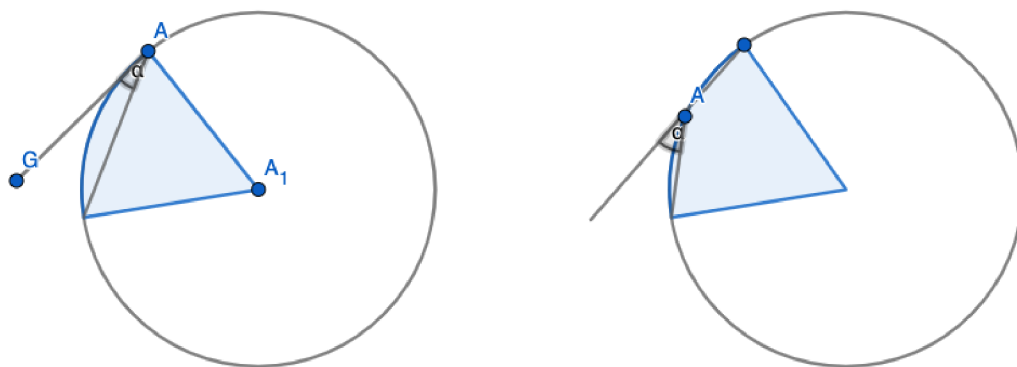
**Věta 2** (Kritérium SUS). *Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v jednom ostrém úhlu nebo v poměru dvou odpovídajících se stran.*

*Úloha : Úhly a body rovinných kružnic*

1. Pokud středový úhel  $2\alpha$ , pak bude stejný úhel az jakéhokoli místa na obvodu. Použijeme obrázky 20 a 21. Nakreslíme výseč od středu kružnice bodu A a použijeme vlastnost rovnoramenného trojúhelníku. Všimněme si čtyř různých umístění bodu A. [10]



Obrázek 20: Úhly umístěné uvnitř kružnice



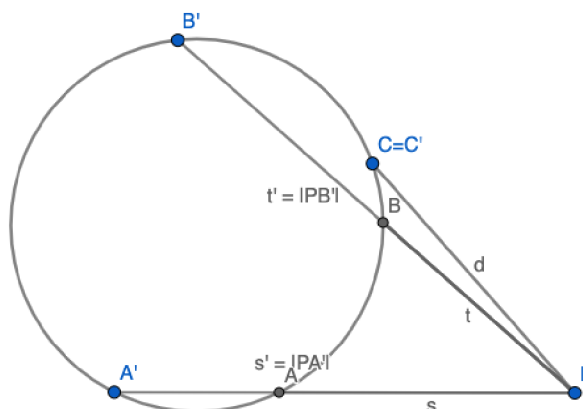
Obrázek 21: Úhly umístěné na oblouku

2. Pokud dvě přímky procházející bodem  $P$  protínají kružnici v bodech  $A, A'$  ( možná shodné ) a  $B, B'$  ( možná shodné ), pak platí

$$|PA| \cdot |PA'| = |PB| \cdot |PB'|$$

Tento vztah se nazývá mocnost bodu  $P$  ke kružnici.

Na obrázku je znázorněný důkaz mocnosti bodu  $P$  ke kružnici.



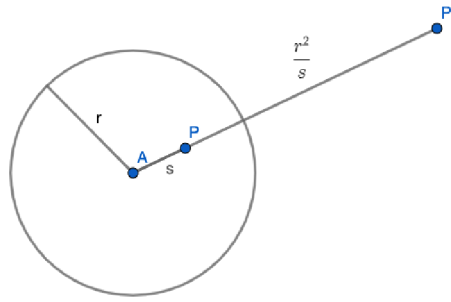
Obrázek 22: Mocnost bodu mimo kružnici[10]

### Kruhová inverze

**Definice 1.** Kruhová inverze je geometrické zobrazení určené kružnicí  $k$  se středem  $S$  a poloměrem  $r$ , které bodu  $A$  přiřadí bod  $A'$  podle následujícího pravidla:

- 1) Je-li  $A = I$ , pak  $A' = \infty$ .
- 2) Je-li  $A = \infty$ , pak  $A' = I$ .
- 3) Jinak je  $A'$  bod polopřímky  $IA$ , pro něj platí -

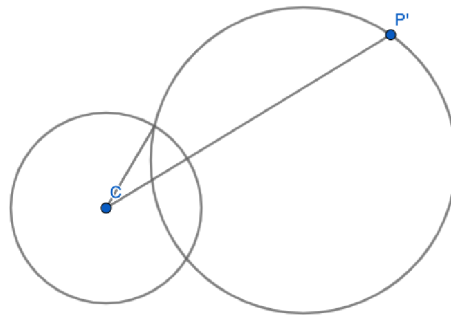
$$|IA'| \cdot |IA| = r^2.$$



Obrázek 23: Inverze vzhledem ke kružnici[10]

Všimněme si, že inverze vezme vnitřek kružnice ven a obráceně a že inverze vezme jakoukoli čáru přes střed k sobě. Z tohoto důvodu lze inverzi považovat za odraz v kružnici.

Na dalším obrázku (obrázek 24) je zobrazena inverze, která zobrazuje ortogonální kružnici k druhé, která je převrácená.



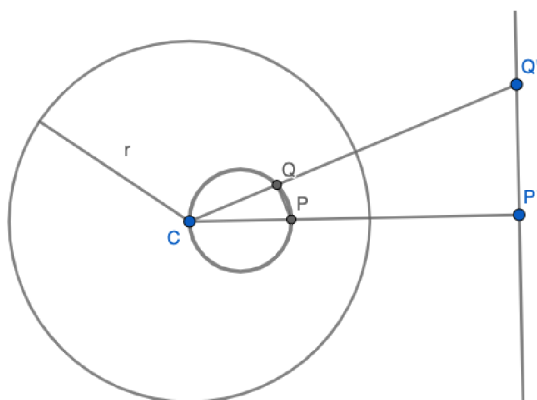
Obrázek 24: Inverze kružnic[10]

Dvě kružnice jsou ortogonální, pokud je v každém průsečíku úhel mezi tečnými čarami  $a = 90^\circ$ . (Všimněme si, že v těchto bodech je poloměr je části tečny k druhé kružnici.)

Dále si ukážeme, že inverze vede kruh středem inverze k linii, která není středem, a naopak. Co se stane ve zvláštních případech, když kružnice nebo přímka protne inverzní kružnici? Všimněme si, že přímka je rovnoběžná s tečnou ke kružnici v bodě C.

Díky obrázku si dokážeme, že  $DCPQ$  a  $DCQ \notin P \notin$  jsou podobné trojúhelníky.

**Věta 3** (Obrazem přímky  $S \subseteq p$  je kružnice). Obrazem přímky  $p$ , neprocházející středem  $S$  řídicí kružnice  $z(S, r)$  kruhové inverze, je kružnice  $p'$ , procházející bodem



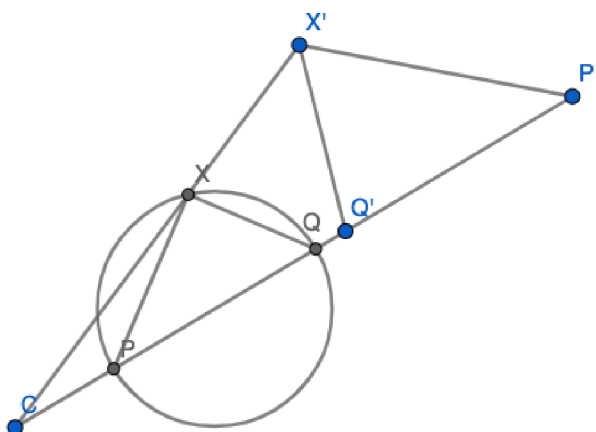
Obrázek 25: Důkaz podobnosti trojúhelníků[10]

$S$  (ale bez bodu  $S$ ).[14]

Podívejme se na obrázek 27. Pokud  $P, Q, X$  invertují na  $P', Q', X'$ ,

$$\angle P'X'Q' = \angle P'XQ = \text{pravý úhel},$$

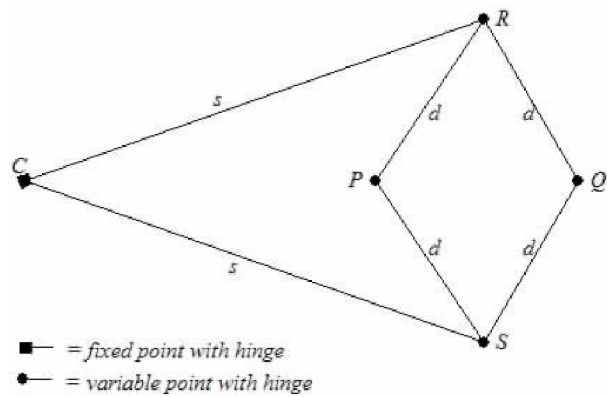
hledáním podobných trojúhelníků. Můžeme argumentovat: pokud  $X$  se mění kolem kružnice s průměrem  $PQ$ , pak  $X'$  se mění kolem kružnice s průměrem  $Q'P'$ .



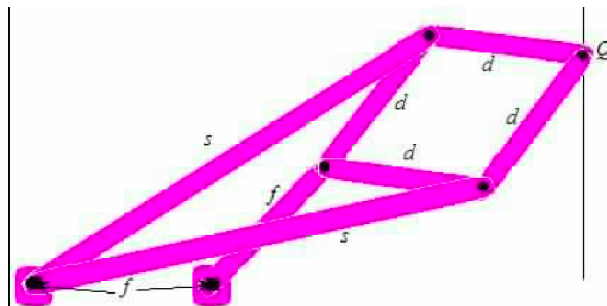
Obrázek 26: Inverze [10]

### Aplikace inverzí na Peaucellierův mechanismu

Ukážeme si, že pro spojení na obrázku jsou body  $P$  a  $Q$  vzájemnými inverzemi prostřednictvím inverzní kružnice se středem v bodě  $C$  a poloměrem. Nakreslíme kružnici se středem  $R$  a poloměrem  $d$  a všimneme si, že  $C, P, Q$  jsou kolinéární. Dále si můžeme také ukázat, že bod  $Q$  ve vazbě vždy sleduje přímku. Pokud upravíme mechanismus změnou vzdálenosti mezi kotevními body, pak bod  $C$  je střed a poloměr  $r = \sqrt{s^2 - d^2}$ . Bod  $Q$  v mechanismu vždy sleduje oblouk kružnice. Proč? Ukažme si, že poloměr kružnice je vyjádřen  $\frac{r^2 f}{g^2 - f^2}$ .



Obrázek 27: Peaucellierův mechanismus v geometrii[10]



Obrázek 28: Peaucellier-Lipmanův mechanismus pro kreslení přímky [?]

V dnešní době se využívá Peaucellierův mechanismus spíše v robotice. Většina robotických nohou je založena na otevřených nebo sériových kinematických řetězcích. Vzhledem k tomu, že robotická noha PL (Peaucellier linkage) je založena na paralelním propojení z osmi částí, rozděluje síly a točivé momenty způsobem, který je lepší než u otevřených nebo sériových kinematických řetězců. Vzhledem k tomu, že robotická noha je založena na mechanismu PL, který sleduje přesné dráhy jako lineární nebo kruhové křivky, vyžaduje k umístění chodidla použití pouze dvou ovladačů. To jsou hlavní výhody při použití zdánlivě komplexní robotické nohy PL ve srovnání s jinými mechanickými architekturami nohou.[11]



## 5 Implementace aktivizačních metod ve výuce geometrie na 2. stupni ZŠ s využitím popsaných mechanismů

*Dnešní doba nabízí učitelům široké možnosti, jak využít moderní technologie i ve výuce matematiky, zejména geometrie. Žáci nejsou jen pouhými posluchači, kteří pasivně vnímají učitelův výklad, ale naopak aktivně se zapojují do výuky, spolupracují a ve vyšší fázi se učitel stává pouze průvodcem, který koriguje jejich činnost. V této části je nejdůležitější příjemná motivace a klidná atmosféra ve třídě. Po zadání vstupních dat řešeného problému se žák musí sám dopracovat k požadovanému poznatku metodou experimentování a následným objevováním. Při dlouhodobém působení aktivizačních metod se zpravidla mění postoj žáka ve výuce a ke škole vůbec. Jednou z možností, jak vzbudit zájem žáků o dané téma je skupinová práce (umožňující širší zapojení slabších žáků) nebo hry, které pomáhají procvičit a dlouhodobě si zapamatovat probíranou látku.*

*Nejen fenoménem, ale i velkým pomocníkem poslední doby je zařazení programů dynamické geometrie do výuky matematiky. V době Covid 19 byl velkým pomocníkem při výuce na "dálku" a dokázal ukázat funkce i grafy, které názorně ukazují různé důkazy a hypotézy. Sestrojené geometrické objekty lze vidět pomocí jejich vyjádření prostředky analytické geometrie a naopak. Programy dynamické geometrie představují takový software, v němž sestrojené objekty přestávají být statické, lze s nimi po jejich vytvoření hýbat, měnit jejich tvar, velikost i polohu vzhledem k ostatním objektům. Žáci současně vidí zobrazené modely z různých stran a získávají lepší představu o vlastnostech dané geometrické konstrukce, případně se lze vrátit o krok zpět a opravit chybný postup.*

*Badatelsky orientovaná výuka je nový přístup, se kterým se ještě stále moc neseznamujeme ve škole. Snaha je sice znát, ale výsledky jsou malé. Základem je bádání, kdy učitel nepředává učivo v hotové podobě, ale žák prostřednictvím pozorování, kladení otázek, analýzou problému, navrhováním postupů a experimentováním formuluje své myšlenky a tím se učí přesné formulaci a ověřovat hypotézy. Žák se sám učí vyhledávat, objevovat a samostatně analyzovat problém.*

*Jedním z příkladů užití dynamické geometrie, který je volně dostupný, je program*

*GeoGebra. GeoGebra nabízí možnosti pracovat s několika prostředími (např. prostředí CAS nebo Algebraické okno). Při řešení určitých problémů inspiruje k uplatnění alternativního postupu. V procesu formování matematických představ žáků lze využít prostředí CAS jako oporu například při odvozování rovnic.*

*Nejlepším řešením, jak implementovat mechanismy, rozebrané v bakalářské práci do výuky matematiky na základní škole, je implementovat tyto mechanismy pro výuku klasické matematiky. Pomocí těchto mechanismů se může krásně vysvětlit pojem kružnice, křivka, podobnost trojúhelníků a také podpořit, aby i děti si sami mohli něco k tomuto tématu vyhledat. Také pro znázornění bych využila stavebnice Merkur, která nám poskytuje mnoho možností k sestavení a modifikací.*

*Stavebnice Merkur se začala vyrábět již v roce 1920, avšak na počátku měla jiný název a místo šroubků s matickami měla prvních pět let jen spojovací kovové háčky. Po pěti letech přišel i nový název, který dodnes známe. Vyráběl různé druhy stavebnic, například elektrické Merkur Elektrus a vláčky, jejichž výroba skončila v roce 1968. Na přelomu tisíciletí, kvůli zájmu zákazníků, byla výroba obnovena. Není to jen pouhá hračka, ale může být použita ve škole jako technická pomůcka nebo jako příklad různých zařízení (viz funkční parní stroj). Tuto stavebnici použil vynálezce Otto Wichterle k sestavení prvního přístroje na výrobu kontaktních čoček. V dnešní době můžeme ze stavebnice sestavit mnoho strojů, protože obsahuje už převodovky, elektropohony a další technické komponenty.*

*Tento plán a výuka je určen žákům 8. ročníků základních škol. Učivo fyziky, jehož znalost je potřebná k porozumění projektu, je dle RVP MŠMT právě probírána v 8. ročníku ZŠ, a zároveň i učivo dějepisu zahrnuje období 18. a 19. století.*

## 5.1 Harmonogram projektového dne

2 hodiny bych věnovala opakování látky z geometrie a fyziky, které jsou nutné k pochopení celého projektu. Prvním tématem je bod.

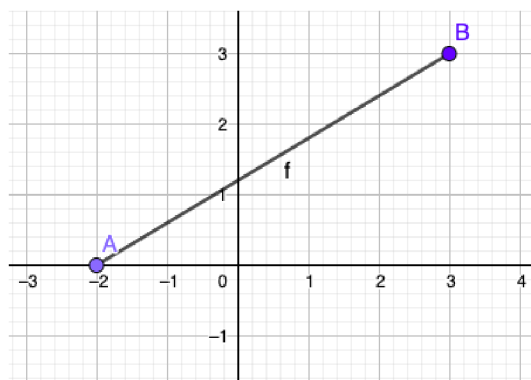
Bod je geometricky nejjednodušší útvar, jež můžeme popsat. Dále již nelze dělit na menší útvary a jedná se o základní část, z které se skládají další geometrické útvary (můžeme ji popsat jako množinu bodů).

Bod definujeme pomocí souřadnic, které popisují polohu v prostoru. Souřadnice  $X$  a  $Y$  popisují, v jaké vertikální a horizontální poloze se bod nachází. Pokud bychom jej měli popisovat v trojrozměrném prostoru, přibývá nám souřadnice  $Z$ , která nám definuje, jak vysoko se bod v prostoru nachází.

Body nemají žádný rozměr, proto pomocí běžného pravítka nedokážeme změřit jeho délku nebo poloměr. Dva body se tedy od sebe mohou lišit jen souřadnicemi – pokud leží oba na sobě, říkáme o nich, že jsou shodné. Pokud leží různě v prostoru, jsou to body navzájem rozdílné.

Dalším tématem je přímka. Za přímku můžeme označit nekonečně dlouhou čáru, procházející dvěma body v rovině či prostoru. Může se zdát, že přímka má začátek a konec, avšak tomu tak není. V Eukleidovské geometrii pro každé dva body existuje právě jedna přímka, která jimi prochází. Přímku můžeme zadat právě dvěma body, kterými prochází, avšak můžeme ji popsat i jako průsečík dvou rovin (průsečnice), nebo jako graf lineární funkce a v analytické geometrii můžeme určit přímku buď pomocí obecné rovnice nebo parametrickým vyjádřením. Slovem úsečka matematika rozumí čáru, která existuje jen mezi dvěma body. V analytické geometrii můžeme úsečku (stejně jako přímku) popsat pomocí parametrické rovnice přímky, již omezíme parametr, nebo jako graf lineární funkce, kde definiční obor bude omezený. Polopřímka je část přímky, která vznikne rozdělením přímky jedním jejím bodem. Bod rozdělující přímku se nazývá počáteční bod polopřímky. Pro určení polopřímky sena ní volí další bod, různý od počátečního bodu. Tento bod se nazývá pomocný. Zapisuje se pomocí počátečního a pomocného bodu, např.  $\overrightarrow{AB}$  nebo vektorem.

Protože budeme mluvit o otáčivém pohybu, musíme ještě zmínit kružnici a její vlastnosti. Kružnice je množina všech bodů v rovině, které jsou ve stejné vzdálenosti od daného bodu. Daný bod se nazývá střed kružnice a daná vzdálenost se nazývá jeho poloměr. Vlastnosti kružnice jsem vysvětlila v minulé kapitole (Matematický aspekt



Obrázek 29: Úsečka určená body A a B

a dnešní využití Peaucellierova mechanismu).

Co se týče fyziky, k práci s mechanismy je třeba znát i fyzikální podstatu. Důležité je znát pojem termika. Termika je část fyziky, která se zabývá studiem vlastností látek a jejich změn souvisejících s teplotou. Termika se také někdy označuje jako nauka o teple. Makroskopicky vnímaný tepelný stav látky, který je vyjadřován teplotou, má úzkou souvislost s pohybem základních stavebních částic dané látky (molekul, atomů apod.). Tento pohyb se označuje jako molekulový. Vzhledem k tomu, že molekulový pohyb se výrazněji projevuje při vyšších teplotách, bývá často označován jako tepelný pohyb. Dále je důležité zmínit, že díky znalosti termiky si jednodušeji můžeme vysvětlit princip parního stroje.

Parní stroj pracuje na principu pístových tepelných strojů, které přemění energii ze stlačené páry v pístu na energii mechanickou ve formě posuvného nebo rotačního pohybu. Pára je z kotle vedena do komory, kde je časovacím šoupátkem rozdělena do válce. Ve válci svou expanzí způsobí pohyb pístu vpřed do přední úvrati a poté je pára po expanzi vypouštěna ven. Posuvný pohyb pístu je poté přenesen na kliku, která jej následně převede na pohyb otáčivý. [13]

V následující hodinách bych se věnovala praktické části. Třídu bych rozdělila na tři skupiny a každé z nich přidělila jiný úkol. Každá skupina dostane jednu stavebnici Merkur a pracovní list s pokyny a průvodním slovem, který objasní historický kontext vzniku daného mechanismu. Před započítím vlastní práce se žáci ve skupině seznámí s mechanismy pomocí programu GeoGebra. Poté bude následovat ve zkrácené podobě informace o historii stavebnice. Následně budou žáci instruováni, jak bezpečně pracovat se stavebnicí a s ukázkou spojování jednotlivých dílů a práce s návodem.

*Každá ze skupin bude samostatně provádět úkol a bude se zamýšlet nad tím, jak může mechanismus převést otáčivý pohyb na posuvný a čím mohl tento mechanismus přispět k vývoji techniky, popřípadě nad jeho uplatněním. Touto badatelsky orientovanou metodou můžeme u dětí rozvinout schopnost tvůrčího technického myšlení, schopnost formulovat vlastní myšlenky a v neposlední řadě i schopnost týmové spolupráce. Výsledkem této činnosti není jen vlastní využití každého z přidělených mechanismů, ale i schopnost ovládat práci s jednoduchým nástroji (klíč, šroubovák, ...). Během činnosti je rozvíjená jemná motorika ruky, žákova představivost a technické myšlení podpořené znalostmi z různých předmětů (matematika, fyzika, dějepis, zeměpis, chemie, ...).*

*Po dokončení práce přichází na řadu představení jednotlivých modelů mechanismů a následná diskuse o jejich využití. V této fázi nejde o správnost nápadu, ale o schopnost vyjádřit svůj názor, opřený o znalosti z matematiky a fyziky, a zároveň obhájit svoji hypotézu.*

## 6 Závěr

*V této bakalářské práci jsem uvedla tři mechanismy, které popsal Alfred Bray Kempe ve své knize, nejen uvedla jejich historii, ale také nastínila výpočet křivky, kterou každý z mechanismů vytvoří. Kromě toho jsem uvedla využití mechanismů v dnešní době. Bylo velmi zajímavé ponořit se do této problematiky, ale také velmi obtížné, protože samotná kniha pochází z roku 1877 a j porozumění angličtině 2. poloviny 19. století, zejména užité terminologie, bylo obtížnější. Přineslo mi to náhled do vývoje techniky 18. a 19. století. Je zajímavé, že tato kniha nebyla dosud přeložena. Velmi zajímavé bylo zjištění, jakým směrem se ubíralo myšlení tehdejších matematiků a techniků.*

*Toto téma je velmi obsáhlé a stojí na hraně mezi matematikou a fyzikou. Je velmi snadné sklouznout do řešení výlučně fyzikálních aspektů. Téma je přínosné nejen z hlediska teoretického, ale také i z hlediska využití nových metod ve výuce matematiky spojení mezipředmětových vztahů matematiky, historie a fyziky. Stojí za rozšíření o praktickou část, kde bych připravila podklady pro projektový den a jeho výsledky rozpracovala v diplomové práci. Zároveň bych analyzovala, jaký přínos má tato forma výuky pro matematické i technické myšlení dětí.*

## Seznam použité literatury a zdrojů

- [1] KEMPE, Alfred. *How to Draw a Straight Line: A Lecture on Linkages*. London: Macmillan and co., 1977. ISBN 0873531205 9780873531207
- [2] FIALA, J. *Jak přijít úsečce na kloub. Půvab polozapomenutých mechanismů*. Vesmír, 2008, roč. 87, č. 4, s. 258-263. ISSN: 0042-4544
- [3] BRYANT, John a Chris SANGWIN. *How Round Is Your Circle?: Where Engineering and Mathematics Meet.1934*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2008, 320 s. ISBN 978-0691149929.
- [4] VLČEK, Lukáš. *Život a dílo významných fyziků britského původu [online]*. Brno, 2009 [cit. 2020-05-20]. Dostupné z: <<https://theses.cz/id/8504mg/>>. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce prof. RNDr. Vladislav Navrátil, CSc..
- [5] ROBBIN, Joel W. *Analysis of the Watt Linkage [online]*. Madison, 2005. Dostupné: <<https://www.math.wisc.edu/~robbin/angelic/watt.pdf>>
- [6] *Oeuvres de P. L. Tchebychef, 2 vols., St. Petersburg, 1899-1907, vol. 1, p. 538; vol. 2, pp. 57, 85*
- [7] FERGUSON, Eugene S. *Kinematics of Mechanisms from the Time of Watt*. Washington D.C.: Smithsonian Institution, 1962. ISBN 8859-1.
- [8] DESCARTES, Rene. *Kniha druhá - O povaze přímek*. DESCARTES, Rene a Jiří FIALA. *Geometria*. Západočeská universita v Plzni: OIKOYMENH, 2010, s. 17-66. ISBN 978-80-7298-313-3.
- [9] MALLIK, A.K. *Sir Alfred Bray Kempe - An Amateur Kinematician*. Reason 16. 2011, 2011(16), str. 204-213.
- [10] HENDERSON, David W. *Mathematical Aspects of the Peaucellier-Lipkin Linkage*. [Http://pi.math.cornell.edu/](http://pi.math.cornell.edu/) [online]. NY: Cornell University Ithaca, 2004 [cit. 2020-07-04]. Dostupné z: <http://pi.math.cornell.edu/~henderson/courses/M451-F02/peaucellier.html>

- [11] ALTAMIRANO, Diego Alfredo, Ignacio JUÁREZ-CAMPOS, Lucia MÁRQUEZ-PÉREZ, Ociel FLORES-DÍAZ a Leonardo ROMERO-MUNOZ. *Dynamics of a novel robotic leg based on the Peaucellier–Lipkin mechanism on linear paths during the transfer phase. Advances in Mechanical Engineering. 2016, 8(7), str. 9.*
- [12] *Aktivizující činnosti ve výuce matematiky. Metodický portál [online]. Dostupné z: <https://clanky.rvp.cz/clanek/o/z/8463/AKTIVIZUJICI-CINNOSTI-VE-VYUCE-MATEMATIKY.html/>*
- [13] LUKEŠ, Petr a Patrik SMĚKAL. *PARNÍ STROJ. Středoškolská technika 2010[online]. 2010, 1-5 [cit. 20-05-20]. Dostupné z: <http://stretch.fs.cvut.cz/>*
- [14] TKADLEC, Josef. *Kruhová inverze. 2011, Blansko-Obůrka. Dostupné: <https://prase.cz/library/KruhovaInverzePT/KruhovaInverzePT.pdf>*
- [15] HORÁČEK, Filip. *Příběhy českých značek: Merkur začínal bez šroubků, přežil všechny režimy. Dnes [online]. 2015. Dostupné z: <https://www.idnes.cz/ekonomika/podniky/pribeh-hrackarske-firmy-merkur>.*
- [16] *Prispěvatelé Wikipedie, Wattův přímovod [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2020, Datum poslední revize 14. 05. 2020, 13:57 UTC, [citováno 9. 07. 2020] <<https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Watt>*
- [17] Alfred Bray Kempe. *Wikiwand.com [online]. Dostupné z: [https://www.wikiwand.com/cs/AlfredBrayKempe.SERVT,Frantiek.Euklidovyzklady\(element](https://www.wikiwand.com/cs/AlfredBrayKempe.SERVT,Frantiek.Euklidovyzklady(element)*
- [18] JOYCE, David E. *Euclid's Elements, Book I [online]. 2010 Dostupné z: <https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/elements/bookI/bookI.html>*
- [19] René Descartes. *In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation [cit. 2022-07-08]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/RenéDescartesPhineaseCrowther>[online].Dostupné z: <https://www.britishmuseum.org/collection/term/BIOG256138>*
- [20] Wikipedia contributors. (2022, January 13). Oliver Evans. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 10:53, July 8, 2022,



from [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Oliver\\_Evans&oldid=1065458473](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Oliver_Evans&oldid=1065458473)Wikipedie : Otevenencyklopedie :  
Wattvpmovod[online].c2022[citovno8.07.2022].DostupnzWWW :< <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Watt>

## Seznam obrázků

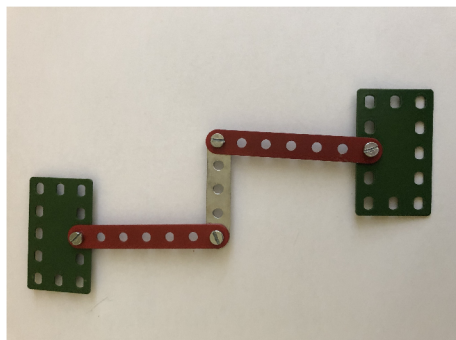
1	<i>Původní nákres křivky (z webu wikimedia.org)</i> . . . . .	14
2	<i>Wattova křivka (Kempe, 1877, str. 8)</i> . . . . .	15
3	<i>Úplná Wattova křivka (John Bryant, Chris Sangwin, 1934, str. 27)</i>	16
4	<i>Obecná forma Wattovy křivky, (zdroj: John Bryant, Chris Sangwin, 1934, str. 23)</i> . . . . .	17
5	<i>Křivka vykreslená bodem P (zdroj: wikipedia.org)</i> . . . . .	18
6	<i>Křivka v GeoGebře zdroj: vlastní</i> . . . . .	18
7	<i>Ukázka použití Wattovy křivky na nápravě (zdroj: wikipedia.org)</i> . . .	21
8	<i>Evansovo řešení pro parní stroj [7]</i> . . . . .	23
9	<i>Návrh Chebysheva vynálezu[7]</i> . . . . .	23
10	<i>Chebyshevův vynález (zdroj: Kempe, 1877, str. 10)</i> . . . . .	24
11	<i>Čebyševův vynález v programu Geogebra (zdroj: vlastní)</i> . . . . .	25
12	<i>Úprava Chebyshevovy vazby[3]</i> . . . . .	26
13	<i>Peaucellierův vynález[7]</i> . . . . .	29
14	<i>Zobrazení Peaucellierova vynálezu v knize "How to draw a straight line" od A. B. Kempe</i> . . . . .	31
15	<i>Geometrické zobrazení[1]</i> . . . . .	31
16	<i>Základní kresba Peaucellierova článku</i> . . . . .	32
17	<i>Další modifikace[1]</i> . . . . .	33
18	<i>Zobrazení Peaucellierova vynálezu v programu GeoGebra</i> . . . . .	34
19	<i>Peaucellierův mechanismus: geometrické zobrazení</i> . . . . .	35
20	<i>Úhly umístěné uvnitř kružnice</i> . . . . .	36
21	<i>Úhly umístěné na oblouku</i> . . . . .	37
22	<i>Mocnost bodu mimo kružnici[10]</i> . . . . .	37
23	<i>Inverze vzhledem ke kružnici[10]</i> . . . . .	38
24	<i>Inverze kružnic[10]</i> . . . . .	38
25	<i>Důkaz podobnosti trojúhelníků[10]</i> . . . . .	39
26	<i>Inverze [10]</i> . . . . .	39
27	<i>Peaucellierův mechanismus v geometrii[10]</i> . . . . .	40
28	<i>Peaucellier-Lipmanův mechanismus pro kreslení přímky [?]</i> . . . . .	40
29	<i>Úsečka určená body A a B</i> . . . . .	44

30	<i>Wattův mechanismus ze stavebnice Merkur (zdroj: vlastní)</i> . . . . .	53
31	<i>Chebyshevův mechanismus ze stavebnice Merkur (zdroj: vlastní)</i> . . .	54
32	<i>Peaucellierův mechanismus ze stavebnice Merkur (zdroj: vlastní)</i> . .	55



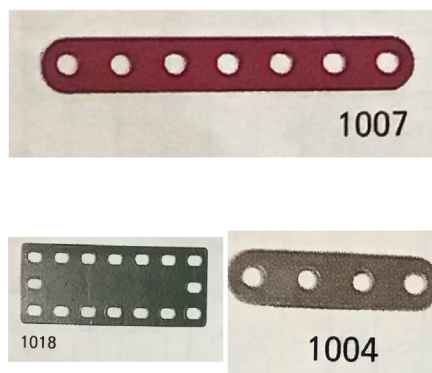
## A Příloha: Návod k sestavení Wattova paralelního spojení

*Tento návod slouží k sestavení mechanismu ze stavebnice Merkur, která se může využít v hodinách matematiky.*



Obrázek 30: Wattův mechanismus ze stavebnice Merkur (zdroj: vlastní)

*Na dalším obrázku jsou součástky, které při sestavení budeme používat:*



*Postup je následovný:*

- [23] Nejprve si najdeme ve stavebnici příslušné části k sestavení mechanismu a připravíme si kovovou desku, na kterou budeme pokládat mechanismus.*
- 2. Sestavíme mechanismus dle obrázku.*
- 3. Nakonec na kovovou desku položíme papír, pomocí magnetů připevníme mechanismus a můžeme zkoušet, jakou křivku vytvoříme.*

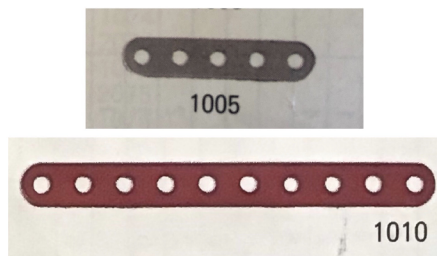
## B Příloha: Návod k sestavení Chebyshevova mechanismu

*Mechanismus Pafnuty Lvoviche Chebysheva je obdobou Wattova mechanismu, avšak jeho křivka se limitně více přibližuje*



Obrázek 31: Chebyshevův mechanismus ze stavebnice Merkur (zdroj: vlastní)

*K sestavení tohoto mechanismu jsou na obrázku zobrazeny součástky, které jsou zobrazeny na dalším obrázku:*



*Postup je následující:*

- 1. Nejprve si najdeme ve stavebnici příslušné části k sestavení mechanismu a připravíme si kovovou desku, na kterou budeme pokládat mechanismus.*
- 2. Sestavíme mechanismus dle obrázku (použijeme 2x 1010 a 1x 1005).*
- 3. Nakonec na kovovou desku položíme papír, pomocí magnetů připevníme mechanismus a můžeme zkoušet, jakou křivku vytvoříme.*

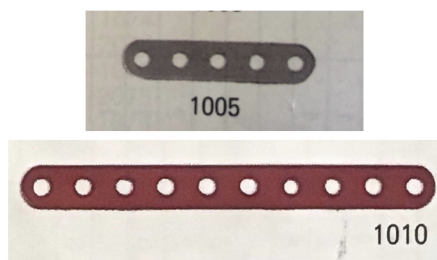
## C Příloha 3: Návod k sestavení Peaucellierova mechanismu

*Peaucellierův mechanismus je nejsložitější mechanismus, který jsem v bakalářské práci uvedla. Jedná se o spojení 7 ramen, kde dvě ramena jsou upevněna.*



Obrázek 32: Peaucellierův mechanismus ze stavebnice Merkur (zdroj: vlastní)

*K sestavení Peaucellierova mechanismu je potřeba tyto součástky:*



*Postup je následující:*

- 1. Nejprve si najdeme ve stavebnici příslušné části k sestavení mechanismu a připravíme si kovovou desku, na kterou budeme pokládat mechanismus.*
- 2. Podle obrázku budeme sestavovat mechanismus, na který potřebujeme: 2x 1010 a 5x 1005.*
- 3. Nakonec na kovovou desku položíme papír, pomocí magnetů připevníme mechanismus a můžeme zkoušet, jestli nám během hraní s tímto mechanismem vznikne přímka.*