UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

**Pavla SVOBODOVÁ**
IV. ročník – prezenční studium

Obor: matematika – hudební výchova

# VIZUALIZACE SHODNÝCH ZOBRAZENÍ POMOCÍ CABRI GEOMETRIE NA ZÁKLDNÍ ŠKOLE
**Diplomová práce**

Vedoucí práce: Mgr. Radka Dofková, Ph.D.

OLOMOUC 2009

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jen uvedených pramenů a literatury.

Ve Vysokém Mýtě dne 14.3. 2009

Děkuji Mgr. Radce Dofkové, Ph.D., za odborné vedení práce, poskytování rad a materiálních podkladů k práci, ale i učitelům základních škol, kteří se ochotně zúčastnili mého výzkumu.

**Obsah**

# Úvod

*„Na rozdíl od řady jiných vyučovacích předmětů, do jejichž výuky v posledních letech razantně zasáhl technický pokrok, školská geometrie se po desetiletí vyučuje s prakticky stejnými pomůckami tabule a křída, pravítko, kružítko. V uplynulých padesáti letech se výrazně změnilo těžiště předmětu a cíle školské geometrie, zjednodušeně řečeno, od řemeslného rýsování (a seznamování se se základními poznatky vědecké disciplíny) k tréninku geometrické představivosti (a zkoumání světa z geometrického pohledu). Se stejnými pomůckami musí tak současní žáci daleko více abstrahovat.“* [1]

Jednu z možností, jak reagovat na tuto změnu, nám nabízí matematický didaktický software Cabri Geometrie. Snadnou ovladatelností umožňuje dětem jiný vhled do geometrie například pomocí dynamických konstrukcí a experimentů.

Jako ukázku, jak využít Cabri Geometrii při vyučování, jsem zpracovala problematiku shodných zobrazení. Teoretické poznatky o jednotlivých shodných zobrazeních jsou doplněny četnými příklady zpracovanými právě v Cabri Geometrii. Práce je doplněna kvalitativním výzkumem, při kterém jsem hovořila s učiteli o využitelnosti navržených úloh.

Diplomová práce má formu příručky pro učitele. Je koncipována tak, aby učitelé, kteří se setkávají s Cabri Geometrií poprvé, byly schopni využít ve výuce předem připravené příklady. Jinými slovy je má práce pouze pozváním do světa Cabri Geometrie. Doufám, že podnítí učitele k dalšímu objevování možností využití tohoto programu i při vyučování jiných matematických témat.

[1] VANÍČEK, J., *Metodika použití dynamické geometrie při vyučování na ZŠ a SŠ*

# 1. O Cabri Geometrii

*„První verze programu vznikla již r. 1988 na Univerzitě Josepha Fouriera v Grenoblu pod vedením Jean-Marie Laborda. Dnes je program využíván ve školách všech typů v mnoha západoevropských státech, v USA, Kanadě, Japonsku a v dalších zemích. Mezi softwarem tohoto typu je nejrozšířenější a je pokládán za nejdokonalejší. Množství publikací v pedagogických časopisech i na internetu svědčí o tom, že jde o pomůcku, která významně přispívá k renesanci výuky geometrie.“* [2]

Velkou předností Cabri Geometrie je možnost využití pohybu a dynamiky pro objasnění mnohých geometrických poznatků a získání přesnějších geometrických představ. Dynamika narýsovaného obrázku je například velkou pomocí při diskusi o počtu řešení úlohy. Dynamickou geometrii neumožňují využít klasické školní pomůcky jako jsou pravítko, kružítko, tužka a papír. *„Onen osvětlující pohyb, vnášející světlo do nejasného případu, se musí odehrát v hlavě dítěte, což představuje vysoké nároky na pozornost a soustředění, na kapacitě aktuální paměti žáka. To je právě problém menších dětí a slabších žáků.“* [3] Znázornění přesného a dynamického obrázku na obrazovce počítače umožňuje okamžitý vhled do problému bez nároku na vysoký stupeň představivosti dítěte. Nedochází tedy k velkému zatížení aktuální paměti a žák ji v danou chvíli může použít jinak. Díky Cabri Geometrii lze i úspěšně trénovat geometrickou představivost pro děti atraktivní formou. [4]

Program umožňuje nakreslený obrázek snadno upravovat, formulovat a ověřovat domněnky, měřit a provádět výpočty. Můžeme také část obrázku vymazat, skrýt pomocné konstrukce, měnit barvu a vzhled čáry. Obrázky můžeme doplnit textem. Hotové obrázky lze vkládat do jiných dokumentů, případně šířit po Internetu.

---

[2] VRBA, A., *Geometrie na počítači,* s. 4
[3] VANÍČEK, J., *Metodika použití dynamické geometrie při vyučování na ZŠ a SŠ*
[4] tamtéž

Jiří Vaníček v jedné ze svých prací píše, že program Cabri Geometrie *„patří ve svém oboru ke světové špičce a opravdovým zájemcům o matematiku poskytne zábavu na několik měsíců, než uživatelé odhalí všechny jeho skryté možnosti.“* [5]

## 1.1. Dynamická geometrie

Podle Jiřího Vaníčka je dynamická geometrie ta oblast geometrie, v níž má pohyb některého objektu podstatný vliv na vhled do situace a na řešení úlohy.

Sestrojené objekty nejsou statické. Je možno s nimi manipulovat, měnit jejich tvar, velikost a polohu v nákresně. Lze měnit i pozici vzhledem k ostatním objektům. Vlastnosti sestrojených objektů lze měnit jen v rámci typu definovaného objektu (přímka, úsečka, trojúhelník, mnohoúhelník). Objekt je určen také pomocí vztahů s dalšími objekty (rovnoběžka, volný bod, obraz ve středové souměrnosti). Tyto vztahy se nemění při manipulaci s objektem a při změně jeho vlastností.

Příklady důsledků vyplývajících z manipulace s objekty:

- trojúhelník se nemůže změnit v kružnici;
- obecný trojúhelník se může změnit v rovnostranný trojúhelník, ale rovnostranný trojúhelník (správně sestrojený) nemůže přejít v obecný trojúhelník;
- průsečík úhlopřiček obdélníku (setrojený skutečně jako průsečík úhlopříček) bude vždy vázaný bod a nelze s ním přímo pohybovat.[6]

## 1.2. Cabri Geometrie ve výuce

*„Nasazení programů interaktivní geometrie do výuky přináší možnost či nutnost změnit styl vyučování, jeho organizaci, přípravu učitele na vyučování atd.“* [7] Některé změny budou popsány v části této kapitoly.

*„Velmi příjemným jevem je* <u>individualizace</u> *učebního procesu, žák může dostávat úlohy adekvátní jeho schopnostem. Učitel se zabývá žákem, který nejvíce potřebuje jeho pomoc (a ne, jako v tradiční škole, žákem, který je nejaktivnější,*

---

[5] VANÍČEK, J., *Cabri geometrie*

[6] VANÍČEK, J., *Dynamická geometrie*

[7] VANÍČEK, J., *Metodika použití dynamické geometrie při vyučování na ZŠ a SŠ*

*případně zaostávajícím žákem), jeho práce je tak efektivnější. Žáci se nebojí učitele zeptat, protože v tu chvíli nejsou sledováni celou třídou. Vyšší motivace je příčinou větší kázně při hodině a vytvoření aktivního pracovního prostředí, které přináší dobré učební výsledky.“* [8]

Rýsováním na počítači se žáci vyhnou možným nepřesnostem. Rovnoběžky budou opravdu rovnoběžné, kolmice kolmé atd.

*„Při použití programů dynamické geometrie může učitel snáze podporovat konstruktivní přístup, tedy "učení se děláním". Řadu poznatků může dítě zjistit samo, nepotřebuje prostředníka, který mu poznatky předává, což je v souladu se současným světovým trendem jak ve společnosti (více informatická, v níž převažujícím zbožím bude výsledek duševní činnosti), tak ve škole (učitel řídí práci, slouží jako konzultant, motivátor, nikoliv jako osoba předávající a zkoušející jistou sumu informací).* [9]

Práce s počítačem poskytuje okamžitou zpětnou vazbu, kterou při klasické výuce dává především učitel. Tím je podporováno vlastní sebevědomí a odpovědnost žáka, který se pak stává nezávislejší na učiteli a tedy samostatnější. Učitelovo hodnocení žákovy práce probíhá spíše na úrovni splnil/ nesplnil. Což odpovídá více hodnocení práce v běžných životních situacích než školní klasifikace.[10]

Práce v programu Cabri by mohla žákům pomoci odstranit strach z chyby při řešení úlohy nebo rýsování. Jednotlivé kroky jdou totiž vrátit zpět a i smázání objektů je snadné, což při rýsování do sešitu nelze. Mizí tedy strach z nemožnosti odstranit chybnou část postupu. Pokud žák udělá chybných kroků více, je možné začít od začátku a učitel nepozná, že si žak nebyl při řešení příkladu příliš jistý. Je důležité, aby žák chápal v některých situacích chybu jako prostředek ke správnému pochopení problému a k upravení jeho chybných matematických představ a ne jako své vlastní selhání.[11]

Nástroje interaktivní geometrie jsou vhodné pro řešení problémových úloh. Dynamická geometrie nabízí široký prostor pro netradiční výuku geometrie. Velmi dobře ji lze využít i při běžné výuce. Učitel může demonstrovat žákům „oživlé

---

[8] VANÍČEK, J., *Metodika použití dynamické geometrie při vyučování na ZŠ a SŠ*
[9] tamtéž
[10] tamtéž
[11] LÁVIČKA, M., *Možnosti dynamické geometrie ve školách*, Plzeň, 1998, s. 45

obrázky“ z učebnic. Názorný pohyb může žákům poskytnout jasnější vhled do problému. Programu lze užít i pro běžné rýsování. Žáci mohou rýsovat na počítači místo do sešitů. V tomto případě by mohla být ulehčena práce zejména dysgrafikům.

Důležitý je i význam motivační. Učitel se bude moci při výuce opřít o popularitu výpočetní techniky. Občas pro žáky nudné hodiny geometrie se tak mohou změnit na zábavné „hraní si“ s počítačem. K řešení úloh pak přistupují s jiným zaujetím a například sestrojování geometrických útvarů může jít najednou mnohem snadněji.[12]

Problematikou využití Cabri Geometrie ve výuce se zabývá Jiří Vaníček. Ve své práci uvádí následující formy využití:[13]

1. Konstrukce
   a) provádění konstrukce podle předepsaného postupu
   b) vlastní konstruktivní tvorba žáka (na základě jeho předchozích znalostí a zkušeností nebo intuitivně metodou pokus omyl)
   c) žáci mohou manipulací zkoumat hotovou předem připravenou konstrukci vytvořeného příkladu, v němž
      - není konstrukce dokončena, zhotovena je jen její část
      - nebo v něm lze objevit nový poznatek, který žák v konstrukci může použít (např. lze ukázat, že samodružné body osové souměrnosti leží na její ose, nebo např. při motivaci ke studiu Thaletovy věty apod.)
      - je kostrukce provedena chybně a žák má za úkol chybu v konstrukci najít a opravit ji

   Z didaktického hlediska je velmi cenné, že v případě b) a c) má žák možnost přijít sám na to, jak konstrukci provést.

2. Diskuse řešení

   Tato část konstrukčních úloh bývá pro žáky často velmi náročnou a neoblíbenou, protože vyžaduje vysoké nároky jejich na geometrickou představivost. Cabri Geometrie umožnuje tuto překážku překonat a i slabším žákům otvírá možnost provést správně diskusi řešení.

[12] LÁVIČKA, M., cit. (1998), s. 45
[13] VANÍČEK, J., *Metodika použití dynamické geometrie při vyučování na ZŠ a SŠ*

*„Systém práce s objekty, s nimiž lze pohybovat při zachování jejich vzájemných vztahů (incidence, kolmost, rovnoběžnost, průnik) vytváří z jedné úlohy celou třídu úloh stejného typu, v nichž nezáleží na poloze prvků zadání. Žák může pomocí menu sestrojit známou konstrukci a poté manipulovat s prvky zadání a diskutovat např. počty řešení úlohy v závislosti na vzájemné poloze a velikosti vstupních údajů.“*[14]

Podobným způsobem mohou žáci objevovat nové vztahy v problémové úloze. Manipulací s objekty a následnou diskuzí mohou sami objevit nové poznatky, které by jim při tradiční výuce byly sděleny jako fakt.

3. Rozbor úlohy

Pohyblivý náčrtek umožňuje žákům okamžitý vhled do problému mnohých úloh. „Náčrtek“ mohou žáci získat buď jako hotový obrázek, nebo je někdy didakticky cennější, když si ho sami sestrojí na pracovní ploše. Druhý způsob je časově náročnější, ale žák potom rozumí všem vazbám mezi objekty.

4. Výklad nové látky

Učitel může žáka přímo vést k osvojení si nového poznatku dynamizací některé situace znázorněné na pracovní ploše. Důkaz nějakého tvrzení lze provést projekcí před třídou, nebo řízením frontální činnosti žáků. K dynamizaci například vybízí důkaz Pythagorovy nebo důkaz o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku apod. Tyto důkazy jsou často uvedeny v učebnicích na obrázcích a Cabri Geometrie nám umožňuje je „oživit“.

5. Experiment

*„Možnost manipulovat s objekty umožňuje dítěti rychleji se obeznámit s tím, jak se objekty "chovají", než pomocí definic nebo zdlouhavého vysvětlování.“* [15] Např. při seznamování se s osovou souměrností je zde možnost manipulovat s osou souměrnosti, libovolně měnit tvar vzoru a okamžitě vidět měnící se obraz. Někdy stačí jedno nebo dvě pohnutí objektem, aby si dítě vytvořilo či opravilo geometrickou představu.

*„Experimentování pohybem je velmi atraktivní činností a vhodnou metodou získávání nových poznatků. Například u tématu o rovnici přímky lze*

[14] VANÍČEK, J., *Metodika použití dynamické geometrie při vyučování na ZŠ a SŠ*
[15] tamtéž

*hraním si s hotovým modelem pochopit, co znamenají jednotlivé koeficienty u lineární rovnice v směrnicovém tvaru.“* [16]

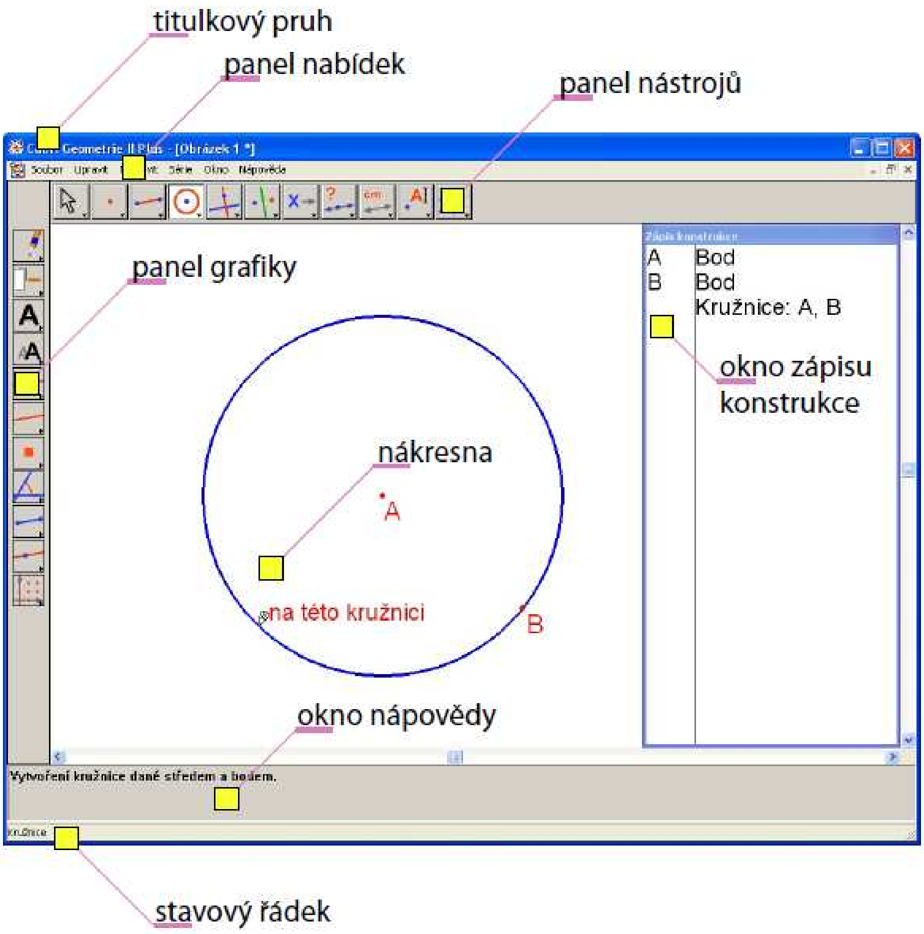
Na druhou stranu je zapotřebí si uvědomit, že se v případě Cabri Geometrie, jedná o pomocný prostředek výuky, který by měl vhodným způsobem doplnit standartní hodinu, a ne zcela vytlačit rýsování na papír, které kromě jiného má i nepostradatelnou funkci estetickou.[17]

[16] VANÍČEK, J., *Metodika použití dynamické geometrie při vyučování na ZŠ a SŠ*
[17] LÁVIČKA, M., cit. (1998), s. 45

# 2. Základy práce v Cabri Geometrii

Tato kapitola je zaměřena na techniku ovládání programu Cabri II Plus. Popsány jsou zde přednostně funkce, které je potřebné znát k řešení a modifikaci úloh obsažených v této diplomové práci. Popis dalších funkcí naleznete například v „Manuálu Cabri Geometrie II Plus“ [18] , v učebnici „Geometrie na počítači“ [19]. Jsou to elektronické dokumenty přístupné na internetu a vycházím z nich v následujících kapitolách. Dalším kvalitním českým zdrojem je český internetový portál Cabri Geometrie.

## 2.1. Uživatelské rozhraní



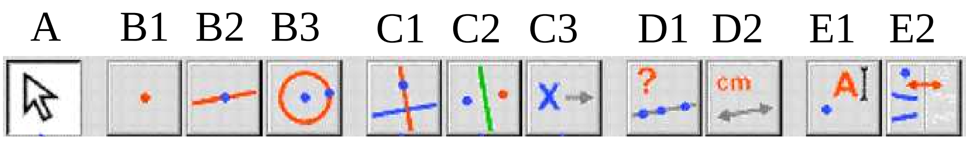

Obrázek 1. Okno Cabri Geometrie [20]

[18] BAINVILLE, E., *Cabri Geometrie II Plus. Příručka pro uživatele.*
[19] VRBA, A., *Geometrie na počítači.*
[20] BAINVILLE, Erik. *Cabri Geometrie II Plus. Příručka pro uživatele*, s. 6

Na obrázku číslo 1 vidíme otevřené hlavní okno Cabri Geometrie a jeho strukturu. Panel grafiky, okno nápovědy a okno zápisu konstrukce nejsou ale po spuštění programu hned zobrazeny.

V <u>panelu nabídek</u> je možné vybírat příkazy obvyklé v počítačových programech. Hned po spuštění programu doporučuji zobrazit panel grafiky. Zobrazíme ho pomocí příkazu „Zobrazit panel grafiky“ z nabídky „Nastavit“ nebo stisknutím klávesy F9.

Na <u>panelu nástrojů</u> jsou zobrazeny nástroje k vytváření objektů a k jejich pozměňování. Nástroje jsou roztříděny do skupin. Na jednotlivé skupiny se budu dále odvolávat pomocí značení podle obrázku číslo 2. Každý nástroj má svoji ikonu. Viditelná je ale pouze jedna ikona ze skupiny nástrojů. Aktivní nástroj má bílý podklad a podobu stisknutého tlačítka. Nabídka nástrojů se rozbalí po stisknutí tlačítka a přidržení kurzoru na daném tlačítku. Tahem myši vybereme potřebný nástroj a klikneme na něj. Vybraný nástroj se zobrazí jako ikona na tlačítku příslušné skupiny.




Obrázek 2. Označení nabídek nástrojů[21]

Objekty, které jsou na ikonách vyznačeny červeně, jsou výsledkem použití nástroje. Modře nebo zeleně jsou vyznačeny objekty, které je nutné mít zadané pro použití daného nástroje.

Panel nástrojů lze upravovat, aby vyhovovala požadavkům výuky. Učitel může žákům libovolné nástroje skrýt, aby je neměli k dispozici. Takže například v případě, že učitel nechce, aby žáci při řešení konstrukčních úloh na osovou souměrnost měli k dispozici nástroj „Osová souměrnost“, tak jej jednoduše skryje. Slouží k tomu příkaz „Upravit nabídky nástrojů“ z nabídky „Nastavit“.

[21] BAINVILLE, E., *Cabri Geometrie II Plus. Příručka pro uživatele*, s.7

Nejčastěji používaným nástrojem je „Ukazovátko“ z nabídky A. Na tento nástroj lze snadněji přejít klávesou Esc.

V okně nápovědy se zobrazuje návod pro použití právě aktivního nástroje. Okno lze otevřít příkazem „Nápověda ano/ne“ z nabídky „Nápověda“ nebo stisknutím klávesy F1.

V okně zápisu konstrukce je obrázek popsán v textové formě. Otevřít lze pomocí příkazu „Zobrazit zápis konstrukce“ z nabídky „Nastavit“ nebo stisknutím klávesy F10.

## 2.2. Vytváření objektů. Práce s objekty.

Nabídky B1, B2, B3 umožňují vytvářet různé geometrické objekty na nákresně. Mazat objekty lze už v průběhu jejich sestrojování pomocí klávesy Esc. Již narýsované objekty mažeme tak, že je označíme a použijeme nástroj „Smazat“ z nabídky „Upravit“ nebo jednodušeji stiskneme po označení objektu klávesu Delete. Pokud je na nákresně více objektů, které jsou blízko u sebe, nebo se kryjí a my chceme nějaký označit, objeví se dotaz „který objekt“. Kliknutím na dané místo se rozevře nabídka objektů a poté si můžeme ze seznamu vybrat objekt, který potřebujeme.

Důležitou funkcí je „Skrývání objektů“ v nabídce E2. Nástroj se jmenuje „Zobrazit/Skrýt“. Po jeho zaktivování klikneme na objekty, které chceme skrýt. Tento nástroj používáme v případě, že obrázek přeplňují pomocné konstrukce. Objekty, které skryjeme lze opět zviditelnit.

Grafickou podobu objektu měníme pomocí nástrojů z nabídky E2 nebo přímo pomocí panelu grafiky. Objekty pojmenováváme pomocí nástroje „Názvy“ z nabídky E1. Po zaktivování nástroje klikneme na objekt, který chceme pojmenovat. Objeví se rámeček s kurzorem, do kterého můžeme vkládat libovolné znaky z klávesnice.

Objekty přemísťujeme tak, že je uchopíme (stiskneme a přidržíme tlačítko myši) a pak pohybujeme myší a stále držíme stisknuté tlačítko. Stejným způsobem lze objekty modifikovat. Například uchopením krajního bodu úsečky, ji můžeme „natahovat“. Uchopením úsečky v její střední časti ji můžeme posunout.

Přemisťování a modifikaci jednotlivých objektů je potřebné si vyzkoušet. Pomůže vám následující úloha.

**ÚLOHA 1**

**Vyzkoušejte:**

1. Vytvořte v nákresně bod, pojmenujte ho a pohybujte s ním.
2. Vytvořte a pojmenujte úsečku. Tahejte za krajní body úsečky a tedy úsečku natahujte , nebo tahejte za vnitřek úsečky a tím ji posunujte.
3. Vytvořte a pojmenujte kružnici. Měňte polohu středu kružnice. Tahejte přímo za kružnici , tím budete měnit její poloměr.
4. Vytvořte a pojmenujte přímku. Tahejte za bod přímky, který jste umístili na nákresnu jako první. Pak tahejte za přímku v jiném místě.
5. Vytvořte a pojmenujte polopřímku, trojúhelník a pravidelný mnohoúhelník. Modifikujte vytvořené útvary podobně jako v předešlých krocích.
6. Vytvořte a pojmenujte kuželosečku. Pohybujte jedním z pěti bodů, kterými jste určili kuželosečku, a pozorujte její proměny.
7. Tahejte za názvy objektů a umístěte je tak, abyste vylepšili vzhled obrázku. Zjistíte, že názvy nemůžete odtáhnou příliš daleko od objektu, k němuž patří.[22]

## 2.3. Popis dalších nabídek nástrojů

Základní geometrické konstrukce jsou k dispozici v nabídce C1. Jsou to například kolmice, rovnoběžka, střed úsečky, osa úsečky, osa úhlu, součet vektorů a kružítko. Další nabídka C2 obsahuje základní geometrická zobrazení: středová souměrnost, osová souměrnost, posunutí, otočení, stejnolehlost, kruhová inverze. Specifickou funkci má nabídka C3, pomocí které lze vytvářet a ukládat vlastní makrokonstrukce, které mohou usnadnit naší práci v programu (např. sestrojení kružnice trojúhelníku vepsané).

Nabídka D1 obsahuje nástroje, které testují vzájemné vztahy mezi objekty: kolmost a rovnoběžnost objektů, leží-li bod na objektu, leží-li body v přímce, jsou-li body stejně vzdáleny od daného bodu. Po výběru nástroje z nabídky klepneme

[22] VRBA, A., *Geometrie na počítači, s. 8*

na zkoumané objekty a pak klepneme na libovolné místo nákresny, kde se zobrazí v textové podobě výsledek testu (např. „Jsou rovnoběžné“).

Nástroje měření nalezneme v nabídce D2: vzdálenost a délka, obsah, směrnice, velikost úhlu, souřadnice a rovnice, výpočty, vyčíslit výraz, tabulky. Pomocí těchto nástrojů lze například měřit vzdálenost dvou bodů, vzdálenost bodu od přímky, velikost vektoru, délku úsečky, obsah mnohoúhelníku, směrnici přímky, velikost úhlu. Souřadnici bodu, nebo rovnici přímky, kružnice, kuželosečky nebo množiny vypíše nástroj „Souřadnice a rovnice“. Nástrojem „Výpočty“ lze otevřít okno kalkulátoru.

Pomocí nástrojů v nabídce E1 můžeme například pojmenovat objekty, jak už bylo výše řečeno, nebo vložit do nákresny text, číslo nebo výraz. Dále je možné vyznačit úhel, upevnit nebo uvolnit objekty, určit pohyb objektu. Důležitým nástrojem je nástroj „Stopa ano/ne“. Slouží k zanechávání stopy označených objektů při modifikaci obrázku.

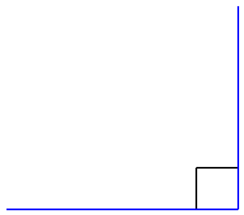
## 2.4. Co je dobré vědět

Častý problém začátečníků je nerozlišování volných a vázaných bodů v konstrukcích. Na těžkosti s tím narazíme v okamžiku, kdy nám po ukončení konstrukce nejde pohybovat s námi vybraným bodem, tak jak bychom potřebovali. Obecně lze říci, že objekty, které byly definovány pomocí objektů vytvořených již dříve, nelze uchopit a měnit jejich polohu v nákresně. Body, se kterými pohybovat lze snadno identifikujeme přemístěním ukazovátka na volné místo v nákresně a přidržením tlačítka myši, začnou totiž blikat.

Důležitou funkcí programu je ukládání a prohlížení sérií. Učitelé si mohou konstrukční úlohy předrýsovat a pak promítat žákům jednotlivé kroky místo rýsování na tabuli, které je časově náročnější a není tak přesné. Další výhodou je, že se libovolný krok může vrátit zpět, což nám tabule neumožňuje. Tuto funkci nalezneme v nabídce „Série“.

Více objektů najednou můžeme označit pomocí myši. Stiskneme tlačítko a táhnutím vytváříme obdélník, ve kterém se všechny objekty označí.

Pravý úhel není v Cabri Geometrii označován obloučkem s tečkou, ale způsobem, který je vidět na obrázku číslo 3.



Obrázek 3. Označení pravého úhlu

# 3. Shodná zobrazení v rovině

**Definice 1:** „*Geometrickým zobrazením v rovině se rozumí předpis, který libovolnému bodu $X$ roviny přiřazuje jako jeho obraz právě jeden bod $X'$ téže roviny.*“ [23]

Bod $X$ se pak nazývá vzor a bod $X'$ jeho obraz v daném zobrazení.

Zapisujeme $X \to X'$.

**Definice 2:** „*Jestliže v daném zobrazení splývá bod $X$ se svým obrazem $X'$, pak se bod $X = X'$ nazývá samodružným bodem daného zobrazení.*“ [24]

Dále uvedu, jak se problematikou shodných zobrazení zabývá Matyášek v učebnici pro vysokoškolské studium. (Pozn.: Důkazy vět zde neuvádím. Věty a definice jsou uvedeny v euklidovském prostoru $E_n$. Na základní škole se ale shodná zobrazení probírají pouze v rovině, tedy v euklidovském prostoru $E_2$. Tato poznámka i pro kapitoly 4.1, 4.2, 4.3 a 4.4.)

**Definice 3:** „*Mějme dán euklidovský prostor $E_n = \langle A, V_n \rangle$. Afinní zobrazení $f$ nositelky $A$ do sebe je shodné (izometrie) právě tehdy, je-li pro každé dva body $X, Y \in A$*

$$|XY| = |f(X)f(Y)|.\text{“}$$ [25]

Můžeme tedy říci, že v izometrii se tedy při zobrazení nemění vzdálenosti dvou bodů. Lze dokázat, že izometrie je prosté zobrazení v $E_n$ a že izometrie zachovává odchylky (je to izogonální zobrazení).[26] Dá se dokázat i věta následující, která se ve zjednodušené podobě používá na základních i středních školách.

**Věta 1:** „*Izometrie v $E_n = \langle A, V_n \rangle$ je určena $n+1$ nezávislými body $P_0, P_1, \dots, P_n$ a jejich obrazy $P_0', P_1', \dots, P_n'$, pro něž platí $|P_iP_j| = |P_i'P_j'|$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$.*“ [27]

**Definice 4:** „*Dva geometrické útvary $U, V$ v $E_n$ jsou shodné $(U \approx V)$, právě tehdy, existuje-li izometrie $f$ taková, že $f(U) = V$.*“ [28]

[23] DOLEŽAL, J., *Základy geometrie*, s . 57
[24] tamtéž, s . 57
[25] MATYÁŠEK, F., *Geometrie*, Olomouc, 1995, s. 51
[26] tamtéž, s. 51
[27] tamtéž, s. 53
[28] tamtéž, s. 53

Shodnost rozdělujeme na přímou a nepřímou. Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ je matice koeficientů afinní transformace $f$. Jestliže $\det \boldsymbol{A} = 1$, nazývá se shodnost přímou; jestliže $\det \boldsymbol{A} = -1$, nazývá se shodnost nepřímou.[29]

Nyní pohled na danou problematiku na úrovni střední a základní školy.

**Definice 5:** *„Zobrazení v rovině se nazývá* <u>*shodným zobrazením*</u> *nebo krátce shodností, právě když pro každé dva body $X, Y$ roviny a jejich obrazy $X', Y'$ v tomto zobrazení platí $|X'Y'| = |XY|$, tj. shodnost zachovává délku úsečky."* [30]

**Definice 6:** *„Množina obrazů všech bodů útvaru U nazýváme* <u>*obrazem útvaru U*</u> *a značíme U'. Je-li $U' = U$, říkáme, že U je* <u>*samodružný útvar zobrazení*</u>*."* [31]

Jiná definice, zjednodušená pro žáky základních škol, je uvedena v učebnici pro první ročník víceletých gymnázií. Zní následovně: Dva rovinné útvary jsou shodné, jestliže je můžeme přemístit tak, aby se kryly.[32]

Shodnost útvarů zapisujeme většinou pomocí symbolu ≅. Zápis $\mathrm{U}_1 \cong \mathrm{U}_2$ pak budeme číst „útvar $\mathrm{U}_1$ je shodný s útvarem $\mathrm{U}_2$" nebo „ útvary $\mathrm{U}_1$ a $\mathrm{U}_2$ jsou shodné".[33]

Víme, že v každém shodném zobrazení platí:

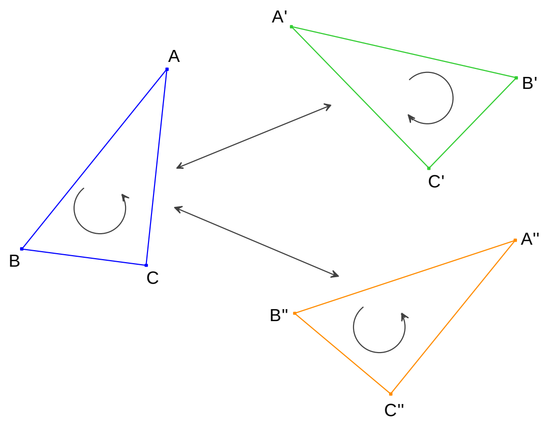
- *„Obrazem přímky $AB$ je přímka $A'B'$; obrazem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky,*
- *obrazem polopřímky $AB$ je polopřímka $A'B'$; obrazem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky,*
- *obrazem poloroviny $pA$ je polorovina $pA'$; obrazem opačných polorovin jsou opačné poloroviny,*
- *obrazem úhlu $AVB$ je úhel $A'V'B'$ shodný s úhlem $AVB$,*
- *obrazem útvaru $U$ je útvar $U'$ shodný s útvarem $U$."* [34]

---

[29] BUDINSKÝ, B., *Matematika pro vysoké školy technické. Analytická a diferenciální geometrie*, Praha, 1983, s. 102
[30] DOLEŽAL, J., *Základy geometrie*, s . 57
[31] POLÁK, J., *Přehled středoškolské matematiky*, Praha, 1980, s. 411
[32] HERMAN, J., CHRÁPAVÁ, V., JANČOVIČOVÁ, E., ŠIMŠA, J. *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií. Osová a středová souměrnost*, Praha, 1995, s. 10
[33] tamtéž, s. 12
[34] POMYKALOVÁ, E., *Matematika pro gymnázia. Planimetrie*, Praha, 2007, s. 124

Jak bylo výše řečeno, shodná zobrazení rozdělujeme na přímou a nepřímou shodnost. Zda se jedná o přímou nebo nepřímou shodnost lze zjistit například následujícími způsoby:

1. Jeden z útvarů obkreslíme a vystřihneme a pokusíme se ho přiložit k druhému tak, aby s ním splynul. Pokud stačí přemístit útvar pouze „posunutím“ a „natočením“ v rovině, jedná se o přímou shodnost. Pokud je při přemisťování nutné jeden útvar překlopit, jedná se o nepřímou shodnost.
2. Pomocí **definice 7**: *„Přímá shodnost je taková shodnost, která převádí libovolný orientovaný úhel v souhlasně orientovaný úhel, nepřímá shodnost je taková, u níž obrazem každého orientovaného úhlu je opačně orientovaný úhel.“* [35] Pro ilustraci uvádím obrázek.




Obrázek 4. Přímá a nepřímá shodnost

Na obrázku je vidět, že trojúhelník $ABC$ je nepřímo shodný s trojúhelníkem $A'C'B'$ a trojúhelník $ABC$ je přímo shodný s trojúhelníkem $A''B''C''$.

Mezi shodná zobrazení, se kterými se seznamují žáci na základních a středních školách patří osová souměrnost, středová souměrnost, posunutí (translace), otočení (rotace).

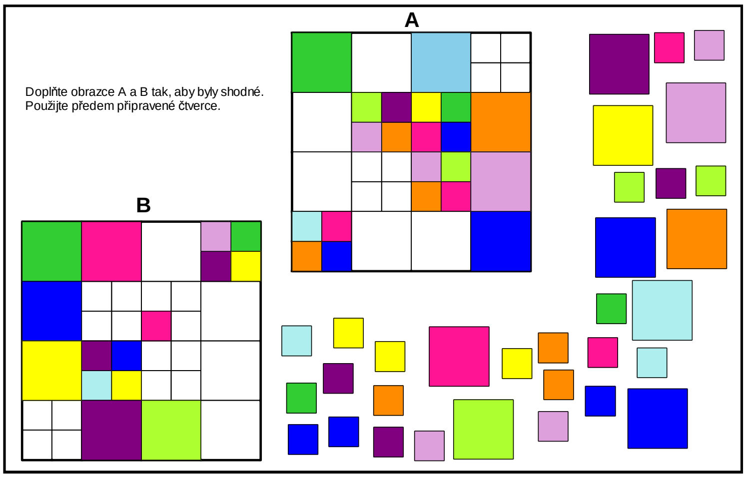
Zvláštním případem shodnosti je tzv. identita, v níž je každému bodu $X$ roviny přiřazen tentýž bod $X' = X$.[36]

[35] POLÁK, J., cit. (1980), s. 411
[36] DOLEŽAL, J., *Základy geometrie*, s . 57

## ÚLOHY PRO ŽÁKY:

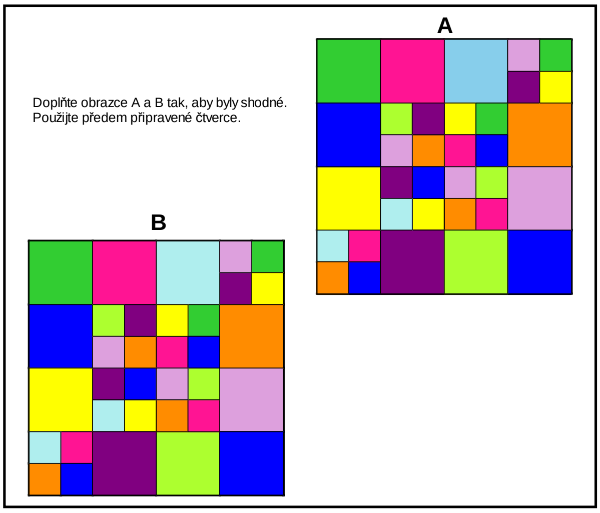
### <u>ÚLOHA 2</u>

**Doplňte obrazce *A* a *B* tak, aby byly shodné. Použijte všechny předem připravené čtverce.**




Obrázek 5. Shodná zobrazení v rovině – úloha 2

Na obrázku je vidět nejjednodušší varianta. Její řešení je vidět na obrázku číslo 6. Úlohu lze ztížit tak, že obrazec *A* otočíme o 90°, 180° nebo 270°.

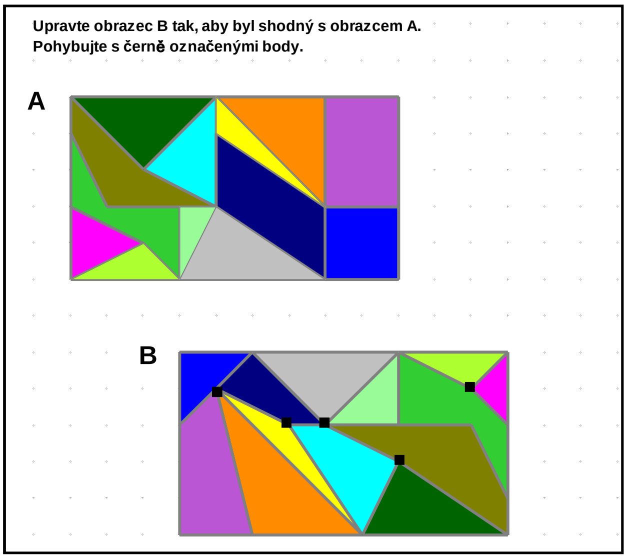



Obrázek 6. Shodná zobrazení v rovině – řešení úlohy 2

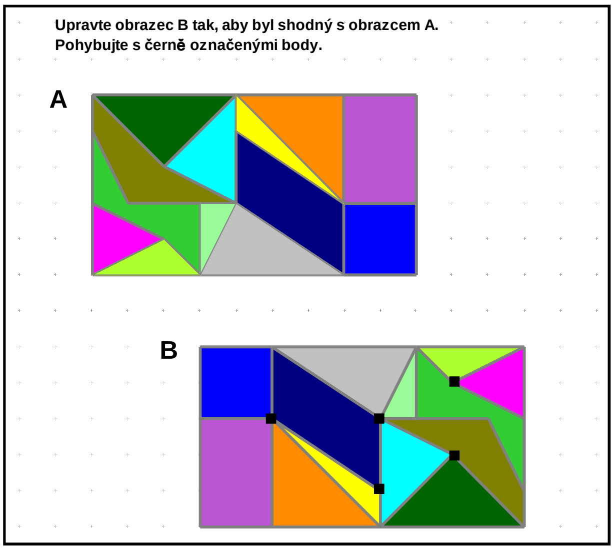
## <u>ÚLOHA 3</u>

**Upravte obrazec *B* tak, aby byl shodný s obrazcem *A*. Pohybujte s černě označenými body.**

Při řešení úlohy by měly být pomocí viditelné mřížové body. Řešení je znázorněno na obrázku číslo 8.




Obrázek 7. Shodná zobrazení v rovině – úloha 3




Obrázek 8. Shodná zobrazení v rovině – řešení úlohy 3

## 3.1. Osová souměrnost

Na vysoké škole se osová souměrnost definuje jako souměrnost podle nadroviny.

**Definice 8:** *„<u>Souměrnost podle nadroviny $\sigma$</u> v $E_n$ je neidentická izometrie v $E_n$ ,pro níž je každý bod nadroviny $\sigma$ samodružný.“* [37]

Dá se dokázat, že platí následující věty:

**Věta 2:** *„Budiž $\sigma$ nadrovina v $E_n = \langle A, V_n \rangle$. Bod $Y \in (A - \sigma)$ je souměrný k bodu $X \in (A - \sigma)$ v souměrnosti $f$ podle nadroviny $\sigma$ právě tehdy, jsou-li splněny tyto podmínky:*

*a) Bod $Y$ je různý od bodu $X$,*

*b) $[XY]$ protíná $\sigma$,*

*c) $[XY]$ je kolmé k $\sigma$ a $|X\sigma| = |Y\sigma|$.“* [38]

**Věta 3:** *„Charakteristickými vektory souměrnosti podle nadroviny $\sigma$ jsou všechny vektory zaměření nadroviny $\sigma$ jsou všechny vektory zaměření nadroviny $\sigma$ s charakteristickým číslem $k = 1$ a normálový vektor nadroviny $\sigma$ , který má charakteristické číslo $k = -1$.“* [39]

**Věta 4:** *„Ke každým dvěma různým bodům $X, Y$ prostoru $E_n$ existuje jediná nadrovina $\sigma$, podle níž jsou oba body navzájem souměrné.“* [40]

Nyní uvádím definici osové souměrnosti z učebnice pro střední školy.

**Definice 9:** *„Je dána přímka $o$. Osová souměrnost s osou $o$ je shodné zobrazení $O(o)$, které přiřazuje:*

1. *Každému bodu $X \notin o$ bod $X'$ tak, že přímka $XX'$ je kolmá k přímce $o$ a střed úsečky $XX'$ leží na přímce $o$.*
2. *Každému bodu $Y \in o$ bod $Y' = Y$.“* [41]

Zapisujeme $O(o): X \to X'$.

[37] MATYÁŠEK, F., cit. (1995), s. 53
[38] tamtéž, s. 53
[39] tamtéž, s. 55
[40] tamtéž, s. 56
[41] POMYKALOVÁ, E., cit. (2007), s. 125

Přímku $o$ nazýváme osou souměrnosti. Slovy říkáme, že body $X, X'$ jsou souměrně sdružené podle osy souměrnosti. Snadno bychom si mohli ověřit, že osová souměrnost je shodnost nepřímá.

Samodružné body osové souměrnosti leží na ose souměrnosti $o$, osová souměrnost má tedy nekonečně mnoho samodružných bodů. Obrazem přímky $p$ je přímka $p'$, pokud je přímka $p$ rovnoběžná s osou souměrnosti $o$, je i její obraz přímka $p'$ rovnoběžná s osou $o$. Pokud přímka $p$ není rovnoběžná s osou souměrnosti $o$, protíná se vzor a obraz přímky na ose $o$. Všechny přímky kolmé k ose souměrnosti jsou samodružné a samodružná přímka je i osa souměrnosti.[42]

**Definice 10:** *„Geometrické útvary $U, U'$, z nichž jeden je obrazem druhého v osové souměrnosti s osou $o$, nazýváme útvary souměrně sdružené podle osy $o$. Je-li $U = U'$, pak říkáme, že útvar U je osově souměrný podle osy o.“*[43]

Osová souměrnost v rovině je určena buď osou souměrnosti nebo dvojicí odpovídajících si bodů (vzor a obraz). [44]

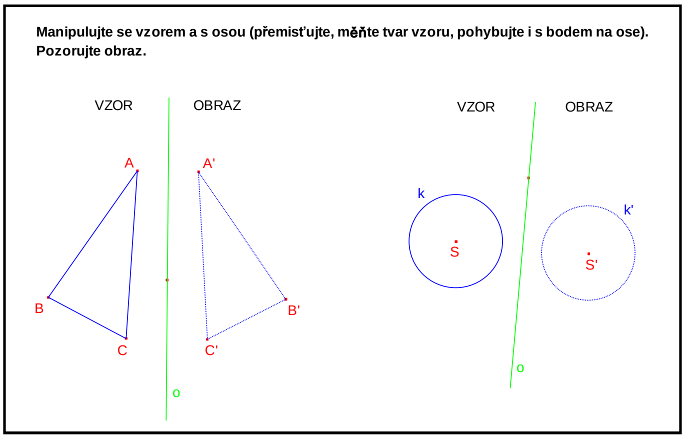
[42] POMYKALOVÁ, E., cit. (2007), s. 125
[43] tamtéž, s. 125-126
[44] SLOUKA, J., *Geometrie pro 5.-9. Ročník ZŠ a nižší třídy víceletých gymnázií.*, Olomouc, 1993, s. 86

### 3.1.1. Úlohy pro žáky

**ÚLOHA 4**

**Manipulujte se vzorem a s osou (přemisťujte vzor, měňte tvar vzoru, pohybujte s vyznačeným bodem na ose). Pozorujte obraz.**[45]

Žáci získají základní představu o osové souměrnosti zábavnou manipulací s objekty a ne jenom koukáním na statické obrázky v učebnicích. Náhodně mohou objevit i některé vlastnosti osové souměrnosti. Například bod, který leží na ose, se zobrazí sám na sebe.



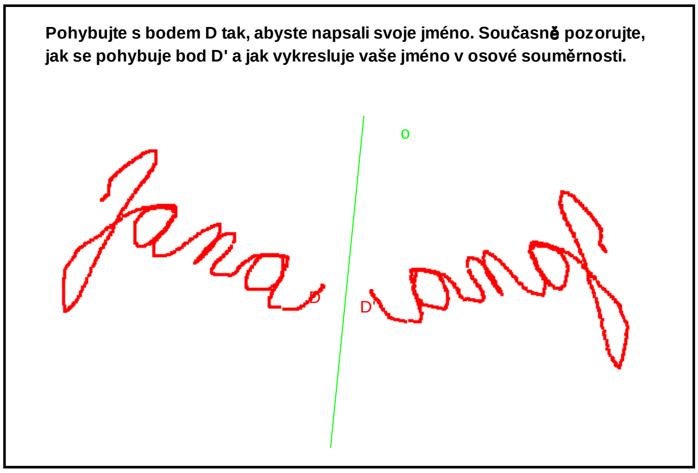

Obrázek 9. Osová souměrnost – úloha 4

**ÚLOHA 5**

**Pohybujte s bodem *D* tak, abyste napsali svoje jméno. Současně pozorujte, jak se pohybuje bod *D'* a jak vykresluje vaše jméno v osové souměrnosti.**[46]

Úloha je připravená tak, že bod *D* za sebou zanechává při pohybu viditelnou stopu. Pomocí jeho stopy můžeme napsat libovolné slovo nebo nakreslit libovolný obrázek či tvar. Pokusy můžeme opakovat, protože stopa lze lehce smazat. Použijeme k tomu příkaz „Překreslit“ z nabídky „Upravit“.

[45] VANÍČEK, J. *Výukový projekt „Osová souměrnost“*
[46] tamtéž



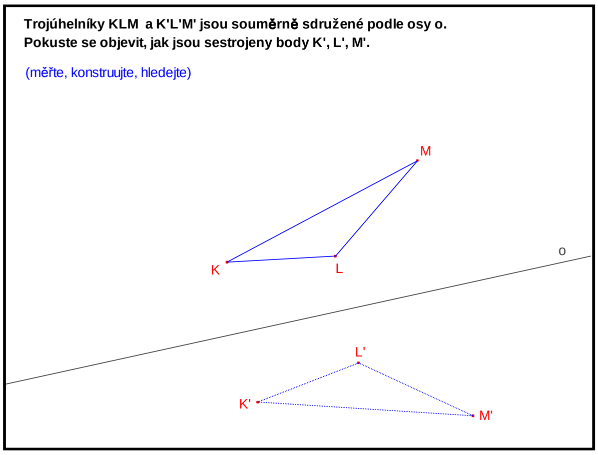

Obrázek 10. Osová souměrnost – úloha 5

## ÚLOHA 6

**Jsem objevitel!**

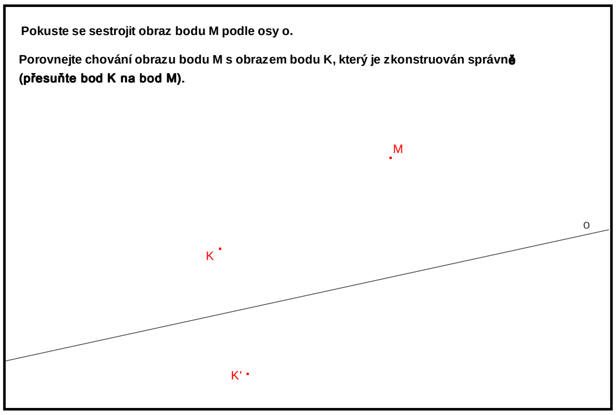
**Postupujte podle níže uvedených kroků.**

1. **Trojúhelníky $KLM$ a $K'L'M'$ jsou souměrně sdružené podle osy $o$. Pokuste se objevit, jak jsou sestrojeny body $K'$, $L'$, $M'$ (měřte, konstruujte, hledejte).**




Obrázek 11. Osová souměrnost – úloha 6, krok 1

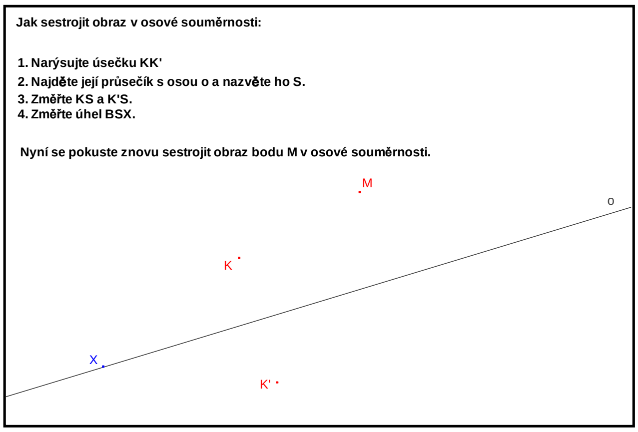
2. **Pokuste se sestrojit obraz bodu $M$ podle osy $o$. Porovnejte chování obrazu bodu $M$ s obrazem bodu $K$, který je sestrojen správně (přesuňte bod $K$ na bod $M$).**




Obrázek 12. Osová souměrnost – úloha 6, krok 2

3. **Nápověda k sestrojení obrazu v osové souměrnosti:**
   - **narýsujte úsečku $KK'$;**
   - **najděte její průsečík s osou *o* pojmenujte ho $S$;**
   - **změřte $KS$ a $K'S$;**
   - **změřte úhel $BSX$.**

   **Nyní se pokuste znovu sestrojit obrazu bodu $M$ v osové souměrnosti.** [47]



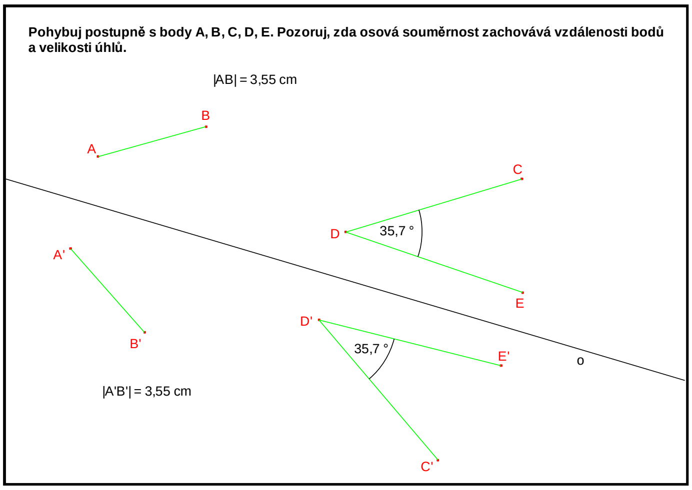

Obrázek 13. Osová souměrnost – úloha 6, krok 3

Úloha umožňuje žákům, aby sami objevili, jak sestrojit obraz bodu v osové souměrnosti.

[47] VANÍČEK, J., *Výukový projekt „Osová souměrnost“*

## ÚLOHA 7

**Pohybujte postupně s body $A, B, C, D, E$. Pozorujte, zda osová souměrnost zachovává vzdálenost bodů a velikost úhlů.**[48]




Obrázek 14. Osová souměrnost – úloha 7

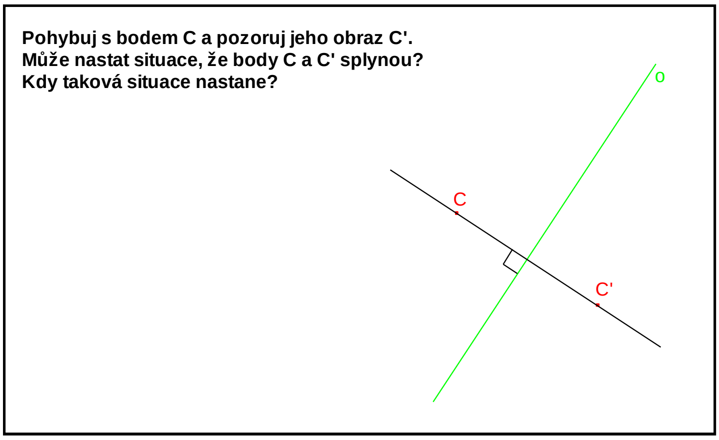
Žáci při manipulaci s jednotlivými body vidí, jak se shodně mění velikost měřených veličin a ověřují si tím základní vlastnosti osové souměrnosti.

## ÚLOHA 8

**Pobybujte bodem $C$ a pozorujte jeho obraz $C'$. Může nastat situace, že body $C$ a $C'$ splynou? Kdy taková situace nastane?**

Úloha vede k seznámení s pojmem samodružný bod. Závěrem této úlohy by mělo být, že každý bod, který splývá se svým obrazem, se nazývá samodružný bod osové souměrnosti a že každý bod osy $o$ je samodružným bodem osové souměrnosti s osou $o$.[49]

[48] VRBA, A., *Shodná zobrazení v rovině*
[49] HERMAN, J., CHRÁPAVÁ, V., JANČOVIČOVÁ, E., ŠIMŠA, J. , cit. (1995), s. 29

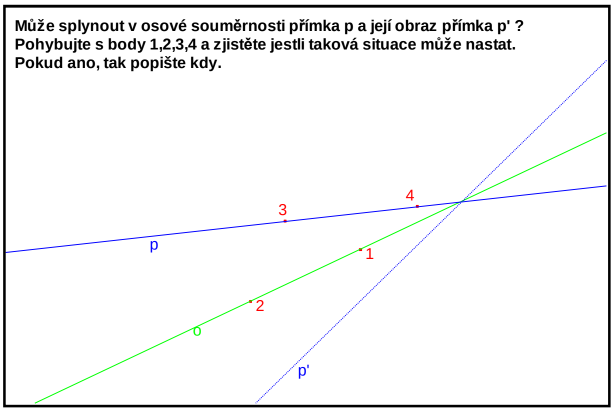



Obrázek 15. Osová souměrnost – úloha 8

**ÚLOHA 9**

**Může splynout v osové souměrnosti přímka $p$ a její obraz přímka $p'$ ? Pohybujte s body $1, 2, 3, 4$ a zjistěte, jestli taková situace může nastat. Pokud ano, tak popište kdy.**

Úloha vede k seznámení s pojmem samodružné přímky. Závěrem by mělo být, že každá přímka, která splývá se svým obrazem, se nazývá samodružná přímka a že samodružné přímky osové souměrnosti jsou osa souměrnosti a všechny přímky k ní kolmé.[50]

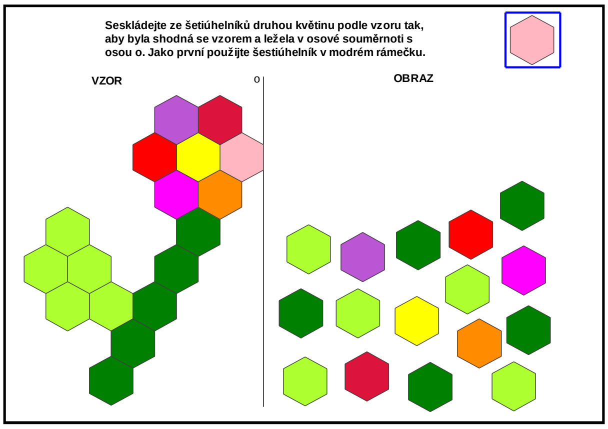



Obrázek 16. Osová souměrnost – úloha 9

[50] POMYKALOVÁ, E., cit. (2007), s. 126

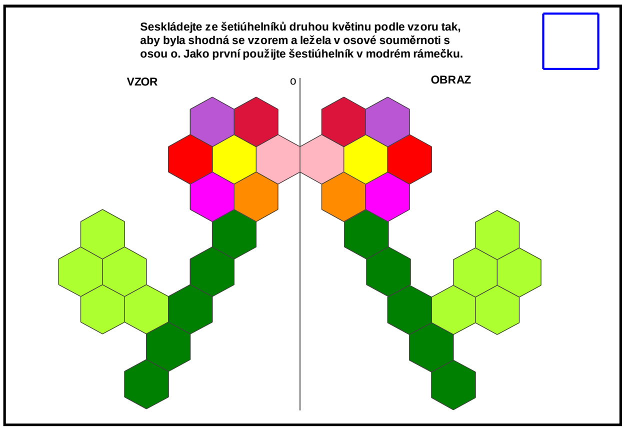
## ÚLOHA 10

**Seskládejte ze šestiúhelníků druhou květinu podle vzoru tak, aby byla shodná se vzorem a ležela v osové souměrnosti s osou *o*. Jako první použijte šestiúhelník v modrém rámečku.**




Obrázek 17. Osová souměrnost – úloha 10

Na obrázku číslo 18 je ukázáno řešení.




Obrázek 18. Osová souměrnost – řešení úlohy 10

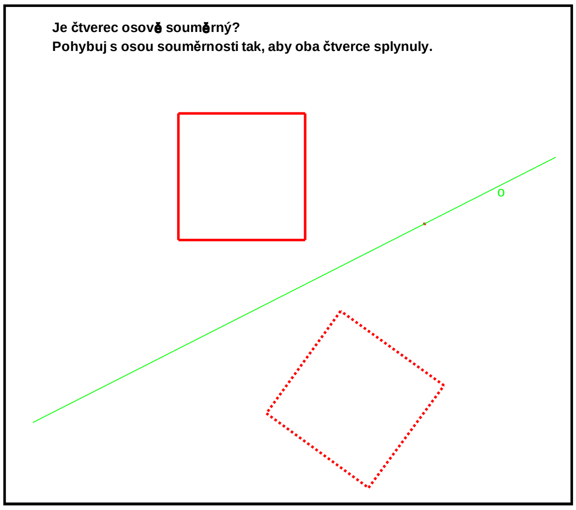
## ÚLOHA 11

**Je čtverec osově souměrný? Pohybujte s osou souměrnosti tak, aby oba čtverce splynuly.**[51]

Žáci po vhodné manipulaci s osou souměrnosti zjistí, že čtverec je osově souměrný útvar. Čtverce se překryjí ve dvou případech:

[51] VANÍČEK, J., *Výukový projekt „Osová souměrnost“*

1. osa souměrnosti prochází středy protějších stran čtverce;
2. osa souměrnosti prochází protějšími vrcholy čtverce.

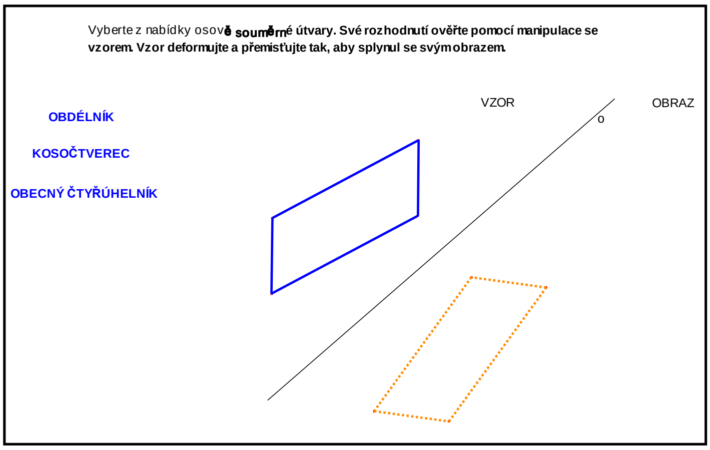



Obrázek 19. Osová souměrnost – úloha 11

## ÚLOHA 12

**Vyberte z nabídky osově souměrné útvary. Své rozhodnutí ověřte pomocí manipulace se vzorem. Vzor deformujte a přemisťujte tak, aby splynul se svým obrazem.**[52]

Žáci by měli objevit, že osově souměrně útvary v nabídce jsou obdélník a kosočtverec.



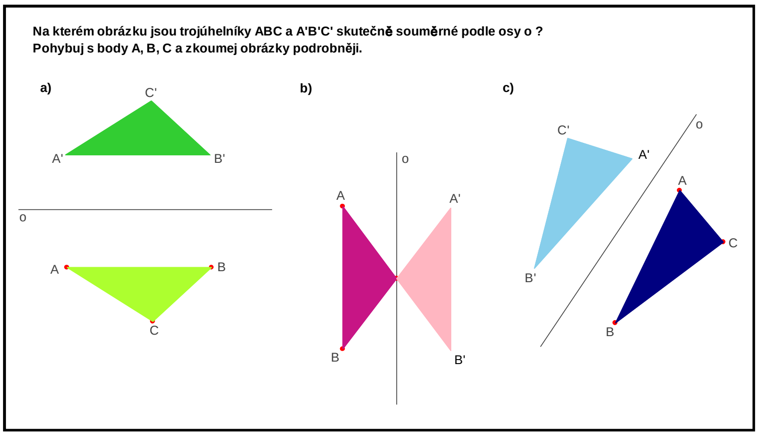

Obrázek 20. Osová souměrnost – úloha 12

[52] VRBA, Antonín., *Geometrie na počítači*, s. 18

## ÚLOHA 13

**Na kterém obrázku jsou trojúhelníky $ABC$ a $A'B'C'$ skutečně souměrné podle osy $o$? Pohybuj s body $A, B, C$ a zkoumej obrázky podrobněji.**

Na první pohled se zdá, že osová souměrnost je znázorněna na všech obrázcích, ale v okamžiku, kdy začneme pohybovat s body $A, B, C$ zjistíme, že tomu tak není. Osová souměrnost je skutečně znázorněna pouze na obrázku c).



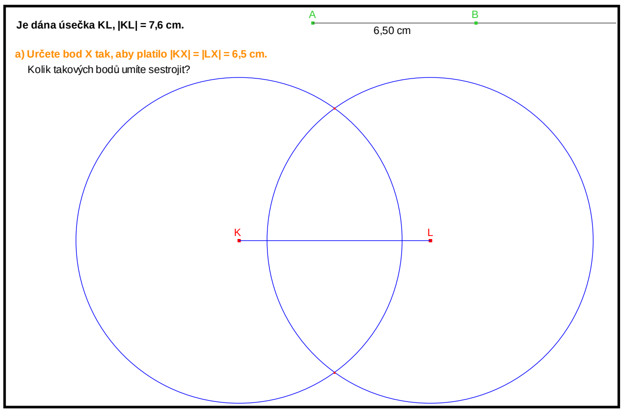

Obrázek 21. Osová souměrnost – úloha 13

## ÚLOHA 14

**Je dána úsečka $KL$, $|KL| = 7,6$ cm.**

a) **Určete bod $X$ tak, aby platilo $|KX| = |LX| = 6,5$ cm. Kolik takových bodů dokážete sestrojit?**

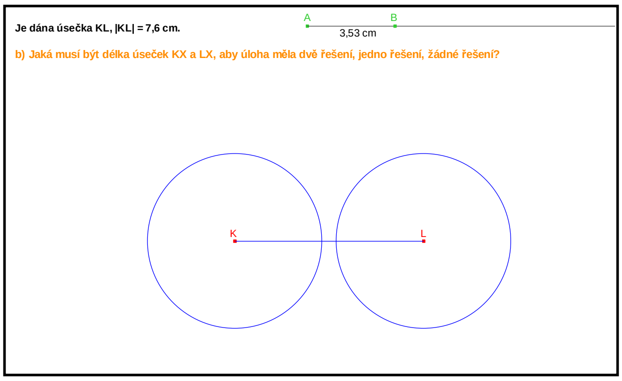
Na obrázku číslo 22 je vidět, že lze sestrojit v našem případě dva body mající požadovanou vlastnost.




Obrázek 22. Osová souměrnost – úloha 14 a

**b) Jaká musí být délka úseček $KX$ a $LX$, aby úloha měla dvě řešení, jedno řešení nebo žádné řešení?**

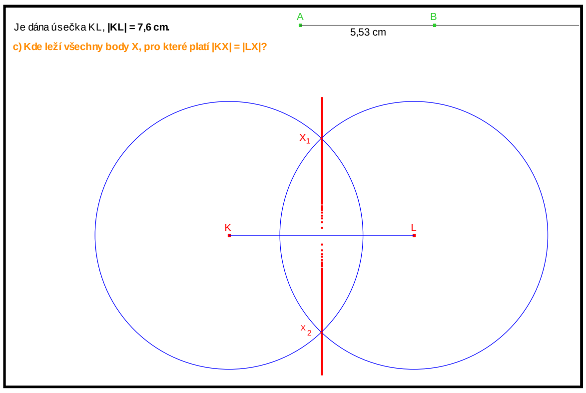
Diskusi řešení lze žákům usnadnit. Pokud budeme měnit vzdálenost bodu $B$ od bodu $A$, tak se budou měnit i poloměry obou narýsovaných kružnic. Žákům je tak umožněno názorně vidět, kdy má úloha dvě řešení, jedno řešení, žádné řešení. Na obrázku číslo 23 je ukázán případ, kdy úloha nemá žádné řešení.




Obrázek 23. Osová souměrnost – úloha 14 b

**c) Kde leží všechny body $X$, pro které platí vztah $|KX| = |LX|$?** [53]

Žáci opět mohou pohybovat s bodem $B$ a pozorovat, kde leží všechny body $X$. Ještě názornější pro žáky je vykreslení požadované množiny bodů. Docílíme toho zaktivováním stop bodů $X_1$ a $X_2$ pomocí nástroje „Stopa ano/ne“ v nabídce E1. Vykreslená stopa znázorňuje množinu bodů dané vlastnosti, v našem případě osu úsečky. Viditelné je to na obrázku číslo 24.




Obrázek 24. Osová souměrnost – úloha 14 c

[53] MOLNÁR, J., KOPECKÝ, M., LIŠKOVÁ, H., NOVÁK, B., SLOUKA, J. *Matematika 6*. Olomouc, 1998, s. 26

## 3.2. Středová souměrnost

Vysokoškolská definice středové souměrnosti, kterou uvádí Matyášek zní následovně.

**Definice 11:** *„Souměrnost s podle středu $S \in A$ je transformace prostoru $E_n = \langle A, E_n \rangle$, definována rovností $X' = S + (S - X)$, kde $X, X' \in A,\ X' = s(X)$."* [54]

Vlastnosti středové souměrnosti popisuje následující věta. Všechny vlastnosti lze dokázat.

**Věta 5:** *„Středová souměrnost s v $E_n = \langle A, E_n \rangle$ se středem $S$ má tyto vlastnosti:*

*a) $S$ je jediným samodružným bodem souměrnosti $s$,*

*b) s je involutorní zobrazení,*

*c) je-li $X' = s(X)$, je bod $S$ středem úsečky $XX'$,*

*d) je-li v daném kartézském souřadnicovém systému $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $X' = [x_1', x_2', \dots, x_n']$, jsou rovnice středové souměrnosti s*

*$s\colon x_i = -x_i + a_i \ \ (i = 1, 2, \dots, n)$, přičemž $S = \left[\frac{1}{2}a_1, \frac{1}{2}a_2, \dots, \frac{1}{2}a_n\right]$,*

*e) pro n liché je středová souměrnost v $E_n$ nepřímou izometrií, pro n sudé je izometrií přímou,*

*f) ve středové souměrnosti jsou všechny směry samodružné s charakteristickým číslem $k = -1$,*

*g) dvě přímky, souměrné podle středu, jsou nesouhlasně rovnoběžné."* [55]

V učebnicích pro střední školy nacházíme definice středové souměrnosti podobné této:

**Definice 12:** *„Středová souměrnost se středem S je přímá shodnost, která přiřazuje bodu $S$ týž bod $S' = S$ a každému jinému bodu $X \neq S$ roviny přiřazuje obraz $X'$ tak, že platí:*

1. *bod $X'$ leží na polopřímce opačné k polopřímce $SX$,*
2. *$|SX| = |SX'|$."* [56]

Zapisujeme $\mathrm{S}(S)\colon X \to X'$.

---

[54] MATYÁŠEK, F., cit. (1995), s. 59
[55] tamtéž, s.60
[56] DOLEŽAL, J., *Základy geometrie*, s. 69

Bod $S$ nazýváme středem souměrnosti. O bodech $X, X'$ říkáme, že jsou souměrně sdružené podle středu souměrnosti. Středová souměrnost má jediný samodružný bod, kterým je střed souměrnosti. Všechny přímky, které procházejí středem souměnosti jsou samodružné přímky středové souměrnosti. Obrazem přímky, která neprochází středem souměrnosti, je přímka rovnoběžná se svým vzorem.[57]

Středová souměrnost je jednoznačně určena středem souměrnosti nebo dvojicí odpovídajících si bodů $X, X'$(vzor a obraz). V druhém případě je středem souměrnosti střed úsečky $XX'$.

**Definice 13:** *„Obrazem útvaru $U$ ve středové souměrnosti se středem $S$ nazýváme útvar $U'$ obsahující právě ty body roviny, které jsou obrazy bodů útvaru $U$. Útvary $U$ a $U'$ jsou shodné a nazývají se souměrně sdružené podle středu $S$.“* [58]

**Definice 14:** *„Útvar $U$ je středově souměrný podle středu $S$, pokud jeho obraz $U'$ ve středové souměrnosti se středem $S$ splývá s útvarem $U$ $(U = U')$.“* [59]

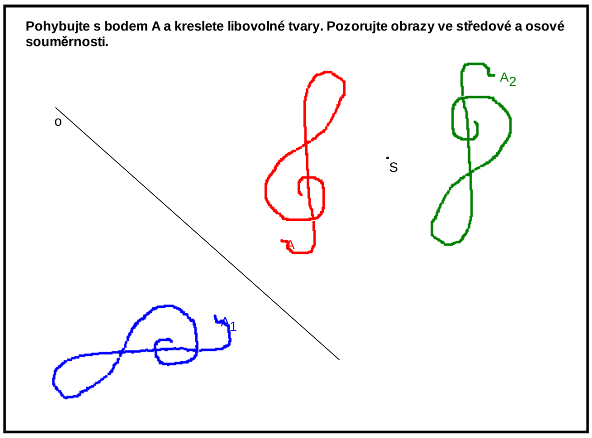
[57] POMYKALOVÁ, E., cit. (2007), s. 133
[58] HERMAN, J., CHRÁPAVÁ, V., JANČOVIČOVÁ, E., ŠIMŠA, J., cit. (1995), s.47
[59] tamtéž, s.49

### 3.2.1. Úlohy pro žáky

**<u>ÚLOHA 15</u>**

**Pohybujte s bodem $A$ a kreslete libovolné tvary. Pozorujte obrazy ve středové a osové souměrnosti.**

Úloha je vhodná na počáteční seznámení se středovou souměrností. Umožňuje žákům připomenout si osovou souměrnost a porovnávat obrazy ve středové a osové souměrnosti.



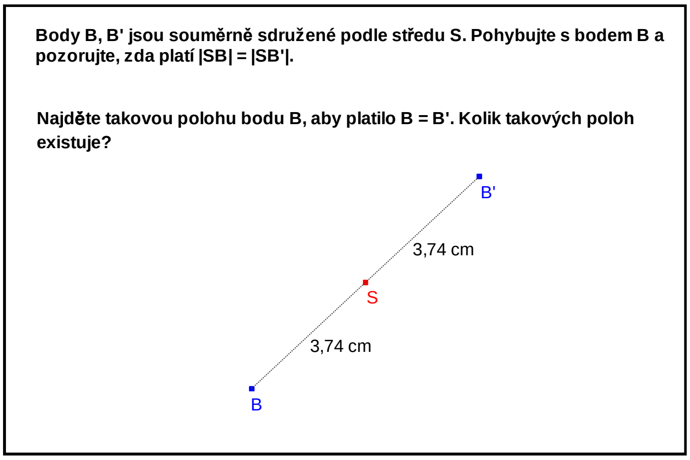

Obrázek 25. Středová souměrnost – úloha 15

**<u>ÚLOHA 16</u>**

**Body $B, B'$ jsou souměrně sdružené podle středu $S$. Pohybujte s body $B, S$ a pozorujte, zda platí $|SB| = |SB'|$. Najděte takovou polohu bodu $B$, aby platilo $B = B'$. Kolik takových poloh existuje?** [60]

Žáci si pomocí této úlohy ověří jednu ze základních vlastností středové souměrnosti. Při manipulaci s body je totiž vidět, jak se shodně mění vzdálenosti $|SB|$ a $|SB'|$. Úloha by žáky měla také dovést ke zjištění, že ve středové souměrnosti existuje jeden samodružný bod, kterým je střed souměrnosti.

[60] VRBA, A., *Shodná zobrazení v rovině*




Obrázek 26. Středová souměrnost – úloha 16

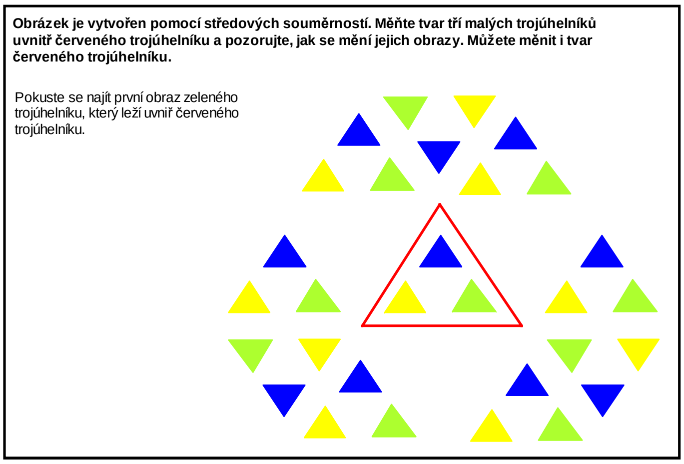
## ÚLOHA 17

**Obrázek je vytvořen pomocí středových souměrností. Měňte tvar tří malých trojúhelníků uvnitř červeného trojúhelníku a pozorujte, jak se mění jejich obrazy. Můžete měnit i tvar červeného trojúhelníku.**[61]

**Pokuste se najít první obraz zeleného trojúhelníku, který leží uvnitř červeného trojúhelníku.**

Prvním obrazem zeleného trojúhelníku je například zelený trojúhelník, který je mu nejblíže. Byl zobrazen přes nejbližší vrchol trojúhelníku.

Úlohu lze využít jako motivační.

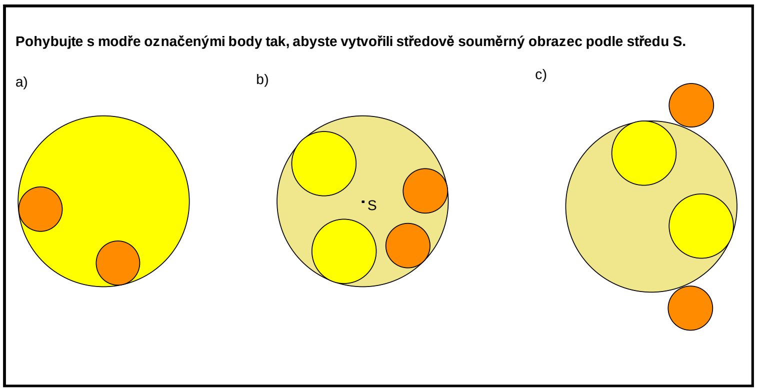



Obrázek 27. Středová souměrnost – úloha 17

[61] BONUŠ, Z., *Geometrie živě*

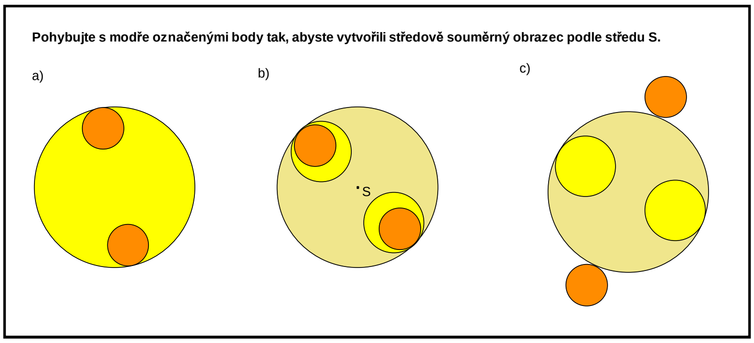
## ÚLOHA 18

**Pohybujte s vyznačenými body tak, abyste vytvořili středově souměrný obrazec podle středu *S*.** [62]




Obrázek 28. Středová souměrnost – úloha 18

Řešení je vidět na obrázku číslo 29.



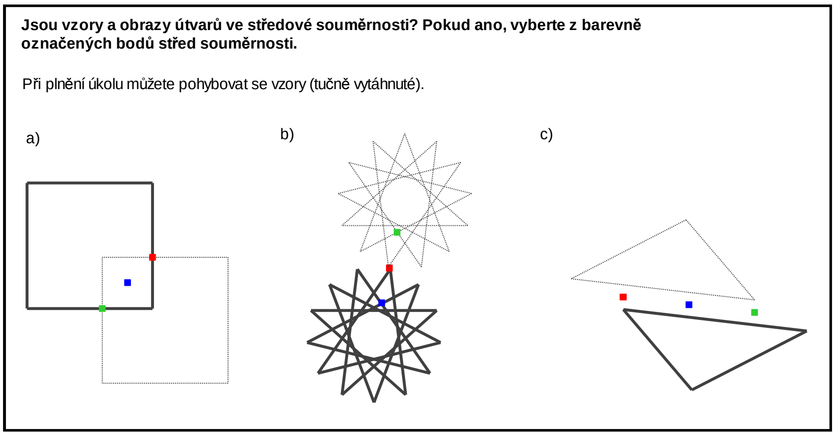

Obrázek 29. Středová souměrnost – řešení úlohy 18

## ÚLOHA 19

**Jsou vzory a obrazy útvarů ve středové souměrnosti? Pokud ano, vyberte z barevně označených bodů střed souměrnosti. Při plnění úkolu můžete pohybovat se vzory (tučně vytáhnuté).**[63]

[62] ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Matematika pro7.ročník základní školy, 3.díl.* Praha, 2003, s. 30
[63] MOLNÁR, J., LEPÍK, L., LIŠKOVÁ, H., SLOUKA, J. *Matematika 7.* Olomouc, 1999, s. 70

Po manipulaci se vzory zjistíme, že vzory a obrazy útvarů leží ve středové souměrnosti ve všech třech případech a), b), c). V případě a) je středem souměrnosti modrý bod, v případě b) červený bod a v případě c) opět modrý bod.

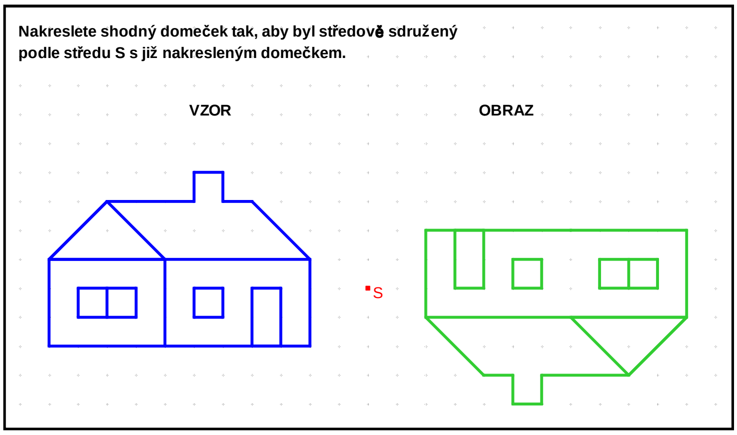



Obrázek 30. Středová souměrnost – úloha 19

## ÚLOHA 20

**Nakreslete shodný domeček tak, aby byl souměrně sdružený podle středu *S* s již nakresleným domečkem.**

Pokud žáci potřebují nápovědu, tak si pomocí nástroje „Středová souměrnost“ mohou zobrazit ve středové souměrnosti libovolný bod domečku. Pro závěrečnou kontrolu lze podobným způsobem zobrazit celý obrys domečku. Vhodné je, aby žáci kreslili obraz domečku odlišnou barvou než je nakreslen vzor.

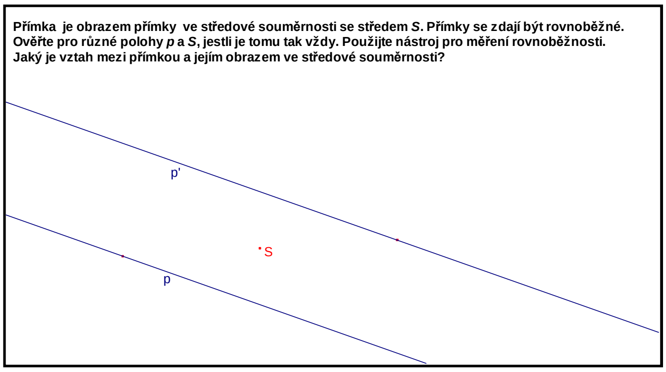



Obrázek 31. Středová souměrnost – úloha 20

**<u>ÚLOHA 21</u>**

**Přímka $\boldsymbol{p'}$ je obrazem přímky $\boldsymbol{p}$ ve středové souměrnosti se středem $\boldsymbol{S}$. Přímky se zdají být rovnoběžné. Ověřte pro různé polohy $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{S}$, jestli je tomu tak vždy. Použijte nástroj pro měření rovnoběžnosti. Jaký je vztah mezi přímkou a jejím obrazem ve středové souměrnosti?** [64]

Žáci by měli dojít k závěru, že ve středové souměrnosti je každá přímka rovnoběžná se svým obrazem.




Obrázek 32. Středová souměrnost – úloha 21

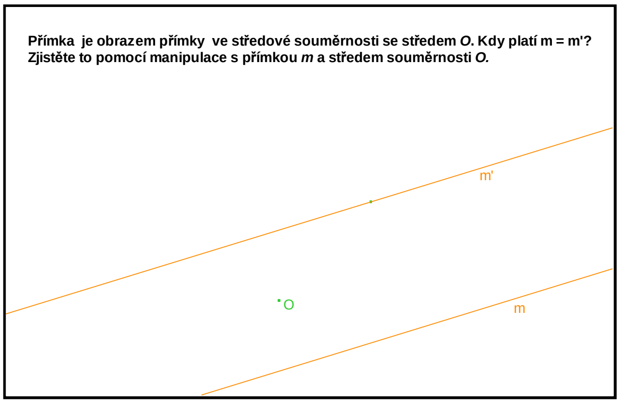
**<u>ÚLOHA 22</u>**

**Přímka $\boldsymbol{m'}$ je obrazem přímky $\boldsymbol{m}$ ve středové souměrnosti se středem *O*. Kdy platí $\boldsymbol{m = m'}$?** [65] **Zjistěte to pomocí manipulace s přímkou $\boldsymbol{m}$ a středem souměrnosti *O*.**

Úloha vede k seznámení s pojmem samodružné přímky. Žáci objeví, že ve středové souměrnosti jsou samodružné právě ty přímky, které procházejí středem souměrnosti.

---

[64] BONUŠ, Z., *Geometrie živě*
[65] HERMAN, J., CHRÁPAVÁ, V., JANČOVIČOVÁ, E., ŠIMŠA, J., cit. (1995), s. 50

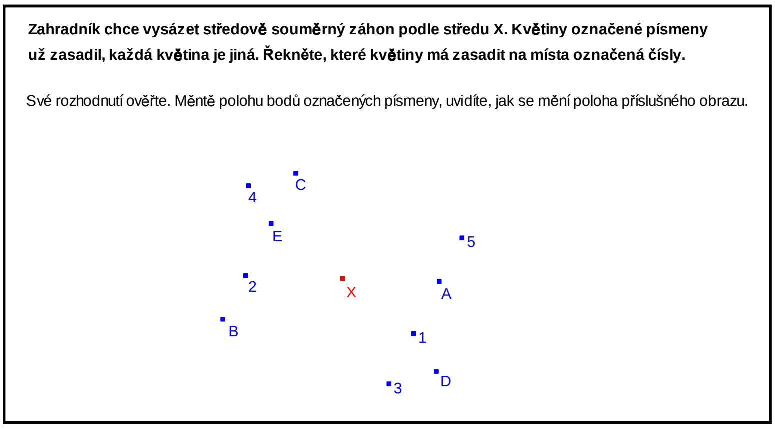



Obrázek 33. Středová souměrnost – úloha 22

## ÚLOHA 23

**Zahradník chce vysázet středově souměrný záhon podle středu *X*. Květiny označené písmeny už zasadil, každá květina je jiná. Řekněte, které květiny má zasadit na místa označená čísly.[66] Své rozhodnutí ověřte. Měňte polohu bodů označených písmeny, uvidíte, jak se mění poloha příslušného obrazu.**

Řešení: $A2, B5, C3, D4, E1$.




Obrázek 34. Středová souměrnost – úloha 23

[66] ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Pracovní sešit z matematiky. Soubor úloh pro 7. Ročník základní školy*. Praha, 2004, s. 121

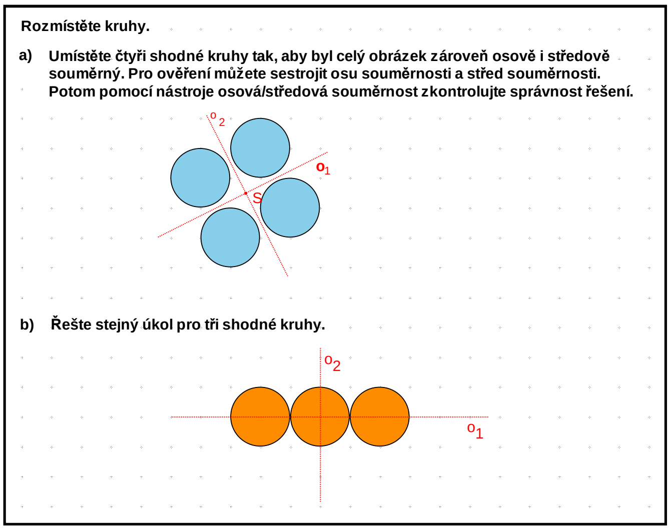
## ÚLOHA 24

**Rozmístěte kružnice.**

**a) Umístěte čtyři shodné kružnice tak, aby byl celý obrázek zároveň osově i středově souměrný. Pro ověření sestrojte osu souměrnosti a střed souměrnosti, pomocí nástrojů „Osová souměrnost“ a „Středová souměrnost“ zkontrolujte správnost řešení.**

b) **Řešte stejný úkol pro tři shodné kružnice.**[67]

Jedno z možných řešení je znázorněno na obrázku. V okamžiku, kdy žáci najdou jedno z možných řešení, mohou jednoduchým způsobem smazat narýsované osy souměrnosti a střed souměrnosti. Pak pokračují v hledání jiného řešení.




Obrázek 35. Středová souměrnost – úloha 24

## ÚLOHA 25

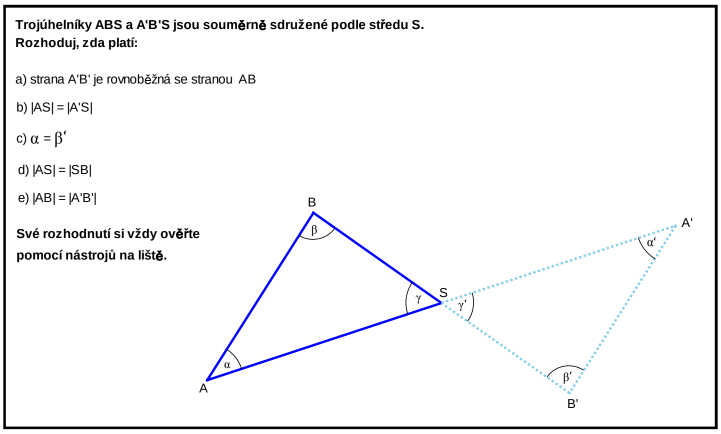
**Trojúhelníky $ABS$ a $A'B'S$ jsou souměrně sdružené podle středu $S$. Rozhoduj, zda platí: a) $A'B' \parallel AB$; b) $|AS| = |A'S|$; c) $\alpha = \beta'$; d) $|AS| = |SB|$; e) $|AB| = |A'B'|$.[68] Své rozhodnutí si vždy ověřte pomocí nástrojů na liště.**

Pomocí nástroje „Velikost úhlu“ mohou žáci změřit velikost úhlu a ověřit tím, jestli se velikosti rovnají. Nástrojem „Vzdálenost a délka“ změří velikosti stran a další nástroj „Rovnoběžné?“ umožňuje zjistit, zda jsou strany trojúhelníku rovnoběžné.

[67] ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J., cit. (2003), s. 30
[68] ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J., cit. (2004), s. 122

Naměřené veličiny se budou odpovídajícím způsobem měnit, pokud budeme měnit tvar trojúhelníku. Žáci si tak mohou ověřit, že výše napsané vlastnosti platí pro libovolný trojúhelník.

Řešení: a) ano, b) ano, c) ne, d) ne, e) ano.

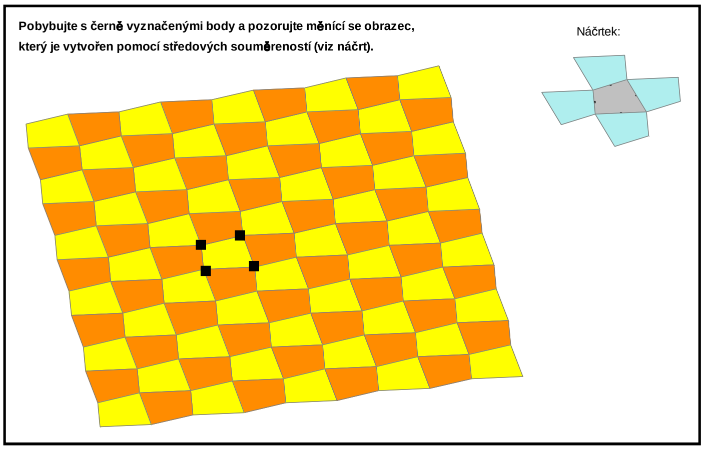



Obrázek 36. Středová souměrnost – úloha 25

## ÚLOHA 26

**Pohybujte s černě vyznačenými body a pozorujte měnící se obrazec, který je vytvořen pomocí středových souměrností (viz náčrt).**[69]

Příklad je vhodný jak pro počáteční motivaci tak i pro procvičování. Šikovní žáci se mohou pokusit vytvořit podobný obrazec. Jako nápověda jim pomůže náčrtek.



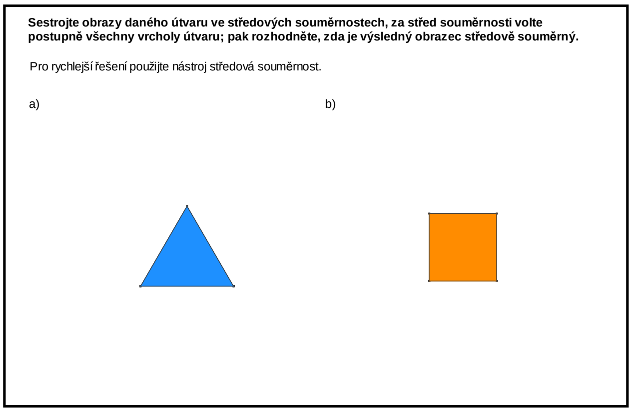

Obrázek 37. Středová souměrnost – úloha 26

[69] BAINVILLE, Erik. *Cabri Geometrie II Plus. Příručka pro uživatele,* s.40

## ÚLOHA 27

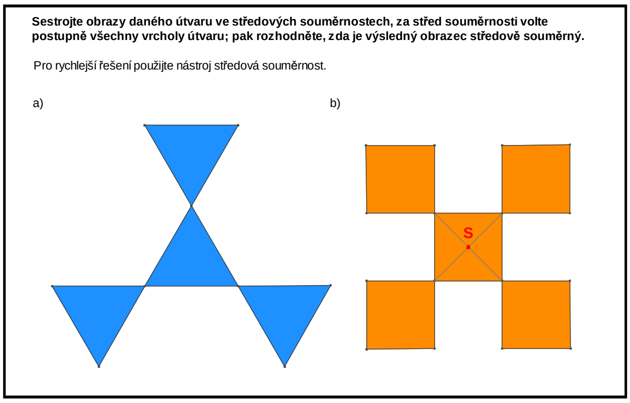
**Zajímavé obrázky**

**Sestrojte obrazy daného útvaru ve středových souměrnostech, za střed souměrnosti volte postupně všechny vrcholy útvaru; pak rozhodněte, zda je výsledný obrazec středově souměrný.[70] Pro rychlejší řešení použijte nástroj středová souměrnost.**




Obrázek 38. Středová souměrnost – úloha 27

Řešení je vidět na obrázku číslo 39. Sestrojený obrazec a) není středově souměrný, obrazec b) je středově souměrný. S úlohou můžeme dále pracovat tak, že najdeme střed souměrnosti a ověříme základní vlastnosti středové souměrnosti podobně jako v úloze 25.



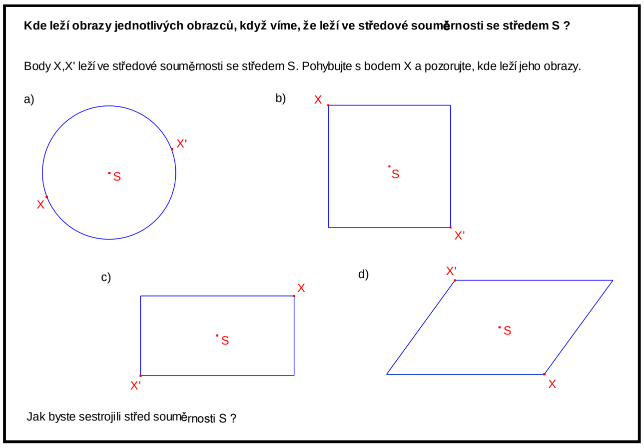

Obrázek 39. Středová souměrnost – řešení úlohy 27

[70] ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J., cit. (2003), s. 28

## ÚLOHA 28

**Kde leží obrazy jednotlivých obrazců, když víme, že leží ve středové souměrnosti se středem $S$ ? Body $X, X'$ jsou souměrně sdružené podle středu $S$.** [71] **Pohybujte s bodem $X$ a pozorujte, kde leží jeho obraz. Jak byl takový střed souměrnosti S nalezen?**

Úloha vede k seznámení s pojmem středově souměrný útvar. Střed souměrnosti je v případě a) střed úsečky $XX'$. V případech b), c), d) jsou středy souměrnosti průsečíky úhlopříček obrazců.



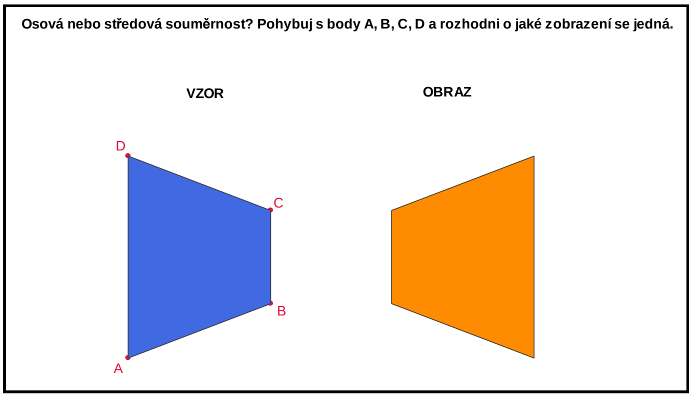

Obrázek 40. Středová souměrnost – úloha 28

## ÚLOHA 29

**Osová nebo středová souměrnost? Pohybuj s body $A, B, C, D$ a rozhodni o jaké zobrazení se jedná.**

Na první pohled se zdá, že obraz a vzor čtyřúhelníku jsou souměrně sdružené podle osy. Pokud ale postupně pohybujeme s body $A, B, C, D$ zjistíme, že se jedná o středovou souměrnost. Úlohu lze dále rozvíjet. Žáci se mohou pokusit sestrojit střed souměrnosti S a správně pojmenovat obraz čtyřúhelníku ($A'B'C'D'$).

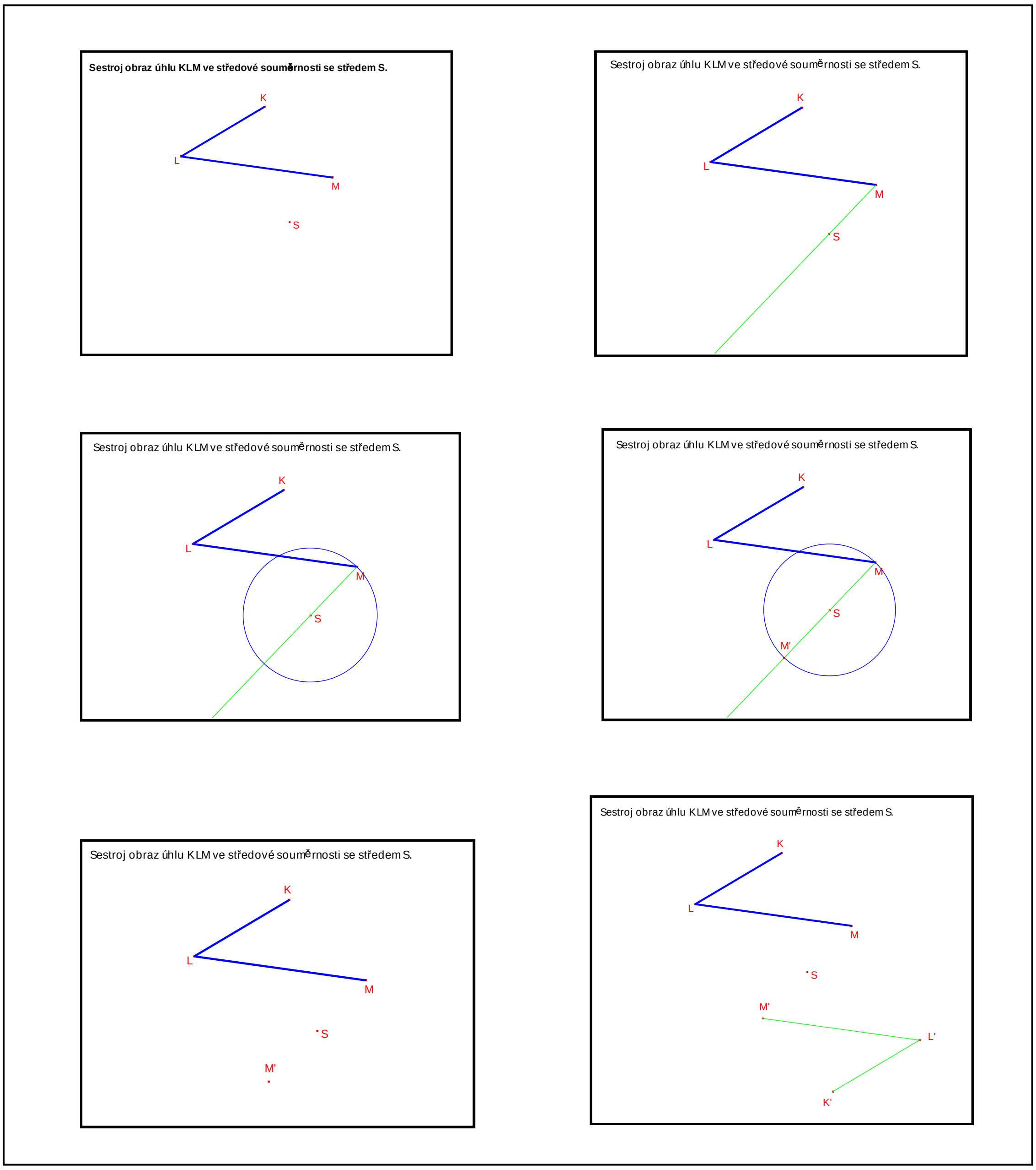
[71] ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J., cit (2003), s. 29




Obrázek 41. Středová souměrnost – úloha 29

Cabri Geometrie může usnadnit učitelům rýsování na tabuli. Konstrukce lze ukládat jako sérii obrázků, jak bylo řečeno v kapitole 3.4. Žákům můžeme promítat jednotlivé kroky konstrukce nebo si žáci mohou prohlížet konstrukci sami. Výhodou oproti rýsování na tabuli je větší přesnost a možnost vrátit jakýkoliv krok zpět, pokud žáci daný krok nepochopí.

Jako příklad zde uvádím jednu úlohu. Sestroj obraz úhlu *KLM* ve středové souměrnosti se středem *S*. Pro znázornění je vidět na obrázku číslo 42 prvních pár kroků a pak až výsledný obrázek.




Obrázek 42. Středová souměrnost – Sestroj obraz úhlu $KLM$

## 3.3. Posunutí

Posunutí neboli translaci lze definovat následovně:

**Definice 15:** *„Translace $t$ je zobrazení prostoru $E_n = \langle A, V_n \rangle$, definované rovností $X' = X + \boldsymbol{a}$, kde $X, X' \in A$, $X' = t(X), \boldsymbol{a} \in V_{\boldsymbol{n}}$ .“* [72]

Směr posunutí určuje vektor $\boldsymbol{a}$ (vektor translace) a jeho velikost $|\boldsymbol{a}|$ je velikost posunutí.

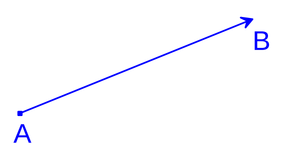
Jinak vypadá definice, která se používá na středních školách nebo případně na školách základních.

**Definice 16:** *„Je dána nenulová orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB}$. Posunutí neboli translace je shodné zobrazení $T(\boldsymbol{AB})$, které každému bodu $X$ přiřadí bod $X'$ tak, že orientované úsečky $\boldsymbol{XX'}$ a $\boldsymbol{AB}$ mají stejnou délku a stejný směr.“* [73]

Zapisujeme $T(\boldsymbol{AB}): X \to X'$. Tento zápis čteme: V posunutí daném orientovanou úsečkou $\boldsymbol{AB}$ přejde bod $X$ do bodu $X'$.

Úsečka, u níž je určeno, který její krajní bod je počáteční bod a který krajní bod je jejím koncovým bodem, se nazývá <u>orientovaná úsečka</u>. Takovou orientovanou úsečku s počátečním bodem A a koncovým bodem B pak značíme v tištěném textu $\boldsymbol{AB}$ a v psaném textu většinou $\overrightarrow{AB}$. Graficky znázorňujeme orientovanou úsečku se šipkou u koncového bodu, jak je vidět na obrázku číslo 39. Velikost orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$ je délka úsečky $AB$ a značíme ji $|\boldsymbol{AB}|$.

Orientovaná úsečka, jejíž délka je rovna nule se nazývá <u>nulová orientovaná úsečka.</u> Nulovou orientovanou úsečkou je bod.




Obrázek 43. Orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB}$

[72] MATYÁŠEK, F., cit. (1995), s. 57
[73] POMYKALOVÁ, E., cit. (2007), s. 139

Velikost orientované úsečky  udává velikost posunutí. Směr posunutí je určen směrem orientované úsečky, který je vyznačen šipkou u koncového bodu. Posunutí je přímou shodností.

Posunutí určené nulovou orientovanou úsečkou je identita a nazývá se posunutím nevlastním.[74] Posunutí určené nenulovou orientovanou úsečkou nemá žádné samodružné body. Samodružné přímky posunutí jsou všechny přímky, které jsou rovnoběžné s orientovanou úsečkou určující posunutí. [75]

Dvě orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{CD}$ určují totéž posunutí v případě, že jsou rovnoběžné, mají stejnou velikost a stejnou orientaci. [76]

Jelikož je posunutí na základní škole pouze rozšiřujícím učivem, je třeba žákům hlavně zdůraznit, že posunutí je určeno směrem posunutí a velikostí posunutí. Vhodné je seznámit žáky s pojmem orientovaná úsečka.

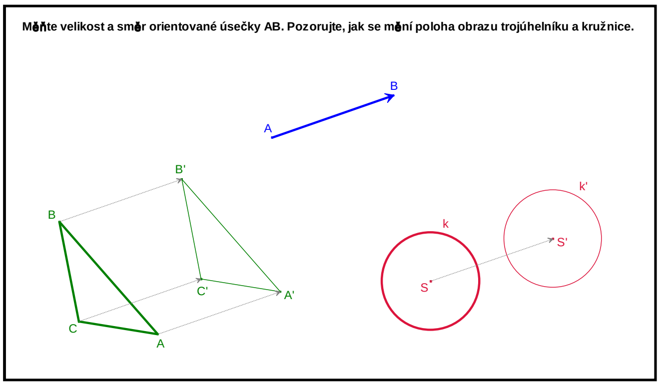
[74] MATYÁŠEK. F., cit. (1995), s. 57
[75] POMYKALOVÁ, E., cit. (2007),  s. 139 - 140
[76] COUFALOVÁ, J., PĚCHOUČKOVÁ, Š., HEJL, J., LÁVIČKA, M. *Matematika pro 7.ročník základní školy*. Praha, 2007,  s. 164

### 3.3.1.Úlohy pro žáky

**ÚLOHA 30**

**Měňte velikost a směr orientované úsečky $AB$. Pozorujte, jak se mění poloha obrazu trojúhelníku a kružnice.**

Dále je možnost měnit i tvar trojúhelníku $ABC$ a velikost poloměru kružnice $k$. Úloha je vhodná pro počáteční seznámení s posunutím.

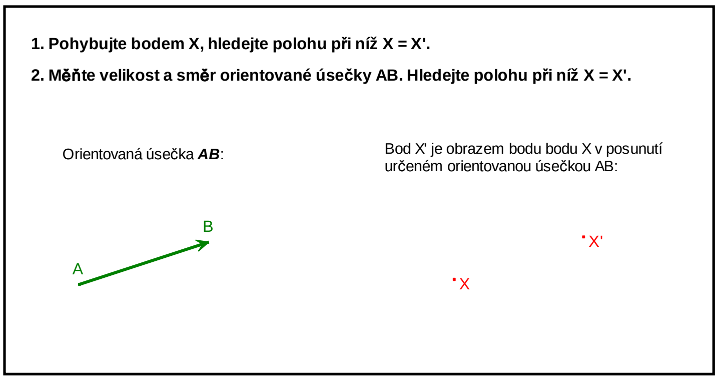



Obrázek 44. Posunutí – úloha 30

**ÚLOHA 31**

**Pobybujte s bodem $X$, hledejte polohu při níž $X = X'$. Potom měňte velikost a směr orientované úsečky $AB$ a hledejte opět polohu při níž $X = X'$.**[77]

Úloha vede k hledání samodružných bodů posunutí. Závěrem této úlohy by mělo být, že posunutí o nenulový vektor nemá žádný samodružný bod.




Obrázek 45. Posunutí – úloha 31

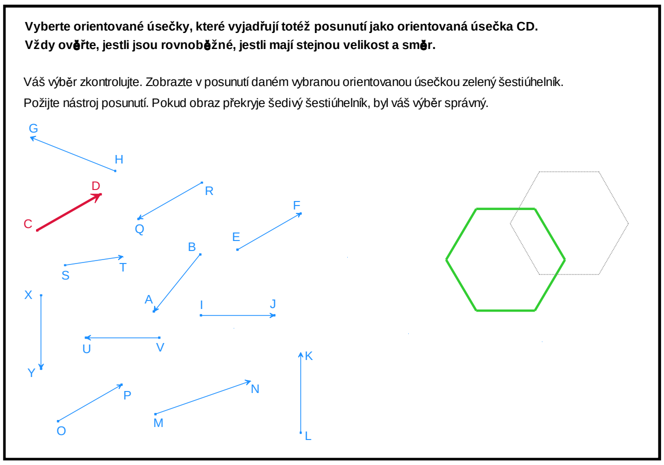
[77] VRBA, A., *Shodná zobrazení v rovině*

## ÚLOHA 32

**Vyberte orientované úsečky, které vyjadřují totéž posunutí jako orientovaná úsečka $CD$. Vždy ověřte, jestli jsou rovnoběžné a jestli mají stejnou velikost a směr.**[78]

**Váš výběr zkontrolujte. Zobrazte v posunutí daném vybranou orientovanou úsečkou zelený šestiúhelník. Použijte nástroj „Posunutí“. Pokud obraz překryje šedivý šestiúhelník, byl váš výběr správný.**

Žáci by měli objevit, že stejné posunutí jako orientovaná úsečka $\boldsymbol{CD}$, vyjadřují pouze orientované úsečky $\boldsymbol{EF}$ a $\boldsymbol{OP}$.



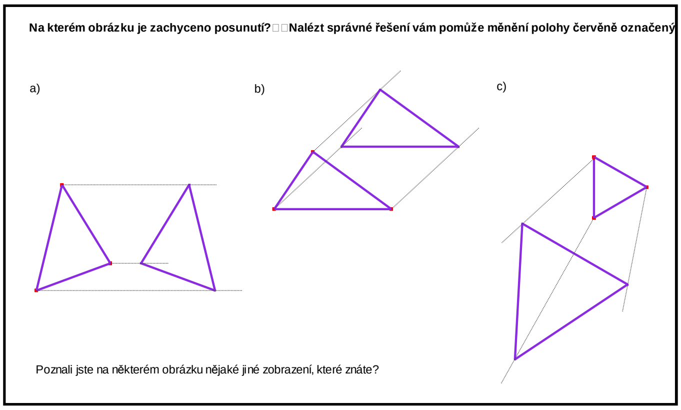

Obrázek 46. Posunutí – úloha 32

## ÚLOHA 33

**Na kterém obrázku je znázorněno posunutí?**[79] **Nalézt správné řešení vám pomůže měnění polohy červeně označených bodů. Poznali jste na některém obrázku nějaké jiné zobrazení, které znáte?**

Posunutí je znázorněno v případě b). Žáci by také měli rozpoznat, že se v případě a) jedná o osovou souměrnost.

[78] COUFALOVÁ, J., PĚCHOUČKOVÁ, Š., HEJL, J., LÁVIČKA, M., cit. (2007), s. 164
[79] tamtéž, s. 166

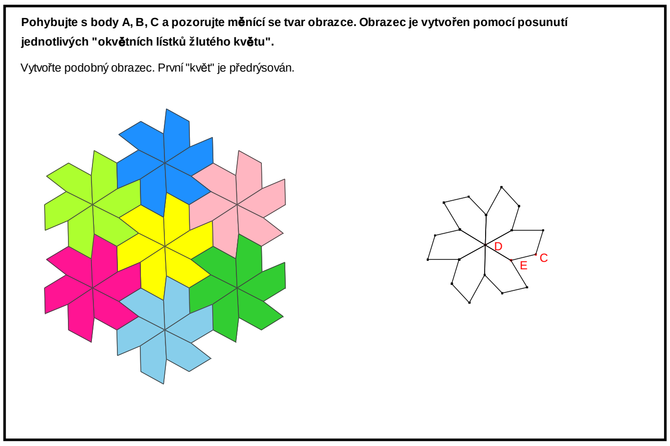



Obrázek 47. Posunutí – úloha 33

## ÚLOHA 34

**Pohybujte s body $A, B, C$ a pozorujte měnící se tvar obrazce. Obrazec je vytvořen pomocí posunutí jednotlivých „okvětních lístků žlutého květu“. Vytvořte podobný obrazec. První „květ“ je předrýsován.**[80]

První část úlohy lze použít jako motivační. Druhá část úlohy je už náročnější a je určena spíše pro zdatnější žáky.




Obrázek 48. Posunutí – úloha 34

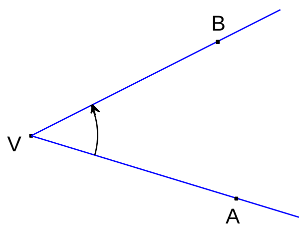
[80] BAINVILLE, E., *Cabri Geometrie II Plus. Příručka pro uživatele*, s.41

## 3.4. Otočení

**Definice 17:** *„Nechť je dán bod $S$ a orientovaný úhel $ASB$. <u>Otočením</u> (rotací) rozumíme zobrazení v rovině, v němž je bod $S$ samodružný a každému bodu $X \neq S$ je přiřazen bod $X'$ tak, že orientovaný úhel $XSX'$ je roven orientovanému úhlu $ASB$ a $|SX| = |SX'|$. Bod $S$ se nazývá střed otočení, orientovaný úhel $ASB$ nazýváme úhel otočení.*[81]

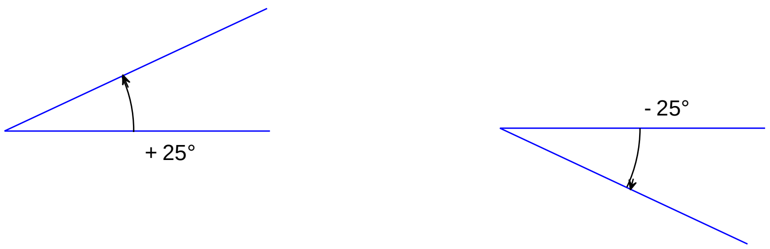
Zapisujeme $R(S, \varphi): X \to X'$. Tento zápis čteme: V otočení kolem středu $S$ o úhel $\varphi$ v kladném/záporném smyslu přejde bod $X$ do bodu $X'$.

<u>Orientovaný úhel</u> je uspořádaná dvojice polopřímek se společným počátkem, kde jedna z polopřímek je počáteční rameno a druhá koncové rameno orientovaného úhlu. Orientovaný úhel s počátečním ramenem VA a koncovým ramenem VB na obrázku znázorňujeme obloukem se šipkou (obrázek 49).[82]




Obrázek 49. Orientovaný úhel $AVB$

Otáčet lze dvěma směry. Buďproti směru hodinových ručiček – v <u>kladném smyslu</u>, nebo ve směru pohybu hodinových ručiček – v <u>záporném smyslu</u> (obrázek 50).




Obrázek 50. Kladný a záporný smysl otáčení

[81] MOLNÁR, J. *Planimetrie.* Olomouc, 2001, s. 92
[82] POMYKALOVÁ, E., cit. (2007), s. 145

Pro velikost úhlu otočení $\varphi = k \cdot 360°$ jsou všechny body roviny samodružné, pro $\varphi \neq k \cdot 360°$ je samodružný pouze střed $S$; pro velikost úhlu otočení $\varphi = k \cdot 360°$ jsou všechny přímky roviny (silně) samodružné, pro velikost $\varphi = (2k - 1) \cdot 180°$ jsou (slabě) samodružné všechny přímky procházející bodem $S$, v ostatních případech ($\varphi \neq k \cdot 360°, \varphi \neq (2k - 1) \cdot 180°$) otočení samodružné přímky nemá. Speciálním případem otočení je středová souměrnost ($\varphi = (2k - 1) \cdot 180°$).[83]

Otočení je na základní škole rozšiřujícím učivem stejně jako posunutí. Žákům je potřeba hlavně předat, že otočení je určeno středem otočení $S$ a úhlem otočení $\varphi$. Také je třeba zdůraznit možné dva směry otáčení – kladný a záporný. S tím souvisí i seznámení s pojmem orientovaný úhel.

[83] DOLEŽAL, J., Základy geometrie, s. 64

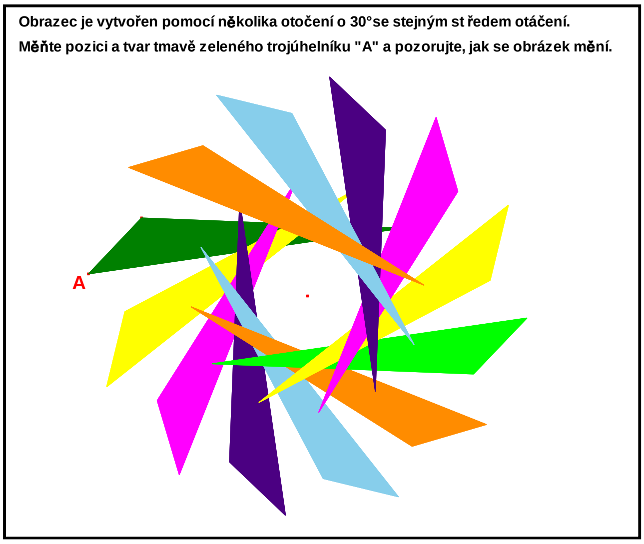
## 3.4.1. Úlohy pro žáky

**<u>ÚLOHA 35</u>**

**Kaleidoskop. Obrazec je vytvořen pomocí několika otočení o 30° se stejným středem otáčení. Měňte pozici a tvar tmavě zeleného trojúhelníku a pozorujte, jak se obrázek mění.**[84]

Obrázek vypadá například zajímavě, když kroužíme jedním z vrcholů trojúhelníku kolem středu kaleidoskopu. Ukázka je vidět na obrázku číslo 51.

Úloha je vhodná pro počáteční motivaci.



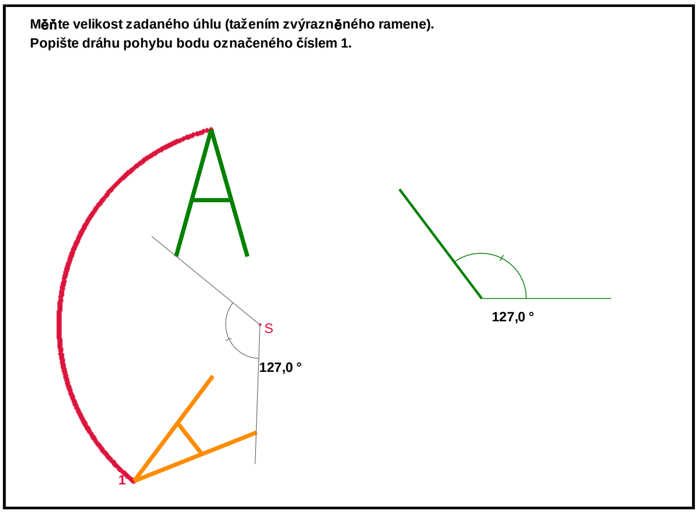

Obrázek 51. Otočení – úloha 35

**<u>ÚLOHA 36</u>**

**Měňte velikost zadaného úhlu (tažením zvýrazněného ramene). Popište dráhu pohybu bodu označeného číslem 1.** [85]

Správný závěr je, že bod označený číslem 1 se pohybuje po kružnici. Svůj závěr si žáci mohou ověřit využitím nástroje „Stopa ano/ne“. Po zaktivování stopy bodu 1 bude vykreslována jeho dráha, pokud budeme opět měnit velikost úhlu otočení. Vykreslení stopy je vidět na obrázku číslo 48.

[84] BONUŠ, Z., *Geometrie živě*
[85] tamtéž

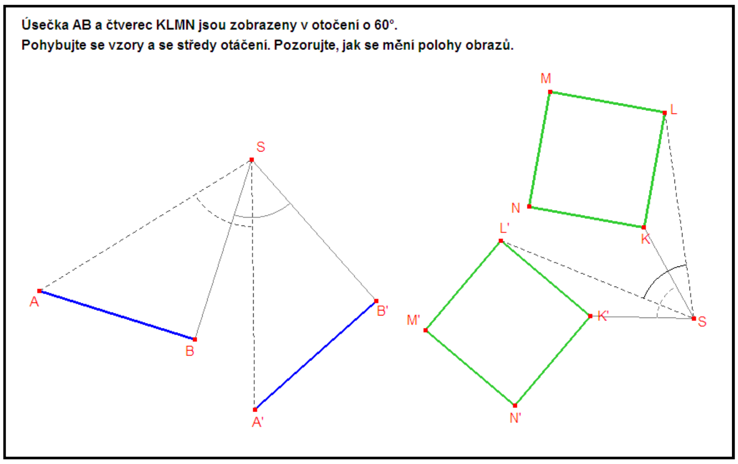



Obrázek 52. Otočení – úloha 36

## ÚLOHA 37

**Úsečka $AB$ a čtverec $KLMN$ jsou zobrazeny v otočení o 60°. Pohybujte se vzory a se středy otáčení. Pozorujte, jak se mění poloha obrazu.**

Úloha napomáhá k upevnění vytvoření správných představ o otočení.




Obrázek 53. Otočení – úloha 37

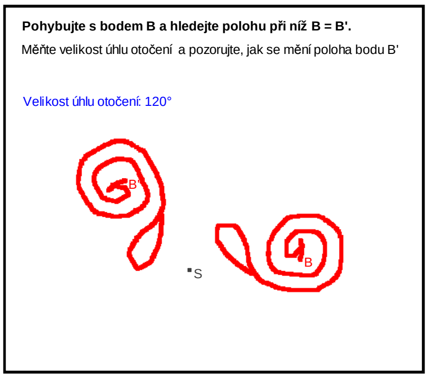
## ÚLOHA 38

**Pohybujte s bodem $B$ a hledejte polohu při níž $B = B'$. Měňte velikost úhlu otočení a pozorujte, jak se mění poloha bodu $B'$.**

Úloha vede k závěru, že jediným samodružným bodem otočení (o nenulový úhel) je střed otočení.

Měnit velikost úhlu otočení lze také nástrojem „Pohyb objektu“. Aplikací tohoto nástroje na velikost úhlu otočení můžeme zajistit automatické měnění velikosti úhlu otočení. Opět vidíme, jak se mění poloha bodu $B'$. Obrázek je jakoby „zanimován“.

Další obměnou této úlohy je zaktivování stop bodů $B$ a $B'$. Pak můžeme pohybováním bodem $B$ kreslit různé tvary, které se budou vykreslovat i v otočení o daný úhel bodem $B'$.




Obrázek 54. Otočení – úloha 38

## <u>ÚLOHA 39</u>

**Petr tvrdí, že středová souměrnost je otočení o $-90°$. Je jeho tvrzení pravdivé?**[86] **Nápověda: sestrojte obrazy trojúhelníku $ABS$ v otočení kolem středu $S$ o -90 stupňů a ve středové souměrnosti se středem souměrnosti $S$. Použijte nástroje „Otočení“ a „Středová souměrnost“.**

**O jaký úhel bychom museli trojúhelník $ABS$ otočit, aby se jednalo o středovou souměrnost?**

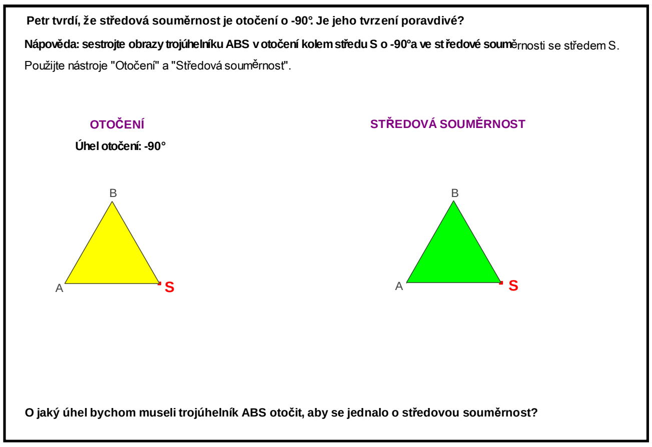
Žáci po sestrojení požadovaných obrazů trojúhelníku $ABS$ zjistí, že středová souměrnost není otočení o $-90°$. V zápětí budou tedy řešit otázku, o jaký úhel musí trojúhelník $ABS$ otočit, aby se jednalo o středovou souměrnost. Objevit řešení jim pomůže „animace“ obrázku. Docílíme jí tak, že dvojklikneme na číslo -90°, kolem čísla se objeví rámeček s dvěma šipkami „nahoru/dolů“. Opakovaným klikáním (nebo přidržením) na jednu ze šipek se bude měnit úhel otočení a tedy i poloha

---

[86] MOLNÁR, J., LEPÍK, L., LIŠKOVÁ, H., SLOUKA, J. *Matematika 7. Pracovní sešit.1.část.* Olomouc, 1999, s. 77

obrazu trojúhelníku $ABS$. Nyní už stačí pohyb obrazu pozorně sledovat a objevit, v jakém případě se středová souměrnost shoduje s otočením.

Závěr žáků by tedy měl být, že aby se jednalo o středovou souměrnost, musíme otočit trojúhelník $ABS$ buď o -180° nebo o 180°.




Obrázek 55. Otočení – úloha 39

# 4. Ověření využitelnosti navržených úloh

Setkala jsem se se šesti učiteli matematiky základních škol (1 učitel, 5 učitelek) a s jednou učitelkou, která učí matematiku na nížším gymnáziu. Délka jejich učitelské praxe byla v šesti případech více než deset let, v jednom případě v rozmezí 5-10 let. Každý rozhovor byl individuální a trval přibližně 60 minut. S vděčností oceňuji, s jakým zájmem se mnou všichni učitelé hovořili. Z každého rozhovoru bylo patrné, že byl přínosem pro obě strany.

## 4.1. Popis průběhu rozhovoru

Rozhovor se skládal ze tří částí:

1. seznámení s Cabri Geometrií;
2. ukázka vybraných úloh a hodnocení jejich využitelnosti ve výuce;
3. závěrečná reflexe učitele.

V první části rozhovoru byla učitelům nejprve položena otázka, zda se už někdy setkali s Cabri Geometrií nebo s jiným podobným programem. Dva dotazovaní odpověděli, že se setkali, ale sami přímo s programem nepracovali. Pět dotazovaných odpovědělo, že se nikdy s Cabri Geometrií ani s žádným podobným programem nesetkali. Z tohoto důvodu bylo potřebné učitele seznámit se základy práce v Cabri. Ukázala jsem jim například vytváření objektů, jejich pojmenovávání, grafickou úpravu objektů atd. V případě jejich zájmu si mohli sami v krátkosti ovládání programu vyzkoušet.

Druhá část, která byla nejobsáhlejší, se týkala přímo tématického celku shodná zobrazení. Vybrala jsem některé úlohy, ukázala je učitelům a oni se k nim poté vyjadřovali a hodnotili jejich využitelnost ve výuce. Dotazovaným byly položeny následující otázky:

1. Umožňuje Cabri Geometrie snadnější vytvoření správných prekonceptů shodných zobrazení než statické obrázky v učebnici?

   Předvedené úlohy: 4, 7, 10, 15, 35

2. Můžeme pomocí Cabri Geometrie podpořit konstruktivistický přístup („učení se děláním“) k vyučování tématického celku shodná zobrazení?
   a) Objev konstrukce bodu v osové souměrnosti.
      Předvedená úloha: 6
   b) Objev samodružných bodů osové souměrnosti.
      Předvedená úloha: 8
   c) Objev os souměrnosti čtverce.
      Předvedná úloha: 11

3. Umožňují vybrané úlohy pro žáky zajímavější způsob procvičování a upevňování učiva než práce s klasickými pomůckami?
   Předvedené úlohy: 13, 18, 25, 27, 29, 36

4. Usnadňuje Cabri Geometrie diskusi o počtu řešení úlohy?
   Předvedená úloha: 14

5. Je výhodné využívat při výuce rýsování v Cabri Geometrii místo rýsování na tabuli?
   a) Promítání předrýsované konstrukce uložené jako série k prohlížení.
      Předvedená úloha: viz obrázek 42
   b) Provádění konstrukce učitelem přímo v hodině.
   c) Provádění konstrukce žáky přímo v hodině.

Ve třetí části rozhovoru učitelé formulovali obecné výhody a nevýhody případného využívání Cabri Geometrie ve výuce. Také mluvili o tom, co konkrétně využívání Cabri na jejich škole brání. Dále mluvili o tom, co jim seznámení s Cabri Geometrií přineslo.

## 4.2. Odpovědi učitelů

Považuji za důležité zmínit, že všechny rozhovory probíhaly ve velmi přátelské atmosféře a že všichni učitelé měli zájem získat nové podněty k výuce geometrie na základních školách, popř. nižších gymnáziích. Nyní budu uvádět v souhrnu jejich odpovědi na jednotlivé otázky z druhé části rozhovoru.

**<u>Odpovědi na otázku č. 1</u>**

Všichni učitelé se shodli, že vybrané úlohy umožnují snadnější vytvoření správných prekonceptů shodných zobrazení než statické obrázky v učebnici. Důležitým faktorem byla dynamičnost a názornost obrázku. Učitelé také zdůrazňovali velký význam motivační. V jednom případě bylo řečeno, že vybrané úlohy mohou sloužit jako vhodný spoj mezi tím, co děti vidí a co rýsují.

**<u>Odpovědi na otázku č. 2</u>**

Všichni učitelé souhlasili, že děti mohou v případě a), b) i c) přijít na mnohé důležité vztahy samy. Z toho pět učitelů se přiklánělo k využití předvedených úloh ve výuce. Jako komplikaci zmiňovali problematické načasování výuky tak, aby měli s žáky přístup do počítačové učebny právě v okamžiku, kdy by bylo potřebné zařadit tyto úlohy do výuky. Z rozhovorů bylo patrné, že přístup do takových učeben je velmi omezený a že učitelé matematiky s velkými obtížemi vybojovávají alespoň jednu hodinu týdně. Další dva učitelé byli proti zařazení vybraných úloh do výuky. Jeden z důvodů časové náročnosti (hlavně v případě a) ) a druhý zastával názor, že klasické pomůcky umožňují téměř totéž.

**<u>Odpovědi na otázku č. 3</u>**

V odpovědi na tuto otázku byli učitelé jednotní. Všem se vybrané úlohy jevily jako velmi vhodné pro procvičování učiva tématického celku shodná zobrazení. Už samotná práce na počítači podle jejich odpovědí děti ve škole hodně baví, a pokud se spojí s vhodnými úlohami, tak může být takové procvičování často velmi efektivní. Čtyři dotazovaní učitelé zdůrazňovali ale zároveň potřebu rýsování a psaní dětí do sešitů, protože ti si stále více zvykají, že různá cvičení jen doplňují apod., a tím se snižuje úroveň jejich písemného a grafického projevu. Jeden dotazovaný učitel viděl v úlohách možnou alternativu, jak „oživit“ volitelný předmět cvičení z matematiky.

**<u>Odpovědi na otázku č. 4</u>**

Předvedená úloha 14 učitele velmi zaujala. Oceňovali, že i slabší žáci mohou díky velké názornosti úspěšně provést diskusi o počtu řešení. Podobně kladně hodnotili vykreslení osy úsečky pomocí stop narýsovaných bodů, tedy ověření odpovědi žáků na položenou otázku.

**Odpovědi na otázku č. 5**

Učitelé se shodli že v případě a) by jim mohla Cabri Geometrie výuku hodně usnadnit. Říkali, že místo rýsování na tabuli by se mohli individuálně věnovat žákům. K vytvoření dalšího kroku konstrukce by stačilo jen zmáčknout jedno tlačítko, což by bylo rozhodně méně časově náročné než narýsování potřebného kroku na tabuli. A právě ten čas, který by učitel věnoval rýsování na tabuli (kdy je ještě otočen k žákům zády), by mohl věnovat pomoci jednotlivým žákům. Podobně hodnotili využití programu v případě b). V případě c) bylo pět z dotazovaných učitelů proti a zdůrazňovali potřebu manuální zručnosti dětí. Souhlasili ale s tím, že by program mohl usnadnit rýsování dětem s některými poruchami učení. Zbylí dva učitelé byly pro, aby děti rýsovaly občas na počítači i v hodině, ale jen za ideálního stavu, že by každé dítě mělo k dispozici svůj počítač.

Výhody využívání Cabri Geometrie ve výuce, které zformulovaly učitelé ve třetí části rozhovoru na základě ukázek vybraných úloh (v závorce je uveden počet učitelů, kteří danou výhodu uvedli) :

- názornost (7);
- dynamika obrázků (7);
- zvyšování motivace (7);
- možnost řešení problémových úloh (3);
- snadnější vytváření geometrické představivosti (6);
- pomoc slabším žákům (2);
- prostor pro samostatný rozvoj velmi šikovných žáků (1);
- pomoc pro vyučujícího (7).

Nevýhody jako takové učitelé neobjevili, spíše mluvili o tom, že škola nemá dostatečné technické zázemí, aby se dala Cabri Geometrie nebo program jí podobný ve výuce efektivně využít. Jako problém byl viděn i fakt, že se děti musí program nejprve naučit ovládat a na to v hodinách matematiky čas není. Když jsem ale navrhla možnost, že by se děti naučily v programu pracovat v rámci výpočetní techniky, tak učitelé souhlasili, že by to mělo být možné. Všichni dotazovaní učitelé mluvili také o tom, že jim samotným by zabralo hodně času se s programem seznámit a že na to nemají ve velkém množství školních povinností dostatek času. Čtyři z dotazovaných projevili zájem o další informace o Cabri Geometrii a programy jí podobné a vypadali rozhodnutě, že se chtějí s nějakým z těchto programů blíže seznámit a začlenit jeho využívání do výuky matematiky.

# Závěr

Záměrem této práce bylo poskytnout učitelům základní informace o matematickém didaktickém softwaru Cabri Geometrie a vytvořit v něm soubor úloh, který by žákům pomohl usnadnit vhled do problematiky shodných zobrazení. Je důležité znovu zmínit, že úlohy vytvořené v této práci zdaleka nepokrývají veškeré možnosti využití Cabri Geometrie. Jsou spíše motivační pozvánkou pro další práci v Cabri Geometrii jak pro učitele, tak pro žáky. Na druhou stranu je třeba říci, že úlohy byly vytvořeny tak, aby je bylo možné použít v různých částech výuky (motivace, výklad nové látky, procvičování), takže poskytují učitelům dostatečně široký prostor k různému využití při vyučování.

Dnešní děti vyrůstají v době, ve které je pro ně práce na počítači samozřejmostí a zábavou. Bohužel mnohdy jsme svědky smutných obrazů, ve kterých děti tráví většinu svého volného času u počítače nevhodným způsobem. Jednou z možností, jak vhodně využít přirozený zájem dětí o práci na počítači, je seznamovat je ve školách s didaktickými programy, které jim umožní prohloubit své školní poznatky a zároveň zefektivní využití jejich volného času stráveného u počítače. Takovou možnost nabízí právě Cabri Geometrie. Pokud tedy práce s počítačem děti baví, tak by dalším pozitivním důsledkem využití Cabri ve výuce mohlo být, že by děti začala více bavit matematika samotná (v našem případě geometrie).

Věřím, že učitelé matematiky nikdy neztratí touhu hledat nové způsoby, jak dětem přiblížit svět matematiky, aby se pro ně stal srozumitelným a zajímavým. Pomocí jim může být i právě tato příručka.

# Použitá literatura:


1. BAINVILLE, E. *Cabri Geometrie II Plus. Příručka pro uživatele* [online]. Cabrilog S.A.S., 2002. [cit. 6.prosince 2008]. Dostupné na internetu: <http://www.pf.jcu.cz/cabri/materialy.htm>

2. BONUŠ, Z. *Geometrie živě* [online]. Dostupné na internetu: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/cabri/index.php>

3. BUDINSKÝ, B. *Matematika pro vysoké školy technické. Analytická a diferenciální geometrie.* Praha: SNTL, 1983. ISBN 04-005-83

4. COUFALOVÁ, J., PĚCHOUČKOVÁ, Š., HEJL, J., LÁVIČKA, M. *Matematika pro 7.ročník základní školy.* Praha: Fortuna, 2007. ISBN 978-80-7168-993-5

5. DOLEŽAL, J. *Základy geometrie.* [online]. [cit. 15.ledna 2008]. Dostupné na internetu: <http://class.pedf.cuni.cz/strom/archiv-geometrie-stereometrie.html>

6. HERMAN, J., CHRÁPAVÁ, V., JANČOVIČOVÁ, E., ŠIMŠA, J. *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií. Osová a středová souměrnost.* Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-85849-73-9

7. LÁVIČKA, M. *Možnosti dynamické geometrie ve školách.* In *Počítačem podporovaná výuka matematiky a příprava didaktického experimentu. Sborník ze semináře kateder matematiky fakult připravující učitele matematiky.*Rybník u Poběžovic 1998

8. MOLNÁR, J. *Planimetrie.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2001. ISBN 80-244-0370-6

9. MOLNÁR, J., KOPECKÝ, M., LIŠKOVÁ, H., NOVÁK, B., SLOUKA, J. *Matematika 6*. Olomouc: Prodos, 1998. ISBN 80-7230-000-8

10. MOLNÁR, J., LEPÍK, L., LIŠKOVÁ, H., SLOUKA, J. *Matematika 7.* Olomouc: Prodos, 1999. ISBN 80-7230-031-8

11. MOLNÁR, J., LEPÍK, L., LIŠKOVÁ, H., SLOUKA, J. *Matematika 7. Pracovní sešit.1.část.* Olomouc: Prodos, 1999. ISBN 80-7230-033-4

12. ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Matematika pro7.ročník základní školy, 3.díl.* Praha: Prometheus, 2003. ISBN 80-7196-129-9

13. ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Pracovní sešit z matematiky. Soubor úloh pro 7. Ročník základní školy.* Praha: Prometheus, 2004. ISBN 80-7196-287-2

14. POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: SPN, 1980. ISBN 14-074-80

15. POMYKALOVÁ, E. *Matematika pro gymnázia. Planimetrie.* Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-174-1

16. SLOUKA, J. *Geometrie pro 5.-9. Ročník ZŠ a nižší třídy víceletých gymnázií.* Olomouc: FIN, 1993. ISBN 80-85572-53-2

17. VANÍČEK, J. *Cabri geometrie* [online]. [cit. 6.prosince 2008]. Dostupné na internetu: <http://www.pf.jcu.cz/cabri/materialy.htm>

18. VANÍČEK, J. *Dynamická geometrie* [online]. [cit. 31.prosince 2008]. Dostupné na internetu: <http://www.pf.jcu.cz/cabri/temata/dynamgeo/dyngeo.htm>

19. VANÍČEK, J. *Metodika použití dynamické geometrie při vyučování na ZŠ a SŠ* [online]. [cit. 6.prosince 2008]. Dostupné na internetu: <http://www.pf.jcu.cz/cabri/metodika/index.html>

20. VRBA, A. *Geometrie na počítači* [online]. Pedagogická fakulta UK v Praze, 2004. [cit. 6.prosince 2008]. Dostupné na internetu: <http://www.pf.jcu.cz/p-mat/>

21. VRBA, A. *Shodná zobrazení v rovině* [online]. Dostupné na internetu: <http://www.pf.jcu.cz/cabri/temata/SHODZOBR/index.html#urceni>

## Příloha CD

CD obsauje úlohy 2-39 zpracované v Cabri Geometrii. Jsou rozřazeny do pěti složek, jak je vidět níže. U každé úlohy zde uvádím číslo stránky, na které se nalézá.

## Seznam obrázků

# ANOTACE

| | |
|---|---|
| **Jméno a příjmení:** | Pavla Svobodová |
| **Katedra:** | Matematiky |
| **Vedoucí práce:** | Mgr. Radka Dofková, Ph.D. |
| **Rok obhajoby:** | 2009 |

| | |
|---|---|
| **Název práce:** | Vizualizace shodných zobrazení pomocí Cabri Geometrie na základní škole |
| **Název v angličtině:** | The visualization of congruent transformations by Cabri Geometry at the elementary school |
| **Anotace práce:** | Diplomová práce seznamuje s matematickým didaktickým softwarem Cabri Geometrie a s možnostmi jeho využití na ZŠ. Jako názorná ukázka využití Cabri Geometrie je zde zpracován tématický celek shodná zobrazení a k němu vytvořen soubor úloh.V závěrečné části práce jsou uvedeny názory učitelů na využitelnost navržených úloh. K práci je přiloženo CD, které obsahuje vytvořené úlohy. Diplomová práce je prací didaktickou a zabývá se didaktikou matematiky. |
| **Klíčová slova:** | Cabri geometrie, shodná zobrazení, úlohy |
| **Anotace v angličtině:** | The diploma thesis introduces us Cabri Geometry, a mathematical didactic software, and its possible uses at the elementary school. A topical unit of congruent transformations with a collection of exercises serves as a practical demonstration of use of Cabri Geometry. In the closing section of the thesis there are some teachers´opinions about usefulness of the designed exercises. As an enclosure, the thesis contains a CD with exercises. The diploma thesis is a didactic work and deals with the didactics of mathematics. |

| | |
|---|---|
| **Klíčová slova v angličtině:** | Cabri Geometry, congruent transformations, exercises |
| **Přílohy vázané v práci:** | |
| **Rozsah práce:** | 66 stran |
| **Jazyk práce:** | čeština |