

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Univerzální Feigenbaumovy konstanty



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí bakalářské práce: **prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc.**

Vypracoval(a): **Rostislav Abraham**

Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika

Studijní obor: Matematika – ekonomie se zaměřením na bankovníctví/pojišťovnictví

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2022

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Rostislav Abraham

Název práce: Univerzální Feigenbaumovy konstanty

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: prof. RNDr. dr. hab. Jan Andres, DSc.

Rok obhajoby práce: 2022

Abstrakt: Cílem je rekonstrukce výpočtu univerzálních Feigenbaumových konstant u standardních dynamických modelů (logistický model, Verhulstův model, atd.). Na historickém pozadí by měla být naznačena podstata odvození dynamických modelů, proces zdvojování periody na cestě k deterministickému chaosu a role Feigenbaumových konstant popisujících „rychlost“ k mezní bifurkační hodnotě, reprezentující prahovou hodnotu pro chaos.

Klíčová slova: Feigenbaumova konstanta, bifurkace, bifurkační diagram, logistická rovnice, Verhulstův model

Počet stran: 41

Počet příloh: 1

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Rostislav Abraham

Title: Universal Feigenbaum constants

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc.

The year of presentation: 2022

Abstract: The goal of this thesis is to reconstruct calculations of Feigenbaum constants in standard dynamical models (logistic model, Verhulst's model, etc.). On historical background there should be indicated the principle of deriving dynamical models, the process of period doubling on the way to deterministic chaos and the role of Feigenbaum constants that represent "speed" to its limiting bifurcation value, representing the threshold value for chaos.

Key words: Feigenbaum constant, bifurcation, bifurcation diagram, logistic equation, Verhulst's model

Number of pages: 41

Number of appendices: 1

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením pana prof. RNDr. dr hab. Jana Andrese, DSc. a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne
.....
podpis

Obsah

Úvod	7
1 Životopisné informace	8
1.1 Mitchell Jay Feigenbaum	9
1.2 Pierre François Verhulst	10
2 Historie Feigenbaumových konstant	11
3 Modely	13
3.1 Jupyter Notebook	13
3.2 Důležité pojmy	14
3.3 Algoritmus výpočtů	17
3.4 Původní Feigenbaumem zkoumaná kvadratická rovnice	18
3.4.1 Rovnovážné body	19
3.4.2 2–cykly	20
3.4.3 Další cykly	22
3.5 Logistická rovnice	24
3.5.1 Rovnovážné body	24
3.5.2 2–cykly	27
3.5.3 Další cykly	29
3.6 Verhulstův model	30
3.6.1 Rovnovážné body	31
3.6.2 2–cykly	32
3.6.3 Další cykly	34
Závěr	36
Seznam obrázků a grafů	38
Seznam tabulek	38
Přílohy	39
Literatura	40

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu své bakalářské práce prof. RNDr. dr hab. Janu Andresovi, DSc. za trpělivost, ochotu, vstřícnost a profesionalitu na konzultačních hodinách a za cenné rady při psaní této práce. Dále bych rád poděkoval RNDr. Jiřímu Fišerovi, Ph.D. za pomoc s výpočetní stránkou problematiky a za pomoc se sázecím editorem \TeX .

Úvod

K různým odvětvím matematiky se někdy váží známá čísla, která jsou pro tato odvětví důležitá a často se například objevují ve výpočtech. Tato čísla mají nějaké specifické vlastnosti a jsou vždy nějakým způsobem krásná. Tato krása může být podmíněna tím, že mohou být např. iracionální (mají nekonečný neperiodický desetinný rozvoj), popřípadě někdy i transcendentní (nejsou řešením rovnice s racionálními koeficienty). V geometrii to je například Ludolfovo číslo $\pi = 3,14159\dots$, které vyjadřuje vztah mezi obvodem a průměrem kruhu, v diferenciálním a integrálním počtu to je Eulerovo číslo $e = 2,718\dots$, které se dá definovat například limitou a je základem přirozeného logaritmu. V přírodě také můžeme pozorovat zlatý řez $\phi = 1,618\dots$, který určitě dobře znají nejen nadšenci pro umění a fotografování.

Na konci 20. století se ale vynořila další, do té doby neznámá, konstanta. Tuto konstantu poprvé objevil Mitchell Feigenbaum a její krása spočívá v univerzalitě napříč různými diskrétními dynamickými modely. Označil ji symbolem δ a její hodnota je $4,6692\dots$

V této práci si uvedeme, co tato konstanta představuje a pokusíme se spočítat přibližnou hodnotu této konstanty. Omezíme se na vyšetřování tří modelů. Více jich volíme samozřejmě proto, abychom mohli pozorovat již zmíněnou univerzalitu (stejně hodnoty napříč různými a často velice odlišnými modely). Ukážeme si, co tato konstanta představuje a jak by se dala spočítat. Existuje i Feigenbaumova konstanta α , která je také univerzální. Té se ale v této práci věnovat nebudeme. Pozornost bude samozřejmě věnována i dvěma osobnostem spojeným s problematikou dynamických systémů a také krátké historii Feigenbaumovy konstanty.

Kapitola 1

Životopisné informace

V první kapitole si představíme objevitele konstant Mitchella Jay Feigenbauma a uvedeme několik informací o jeho působení ve vědecké sféře. Zmíníme se i o jeho prvním modelu, díky kterému později začal pozorovat univerzalitu těchto svých konstant.

Představíme také Pierra François Verhulsta, belgického matematika a statistika, který představil diskrétní dynamický systém popisující vývoj populace – Verhulstův model. Ve své době ale Verhulst ještě netušil, že o více než století později povede další studium jeho modelu ke vzniku nového vědeckého odvětví, kterým je teorie chaosu.

1.1. Mitchell Jay Feigenbaum

Mitchell J. Feigenbaum (1944-2019) byl americký fyzik a matematik, který přinesl mnoho nových objevů do různých oblastí vědy od kardiologie až po kartografii. Narodil se 19. prosince 1944 v pensylvánské Filadelfii a zemřel v New Yorku 30. června 2019 na infarkt myokardu ve věku 74 let. Byl vyučujícím na několika amerických univerzitách (Cornell ve městě Ithaca, Virginia Tech v Blacksburgu a Rockefeller v New Yorku). Vedle ostatních úspěchů byl jedním z prvních, který objevil, že mnoho fyzikálních systémů vykazuje zdvojování period, které vede k chaosu, čímž se spolupodílel na vzniku vědy, která se nyní označuje jako teorie chaosu (viz např. [1]). Populární formou je osobnost M. J. Feigenbauma a jeho vlivu popsána v knize [2].

Toto pozorování učinil v roce 1978 ve své studii kvadratických funkcí ve tvaru $f_\mu(x) = 1 - \mu x^2$ pro $x \in [-1; 1]$ a $\mu \in [0; 2]$ a objevil pozoruhodné konstanty α a δ . Později dokázal, že se tyto konstanty váží ke všem 1-rozměrným nelineárním unimodálním zobrazením (s jedním maximem) (viz např. [3],[4]).



Obrázek 1.1: Mitchell Feigenbaum, fyzik a průkopník teorie chaosu [1]

1.2. Pierre François Verhulst

Pierre F. Verhulst (1804-1849) byl belgickým matematikem a statistikem, který se zabýval především populačními dynamikami a přinesl do této oblasti mnoho nových poznatků. Narodil se 28. října 1804 v Bruselu a zemřel 15. února 1849 v Bruselu ve věku 44 let. Narodil se do bohaté rodiny, díky čemuž dosáhl kvalitního vzdělání na prestižních školách. Jeho spolužákem byl Joseph Plateau (další známý belgický fyzik a matematik), s kterým Verhulst vedl rozsáhlé matematické diskuze (viz např. [5]).

V roce 1844 představil v *Mémoires de l'Académie* svůj model pro populaci s omezenými zdroji za předpokladu nulové emigrace i imigrace. Účelem jeho práce bylo odhadnout, jak se bude vyvíjet mladá belgická populace a jaká je hranice pro její velikost s určitými omezenými zdroji (viz např. [6]).



Obrázek 1.2: Pierre Verhulst, belgický matematik a statistik [5]

Kapitola 2

Historie Feigenbaumových konstant

Feigenbaumovo zkoumání iterací funkcí začalo okolo roku 1975, kdy své výpočty prováděl ještě na kalkulačce. Základní myšlenka byla jednoduchá. Zvolit parametr μ , počáteční hodnotu x_0 a iterovat funkci $\mu x(1 - x)$. Feigenbaum takto začal tvořit iterační grafy. Začal si všímat i zdvojování period, a proto sestrojil bifurkační diagram. Zaznamenal, že bifurkační hodnoty se řídí nějakým pravidlem, a dopočítal se k hodnotě $4,669\dots$. Překvapující pro něj byl ale fakt, že ke stejné hodnotě se dostal i iterováním jiné funkce. Tuto funkci zmínil jeho přítel Paul Stein, který si všiml, že ke zdvojování periody nedochází jen u logistické rovnice, ale i u dalších funkcí s jedním maximem na úsečce. A tak začal Feigenbaum zkoumat funkci $\sin(x)$. Hodnoty nebyly jen podobné, Feigenbaum se vždy dostal ke stejné hodnotě ($4,669\dots$) (viz [7]). V průběhu několika týdnů objevil, že číslo δ se zdá být univerzální pro všechny funkce s jedním maximem. Feigenbaum začal cestovat po světě a prezentovat svoje výsledky, vědecká komunita byla ale skeptická. Neexistoval totiž důkaz, který by potvrdil univerzalitu této konstanty. Pokusil se svoje výsledky poslat do vědeckých časopisů, ale neuspěl. Nebylo to ale moc překvapující, jelikož tato část matematiky nebyla v té době moc zkoumána a nové objevy byly často odmítány (viz [7]).

Až v roce 1977 Feigenbaumův přítel Joel Lebowitz, který byl editorem pro Journal of Statistical Physics, souhlasil s publikací Feigenbaumových výsledků, přestože jim moc nerozuměl. Feigenbaum pokračoval v cestách po světě, ale vědecká komunita byla stále skeptická. V roce 1977 nezávisle na Feigenbaumovi pozorovali tuto konstantu δ i Grossmann a Thomas a v létě roku 1979 ji pozoroval i Albert Libchaber v Paříži, který oznámil výsledky fyzikálního pokusu týkajícího se turbulencí v tekutém heliu. Libchaber pozoroval zdvojování periody a stejnou hodnotu, jakou vypočítal Feigenbaum (4,669...). Feigenbaumova konstanta se nyní neobjevovala pouze v matematických systémech, ale i v reálných fyzikálních experimentech (viz např. [3],[7]).

Feigenbaum se brzy stal známou osobností. Byly mu nabízeny velice dobré podmínky práce a v roce 1982 se vrátil na univerzitu Cornell jako profesor fyziky. Matematická komunita ale stále nebyla uspokojena, jelikož neexistoval důkaz univerzálnosti. Kompletní důkaz univerzálnosti Feigenbaumovy konstanty δ byl publikován až o celou dekádu později (viz např. [7]).



Obrázek 2.1: Mitchell Feigenbaum ve stáří v New Yorku [7]

Kapitola 3

Modely

Existuje velké množství různých jednodimenzionálních i vícedimenzionálních modelů dynamických systémů, avšak zde se budeme věnovat pouze těm diskrétním jednodimenzionálním, které budou popsány kvadratickými unimodálními funkcemi. U těchto modelů lze pozorovat bifurkace (v našem případě zdvojování periody), spočítat bifurkační hodnoty a také vypočítat určité poměry rozdílů těchto hodnot. Posloupnost těchto poměrů by se měla blížit k Feigenbaumově konstantě δ .

3.1. Jupyter Notebook

Všechny výpočty a grafy byly zpracovány v prostředí Jupyter Notebook, které je jedním z programovacích produktů vytvořených neziskovou organizací Project Jupyter. Využito bylo programovacího jazyku Python 3, Jupyter podporuje ale i další jazyky, mezi které patří například Julia, R, Ruby a další. Hlavní výhodou Jupyter Notebooku je to, že není potřeba stahovat žádný program a vše běží přes internetový prohlížeč. Pokud byste chtěli ale pracovat i offline, tak samozřejmě není problém program stáhnout a výpočty poběží lokálně, výpočetní výkon ale bude záležet na specifikacích vašeho přístroje (viz [8]).

Existují i další webová prostředí, některá jsou placená (často získáte větší výpočetní výkon), jiná jsou zadarmo. Mezi nejznámější patří například Binder či Kaggle.

3.2. Důležité pojmy

Na začátek této kapitoly je důležité si definovat několik základních pojmů, jelikož je v průběhu práce budeme často používat.

Definice 1 (*k*-tá iterace). Necht' $f_\mu : I \rightarrow I$, kde $I \subset \mathbb{R}$ značí interval, je spojitá funkce proměnné x s reálným parametrem μ . Její *k*-tou iteraci získáme tak, že funkci f_μ složíme *k*-krát samu se sebou:

$$f_\mu^k = \underbrace{f_\mu \circ \dots \circ f_\mu}_{k\text{-krát}}.$$

Necht' $x_k = f_\mu^k(x_0)$ značí *k*-tou iteraci funkce f_μ v bodě x_0 .

Definice 2 (periodický a pevný bod funkce (viz např. [13])). Bod x je *periodický bod* funkce f s periodou n (*n*-periodický bod), jestliže:

$$f^n(x) = x \wedge f^j(x) \neq x \text{ pro } 0 < j < n$$

(n je nejmenší perioda).

Periodickým bodům s periodou 1 ($f(x) = x$) říkáme *pevné body*.

Poznámka 1. Pevné body funkce $f_\mu(x)$ najdeme jako řešení rovnice $f_\mu(x) = x$. Periodické body funkce $f_\mu(x)$ s periodou n najdeme jako řešení rovnice $f_\mu^n(x) = x$, kde f_μ^n označuje *n*-tou iteraci funkce f_μ , přičemž je potřeba ověřit, že n je minimální perioda.

Definice 3 (*n*-cyklus (viz např. [13])). Posloupnost bodů $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ pro *n*-periodický (kde n je nejmenší perioda) bod x funkce f nazveme *n*-cyklus. Číslo n označuje počet různých bodů, které *n*-cyklus obsahuje.

Definice 4 (rovnovážný bod (viz např. [11])). Bod x^* budeme nazývat *rovnovážný bod* diferenční rovnice $x_{n+1} = f_\mu(x_n)$, jestliže je pevným bodem zobrazení f_μ , tj. $f_\mu(x^*) = x^*$.

Definice 5 (unimodální zobrazení). *Unimodálním zobrazením* nazveme zobrazení, které nabývá lokálního maxima pouze v jednom bodě.

Definice 6 (bifurkace (viz např. [13])). Nechť $f_\mu : I \rightarrow I$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je spojitá funkce proměnné x s reálným parametrem μ . Řekneme, že došlo k *bifurkaci*, pokud dojde k náhlé kvalitativní změně v chování orbit (cyklů) funkce. Hodnotu parametru μ , ve které dojde k i -té bifurkaci, označíme $\mu_i, i \in \{0, 1, \dots\}$ a nazveme ji i -tou *bifurkační hodnotou*. Speciálním případem bifurkace je *proces zdvojování periody*, kdy dojde k výskytu nového 2^k -cyklu pro $k \in \mathbb{N}$.

Definice 7 (bifurkační diagram). *Bifurkační diagram* je grafickým znázorněním procesu bifurkace.

Definice 8 (Feigenbaumova konstanta δ). Nechť $f_\mu : I \rightarrow I$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je spojitá funkce proměnné x s reálným parametrem μ . Nechť její bifurkační hodnoty (v tomto případě jsou myšleny bifurkace typu zdvojování periody) jsou čísla μ_0, μ_1, \dots . *Feigenbaumovu konstantu* δ definujeme jako poměr délek po sobě jdoucích intervalů, na kterých má funkce asymptoticky stabilní 2^n a 2^{n+1} -cyklus pro $n \rightarrow \infty$. Limitou to lze zapsat následovně:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n-1} - \mu_{n-2}}{\mu_n - \mu_{n-1}} = \delta = 4,6692 \dots$$

Definice 9 (stabilní a nestabilní bod (viz např. [11])). (a) Rovnovážný bod x^* rovnice $f_\mu(x_n) = x_{n+1}$ je *stabilní*, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|x_0 - x^*| < \delta$ implikuje $|f_\mu^n(x_0) - x^*| < \epsilon$ pro všechna $n > 0$. Jestliže x^* není stabilní, potom jej nazýváme *nestabilní*.

(b) Bod x^* nazýváme *přitažlivý*, jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že

$$|x_0 - x^*| < \eta \text{ implikuje } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

(c) Bod x^* je *asymptoticky stabilní rovnovážný bod*, jestliže je stabilní a přitažlivý.

Uvedeme si i několik důležitých vět, které v průběhu práce několikrát využijeme:

Věta 1 (viz např. [11, Věta 3.1]). *Nechť x^* je rovnovážným bodem diferenční rovnice $x_{n+1} = f_\mu(x_n)$, kde f_μ je spojitě diferencovatelná v x^* . Potom jsou pravdivé následující výroky:*

(i) *Jestliže $|f'_\mu(x^*)| < 1$, potom je x^* asymptoticky stabilní.*

(ii) *Jestliže $|f'_\mu(x^*)| > 1$, potom je x^* nestabilní.*

Věta 2 (viz např. [11, Věta 4.4]). *Nechť $\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$ je k -cyklus spojitě diferencovatelné funkce f_μ . Potom jsou pravdivé následující výroky:*

(i) *k -cyklus je asymptoticky stabilní, jestliže:*

$$|f'_\mu(x_0)f'_\mu(x_1) \cdots f'_\mu(x_{k-1})| < 1$$

(ii) *k -cyklus je nestabilní, jestliže:*

$$|f'_\mu(x_0)f'_\mu(x_1) \cdots f'_\mu(x_{k-1})| > 1$$

Věta 3 (viz např. [11, Věta 3.2]). *Předpokládejme, že rovnovážný bod x^* diferenční rovnice $x_{n+1} = f_\mu(x_n)$ má $f'_\mu(x^*) = 1$. Potom platí následující tvrzení:*

(i) *Jestliže $f''_\mu(x^*) \neq 0$, potom je x^* nestabilní.*

(ii) *Jestliže $f''_\mu(x^*) = 0$ a $f'''_\mu(x^*) > 0$, potom je x^* nestabilní.*

(iii) *Jestliže $f''_\mu(x^*) = 0$ a $f'''_\mu(x^*) < 0$, potom je x^* asymptoticky stabilní.*

3.3. Algoritmus výpočtů

Pro jednotlivé modely vždy počítáme několik bifurkačních hodnot. Není jich mnoho, protože obtížnost výpočtu narůstá s rostoucí periodou bodů cyklu a zvyšuje se potřebný počet desetinných míst. První dvě bifurkační hodnoty jsou vždy spočítány analyticky, zbytek byl vypočítán pomocí opakované iterace.

U modelu (3.2) a (3.4) se vždy zvolila nějaká počáteční hodnota μ (o něco větší než předchozí bifurkační hodnota), spočítalo se určité množství iterací a ověřilo se, zda cyklus obsahuje 2^n -periodické nebo 2^{n+1} -periodické body (podle definice 2 pro periodické body). Pokud cyklus obsahoval 2^n -periodické body, tak se o nějakou malou hodnotu navýšil parametr μ a proces pokračoval znova, dokud nebyla splněna podmínka, že cyklus obsahuje 2^{n+1} -periodické body. Hodnota příslušného μ potom byla označena jako bifurkační hodnota. Výpočet pro model (3.3) byl o něco sofistikovanější a počítalo se pomocí metody fungující na principu bisekce. Nejdříve jsme odhadli aspoň hrubě hodnoty pomocí metody stejné jako pro ostatní modely. Potom jsme vzali dvě hodnoty parametru μ , pro první (menší) byly body 2^n -periodické a pro druhou (větší) 2^{n+1} -periodické. Potom jsme spočítali průměr těchto μ a provedli iterační proces. Pokud pro průměrné μ vznikly 2^n -cykly, tak jsme nahradili průměrnou hodnotou μ hodnotu prvního (menšího) μ , pokud vznikly 2^{n+1} -cykly, tak jsme nahradili druhou (větší) hodnotu μ . Takto jsme se přibližovali bifurkační hodnotě do doby, než první μ bylo dostatečně blízko k druhému μ (požadovaná vzdálenost se různí pro různé cykly). Tento postup přispěl k razantnímu zvýšení rychlosti výpočtu. Všechny tyto postupy lze konkrétně dohledat v kódu v příloze na CD.

3.4. Původní Feigenbaumem zkoumaná kvadratická rovnice

Mitchell Feigenbaum ve své publikaci *The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations* z roku 1979 [9], zkoumající dynamické chování funkce

$$f_{\mu,r}(x) = 1 - \mu|x|^r, x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

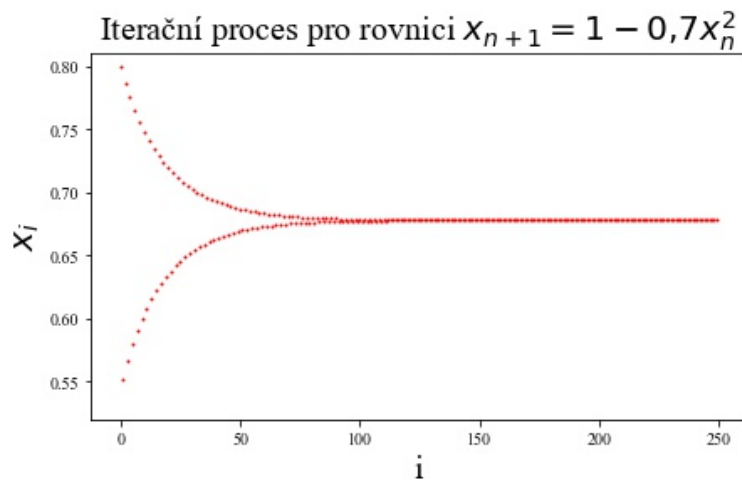
pozoroval zdvojení period (typ bifurkace) a postupně si začal všimnout univerzality této konstanty, která popisuje rychlost, kterou se parametr μ blíží hraniční hodnotě μ_∞ , pro všechna jednorozměrná unimodální zobrazení (viz např. [10]).

My budeme dále uvažovat funkci (3.1) jen pro $r = 2$ (té se zprvu Feigenbaum věnoval nejvíce), tudíž:

$$f_\mu(x) = 1 - \mu x^2, x \in [-1; 1], \mu \in [0; 2]. \quad (3.2)$$

Interval pro nezávislou proměnnou x je zvolen tak, aby funkce zobrazovala interval $[-1; 1]$ sám do sebe, a tudíž aby iterační proces „neutekl do nekonečna“.

Iterační proces lze znázornit například tak, že na vodorovné ose bude hodnota i , která představuje pořadové číslo iterace, a na svislé ose vypíšeme hodnoty x_i . Na obrázku 3.1 je v grafu zvoleno $\mu = 0,7$, počáteční hodnota $x_0 = 0,8$ a bylo vypočítáno 250 iterací.



Obrázek 3.1: Model (3.2), $\mu = 0,7$, $x_0 = 0,8$, 250 iterací

3.4.1. Rovnovážné body

Můžeme vidět, že iterační proces se na obrázku 3.1 po chvíli ustálí a konverguje k jedné hodnotě (rovnovážnému bodu rovnice), která je přibližně 0,68. Jde vlastně o pevný bod zobrazení, které definuje danou rovnici. Přesnou hodnotu pro obecné μ můžeme vypočítat z rovnice $x = f_\mu(x)$. Pro funkci (3.2) to tedy bude

$$x = 1 - \mu x^2.$$

Upravíme do tvaru kvadratické rovnice

$$\mu x^2 + x - 1 = 0,$$

spočítáme diskriminant

$$D = 1 + 4\mu$$

a můžeme lehce dopočítat kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\mu + 1}}{2\mu},$$

kde podle nastavení rovnice (3.2) má být $x \in [-1; 1]$ a $\mu \in [0; 2]$.

Hodnotou x_2 se nebudeme zabývat, protože na námi zkoumaném intervalu $\mu \in [0; 2]$ nabývá hodnoty, která by náležela intervalu $[-1; 1]$, jen pro hodnotu parametru $\mu = 2$ ($x_2 = -1$), která je větší než kritická hodnota μ_∞ . Hodnota x_2 je proto pro naše účely nezajímavá.

Dosazením $\mu = 0,7$ do vzorce pro x_1 získáme hodnotu $x_1 = 0,678$, která odpovídá odhadnuté hodnotě získané z grafu znázorňujícího iterační proces. Otázkou zůstává, pro jaké μ je bod x_1 ještě asymptoticky stabilní a kdy dochází k první bifurkaci (kdy se bod x_1 stává nestabilním).

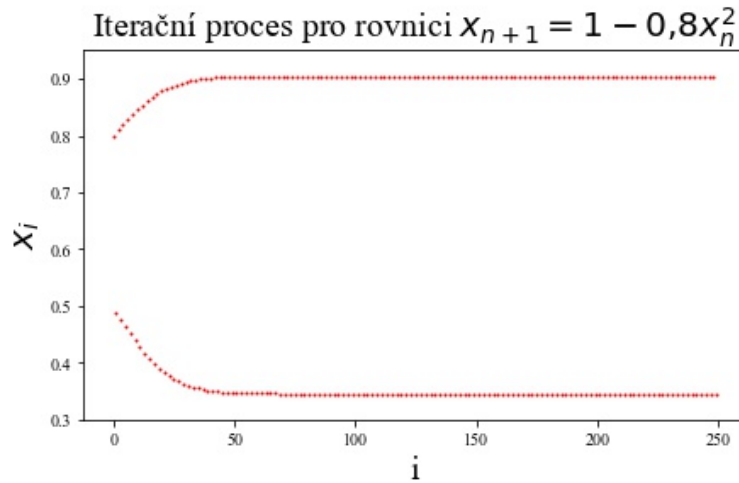
K získání odpovědi na tuto otázku nám pomůže věta 1, na jejíž použití potřebujeme znát pevný bod funkce a její derivaci. Víme, že pevným bodem je kořen rovnice (x_1) a derivaci lehce vypočítáme a zjistíme, že je rovna $f'_\mu(x) = -2\mu x$. Dále postupujeme podle zmíněné věty 1 následovně:

$$\begin{aligned} |f'_\mu(x_1)| &< 1, \\ \left| -2\mu \frac{-1 + \sqrt{4\mu + 1}}{2\mu} \right| &< 1, \\ \left| 1 - \sqrt{4\mu + 1} \right| &< 1, \\ \mu &\in \left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right). \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že uvažujeme pouze $\mu \in [0; 2]$, tak hledaný interval pro μ , kde se nachází 1-cyklus, bude $[0; \frac{3}{4}]$, a k první bifurkaci dochází pro $\mu = \frac{3}{4}$. Tuto hodnotu si pro další použití označíme výrazem μ_0 .

3.4.2. 2-cykly

V předchozí podkapitole jsme došli k závěru, že 1-cyklus je stabilní pro $\mu \in [0; \frac{3}{4}]$. To potvrzuje i graf iterace funkce $f_\mu(x) = 1 - \mu x^2$ (obrázek 3.2), kde je tentokrát zvoleno $\mu = 0,8$ a ostatní hodnoty (počáteční hodnota a počet iterací) jsou ponechány stejné jako v předchozím grafu (obrázek 3.1), jelikož nyní pozorujeme už po několika desítkách iterací rozdílné chování.



Obrázek 3.2: Model (3.2), $\mu = 0,8$, $x_0 = 0,8$, 250 iterací

Nyní můžeme pozorovat oscilaci mezi dvěma hodnotami, které jsou rovny přibližně 0,35 a 0,91, a vznikají 2 již zmíněné 2–cykly. Přesné hodnoty bude obtížnější vypočítat, protože se budeme snažit najít kořeny polynomu čtvrtého stupně. Hledání periodických bodů pro obecné μ v případě 2–cyklů bude vycházet z rovnice $x = f_\mu^2(x)$. Pro funkci (3.2) to tedy bude

$$x = 1 - \mu(1 - \mu x^2)^2.$$

Upravíme do tvaru kvartické rovnice

$$\mu^3 x^4 - 2\mu^2 x^2 + x - 1 + \mu = 0,$$

podělíme rovnici výrazy $(x - x_1)$ a $(x - x_2)$ a získáme kvadratickou rovnici

$$\mu^2 x^2 - \mu x + 1 - \mu = 0.$$

Poté spočítáme diskriminant

$$D = 4\mu^3 - 3\mu^2$$

a dopočítáme a upravíme kořeny

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4\mu - 3}}{2\mu}.$$

Dosažením parametru $\mu = 0,8$ získáme dvě hodnoty. První vychází přibližně 0,905 a druhá vychází 0,345, což jsou zase hodnoty odpovídající hodnotám získaným z obrázku 3.2.

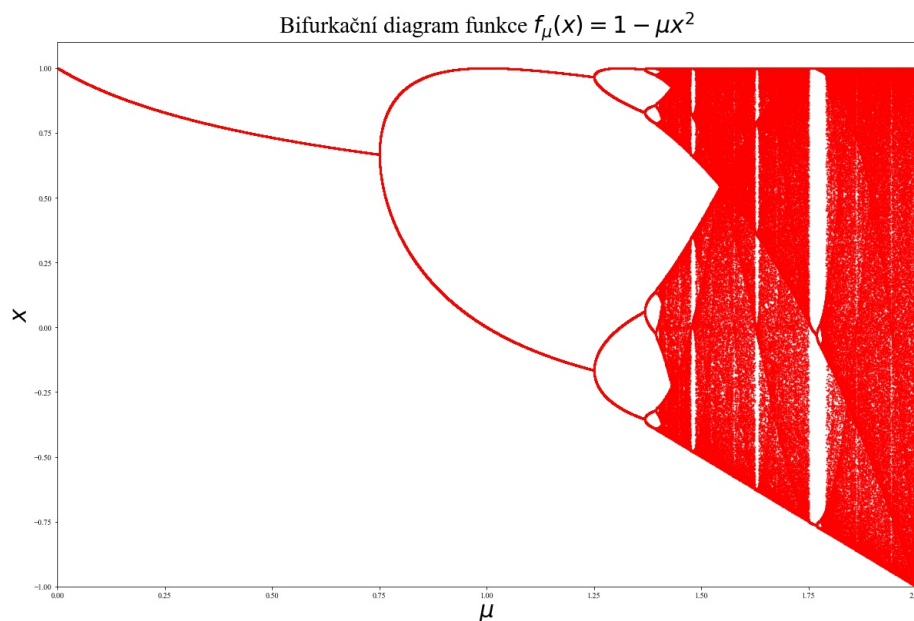
Znovu se pokusíme zjistit, na jakém intervalu budou body x_3 a x_4 asymptoticky stabilní a kdy dochází k druhé bifurkaci, tj. kdy vznikají 4-cykly. K tomu nám pomůže tentokrát věta 2, kde derivace funkce bude zase $f'_\mu(x) = -2\mu x$ a rovnovážné body jsou x_3 a x_4 . Dále budeme postupovat podle zmíněné věty 2 následovně:

$$\begin{aligned} |f'_\mu(x_3)f'_\mu(x_4)| &< 1, \\ \left| -2\mu \frac{1 + \sqrt{4\mu - 3}}{2\mu} \cdot (-2)\mu \frac{1 - \sqrt{4\mu - 3}}{2\mu} \right| &< 1, \\ \left| \left(1 + \sqrt{4\mu - 3}\right) \left(1 - \sqrt{4\mu - 3}\right) \right| &< 1, \\ |1 - (4\mu - 3)| &< 1, \\ \mu &\in \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right). \end{aligned}$$

Vidíme, že 2-cykly najdeme na intervalu $\mu \in \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$ a že k druhé bifurkaci dochází pro $\mu = \frac{5}{4}$. Tuto hodnotu označíme μ_1 .

3.4.3. Další cykly

Při zvětšování parametru μ dochází k dalším bifurkacím a bifurkační diagram se rozvětňuje na další 2^n -cykly až do nekonečna a nakonec nastává chaos, což můžeme pozorovat na obrázku 3.3. Analytický výpočet periodických bodů rovnice a bifurkačních konstant se stává těžším kvůli nutnosti vypočítat kořeny polynomů vyšších stupňů a proto se tyto hodnoty hledají numericky. V následující tabulce 3.1 uvádím mnou vypočítané bifurkační hodnoty a poté podíly rozdílů těchto hodnot. Tento podíl by se měl pro $n \rightarrow \infty$ rovnat Feigenbaumově konstantě δ , která je rovna číslu 4,6692...



Obrázek 3.3: Model (3.2), $\mu \in [0; 2]$, $x \in [-1; 1,1]$

i	Perioda vzniklého cyklu	μ_i	$\frac{\mu_{i-1} - \mu_{i-2}}{\mu_i - \mu_{i-1}}$
0	2	0,75	
1	4	1,25	
2	8	1,36809334	4,2339
3	16	1,39403976	4,5514
4	32	1,39962860	4,6425
5	64	1,40082777	4,6606
6	128	1,40108498	4,6622

Tabulka 3.1: Bifurkační hodnoty modelu (3.2) a jejich poměry

V posledním sloupci tabulky můžeme pozorovat, že se hodnota přibližuje k Feigenbaumově konstantě δ . Výsledek našeho zkoumání můžeme shrnout do následujícího krátkého závěru:

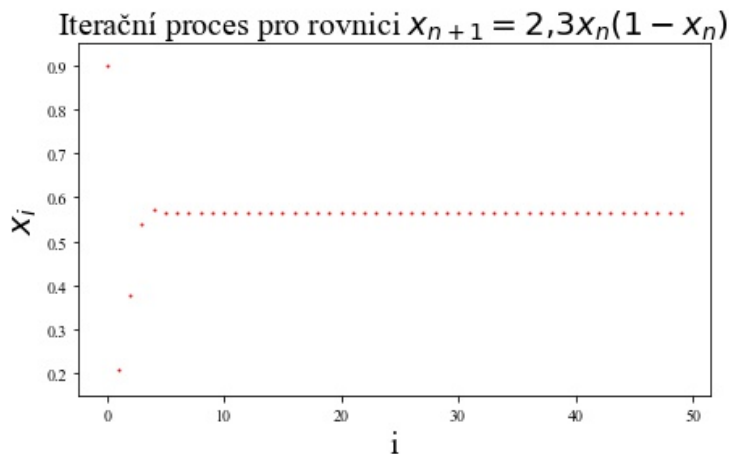
Závěr 1: *Naše numericky získané odhady pro funkci $f_\mu(x) = 1 - \mu x^2$, $x \in [-1; 1]$, $\mu \in [0; 2]$, se zdají být v souladu s teorií. Odhadnutá hodnota 4,6622 se od skutečné hodnoty Feigenbaumovy konstanty δ liší pouze v řádu tisícin.*

3.5. Logistická rovnice

Další a nejspíš i nejnámější rovnicí, na které se dá také pozorovat bifurkace, je logistická diferenční rovnice. Lze ji využít k modelování populačních dynamik, což znamená, že popisuje změny populace v průběhu času (viz např. [12]). Funkční předpis tohoto modelu můžeme zapsat v následujícím tvaru:

$$f_{\mu}(x) = \mu x(1 - x), x \in [0; 1], \mu \in [0; 4]. \quad (3.3)$$

Intervaly pro neznámou x a parametr μ jsou zase zvoleny tak, že jsou pozitivně semiinvariantní vzhledem k $f_{\mu}(x)$. Nyní se podíváme na iterace funkcí pro různě zvolený parametr μ a odvodíme si vzorce pro pevné a později i pro periodické body logistické funkce. V následujícím grafu byl zvolen parametr $\mu = 2,3$, počáteční hodnota $x_0 = 0,9$ a iterováno bylo pouze 50krát, ale i takto malý počet (narozdíl od iterace funkce z předchozího modelu) byl dostatečný na ustálení hodnot.



Obrázek 3.4: Model (3.3), $\mu = 2,3$, $x_0 = 0,9$, 50 iterací

3.5.1. Rovnovážné body

Z obrázku 3.4 vidíme, že x_i konverguje iteračním procesem přibližně k hodnotě 0,56. Přesnou hodnotu pro obecné μ můžeme znovu získat řešením rov-

nice $x = f_\mu(x)$. Pro funkci (3.3) to bude

$$x = \mu x(1 - x).$$

Kvadratická rovnice tentokrát bude

$$\mu x(1 - x) - x = 0,$$

což můžeme převést na součinnový tvar

$$x(\mu(1 - x) - 1) = 0.$$

Rovnice se nám rozpadne na dvě jednoduché rovnice

$$x_1 = 0 \vee \mu(1 - x_2) - 1 = 0,$$

z kterých dopočítáme kořeny zmíněné kvadratické rovnice

$$x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{\mu - 1}{\mu}.$$

Řešením rovnice pro 1-cyklus jsou 2 kořeny. Zbývá jen dopočítat, na jakých intervalech budou tyto body asymptoticky stabilní, k čemuž nám znovu pomůže věta 1. Nejdříve si spočítáme první derivaci, která v tomto modelu bude rovna $f'_\mu(x) = \mu(1 - 2x)$. Dále pokračujeme podle věty 1. Pro bod x_1 :

$$|f'_\mu(x_1)| < 1,$$

$$|\mu(1 - 2 \cdot 0)| < 1,$$

$$|\mu| < 1,$$

$$\mu \in (-1; 1).$$

Vzhledem k tomu, že uvažujeme pouze $\mu \in [0; 4]$, tak vidíme, že bod x_1 je asymptoticky stabilní pro $\mu \in [0; 1)$. Pro bod x_2 bude postup obdobný:

$$\begin{aligned} |f'_\mu(x_2)| &< 1, \\ \left| \mu \left(1 - 2 \frac{\mu - 1}{\mu} \right) \right| &< 1, \\ |\mu - 2(\mu - 1)| &< 1, \\ |2 - \mu| &< 1, \\ \mu &\in (1; 3). \end{aligned}$$

Bod x_2 bude asymptoticky stabilní na intervalu $\mu \in (1; 3)$. Pro $\mu = 3$ dochází k prvnímu zdvojení periody a hodnotu 3 označíme symbolem μ_0 .

Otázkou je, co se bude dít pro $\mu = 1$, jelikož není obsaženo ani v jednom z intervalů. K tomu nám pomůže věta 3, pro jejíž použití musíme vypočítat druhou derivaci. Ta je rovna $f''_\mu(x) = -2\mu$, v našem případě tedy $f''_1(0) = -2$. Podle věty 3 by byl bod $x = 0$ pro $\mu = 1$ nestabilní, protože druhá derivace je nenulová.

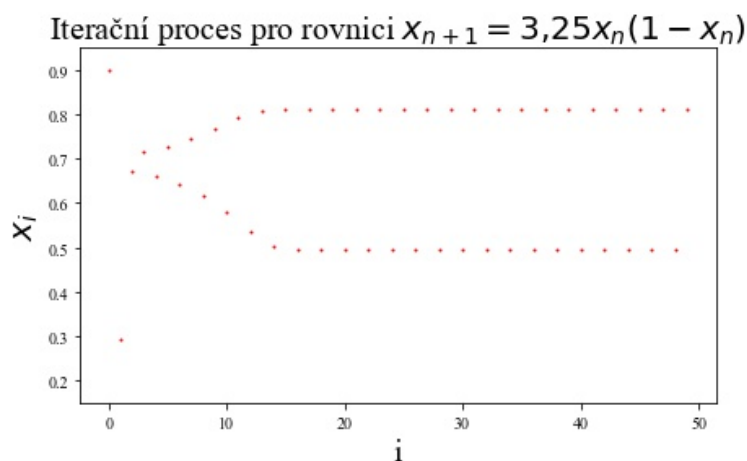
Musíme ale myslet na to, že náš model uvažuje pouze nezáporné hodnoty x (přesněji $x \in [0; 1]$). A právě v levém okolí bodu $x = 0$ je bod asymptoticky nestabilní, jelikož funkce $f_1(x) = x - x^2$ má oba členy záporné a n -tá iterace x_n v bodě x_0 by pro $n \rightarrow \infty$ byla rovna $-\infty$. Na druhé straně v kladném okolí je bod $x = 0$ asymptoticky stabilní, jelikož dostatečně dlouhým iterováním funkce $f_1(x) = x - x^2$ a dosažením počáteční podmínky x_0 z pravého okolí nuly (zároveň platí $x_0 \leq 1$) získáme $x_n = 0$ (pro velké n).

Dokázali jsme tedy, že bod $x = 0$ pro $\mu = 1$ je na pravém (kladném) okolí nuly asymptoticky stabilní, a jelikož uvažujeme jenom nezáporné x , tak je bod asymptoticky stabilní na celém intervalu $[0; 1]$. Kdybychom uvažovali celé (levé i pravé) okolí nuly, tak bychom bod nazvali asymptoticky semistabilním zprava.

Na závěr podkapitoly ještě ověříme, zda dosazením do vzorce pro kořen x_2 dostaneme přibližně stejnou hodnotu, jakou jsme vyčetli z grafu iterace na začátku podkapitoly o 1–cyklu (obrázek 3.4). Parametr μ byl zvolen jako 2,3, dosazením do vzorce pro kořen x_2 (protože $2,3 \in (1; 3)$) získáváme číslo 0,565, což je přibližně stejná hodnota, jaká byla odhadnuta (0,56).

3.5.2. 2–cykly

V předchozí podkapitole jsme zjistili, že pro $\mu > 3$ se bod x_2 stává asymptoticky nestabilním a vznikají 2–cykly. Toto chování můžeme pozorovat na grafu iterace logistické funkce, kde je tentokrát parametr $\mu = 3,25$.



Obrázek 3.5: Model (3.3), $\mu = 3,25$, $x_0 = 0,9$, 50 iterací

Dle očekávání pozorujeme, že nyní z iteračního procesu získáváme dva periodické body. Ty jsou rovny přibližně 0,5 a 0,8. Znovu můžeme najít vzorce, které nám přesně určí hodnotu těchto neznámých 2–periodických bodů při obecném parametru μ . Budeme řešit rovnici

$$x = \mu(\mu x(1 - x))(1 - \mu x(1 - x)),$$

kde pravá strana rovnice odpovídá $f_\mu^2(x)$. Funkcí $f_\mu(x)$ je tentokrát funkce (3.3). Rovnici upravíme do tvaru kvartické rovnice

$$\mu^2 x(1-x)(1-\mu x(1-x)) - x = 0,$$

podělíme ji výrazy $(x - x_1)$ a $(x - x_2)$, upravíme a získáváme kvadratickou rovnici

$$\mu^2 x^2 - \mu(\mu + 1)x + 1 + \mu = 0.$$

Poté spočítáme diskriminant

$$D = \mu^4 - 2\mu^3 - 3\mu^2$$

a dopočítáme kořeny rovnice

$$x_{3,4} = \frac{\mu + 1 \pm \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}.$$

Dosazením μ do vzorce získáme kořeny x_3 a x_4 . V našem případě pro $\mu = 3,25$ to bude $x_3 = 0,812$ a $x_4 = 0,495$, což koresponduje s odhadnutými hodnotami. Zbývá zjistit, na jakém intervalu můžeme hledat 2-cykly, a kdy dochází k druhé bifurkaci a vznikají 4-cykly. Použijeme při tom zase větu 2. Pro použití potřebujeme znát derivaci logistické funkce. Ta je rovna $f'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$. Větu 2 aplikujeme následujícím způsobem:

$$|f'_\mu(x_3)f'_\mu(x_4)| < 1,$$

$$\left| \left(\mu - 2\mu \frac{\mu + 1 + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu} \right) \left(\mu - 2\mu \frac{\mu + 1 - \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu} \right) \right| < 1,$$

$$\left| \left(1 + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)} \right) \left(1 - \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)} \right) \right| < 1,$$

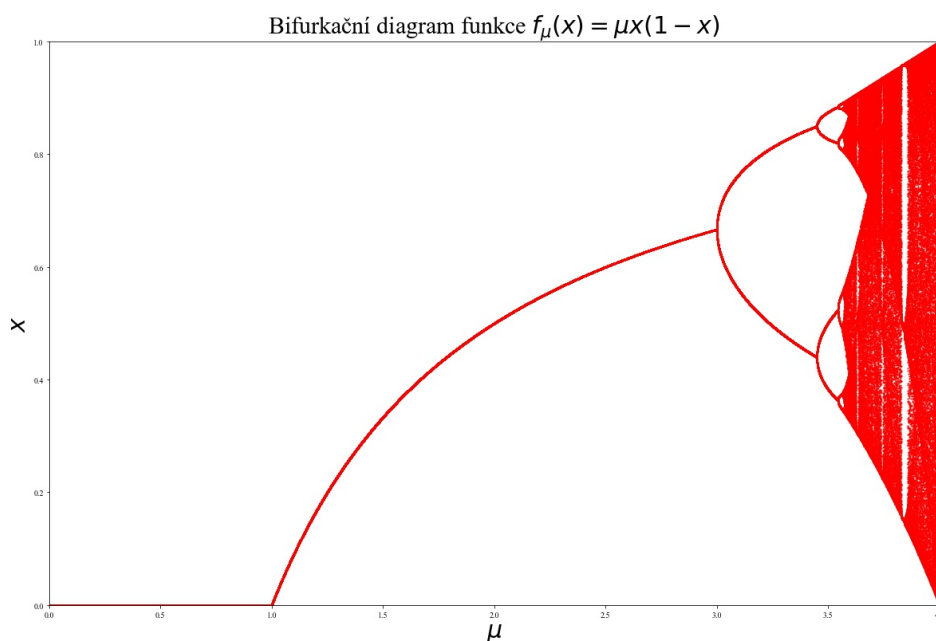
$$|\mu^2 - 2\mu - 4| < 1,$$

$$\mu \in \left(3; 1 + \sqrt{6} \right).$$

Z předchozího výpočtu vidíme, že k druhé bifurkaci dochází pro $\mu = 1 + \sqrt{6} \approx 3,44949$ a pro větší μ dochází ke vzniku 4-cyklů. Bifurkační hodnotu tentokrát označíme symbolem μ_1 .

3.5.3. Další cykly

Bifurkační diagram znovu vykazuje stejné chování – dochází ke zdvojení periody a pro $\mu > \mu_\infty \approx 3,57\dots$ (viz např. [11]) dochází ke vzniku deterministického chaosu. To můžeme pozorovat na následujícím grafu (obrázek 3.6).



Obrázek 3.6: Model (3.3), $\mu \in [0; 4]$, $x \in [0; 1]$

Stejně jako u předchozího modelu by bylo možné skládáním logistické funkce a úpravami odvodit obecný vzorec pro periodické body dalších cyklů, bylo by to ale velice obtížné. Periodické body v bifurkačním diagramu jsou proto pouze odhadnuty opakovanou iterací. V tabulce 3.2 najdeme odhadnuté bifurkační hodnoty a poměry jejich rozdílů.

Pro logistický model bylo vypočítáno více iterací a lze vidět, že poslední sloupec se více přiblížil k hodnotě $\delta = 4,6692\dots$ než v předchozím modelu.

i	Perioda vzniklého cyklu	μ_i	$\frac{\mu_{i-1}-\mu_{i-2}}{\mu_i-\mu_{i-1}}$
0	2	3	
1	4	3,4494897428	
2	8	3,5440899822	4,7515
3	16	3,5644071280	4,6562
4	32	3,5687593706	4,6682
5	64	3,5696915933	4,6687
6	128	3,5698912543	4,6690
7	256	3,5699340171	4,6690
8	512	3,5699431759	4,6690

Tabulka 3.2: Bifurkační hodnoty modelu (3.3) a jejich poměry

Výsledek našeho zkoumání můžeme shrnout do následujícího krátkého závěru:

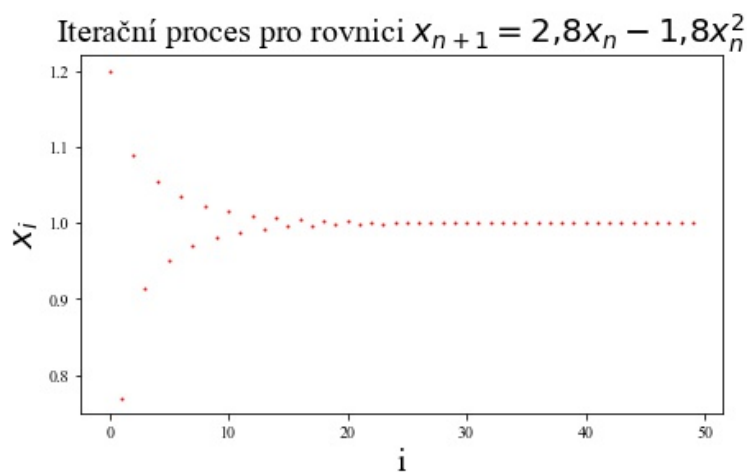
Závěr 2: *Naše numericky získané odhady pro funkci $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, $x \in [0; 1]$, $\mu \in [0; 4]$, se zdají být v souladu s teorií. Odhadnutá hodnota 4,6690 se od skutečné hodnoty Feigenbaumovy konstanty δ liší pouze v řádu desetitisícin.*

3.6. Verhulstův model

Dalším modelem je model Verhulstův a stejně jako předchozí logistický model modeluje populační dynamiky (viz např. [6]). Funkční předpis Verhulstova modelu je velice podobný tomu logistickému. Jeho rovnice vypadá následovně (viz [13]):

$$f_\mu(x) = (1 + \mu)x - \mu x^2, x \in [0; 1,4], \mu \in [1,5; 3]. \quad (3.4)$$

Meze pro x a μ jsou znovu zvoleny tak, aby funkce zobrazovala sama do sebe. I pro Verhulstův model se dají vypočítat pevné a periodické body. Ukážeme si graf iteračního procesu, kde je $\mu = 1,8$, počáteční hodnota je rovna $x_0 = 1,2$ a iterací bylo vypočítáno 50.



Obrázek 3.7: Model (3.4), $\mu = 1,8$, $x_0 = 1,2$, 50 iterací

3.6.1. Rovnovážné body

Můžeme vidět, že tentokrát se iterační proces ustálil na hodnotě 1. Nyní si odvodíme vzorec pro rovnovážné body pro obecné μ a to z rovnice $x = f_\mu(x)$. Pro funkci (3.4) to tedy bude

$$x = (1 + \mu)x - \mu x^2.$$

Kvadratická rovnice bude

$$(1 + \mu)x - \mu x^2 - x = 0,$$

což lze zapsat v součinném tvaru jako

$$\mu x(1 - x) = 0.$$

Zbývá jen dopočítat kořeny rovnice

$$x_1 = 0 \vee x_2 = 1.$$

Zjistili jsme, že existují dva pevné body, konkrétně $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$. Nyní musíme zjistit, pro jaké μ budou tyto body asymptoticky stabilní. K tomu

využijeme větu 1, na jejíž použití musíme vypočítat první derivaci funkce. Ta je rovna $f'_\mu(x) = 1 + \mu - 2\mu x$. Pro bod x_1 vypočítáme interval pro μ následovně:

$$\begin{aligned} |f'_\mu(x_1)| &< 1, \\ |1 + \mu - 2\mu \cdot 0| &< 1, \\ |1 + \mu| &< 1, \\ \mu &\in (-2; 0). \end{aligned}$$

Interval $(-2; 0)$ vůbec neuvažujeme, proto se bodem x_1 nebudeme dále zabývat. Zajímavější ale bude bod x_2 , pro který musíme interval pro μ ještě spočítat:

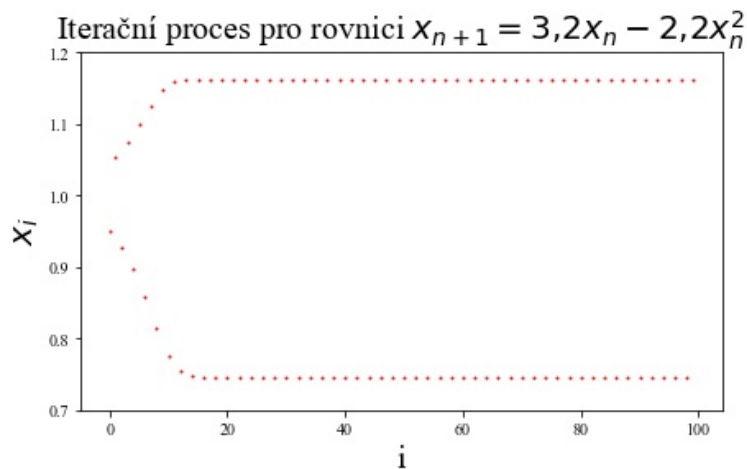
$$\begin{aligned} |f'_\mu(x_2)| &< 1, \\ |1 + \mu - 2\mu \cdot 1| &< 1, \\ |-\mu + 1| &< 1, \\ \mu &\in (0; 2). \end{aligned}$$

V modelu uvažujeme pouze $\mu \in [1,5; 3]$, proto bude bod x_2 asymptoticky stabilní pro $\mu \in [1,5; 2)$. Dosazení do vzorce pro x_2 je triviální a hned vidíme, že $x_2 = 1$, což koresponduje s předchozím grafem (obrázek 3.7).

Hodnotu $\mu = 2$ označíme symbolem μ_0 , jelikož právě v ní dochází k první bifurkaci a poté ke vzniku 2-cyklů.

3.6.2. 2-cykly

Pokud budeme graficky znázorňovat iterační proces pro μ o trochu větší než 2, tak zjistíme, že se nám graf rozvětví a budeme mít 2 2-periodické body. To nám ukazuje i následující graf, kde je $\mu = 2,2$, počáteční hodnota $x_0 = 0,95$ a je iterováno 100krát.



Obrázek 3.8: Model (3.4), $\mu = 2,2$, $x_0 = 0,95$, 100 iterací

Hodnoty těchto periodických bodů jsou přibližně 1,16 a 0,75. Přesné vzorce bude složitější odvodit, ale pro 2–cykly to je ještě zvládnutelné. Jejich hledání pro obecné μ v případě 2–cyklů bude vycházet z rovnice $x = f_\mu^2(x)$. Pro funkci (3.4) to tedy bude

$$x = (1 + \mu)((1 + \mu)x - \mu x^2) - \mu((1 + \mu)x - \mu x^2)^2.$$

Rovnici poté podělíme výrazy $(x - x_1)$ a $(x - x_2)$ a upravíme do tvaru

$$\mu^2 x^2 - \mu(\mu + 2)x + 2 + \mu = 0,$$

dopočítáme diskriminant

$$D = \mu^2(\mu^2 - 4),$$

který využijeme k dopočítání kořenů rovnice

$$x_{3,4} = \frac{\mu + 2 \pm \sqrt{(\mu + 2)(\mu - 2)}}{2\mu}.$$

V našem případě je $\mu = 2,2$ a dosazením do vzorců pro kořeny nám vychází $x_3 = 1,163$ a $x_4 = 0,746$. Vypočtené hodnoty potvrzují předešlé pozorování k obrázku 3.8. Nyní jen zbývá s využitím věty 2 spočítat, kdy dochází k druhé

bifurkaci a kdy se body x_3 a x_4 stávají nestabilními. Dosazením do věty 2 dostáváme:

$$|f'_\mu(x_3)f'_\mu(x_4)| < 1,$$

$$\left| \left(1 + \mu - 2\mu \frac{\mu + 2 + \sqrt{\mu^2 - 4}}{2\mu} \right) \left(1 + \mu - 2\mu \frac{\mu + 2 - \sqrt{\mu^2 - 4}}{2\mu} \right) \right| < 1,$$

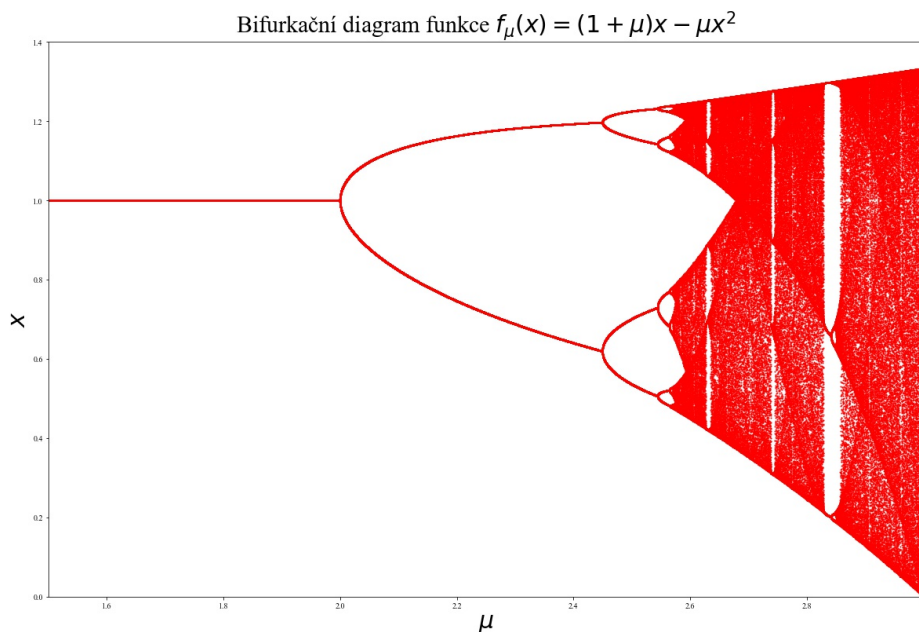
$$\left| (1 + \sqrt{\mu^2 - 4})(1 - \sqrt{\mu^2 - 4}) \right| < 1,$$

$$|\mu^2 - 5| < 1,$$

$$\mu \in (2; \sqrt{6}).$$

Vypočítali jsme, že body s periodou 2 jsou asymptoticky stabilní na intervalu $\mu \in (2; \sqrt{6})$ a že k druhé bifurkaci teda dochází pro $\mu_1 \approx 2,44949$.

3.6.3. Další cykly



Obrázek 3.9: Model (3.4), $\mu \in [1,5; 3]$, $x \in [0; 1,4]$

Pro větší μ dále dochází ke zdvojování periody až do chvíle, kdy nastane chaos. To lze pozorovat i na bifurkačním diagramu (obrázek 3.9).

Uvádíme znovu i tabulku 3.3 s odhadnutými bifurkačními hodnotami a poměry jejich rozdílů, které se zase blíží k hodnotě $4,6692\dots$

i	Perioda vzniklého cyklu	μ_i	$\frac{\mu_{i-1}-\mu_{i-2}}{\mu_i-\mu_{i-1}}$
0	2	2	
1	4	2,44948974	
2	8	2,54401989	4,7550
3	16	2,56438281	4,6423
4	32	2,56875209	4,6605
5	64	2,56968940	4,6615
6	128	2,56989053	4,6602

Tabulka 3.3: Bifurkační hodnoty modelu (3.4) a jejich poměry

Výsledek našeho zkoumání můžeme shrnout do následujícího krátkého závěru:

Závěr 3: *Naše numericky získané odhady pro funkci $f_\mu(x) = (1 + \mu)x - \mu x^2$, $x \in [0; 1,4]$, $\mu \in [1,5; 3]$, se zdají být v souladu s teorií. Odhadnutá hodnota $4,6602$ se od skutečné hodnoty Feigenbaumovy konstanty δ liší pouze v řádu tisícín.*

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo seznámit čtenáře se základními diskrétními dynamickými modely a popsat princip výpočtu důležitých hodnot v těchto modelech. Sestrojeno bylo také několik bifurkačních diagramů. Toto mělo čtenáři sloužit jako úvod do problematiky teorie chaosu.

V práci jsme se omezili jen na jednu dimenzi (\mathbb{R}), ale modely samozřejmě existují i více–dimenzionální. Nejznámějším je nejspíš Lorenzův model, což je soustava obyčejných diferenciálních rovnic o třech neznámých. Zkoumal ho americký matematik a meteorolog Edward Lorenz jakožto model popisující změnu počasí a dění v atmosféře (viz např. [3]).

Důraz byl kladen na univerzalitu konstanty δ , kterou se práce snaží matematicky podpořit. Pokud se podíváme na poslední hodnotu poměru rozdílů bifurkačních hodnot u všech modelů tak můžeme pozorovat, že všechny hodnoty se shodují v prvních dvou místech po desetinné čárce a liší se tedy jenom v řádu tisícín. V případě logistického modelu je odchylka od skutečné hodnoty Feigenbaumovy konstanty δ pouze v řádech desetitisícín.

Věří se, že konstanty α a δ jsou transcendentní, tato domněnka ale zatím nebyla ani potvrzena, ani vyvrácena. Stále se počítají přesnější hodnoty těchto konstant, Feigenbaumova konstanta δ je nyní spočítána na 1018 míst za desetinnou čárkou. Se stejnou přesností je spočítána i konstanta α (viz [3],[10]).

Přidanou hodnotou z mé strany je mimo jiné tvorba grafů, výpočet bifurkačních hodnot a poměrů jejich rozdílů a v neposlední řadě i výpočet vzorců pro pevné a periodické body a intervaly parametru μ , na kterých jsou tyto body asymptoticky stabilní. Výpočty a grafy jsem tvořil v prostředí Jupyter Notebook. Zdokonalil jsem také své matematické znalosti a znalosti sázecího editoru \TeX .

Seznam obrázků a grafů

1.1	Mitchell Feigenbaum, fyzik a průkopník teorie chaosu	9
1.2	Pierre Verhulst, belgický matematik a statistik	10
2.1	Mitchell Feigenbaum ve stáří v New Yorku	12
3.1	Model (3.2), $\mu = 0,7$, $x_0 = 0,8$, 250 iterací	19
3.2	Model (3.2), $\mu = 0,8$, $x_0 = 0,8$, 250 iterací	21
3.3	Model (3.2), $\mu \in [0; 2]$, $x \in [-1; 1,1]$	23
3.4	Model (3.3), $\mu = 2,3$, $x_0 = 0,9$, 50 iterací	24
3.5	Model (3.3), $\mu = 3,25$, $x_0 = 0,9$, 50 iterací	27
3.6	Model (3.3), $\mu \in [0; 4]$, $x \in [0; 1]$	29
3.7	Model (3.4), $\mu = 1,8$, $x_0 = 1,2$, 50 iterací	31
3.8	Model (3.4), $\mu = 2,2$, $x_0 = 0,95$, 100 iterací	33
3.9	Model (3.4), $\mu \in [1,5; 3]$, $x \in [0; 1,4]$	34

Seznam tabulek

3.1	Bifurkační hodnoty modelu (3.2) a jejich poměry	23
3.2	Bifurkační hodnoty modelu (3.3) a jejich poměry	30
3.3	Bifurkační hodnoty modelu (3.4) a jejich poměry	35

Přílohy

K práci je přiloženo 1 CD, které obsahuje kód z programovacího prostředí Jupyter Notebook. Kód slouží k vygenerování obrázků 3.1 - 3.9 a k výpočtu bifurkačních hodnot a poměrů jejich rozdílů u jednotlivých modelů.

Literatura

- [1] THE ROCKEFELLER UNIVERSITY. Celebrating and remembering Mitchell Feigenbaum, physicist who pioneered chaos theory. *The Rockefeller University* [online]. 2019, 2019 [cit. 2022-04-01]. Dostupné z: <https://www.rockefeller.edu/news/26289-mitchell-feigenbaum-physicist-pioneered-chaos-theory-died/>
- [2] GLEICK, J. *Chaos: Vznik nové vědy*. Přeložil Jaroslav SEDLÁŘ, přeložila Renata KAMENICKÁ. Brno: Ando Publishing, 1996. ISBN 80-86047-04-0.
- [3] DEBNATH, L. A Brief History of the Most Remarkable Numbers π , g and δ in Mathematical Sciences with Applications. *International Journal of Applied and Computational Mathematics* [online]. 2015, **1**(4), 607-638 [cit. 2022-04-01]. ISSN 2349-5103. Dostupné z: doi:10.1007/s40819-015-0038-6
- [4] FEIGENBAUM, M. J. Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations. *Journal of Statistical Physics* [online]. 1978, **19**(1), 25-52 [cit. 2022-04-01]. Dostupné z: doi:10.1007/BF01020332
- [5] O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. Pierre François Verhulst. *MacTutor* [online]. 2014 [cit. 2022-04-02]. Dostupné z: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Verhulst/>
- [6] PASTIJN, H. Chaotic Growth with the Logistic Model of P.-F. Verhulst. AUSLOOS, M., DIRICKX, M., ed. *The Logistic Map and the Route to Chaos* [online]. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2006, s. 3-4 [cit. 2022-04-01]. Understanding Complex Systems. ISBN 3-540-28366-8. Dostupné z: doi:10.1007/3-540-32023-7_1
- [7] Mitchell Feigenbaum (1944-2019), 4.66920160910299067185320382.... *Stephen Wolfram Writings* [online]. 2019 [cit. 2022-04-01]. Dostupné z: <https://writings.stephenwolfram.com/2019/07/mitchell-feigenbaum-1944-2019-4-66920160910299067185320382/>

- [8] *Project Jupyter* [online]. [cit. 2022-04-14]. Dostupné z: <https://jupyter.org/>
- [9] FEIGENBAUM, M. J. The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations. *Journal of Statistical Physics* [online]. 1979, **21**(6), 669-706 [cit. 2022-04-01]. ISSN 0022-4715. Dostupné z: doi:10.1007/BF01107909
- [10] WEISSTEIN, E. W. Feigenbaum constant. *Wolfram MathWorld* [online]. [cit. 2022-04-01]. Dostupné z: <https://mathworld.wolfram.com/FeigenbaumConstant.html>
- [11] RACHŮNKOVÁ, I., FIŠER, J. *Dynamické systémy 1*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2014. ISBN 978-80-244-4338-6.
- [12] The Logistic Map. *Hamilton* [online]. [cit. 2022-04-04]. Dostupné z: <https://www.hamilton.ie/cs416/logisticmap.htm>
- [13] ANDRES, J., FIŠER, J., RYPKA, M. *Dynamické systémy 3: Úvod do teorie deterministického chaosu a fraktální geometrie*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2015. ISBN 978-80-244-4646-2.
- [14] Deterministic Chaos: 6.N. Period-Doubling Scaling and the Feigenbaum Constant - The Feigenbaum Alpha Constant. *Yale University: Department of Mathematics* [online]. [cit. 2022-04-01]. Dostupné z: https://users.math.yale.edu/public_html/People/frame/Fractals/Chaos/Feigenbaum/FeigenbaumAlpha.html
- [15] KARTOFELEV, D. Lecture 11: Feigenbaum's analysis of period doubling, superstability of fixed points and period-p points, renormalisation, universal limiting function, discrete time dynamics analysis methods, Poincaré section, Poincaré map, Lorenz section, attractor reconstruction. *Tallinn University of Technology* [online]. 2021 [cit. 2022-04-01]. Dostupné z: https://www.ioc.ee/~dima/YFX1520/LectureNotes_11.pdf
- [16] ALLIGOOD, K. T., SAUER, T. D., YORKE, J. A. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. 2nd printing. Berlin: Springer, 1997. ISBN 978-35-407-8036-6.
- [17] BRIGGS, K. A Precise Calculation of the Feigenbaum Constants. *Mathematics of Computation* [online]. 1991, **57**(195), 435-439 [cit. 2022-04-01]. ISSN 0025-5718. Dostupné z: doi:10.2307/2938684