



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

PEVNOSTNÍ OPTIMALIZACE SLOŽENÉ TLAKOVÉ NÁDOBY

STRENGTH OPTIMIZATION OF THE COMPOUND PRESSURE VESSEL

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

LIBOR GOL

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. MIROSLAV SUCHÁNEK,
CSc.

BRNO 2010

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Akademický rok: 2009/2010

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Libor Gol

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Pevnostní optimalizace složené tlakové nádoby

v anglickém jazyce:

Strength Optimization of the Compound Pressure Vessel

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Formulace a řešení optimalizační úlohy

Cíle bakalářské práce:

Formulace a řešení úlohy pevnostní optimalizace složené tlakové nádoby

Seznam odborné literatury:

Ondráček,E.,Vrbka,J.,Janíček,P.: Mechanika těles-pružnost a pevnost II. FSI VUT Brno, 2006

Kolektiv: Pružnost a pevnost II. FS VUT Brno, 1980

Faupel,J.,H.: Engineering Design. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964

Kohoutek,J.,Odstrčil,M.: Algoritmy hodnocení a optimalizace. FS VUT Brno, 1989

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Miroslav Suchánek, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2009/2010.

V Brně, dne 4.11.2009

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato práce se zabývá formulací a řešením optimalizační úlohy. V práci jsou uvedeny základní pojmy a možnosti optimalizační úlohy. Pro samotné řešení úlohy jsme využili matematický software MAPLE. Výhodou tohoto programu je schopnost analytického řešení matematických problémů. V závěru práce je provedeno porovnání dosažených výsledků.

KLÍČOVÁ SLOVA

Složená tlaková nádoba, cílová funkce, vektor návrhových proměnných, bezrozměrné parametry, podmínka bezpečnosti

ABSTRACT

This thesis deals with formulation and solution of optimization problem. The paper presents basic concepts and possibilities of optimization problem. For the mathematic solutions, we used specialized software MAPLE. The main advantage of this software is the ability of the analytic analysis. At the end obtained results were compared.

KEY WORDS

Compound pressure vessel, objective function, variables vector, dimensionless parameters, safety condition

Bibliografická citace

GOL, L. *Pevnostní optimalizace složené tlakové nádoby*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 37 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Miroslav Suchánek, CSc.

Prohlášení

Prohlašuji, že tuto bakalářskou práci jsem vypracoval sám pod vedením svého vedoucího bakalářské práce pana doc. Ing. Miroslava Suchánka, CSc. a s využitím literárních pramenů uvedených v této práci.

V Brně dne

.....

LIBOR GOL

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce panu doc. Ing. Miroslavu Suchánkovi, CSc. za jeho odborné rady a připomínky, které mi pomohly při tvorbě této práce.

OBSAH

1. ÚVOD	8
1.1. Tlakové nádoby	8
1.2. Cíl práce	8
2. VÝPOČTOVÝ MODEL	9
2.1. Jednoplášťová nádoba	9
2.2. Provozní tlak v kontaktu dvou komponent složené nádoby	12
3. FORMULACE OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY	15
3.1. Základní pojmy a možnosti optimalizace	15
4. ŘEŠENÍ OPTIMALIZACE SLOŽENÉ NÁDOBY	17
4.1. Dvouplášťová nádoba	17
4.1.1. Studie vlivu volby materiálu pro komponenty	20
4.2. Tříplášťová nádoba	23
4.3. Čtyřplášťová nádoba	27
5. POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ ŘEŠENÍ	33
6. ZHODNOCENÍ A ZÁVĚR	34
7. SEZNAM POUŽITÝCH VELIČIN	35
8. SEZNAM LITERATURY	36
9. PŘÍLOHY	37

1. ÚVOD

1.1. Tlakové nádoby

V technické praxi se vyskytují dva typy tlakových nádob. Prvním typem jsou nádoby uzavřené, které mají dno. Tlak působící na dna vyvolává tahové (popř. tlakové) namáhání pláště nádoby (viz [4]). Za uzavřenou nádobu lze uvažovat kotlové těleso, tlakové nádoby atd. Druhým typem jsou otevřené nádoby, které na rozdíl od nádob uzavřených nemají dno a nepřenášejí žádné osové síly a napětí. Příkladem otevřených nádob jsou průvlaky na výrobu drátů, lisovnice, hydraulický válec nebo nalisovaný kroužek na hřídeli.

1.2. Cíl práce

Cílem této práce je sestavit algoritmus optimalizační úlohy pro víceplášťovou stěnu zatíženou tlakem na válcových površích. Daný postup poté aplikovat na případy víceplášťových stěn s různým počtem komponent. Získané výsledky z jednotlivých řešení porovnat a vyvodit závěr.

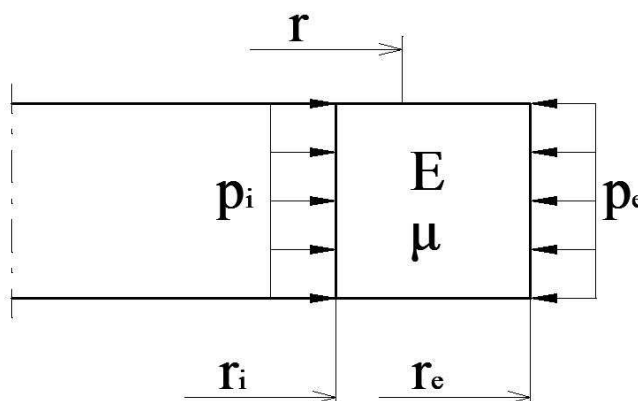
2. VÝPOČTOVÝ MODEL

Vyjdeme z následujících předpokladů (viz [1]):

- platnost Hookeova zákona
- geometrie, zatížení, vazby a materiálové charakteristiky jsou rotačně souměrné kolem osy tělesa
- radiální řezy zůstávají i po zatížení rovinnými
- uvažujeme rovinnou napjatost

2.1. Jednoplášťová nádoba

Máme komponentu s danými materiálovými charakteristikami E , μ , σ_k a zatíženou tlaky p_i a p_e působící na válcové plochy o poloměrech r_i a r_e .



Obr. 1 Jednoplášťová nádoba

Rozložení radiálního a obvodového napětí v každé komponentě válcové nádoby může být určeno užitím známého vztahu vyplývajícího z Lamého řešení (viz [2]).

$$\sigma_{r,t}(r) = \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_e \cdot r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \mp (p_i - p_e) \cdot \frac{r_i^2 \cdot r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (2 - 1)$$

Indexy i a e vyjadřují vnitřní a vnější válcové plochy nádoby.

Osově napětí σ_z je nulové.

$$\sigma_z = 0 \quad (2 - 2)$$

Ze vztahů pro obvodové přetvoření (2 - 3) a Hookeova zákona s explicitně vyjádřeným přetvořením (2 - 4)

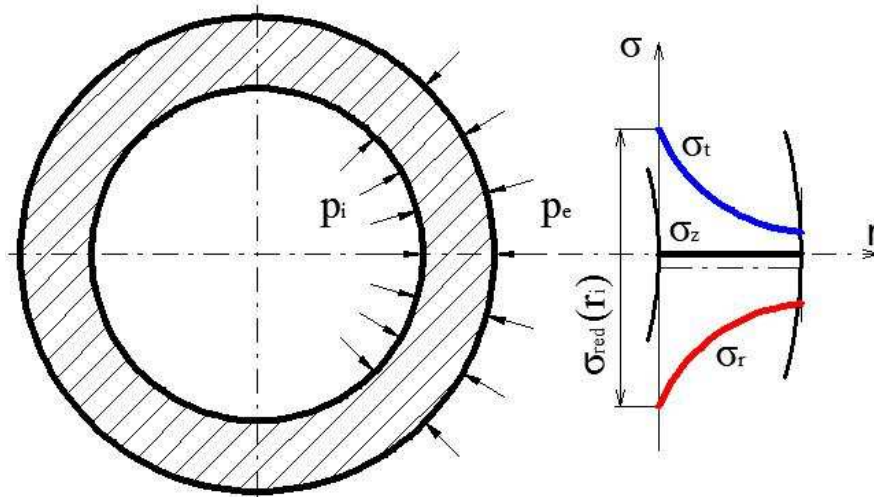
$$\varepsilon_t = \frac{u}{r} \quad (2 - 3)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_t - \mu \cdot \sigma_r] \quad (2 - 4)$$

lze odvodit vztah (2 - 5) (viz [2]).

$$u(r) = \frac{1 - \mu}{E} \cdot \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_e \cdot r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \cdot r + \frac{1 - \mu}{E} \cdot (p_i - p_e) \cdot \frac{r_i^2 \cdot r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (2 - 5)$$

Na obrázku (obr. 2) jsou zobrazeny průběhy napětí po tloušťce celistvé nádoby. Křivky jsou polytropy druhého stupně. Osově napětí je nulové. Nebezpečné místo je na vnitřním povrchu nádoby.



Obr. 2 Průběh napětí

Napíšeme Guestovu podmínku plasticity pro nebezpečné místo, kde σ_1 a σ_3 jsou maximální a minimální hlavní napětí.

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (2 - 6)$$

Pro napětí na vnitřním poloměru r_i platí:

$$\sigma_t(r_i) > \sigma_z(r_i) > \sigma_r(r_i) \quad (2 - 7)$$

pak podmínka bezpečnosti

$$\sigma_{red}(r_i) = \sigma_t(r_i) - \sigma_r(r_i) = \sigma_D \quad (2 - 8)$$

dovolené napětí pro komponentu je definováno následujícím vztahem, kde k_{ki} je návrhová bezpečnost.

$$\sigma_D = \frac{\sigma_k}{k_{ki}} \quad (2 - 9)$$

Pro další řešení celistvé nádoby předpokládáme, že vnější tlak $p_e=0$.

Do rovnice (2 - 8) dosadíme vztahy pro radiální a tangenciální napětí (2 - 1). Po úpravách obdržíme podmínku bezpečnosti ve tvaru (2 - 10):

$$\sigma_D(r_i) = \frac{2 \cdot p_i \cdot r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \quad (2 - 10)$$

Pro další řešení je výhodné zavést bezrozměrné parametry charakterizující zatížení, materiál a geometrii nádoby.

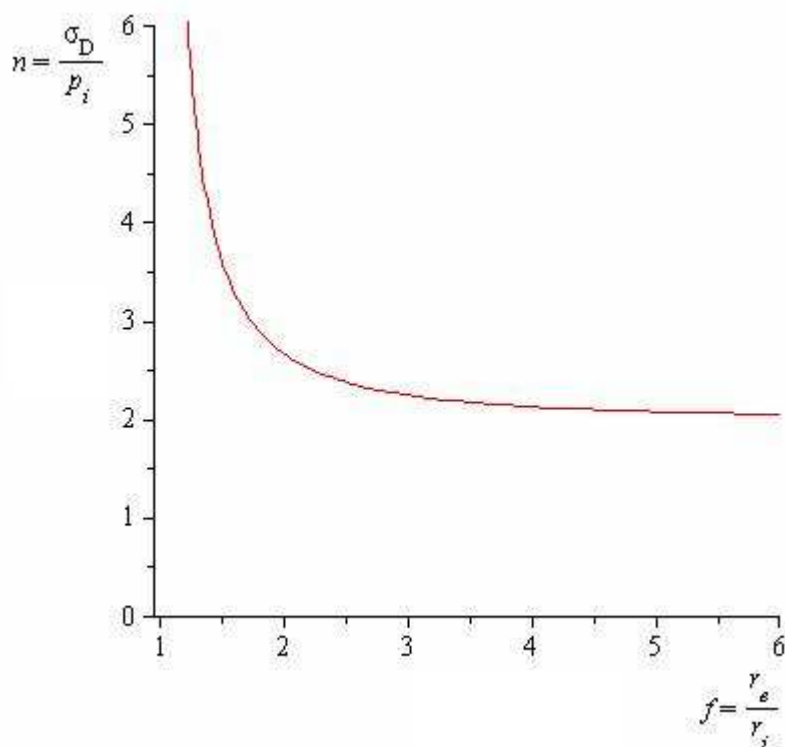
$$n = \frac{\sigma_D}{p_i} \quad (2 - 11)$$

$$f = \frac{r_e}{r_i} \quad (2 - 12)$$

Po úpravě a dosazení bezrozměrných parametrů lze napsat podmínku bezpečnosti ve tvaru:

$$n = \frac{2 \cdot f^2}{f^2 - 1} \quad (2 - 13)$$

Grafickým znázorněním této funkce je závislost zobrazená na grafu 1.



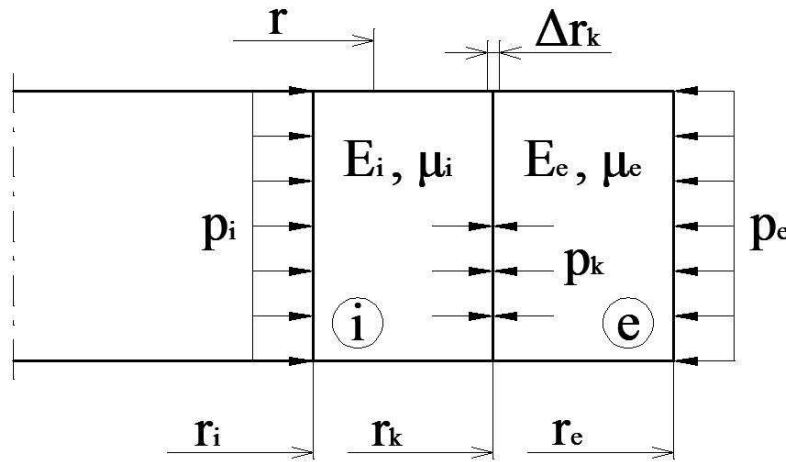
Graf 1 Závislost velikosti přípustného zatížení a geometrie jednoplášťové nádoby

Tento graf odpovídá grafu uvedeném v literatuře [2]. Je patrné, že blíží-li se poměr $\frac{\sigma_D}{p_i}$

k hodnotě 2, roste potřebný vnější poloměr nade všechny meze. Z tohoto důvodu nelze navrhnout bezpečnou jednoplášťovou nádobu na provozní tlak větší než je polovina dovoleného napětí pro daný materiál. Aby bylo možné vyrobit nádobu, jenž by vydržela větší tlaky, je nutné vyvodit na vnějším poloměru nádoby tlakové předpětí, které sníží redukované napětí na vnitřním poloměru nádoby. To se v praxi provádí nalisováním další komponenty.

2.2. Provozní tlak v kontaktu dvou komponent složené nádoby

Indexy i , e a k vyjadřují vnitřní, vnější a kontaktní válcové plochy nádoby. Uvažujme dvě komponenty s odlišnými materiálovými charakteristikami E_i , E_e , μ_i , μ_e , $\sigma_k^{(i)}$ a $\sigma_k^{(e)}$. Předpokládáme lineárně pružné chování všech komponent pro zajištění trvalého předepnutí při zatížení. Komponenty jsou na sebe nalisovány s montážním přesahem Δr_k , což vyvolává tlakové předpětí p_k^{mont} , které předepíná vnitřní komponentu a zmenšuje redukované napětí na jejím vnitřním povrchu. Komponenty jsou zatíženy tlaky p_i a p_e .



Obr. 3 Dvouplášťová nádoba

Vztahy pro napětí a radiální posuv každé z komponent dvouplášťové nádoby jsou analogické ke vzorcům odvozených u jednoplášťové nádoby. Pro každou komponentu sestavíme podmínku bezpečnosti. Vyjdeme ze vztahů (2 - 1), (2 - 5) a (2 - 8), které upravíme tak, aby označení veličin bylo v souladu s obr. 3.

- vnitřní komponenta:

$$\sigma_{r,t}^{(i)}(r) = \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_k \cdot r_k^2}{r_k^2 - r_i^2} \mp (p_i - p_k) \cdot \frac{r_i^2 \cdot r_k^2}{r_k^2 - r_i^2} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (2 - 14)$$

$$u^{(i)}(r) = \frac{1 - \mu_i}{E_i} \cdot \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_k \cdot r_k^2}{r_k^2 - r_i^2} \cdot r + \frac{1 - \mu_i}{E_i} \cdot (p_i - p_k) \cdot \frac{r_i^2 \cdot r_k^2}{r_k^2 - r_i^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (2 - 15)$$

$$\sigma_{red}^{(i)} = \sigma_t^{(i)}(r_i) - \sigma_r^{(i)}(r_i) = \sigma_D^{(i)} \quad (2 - 16)$$

$$\sigma_z = 0 \quad (2 - 17)$$

- vnější komponenta:

$$\sigma_{r,t}^{(e)}(r) = \frac{p_k \cdot r_k^2 - p_e \cdot r_e^2}{r_e^2 - r_k^2} \mp (p_k - p_e) \cdot \frac{r_k^2 \cdot r_e^2}{r_e^2 - r_k^2} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (2 - 18)$$

$$u^{(e)}(r) = \frac{1 - \mu_e}{E_e} \cdot \frac{p_k \cdot r_k^2 - p_e \cdot r_e^2}{r_e^2 - r_k^2} \cdot r + \frac{1 - \mu_e}{E_e} \cdot (p_k - p_e) \cdot \frac{r_k^2 \cdot r_e^2}{r_e^2 - r_k^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (2 - 19)$$

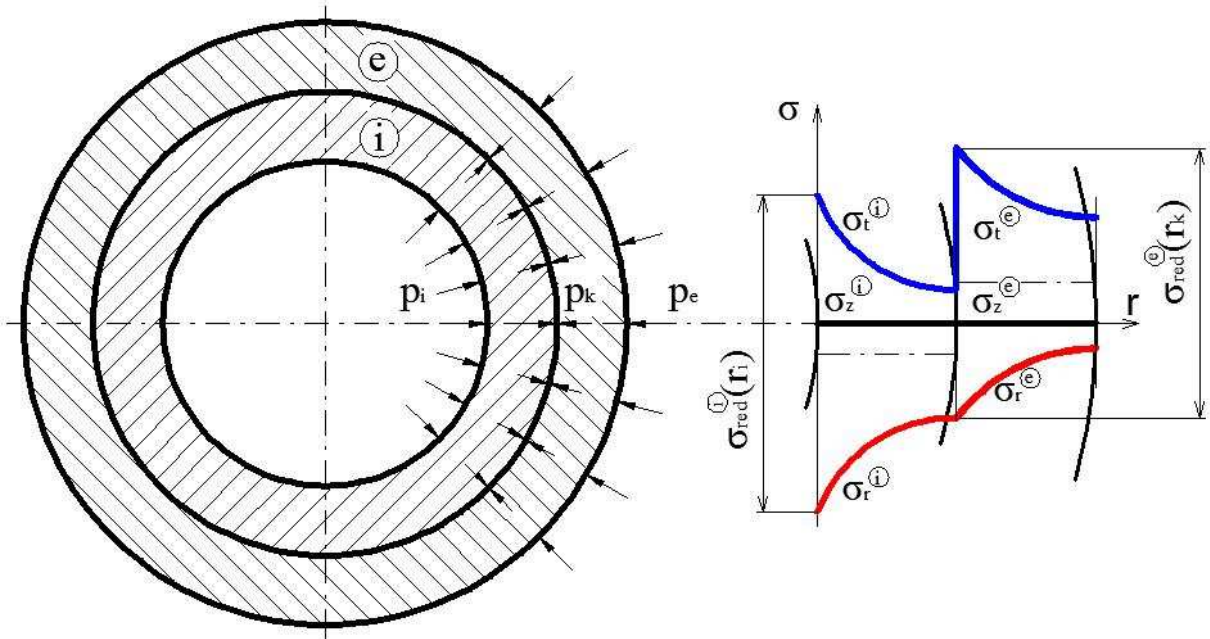
$$\sigma_{red}^{(e)} = \sigma_t^{(e)}(r_k) - \sigma_r^{(e)}(r_k) = \sigma_D^{(e)} \quad (2 - 20)$$

$$\sigma_z = 0 \quad (2 - 21)$$

Dovolená napětí pro komponenty jsou definována následujícími vztahy, kde k_{ki} a k_{ke} jsou návrhové bezpečnosti jednotlivých komponent.

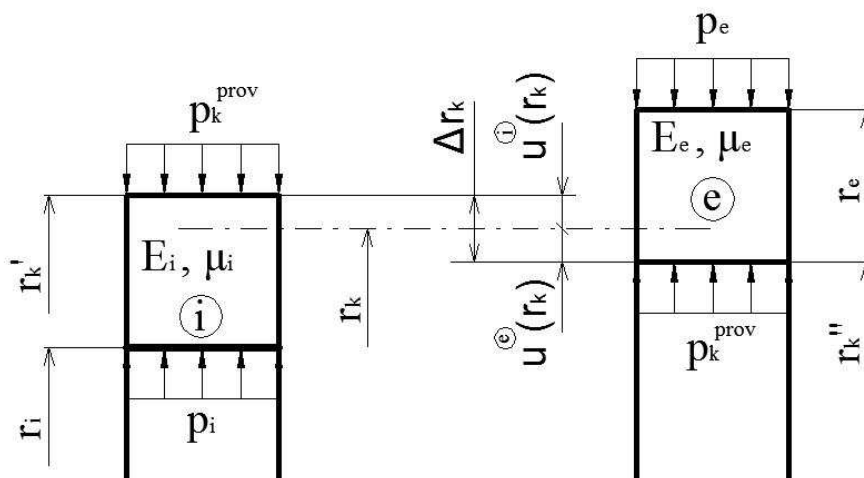
$$\sigma_D^{(i)} = \frac{\sigma_k^{(i)}}{k_{ki}} \quad \sigma_D^{(e)} = \frac{\sigma_k^{(e)}}{k_{ke}} \quad (2 - 22)$$

Na obrázku (obr. 4) jsou zobrazeny průběhy napětí po tloušťce jednotlivých komponent složené nádoby. Křivky jsou polytropy druhého stupně. Osově napětí neuvažujeme a je tedy nulové. Nebezpečné místo je na vnitřním povrchu každé komponenty.



Obr. 4 Průběhy napětí u složené nádoby

Při odvození obecného vztahu pro kontaktní tlak v provozním stavu p_k^{prov} budeme uvažovat montážní přesah Δr_k . Z obr. 5 vyplývá, že přesah je dán součtem radiálních posuvů jednotlivých komponent.



Obr. 5 Deformační posuvy na kontaktní ploše

Z důvodu malých deformací je možné pro naše výpočty uvažovat, že $r_k \cong r_k' \cong r_k''$. Pro přesah platí podle obr. 8 vztah

$$\Delta r_k = |u^i(r_k)| + u^e(r_k) \quad (2 - 23)$$

Do této deformační podmínky dosadíme vztahy pro radiální posuvy jednotlivých komponent (2 - 35) a (2 - 39). Posuvy uvažujeme na poloměru r_k a při působení provozního kontaktního tlaku p_k^{prov} . Po dosazení získáme obecný vzorec pro přesah u dvouplášťová nádoby složené ze dvou komponent s různými materiálovými charakteristikami.

$$\Delta r_k = \frac{1 - \mu_e}{E_e} \cdot \frac{p_k^{\text{prov}} \cdot r_k^2 - p_e \cdot r_e^2}{r_e^2 - r_k^2} \cdot r_k + \frac{1 - \mu_e}{E_e} \cdot (p_k^{\text{prov}} - p_e) \cdot \frac{r_k^2 \cdot r_e^2}{r_e^2 - r_k^2} \cdot \frac{1}{r_k} - \left[\frac{1 - \mu_i}{E_i} \cdot \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_k^{\text{prov}} \cdot r_k^2}{r_k^2 - r_i^2} \cdot r_k + \frac{1 - \mu_i}{E_i} \cdot (p_i - p_k^{\text{prov}}) \cdot \frac{r_i^2 \cdot r_k^2}{r_k^2 - r_i^2} \cdot \frac{1}{r_k} \right] \quad (2 - 24)$$

Vyjádříme ze vzorce (2 - 44) vztah (2 - 45) pro provozní kontaktní tlak p_k^{prov} :

$$p_k^{\text{prov}} = \frac{E_e \cdot (r_e^2 - r_k^2) \cdot \Delta r_k + 2 \cdot p_e \cdot r_k \cdot r_e^2 + 2 \cdot p_i \cdot \frac{E_e}{E_i} \cdot \frac{r_e^2 - r_k^2}{r_k^2 - r_i^2} \cdot r_i^2 \cdot r_k}{(1 - \mu_e) \cdot r_k^3 + (1 + \mu_e) \cdot r_k \cdot r_e^2 + (1 - \mu_i) \cdot \frac{E_e}{E_i} \cdot \frac{r_e^2 - r_k^2}{r_k^2 - r_i^2} \cdot r_k^3 + (1 + \mu_i) \cdot \frac{E_e}{E_i} \cdot \frac{r_e^2 - r_k^2}{r_k^2 - r_i^2} \cdot r_i^2 \cdot r_k} \quad (2 - 25)$$

kde jednotlivé členy v čitateli vztahu vyjadřují vliv na kontaktní tlak:

$$E_e \cdot (r_e^2 - r_k^2) \cdot \Delta r_k \quad \text{vliv deformačního zatížení přesahem}$$

$$2 \cdot p_e \cdot r_k \cdot r_e^2 \quad \text{vliv vnějšího zatížení}$$

$$2 \cdot p_i \cdot \frac{E_e}{E_i} \cdot \frac{r_e^2 - r_k^2}{r_k^2 - r_i^2} \cdot r_i^2 \cdot r_k \quad \text{vliv provozního zatížení}$$

Dále pro zjednodušení uvažujme, že tlaková nádoba je navrhována z materiálů se stejnými materiálovými charakteristikami a tedy platí:

$$E_e = E_i = E \quad (2 - 26)$$

$$\mu_e = \mu_i = \mu \quad (2 - 27)$$

vztahy (2 - 26) a (2 - 27) dosadíme do vzorce (2 - 25) a po úpravě získáme vztah pro provozní kontaktní tlak u nádoby ze stejných materiálů.

$$p_k^{\text{prov}} = \frac{E \cdot (r_e^2 - r_k^2) \cdot (r_k^2 - r_i^2) \cdot \Delta r_k}{2 \cdot r_k^3 \cdot (r_e^2 - r_i^2)} + \frac{p_e \cdot r_e^2 - p_i \cdot r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} + \frac{r_i^2 \cdot r_e^2 \cdot (p_i - p_e)}{r_k^2 \cdot (r_e^2 - r_i^2)} \quad (2 - 28)$$

Tento vztah bude aplikován při řešení optimalizace složených nádob.

3. FORMULACE OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY

3.1. Základní pojmy a možnosti optimalizace

Základní pojmy:

Každá optimalizační úloha je obecně definována vektorem návrhových proměnných, cílovou funkcí a případnými restrikcemi. Pro lepší přehlednost matematického popisu je výhodné jako návrhové proměnné zvolit bezrozměrné geometrické a tlakové parametry, které budou definovány při řešení jednotlivých úloh.

- Vektor návrhových proměnných \mathbf{x} v našem případě obsahuje poloměry kontaktních ploch r_j a provozní tlaky v kontaktních plochách p_j^{prov} .

$$\mathbf{x} = [r_2 \dots r_j, p_2^{prov} \dots p_j^{prov}]^T \quad (3 - 1)$$

- Volba cílové funkce závisí na typu optimalizační úlohy. Jako cílová funkce může být uvažována hodnota vnějšího poloměru složené nádoby, přípustné zatížení p_i anebo hodnota vnitřního poloměru složené nádoby.

- Restrikce optimalizační úlohy jsou dvojího typu (viz [2]). Explicitní rovnice (3 - 2) vyplývají buď z omezených rozměrů pracovního prostoru nebo souvisí s omezením přípustné hodnoty přesahu v kontaktu komponent technologickými podmínkami montáže,

$$x_l \leq x_{D,l} \quad (3 - 2)$$

kde $x_{D,l}$ označuje maximální přípustnou hodnotu návrhové proměnné x_l . Implicitní restrikce (3 - 3) jsou formulovány pro nebezpečná místa komponent nádoby,

$$\sigma_{red,j} \leq \sigma_{D,j} \quad (3 - 3)$$

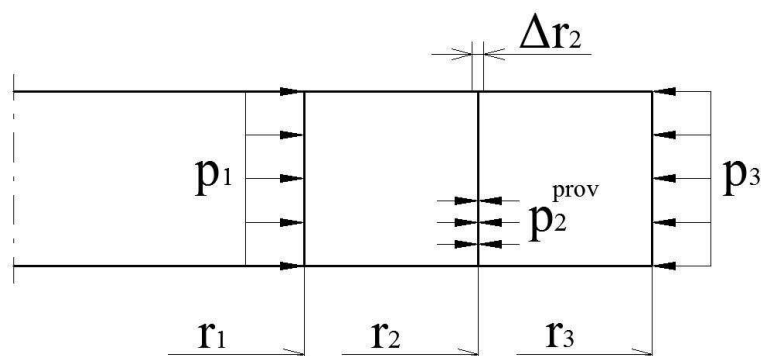
kde $\sigma_{D,j}$ označuje dovolené napětí pro j -tou komponentu.

Cílem optimalizačního procesu je nalezení lokálního extrému cílové funkce $\psi(\mathbf{x})$. Hledáme tedy takové hodnoty návrhových proměnných \mathbf{x} , které splňují podmínku extrému cílové funkce.

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (3 - 4)$$

Možnosti optimalizace:

Příklad formulací optimalizační úlohy si ukážeme na příkladu dvouplášťové nádoby (obr. 6),



Obr. 6 Dvouplášťová nádoba

kde podle volby cílové funkce lze určit:

- 1) Dáno: p_1, r_1, p_3
Cíl: minimální vnější rozměr r_3
Návrhové proměnné: $r_2, \Delta r_2$
- 2) Dáno: r_1, r_3, p_3
Cíl: maximální provozní zatížení p_1
Návrhové proměnné: $r_2, \Delta r_2$
- 2) Dáno: p_1, r_3, p_3
Cíl: maximální objem pracovního prostoru r_1
Návrhové proměnné: $r_2, \Delta r_2$

Montážní přesah Δr_2 je ekvivalentní provoznímu kontaktnímu tlaku p_2^{prov} . Vazba mezi Δr_2 a p_2^{prov} je vyjádřena vztahem (2 - 28).

Dále se zaměříme na případ, kdy je jako cílová funkce uvažován vnější poloměr nádoby. Budeme tedy hledat lokální minimum cílové funkce $\psi(\mathbf{x})$, kde j označuje počet komponent.

$$\psi(\mathbf{x}) = r_{j+1}(\mathbf{x}) \quad (3 - 5)$$

4. ŘEŠENÍ OPTIMALIZACE SLOŽENÉ NÁDOBY

Z důvodu omezené únosnosti jednoplášťové nádoby se používají nádoby víceplášťové. My se v této kapitole zaměříme na nádoby dvou, tří a čtyřplášťové pro které sestavíme cílové funkce a určíme optimální funkci pro zjištění minimálního vnějšího rozměru. Výpočty provedeme analytickou metodou, k tomu využijeme výpočetní software MAPLE 12, jehož výhodou je schopnost analytického řešení matematických problémů. Analogicky lze řešit i větší počet komponent

Vnější zatížení neuvažujeme a u nádob víceplášťových budeme z důvodu jednoduššího řešení předpokládat stejné materiálové charakteristiky všech komponent, tedy platí:

$$p_e = 0 \quad (4 - 1)$$

pro nádoby tří a čtyřplášťové:

$$E_e = E_i = E \quad (4 - 2)$$

$$\mu_e = \mu_i = \mu \quad (4 - 3)$$

$$\sigma_D^{(i)} = \sigma_D^{(j)} = \sigma_D^{(e)} \quad (4 - 4)$$

4.1. Dvouplášťová nádoba

Jsou dány následující vstupní parametry dvouplášťové nádoby

-vnitřní poloměr r_1

-vnitřní tlak p_1

-materiálové charakteristiky všech komponent

vnitřní: E_1, μ_1

vnější: E_2, μ_2

Vektor návrhových proměnných obsahuje následující proměnné

$$\mathbf{x} = [r_2, p_2^{prov}]^T \quad (4 - 5)$$

Pro další zápis využijeme z důvodu zjednodušení matematického řešení bezrozměrné parametry charakterizující zatížení, materiály a geometrii komponent, které jsou definovány vztahy (4 - 6) až (4 - 10) – označení veličin viz obr. 9.

$$m = \frac{\sigma_D^{(1)}}{p_1} \quad (4 - 6) \quad n = \frac{\sigma_D^{(2)}}{p_1} \quad (4 - 7)$$

$$a = \frac{r_2}{r_1} \quad (4 - 8) \quad b = \frac{r_3}{r_2} \quad (4 - 9)$$

$$x = \frac{p_2^{prov}}{p_1} \quad (4 - 10)$$

pak vektor bezrozměrných návrhových proměnných

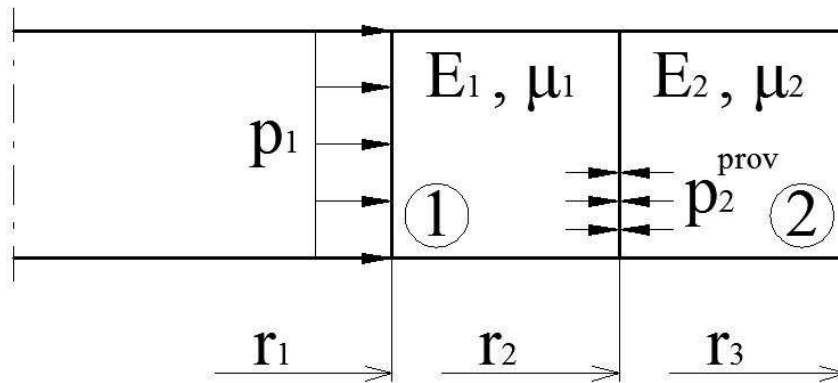
$$\mathbf{x} = [a, b, x]^T \quad (4 - 11)$$

Zavedeme cílovou funkci v bezrozměrném stavu

$$f = \frac{r_3(\mathbf{x})}{r_1} \quad (4 - 12)$$

druhá mocnina cílové funkce lze zapsat jako součin dvou členů (4 - 8) a (4 - 9).

$$f^2 = \frac{r_3^2}{r_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{r_3^2}{r_2^2} = a^2 \cdot b^2 \quad (4 - 13)$$



Obr. 7 Dvouplášťová nádoba

Sestavíme podmínky bezpečnosti pro vnitřní povrch u každé komponenty dvouplášťové nádoby (obr. 7). Tyto podmínky představují vazby mezi návrhovými proměnnými. Využijeme vztah pro radiální a obvodové napětí (2 - 1).

komponenta 1:

radiální a obvodové napětí na poloměru r_1

$$\sigma_{r,t}^{(1)}(r_1) = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \mp (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4 - 14)$$

podmínka bezpečnosti pro nebezpečné místo na poloměru r_1

$$\sigma_D^{(1)} = \sigma_t^{(1)}(r_1) - \sigma_r^{(1)}(r_1) \quad (4 - 15)$$

$$\sigma_D^{(1)} = \frac{2 \cdot p_1 \cdot r_1^2 - 2 \cdot p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4 - 16)$$

po přepsání pomocí bezrozměrných parametrů získáme:

$$m = \frac{2 \cdot a^2 \cdot (1 - x)}{a^2 - 1} \quad (4 - 17)$$

odtud geometrický parametr

$$a^2 = \frac{m}{m - 2 + 2 \cdot x} \quad (4 - 18)$$

komponenta 2:

radiální a obvodové napětí na poloměru r_2

$$\sigma_{r,t}^{(2)}(r_2) = \frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \mp \frac{p_2 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \quad (4 - 19)$$

podmínka bezpečnosti pro nebezpečné místo na poloměru r_2

$$\sigma_D^{(2)} = \sigma_t^{(2)}(r_2) - \sigma_r^{(2)}(r_2) \quad (4 - 20)$$

$$\sigma_D^{(2)} = \frac{2 \cdot p_2 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \quad (4 - 21)$$

po přepsání pomocí bezrozměrných parametrů získáme:

$$n = \frac{2 \cdot b^2 \cdot x}{b^2 - 1} \quad (4 - 22)$$

odtud geometrický parametr

$$b^2 = \frac{n}{n - 2 \cdot x} \quad (4 - 23)$$

Z rovnic (4 - 13), (4 - 18) a (4 - 23) po úpravě získáme cílovou funkci f , u které budeme hledat její minimum.

$$f = \sqrt{\frac{m}{m - 2 + 2 \cdot x} \cdot \frac{n}{n - 2 \cdot x}} \quad (4 - 24)$$

Cílovou funkci derivujeme

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{m}{m - 2 + 2 \cdot x} \cdot \frac{n}{n - 2 \cdot x}} \right) \quad (4 - 25)$$

Derivaci po zjednodušení položíme rovno nule, čímž získáme rovnici o jedné neznámé x .

$$\frac{m \cdot n \cdot (m - 2 + 4 \cdot x - n)}{\sqrt{\frac{m \cdot n}{(m - 2 + 2 \cdot x) \cdot (n - 2 \cdot x)} \cdot (n - 2 \cdot x)^2 \cdot (m - 2 + 2 \cdot x)^2}} = 0 \quad (4 - 26)$$

Řešením této rovnice je optimální hodnota návrhové proměnné x .

$$x = \left\{ -\frac{1}{4} \cdot m + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot n \right\} \quad (4 - 27)$$

Po dosazení zpět do vzorce (4 - 24) obdržíme minimum funkce f pro dvouplášťovou nádobu.

$$f = 2 \cdot \sqrt{\frac{m \cdot n}{(m + n - 2)^2}} \quad (4 - 28)$$

Postup určení montážního přesahu Δr_2

- ze vztahů (4 - 27) a (4 - 10) vypočítáme optimální hodnotu provozního kontaktního tlaku p_2^{prov}
- dosazením (4 - 27) do (4 - 18) vypočítáme optimální hodnotu kontaktního poloměru r_2
- montážní přesah Δr_2 určíme dosazením dříve vypočítaných p_2^{prov} a r_2 do vztahu (2 - 24)

4.1.1. Studie vlivu volby materiálu pro komponenty

Volba materiálu pro komponenty má velký vliv na výsledný rozměr nádoby, proto se nyní zaměříme na různé kombinace materiálů. Pro všechny možnosti vyjádříme cílové funkce, které poté vykreslíme do jednoho grafu.

Obě komponenty jsou ze stejného materiálu

Jsou-li oba materiály stejné, platí:

$$m = n \quad (4 - 29)$$

Dosadíme-li (4 - 29) do (4 - 27) obdržíme optimální hodnotu návrhové proměnné pro případ, kdy jsou obě komponenty ze stejného materiálu:

$$x = \frac{1}{2} \quad (4 - 30)$$

z tohoto výsledku vyplývá, že optimální kontaktní tlak je polovina zatížení.

Optimální funkce (4 - 28) bude mít s uvažováním podmínky (4 - 29) tvar:

$$f_s = 2 \cdot \sqrt{\frac{n^2}{(2n - 2)^2}} \quad (4 - 31)$$

Index s značí, že optimální hodnota cílové funkce byla řešena pro komponenty ze stejného materiálu.

Vnitřní komponenta je z kvalitnějšího materiálu

Je-li materiál vnitřní komponenty kvalitnější, platí např. $\sigma_D^{(1)} = \frac{4}{3} \cdot \sigma_D^{(2)}$ pak:

$$m = \frac{4}{3} n \quad (4 - 32)$$

Dosadíme-li (4 - 32) do (4 - 27), obdržíme optimální hodnotu návrhové proměnné pro případ, kdy je vnitřní komponenta z kvalitnějšího materiálu:

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} n \quad (4 - 33)$$

Optimální funkce (4 - 28) bude mít s uvážením podmínky (4 - 32) tvar:

$$f_i = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{n^2}{(7n-6)^2}} \quad (4 - 34)$$

Index i značí, že optimální hodnota cílové funkce byla řešena pro vnitřní komponentu z kvalitnějšího materiálu.

Vnější komponenta je z kvalitnějšího materiálu

Je-li materiál vnější komponenty kvalitnější, platí např. $\sigma_D^{(1)} = \frac{3}{4} \cdot \sigma_D^{(2)}$ pak:

$$m = \frac{3}{4}n \quad (4 - 35)$$

Dosadíme-li (4 - 35) do (4 - 27), obdržíme optimální hodnotu návrhové proměnné pro případ, kdy je vnější komponenta z kvalitnějšího materiálu:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}n \quad (4 - 36)$$

Optimální funkce (4 - 28) bude mít s uvážením podmínky (4 - 35) tvar:

$$f_e = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{n^2}{(7n-8)^2}} \quad (4 - 37)$$

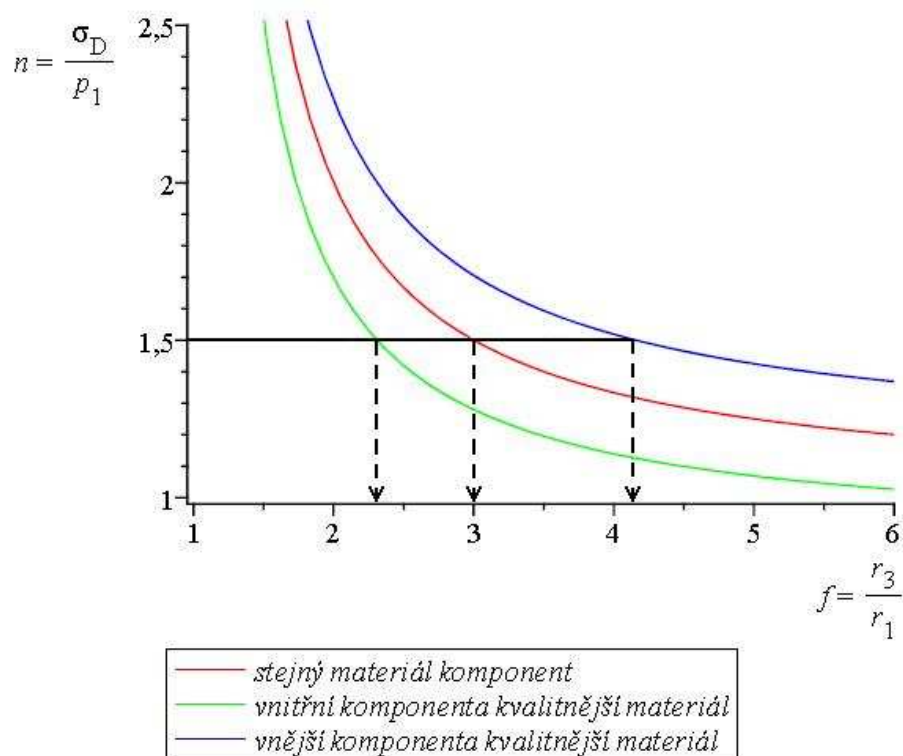
Index e značí, že optimální hodnota cílové funkce byla řešena pro vnější komponentu z kvalitnějšího materiálu.

Pro porovnání vlivu volby materiálu vyneseme tyto tři funkce do jednoho grafu. Z důvodu lepší čitelnosti grafu vyjádříme zatížení v závislosti na geometrii. Z funkcí (4 - 31), (4 - 34) a (4 - 37) vyjádříme n . Index 2 značí, že jde o dvouplášťovou nádobu.

$$n_{2,s} = \frac{f}{f-1} \quad (4 - 38)$$

$$n_{2,e} = \frac{8 \cdot (7 \cdot f + 4 \cdot \sqrt{3}) \cdot f}{49 \cdot f^2 - 48} \quad (4 - 39)$$

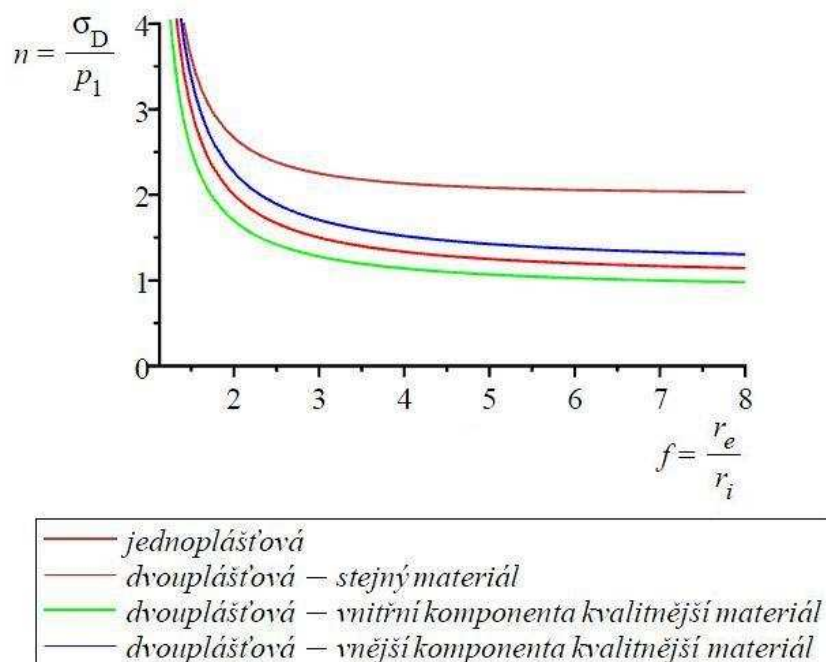
$$n_{2,i} = \frac{6 \cdot (7 \cdot f + 4 \cdot \sqrt{3}) \cdot f}{49 \cdot f^2 - 48} \quad (4 - 40)$$



Graf 2 Vliv volby materiálu pro komponenty

Nyní porovnáme jednoplášťovou a dvouplášťovou nádobu. Do grafu 2 vykreslíme i funkci pro jednoplášťovou nádobu, z které také vyjádříme n . Index 1 značí, že jde o jednoplášťovou nádobu.

$$n_1 = \frac{2 \cdot f^2}{f^2 - 1} \quad (4 - 41)$$



Graf 3 Přípustné zatížení jednoplášťové a dvouplášťové nádoby (s uvažováním různých materiálů)

Z grafu 3 vyplývá, že pro zatížení větší než polovina dovoleného napětí je vhodnější použít dvouplášťovou nádobu. Na grafu 2 je zobrazen vliv materiálu komponent. Například při zvolené hodnotě $n=1,5$ vidíme, že nejmenšího rozměru nádoby dosáhneme při použití kvalitnějšího materiálu na vnitřní komponentu.

4.2. Tříplášťová nádoba

Jsou dány následující vstupní parametry dvouplášťové nádoby

-vnitřní poloměr r_1

-vnitřní tlak p_1

-materiálové charakteristiky všech komponent

Vektor návrhových proměnných obsahuje následující proměnné

$$\mathbf{x} = [r_2, p_2^{prov}]^T \quad (4 - 42)$$

Postup je obdobný jako u nádoby dvouplášťové. Opět využijeme bezrozměrné parametry charakterizující zatížení, materiál a geometrii komponent, které jsou definovány vztahy

(4 - 43) až (4 - 48) - označení veličin viz obr. 8.

$$n = \frac{\sigma_D}{p_1} \quad (4 - 43)$$

$$a = \frac{r_2}{r_1} \quad (4 - 44) \quad b = \frac{r_3}{r_2} \quad (4 - 45) \quad c = \frac{r_4}{r_3} \quad (4 - 46)$$

$$x = \frac{p_2^{prov}}{p_1} \quad (4 - 47) \quad y = \frac{p_3^{prov}}{p_1} \quad (4 - 48)$$

pak vektor bezrozměrných návrhových proměnných

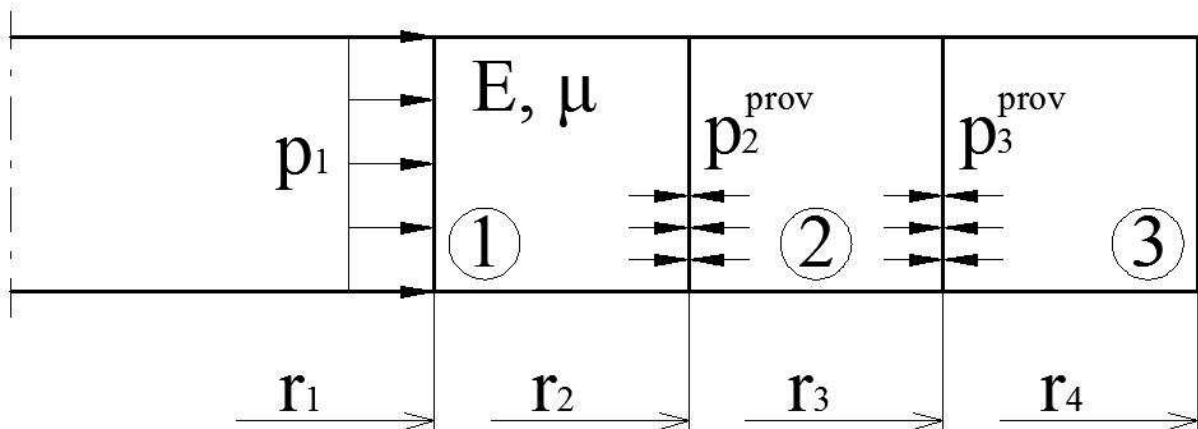
$$\mathbf{x} = [a, b, c, x, y]^T \quad (4 - 49)$$

Zavedeme cílovou funkci v bezrozměrném stavu

$$f = \frac{r_4(\mathbf{x})}{r_1} \quad (4 - 50)$$

druhá mocnina cílové funkce lze zapsat jako součin tří členů (4 - 44), (4 - 45) a (4 - 46).

$$f^2 = \frac{r_3^2}{r_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{r_3^2}{r_2^2} \cdot \frac{r_4^2}{r_3^2} = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \quad (4 - 51)$$



Obr. 8 Tříplášťová nádoba

Sestavíme podmínky bezpečnosti pro vnitřní povrch u každé komponenty tříplášťové nádoby (obr. 10). Tyto podmínky představují vazby mezi návrhovými proměnnými. Využijeme vztah pro radiální a obvodové napětí (2 - 1).

komponenta 1:

radiální a obvodové napětí na poloměru r_1

$$\sigma_{r,t}^{(1)}(r_1) = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \mp (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4 - 52)$$

podmínka bezpečnosti pro nebezpečné místo na poloměru r_1

$$\sigma_D^{(1)} = \sigma_t^{(1)}(r_1) - \sigma_r^{(1)}(r_1) \quad (4 - 53)$$

$$\sigma_D^{(1)} = \frac{2 \cdot p_1 \cdot r_1^2 - 2 \cdot p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4 - 54)$$

po přepsání pomocí bezrozměrných parametrů získáme:

$$m = \frac{2 \cdot a^2 \cdot (1 - x)}{a^2 - 1} \quad (4 - 55)$$

odtud geometrický parametr

$$a^2 = \frac{m}{m - 2 + 2 \cdot x} \quad (4 - 56)$$

komponenta 2:

radiální a obvodové napětí na poloměru r_2

$$\sigma_{r,t}^{(2)}(r_2) = \frac{p_2 \cdot r_2^2 - p_3 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \mp (p_2 - p_3) \cdot \frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \quad (4 - 57)$$

podmínka bezpečnosti pro nebezpečné místo na poloměru r_2

$$\sigma_D^{(2)} = \sigma_t^{(2)}(r_2) - \sigma_r^{(2)}(r_2) \quad (4 - 58)$$

$$\sigma_D^{(2)} = \frac{2 \cdot p_2 \cdot r_3^2 - 2 \cdot p_3 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \quad (4 - 59)$$

po přepsání pomocí bezrozměrných parametrů získáme:

$$n = \frac{2 \cdot b^2 \cdot (x - y)}{b^2 - 1} \quad (4 - 60)$$

odtud geometrický parametr

$$b^2 = \frac{n}{n - 2 \cdot x + 2 \cdot y} \quad (4 - 61)$$

komponenta 3:

radiální a obvodové napětí na poloměru r_3

$$\sigma_{r,t}^{(3)}(r_3) = \frac{p_3 \cdot r_3^2}{r_4^2 - r_3^2} \mp \frac{p_3 \cdot r_4^2}{r_4^2 - r_3^2} \quad (4 - 62)$$

podmínka bezpečnosti pro nebezpečné místo na poloměru r_3

$$\sigma_D^{(3)} = \sigma_t^{(3)}(r_3) - \sigma_r^{(3)}(r_3) \quad (4 - 63)$$

$$\sigma_D^{(3)} = \frac{2 \cdot p_3 \cdot r_4^2}{r_4^2 - r_3^2} \quad (4 - 64)$$

po přepsání pomocí bezrozměrných parametrů získáme:

$$n = \frac{2 \cdot c^2 \cdot y}{c^2 - 1} \quad (4 - 65)$$

odtud geometrický parametr

$$c^2 = \frac{n}{n - 2 \cdot y} \quad (4 - 66)$$

Z rovnic (4 - 51), (4 - 56), (4 - 61) a (4 - 66) po úpravě získáme cílovou funkci f , u které budeme hledat její minimum.

$$f = \sqrt{\frac{n}{n - 2 + 2 \cdot x} \cdot \frac{n}{n - 2 \cdot x + 2 \cdot y} \cdot \frac{n}{n - 2 \cdot y}} \quad (4 - 67)$$

Nyní je cílovou funkcí funkce dvou proměnných, proto derivujeme podle x a y .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{n}{n-2+2 \cdot x} \cdot \frac{n}{n-2 \cdot x-2 \cdot y} \cdot \frac{n}{n-2 \cdot y}} \right) \quad (4 - 68)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{\frac{n}{n-2+2 \cdot x} \cdot \frac{n}{n-2 \cdot x-2 \cdot y} \cdot \frac{n}{n-2 \cdot y}} \right) \quad (4 - 69)$$

Derivace po zjednodušení položíme rovno nule, čímž získáme dvě rovnice o dvou neznámých x a y .

$$\frac{2 \cdot n^3 \cdot (2 \cdot x - y - 1)}{\sqrt{\frac{n^3}{(n-2+2 \cdot x) \cdot (n-2 \cdot x+2 \cdot y) \cdot (n-2 \cdot y)}} \cdot (n-2+2 \cdot x)^2 \cdot (n-2 \cdot x+2 \cdot y)^2 \cdot (n-2 \cdot y)} = 0 \quad (4 - 70)$$

$$\frac{2 \cdot n^3 \cdot (-2 \cdot y + x)}{\sqrt{\frac{n^3}{(n-2+2 \cdot x) \cdot (n-2 \cdot x+2 \cdot y) \cdot (n-2 \cdot y)}} \cdot (n-2+2 \cdot x) \cdot (n-2 \cdot x+2 \cdot y)^2 \cdot (n-2 \cdot y)^2} = 0 \quad (4 - 71)$$

Řešením této soustavy jsou optimální hodnoty návrhových proměnných x a y .

$$x = \left\{ \frac{2}{3} \right\} \quad (4 - 72) \quad y = \left\{ \frac{1}{3} \right\} \quad (4 - 73)$$

Po dosazení zpět do vzorce (4 - 67) obdržíme minimum funkce f pro tříplášťovou nádobu.

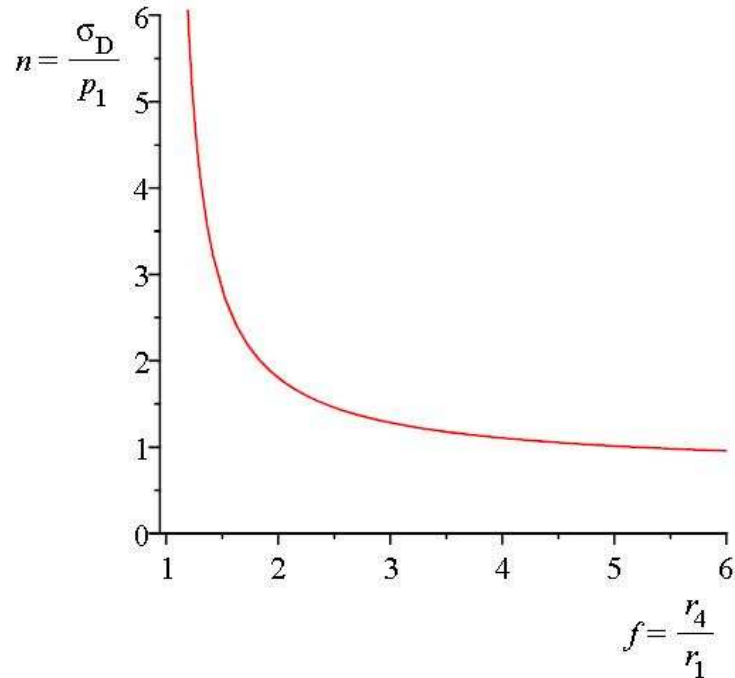
$$f = \sqrt{\frac{n^3}{\left(n - \frac{2}{3}\right)^3}} \quad (4 - 74)$$

Postup určení montážních přesahů Δr_2 a Δr_3

- ze vztahů (4 - 72) a (4 - 47) vypočítáme optimální hodnotu provozního kontaktního tlaku p_2^{prov}
- ze vztahů (4 - 73) a (4 - 48) vypočítáme optimální hodnotu provozního kontaktního tlaku p_3^{prov}
- dosazením (4 - 72) a (4 - 73) do (4 - 67) určíme f , z (4 - 50) vypočítáme optimální hodnotu vnějšího poloměru r_4
- dosazením (4 - 72) do (4 - 56) určíme a , z (4 - 44) vypočítáme optimální hodnotu kontaktního poloměru r_2
- dosazením (4 - 73) do (4 - 66) určíme c , z (4 - 46) a poloměru r_4 vypočítáme optimální hodnotu kontaktního poloměru r_3

- montážní přesah Δr_2 určíme dosazením dříve vypočítaných p_2^{prov} a r_2 do vztahu (2 - 24)
 - montážní přesah Δr_3 určíme dosazením dříve vypočítaných p_3^{prov} a r_3 do vztahu (2 - 24)
- Ze vztahu (4 - 74) vyjádříme n jako funkci f a tuto závislost vyneseme do grafu 4.

$$n = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{f^4} + \sqrt[3]{f^2} + f^2}{f^2 - 1} \quad (4 - 75)$$



Graf 4 Závislost velikosti přípustného zatížení a geometrie tříplášťové nádoby

4.3. Čtyřplášťová nádoba

Jsou dány následující vstupní parametry dvouplášťové nádoby

- vnitřní poloměr r_1
- vnitřní tlak p_1
- materiálové charakteristiky všech komponent

Vektor návrhových proměnných obsahuje následující proměnné

$$\mathbf{x} = [r_2, p_2^{prov}]^T \quad (4 - 76)$$

Postup je analogický jako v předchozích případech. Využijeme bezrozměrné parametry charakterizující zatížení, materiál a geometrii komponent, které jsou definovány vztahy (4 - 77) až (4 - 84) - označení veličin viz obr. 11.

$$n = \frac{\sigma_D}{p_1} \quad (4 - 77)$$

$$a = \frac{r_2}{r_1} \quad (4 - 78)$$

$$b = \frac{r_3}{r_2} \quad (4 - 79)$$

$$c = \frac{r_4}{r_3} \quad (4 - 80)$$

$$d = \frac{r_5}{r_4} \quad (4 - 81)$$

$$x = \frac{p_2^{prov}}{p_1} \quad (4 - 82) \quad y = \frac{p_3^{prov}}{p_1} \quad (4 - 83) \quad z = \frac{p_4^{prov}}{p_1} \quad (4 - 84)$$

pak vektor bezrozměrných návrhových proměnných

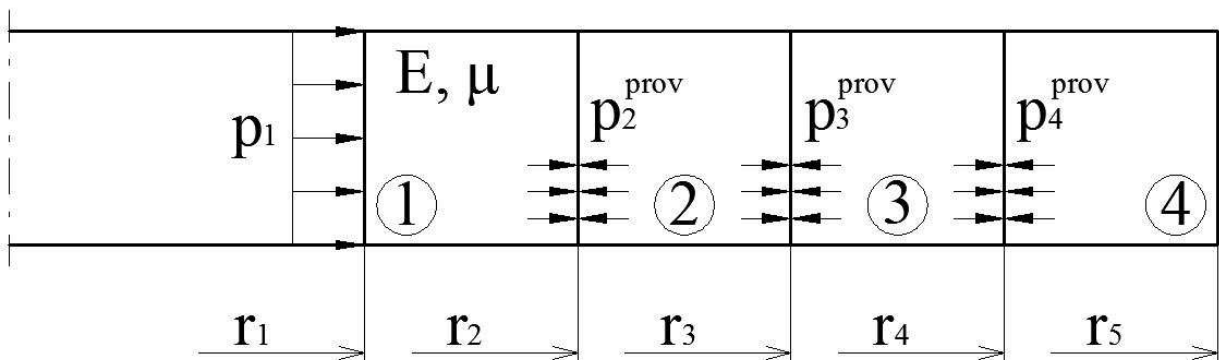
$$\mathbf{x} = [a, b, c, d, x, y, z]^T \quad (4 - 85)$$

Zavedeme cílovou funkci v bezrozměrném stavu

$$f = \frac{r_5(\mathbf{x})}{r_1} \quad (4 - 86)$$

druhá mocnina cílové funkce lze zapsat jako součin čtyř členů (4 - 78), (4 - 79), (4 - 80) a (4 - 81).

$$f^2 = \frac{r_3^2}{r_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{r_3^2}{r_2^2} \cdot \frac{r_4^2}{r_3^2} \cdot \frac{r_5^2}{r_4^2} = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot d^2 \quad (4 - 87)$$



Obr. 9 Čtyřplášťová nádoba

Sestavíme podmínky bezpečnosti pro vnitřní povrch u každé komponenty čtyřplášťové nádoby (obr. 9). Tyto podmínky představují vazby mezi návrhovými proměnnými. Využijeme vztah pro radiální a obvodové napětí (2 - 1).

komponenta 1:

radiální a obvodové napětí na poloměru r_1

$$\sigma_{r,t}^{(1)}(r_1) = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \mp (p_1 - p_2) \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4 - 88)$$

podmínka bezpečnosti pro nebezpečné místo na poloměru r_1

$$\sigma_D^{(1)} = \sigma_t^{(1)}(r_1) - \sigma_r^{(1)}(r_1) \quad (4 - 89)$$

$$\sigma_D^{(1)} = \frac{2 \cdot p_1 \cdot r_1^2 - 2 \cdot p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4 - 90)$$

po přepsání pomocí bezrozměrných parametrů získáme:

$$m = \frac{2 \cdot a^2 \cdot (1 - x)}{a^2 - 1} \quad (4 - 91)$$

odtud geometrický parametr

$$a^2 = \frac{m}{m - 2 + 2 \cdot x} \quad (4 - 92)$$

komponenta 2:

radiální a obvodové napětí na poloměru r_2

$$\sigma_{r,t}^{(2)}(r_2) = \frac{p_2 \cdot r_2^2 - p_3 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \mp (p_2 - p_3) \cdot \frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \quad (4 - 93)$$

podmínka bezpečnosti pro nebezpečné místo na poloměru r_2

$$\sigma_D^{(2)} = \sigma_t^{(2)}(r_2) - \sigma_r^{(2)}(r_2) \quad (4 - 94)$$

$$\sigma_D^{(2)} = \frac{2 \cdot p_2 \cdot r_3^2 - 2 \cdot p_3 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \quad (4 - 95)$$

po přepsání pomocí bezrozměrných parametrů získáme:

$$n = \frac{2 \cdot b^2 \cdot (x - y)}{b^2 - 1} \quad (4 - 96)$$

odtud geometrický parametr

$$b^2 = \frac{n}{n - 2 \cdot x + 2 \cdot y} \quad (4 - 97)$$

komponenta 3:

radiální a obvodové napětí na poloměru r_3

$$\sigma_{r,t}^{(3)}(r_3) = \frac{p_3 \cdot r_3^2 - p_4 \cdot r_4^2}{r_4^2 - r_3^2} \mp (p_3 - p_4) \cdot \frac{r_4^2}{r_4^2 - r_3^2} \quad (4 - 98)$$

podmínka bezpečnosti pro nebezpečné místo na poloměru r_3

$$\sigma_D^{(3)} = \sigma_t^{(3)}(r_3) - \sigma_r^{(3)}(r_3) \quad (4 - 99)$$

$$\sigma_D^{(3)} = \frac{2 \cdot p_3 \cdot r_4^2 - 2 \cdot p_4 \cdot r_4^2}{r_4^2 - r_3^2} \quad (4 - 100)$$

po přepsání pomocí bezrozměrných parametrů získáme:

$$n = \frac{2 \cdot c^2 \cdot (y - z)}{c^2 - 1} \quad (4 - 101)$$

odtud geometrický parametr

$$c^2 = \frac{n}{n - 2 \cdot y + 2 \cdot z} \quad (4 - 102)$$

komponenta 4:

radiální a obvodové napětí na poloměru r_4

$$\sigma_{r,t}^{(4)}(r_4) = \frac{p_4 \cdot r_4^2}{r_5^2 - r_4^2} \mp \frac{p_4 \cdot r_5^2}{r_5^2 - r_4^2} \quad (4 - 103)$$

podmínka bezpečnosti pro nebezpečné místo na poloměru r_3

$$\sigma_D^{(4)} = \sigma_t^{(4)}(r_4) - \sigma_r^{(4)}(r_4) \quad (4 - 104)$$

$$\sigma_D^{(4)} = \frac{2 \cdot p_4 \cdot r_5^2}{r_5^2 - r_4^2} \quad (4 - 105)$$

po přepsání pomocí bezrozměrných parametrů získáme:

$$n = \frac{2 \cdot d^2 \cdot z}{d^2 - 1} \quad (4 - 106)$$

odtud geometrický parametr

$$d^2 = \frac{n}{n - 2 \cdot z} \quad (4 - 107)$$

Z rovnic (4 - 87), (4 - 92), (4 - 97), (4 - 102) a (4 - 107) po úpravě získáme cílovou funkci f , u které budeme hledat její minimum.

$$f = \sqrt{\frac{n}{n - 2 + 2 \cdot x} \cdot \frac{n}{n - 2 \cdot x + 2 \cdot y} \cdot \frac{n}{n - 2 \cdot y + 2 \cdot z} \cdot \frac{n}{n - 2 \cdot z}} \quad (4 - 108)$$

Nyní je cílovou funkcí funkce tří proměnných, proto derivujeme podle x , y a z .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{n}{n-2+2 \cdot x} \cdot \frac{n}{n-2 \cdot x+2 \cdot y} \cdot \frac{n}{n-2 \cdot y+2 \cdot z} \cdot \frac{n}{n-2 \cdot z}} \right) \quad (4 - 109)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{\frac{n}{n-2+2 \cdot x} \cdot \frac{n}{n-2 \cdot x+2 \cdot y} \cdot \frac{n}{n-2 \cdot y+2 \cdot z} \cdot \frac{n}{n-2 \cdot z}} \right) \quad (4 - 110)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\sqrt{\frac{n}{n-2+2 \cdot x} \cdot \frac{n}{n-2 \cdot x+2 \cdot y} \cdot \frac{n}{n-2 \cdot y+2 \cdot z} \cdot \frac{n}{n-2 \cdot z}} \right) \quad (4 - 111)$$

Derivace po zjednodušení položíme rovno nule, čímž získáme tři rovnice o třech neznámých x , y a z .

$$2 \cdot n^4 \cdot (2 \cdot x - y - 1) \left/ \left(\sqrt{\frac{n^4}{(n-2+2 \cdot x) \cdot (n-2 \cdot x+2 \cdot y) \cdot (n-2 \cdot y+2 \cdot z) \cdot (n-2 \cdot z)}} \cdot \frac{1}{(n-2+2 \cdot x)^2 \cdot (n-2 \cdot x-2 \cdot y)^2 \cdot (n-2 \cdot y+2 \cdot z) \cdot (n-2 \cdot z)} \right) \right. = 0 \quad (4 - 112)$$

$$- [2 \cdot n^4 \cdot (x - 2 \cdot y + z)] \left/ \left(\sqrt{\frac{n^4}{(n-2+2 \cdot x) \cdot (n-2 \cdot x+2 \cdot y) \cdot (n-2 \cdot y+2 \cdot z) \cdot (n-2 \cdot z)}} \cdot \frac{1}{(n-2+2 \cdot x) \cdot (n-2 \cdot x-2 \cdot y)^2 \cdot (n-2 \cdot y+2 \cdot z)^2 \cdot (n-2 \cdot z)} \right) \right. = 0 \quad (4 - 113)$$

$$- [2 \cdot n^4 \cdot (y - 2 \cdot z)] \left/ \left(\sqrt{\frac{n^4}{(n-2+2 \cdot x) \cdot (n-2 \cdot x+2 \cdot y) \cdot (n-2 \cdot y+2 \cdot z) \cdot (n-2 \cdot z)}} \cdot \frac{1}{(n-2+2 \cdot x) \cdot (n-2 \cdot x-2 \cdot y) \cdot (n-2 \cdot y+2 \cdot z)^2 \cdot (n-2 \cdot z)^2} \right) \right. = 0 \quad (4 - 114)$$

Řešením této soustavy jsou optimální hodnoty návrhových proměnných x , y a z .

$$x = \left\{ \frac{3}{4} \right\} \quad (4 - 115) \quad y = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \quad (4 - 116) \quad z = \left\{ \frac{1}{4} \right\} \quad (4 - 117)$$

Po dosazení zpět do vzorce (4 - 108) obdržíme minimum funkce f pro čtyřplášťovou nádobu.

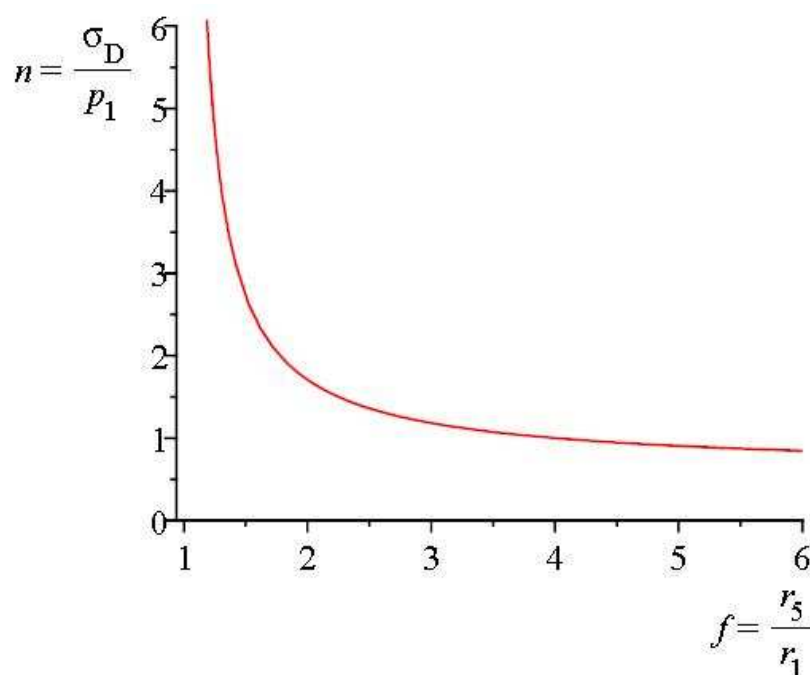
$$f = \sqrt{\frac{n^4}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^4}} \quad (4 - 118)$$

Postup určení montážních přesahů Δr_2 , Δr_3 a Δr_4

- ze vztahů (4 - 115) a (4 - 82) vypočítáme optimální hodnotu provozního kontaktního tlaku p_2^{prov}
- ze vztahů (4 - 116) a (4 - 83) vypočítáme optimální hodnotu provozního kontaktního tlaku p_3^{prov}
- ze vztahů (4 - 117) a (4 - 84) vypočítáme optimální hodnotu provozního kontaktního tlaku p_4^{prov}
- dosazením (4 - 115), (4 - 116) a (4 - 117) do (4 - 108) určíme f , z (4 - 86) vypočítáme optimální hodnotu vnějšího poloměru r_5
- dosazením (4 - 115) do (4 - 92) určíme a , z (4 - 78) vypočítáme optimální hodnotu kontaktního poloměru r_2
- dosazením (4 - 115) a (4 - 116) do (4 - 97) určíme b , z (4 - 79) a poloměru r_2 vypočítáme optimální hodnotu kontaktního poloměru r_3
- dosazením (4 - 117) do (4 - 107) určíme d , z (4 - 81) a poloměru r_5 vypočítáme optimální hodnotu kontaktního poloměru r_4
- montážní přesah Δr_2 určíme dosazením dříve vypočítaných p_2^{prov} a r_2 do vztahu (2 - 24)
- montážní přesah Δr_3 určíme dosazením dříve vypočítaných p_3^{prov} a r_3 do vztahu (2 - 24)
- montážní přesah Δr_4 určíme dosazením dříve vypočítaných p_4^{prov} a r_4 do vztahu (2 - 24)

Ze vztahu (4 - 118) vyjádříme n jako funkci f a tuto závislost vyneseme do grafu 5.

$$n = \frac{1}{2} \cdot \frac{f + \sqrt{f}}{f - 1} \quad (4 - 119)$$



Graf 5 Závislost velikosti přípustného zatížení a geometrie čtyřplášťové nádoby

5. POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ ŘEŠENÍ

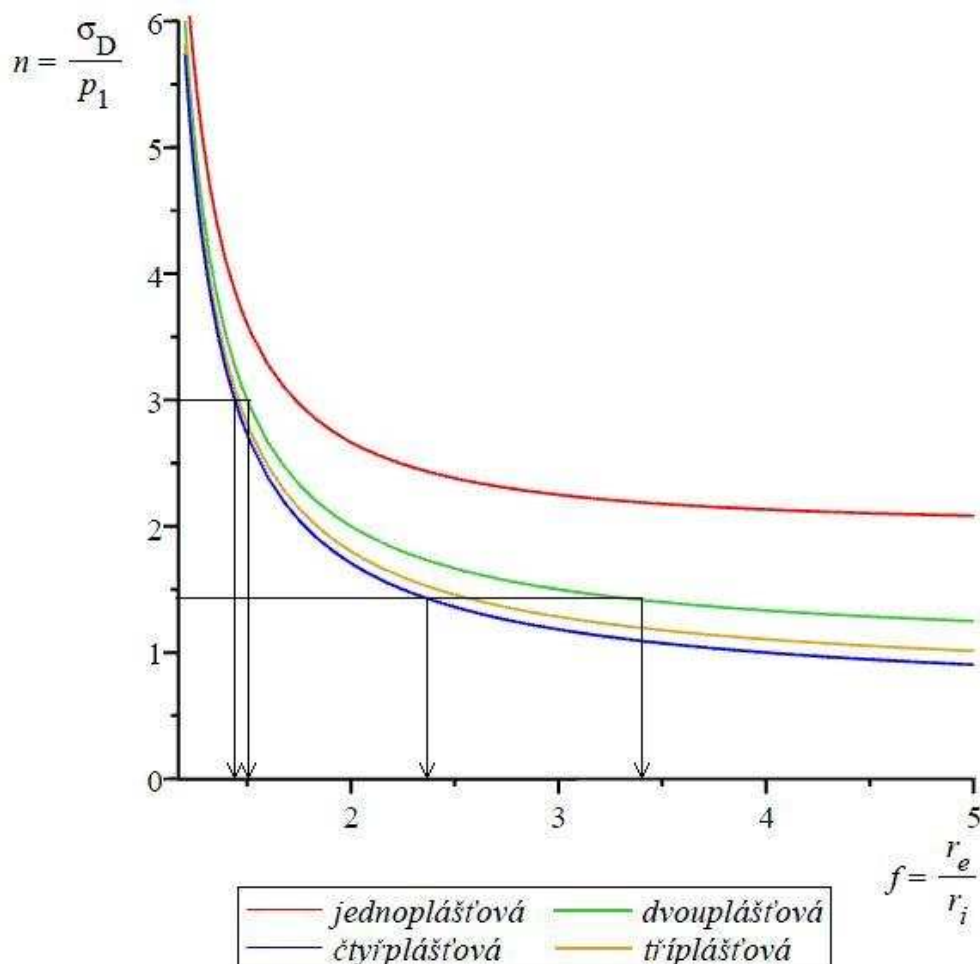
V této kapitole provedeme srovnání všech tlakových nádob řešených v předchozích kapitolách. Do jednoho grafu vykreslíme všechny funkce jako závislost zatížení na velikosti geometrie. Jednotlivé indexy označují počet komponent nádoby.

$$n_1 = \frac{2 \cdot f^2}{f^2 - 1} \quad (5 - 1)$$

$$n_2 = \frac{f}{f - 1} \quad (5 - 2)$$

$$n_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{f^4} + \sqrt[3]{f^2} + f^2}{f^2 - 1} \quad (5 - 3)$$

$$n_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{f + \sqrt{f}}{f - 1} \quad (5 - 4)$$



Graf 6 Porovnání tlakových nádob

Z grafu 6 vyplývá, že pro dané zatížení dosáhneme nejmenšího vnějšího rozměru použitím víceplášťové nádoby. Je zřejmé, že se zvyšováním provozního zatížení roste vliv volby počtu komponent na potřebný vnější rozměr.

6. ZHODNOCENÍ A ZÁVĚR

V této práci byly uvedeny vztahy pro výpočet napětí a posuvu u jednoplášťové nádoby. Tyto vztahy byly dále aplikovány na případ dvou složených komponent a byl odvozen vzorec pro určení provozního kontaktního tlaku p_k^{prov} , který byl použit při řešení optimalizační úlohy.

Jako cíl naší optimalizace jsme si zvolili minimalizaci vnějšího rozměru nádoby r_e . Při řešení jsme využili bezrozměrných parametrů, které výrazně zjednodušily matematický zápis a samotné řešení. U dvouplášťové nádoby jsme uvažovali i vliv volby materiálu komponent. Ukázalo se, že chceme-li při daném vnitřním zatížení dosáhnout minimálního vnějšího poloměru, je vhodné použít pro vnitřní komponentu kvalitnější materiál. Dále jsme řešili nádoby tří a čtyřplášťové, při řešení jsme z důvodu zjednodušení matematického zápisu předpokládali stejný materiál pro všechny komponenty. Lze řešit i nádoby složené z více komponent, výpočet je analogický a mění se pouze počet neznámých veličin.

V závěru práce bylo provedeno porovnání všech řešených nádob. Při malém zatížení je rozdíl mezi víceplášťovými nádobami nepatrný. S rostoucím zatížením roste vliv počtu komponent na výsledný vnější rozměr.

7. SEZNAM POUŽITÝCH VELIČIN

Uvedené veličiny jsou uspořádány podle výskytu v textu.

σ_1, σ_3	[MPa]	hlavní napětí
ε_t	[-]	délkové přetvoření
σ_r	[MPa]	radiální napětí
σ_t	[MPa]	tangenciální napětí
σ_z	[MPa]	axiální napětí
u	[mm]	deformační posuv v radiálním směru
r	[mm]	poloměr nádoby
E	[MPa]	Youngův modul pružnosti v tahu
μ	[-]	Poissonovo číslo
i	[-]	index označující vnitřní plochu nádoby
e	[-]	index označující vnější plochu nádoby
p	[-]	tlak působící na ploše
σ_{red}	[MPa]	reduované napětí podle Guestovy podmínky
k	[-]	index označující kontaktní plochu nádoby
Δr_k	[mm]	montážní přesah
σ_k	[MPa]	mez kluzu
σ_D	[MPa]	dovolené napětí
n, m	[-]	bezrozměrný parametr charakterizující materiál
f	[-]	bezrozměrný parametr charakterizující geometrii
k_{ki}, k_{ke}		návrhové bezpečnosti
p_k^{mont}	[MPa]	montážní kontaktní tlak
p_k^{prov}	[MPa]	provozní kontaktní tlak
\mathbf{x}		vektor návrhových proměnných
$\psi(\mathbf{x})$		cílové funkce
j		počet komponent
a	[-]	bezrozměrný parametr charakterizující geometrii
b	[-]	bezrozměrný parametr charakterizující geometrii
c	[-]	bezrozměrný parametr charakterizující geometrii
d	[-]	bezrozměrný parametr charakterizující geometrii
x	[-]	bezrozměrný parametr charakterizující zatížení
y	[-]	bezrozměrný parametr charakterizující zatížení
z	[-]	bezrozměrný parametr charakterizující zatížení

8. SEZNAM LITERATURY

- [1] Ondráček, E., Vrbka, J., Janíček, P., Burša, J.: *Mechanika těles-pružnost a pevnost II*. 4. přeprac. vyd. Brno: CERM, 2006. 262 s. ISBN 80-214-3260-8
- [2] Kolektiv: *Pružnost a pevnost II Základy obecné pružnosti a pevnosti*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1980. 233 s.
- [3] Suchánek, M., Vrbka, J.: Optimalizace složené vysokotlaké lisovnice s vinutým pláštěm. *Inženýrská mechanika*, červen 1993, č. 3, s. 10-21
- [4] Michalec, J.: *Pružnost a pevnost II*. 1. vyd. Praha: ČVUT Praha, 1994. 215 s. ISBN 80-01-01087-2

9. PŘÍLOHY

K této práci je přiložena následující příloha:

CD obsahující:

- digitální dokumentace bakalářské práce ve formátu pdf
- program vytvořený v softwaru MAPLE