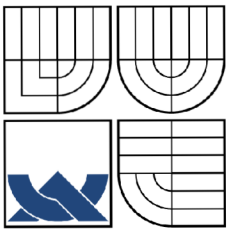


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

AUTONOMNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE
AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR
LENKA BOKIŠOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR
Mgr. ZDENĚK OPLUŠTIL, Ph.D.

BRNO 2009

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá řešením autonomních diferenciálních rovnic. Pozornost je věnována základním matematickým modelům růstu jednodruhové populace. Je zde uveden Malthusův model, model s vnitrodruhovou konkurencí a dále rozebrán model růstu populace pod predačním tlakem. Získané poznatky jsou aplikovány na konkrétních matematických modelech rybolovu. Jsou rozlišeny případy, kdy rybolov je konstantní a závislý na velikosti populace. Dále je zkoumán model lovu sardinek se speciální růstovou funkcí. V každém modelu je řešena otázka stability stacionárních řešení.

Abstract

This bachelor's thesis is concerned with solution of autonomous differential equations. Attention is devoted to the basic mathematical models of population growth of single species. It is here mentioned Malthus model, model with intraspecific competition and analyzed the model of population growth under predation. The acquired knowledge is applied to specific mathematical models of fisheries. Here are distinguish cases where fishing is a constant and depends on the size of the population. Moreover, it is studied the model of fishing of sardines with special growth function. In each model is dealt with the question of stability of stationary solutions.

klíčová slova

Autonomní diferenciální rovnice, matematické modely, růst jednodruhové populace

key words

Autonomous differential equations, mathematical models, population growth of single species

BOKIŠOVÁ, L.: *Autonomní diferenciální rovnice*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Autonomní diferenciální rovnice* vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Zdeňka Opluštila, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Lenka Bokišová

Děkuji svému školiteli Mgr. Zdeňku Opluštilovi, Ph.D. za rady a připomínky při vedení mé bakalářské práce.

Lenka Bokišová

Obsah

1 Úvod **10**

2 Základní pojmy **11**
2.1 Existence a jednoznačnost řešení 12
2.2 Prodlužování řešení 13
2.3 Rovnice se separovanými proměnnými 13

3 Autonomní rovnice **15**
3.1 Stabilita řešení 17

4 Matematické modely růstu jednodruhové populace **18**
4.1 Malthusův model růstu populace živých organismů 18
4.2 Model růstu s vnitrodruhovou konkurencí 20
4.3 Model růstu populace pod predačním tlakem 23

5 Praktické modely **27**
5.1 Populace vystavená konstantnímu rybolovu 27
5.2 Populace vystavená rybolovu úměrnému velikosti populace 29
5.3 Model sardinky 31

6 Závěr **35**

1 Úvod

Diferenciální rovnice jsou velmi důležité z hlediska jejich častých aplikací. Při matematické formulaci mnohých problémů z fyziky, biologie a různých technických oborů totiž docházíme k rovnicím, v nichž se vyskytuje neznámá funkce a její derivace. Diferenciální rovnice se v matematice poprvé objevily v pracích G. W. Leibnitze (1646–1716) a I. Newtona (1642–1727), který pomocí nich zkoumal pohyby planet sluneční soustavy. V 18. stol. následoval prudký rozvoj teorie diferenciálních rovnic, o který se zasloužili A. Clairaut (1713–1765), J. d'Alembert (1717–1783), J. L. Lagrange (1736–1813) a zejména L. Euler (1707–1783), který při řešení úloh z mechaniky zavedl dnešní analytický způsob zápisu a pochází od něj mnohé objevy v oblasti diferenciálních rovnic. Později se ještě studovaly různé existenční otázky, vlastnosti řešení, singulární případy, numerické metody řešení atd.

Často se setkáváme se speciálním případem diferenciální rovnice, ve které nefiguruje nezávislá proměnná, obvykle čas. Jde o autonomní rovnice (systémy), popisující jevy, při kterých se s časem nemění podmínky jevu. Autonomní rovnice (systémy) mají zásadní význam v praktických modelech (např. radioaktivní rozpad, model růstu lidské populace, model dravec–kořist). Já jsem se ve své práci omezila na autonomní rovnice a tedy na modely růstu jednodruhové populace.

Úvodní kapitoly této práce jsou věnovány obecné teorii diferenciálních rovnic 1. řádu – základním definicím, problému jednoznačnosti řešení a rovnicím se separovanými proměnnými. Třetí kapitola obsahuje teoretický základ pro analýzu autonomních rovnic včetně stability řešení. Ve čtvrté kapitole jsou rozebrány základní modely popisující růst jednodruhové populace. Nakonec jsou ve páté kapitole získané poznatky aplikovány v konkrétních modelech, využívajících se v praxi.

2 Základní pojmy

Buď D podmnožina euklidovského prostoru $\mathbb{R}^2$ a f reálná funkce definovaná na D. Rovnice

$$x' = f(t, x), \tag{2.1}$$

se nazývá *diferenciální rovnice 1. řádu.*

Definice 2.1. *Řešením* této rovnice nazýváme každou funkci $x(t)$, která je diferencovatelná v nějakém intervalu I a splňuje podmínky

$$[t, x(t)] \in D \quad \text{a} \quad x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{pro každé } t \in I.$$

Graf řešení se nazývá *integrální křivka.*

Příklad 2.2. Řešením dif. rovnice $x' = a$, kde a je daný parametr (D je nezáporná polorovina $t \geq 0$) je každá funkce $x = at + k$, $t \geq 0$ a k je nějaká reálná konstanta.

Definice 2.3. Nechť $[t_0, x_0]$ je libovolný bod z oblasti D. Úloha určit řešení rovnice (2.1), které vyhovuje počáteční podmínce

$$x(t_0) = x_0, \tag{2.2}$$

se nazývá *počáteční úloha (počáteční problém* nebo také *Cauchyho úloha*).

Příklad 2.4. Jestliže je $[t_0, x_0]$ bodem poloroviny $t \geq 0$, pak je funkce $x = at + (x_0 - at_0)$, $t \geq 0$ řešením počáteční úlohy

$$x' = a, \quad x(t_0) = x_0.$$

Definice 2.5. *Úplné řešení* počátečního problému (2.1), (2.2) je takové, které není zúžením žádného jiného řešení. Existuje-li úplné řešení tohoto počátečního problému takové, že každé jiné řešení tohoto problému je jeho zúžením, budeme říkat, že daný problém má právě jedno řešení.

Obecným řešením rovnice (2.1) budeme rozumět funkci závisející na jednom parametru C takovou, že speciální volbou C lze získat řešení každého počátečního problému (2.1).

Příklad 2.6. Obecným řešením rovnice $x' = a$ je funkce $x = at + C$, $C \in \mathbb{R}$.

2.1 Existence a jednoznačnost řešení

Nyní se budeme zabývat existencí a jednoznačností počáteční úlohy (2.1), (2.2).

Příklad 2.7. Vezměme si např. diferenciální rovnici

$$x' = 2\sqrt{x}, \quad x(t_0) = x_0.$$

Tato rovnice má obecné řešení dáno implicitně rovnicí

$$\sqrt{x} = t + C,$$

a po dosazení počáteční podmínky

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \leq (t_0 - \sqrt{x_0}) \\ (t - t_0 + \sqrt{x_0})^2 & \text{pro } t \geq (t_0 - \sqrt{x_0}) \end{cases}.$$

Rozeberme si nyní existenci a jednoznačnost řešení tohoto počátečního problému v závislosti na počáteční podmínce:

1. Buď $x_0 = 0$, tedy bude zadaná počáteční podmínka např. $x(0) = 0$. Řešením takového počátečního problému je funkce $x(t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R}$, a také $y(t) = t^2$, přičemž $x(t) \neq y(t)$ pro $t > 0$. V tomto případě tedy není počáteční problém jednoznačně řešitelný.

2. Pro $x_0 > 0$, např. $x(0) = 1$, získáme dosazením řešení $x(t) = (t + 1)^2$, která je pro $t \geq -1$ jednoznačným řešením této počáteční úlohy.

3. Mějme $x_0 < 0$ a tedy počáteční podmínku např. $x(0) = -1$. Řešení takového počátečního problému není definováno, protože pro záporné hodnoty x není definována odmocnina na pravé straně zadané rovnice.

Z uvedených příkladů plyne, že ne každá počáteční úloha (2.1), (2.2) je řešitelná na daném intervalu, resp. má jediné řešení. Následující věty nám dávají dostatečné podmínky zaručující jednoznačnou řešitelnost resp. řešitelnost počáteční úlohy (2.1), (2.2).

Věta 2.8. (Picardova.) *Nechť funkce $f(t, x)$ definovaná v $D \in \mathbb{R}^2$ je spojitá v dvourozměrné uzavřené oblasti $\overline{R}$*

$$\overline{R} = \{(t, x) : t_0 - a \leq t \leq t_0 + a,\ x_0 - b \leq x \leq x_0 + b\},$$

kde $(t_0, x_0) \in D$ a $a, b \in \mathbb{R}^+$ a splňuje Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnné x, tzn.

$$\exists\, L > 0, \qquad \text{že} \qquad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

pro libovolnou dvojici $(t, x_1), (t, x_2) \in \overline{R}$. Potom existuje právě jedno řešení počátečního problému (2.1), (2.2), které je definované na intervalu $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, kde

$$\delta = \min(\, a, \frac{b}{m}\,),$$

přičemž

$$m = \max_{\overline{R}} |f(t, x)|.$$

Věta 2.9. (Peanova.) *Nechť je funkce $f(t,x)$ definovaná v D a ke každému bodu $(t_0,x_0) \in D$ existují taková čísla $a > 0$, $b > 0$, že f je spojitá v dvourozměrné uzavřené oblasti $\overline{R}$*

$$\overline{R} = \{(t,x) : t_0 - a \leq t \leq t_0 + a,\ x_0 - b \leq x \leq x_0 + b\}.$$

Pak existuje alespoň jedno řešení počátečního problému (2.1), (2.2), které je definované na intervalu $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$, kde δ je dáno vztahem $\delta = \min(\, a, \frac{b}{m}\,)$ (a m vztahem $m \geq |f(t,x)|$ v $\overline{R}$).

2.2 Prodlužování řešení

Uvažované řešení se dá ale často zobecnit na širší interval než je $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$, specifikovaný v předchozích větách.

Nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá v oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Buď x řešení rovnice (2.1), které je definované na intervalu I. Existuje-li řešení y rovnice (2.1) definované na intervalu $J \supset I$ takovém, že $J - \bar{I} \neq \emptyset$ a platí-li na I $y(t) = x(t)$, nazývá se řešení y *prodloužením* řešení x (na interval J). Mají-li navíc intervaly I, J stejné levé krajní body, mluvíme o prodloužení řešení x *napravo*; v případě stejných pravých krajních bodů intervalů I, J mluvíme o prodloužení řešení x *nalevo*.

Připomeňme, že řešení x rovnice (2.1), které není zúžením žádného jiného řešení této rovnice, se nazývá úplné.

Řešením x, které nelze prodloužit napravo se nazývá ω-*úplné* a řešení x, které nelze prodloužit nalevo se nazývá α-*úplné*.

Věta 2.10. (O existenci úplného řešení.) *Buď $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funkce spojitá v oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Je-li x libovolné řešení rovnice (2.1), pak je buď úplné, nebo existuje úplné řešení y, které je prodloužením řešení x.*

2.3 Rovnice se separovanými proměnnými

Speciálním typem diferenciální rovnice , jejíž vlastnosti budeme později využívat, je rovnice

$$x' = g(t)h(x), \tag{2.3}$$

která se nazývá *rovnice se separovanými proměnnými*.

Nejprve se budeme zabývat speciálním tvarem rovnice (2.3)

$$x' = h(x). \tag{2.4}$$

Věta 2.11. *Nechť $h \in C^0(c,d)$ a pro každé $x \in (c,d)$ je $h(x) \neq 0$. Pak má pro $\forall x_0 \in (c,d)$ a $t_0 \in \mathbb{R}$ počáteční problém (2.4), (2.2) právě jedno řešení. Toto řešení je určeno vzorcem*

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dv}{h(v)}.$$

Následující věta nám udává jak se chovají řešení rovnice (2.4) v okolí nulového bodu funkce h.

Věta 2.12. *Buď $h \in C^0(c,d\rangle$, $h(x) \neq 0$ pro $x \in (c,d)$ a $h(d) = 0$. Nechť*

$$\lim_{\lambda \to d-} \left| \int^{\lambda} \frac{dv}{h(v)} \right| = \infty$$

Pak má počáteční úloha (2.4), (2.2) pro každé $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (c,d\rangle$ právě jedno řešení.

Příklad 2.13.
1. Řešme rovnici

$$x' = (1 - x).$$

Funkce $h(x) = 1 - x$ je spojitá na celé číselné ose a $h(x) = 0$ pro $x = 1$.
Platí

$$\lim_{\lambda \to 1} \left| \int^{\lambda} \frac{dv}{1-v} \right| = \lim_{\lambda \to 1} \big| - \ln|1 - \lambda| \big| = \infty,$$

a podle předchozí věty tedy každým bodem $[t_0, x_0]$ prochází právě jedno řešení, definované pro všechna $t \in \mathbb{R}$, které je pro $x_0 \neq 1$ určeno rovnicí

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dv}{1-v} = t_0 - \ln \left| \frac{1-x}{1-x_0} \right|,$$

odkud vyjádříme x

$$x = 1 + (x_0 - 1) \cdot \mathrm{e}^{(t_0 - t)}.$$

Tento vzorec zahrnuje všechna řešení včetně $x = 1$.

2. Mějme rovnici

$$x' = \sqrt{1-x}$$

jejíž pravá strana je spojitá pro $x \leq 1$ a nulová pro $x = 1$.

$$\lim_{\lambda \to 1} \left| \int^{\lambda} \frac{dv}{\sqrt{1-x}} \right| = \lim_{\lambda \to 1-} | - 2 \cdot \sqrt{1-\lambda}| = 0 \neq \infty$$

z čehož podle věty 2.12 vyplývá nejednoznačnost řešení.
Skutečně řešení je implicitně dáno rovnicí

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dv}{\sqrt{1-v}} = t_0 - 2\sqrt{1-x} + 2\sqrt{1-x_0}$$

odkud

$$x = x_0 + (t - t_0) \cdot \sqrt{1-x_0} - \frac{1}{4}(t-t_0)^2.$$

Toto řešení je definováno na intervalu $t \in (-\infty, t_0 + 2\sqrt{1-x_0}\rangle$ a zřejmě není úplné, neboť uvažovaná rovnice má také řešení $x = 1$. Úplné řešení má tedy tvar

$$x = \begin{cases} x_0 + (t-t_0)\sqrt{1-x_0} - \frac{1}{4}(t-t_0)^2 & \text{pro} \quad t \leq t_0 + 2\sqrt{1-x_0} \\ 1 & \text{pro} \quad t \geq t_0 + 2\sqrt{1-x_0} \end{cases}.$$

Na přímce $x = 1$ je porušena jednoznačnost řešení.

Obecně se počáteční úloha pro rovnici se separovanými proměnnými dá řešit na základě následující věty.

Věta 2.14. *Nechť $g \in C^0(a,b)$, $h \in C^0(c,d)$ a pro každé $x \in (c,d)$ je $h(x) \neq 0$. Dále nechť $t_0 \in (a,b)$, $x_0 \in (c,d)$ jsou libovolné body. Pak má počáteční problém*

$$x' = g(t)h(x), \quad x(t_0) = x_0$$

právě jedno řešení x definované na nějakém intervalu I. Toto řešení je určeno vzorcem

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dv}{h(v)} = \int_{t_0}^{t} g(u)du \quad \text{pro každé } t \in I.$$

3 Autonomní rovnice

Autonomní rovnicí nazýváme diferenciální rovnici

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{3.1}$$

kde funkce f je definovaná na nějaké množině $G \subseteq \mathbb{R}$. Jedná se o speciální případ rovnice se separovanými proměnnými. Budeme předpokládat, že f je spojitá funkce a že počáteční problém (3.1) s podmínkou $x(t_0) = x_0$ má jediné řešení pro libovolné $[t_0, x_0] \in \mathbb{R} \times G$. Řešením budeme rozumět úplné řešení. Množina G se nazývá *fázový prostor*, proměnnou t nazýváme *čas*.

Řešení $x = \varphi(t)$ rovnice (3.1) lze interpretovat buďto jako graf funkce $x = \varphi(t)$ v prostoru $\mathbb{R} \times G$, nebo jako křivku v množině G danou parametricky rovnicí $x = \varphi(t)$. Ve druhém případě se taková křivka nazývá *trajektorie* rovnice (3.1). Je to kolmý průmět grafu $x = \varphi(t)$ z $\mathbb{R} \times G$ do fázového prostoru G. Směr plynutí času se na trajektorii vyznačuje šipkami.

Věta 3.1. *Buď $x = \varphi(t)$ řešení rovnice (3.1) splňující počáteční podmínku $\varphi(t_0) = x_0$. Pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ je též $x = \psi(t) := \varphi(t + c)$ řešením (3.1) a splňuje podmínku $\psi(t - c) = x_0$. Je-li φ definované na intervalu (t_1, t_2), je ψ definované na intervalu $(t_1 - c, t_2 - c)$.*

Poznámka. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy každou trajektorii rovnice (3.1) určit počáteční podmínkou v čase $t_0 = 0$.

Věta 3.2. *Jsou-li φ, ψ řešení rovnice (3.1), pak jejich trajektorie buďto splývají, nebo nemají ani jeden bod společný.*

Definice 3.3. Bod x_0 se nazývá *singulární bod* (*kritický bod, stacionární bod, degenerovaná trajektorie*) rovnice (3.1), jestliže $f(x_0) = 0$.

Věta 3.4. *Autonomní rovnice (3.1) může mít obecně trajektorii dvojího typu:*

1. *Singulární body. Odpovídají konstantním řešením.*
2. *Trajektorie, které samy sebe neprotínají.*

Příklad 3.5. Hledejme obecné řešení autonomní rovnice $x' = x(x-2)$. Jedná se o obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu se separovanými proměnnými. Za předpokladu $x \neq 0$, $x \neq 2$ dostáváme

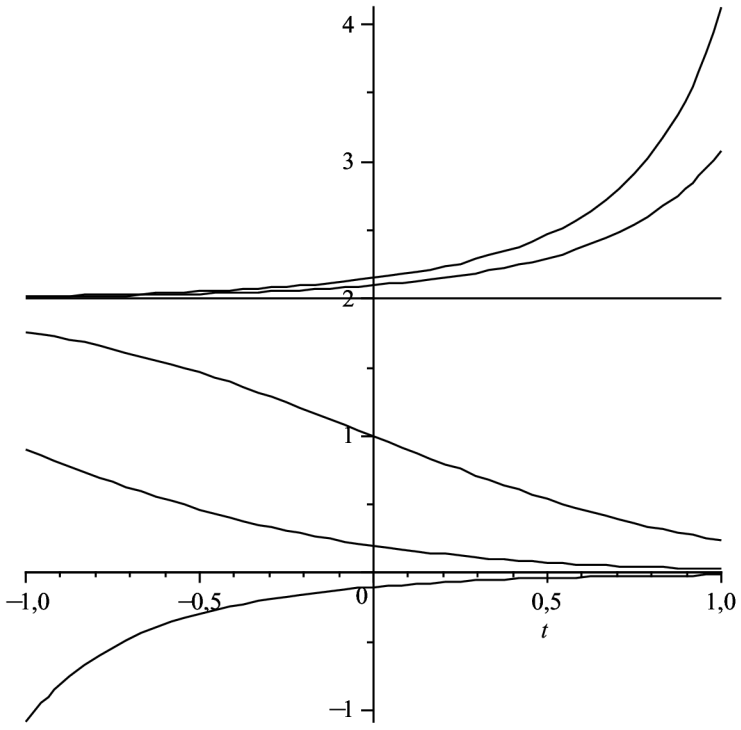
$$\frac{dx}{x(x-2)} = dt.$$

Integrant na levé straně rozložíme na parciální zlomky a řešíme integrací.

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) dx &= 2\int dt \\
\ln\left(\frac{x-2}{x}\right) &= 2t + \ln|C|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0 \\
x(t) &= \frac{2}{1 - C \cdot \mathrm{e}^{2t}}, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.
\end{aligned}$$

Mimo toto řešení má rovnice dvě konstantní řešení

$$x = 0 \quad \text{a} \quad x = 2.$$



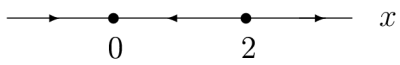
Obr. 1

Všimněme si, že řešení $x = 2$ lze zahrnout do obecného řešení volbou $C = 0$, avšak řešení $x = 0$ nelze v tomto tvaru získat žádnou volbou C (jedná se tedy o výjimečné řešení). Všechna řešení uvažované rovnice jsou tedy tvaru

$$x(t) = \frac{2}{1 - C \cdot \mathrm{e}^{2t}}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x = 0.$$

Chování některých řešení v okolí singulárních bodů je znázorněno na Obr. 1.

Fázovým prostorem je přímka x. Singulární trajektorie nám rozdělí obor hodnot x na 3 podintervaly. Pro $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ jsou řešení rostoucí a jejich trajektoriemi jsou polopřímky orientovány v kladném směru, naopak pro $x \in (0, 2)$ jsou řešení zadané rovnice klesající a tedy jejich trajektorie je úsečka orientovaná v záporném směru. Trajektorie singulárního řešení je jednobodová množina. Zobrazení trajektorií ve fázovém prostoru je znázorněno na následujícím obrázku.



Obr. 2

3.1 Stabilita řešení

Definice 3.6. Řešení x_0 rovnice (2.1) se nazývá *stabilní*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a $t_1 \geq t_0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon, t_1) > 0$ tak, že každé řešení x rovnice (2.1) vyhovující podmínce $|x(t_1) - x_0(t_1)| < \delta$ existuje pro $t \geq t_1$ a splňuje pro tato t nerovnost $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$; není-li řešení stabilní, nazývá se *nestabilní*.

Definice 3.7. Řešení x_0 rovnice (2.1) se nazývá *stejnoměrně stabilní*, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že pro každé $t_1 \geq t_0$ všechna řešení x rovnice (2.1) splňující podmínku $|x(t_1) - x_0(t_1)| < \delta$ existují pro všechna $t \geq t_1$ a splňují pro ně nerovnost $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$.

Poznámka. Je-li rovnice (2.1) autonomní a je-li x_0 konstantní řešení této rovnice, pak řešení x_0 je stejnoměrně stabilní právě tehdy, když je stabilní.

Definice 3.8. Řešení x_0 rovnice (2.1) se nazývá *asymptoticky stabilní (atraktivní)*, když je stabilní a když ke každému $t_1 \geq t_0$ existuje $\delta = \delta(t_1) > 0$ takové, že pro každé řešení x rovnice (2.1) splňující nerovnost $|x(t_1) - x_0(t_1)| < \delta$ platí

$$\lim_{t \to \infty} |x(t) - x_0(t)| = 0.$$

Věta 3.9. *Konstantní řešení x_0 rovnice (3.1) je stabilní právě tehdy, když $f'(x_0) < 0$ a nestabilní pokud $f'(x_0) > 0$.*

Příklad 3.10. Vraťme se k příkladu 3.19. Rovnice $x' = x(x - 2)$ má dvě singulární řešení, $x = 0$ a $x = 2$. Zjistěme nyní, které z nich je stabilní. Pravou stranu zderivujeme, tedy $f' = 2x - 2$, a dosadíme příslušné stacionární body, tj. $f'(0) = -2 < 0$ a $f'(2) = 2 > 0$. Tedy stacionární řešení $x = 0$ je stabilní a naopak řešení $x = 2$ je nestabilní. Tento závěr můžeme intuitivně vytušit i z obrázku fázového prostoru trajektorií dané rovnice.

4 Matematické modely růstu jednodruhové populace

Nejrůznější biologické procesy můžeme popsat pomocí matematických modelů, které jsou zapsány ve tvaru diferenciálních rovnic.

Označme $x(t)$ velikost určité populace v čase t. *Populací* nemusíme myslet pouze společenstvo lidí či živočichů, ale také souhrn organismů či částic, které se za příhodných podmínek přirozeně množí, např. bakterie, viry, dřevní hmotu rostoucího stromu, nebo třeba také souhrn radioaktivních atomů látky.

Nechť $a(t, x)$ je míra růstu, tzn. nějaká rychlost množení populace (vztažena buď na jednotku času nebo na jednotku velikosti populace). Podobně buď $b(t, x)$ míra vymírání.

Za předpokladu, že $a(t, x)$, $b(t, x)$ jsou spojité nezáporné funkce a že velikost populace $x = x(t)$ je diferencovatelná funkce, můžeme rychlost změny velikosti populace popsat diferenciální rovnicí

$$\frac{dx}{dt} = \mu(t, x) \cdot x, \tag{4.1}$$

kde $\mu(t, x) = a(t, x) - b(t, x)$. Funkce $\mu(t, x)$ je tzv. *specifická míra růstu*, která obecně může záviset nejen na t a x, ale na řadě dalších proměnných a parametrů. Matematickým modelem tedy nazýváme rovnici (4.1) spolu s podmínkami a předpoklady, kladenými na specifickou míru růstu $\mu(t, x)$.

4.1 Malthusův model růstu populace živých organismů

Zabývejme se nyní růstem populací mikroorganismů nebo lidí.

Nejjednodušším modelem je tzv. *Malthusův model*, kdy specifická míra růstu $\mu(t, x) = a(t, x) - b(t, x) = a - b = konst.$ nezávisí na velikosti populace x, tedy

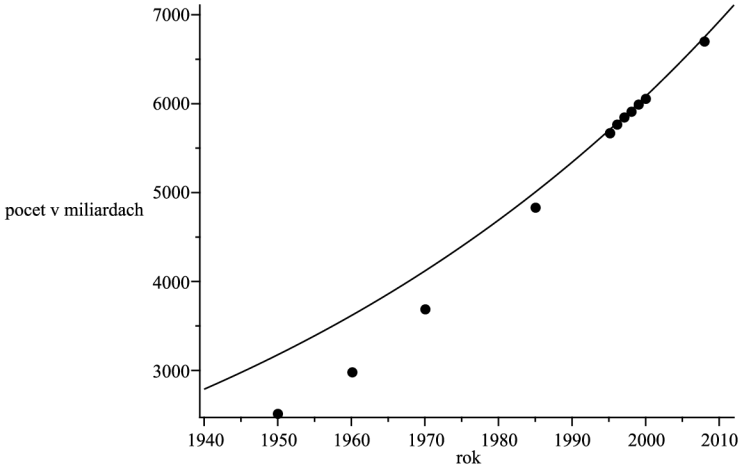
$$x' = Kx. \tag{4.2}$$

Řešením této rovnice je $x(t) = x(0)\mathrm{e}^{Kx}$, kde $x(0)$ je počáteční stav populace. Čili pokud $a > b$, populace exponenciálně roste, zatímco když $b > a$, vymírá. Malthusův model se poměrně dobře shoduje se statistickými údaji, pokud zkoumáme kratší časový interval a není-li populace příliš velká.

Příklad 4.1. V roce 1997 byl odhadován počet lidí na Zemi asi na 5,85 miliard. Průměrný roční přírůstek obyvatelstva v letech 1995–2000 byl 1,3%. Máme tedy $t_0 = 1997$, $K = 0,013$ a počáteční podmínku $x(1997) = 5850026000$. Po dosazení do (4.2) dostáváme model nárůstu lidské populace ve tvaru

$$x(t) = 5850026000 \cdot \mathrm{e}^{0,013(t-1997)}.$$

Pokud vykreslíme tuto exponenciální křivku do jednoho grafu (viz. Obr.3) společně se skutečnými hodnotami počtu obyvatel v jednotlivých letech, zjistíme, že v časovém rozmezí 1995–2000 se opravdu počty obyvatel přibližně shodovaly s naší křivkou, zatímco pro delší časový horizont se už výrazně liší.



Obr. 3: Malthusův model

4.2 Model růstu s vnitrodruhovou konkurencí

Pro větší populace už Malthusův model vhodný není a je třeba ho modifikovat. Předpokládá totiž, že populace poroste neomezeně, což je dosti nereálné - po nějaké době musí dojít ke zlomu. Organismy začnou soupeřit o omezené zdroje, tzn. dochází k *vnitrodruhové konkurenci*. Tato konkurence způsobuje zvětšení úmrtnosti nebo zmenšení porodnosti závisející na počtu soupeřících jedinců. Dochází tak ke zpomalení růstu – specifická míra růstu $\mu(x,t)$ je klesající funkcí velikosti populace.

Nejjednodušší taková funkce je lineární, tj. $\mu = a - bx$, kde a a b jsou kladné konstanty. Dosazením dostáváme rovnici

$$x' = (a - bx)x. \tag{4.3}$$

Tato rovnice se nazývá *Verhulstova* nebo *logistická*; graf jejího řešení pak *logistická křivka*.

Řešme rovnici (4.3) s počáteční podmínkou

$$x(0) = x_0 \geq 0. \tag{4.4}$$

Řešení: Danou rovnici lze upravit vydělením x^2 na tvar

$$\frac{x'}{x^2} = \frac{a}{x} - b$$

a řešit ji jako Bernoulliovu rovnici substitucí $u = \frac{1}{x}$, resp. $u' = -\frac{1}{x^2} \cdot x'$.

$$\begin{aligned} -u' &= au - b \\ \frac{u'}{au - b} &= -1 \\ \frac{1}{a} \cdot \ln|au - b| &= -t + C^* \\ au - b &= C \cdot \mathrm{e}^{-at} \\ u &= \frac{C \cdot \mathrm{e}^{-at} + b}{a} \end{aligned}$$

což po zpětném dosazení za u je

$$x(t) = \frac{a}{C \cdot \mathrm{e}^{-at} + b}.$$

Dosadíme-li počáteční podmínku $x(0) = x_0 \geq 0$ do obecného řešení, získáme $C = \frac{a}{x_0} - b$. Řešení počátečního problému (4.3), (4.4) je tedy tvaru

$$x(t) = \frac{a}{\left(\frac{a}{x_0}\right)e^{-at} + b} = \frac{ax_0}{bx_0 + (a - bx_0)e^{-at}}.$$

Tato rovnice má dva stacionární body, pro něž je $dx/dt = 0$, a to $x = 0$ a $x = a/b$. Stav $x = 0$ je nestabilní, nastane pouze pokud $x_0 = 0$. Pokud $x_0 > 0$, pak se pro $t \to \infty$ populace blíží k druhému, tentokrát stabilnímu stavu, tedy $\lim_{t\to\infty} x(t) = a/b$. Přitom je funkce x pro $x_0 \in (0, a/b)$ rostoucí, pro $x_0 > a/b$ klesající a pro $x_0 = a/b$ konstantní, tj. $x(t) \equiv a/b$. Uvedené průběhy lze interpretovat tak, že pokud na začátku sledovaného

procesu růstu nějací jedinci z uvažované populace existovali, pak se velikost populace ustálí na hodnotě a/b. Pokud neexistovali, populace se neobjeví.

Všimněme si ještě rozdílu v průběhu funkce $x(t)$ pro $x_0 > a/2b$ a $x_0 < a/2b$. Hodnota $x = a/2b$ je totiž inflexním bodem logistické křivky, protože

$$x'' = a - bx + x(-b) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{a}{2b}.$$

Tedy pro $x_0 > a/2b$ logistická křivka roste monotónně, ale v případě, že $x_0 \in (0, a/2b)$, je logistická křivka esovitě prohnutá.

Jiná funkce, která klesá v celém intervalu $(0, \infty)$, je např. dána specifickou mírou růstu $\mu = -a \ln(x/K)$, kde a, K jsou reálné parametry. Pro tuto funkci platí: $lim_{x \to 0_+} \mu(x) = \infty$. To znamená, že se malá populace brání vyhynutí stupňovanou reprodukční aktivitou nebo že několik jedinců z uvažované populace se v novém prostředí začne velice rychle množit (funkce tedy můžeme využít například při modelování rakovinného bujení).

Máme tedy rovnici

$$x' = -ax \ln \frac{x}{K} \tag{4.5}$$

s počáteční podmínkou (4.4), kde $x_0 > 0$. Její graf se nazývá *Gompertzova křivka.*

Budeme tedy hledat řešení této rovnice.

$$\begin{aligned} x' &= -ax \ln \frac{x}{K} \\ \frac{\frac{1}{x} \cdot x'}{\ln x - \ln K} &= -a \\ \ln \left| \ln \frac{x}{K} \right| &= -at + \ln C \\ x &= K \cdot \mathrm{e}^{C \cdot \mathrm{e}^{-at}}. \end{aligned}$$

Z počáteční podmínky $x_0 > 0$ dostaneme $C = \ln \frac{x_0}{K}$, a hledané řešení rovnice (4.5) je

$$x(t) = K \cdot \exp(\mathrm{e}^{-at} \cdot \ln \frac{x_0}{K}).$$

Pravou stranu Verhulstovy rovnice (4.3) lze při označení $b = a/K$ považovat za aproximaci pravé strany rovnice (4.5) v okolí bodu K. Proto zde podobně jako u logistické rovnice existuje jeden stabilní stav $x(t) = K$, tj. hodnota, na níž se velikost populace po čase ustálí. Podobně je také tato funkce x pro $x_0 \in (0, K)$ rostoucí, pro $x_0 > K$ klesající a pro $x_0 = K$ konstantní, tj. $x(t) \equiv K$. Gompertzova křivka má též jeden inflexní bod, jehož druhá souřadnice je

$$x'' = -a \cdot \ln \frac{x}{K} - ax \cdot \frac{K}{x} \cdot \frac{1}{K} = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{K}{\mathrm{e}},$$

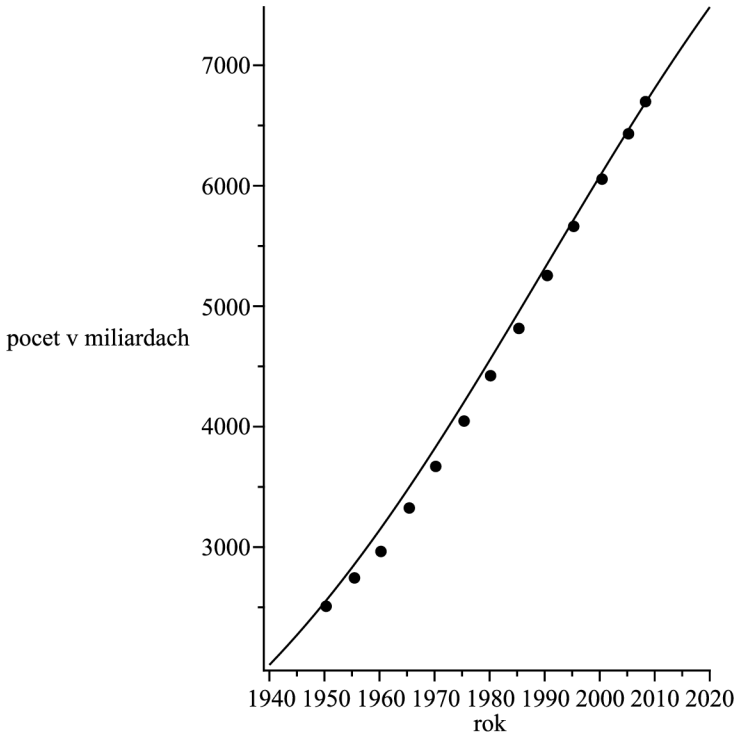
a pro $x_0 \in (0, K/\mathrm{e})$ má tedy esovitý tvar.

Příklad 4.2. Vyjděme nyní z dat v příkladu 4.25, ale aplikujme je na Verhulstovu (logistickou) rovnici. Specifická míra růstu nyní bude $\mu(t, x) = a(t, x) - b(t, x) = a - bx$, kde

hodnota koeficientu a byla odhadnuta na 0,029. Máme tedy počáteční čas $t_0 = 1997$, specifickou míru růstu naměřenou v roce 1997 $\mu(t, x) = 0,013$ a $x(1997) = 5850026000$. Parametr b snadno dopočítáme z rovnice pro specifickou míru růstu, tj. $b = (a - \mu)/x(1997) = (0,029 - 0,013)/5850026000 = 2,735 \cdot 10^{-12}$. Logistická křivka bude mít tvar

$$x(t) = \frac{0,16965 \cdot 10^9}{0,016 + 0,013 \cdot \mathrm{e}^{(-0,029t+57,913)}}.$$

Jestliže nyní vykreslíme logistickou křivku spolu se skutečně naměřenými daty (Obr. 4), vidíme, že se přibližně shodují i v širším časovém horizontu.



Obr. 4: Verhulstův model

4.3 Model růstu populace pod predačním tlakem

Vraťme se zpět k logistické rovnici. Vývoj velikosti populace v čase byl popsán rovnicí (4.3), která měla řešení x definované na intervalu $\langle 0, \infty\rangle$ takové, že $\lim_{t\to\infty} x(t) = a/b$.

Uvažujme nyní populaci, která se vyvíjí v prostředí, v němž se vyskytují i její predátoři. Tato populace ovšem netvoří jediný zdroj potravy pro populaci predátora. Jako příklad si vezměme nějaký druh hmyzu, živící se rostlinnou potravou, např. listím, jehož predátoři jsou ptáci. Uvažujme model, kde se bude hmyzí populace bez přítomnosti predátora vyvíjet podle logistické rovnice (4.3). Pokud na ní ovšem začne působit populace predátora, její růst se přirozeně zpomalí. To můžeme popsat rovnicí

$$x' = (a - bx)x - q(x). \tag{4.6}$$

Hodnota a, resp. b, $a > 0$, $b > 0$, představuje konstantu růstu, resp. vymírání populace hmyzu, hodnotu a/b budeme nazývat *nosná kapacita* neboli *úživnost prostředí*, tzn. je to nějaká velikost populace, kterou je dané prostředí schopno uživit a je závislá na množství dostupné potravy.

Funkce q popisuje zpomalení růstu v důsledku přítomnosti populace predátorů. Vyjadřuje počet jedinců populace hmyzu, které predátoři zkonzumují za jednotku času. Najděme vhodnou funkci popisující predaci. Hledaná funkce bude zřejmě rostoucí – čím větší populace bude, tím lépe ji predátor najde a více uloví. Pokud je ale populace hodně velká, predace už se dále zvětšovat nebude z důvodu nasycení populace predátorů. Existuje tedy nějaká hodnota $\alpha > 0$, na které se funkce q ustálí, tedy $\lim_{x\to\infty} q(x) = \alpha$. Důležitou vlastností funkce q je, že od určité prahové hodnoty hmyzí populace začne rychle růst a blížit se k hodnotě nasycení $\alpha > 0$, zatímco pokud je uvažovaná populace malá, je pro predátory snazší hledat si jiný zdroj obživy a tedy pro $x \to 0$ funkce q výrazně klesá. Pokud se v prostředí žádný jedinec uvažované populace nevyskytuje, musí být také predace nulová, tj. $q(0) = 0$. Z těchto vlastností vyplývá, že funkce q má esovitý průběh. Nejjednodušší taková funkce je

$$q(x) = \frac{\alpha x^2}{\beta^2 + x^2},$$

kde α, β jsou kladné konstanty. Vývoj uvažované populace se tedy bude řídit rovnicí

$$x' = (a - bx)x - \frac{\alpha x^2}{\beta^2 + x^2}. \tag{4.7}$$

Tato rovnice má čtyři parametry a, b, α, β. Každá z těchto konstant má jinou jednotku. Pro další rozbor rovnice (4.7) je ale vhodné použít bezrozměrné parametry a rovnici tedy transformovat pomocí substituce

$$v = \frac{N}{\beta}, \quad \varepsilon = \frac{a\beta}{\alpha}, \quad K = \frac{a}{b\beta}, \quad \tau = \frac{\alpha}{\beta}t$$

na bezrozměrný tvar

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = \varepsilon v\left(1 - \frac{v}{K}\right) - \frac{v^2}{1 + v^2} = f(v; \varepsilon, K). \tag{4.8}$$

Tato rovnice obsahuje pouze dva parametry ε a K, přičemž ε je přímo úměrné míře růstu a a K je přímo úměrné nosné kapacitě a/b.

Singulárními body získané rovnice (4.8) jsou řešením rovnice

$$f(v;\varepsilon,K)=0.$$

Jedno stacionární řešení je jasně $y=0$, které je vždy nestabilní, protože $f(v;\varepsilon,K)$ je v bodě 0 rostoucí. Další stacionární řešení, pokud existují, splňují rovnici

$$\varepsilon\left(1-\frac{v}{K}\right)=\frac{v}{1+v^2}. \tag{4.9}$$

Tuto kubickou rovnici nebudeme řešit analyticky z důvodu složitých algebraických úprav, navíc nás ani nezajímá přesné řešení, ale pouze počet kořenů. Proto je vhodné zjistit existenci řešení v závislosti na parametrech ε, K graficky.

Označme levou stranu rovnice (4.9) $g(v;\varepsilon,K)$, její pravou stranu $h(v)$. Grafem $y=h(v)$ je funkce vycházející z počátku [0,0], nabývající svého maxima v bodě $[1,\frac{1}{2}]$ a pro $v\to\infty$ směřující k nule. Tato křivka má jeden inflexní bod $[\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}]$.

Grafem levé strany $y=g(v;\varepsilon,K)$ je přímka procházející volenými parametry ε, K. Průsečíky této přímky s křivkou $h(v)$ nám dají řešení. Budeme vyšetřovat počet řešení pro rostoucí parametr ε, když parametr K položíme pevný (možno provést i pro pevnou hodnotu ε a proměnnou hodnotu K).

Vezměme si přímku procházející inflexním bodem křivky $y=h(v)$, která je navíc její tečnou. Tato tečna má rovnici

$$y=\frac{\sqrt{27}}{8}\left(1-\frac{v}{\sqrt{27}}\right).$$

Označme koeficienty této rovnice $\varepsilon^*=\sqrt{27}/8$, $K^*=\sqrt{27}$.

Zvolme nejdříve libovolné pevné K tak, aby $K>K^*$, např. $K=10$. Pak v závislosti na volbě ε může přímka $y=g(v;\varepsilon,K)$ protínat křivku $y=h(v)$ v jednom nebo ve třech bodech a dokonce být její tečnou. Křivka $y=h(v)$ má dvě tečny. Pro pevný parametr $K=10$ se parametr ε tečny vypočítá ze vztahu

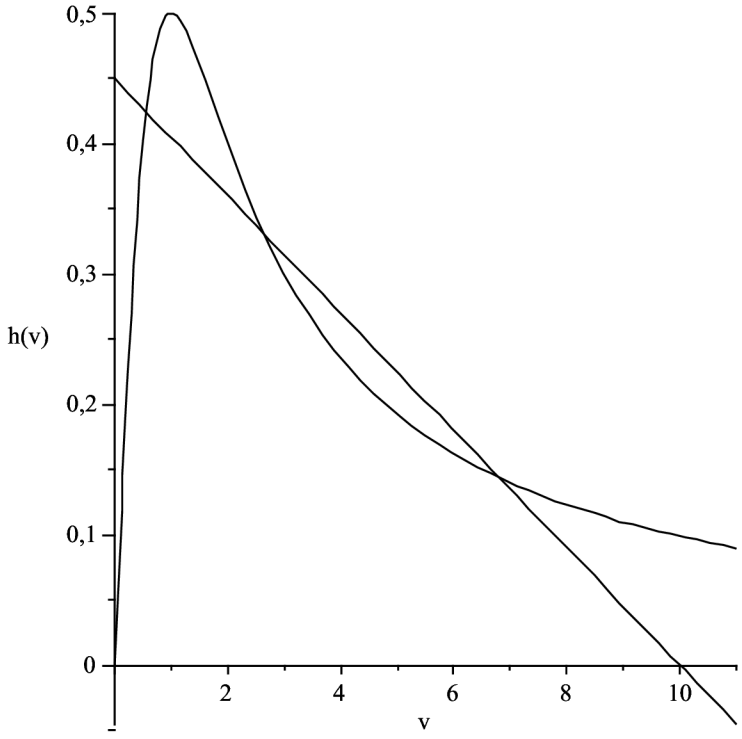
$$\overline{\varepsilon}=\frac{2r^3}{(r^2+1)^2},$$

kde r je dáno kubickou rovnicí

$$P(r)=2r^3-Kr^2+K=2r^3-10r^2+10=0.$$

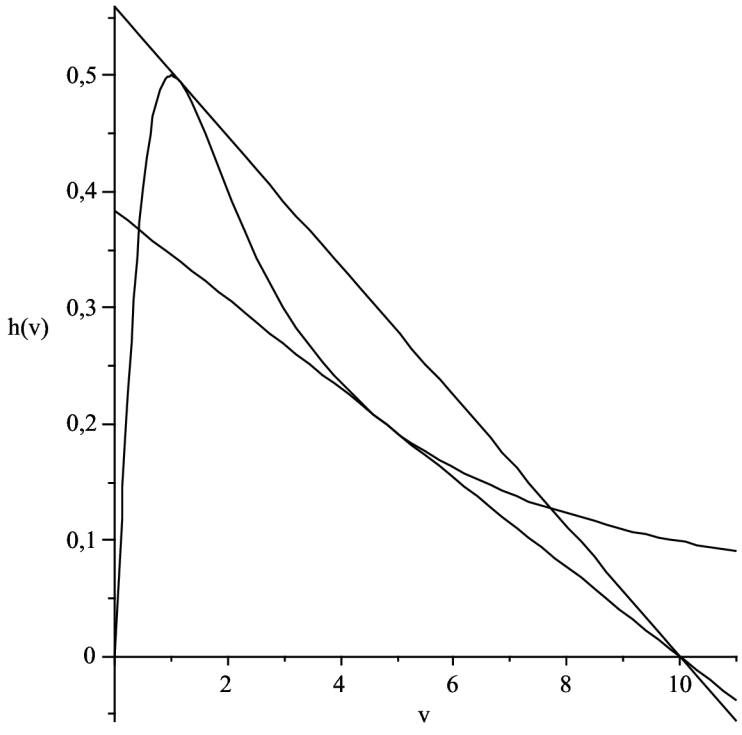
Tato rovnice má tři kořeny, $r_{1,2}>0$, $r_3<0$. Nás zajímají kladné hodnoty, tedy pro $K=10$ je po zanedbání malé imaginární části $r_1\doteq 4,7813$, $r_2\doteq 1,1378$. Po dosazení získáme dvě různé hodnoty parametru ε: $\overline{\varepsilon}_1\doteq 0,3840$, $\overline{\varepsilon}_2\doteq 0,5595$.

a) V případě, že $\overline{\varepsilon}_1 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}_2$, tedy přímka $y = g(v; \varepsilon, K)$ leží mezi tečnami a protíná křivku $y = h(v)$ ve třech bodech.



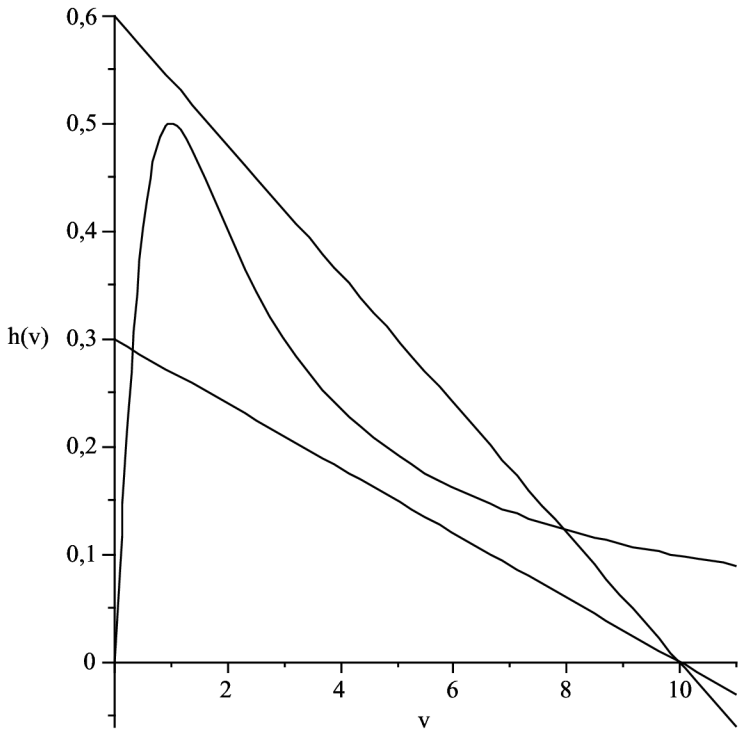
Obr. 5

b) Pokud $\overline{\varepsilon}_1$ nebo $\overline{\varepsilon}_2$, pak je přímka $y = g(v; \varepsilon, K)$ tečnou ke křivce $y = h(v)$ a navíc ji v jednom bodě protíná.



Obr. 6

c) Pokud $\varepsilon < \overline{\varepsilon}_1$ nebo $\overline{\varepsilon}_2 < \varepsilon$, tedy přímka $y = g(v; \varepsilon, K)$ leží pod nebo nad tečnou a protíná křivku $y = h(v)$ pouze v jednom bodě.



Obr. 7

Z grafického řešení jsme zjistili, že rovnice (4.9) může mít tři jednoduché kořeny, nebo dva kořeny, z nichž jeden je dvojnásobný, nebo jeden kořen v závislosti na ε při pevné hodnotě K (popř. naopak). Diferenciální rovnice (4.8) tedy může mít dvě, tři, nebo čtyři stacionární řešení v závislosti na hodnotě parametru ε (popř. K). Pokud má rovnice (4.8) čtyři stacionární řešení, pak $v = 0$ a $v = v_2$ jsou nestabilní, naopak $v = v_1$ a $v = v_3$ jsou stabilní. Pokud má rovnice (4.8) méně než čtyři stacionární řešení, pak je stabilní pouze jedno z nich.

Nyní vezměme za pevnou hodnotu parametru $K < K^*$. V tomto případě protíná přímka $y = g(v; \varepsilon, K)$ křivku $y = h(v)$ pouze v jednom bodě, ať K je jakékoli. Diferenciální rovnice (4.8) má tedy pouze dvě stacionární řešení: $v = 0$ je opět nestabilní a další řešení je tedy stabilní (asymptoticky).

Z analýzy tohoto modelu vyplývá, že se velikost populace v prostředí, kde je přítomný predátor, ustálí na menší hodnotě, než bez predace. To ovšem není nijak překvapivý závěr. Zajímavostí tohoto modelu je spíše případ a), v němž se může populace ustálit na dvou různých velikostech.

5 Praktické modely

V našich úvahách jsme vycházeli z nejjednoduššího modelu a postupně uvažovali další podmínky. Tak bychom mohli pokračovat dále, model by se stále více blížil realitě, ale jeho vyjádření by bylo čím dál složitější.

V praktických situacích se ale často využívají pouze tyto jednoduché modely právě proto, že jejich vyjádření lze jednoduše popsat a přitom dávají informaci o změně populace pod určitým vlivem.

Jedna ze situací, využívající populační modely, je strategie „těžby“ (např. rybolovu) obnovitelných zdrojů (např. ryb). Držme se tedy tohoto modelu rybolovu. Rybář chce mít samozřejmě co největší zisk, ale pokud by byl „chamtivý“ příliš, brzy by neměl co lovit. Otázka tedy zní, jak lovit co největší množství, ale přitom „nevyhladit“ populaci ryb.

5.1 Populace vystavená konstantnímu rybolovu

V prvním modelu uvažujme stálé množství ulovených ryb nezávislé na velikosti rybí populace v danou chvíli. Takový model můžeme popsat rovnicí

$$x' = (a - bx)x - p,$$

kde $p > 0$ je konstantní. Přepíšeme ho do vhodnějšího tvaru

$$x' = a\left(1 - \frac{x}{K}\right)x - p, \tag{5.1}$$

kde a je konstanta růstu a $\frac{a}{b} = K$ vyjadřuje kapacitu prostředí (tj. kolik jedinců resp. jakou hustotu populace dané prostředí uživí). Hodnota p vyjadřuje množství ulovených ryb za jednotku času (tato funkce tedy zahrnuje intenzitu rybaření určenou také kvalitou lodí, rybářského náčiní atd.).

Pro nás bude důležité najít stacionární body rovnice (5.1), tedy hodnoty, na kterých se daná populace má snahu ustálit. Funkce na pravé straně je kvadratická, budeme tedy analyzovat počet a stabilitu řešení rovnice

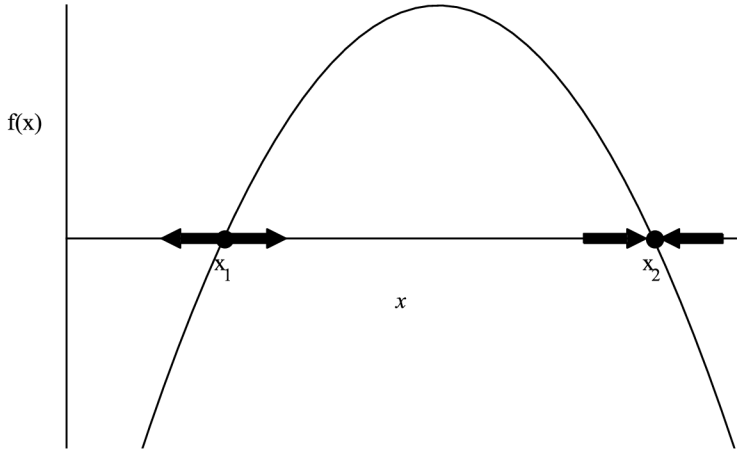
$$f(x) = a\left(1 - \frac{x}{K}\right)x - p = 0.$$

V závislosti na jejím diskriminantu

$$D = a^2 - \frac{4a}{K} \cdot p$$

mohou tedy nastat tři případy:

1. $D > 0$, tj. $p < \frac{aK}{4} \Rightarrow$ grafem funkce $f(x)$ je parabola, protínající osu x ve dvou bodech.



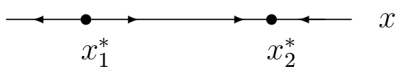
Obr. 8

Rovnice (5.1) má tedy dvě stacionární řešení

$$x_1^* = \frac{K}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4p}{aK}}\right), \quad x_2^* = \frac{K}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4p}{aK}}\right),$$

přičemž $x_1^*, x_2^* \in (0, K)$.

Z obrázku vidíme, že funkce $f(x)$ je v prvním stacionárním bodě rostoucí, x_1^* je tedy vždy nestabilní, naopak stacionární řešení x_2^* je vždy stabilní, neboť funkce $f(x)$ je v tomto bodě klesající.



Obr. 9

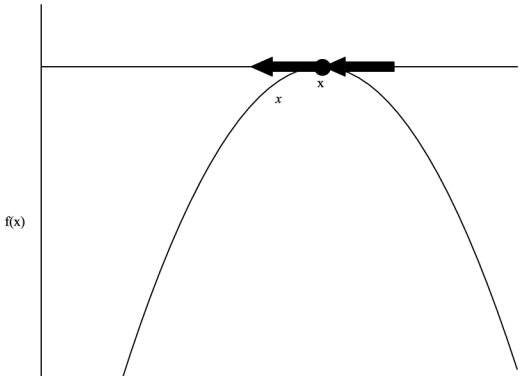
Z fázového portrétu a obrázku plyne následující interpretace:

a) Jestliže velikost rybí populace $x \in (0, x_1^*)$, pak $f(x) < 0$, tj. velikost rybí populace klesá. Přirozený růst populace nedokáže vyrovnat ztráty způsobené rybolovem a populace vymře.

b) Pro $x \in (x_1^*, x_2^*)$ je $f(x) > 0$, tj. rybí populace roste. Tedy přirozený růst populace o velikosti x je dostatečný k tomu, aby pokryl ztráty způsobené rybolovem a velikost populace se bude blížit stacionárnímu bodu x_2^*.

c) Pokud $x > x_2^*$, pak je opět $f(x) < 0$, tj. populace klesá k x_2^* jednak díky rybolovu, jednak kvůli omezené kapacitě prostředí.

2. $D = 0 \Rightarrow$ vrchol paraboly $f(x)$ se dotýká osy x v bodě $x^* = K/2$ a konstanta rybolovu je v tomto případě rovna $p = \frac{aK}{4}$.



Obr. 10

Funkce $f(x)$ je tedy stále záporná mimo stacionární bod $x^* = K/2$. To znamená, že od okamžiku vychýlení stavu populace z hodnoty x^* bude populace klesat. Situace, kdy bychom udržovali množství ulovených ryb stejné jako polovina kapacity daného prostředí, je poměrně nereálná. Proto je pravděpodobnost, že by tato situace nastala, velmi malá.

3. $D < 0$, tj. $p > \frac{aK}{4} \Rightarrow$ parabola $f(x)$ osu x neprotne. Funkce $f(x)$ je stále záporná, tj. množství vylovených ryb je příliš velké, populace se tedy nestačí regenerovat a vymírá.

Závěr: V praxi chceme co největší hodnotu p. Abychom dosáhli maximální výtěžnosti, musíme lov udržovat nižší než $p = \frac{aK}{4}$ a přitom sledovat, zda populace neklesne pod hodnotu x_1^*. V opačném případě by začala populace vymírat, čemuž by jsme zabránili pouze změnou strategie (snížením rychlosti lovu, resp. podpořením rozmnožování).

5.2 Populace vystavená rybolovu úměrnému velikosti populace

Další model, využívající se v praxi, je popsán rovnicí

$$x' = (a - bx)x - \gamma x,$$

kde $\gamma > 0$. Tuto rovnici můžeme přepsat do tvaru

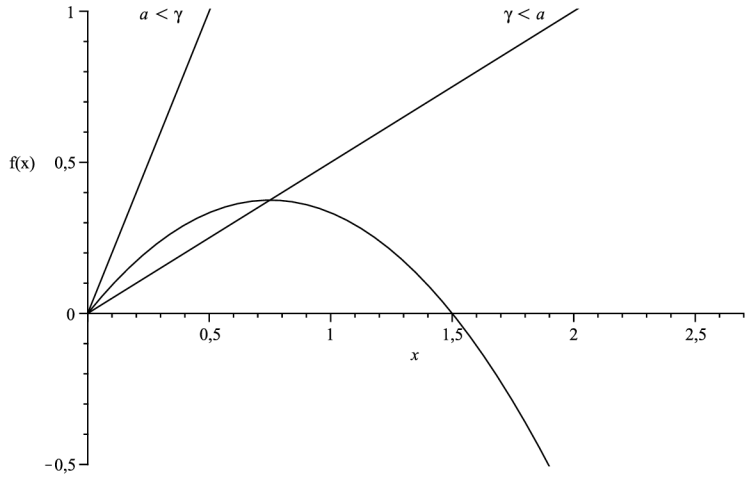
$$x' = a\left(1 - \frac{x}{K}\right)x - \gamma x = f(x). \tag{5.2}$$

Funkce „rybolovu“ γx zde není konstantní, ale závisí na velikosti populace.

Hledejme nyní stacionární řešení rovnice (5.2). Stacionární body najdeme tak, že levou stranu rovnice položíme rovnu nule, tj. $f(x) = 0$. Tím získáme rovnici

$$a\left(1 - \frac{x}{K}\right)x = \gamma x.$$

Tu můžeme řešit analyticky, anebo graficky najít řešení jako průsečík dvou křivek, z nichž první bude parabola popsána rovnicí na levé straně a druhá přímka určená pravou stranou.



Obr. 11

Stacionární body rovnice (5.2) jsou tedy dva

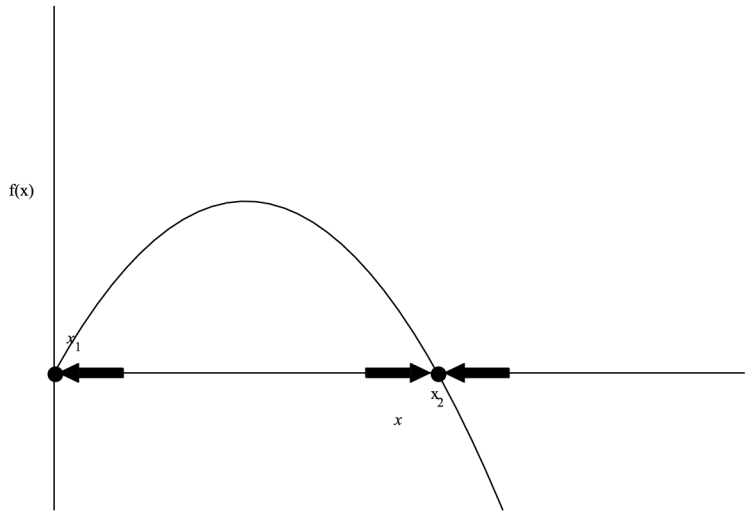
$$x_1^* = 0 \quad \text{a} \quad x_2^* = K\left(1 - \frac{\gamma}{a}\right),$$

pokud $\gamma < a$, anebo pouze jeden $x^* = 0$, pro $\gamma > a$. V tomto případě je stacionární bod $x^* = 0$ stabilní. Důležité je tedy udržovat množství ulovených ryb na hodnotě, která nepřesáhne množství narozených, jinak populace ryb vymírá.

Pokud je splněna podmínka $\gamma < a$, je bod $x_1^* = 0$ nestabilní, naopak druhý stacionární bod x_2^* je stabilní. Z reálného hlediska tedy mohou nastat dvě situace:

a) Pokud $x < x_2^*$, velikost populace roste dostatečně na to, aby doplnila i ztráty způsobené rybolovem a konverguje k hodnotě x_2^*.

b) V případě, že $x > x_2^*$, je populace omezována nejen rybolovem, ale i úživností prostředí, a klesá proto opět k hodnotě x_2^*.



Obr. 12

Zamysleme se nyní nad tím, kdy je užitek lovu maximální, tj. budeme řešit maximalizační úlohu

$$Y(\gamma) = \gamma x_2^* = \gamma K \left(1 - \frac{\gamma}{a}\right) \to \max.$$

Funkci $Y(\gamma)$ tedy zderivujeme a položíme rovnu nule, tj.

$$K - \frac{2K}{a}\gamma = 0$$

Maximální výtěžnost je tedy pro $\gamma = a/2$, přičemž populace ryb bude konvergovat k hodnotě $x_2^* = K/2$. Výtěžnost rybolovu je v tomto případě $Y(\frac{a}{2}) = \frac{Ka}{4}$, tj. stejná jako může dosáhnout při konstantní rychlosti rybolovu, ale narozdíl od předchozího modelu je x_2^* stabilní. To můžeme ověřit zderivováním pravé strany rovnice (5.2) a dosazením za γ. Dostaneme

$$x'' = \frac{a}{2} - \frac{2ax}{K},$$

což pro $x = x_2^* = K/2$ je rovno $-a/2 < 0$, derivace pravé strany je tedy záporná. Proto pokud se populace vychýlí z rovnovážného stavu x_2^*, bude se do něj vždy vracet zpátky.

Závěr: Z matematického hlediska je tento druhý model pro strategii rybolovu výhodnější. Je ale potřeba si uvědomit, že zde potřebujeme znát v každém časovém okamžiku t velikost rybí populace x, což prakticky není možné změřit. Z toho důvodu se spíše užívá kombinace těchto dvou strategií. Oba modely jsou samozřejmě velice zjednodušené, do skutečné strategie rybolovu bychom měli zahrnout i ekonomické aspekty tj. vynaložené úsilí, náklady atd. Tato problematika ale už spadá do jiné oblasti a přesahuje rámec této práce.

5.3 Model sardinky

Kromě základních dvou modelů se při rybolovu využívá ještě další model – a to při lovu sardinek. Podle zkušeností je lepší modelovat u sardinek střední rychlost růstu výrazem

$$\mu(x) = (a - bx)x.$$

Pak dostáváme model

$$x' = (a - bx)x^2 - \gamma x$$

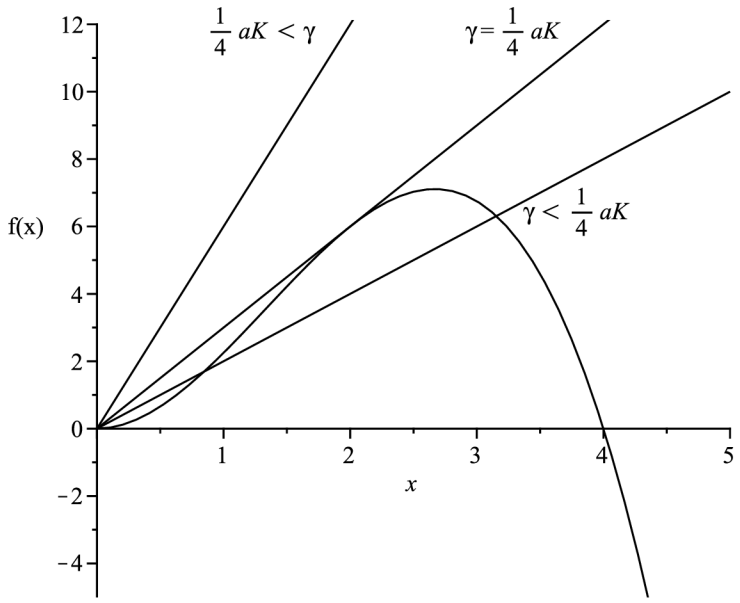
neboli v upraveném tvaru

$$x' = a\left(1 - \frac{x}{K}\right)x^2 - \gamma x. \tag{5.3}$$

Stacionární řešení získáme podobně jako v předchozím příkladě z rovnice

$$a\left(1 - \frac{x}{K}\right)x^2 = \gamma x. \tag{5.4}$$

Tu jsem opět řešila graficky. Grafem levé strany bude tentokrát kubická křivka, grafem pravé strany opět přímka procházející počátkem.

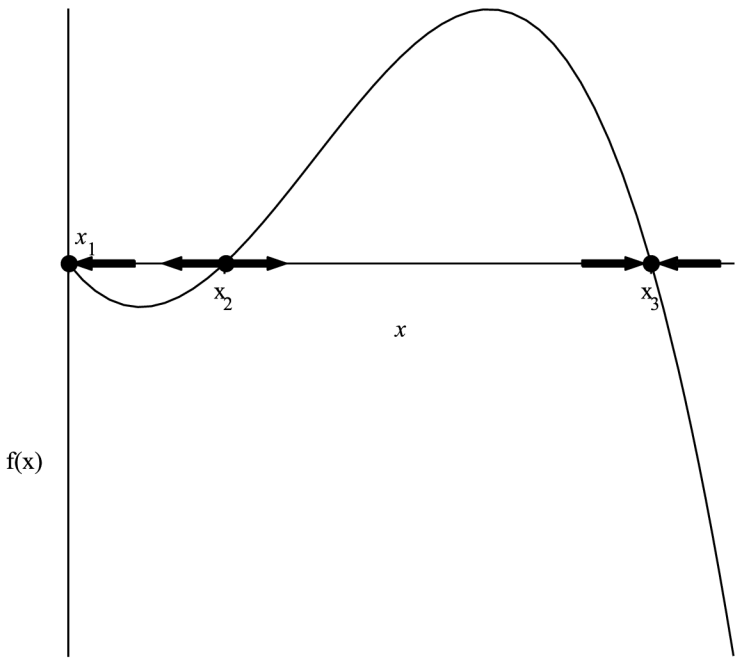


Obr. 13

Z Obr. 13 vidíme, že rovnice (5.3) může mít tři stacionární body, pokud přímka křivku protíná, nebo dva stacionární body, pokud je její tečnou, nebo pouze jeden stacionární bod $x^* = 0$. Přitom bod $x^* = 0$ je pro všechny tři případy stabilní, jelikož $x''(0) = -\gamma < 0$, což je dosti nepříznivý fakt. Populace má tedy sklon vymírat. Proto musíme najít ještě jiné stabilní stacionární řešení.

Rozeberme si nyní jednotlivě každý případ, v závislosti na hodnotě diskriminantu $D = a^2 - \frac{4a\gamma}{K}$:

1. $D > 0$, a tedy $\gamma < \frac{aK}{4} \Rightarrow$ grafem funkce $f(x)$ je křivka, která protne osu x kromě počátku ve dvou bodech.

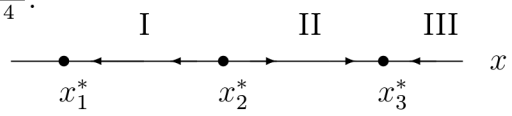


Obr. 14

Rovnice (5.3) má v tomto případě tři stacionární řešení

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = \frac{K}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\gamma}{aK}}\right), \quad x_3^* = \frac{K}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\gamma}{aK}}\right).$$

První stacionární bod je vždy stabilní, x_2^* je nestabilní a stacionární řešení x_3^* je opět stabilní pro $\gamma < \frac{aK}{4}$.



Obr. 15

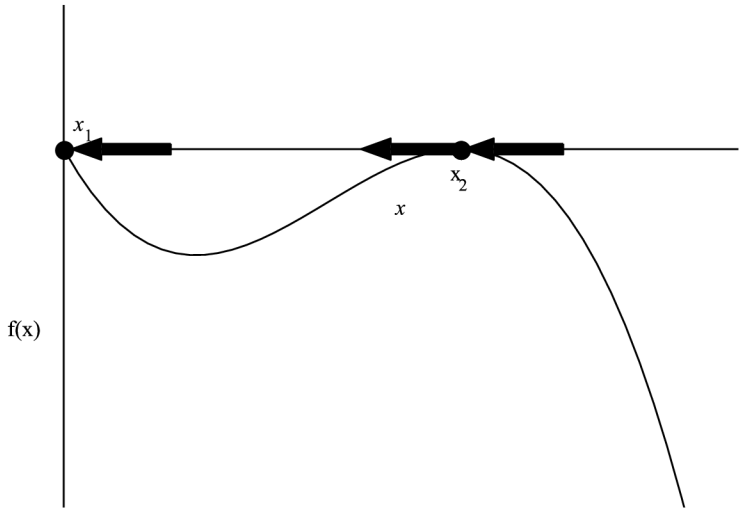
Podle velikosti populace tedy mohou nastat tři případy:

a) Jestliže $x \in$ I, pak velikost rybí populace není dostatečná k tomu, aby rozmnožováním doplnila rybolov a klesá tedy k nule, tzn. vymírá.

b) Pokud $x \in$ II, je populace natolik velká, že přestože ji redukujeme rybolovem, stále roste a konverguje ke stabilnímu stavu.

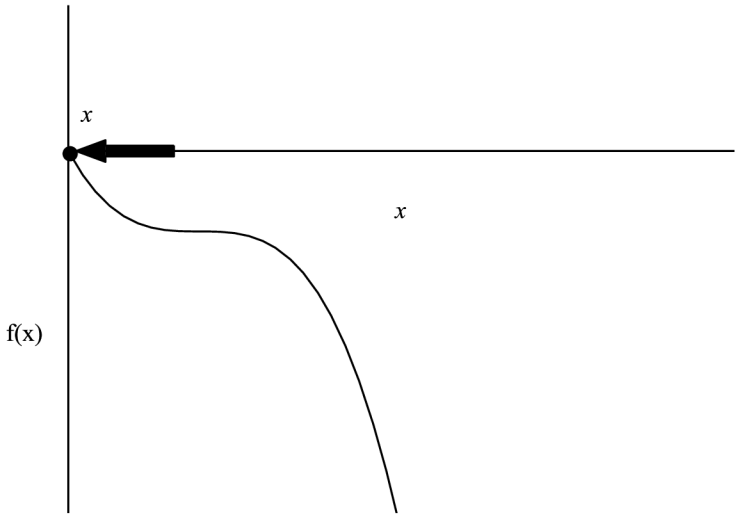
c) V případě, že $x \in$ III, nestačí už dané prostředí takovou populaci uživit a ta navíc klesá rybolovem.

2. $D = 0 \Rightarrow$ vrchol kubické křivky $f(x)$ se dotýká osy x v bodě $x^* = K/2$ a funkce f je tedy kromě stacionárního bodu stále záporná. V okamžiku vychýlení z tohoto bodu bude velikost populace klesat a blížit se ke stabilnímu stavu $x_1^* = 0$, tj. bude vymírat. Navíc je dosti nepravděpodobné, že konstantu rybolovu udržíme rovnu $\gamma = \frac{aK}{4}$.



Obr. 16

3. $D < 0$, tj. $p > \frac{aK}{4} \Rightarrow$ křivka $f(x)$ osu x vůbec neprotne.



Obr. 17

Funkce $f(x)$ je stále záporná, populace se nestačí rozmnožováním pokrýt příliš velký rybolov a blíží se k jedinému stabilnímu stavu $x_1^* = 0$, proto vymírá.

Pouze v prvním případě nemá populace sklon vymírat, důležité je proto udržovat lov na hodnotě $\gamma < \frac{Ka}{4}$. Zbývá ještě spočítat maximální výtěžnost při lovu sardinek, tj. maximum z funkce

$$Y(\gamma) = \gamma x_3^* = \gamma \frac{K}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\gamma}{aK}}\right).$$

Optimální užitek z rybolovu je tedy při $\gamma = \frac{2aK}{9}$ a populace sardinek se přitom blíží stabilnímu stavu $x_3^* = \frac{2}{3}K$.

6 Závěr

V této bakalářské práci byly využity základní znalosti diferenciálních rovnic, které mají zásadní význam při řešení mnoha fyzikálních, biologických a technických problémů. Autonomní diferenciální rovnice (systémy) jsou speciálním typem diferenciálních rovnic. Často se využívají právě při modelování reálných situací v přírodě (populační růst, mezidruhové vztahy atd.). Tyto děje musí být nezávislé na čase, abychom ze zjištěných výsledků mohli vytvořit matematický model, který dostatečně popisuje chování biologického společenstva a předpovídá tak jeho další vývoj.

Tato bakalářská práce je zaměřena na růst jednodruhové populace v různých situacích. Vychází se z nejjednoduššího Malthusova modelu a postupně se uvažují další vlivy, které na populaci mohou působit. Pozornost je věnována stabilitě řešení. Cílem této práce tedy bylo seznámit se s jednotlivými základními matematickými modely a jejich vlastnostmi, a posléze udělat analýzu konkrétních modelů. V praxi se často setkáváme s matematickými modely „rybolovu“; jsou zde popsány různé modely tohoto typu. Rozebírána je otázka stability řešení, vypočtena „hodnota lovu“, od které řešení konverguje k nule (tedy populace „vymírá“), stanovena výtěžnost, tj. hodnota, kdy je užitek lovu maximální. Srovnán je model vystavený konstantnímu rybolovu a rybolovu úměrnému velikosti populace. Ke každému modelu je napsána interpretace dané situace. Celá práce je doplněna grafy, vytvořenými v softwaru Maple.

Literatura

[1] BUDINSKÝ, B. - CHARVÁT, J. *Matematika II.* 1. vyd. Nakladatelství technické literatury, Praha, 1990. 436 s.

[2] ČERMÁK, J. - ŽENÍŠEK, A. *Matematika III.* Skripta FSI VUT, Akad. nakl. CERM, Brno, 2001. 205 s. ISBN 80-214-2010-3.

[3] FRANCŮ, J. *Obyčejné diferenciální rovnice.* <http://www.mat.fme.vutbr.cz/home/francu/>

[4] JONES, D. S. - SLEEMAN, B. D. *Differential equations and mathematical biology.* Chapman and Hall/CRC, 2003.

[5] KALAS, J. - POSPÍŠIL, Z. *Spojité modely v biologii.* Brno, 2001.

[6] KALAS, J. - RÁB, M. *Obyčejné diferenciální rovnice.* Masarykova univerzita, Brno, 1995.

[7] MURRAY, J. *Mathematical biology.* Springer, 3rd edition, Springer-Verlag, 2002.