Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Využití Concept Cartoons pro zjištění úrovně žákovského porozumění zlomkům na základní škole

Bakalářská práce

Autor:	Jana Fráňová
Studijní program:	Matematika se zaměřením na vzdělávání
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání (maior), Chemie se zaměřením na vzdělávání (minor)
Vedoucí práce:	Mgr. Lukáš Vízek, Ph.D.

Hradec Králové 2024

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Zadání bakalářské práce

Autor:	**Jana Fráňová**
Studium:	S22MA045BP
Studijní program:	B0114A170006 Matematika se zaměřením na vzdělávání
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání, Chemie se zaměřením na vzdělávání
Název bakalářské práce:	**Využití Concept Cartoons pro zjištění úrovně žákovského porozumění zlomkům na základní škole**
Název bakalářské práce AJ:	Using Concept Cartoons to identify students' level of understanding of fractions at lower secondary school

Cíl, metody, literatura, předpoklady:

Práce je věnována ověřování znalostí zlomků žáků základní školy s využitím metody Concept Cartoons. První, teoretická, část se zabývá popisem otevřeného přístupu k matematickému vzdělávání, a to zejména metodou Concept Cartoons, následně vystihuje racionální čísla a pojem zlomek v kontextu matematiky základní školy. Praktická část je věnována užití metody Concept Cartoons pro zjišťování úrovně porozumění žáků, realizuje výzkumné šetření s vybranou skupinou respondentů, jejichž řešení analyzuje a porovnává se závěry literatury.

Samková, L. (2020). *Metoda Concept Cartoons*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

Tichá, M., & Macháčková, J. (2006). *Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice*. Jednota českých matematiků a fyziků.

Vondrová, N., & Rendl, M. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Univerzita Karlova v Praze, Nakladatelství Karolinum.

Vybrané články z odborných časopisů zaměřených na vyučování matematiky.

Vybrané učebnice matematiky pro střední školy.

Další literatura bude upřesněna v průběhu konzultací.

Zadávající pracoviště:	Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta
Vedoucí práce:	Mgr. Lukáš Vízek, Ph.D.
Oponent:	PhDr. Jana Cachová, Ph.D.

Datum zadání závěrečné práce: 30.1.2024

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, z kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne 14. 4. 2024 Jana Fráňová

Poděkování
Tímto bych chtěla poděkovat vedoucímu mojí bakalářské práce panu Mgr. Lukáši Vízkovi, Ph.D., za odborný dohled, podnětné rady i připomínky a za čas, který věnoval mojí práci.

Anotace

FRÁŇOVÁ, J. *Využití Concept Cartoons pro zjištění úrovně žákovského porozumění zlomkům na základní škole.* Hradec Králové, 2024. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí bakalářské práce Lukáš Vízek. 38 s.

Práce je věnována ověřování znalostí zlomků žáků základní školy s využitím metody Concept Cartoons. První, teoretická, část se zabývá popisem otevřeného přístupu k matematickému vzdělávání, a to zejména metodou Concept Cartoons, následně vystihuje racionální čísla a pojem zlomek v kontextu matematiky základní školy. Praktická část je věnována užití metody Concept Cartoons pro zjišťování úrovně porozumění žáků, realizuje výzkumné šetření s vybranou skupinou respondentů, jejichž řešení analyzuje a porovnává se závěry literatury.

Klíčová slova
matematika, základní škola, Concept Cartoons, otevřené úlohy, zlomky

Annotation

FRÁŇOVÁ, J. *Using Concept Cartoons to identify students' level of understanding of fractions at lower secondary school.* Hradec Králové, 2024. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Lukáš Vízek. 38. p.

The study is focused on the identification of students' knowledge of fractions at lower secondary school using the Concept Cartoons method. The first, theoretical, part deals with the description of the open approach to mathematics education, in particular the Concept Cartoons method, then describes rational numbers and the concept of fraction in the context of lower secondary school mathematics. The practical part is concerned with the use of the Concept Cartoons method to measure the level of students' understanding while conducting the research investigation with the selected group of respondents, whose solutions are analyzed and compared with the findings by the literature.

Keywords
mathematics, lower secondary school, Concept Cartoons, open-ended tasks, fractions

Obsah

Úvod 9
1 Teoretická část práce 10
1.1 Badatelsky orientovaná výuka 10
1.2 Otevřený přístup k matematickému vzdělávání 11
1.3 Formativní hodnocení 11
1.4 Metoda Concept Cartoons 13
1.5 Vymezení obsahu zkoumané matematické oblasti 16
1.6 Pojem zlomek 16
1.6.1 Zlomek jako míra (veličina) 17
1.6.2 Zlomek jako poměr 17
1.6.3 Zlomek jako podíl (kvocient) 18
1.6.4 Zlomek jako operátor 18
1.6.5 Zlomek jako část-celek 19
1.6.6 Zlomek jako číslo 20
1.7 Chybovost ve zlomcích 21
2 Praktická část 22
2.1 Cíle praktické části 22
2.2 Popis praktické části 22
2.3 Roztřídění výsledků 24
2.4 Concept Cartoon Čokoláda 24
2.4.1 Aleš: „Čokoládu si chci rozdělit s dalšími pěti kamarády. Pak ji dělím na pětiny.“ 24
2.4.2 Vyhodnocení komentářů k Alešově bublině 24
2.4.3 Bedřich: „Čokoládu dělím mezi šest dětí, takže počet dílků budu dělit jednou šestinou.“ 26
2.4.4 Vyhodnocení komentářů k Bedřichově bublině 26
2.4.5 Cecílie: „Na šestiny čokoláda rozdělit nejde, protože má jenom 4 sloupečky.“ 27
2.4.6 Vyhodnocení komentářů k Cecíliině bublině 28
2.4.7 Dalibor: „Každý dostane 2/3 sloupečku.“ 29
2.4.8 Vyhodnocení komentářů k Daliborově bublině 29
2.4.9 Eva: „Každý dostane dvanáct šestin čokolády.“ 30
2.4.10 Vyhodnocení komentářů k Evině bublině 30

2.4.11 Vyhodnocení vlastních komentářů (doplnění Františkovy bubliny).. 31
2.5 Shrnutí výsledků ... 32
3 Diskuze ... 34
4 Závěr ... 35
Seznam použité literatury ... 36

Úvod

Motivací k volbě tématu bakalářské práce mi byla vlastní zkušenost s doučováním matematiky žáků základních škol. Během této činnosti jsem u žáků opakovaně zaznamenala problémy v úlohách zaměřených na zlomky. Následně jsem zjistila, že i podle odborné literatury mohou být zlomky pro žáky problematické. Začala jsem se tak zajímat, jakým způsobem je u žáků možné ověřit úroveň pochopení problematiky zlomků.

První částí práce je literární rešerše, která se zaměřuje na vysvětlení vybraných moderních přístupů k výuce matematiky, při kterých lze efektivně používat metodu Concept Cartoons. Ta je v teoretické části podrobně představena. Teoretická část práce přibližuje nastavený rámec matematického pozadí důležitého pro praktickou část. To znamená, že se zaměřuje na různá pojetí zlomků.

Následuje praktická část, která přibližuje metodiku výzkumu, samotné uskutečnění praktické činnosti, popisuje jeho průběh a prezentuje jeho výsledky. Produktem praktické části je i model Concept Cartoon. Cílem práce je zjistit, jak budou žáci sedmého ročníku základní školy reagovat na pokusný Concept Cartoon týkající se zlomků.

V diskuzi jsou porovnány zjištěné skutečnosti s teoretickými předpoklady. Uplatnění výzkumu je prezentováno v závěru práce.

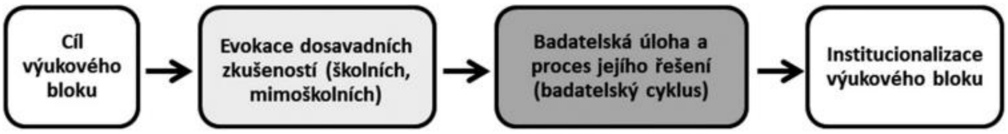
1 Teoretická část práce

1.1 Badatelsky orientovaná výuka

Klíčovými cíli ve výuce přírodních věd je umět pracovat s pojmy, různými teoriemi a osvojit si schopnost argumentovat. Tato schopnost se samozřejmě s věkem žáka postupně formuje a zdokonaluje. Je tedy důležité přizpůsobit cíle žákům a očekávat výstupy adekvátní k tomu, na jakém stupni školy se vyskytujeme. Například žáci na druhém stupni základních škol dokážou již do jisté míry uvažovat pomocí proměnných a konceptů. Otázkou však zůstává, jaké úvahy jsou schopni dělat, a jak jim to v typických podmínkách třídy umožnit. (van der Berg, Kruit, 2017)

Odpovědí nám na to může být badatelsky orientovaná výuka. Definice tohoto termínu není zcela jednoznačná, což je dáno zejména šíří celé této problematiky. Podle Dostála (2015) však z množství literatury vztažené k tomuto tématu vyplývá, že badatelsky orientovaná výuka je více než pouze metoda. Vnímá ji jako celkové pojetí výuky, které se zrcadlí ve všech jejích složkách, a to nejen v oblasti metod výuky. Podle Dostála (2015, s. 32): *„Badatelsky orientovanou výuku je možné charakterizovat jako činnost učitele a žáka zaměřenou na rozvoj vědomostí, dovedností a postojů na základě aktivního a relativně samostatného poznávání skutečnosti žákem, kterou se sám učí objevovat a objevuje."*

Tato výuka umožňuje žákům nahlížet na problémy podobnou optikou jako na ně nahlížejí skuteční vědečtí pracovníci. Tento přístup přináší žákům více autonomie, což zapříčiňuje to, že se učí hlubším způsobem. Badatelsky orientovaná výuka se historicky vyvinula v rámci přírodních věd, kde se i v dnešní době nadále uplatňuje nejčastěji. Své užití má však i v matematice. (Samková, Rokos, Petr, Stuchlíková, 2021) Viz Obrázek 1.



Obrázek 1: Model výukového bloku s badatelskou úlohou. Převzato ze Samkové, Rokose, Petra a Stuchlíkové (2021, s.37).

Badatelsky orientovaná výuka vychází z konstruktivismu. Konstruktivistická teorie nám představuje dva základní principy – konstruktivismus kognitivní a konstruktivismus sociální. (Hejnová, 2016)

Především na kognitivním konstruktivismu staví badatelsky orientovaná výuka. (Dostál, 2015)

Princip kognitivního konstruktivismu se zakládá na možnosti vysvětlovat a tvořit závěry na základě praxe a zkušeností subjektu. U žáka v procesu poznání hraje důležitou roli i sociální interakce či kultura. Ve výuce se tedy uplatňují problémy známé z běžného života, přičemž důraz je kladen na tvořivé myšlení. (Košatková, 2023) (Rendl, 2008)

Žáci tak mohou objevovat, bádat a pracovat podobnými postupy, jako skuteční vědci. (Samková, 2020)

1.2 Otevřený přístup k matematickému vzdělávání

Samková (2020, s. 16) zmiňuje: *„Otevřený přístup k matematice a ke vzdělávání v matematice je teoretický rámec, který studuje matematickou výuku z hlediska učebních úloh, který vyučující používá při přípravě, realizaci a hodnocení výuky."*

Otevřený přístup využívá učební úlohy otevřené, což jsou takové úlohy, které splňují alespoň jedno z následujících kritérií:

- úloha obsahuje otevřenou vstupní situaci
- úlohu je možné řešit více způsoby (otevřený postup)
- úloha má otevřený konec
- má otevřenou další cestu, jak úlohu rozvinout v úlohu novou

Tento přístup zahrnuje nejčastěji zpravidla prakticky zaměřené úlohy s otevřeným koncem. Taktéž lze užívat termín open-ended úlohy. Je tedy zřejmé, že úlohy tohoto typu mají více správných řešení, kterých lze dosáhnout různými postupy. Dle analýz mají velmi pozitivní vliv na pochopení, upevnění a učení se nových látek. (Samková 2020)

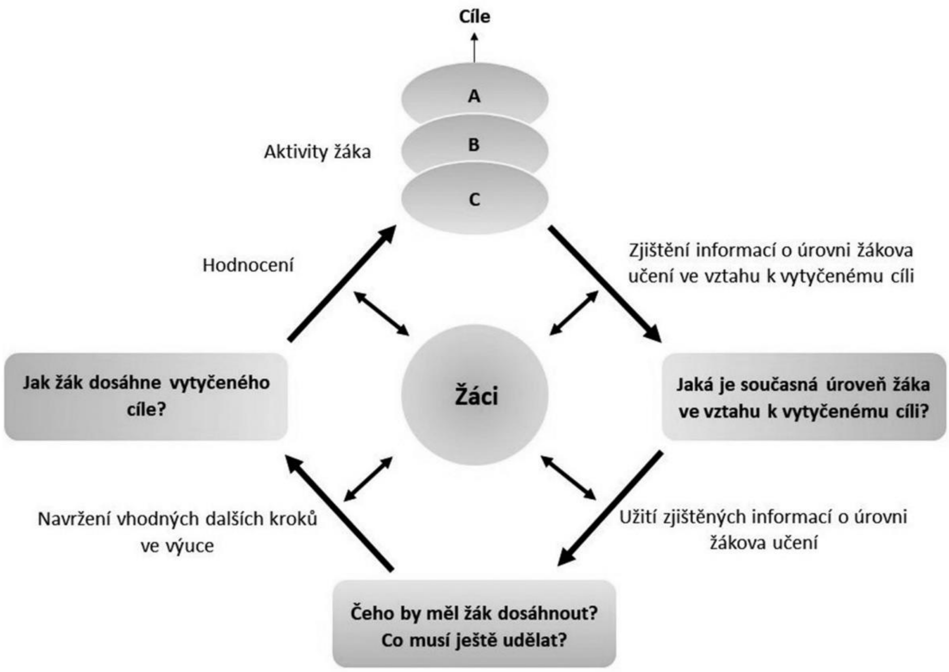
1.3 Formativní hodnocení

Příchod badatelsky orientované výuky s sebou přinesl problém s hodnocením. Sumativní hodnocení je pro potřeby badatelsky orientované výuky a open-ended úloh nedostačující. Nové trendy ve výuce jdou ruku v ruce se změnami na poli hodnocení. Své uplatnění tak nachází nástroj, který je pro účely badatelsky orientované výuky daleko lepší – formativní hodnocení. Formativní hodnocení vnímáme jako jistý přístup ve výuce. Potenciál tohoto přístupu je velký. Ovšem pro využití maximálního potenciálu formativního hodnocení je nejefektivnější propojit jej s badatelsky orientovanou výukou. Propojení formativního hodnocení a badatelsky orientované výuky je ve školství rozhodně žádoucí. (Samková, Rokos, Petr, Stuchlíková, 2021)

Vymezení formativního hodnocení není zcela jednotné a podle různých autorů se lehce liší. Jednu z komplexních definic přináší Samková, Rokos, Petr a Stuchlíková (2021, s. 33), kteří definují formativní hodnocení takto: *„Systematický proces soustavného shromažďování informací o tom, jak probíhá žákovo učení. Tyto informace jsou následně využívány k identifikaci aktuální úrovně výsledků učení a umožňují upravit další kroky výuky tak, aby bylo dosaženo cílů učení."*

Uprostřed celého procesu se nachází žák, který jednak získává zpětnou vazbu od učitele a jednak je právě on zdrojem podkladů pro učitelovu zpětnou vazbu, neboť s ním sdílí svoji úspěšnost v učení. Pojem zpětná vazba pro nás bude v tomto ohledu pojmem podstatným.

Klíčovým prvkem formativního hodnocení je totiž právě zpětná vazba. Musíme však vyzdvihnout, že zpětnou vazbu samu o sobě nelze považovat za formativní hodnocení, ovšem někdy je za něj mylně zaměňována, což možná pramení z ne úplně přesného pochopení formativního hodnocení. Zpětná vazba tvoří pouze jakýsi základ. Pro formativní hodnocení je důležitá. Pro učitele je indikátorem toho, jak má postupovat v následující výuce. Ukazuje pedagogovi, jak moc se liší cíl výuky a aktuální stav žákových schopností, dovedností a znalostí. Navíc žákovi poskytuje informaci o tom, jak si momentálně vede. (Samková, Rokos, Petr, Stuchlíková, 2021) Schéma formativního hodnocení viz Obrázek 2: Prvky formativního hodnocení.



Obrázek 2: Prvky formativního hodnocení. Převzato ze Samkové, Rokose, Petra a Stuchlíkové (2021, s. 34).

Metody formativního hodnocení existují různé. My se podíváme na jejich rozdělení podle Samkové, Rokose, Petra a Stuchlíkové (2021):

1. **„on-the-fly" hodnocení neboli poskytování okamžité zpětné vazby**
   Tyto interakce, u kterých se můžeme setkávat s cizojazyčným označením „on-the-fly" nemají doslovný překlad do češtiny. Můžeme je však chápat jako poskytování okamžité zpětné vazby. Příznačným rysem tohoto typu hodnocení je jeho neplánovanost. Pedagog při této metodě spontánně využívá vhodné okamžiky z běžné výuky.

2. **vrstevnické hodnocení**
   Jedná se o vzájemné hodnocení mezi žáky. Pedagog hodnocení pouze pozoruje, ale samozřejmě může v případě potřeby zasáhnout (např. když ho

o to žáci požádají). Toto hodnocení je specifické v tom, že je komunikováno řečí, kterou mezi sebou děti běžně používají. V matematice tak mohou vznikat situace zajímavé pro pedagogovo pozorování, jelikož žáci mohou mít problém užívat vhodné termíny pro popsání matematické skutečnosti. (Například se můžeme setkat s chybným užíváním pojmu krácení zlomků, jež mohou žáci používat pro popis násobení zlomků.) Na vině je zde zřejmě z jisté míry čtenářská gramotnost. (Vondrová, Rendl, 2015)

Žáky je možné, a do jisté míry i vhodné, ze začátku navést na to, co se po nich chce. Předpokladem je aktivní účast všech žáků a schopnost přijmout kritiku od sobě rovných vrstevníků. Vyučující by tak měl být schopen držet optimální atmosféru i klima ve třídě, aby mohlo vrstevnické hodnocení probíhat správně. Nevýhodou může být to, že vrstevnické hodnocení funguje jen v případě, že žáci hodnotí problematiku, ke které jsou vzájemně kompetentní.

3. **otevřená nebo strukturovaná diskuse se žáky ve třídě**
   K vyvolání diskuse je zapotřebí položit žákům vhodnou otázku. Vhodnou strategií k započetí diskuse je například vyřčení sporného tvrzení. Toto tvrzení může být např. i zajímavé tvrzení některého ze žáků během výuky. Učitel následně nechá žáky se nad daným problémem zamyslet samostatně, případně v menších skupinkách. Stěžejní je nechat žákům dostatek času. Během samotné diskuse klade vyučující doplňující otázky.

1.4 Metoda Concept Cartoons

Běžně zadané slovní úlohy zpravidla neobsahují žádný obrázek. V případě, že úloha obrázek obsahuje, často je žáky vnímán spíše jako rušivý a žáci ho tak v podstatě spíše ignorují. (Vondrová a kolektiv, 2019)

Naproti tomu výuková pomůcka Concept Cartoons se na přítomnosti obrázku zakládá. Pro termín Conccept Cratoons v podstatě nemáme vhodný český překlad. Anglické slovo cartoon zde není užito ve smyslu označení pro animovaný seriál ani pro kreslený vtip. Na první pohled nám tato pomůcka může evokovat komiks. Jedná se totiž o obrázek, vyobrazující nějakou, většinou žákům dobře známou situaci (úloha v pozadí). Další součástí této grafiky je několik postav, které formou komiksových bublin vyobrazenou situaci nějak komentují. Tyto krátké glosy mají svá pravidla. Na jednom Concept Cartoonu bývá znázorněno 3 až 5 fiktivních postav. Zpravidla se úloha začíná číst v levém horním rohu a následně se pokračuje po směru hodinových ručiček. (Samková, 2020) (Minárechová, 2017)

Žákům jsou tyto úlohy obvykle nabízeny s položením otázek typu: „Co si o tom myslíš ty?“, „Mají děti na obrázku pravdu?“, „Proč?“ nebo „Jak bys situaci okomentoval ty?“ a podobně. Žáci následně diskutují o odpovědích na tyto otázky.

Učitel funguje zejména v roli moderátora a případně klade otázky doplňující. (Samková, 2020)

Prvně se pojďme zaměřit na úlohu v pozadí Concpet Cartoon. Podle Samkové (2020) můžeme Concept Cartoons dělit podle úlohy v pozadí:

a) podle kritéria oblasti matematiky úlohy v pozadí:

1. **úloha čistě matematická početní:**
   Jedná se v podstatě o obdobu školních početních úloh, kde je úkolem nalézt řešení.

2. **úloha čistě matematická výroková:**
   Zde mluvíme o obdobě školních analytických úloh, které většinou popisují dané vlastnosti matematických operací, množin, čísel a podobně.

3. **úloha aplikační bez vnějšího vlivu:**
   Analogie školních slovních úloh, které nejsou nijak závislé na vnějších informacích. Vše potřebné pro řešení obsahuje sám Concept Cartoon.

4. **úloha aplikační s vnějším vlivem:**
   Obdoba slovních úloh, k jejichž řešení musí řešitel znát nějakou obecně známou informaci (např. pravidla přidělování bodů při sportu). Je možné si potřebné informace vyhledat např. během samostatné práce na internetu.

b) podle kritéria otevřenosti úlohy v pozadí:

1. **úloha, u které zadání, postup řešení ani výsledná situace nejsou otevřené:**
   Zde mluvíme o úlohách s jediným správným řešením, ke kterému vede pouze jeden správný postup.

2. **úlohy s otevřeným zadáním:**
   Otevřenost zadání většinou vzniká u aplikačních úloh s vnějším vlivem, jelikož tyto vnější vlivy nejsou na obrázku blíže specifikovány.

3. **úloha s otevřeným postupem řešení:**
   Správného řešení těchto úloh lze dosáhnout rozličnými postupy, lze používat různé pořadí kroků, používat jiný matematický aparát.

4. **úloha s postupem řešení o více krocích**

5. **úloha s otevřenou výslednou situací:**
   Existuje pro ně více správných řešení.

Texty v bublinách musí být pro žáky dobře pochopitelné, proto jsou zpravidla krátké a používají jednoduchou slovní zásobu. Podle obsahu komentáře leze bubliny dělit podle odlišných kritérií:

a) dělení podle matematické správnosti bublin:

   Komentáře k obrázku mohou být dvojího typu – tedy buď správné, nebo nesprávné. Tuto správnost či nesprávnost by měl být žák schopen posoudit.

   Podle toho můžeme bubliny dělit na:
   1. **správnost a nesprávnost podmíněná**
   2. **správnost a nesprávnost nejasná**
   3. **správnost a nesprávnost jednoznačná**

b) dělení podle typu matematické informace uvedené v bublině:
   1. **bublina jen s výsledkem**
   2. **bublina jen s postupem řešení**
   3. **bublina s postupem řešení a výsledkem**
   4. **bublina s komentářem**

V rámci otevřeného přístupu v matematice je kladen velký potenciál na úlohy praktického zaměření, které obvykle mívají otevřenou vstupní situaci, díky čemuž si je řešitelé mohou různě interpretovat na základě svých vlastních zkušeností. Speciálním typem otevřených úloh jsou úlohy polyvalentní. V ideálním případě se jedná o otevřené úlohy, které si každý žák může subjektivně interpretovat. Tyto úlohy, mající otevřené výsledky různých obtížností, ke kterým lez dojít různými, jinak náročnými postupy. Tento typ úloh tak tedy vhodným způsobem stimuluje všechny žáky ve třídě i přes to, že se každý z nich může nacházet na jiné úrovni vědění. Metoda Concept Cratoons nám pro toto poskytuje vhodné prostředí. Použití této metody pro zadávání polyvalentních úloh tak může být velmi přínosné. (Samková, 2020)

Další výhodou Concept Cartoons je jejich atraktivnost. Výtvarné ztvárnění je pro děti lákavé, úlohy tak vzbuzují u žáků zájem, čímž dobře fungují i v rovině motivace. (Trnová, Janko, Trna, Pešková, 2016)

Vliv zkušenostního kontextu a zvoleného tématu úlohy v pozadí zkoumá i Vondrová a kolektiv (2019). Dle jejich výzkumu se neprokázal systematický vliv zkušenostního kontextu žáků na úspěšnost řešení slovních úloh. I přesto jsou však z výzkumu patrné jisté odchylky, které pouze nejsou tak statisticky významné. Nebyla například potvrzena hypotéza, že úlohy s atraktivnějším pozadím (například týkající se sci-fi) vzbuzují u žáků zájem, a tím zvyšují úspěšnou řešitelnost. Oproti tomu se však ukázalo, že např. dívky lépe reagují na úlohy, které se netýkají čistě maskulinních témat. U chlapců se tento vliv neprojevil. Například se také ukázalo, že žáci zpravidla lépe reagují na slovní úlohy, které se týkají něčeho, s čím už se ve slovní úloze někdy setkali, protože jim to zřejmě evokuje správný postup. Kreativita zvoleného prostředí úlohy tak jistým způsobem souvisí s úspěšností řešitele, avšak pouze na individuální úrovni. V plošném měřítku tento vztah nelze nijak popsat.

1.5 Vymezení obsahu zkoumané matematické oblasti

Praktická část bakalářské práce používá metodu Concept Cartoons ve výuce matematiky na základní škole. Z matematického hlediska se zaměřuje na problematiku zlomků.

Žáci se zlomky poprvé setkávají již na prvním stupni. Samozřejmě zlomky na prvním stupni jsou obsaženy pouze v rovině, kterou žáci znají spíše z praktického života. S tím souvisí termín familiarity zlomku, který používají například Vondrová a Rendl (2015). Tento termín používáme pro zlomky, které jsou lehko pochopitelné i bez hlubší znalosti této problematiky. Jsou zpravidla dobře představitelné, jednoduše graficky znázornitelné a setkáváme se s nimi v běžném životě. Jejich přesné vymezení záleží na autorovi. Někteří odborníci považují za familiární zlomky, jejichž jmenovatel je přirozené číslo menší nebo rovno číslu dvanáct. Naproti tomu právě Vondrová a Rendl (2015) považují za familiární spíše jen zlomky s přirozeným jmenovatelem, který je menší nebo rovný pěti.

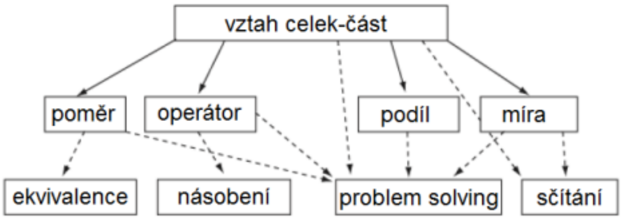
Podrobněji se zlomkům žáci věnují zpravidla v sedmém ročníku. Podle Hejného (2004) je vhodné se nejprve věnovat podrobně zlomkům kmenovým. Za kmenové zlomky rozumíme zlomky typu $\frac{1}{n}$, tedy zlomky, ve kterých je čitatel roven jedné. Dále podle Hejného (2004) můžeme kmenové zlomky vnímat dokonce jako vývojovou etapu.

Zlomek s číslem v čitateli, které je menší, než číslo ve jmenovateli označujeme jako pravý zlomek. Naopak zlomek s číslem v čitateli, které je větší, než číslo ve jmenovateli nazýváme jako zlomek nepravý. Nepravé zlomky lze také vyjádřit smíšenými čísly. (Řepíková, 2013)

1.6 Pojem zlomek

V literatuře se často setkáváme s různými výklady toho, jak lze zlomky chápat. Existuje několik interpretací zlomků. Zlomek může vystupovat v roli míry (veličiny), poměru, podílu (kvocientu), operátoru, vztahu části a celku a v roli pojetí zlomku jako čísla.

Pro studium různých pojetí zlomků je pro nás důležité uvědomit si a zohlednit, že odlišní autoři mohou hranice mezi jednotlivými pojetími chápat subjektivně. Drobné nuance mohou být způsobeny tím, koho autor implicitně považuje za čtenáře či posluchače. Narážíme totiž na rozdíl v chápání žáka a v chápání dospělého. Je ovšem vhodné si uvědomit, že jednotlivé koncepty zlomků jsou do jisté míry provázané. Nelze je mezi sebou zcela oddělit. Viz Obrázek 3: Schéma interpretací zlomků. Na jedné straně je žádoucí umět se zlomkem pracovat v takovém významu, jaký si zrovna úloha žádá, na straně druhé může přílišné diferencování na samostatné subkoncepty být spíše zdrojem dezorientace žáka. (Vondrová, Rendl, 2015)



Obrázek 3: Schéma interpretací zlomků. Převzato z Novotné (2022, s.107).

1.6.1 Zlomek jako míra (veličina)

Role zlomku jako míry (veličiny) využívá možnosti libovolného členění intervalu mezi celými čísly, kde jednotlivé části fungují jako jednotky míry. Proces vytváření jednotlivých n-tin nazývá Sedláková (2006) jako tzv. „jednotkování“. Je důležité si uvědomit, že „jednotkování“ celku celek nijak nemění. Je to proces vhodného rozdělení celku na menší jednotky. V případě rozdělení celku na *n* jednotek, nazýváme jednotlivé části jako *n*-tiny. Přičemž je důležité si uvědomit, že *n*-tin může být vlastně libovolný počet.

Se zlomkem jako mírou se setkáváme na číselné ose, na stupnici metru či teploměru a podobně. V rámci slovních úloh se tak žáci mají možnost setkat se zlomkem v roli míry nejčastěji u úloh s číselnou osou. S úlohami tohoto typu se žáci v českých učebnicích setkávají poměrně málo. (Sedláková, 2006)

Při umísťování zlomků na číselnou osu žáci často za jmenovatele nebo čitatele berou sousední celá čísla. Např. na intervalu mezi čísly 4 a 5 často indikují čtvrtiny či pětiny a podobně. Dále děti zpravidla berou jednu čárku jako jednu *n*-tinu. Chybám ve vyobrazení zlomků na číselné ose přispívá také záměna zlomků $\frac{n}{n}$, $\frac{n}{1}$ a $\frac{1}{n}$. Žáci tyto zápisy někdy považují za ekvivalentní. Většina dotázaných českých učitelů považuje za největší problém v úlohách s číselnou osou nedostatečné procvičení těchto úloh, které se zkrátka tolik nevyskytují a nezbývá na ně tolik času. (Vondrová, Rendl 2015)

1.6.2 Zlomek jako poměr

Interpretace zlomku jako poměru je v něčem odlišná. Vnímání zlomku jako poměru je odlišné od koncepce zlomku jako část-celek. Pokud totiž vnímáme zlomek jako poměr, neuvažujeme ho jako část celku, nýbrž jako části dvě, které dohromady tvoří celek. Zlomek jako poměr lze chápat jako zvětšení či zmenšení v daném poměru, což ovšem souvisí s funkcí zlomku jako operátoru. (Svobodová, 2014)

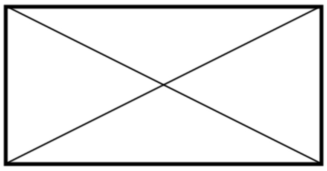
Podle českých učebnic se poměr na základní škole zpravidla vyučuje až po probrání zlomků. Tomuto subkonceptu jsou tedy žáci většinou vystaveni až při přechodu z jednoho tématu na druhé.

1.6.3 Zlomek jako podíl (kvocient)

Jako dělení zlomek vnímali například už staří Egypťané. Využívat zlomky začali při rozdělování obilí. (Vetter, 1923) V té době samozřejmě používali zejména familiární kmenové zlomky. Přičemž za kmenové zlomky považujme zlomky s čitatelem jedna.

Dělení vnímáme dvojím způsobem. Rozlišujeme mezi dělením celku „na“ a dělením celku „po“. Vznikají nám tak dva typy úloh. V prvním se ptáme, jak velké části získáme, když celek rozdělíme na zadaný počet dílů. V druhém případě se ptáme, jak velké díly vzniknou, když jich musí být stanovený počet. Výsledkem dělení je zlomek jako kvocient. (Sedláková, 2006)

Principem zlomku jako podílu (kvocientu) je rozdělování objektu na stejně velké díly. Zajímavé přitom je, že díly nemusí mít stejný tvar. (Sedláková, 2006) Viz Obrázek 4: Rozdělení obdélníku na čtvrtiny, který graficky znázorňuje rozdělení obdélníku na čtvrtiny, kde však všechny díly nemají stejný tvar.



Obrázek 4: Rozdělení obdélníku na čtvrtiny. Převzato ze Sedlákové (2006, s. 21).

Ve školské matematice je tento výklad přínosný zejména v početních úlohách, kde může žákům usnadnit práci. Navíc je na něm vcelku jednoduché pochopit, proč nesmí být ve jmenovateli nula. Znalost toho, že nulou nelze dělit, by měli mít žáci v sedmém ročníku, kde se žáci zlomkům primárně věnují, již bezpečně osvojenou.

1.6.4 Zlomek jako operátor

Operátor představuje změnu. Lze si ho vyložit například jako zvětšení, či zmenšení. Formálně se nám funkce operátoru může jevit jako nějaké pravidlo, algoritmus či návod, při kterém se jedna hodnota (vyjadřující celek) přeměňuje na hodnotu druhou (vyjadřující část). (Divíšek, 1989)

Druh slovních úloh, kde zlomek vystupuje jako operátor, patří mezi poměrně typické. Dá se říci, že pokud je operátorem kmenový zlomek, žáci řeší tyto úlohy víceméně bez problémů. Ty se objevují až ve chvílích, kdy je operátorem nějaký komplikovanější zlomek. Podle Vondrové a Rendla (2015) dochází zejména ke dvěma typům chyb:

a) **interference druhů úloh a výpočtů**
   Tyto chyby se týkají záměny pozic číselných členů úlohy. Zejména se zaměňuje základ a zlomková část. Může však dojít i k záměně zlomkového operátoru. To se stává často, pokud je zlomková část nebo základ vyjádřený zlomkem. Pochopení principu operátorového počtu neznamená, že žák je schopný takovouto úlohu i správně vypočítat. Stejně tak obráceně. Správný

výpočet dítěte neprokazuje, že dítě tuto problematiku pochopilo na žádoucí úrovni.

b) **identifikace základu**

Tento problém mívá více podob. Pokud se v zadání úlohy vyskytují např. dvě čísla, žák za základ často automaticky považuje to větší z nich. Stejně tak, pokud se v textu vyskytuje číslo a zlomek. Pro žáka číslo automaticky představuje celek. V úlohách s operátorem je také nutné vztáhnout operátor k formě kvantity o níž úloha pojednává. Je např. rozdíl mezi tím, když řekneme, že je něco o 1/2 těžší a tím, že je něco o 1/2 kg těžší. Je zajímavé, že k tomuto jevu by teoreticky mohlo docházet i u celých a desetinných čísel. Např. 1,2 mouky a 1,2 kg mouky. Ale u zlomků k tomu dochází častěji, což je možná způsobeno tím, že se zlomky mají žáci ve slovních úlohách méně zkušeností.

1.6.5 Zlomek jako část-celek

Spojení mezí částí celku a celkem začíná dítě chápat již v předškolním věku. Zřejmě i proto je tato interpretace nejhojněji zastoupena v českých učebnicích. (Tichá, Macháčková 2006) Tento význam je tak podle určitého konsenzu považován z jistého hlediska za samozřejmý. V české výuce je to tradiční východisko pro zavedení pojmu zlomku na základní škole, z kterého vychází většina učebnic. K jeho definování se zpravidla používá nějaká modelová situace dělení, často podpořená i graficky. Pojetí zlomku jako části celku může být vnímáno jako nadřazené ostatním subkonceptům. (Novotná, 2022)

Zlomek v tomto pojetí se vždy vztahuje k nějakému celku. V úlohách musí být tento celek nějak explicitně či implicitně vyjádřen, jinak se za celek považuje číslo 1. (Sedláková, 2006)

Vyvstává zde ale otázka, zdali je tato interpretace zcela šťastná, neboť může být zdrojem dezorientace žáků ve smyslu, že zlomek je doslova část celku, a proto musí být menší než 1.

Úlohy, kde se zlomek vnímá jako část celku, se často dají vyjádřit graficky. Úlohy s grafickou podporou dopadají dle výsledků lépe než úlohy bez grafického znázornění. Záleží pak také na konkrétním grafickém rozvržení.

Podle toho, co je v úloze považováno za celek, můžeme podle Novotné (2022) úlohy dělit na:

a) úlohy s diskrétními modely
   1. **počet uspořádaný** – diskrétní jednotky uspořádané do nějakého schématu (např. bonboniéra): Žáci lépe řeší úlohy, které jsou

strukturovány graficky tak, že řešením je např. zakroužkování jednoho celého řádku z obdélníku.

2. **počet neuspořádaný** – diskrétní jednotky bez uspořádání (např. pytlík bonbonů): Jako nejčastější chyba se objevuje, že jedna *n*-tina je zároveň jeden kus. Když máme například 10 bonbonů a žák má označit jednu pětinu, označí jako jednu pětinu jeden bonbon.

b) úlohy se spojitými modely
   1. **úsečka** (např. lať, špejle) – jistou modifikací je pak v podstatě i číselná osa
   2. **kruh** (např. dort, pizza)
   3. **obdélník**
   4. **čokoláda** – na rozdíl od obdélníku má předdefinované menší dílky

   Práce s jednotlivými modely může být pro žáky různě náročná. Např. se můžeme setkat s tím, že žák je schopen graficky rozdělit na třetiny kruh, nikoli však obdélník.

Úlohy bez grafického zadání jsou problematické zejména ve chvílích, kdy skládáme celek ze zlomků s různými jmenovateli. Např., že Anička snědla polovinu dortu, Bedřich třetinu a kolik snědl Cyril? (Vondrová, Rendl, 2015)

1.6.6 Zlomek jako číslo

V tomto smyslu zlomek chápeme především jako racionální číslo, které je součástí různých aritmetických operací.

Se zlomkem jako číslem, s nímž se počítá, se žáci setkávají často. Žákům se samotné zlomky v početních operacích jeví jako nějaký zvláštní druh čísel, s nimiž se počítá podle zvláštních pravidel. Procedurální zvládnutí mechanismů je jedna věc. Konceptuální pochopení logiky těchto výpočtů je věc druhá. Někteří žáci v pravidlech nemusí vidět souvislosti, neumí si je odvodit. Pravidla se mohou žákům plést. Samotný výpočet pak někdy funguje jen na bázi přiřazení správného postupu. (Vondrová, 2015)

V tomto pojetí zlomky pro žáky znamenají jakýsi zvláštní druh čísel, se kterými se počítá podle zvláštních pravidel. Systém fungování početních postupů je pro ně často mimo oblast jejich zájmu. A to je zřejmě původcem toho, proč je počítání se zlomky pro žáky obtížné. I přes výklad s důrazem na konceptuální porozumění je tato sféra pro žáky spíše o zvládnutí konceptuálních dovedností, které však zůstávají bez hlubšího pochopení. Žákům se jednotlivé postupy pletou, pravidla zůstávají nepropojená, často se jim pletou, nevidí vzájemné souvislosti a neumí je odvodit. Výpočet žáci vnímají hlavně jako přiřazení správného pravidla. (Vondrová, Rendl, 2015)

1.7 Chybovost ve zlomcích

Žákům mohou někdy zlomky činit potíže. Problematické však mohou být i pro řadu dospělých, a to i přes to, že jsou běžně součástí kurikula. Za některé chyby nese zodpovědnost miskoncepce, za jiné nedostatečná koncepce zlomků. (Gokkurt-Ozdemir, 2021)

Problém mohou dělat základní početní operace, krácení a porovnávání zlomků, celých, desetinných a smíšených čísel. Žáci často zvládají řešit operace jednotlivě, avšak při uplatnění distributivního zákona a pravidel pro počítání se zlomky zároveň mohou mít problém. Stejně tak jasnost ekvivalence různých vyjádření téhož zlomku nemusí být pro žáky samozřejmá, a to často ani po probrání učiva. Část chybovosti vzniká zřejmě i proto, že žáci se se zlomky teprve seznamují a nemají tedy dostatek znalostí a nemají ani tak zautomatizované jednotlivé početní úkony při práci se zlomky. Některé chyby zase mohou vznikat z důvodu nedostatečné čtenářské gramotnosti. Některé problémy se zlomky nejsou vyloženě signifikantní pro zlomky. Žáci např. látku pochopí, ale zapomenou. Učivo se jim ve větším množství plete i přes to, že v menších celcích jej ovládají. (Vondrová, Rendl 2015)

Mylné představy žáků by měly být použity jako výchozí bod ve výuce. Je možné, aby učitelé mylné představy, které při vyučování vznikají, proměnili ve výhodu. Je tedy důležité o nich diskutovat. (Önal, 2023)

Žáci mohou mít někdy problém ústně vyjádřit, co se zlomky provádí. Může jim činit problém správně pojmenovat matematické úkony. Může být pro ně náročné osvojit si jazyk matematického popisu. Takže neumějí popsat, co provádí, a naopak je náročné jim ústně poradit. Toto však není problém týkající se pouze zlomků, ale narážíme na něj napříč celou matematikou. U zlomků jsou však typické chyby, kdy žáci pod pojmem krátit zlomky myslí násobit zlomky. Zřejmě kvůli tomu, že je mezi nimi krát. Je fakt, že čeština je v tomto ohledu trochu nešikovná. Kořen slova krátit nám v tomto příliš nepomáhá. Pokud žák mluví o krácení, naopak často používá slovní pojmy jako vydělit čitatele a jmenovatele. Což je také pochopitelné. Krácení zlomků je vlastně technicky pouze dělení čitatele a jmenovatele stejným číslem. (Vondrová, Rendl, 2015)

Chyby vyplývající z nedostatečného pochopení v jazykové rovině se týkají zejména úloh s operátory. Příčinou některých chyb může být například záměna slov „kolik“ a „kolikrát“, která jsou si graficky podobná. Obdobnou chybou je vynechávání předložek. Například vynechání předložky o u slovního spojení „o kolik“ změní význam na slovo „kolik“. Na otázku operátorového charakteru pak žáci někdy odpovídají číslem v roli stavu (například „kabát stojí 500 Kč“ místo „kabát stojí o 500 Kč více“). Případně žáci zaměňují multiplikativní a aditivní operátory. (Vondrová a kolektiv, 2019)

2 Praktická část

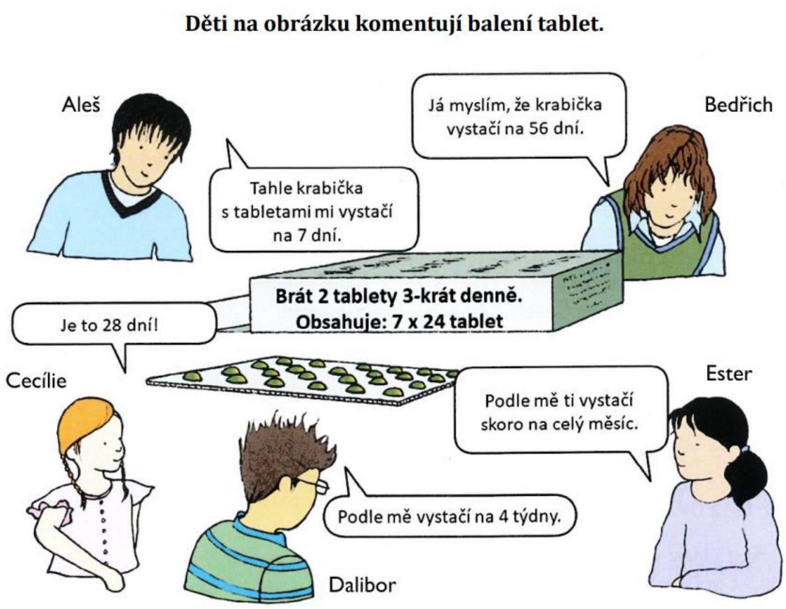
2.1 Cíle praktické části

Cílem praktické části bylo zjistit, jak budou žáci sedmého ročníku reagovat na otevřenou úlohu o zlomcích. Nástrojem pro takové zjištění byl vytvořený Concept Cartoon s názvem Čokoláda (Obrázek 6: Concept Cartoon Čokoláda), který se vztahuje k tématu dělení ve spojení se zlomky. Žákovské reakce byly roztříděny podle správnosti a diskutovány s výsledky citované literatury.

2.2 Popis praktické části

Sběr dat probíhal na konci školního roku, v červnu 2023. Jako vzorek jsem zvolila 7. třídu základní školy. K tomuto rozhodnutí mě vedlo zejména to, že podle ŠVP žáci tematický celek zlomky probírali právě v tomto ročníku. Zvolená škola se nachází v obci s cca 1200 obyvateli, přibližně 30 km od Hradce Králové. Školu ve školním roce 2022/2023 navštěvovalo cca 170 žáků. Nižší počet žáků oproti školám městským se promítl i do počtu žáků sedmého ročníku. Výzkumu se zúčastnilo 15 žáků sedmého ročníku základní školy.

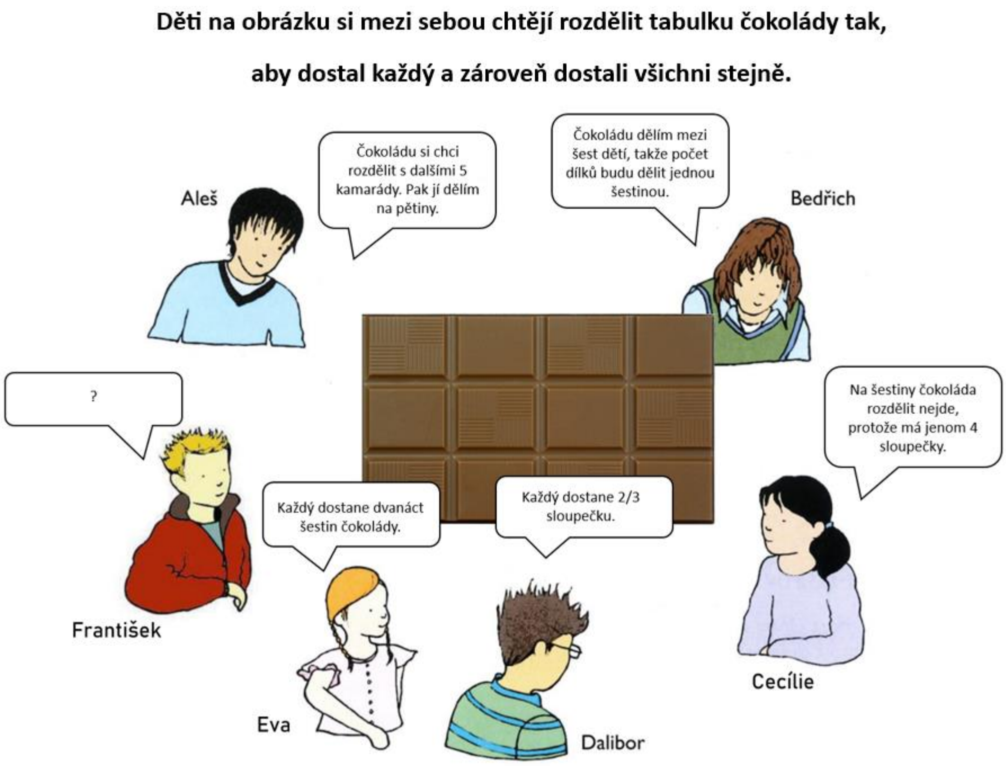
Třída neměla žádné předchozí zkušenosti s prací v prostředí Concept Catoons, tudíž jsem jako úvodní část pětačtyřicetiminutové vyučovací hodiny zvolila práci s jiným Concept Cartoon s názvem Tablety. Viz Obrázek 5: Tablety.



Obrázek 5: Tablety. Převzato ze Samkové (2020, s. 30).

S tímto Concept Cartoon žáci pracovali ústně. Nechala jsem jim čas na přečtení a vlastní úvahu, posléze jsme společně řízenou diskuzí probrali celou situaci bublinu po bublině. Žáci měli prostor vyjádřit jakýkoliv svůj poznatek. Na závěr jsem s nimi ověřila pravdivost jejich odpovědí a vysvětlili jsme si důvody případných chyb. Poté, co byli žáci seznámeni s technikou práce jsem jim rozdala pracovní listy s Concept

Cartoon Čokoláda, který žáci vyplňovali jednotlivě a své odpovědi zaznamenávali písemně. Na vyplnění měli žáci jednu vyučovací hodinu, tj. 45 minut.



Obrázek 6: Concept Cartoon Čokoláda.

Námět úlohy a obsah bublin jsou mojí autorskou prací. Šablony dětí byly převzaty z publikace Dabell a kol. (2008: č. 1_8, 3_12). Jelikož žáci si práci s Concept Cartoon poprvé vyzkoušeli s úlohou Tablety, volila jsem šablony dětí od stejného autora, aby prostředí pro žáky bylo co nejméně rušivé.

Žáci dostali instrukce, že si do pracovního listu mohou libovolně kreslit i psát a že s obrázkem budeme pracovat úplně stejně, jako s obrázkem Tablety. Tudíž, že u každého dítěte na obrázku budeme určovat, jestli má pravdu a proč. Žáky jsem opakovaně upozorňovala na to, že mi nevadí, pokud budou mít v pracovních listech chyby. Během samostatné práce jsem mezi žáky chodila a motivovala je k vyplnění všech kolonek. Často se totiž dělo, že žák napsal pouze ano nebo ne, ale nenapsal proč. Při ústní konfrontaci však žák reagoval. Většinou jsem interakci započala modelovou větou: „Vidím, že máš vynechaný tento řádek. Nevíš, co tam napsat? A co tě k tomu napadne, o čem přemýšlíš?“ Žáci většinou reagovali obdobně, tedy sdělili mi své myšlenky s tím, že nevědí, jak to mají napsat. Načež jsem je vždy vyzvala větou: „Napiš to přesně tak, jak si mi to teď vysvětlil/a, já to z toho pochopím.“ Žáky, kteří ani po takovéto ústní konfrontaci nereagovali, jsem do odpovědi netlačila, aby nedošlo k přílišnému zkreslení výsledků. Už během sběru dat jsem tedy získala celkem podrobnou představu o žákovských úvahách, což jsem zúročila při opravě pracovních listů následující hodinu. Po vyplnění všech pracovních listů jsem je vybrala a lehce si je pročetla, abych mohla žákům po přestávce dát zpětnou vazbu a projít s nimi nejčastější chyby.

2.3 Roztřídění výsledků

Pro roztřízení odpovědí žáků jsem zvolila systém přiřazení zkratek s čísly. Každému žákovskému dotazníku jsem připojila identifikátor. Přiřazení čísel bylo konstruováno tak, aby žák s nejvíce správnými odpověďmi, které byly zároveň i vhodně zdůvodněné, měl číslo P01 a žák s nejvíce chybnými odpověďmi měl číslo P15. V případě stejného počtu chybných odpovědí dostal vyšší číslo žák, jehož zdůvodnění bylo přesnější či podrobnější.

Seřazení žáků však v tomto případě neslouží k jejich hodnocení. Jejich uspořádání slouží pouze jako nástroj pro snazší orientaci mezi jednotlivými dotazníky.

V práci jsou citovány autentické výroky žáků. Komentáře participantů jsou pro ponechání autentičnosti přepsány doslovně, včetně veškerých pravopisných chyb.

2.4 Concept Cartoon Čokoláda

Úloha Čokoláda (viz Obrázek 6: Čokoláda) se dotýká několika témat. Základním předpokladem pro správné řešení je zvládnutí dělitelnosti a vztahu mezi dělitelností a zlomky. Žák by měl ovládat základní operace se zlomky, mít schopnost řešit slovní úlohy a umět vypočítat obsah obdélníku.

Dělení čokolády jsem vybrala proto, že čokoláda sama o sobě je sice s jistým omezením defacto nekonečně dělitelná, díky jejímu rozčlenění na jednotlivé dílky. Ve slovních úlohách však vystupuje jinak, neboť problém s rozdělením čokolády převádí na dělitelnost na nejmenší možné dílky, tedy „obdélníky" čokolády. Dostáváme se tak spíše do problematiky dělitelnosti celých čísel. V následujících odstavcích se zaměříme na jednotlivé bubliny s reakcemi dětí na obrázku.

2.4.1 Aleš: „Čokoládu si chci rozdělit s dalšími pěti kamarády. Pak ji dělím na pětiny."

Alešova bublina je nepravdivá. Chybu nalézáme v tom, na kolik částí se má čokoláda rozdělit. Dětí na obrázku je šest, proto nebudeme dělit čokoládu na pětiny, ale na šestiny. Jednoduše můžeme říct, že Aleš např. neuvažuje sám se sebe, zapomněl započítat sebe.

Tato bublina ověřuje pochopení zlomku jako části celku a zlomku v roli podílu (kvocientu). Pracuje s kmenovými zlomky $\frac{1}{5}$ a $\frac{1}{6}$. Žák při řešení využívá znalost, že při dělení pěti vznikají pětiny a při dělení šesti šestiny.

2.4.2 Vyhodnocení komentářů k Alešově bublině

U Alešovy bubliny se vyskytlo pět skupin odpovědí. První skupinou je skupina správných odpovědí celkem šesti žáků (P01, P02, P04, P08, P09, P11). Například:

> P02: *„Aleš by měl pravdu, kdyby jich bylo 5 ale je jich 6 takže pravdu nemá."*

Pět žáků (P03, P05, P06, P07, P12) uvedlo chybnou odpověď víceméně stejného znění:

P05: *„Nemá protože 12 dělit 5 nejde.“*

Dva žáci (P14, P15) uvedli chybnou odpověď:

P15: *„ANO protože je 12 dílků čokolády* $12 \div 5 = 2$ *těm pěti a k tomu ještě zbydou 2.“*

Jeden žák (P10) uvedl chybnou odpověď:

P10: *„Ne nemá pravdu vydalo by na všechny 2 ale 2 by zbyly.“*

Je zajímavé, že všichni tito tři žáci (P10, P14, P15) sice uvažovali stejně o tom, že zbydou dva dílky čokolády, ale dva z nich touto logikou vyhodnotili odpověď Aleše jako pravdivou a jeden jako nepravdivou.

Všech těchto osm žáků, kteří uvedli chybné odpovědi (P03, P05, P06, P07, P10, P12, P14, P15), o úloze uvažovalo na množině celých čísel. Jejich pozornost byla převedena k problému, že číslo 12 není na množině celých čísel dělitelné 5. Tedy, že 12 kostiček se nedá rozdělit po celých kostkách mezi 5 dětí beze zbytku. Tato myšlenka sice není samostatně chybná, avšak v kontextu úlohy je zcestná. Domnívám se, že tento fakt na sebe strhl veškerou žákovskou pozornost a žáky tedy ani nenapadlo uvažovat o tom, zdali je vůbec žádoucí čokoládu dělit zrovna na pětiny. Zajímavé taky je, že po ústní interakci, kdy jsem se žáků zeptala, jestli mohou rozdělit 2 kostičky mezi 4 žáky mi tito žáci odpověděli, že ano, neboť kostičku čokolády lze rozpůlit. Při vlastní úvaze však kostičky čokolády považovaly za nedělitelné. Následně mi žáci byli schopni odvodit i to, že 12 dílků čokolády se dá rozdělit mezi 5 dětí, avšak děti nedostanou celé kostičky. Domnívám se, že tomu tak je zejména proto, že úloha rozdělení 2 kostiček mezi 4 žáky je jednodušší ze dvou důvodů. Obsahuje menší a „hezčí“ čísla, tedy si problém mohou žáci jednodušeji představit a také zde máme méně kostiček než dětí, tedy je zřejmé, že žáci nedostanou celé kostky. V modelovém příkladu je to však obráceně. Kostiček čokolády je více než dětí a výsledek je 2,4 kostiček čokolády, což je velmi špatně graficky představitelné číslo. V praxi se navíc čokoláda většinou na 2,4 kostičky nedělí.

Pátou skupinu odpovědí tvoří pouze žák P13, který říká:

P13: *„Nemá pravdu. Jsou to dvanáctiny protože to je 12 čtverečku.“*

Tento typ chyby, kdy žák za n-tinu považuje automaticky jednu část z grafického vyobrazení zmiňuje například i Vondrová a Rendl (2015).

2.4.3 Bedřich: „Čokoládu dělím mezi šest dětí, takže počet dílků budu dělit jednou šestinou.“

Bublina Bedřicha je nepravdivá. Pokud chci čokoládu rozdělit na šestiny, pak musím buď dělit šesti, nebo násobit převrácenou hodnotou, tedy jednou šestinou.

Účel zařazení této bubliny je zjistit, jestli žáci vnímají rozdíl mezi pojmy dělit šesti a dělit jednou šestinou. Bublina Bedřicha pracuje s miskoncepcí, že rozdělit celek na šestiny je totéž jako dělit celek jednou šestinou. Bublina je zaměřená na rozdíl mezi dělením šesti a dělením jednou šestinou, což se dotýká vlastně i násobení jednou šestinou.

Zlomek je v tomto případě vnímán jako operátor a jako podíl (kvocient).

2.4.4 Vyhodnocení komentářů k Bedřichově bublině

U Bedřicha správně odpověděl pouze jeden žák (P02). Další dva žáci (P14, P15) sice správně uvedli, že Bedřich nemá pravdu, avšak neuvedli proč. Proto jsem jejich odpověď za správnou nepovažovala.

Osm žáků (P01, P03, P05, P08, P09, P10, P11, P12) odpovědělo chybně v důsledku chyby, že dělit jednou šestinou je stejné jako dělit šesti. Z toho čtyři žáci (P01, P03, P10, P12) odpověděli analogicky jako žák P01:

> P01: *„Ano.* $\frac{12}{1} \div \frac{1}{6} = \frac{12}{1} \times \frac{6}{1} = \frac{72}{1} = 72 \div 6 = 12 \div 6 = 2$ *“*

Žáci P05 a P08 svou dopověď zdůvodnili následovně:

> P08: *„Ano má, protože myslí dobře a napadl ho správný příklad 12 dílků ÷ 6 (počet dětí).“*

Je zajímavé, že první čtyři žáci (P01, P03, P10, P12) pochopili, že Bedřich směřuje k příkladu $12 \div \frac{1}{6}$, jehož řešení zřejmě z různých hlouběji neověřitelných důvodu provedli chybně. Lze však uvažovat, že ne všichni žáci k tomuto řešení sklouzli pouze kvůli miskoncepci ekvivalence jedné šestiny a šesti. Například žák P01 totiž uvádí příklad, ze kterého je patrné, že pouze špatně vydělil zlomky. (Viz Obrázek 7: Řešení žáka číslo P01.) Zároveň žák P01 ve vlastním komentáři uvádí, že by úlohu vyřešil příkladem $12 \div 6 = 2$. Předpokládám tedy, že žák je schopen sestavit vhodný příklad k vyřešení úlohy. Možná si je i vědom rozdílu mezi násobením jednou šestinou a násobením šesti. Avšak předpokládám, že žák toto nemá zautomatizované, a proto se nechal zadáním úlohy lehce zmást. O problému dělení zlomkem se zmiňuje Hrubý (2021), který upozorňuje na vhodnost zdůraznění fungování inverzních operací násobení a dělení ve vztahu k převrácené hodnotě čísla. Bez jejich dostatečného pochopení může docházet k zvýšené chybovosti v tomto ohledu.

$$\frac{12}{1} : \frac{1}{6} = \frac{12}{1} \cdot \frac{6}{1} = \frac{72}{1} = 72 : 6 = 12 : 6 = 2$$

Obrázek 7: Řešení žáka číslo P01.

Dva žáci z osmi výše zmíněných (P05, P08) však rovnou napsali do zdůvodnění, že Bedřich má pravdu, protože 12 ÷ 6 jsou dva. Tito dva žáci defacto úplně ignorovali šestinu v zadání. Domnívám se, že oba okamžitě dělení jednou šestinou a dělení šesti považovali za ekvivalentní. Zaujal mě i fakt, že těchto šest z osmi žáků, kteří odpověděli chybně, zdůvodnilo správnost bubliny tím, že to vyjde, tak jak má, tedy že každé dítě obdrží dva obdélníčky. To však vůbec není zamýšleným předmětem úlohy. Určit správnost tvrzení lze ověřit i bez provedení jakéhokoliv výpočtu na dělení. Dle logiky toho, že dělit jednou šestinou je ekvivalentní dělení šesti bych stejně jako vhodnější odpověď považovala odpověď žáků P09 a P011, kteří říkají:

P09: *„Má pravdu, protože je šest dětí.“*

Dva žáci (P04, P06) chybně odpověděli, že jednou šestinou dělit nelze.

P04: *„Nemá. Jednou šestinou dělit nejde.“*

P06: *„Ne, protože nejde dělit jednou šestinou bylo by to moc malý.“*

Myslím, že žák P06 bude překvapený, až zjistí, že jednou šestinou dělit jde a podíl je dokonce větší než dělenec.

Odpověď žáka P07 zní:

P07: *„Ne. Čokoláda by zbyla (6 □).“*

Domnívám se, že k této chybné odpovědi dovedla žáka úvaha, že každý dostane $\frac{1}{6}$ čokolády, přičemž jako $\frac{1}{6}$ čokolády uvažoval 1 čtvereček. Potom by vážně 6 „kostiček“ zbylo.

Žák P13 uvádí:

P13: *„Nemá pravdu. Každému dává dva čtverečky. Ale jsou to dvanáctiny.“*

Žák P13 zřejmě ulpěl na dvanáctinách. Zajímavé také je, že z jeho odpovědi lze vyčíst to, že každému dává $\frac{2}{12}$, což je vlastně jedna šestina. Žák P13 dokázal přemýšlet pouze ve dvanáctinách už i u bubliny Aleše.

2.4.5 Cecílie: „Na šestiny čokoláda rozdělit nejde, protože má jenom 4 sloupečky.“

Ani komentář Cecílie není pravdivý, neboť to, že má čokoláda čtyři sloupečky, neovlivňuje to, jak se dá rozdělit. Čokoláda by mohla mít dokonce libovolný tvar a stále by rozdělit šla. Ovšem, nebylo by to již tak názorné a ani zdaleka tak praktické v reálném světě. Jev, kdy jde nějaký geometrický model rozdělit na n-tiny o stejném obsahu, které však nemají stejný tvar popisuje i Sedláková (2006).

Cecíliin komentář má žáky navést na myšlenku nekonečného dělení, což je vlastně jedním ze subkonceptů zlomků. Čokoláda sice nejde rozdělit na 6 sloupečků, ale můžeme zvolit přeci jemnější dělení na kostičky. Zlomek je zde vnímán jako dělení (kvocient).

2.4.6 Vyhodnocení komentářů k Cecíliině bublině

Devět žáků (P01, P02, P03, P04, P05, P06, P08, P09, P10) uvádí správnou odpověď, tedy že Cecílie nemá pravdu, protože čokoláda mezi šest dětí rozdělit jde. K odůvodnění používají různé přístupy. Největší skupina (6 žáků) říká:

> P02: *„Cecílie pravdu nemá protože i když to má 4 sloupečky tak to má ale 12 kostiček."*

Žáci P05, P09 a P10 uvádějí pouze, že Cecílie nemá pravdu, protože čokoláda rozdělit jde. I tuto interpretaci odpovědi považuji za správnou, ačkoli je méně přesná.

Tři žáci (P12, P14, P15) chybně uvádí, že Cecílie pravdu má:

> P12: *„Cecílie má pravdu protože čokoláda na šestiny vážně rozdělit nepůjde protože má vážně 4 sloupce. 6 dětí 4 sloupce. Dětí je víc než sloupečků."*

Žák P12 u Cecílie píše, že z tohoto důvodu čokoláda rozdělit nelze, ale u otevřené odpovědi žák doslovně píše, že čokoládu by rozdělil po dvou dílcích. Což je paradoxní. Stejný rozpor v odpovědích můžeme sledovat i u žáka P15, který shodně souhlasí s Cecíliiným názorem, že čokoláda rozdělit nejde, protože máme více dětí než sloupečků, zároveň ale u tvrzení Dalibora píše, že každý dostane dva obdelníčky. Odpověď žáka P11 je velmi podobná.

> P11: *„Špatně potom by někdo nemněl."*

Všechny tyto odpovědi jsem předpokládala. Domnívám se, že žáci se nechali zmást doslovně zapsanými čísly v zadání, která nás tak trochu navádí na to, že dětí je o dva více než sloupců. Žáci by měli pravdu v situaci, že by bylo určeno, že každé dítě musí dostat jeden celý sloupec. V takovém případě by opravdu dvě děti nedostaly. Další možná interpretace této chyby je, že žáci uvažují tak, že všechny šestiny musí mít stejný tvar. O tomto fenoménu píše Sedláková (2006).

Žák P13 i zde opět ulpěl na dvanáctinách a píše:

> P13: *„Nemá pravdu. Jde rozdělit ale budou to dvanáctiny – 12 čtverečků."*

Sice tedy správně odpověděl, že Cecílie nemá pravdu, ovšem zdůvodnění je nevyhovující. Typ této chyby, kdy žák automaticky přiřazuje jednu n-tinu jedné části grafického znázornění hovoří například i Vondrová a Rendl (2015).

Žák P07 říká:

P07: *„Čokoláda jde rozdělit na šestiny (půl/půl).“*

2.4.7 Dalibor: „Každý dostane 2/3 sloupečku.“

Daliborova bublina je pravdivá, neboť každé dítě obdrží 2 kostičky, což jsou právě $\frac{2}{3}$ sloupečku.

Daliborova bublina byla zařazena kvůli nutnosti práce se zápisem zlomku. Dále měla ověřit schopnost žáka určit velikost zlomku ze zadaného základu. Zlomek je zde vnímán jako část celku a jako operátor.

2.4.8 Vyhodnocení komentářů k Daliborově bublině

Sedm dětí (P02, P03, P04, P05, P07, P08, P13) odpovědělo správně, že Dalibor má pravdu, nýbrž každý dostane dva čtverečky čokolády, a protože dvě třetiny sloupce jsou právě ony dva čtverečky. Žák P04 a P05 k této odpovědi došli graficky. Viz Obrázek 8: Grafické řešení žáků P04 a P05.

Obrázek 8: Grafické řešení žáků 4 a 5.

Žák číslo P02 uvádí:

P02: *„Má pravdu protože každý dostane 2 kostičky jelikož $\frac{2}{3}$ sloupečku se rovnají dvoum kostičkám. Poté zbydou 4 kostičky v řádku a ty si rozdělí ti 2 co zbyli.“*

Je zřejmé, že všech těchto 11 žáků nepovažuje za problém, že páté a šesté dítě neodstanou doslova $\frac{2}{3}$ sloupečku, ale dostanou $\frac{2}{4}$ řádku.

Dva žáci (P01, P06) odpověděli správně, že Dalibor nemá pravdu, protože $\frac{2}{3}$ sloupečku dostanou pouze čtyři děti, zbylé dvě obdrží $\frac{2}{4}$ řádku.

P01: *„Ne. Sloupeček má 3 čtverečky a máme 4 sloupečky. Pokud z každého ubereme 2 čtverečky zbyde nám 1 řádek. V tu chvíli už nemají všichni $\frac{2}{3}$ sloupečku, ale 2 by měli $\frac{2}{4}$ řádku.“*

Toto řešení jsem dopředu vůbec nepředpokládala, ale přijde mi ještě výstižnější. Zajímavé je, že onen předmět diskuse je dle výpovědi žáka P02 zřejmý i žákům z první skupiny, ti jej však nepovažují za problém.

Jeden žák (P12) uvedl chybně:

P12: *„Museli by být dva sloupečky.“*

Škoda, že tato úvaha není hlouběji rozvinutá.

Žáci P09, P14 a P15 odpověděli správně, že Dalibor má pravdu, protože každý dostane dva dílky.

P09: *„Má pravdu, každý dostane přesně dva dílky.“*

V odpovědi mi však chybělo vyjádření, že ony dva dílky jsou ekvivalentní $\frac{2}{3}$ sloupečku. Což z odpovědi možná nepřímo vyplývá, ale já jsem to považovala za nedostatečné.

Žák P10 správně říká, že Dalibor má pravdu, protože každý dostane $\frac{2}{3}$ sloupečku, což taktéž není dostatečná odpověď, proto nemůže býti považována za správnou. Jeden žák (P11) sice také správně odpověděl, že Dalibor má pravdu, ale jako zdůvodnění uvedl, že se mu to prostě líbí, což taktéž nepovažuji za dostatečné.

P10: *„Ano má pravdu každý dostane $\frac{2}{3}$ sloupečku.“*

P11: *„Ano je to prostě dobře se mi to líbý.“*

2.4.9 Eva: „Každý dostane dvanáct šestin čokolády.“

Komentář Evy naráží na problém určení toho, co je celek. Je rozdíl, jestli řeknu, že každý dostane dvanáct šestin čokolády, nebo každý dostane dvanáct šestin kostičky. Toto tvrzení je tedy nepravdivé.

Předpokladem pro správné řešení schopnost krátiti zlomky a zejména schopnost žáka správně určit základ. Dále řešení předpokládá, že žák umí pracovat s nepravými zlomky.

Zde vystupuje zlomek zejména v roli operátoru.

2.4.10 Vyhodnocení komentářů k Evině bublině

Škála komentářů k bublině Evy byla velmi bohatá. Dva žáci (P01, P03) odpověděli zcela správně:

P01: *„Ne. Každý by musel dostat 2 celky.“*

Jeden žák (P07) napsal nesprávně:

P07: *„Je moc dětí, aby každý dostal $\frac{12}{6}$“.*

Což mi připadá, že to myslel v tom smyslu, že pochopil, že máme málo čokolády. Avšak problém se nedá vyřešit snížením počtu dětí. Čokolády sice máme málo, ale ani pokud snížíme počet dětí, dvě tabulky čokolády nám to nezajistí. Aby to tak fungovalo, museli bychom mít $\frac{1}{2}$ dítěte. Což je ovšem úvaha, která sice funguje v matematickém světě, ale po vztažení k reálné úloze tato úvaha nedává smysl.

Čtyři žáci (P04, P05, P14, P15) sice odpověděli správně, že nemá pravdu, avšak nezdůvodnili proč. Proto jejich odpovědi nemůžeme považovat za správné.

Šest žáků (P06, P08, P09, P11, P12, P13) odpovědělo nesprávně, že Eva má pravdu, protože $\frac{12}{6}$ jsou dva čtverečky.

> P11: *„Ano. Zlomek stačí zkrátit na* $\frac{2}{1}$*."*

Domnívám se, že u těchto žáků došlo k nesprávné identifikaci základu. Jako základ považovali jednu kostičku čokolády místo jedné tabulky složené z dvanácti kostiček. Tento typ chyby, tedy identifikaci základu v pojetí zlomku jako operátoru popisuje i Vondrová a Rendl (2015).

Žák P02 udělal zajímavou chybu. Ve svém pracovním listu uvádí:

> P02: *„Eva nemá pravdu protože když si dáme* $\frac{12}{6} \div \frac{6}{1}$ *tak se to rovná* $\frac{1}{3}$ *ale aby si to rozdělili spravedlivě (a bez zbytku) muselo by to vyjít* $\frac{2}{3}$*."*

Žák udělal více chyb. Pomineme-li fakt, že nesprávně identifikoval základ a $\frac{12}{6}$ ještě dělil $\frac{1}{6}$, tak vidíme, že tento žák se nechal ovlivnit tvrzením Dalibora, které je podle žáka pravdivé. Což je sice správně. Daliborovo tvrzení je správné. Ovšem žák udělal chybu v identifikaci základu. Nelze porovnávat $\frac{2}{3}$ sloupečku a $\frac{12}{6}$ čokolády.

Žák P10 napsal:

> P10: *„Má pravdu všichni dostanou 1 kousek čokolády."*

Což je zajímavé, neboť žák P10 zároveň u vlastního komentáře uvádí, že každý dostane dva čtverečky, což je v rozporu s komentářem u Evy.

2.4.11 Vyhodnocení vlastních komentářů (doplnění Františkovy bubliny)

Dle předpokladu vlastní komentáře nejčastěji obsahovaly odpověď typu „každý dostane dva kousky". Takto odpovědělo 6 žáků (P01, P02, P06, P09, P10, P12). Zajímavé mi přijde, že z toho čtyři žáci (P01, P06, P09, P12) uvádí, že každý dostane 2 kousky, protože $12 \div 6$ jsou dva zároveň všichni tyto čtyři žáci u odpovědí Dalibora napsali, že má pravdu, protože $12 \div \frac{1}{6}$ jsou dva. Tito žáci mají zřejmě miskoncepci, že dělit šesti a šestinou vyjde nastejno. Tomuto problému se více věnuje například Hrubý (2021).

> P01: *„Čokoláda má 12 čtverečků. Kamarádů je 6.* $12 \div 6 = 2$ *Každý dostane 2 čtverečky."*

Jeden žák (P05) ještě rozšířil řešení o to, jak by se dala čokoláda rozdělit mezi 4 a 3 kamarády:

> P05: *„Rozdělila bych to 2 kdybych to chtěla dát 6 kamarádům, 6 když chci dát 2, 4 kdybych chtěla dát 3 a 3 kdybych chtěla dát 4."*

Správný komentář měl i žák P03. Ten vůbec neuvádí výsledek, ale pouze postup.

P03: *„Já bych čokoládu rozlámal na dílky a dokola bych každému dával po 1. dokud by nic nezbylo. Pokud by to nevyšlo zbylé kousky by měl vlastník čokolády."*

Čtyři žáci (P04, P07, P08, P11) zapsali zcela nematematické komentáře:

P07: *„Já bych to nekomentoval. Já bych ji snědl."*

Dva žáci (P13, P14) mají velmi podobnou odpověď:

P13: *„Každýmu 1 čtvereček zbytek dostanu já."*

P14: „Každý by dostal 1 jeden čtvereček a 6 by si nechal Franta."

Druhý případ (žáka P14) ovšem nefunguje. Čokoláda by musela mít 11 dílků. Žák zřejmě uvažoval, že on vlastní čokoládu a chce se rozdělit s ještě dalšími 6 dětmi. Ani jeden z těchto komentářů jsme pro svoje účely nepovažovala za správný.

Žák P15 píše, že by měl stejný komentář jako Dalibor.

P15: *„Jak říkal Dalibor."*

2.5 Shrnutí výsledků

Výsledky žáků jsou zpracovány v tabulce. Viz Obrázek 9: Tabulka odpovědí.

	Aleš		Bedřich		Cecílie		Dalibor		Eva		František
	určení pravdivosti bubliny	vhodné zdůvodnění	určení pravdivosti bubliny	vhodné zdůvodnění	určení pravdivosti bubliny	vhodné zdůvodnění	určení pravdivosti bubliny	vhodné zdůvodnění	určení pravdivosti bubliny	vhodné zdůvodnění	vhodná odpověď
P01	✓	✓	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
P02	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	✓
P03	✓	×	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
P04	✓	✓	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	×	×
P05	✓	×	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓
P06	✓	×	×	×	✓	✓	✓	✓	×	×	✓
P07	✓	×	×	×	×	×	✓	✓	×	×	×
P08	✓	✓	×	×	✓	✓	✓	✓	×	×	×
P09	✓	✓	×	×	✓	✓	✓	×	×	×	✓
P10	✓	×	×	×	✓	✓	✓	×	×	×	✓
P11	✓	✓	×	×	×	×	✓	×	×	×	×
P12	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	×	✓
P13	✓	×	×	×	✓	×	✓	✓	×	×	×
P14	×	×	✓	×	×	×	✓	×	✓	×	×
P15	×	×	✓	×	×	×	✓	×	✓	×	×

Obrázek 9: Tabulka odpovědí.

Ze řádků můžeme vyčíst odpovědi jednotlivých žáků, sloupce nám ukazují úspěšnost jednotlivých bublin. U každé bubliny jsem hodnotila určení pravdivosti bubliny, tedy jestli žák správně dichotomicky určil pravdivost výroku v bublině, či nikoliv. Dále jsem u každé bubliny hodnotila žákovo zdůvodnění či komentář. Jako vhodné byly označeny všechny odpovědi, které byly v souladu se zadáním. V několika případech se stalo, že žák označil bublinu správně jako pravdivou, nebo nepravdivou, ale po přečtení jeho zdůvodnění buď vyšlo najevo, že jeho zdůvodnění je v rozporu s jeho tvrzením, nebo že jeho zdůvodnění je v rozporu se zadáním úlohy. Toto je hlouběji rozpracované ve vyhodnocování jednotlivých bublin. S případem, že by žák nesprávně určil pravdivost bubliny, ale jeho zdůvodnění by bylo správné jsem se nesetkala.

Z Obrázku 9: Tabulka odpovědí můžeme vyčíst i které tvrzení bylo pro žáky nejproblematičtější. Jako nejproblematičtější se nám jeví bublina Bedřicha. Tato bublina se zaměřuje na rozdíl mezi dělením jednou šestinou a dělením šesti. Správně odpověděl pouze jeden žák z 15.

Nejméně problematickou bublinu nelze s převahou určit, ovšem nejvíce správných odpovědí bylo zaznamenáno u bublin Cecílie a Dalibora. U těchto dvou bublin bylo osm správných a sedm chybných odpovědí.

Úplně nejvíce, devět správných odpovědí, bylo u bubliny Františka, ovšem vyhodnocení této bubliny je v něčem trochu jiné, neboť žáci zde neurčovali dualitu mezi ano a ne, ale psali vlastní komentář.

3 Diskuze

Zvoleným nástrojem pro praktickou část práce byla metoda Concept Cartoons. Bylo zjištěno, že vytvořený pokusný Concept Cartoon funguje dle teoretických předpokladů. Fungování vytvořené úlohy je patrné z vypozorovaných trendů v žákovských odpovědích, které vykazují shodné známky s tím, jaké charakteristické znaky žákovských miskoncepcí či nedostatečných koncepcí popisuje odborná literatura.

Praktická část práce se v podstatě zakládá na vhodném zvolení komentářů dané situace v bublinách. U každého tvrzení převažoval nějaký trend správného i nesprávného žákovského komentáře.

U Alešova tvrzení se setkáváme s tím, že žáci nad modelem tabulky čokolády přemýšlejí v celých číslech. Toto popisuje například Novotná (2022), která tabulku čokolády řadí mezi spojité modely celku a považuje ji za samostatný specifický model. Tento typ uvažování žáků, který uvádí literatura a vyskytl se také v praktické části, není sám o sobě špatný. V praktické části však vlivem tohoto trendu někteří žáci přesunuli svou pozornost k dělitelnosti celých čísel a nedokázali tak správně určit celek.

U Bedřichovy bubliny se setkáváme se zaměňováním dělení šesti s dělením jednou šestinou. O této tendenci píše například Hrubý (2021). Dále se zde nacházíme žákovská tvrzení, že zlomkem nelze dělit. Podstata toho, proč si to žáci myslí, bohužel nebyla v pracovních listech hlouběji zdůvodněna.

Při vyhodnocování Cecíliiny bubliny objevujeme rysy chyb popsané Sedlákovou (2006). Žáci za stejně velké n-tiny celku považují pouze n-tiny, které mají stejný tvar. Taktéž zde objevujeme odpovědi, které deklarují přemýšlení žáků v množině celých čísel. O tomto píše Novotná (2022).

U Daliborova tvrzení se objevily zajímavé správné komentáře, které dokládají hlubší vhled žáků do dané situace a jsou v jednom případě doplněné grafickým znázorněním plynoucím ze správné představy žáka. O využívání grafických modelů píše například Novotná (2022).

Chybovost, která vyplývá z komentářů k Evině bublině, poukazuje na problémy s identifikací celku, což je podle odborné literatury běžný jev. Viz Vondrová a Rendl (2015) nebo Sedláková (2006).

Jeden žák (P13) vykazuje ve více odpovědích stejnou chybu. Za jednu n-tinu pokaždé považuje jednu dvanáctinu, nezávisle na velikosti celku a počtu částí, na který se dělí. O tomto fenoménu se zmiňují i Vondrová a Rendl (2015).

Dalším častým úkazem je to, že si žáci ve svých jednotlivých odpovědích protiřečí. Například v jednom komentáři souhlasí s tím, že čokoládu nelze rozdělit. Následně však do vlastního komentáře napíší, že rozdělit lze a jak to lze provést.

4 Závěr

Tato bakalářská práce se zabývala porozuměním žáků zlomkům. V teoretické části byla charakterizována badatelsky orientovaná výuka a otevřený přístup k matematickému vzdělávání. Dále bylo popsáno formativní hodnocení a metoda Concept Cartoons.

Metoda Concept Cartoons slouží jako nástroj, který odhaluje důvody žákovských miskoncepcí, informuje o míře pochopení látky a poskytuje podklady pro formativní hodnocení. Současně může poskytovat vyučujícímu zpětnou vazbu.

Praktická část je věnována konkrétní úloze Concept Cartoon. Úloha s názvem Čokoláda obsahuje otázky, na které existuje více odpovědí. Prakticky zaměřené úlohy s otevřenými konci, které lze též nazývat open-ended úlohy, jsou součástí otevřeného přístupu k matematickému vzdělávání. Otevřený přístup k matematickému vzdělávání je teoretický rámec, který žákům nabízí individuální řešení, která mohou být i personalizovaná. Tím žáci získávají více autonomie, což podporuje jejich hlubší poznání. Žák se tak stává aktivním činitelem výuky. Tento druh výuky označujeme jako badatelsky orientovaná výuka.

Miskoncepce, které se vyskytly v žákovských řešeních, převážně potvrzují teoretické předpoklady. Jako budoucí využití potenciálu výzkumu se nabízí nadále pracovat se zvolenou konkrétní třídou, přičemž budoucí aktivita by navazovala na výsledky prvotního výzkumu. Například by bylo možné ověřit vyšší míru pochopení konkrétní látky s určitým časovým odstupem, na základě čehož lze u každého žáka určit, jestli u něj již došlo ke konceptuálnímu či procedurálnímu pochopení dané látky.

Seznam použité literatury

1. JOHN, Dabell, Koegh BRENDA a Stuart NAYLOR. *Concept Cartoons in Mathematics Education*. Sandbach: Millgate House Education, 2008.

2. DIVÍŠEK, Jiří. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ: celostátní vysokoškolská učebnice pro studenty pedagogických fakult studijního oboru 76-11-8: učitelství pro 1. stupeň základní školy*. Praha: SPN, 1989. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-042-0433-3.

3. DOSTÁL, Jiří. *Badatelsky orientovaná výuka: kompetence učitelů k její realizaci v technických a přírodovědných předmětech na základních školách*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2015. ISBN 978-80-244-4515-1.

4. DRÁBEK, Jaroslav, Karol KŘIŽALKOVIČ, Jan LIŠKA a Václav VIKTORA. *Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985.

5. GOKKURT-OZDEMIR, Burcin, Hatice YILDIZ-DURAK, Fatma Gizem KARAOGLAN-YILMAZ a Ramazan YILMAZ. The Effects of Digital Concept Cartoons and Digital Concept Maps on Eliminating Middle School Students' Misconceptions in the Mathematics Course: An Experimental Research. *Informatics in Education*. 2021, **20**(2), 205–229.

6. HEJNÝ, Milan, Jarmila NOVOTNÁ a Naďa STEHLÍKOVÁ. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, 2004. ISBN 80-7290-189-3.

7. HEJNOVÁ, Eva. Realizace konstruktivistického přístupu ve výuce fyziky prostřednictvím úloh zadaných formou diskuze. *Matematika–fyzika–infromatika*. 2016, **25**(2), 102–115.

8. HRUBÝ, Dag. Setkání s Liping Ma. *Učitel matematiky*. 2021, **29**(4), 237–249.

9. KOŠATKOVÁ, Markéta. Zkušenostně reflektivní učení v teorii a praxi. In: NĚMEC, Jiří, ed. *Pedagogika volného času*. Brno: Masarykova univerzita, 2023, s. 64–65. ISBN 978-80-280-0461-3.

10. MINÁRECHOVÁ, Michaela. Využitie metódy concept cartoons© na hodinách prírodovedy z pohľadu učiteľov prvého stupňa ZŠ. *Scientia in educatione*. 2017, **8**(1), 18–31. ISSN 1804-7106.

11. NOVOTNÁ, Gabriela. Vyjádření vztahu celek-část zlomkem se zaměřením na spojitý a diskrétní model v řešeních žáků 2. stupně. *Učitel matematiky*. 2022, **30**(2), 104–126.

12. NOVOTNÁ, Monika. *Potíže žáků 7. ročníku při provádění základních operací se zlomky*. Brno, 2023. Diplomová práce. Masarykova Univerzita.

13. ÖNAL, Halil. An effective, entertaining and interesting tool to identify students' misconceptions: The Concept Cartoons. *Southeast Asia Early Childhood Journal*. 2023, **12**(2), 20–35.

14. RENDL, Miroslav. O konstruktivismu ve vyučování matematiky. *Pedagogika*. 2008, **LVIII**(2), 167-203. ISSN 2336-2189.

15. ŘEPÍKOVÁ, Alena. *Přehled matematiky: pro 2. stupeň základní školy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 2013. ISBN 978-80-7235-516-7.

16. SAMKOVÁ, Libuše. *Metoda Concept Cartoons*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 2020. Pedagogica et psychologica. ISBN 978-80-7394-798-9.

17. SAMKOVÁ, Libuše. *Otevřený přístup k matematickému vzdělávání v profesní přípravě učitelů*. Praha, 2020. Habilitační práce. Univerzita Karlova.

18. SAMKOVÁ, Libuše, Lukáš ROKOS, Jan PETR a Iva STUCHLÍKOVÁ. Teoretický model pro formativní hodnocení při badatelsky orientované výuce matematiky a přírodopisu. *Pedagogika*. 2021, **71**(1), 29-56.

19. SEDLÁKOVÁ, Jitka. *Chápání zlomků u dětí ze 7. a 8. třídy*. Praha, 2006. Diplomová práce. Univerzita Karlova.

20. SVOBODOVÁ, Lenka. *Rozvíjení aktivity a tvořivosti ve vyučování tématu zlomek v 6. – 7. ročníku ZŠ*. Praha, 2014. Diplomová práce. Univerzita Karlova.

21. TICHÁ, Marie a Jana MACHÁČKOVÁ. *Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematiky*. Jednota českých matematiků a fyziků, 2006.

22. TRNOVÁ, Eva, Tomáš JANKO, Josef TRNA a Karolína PEŠKOVÁ. Typy vzdělávacích komiksů a analýza jejich edukačního potenciálu pro přírodovědnou výuku. *Scientia in educatione*. 2016, **7**(1), 49–64. ISSN 1804-7106.

23. VAN DER BERG, Ed a Patricia KRUIT. Investigating with Concept Cartoons:Practical suggestions for using concept cartoonsto start student investigations in elementaryschool and beyond. *Scientia in educatione 8 (Special Issue)*. 2017, **8**, 129–138. ISSN 1804-7106.

24. VETTER, Quido. Egyptské zlomky. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*. 1923, **52**(1-2), 169–177.

25. VONDROVÁ, Naďa a Miroslav RENDL. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. V Praze: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2015. ISBN 978-80-246-3234-6.

26. VONDROVÁ, Naďa a kol. *Matematická slovní úloha*. Praha: Karolinum, 2019. ISBN 978-80-246-4516-2.