Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Fakulta pedagogická
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Problematika zlatého řezu a jeho výskyt okolo nás

Vypracoval: Lenka Belejová
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Problematika zlatého řezu a jeho výskyt okolo nás jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .... ………………………….

PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych chtěla poděkovat panu profesorovi RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za užitečné rady a odborné vedení při vypracování bakalářské práce. Dále bych chtěla poděkovat panu Ing. Lubomíru Hlomovi za pomoc při korektuře práce a panu Petrovi Zoubkovi za pomoc při získávaní historických poznatků.

Anotace:

Bakalářská práce se zabývá problematikou zlatého řezu a jeho výskytem okolo nás. Cílem práce je popsat vlastnosti zlatého řezu a ukázat základní konstrukce používané při jeho sestrojování. Důležitou součástí práce je kapitola zaměřená na pravidelný pětiúhelník. Závěrečné kapitoly jsou věnovány využití zlatého řezu ve výuce a ukázce jeho výskytu okolo nás. Práce je doplněna obrázky konstrukcí, které byly vytvořeny v programu GeoGebra.

Klíčová slova: zlatý řez, zlatý poměr, zlatá spirála, geometrie, pravidelný pětiúhelník

Annotation:

This bachelor thesis deals with a topic of the golden section and its occurrence in our surroundings. A goal of the thesis is to describe a character of the golden section and to show basic constructions used for its drawing. An important part of this thesis is a chapter focusing on a regular pentagon. Concluding chapters are devoted to a use of the golden section and a presentation of its occurrence around us. Attached supplementary construction drawings were made by using GeoGebra software.

Keywords: golden section, golden ratio, golden spiral, geometry, regular pentagon

Obsah

1 ÚVOD

Snaha objasnit a vysvětlit některé základní „kameny“ matematiky dokázala již mnohokrát zaujmout nemálo badatelů. Někteří hledali základní myšlenky matematiky v astronomii, někteří ve fyzice a jiní dokonce i v umění. Postupně byly objevovány nové a nové poznatky a matematika zažívala nemalý rozkvět. Ačkoliv některé zjištěné poznatky, jako je například Pythagorova věta a Ludolfovo číslo, zná celý svět, jiné jsou zatím známy pouze malému okruhu lidí, kteří se o obor opravdu hluboce zajímají.

V této práci se budu zabývat problematikou zlatého řezu, kterou lze zařadit spíše do skupiny nepříliš známého okruhu matematiky. Pokusím se vysvětlit některé pojmy, jako je například zlaté číslo či logaritmická spirála. Cílem mé práce bude přiblížit a popsat tuto problematiku. Především se pokusím ukázat zájemcům, kteří se chtějí o tomto okruhu dozvědět více, že zlatý řez je právě jedním z důležitých „kamenů“ matematiky.

Práce je rozdělena do jednotlivých kapitol. Po úvodní části následuje druhá kapitola, která čtenáře seznámí s historií středověké matematiky a zlatého řezu. Následující kapitola bude zaměřena na popis základních vlastností zlatého čísla. Čtvrtá část bude věnována geometrickému řešení. Pomocí kružítka a trojúhelníku s ryskou si ukážeme, jak zkonstruovat zlatý řez.

Geometrická konstrukce nebude chybět ani v páté kapitole, kde se seznámíme s pojmem zlatá spirála. Pro její zkonstruování budeme využívat dvou zlatých geometrických útvarů – zlatého obdélníku a zlatého trojúhelníku.

Důležitou součástí této práce je i kapitola věnovaná pravidelnému pětiúhelníku. Tato kapitola nám ukáže výskyt zlatého řezu v tomto geometrickém obrazci. Nejprve si připomeneme konstrukci pravidelného pětiúhelníku pomocí kružnice opsané. Dále se budeme věnovat několika jeho základním vlastnostem, které budou důležité pro následný důkaz zlatých poměrů uvnitř pětiúhelníku.

Závěrečné kapitoly budou zaměřeny více prakticky než teoreticky. V sedmé kapitole si ukážeme dva jednoduché příklady, které lze využít při výuce zlatého řezu. Osmá kapitola bude věnována výskytu zlatého řezu okolo nás. Najdeme v ní několik obrázků, ve kterých mohou pozorní čtenáři najít zlatý poměr.

Na konci práce je uvedena použitá literatura, která byla podkladem pro zpracování této problematiky. Dále je zde i seznam obrázků, z nichž byla většina pořízena v programu GeoGebra.

„Geometrie má dva poklady: pythagorovu větu a zlatý řez.
První má cenu zlata, druhý připomíná spíše drahocenný kámen“

Johannes Kepler (1571 – 1630), [16]

2 HISTORIE

2.1 Starověká matematika

Matematika vznikla jako praktická věda, která měla za úkol usnadnit především výpočet kalendáře, řízení sklizní, organizaci staveb a vybírání daní. Zpočátku byla věnována pozornost zejména praktické aritmetice a zeměměřictví. Protože ale matematika byla po dlouhá staletí provozována jako zvláštní dovednost, která nemá místo pouze v praktických aplikacích, počali starověcí matematici řešit její vlastní zákonitosti a postupně tak začala matematika zkoumat sebe samu. Aritmetika se rozvinula v algebru nejen proto, že se tím zlepšily praktické výpočty, ale též v důsledku přirozeného vývojového procesu vědy, pěstované a rozvíjené v tehdejších, zejména písařských školách. Tytéž důvody dovedly měřictví až k počátkům teoretické geometrie.

Na přelomu dvacátého a jednadvacátého století se mimořádně rozšířilo naše poznání babylónské matematiky a to zejména díky pozoruhodným objevům pánů Otto Neugebauera (rakousko – americký matematik a historik) a Philipa Thureau-Dangina (francouzský novinář, nakladatel a badatel v oblasti písemných památek starověkých kultur), kteří rozluštili velký počet hliněných tabulek. Při současném stupni poznání se zdá, jako by se matematika Babylóňanů rozvinula mnohem dále než matematika jejich východních soupeřů. Tento úsudek bude asi správný, neboť v obsahu babylónských a egyptských textů existovala po staletí jistá souvislost. K tomu ekonomický vývoj v Mezopotámii opět postoupil dále než v ostatních zemích úrodné částí Blízkého východu, která se táhne od Mezopotámie do Egypta. Mezopotámie byla křižovatkou velkého počtu karavanních cest, zatímco Egypt měl poměrně izolovanou polohu. K tomu přistupuje ještě okolnost, že regulace problematického Tigridu a Eufratu vyžadovala mnohem více technické invence než regulace Nilu. [6]

V té době se zde řešily kvadratické rovnice $a^2 + ab + c = 0$. Dále se pak řešily soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Časté byly i úlohy na výpočet procent a úroků. Užívala se Pythagorova věta (zhruba tisíc let před Pythagorovým narozením). Babylóňané vyvinuli abstraktní formu zápisu symbolů. Symboly zapisovali na hliněných tabulkách, z nichž se tisíce zachovaly do dnešní doby a byly i prostudovány. Babylóňané měli rozvinutý systém čísel, který byl v určitém smyslu dokonalejší než náš dnešní systém. Používali poziční systém se základem 60, zatímco náš systém používá základ 10, který má dva vlastní dělitele, čísla 2 a 5. Babylónský systém měl deset vlastních dělitelů, a proto více čísel mělo konečný tvar. Babylóňané rozdělovali den na 24 hodin, každou hodinu na 60 minut a každou minutu na 60 sekund. Tento systém počítání času přežil 4000 let až dodnes. [6]

Hlavní nevýhodou babylónského systému byla neexistence nuly. Čísla proto neměla jednoznačnou reprezentaci, ale bylo je nutno uvažovat v kontextu výpočtu. Dělení je obtížným procesem a Babylóňané neměli algoritmus pro dlouhé dělení čísel. Místo toho využívali vztah

$$a : b = a * \frac{1}{b}$$

což vedlo k nutnosti sestavit tabulky převrácených hodnot čísel. Tyto tabulky byly nalezeny a obsahují převrácené hodnoty čísel až do několika miliard. Jedna z babylónských tabulek dokazuje, že Babylóňané znali problém Pythagorejských čísel, pro něž platí $a^2 + b^2 = c^2$. Jde tedy o dosud nejstarší práci o teorii čísel. [14]

Babyloňané zaznamenávali své poznatky pomocí zvláštních klínových značek do barevných tabulek. Na tisících a statisících těchto tabulek jsou nějaké výpočty. Největší část se týká astronomie, neboť jejich pohled byl vždycky zaměřen k obloze. Dovedli dopředu vypočítat zatmění Měsíce a Slunce, znali zdánlivé dráhy jednotlivých hvězd na obloze a věděli, kudy se pohybují planety. Vyznali se bezvadně v kalendáři, rozdělili kruh na 360 stupňů a znali základy toho, čemu se po mnoha staletích začne říkat sférická trigonometrie - počítání s trojúhelníky na kulové ploše. Dovedli tak mistrně počítat s velkými čísly, že si vědci dodnes lámou hlavu, zda byli ve spojení s Indy a Číňany, kteří ve stejné době počítali s čísly až nepředstavitelně velkými.

V Egyptě byla nejvíce rozvinutou matematickou disciplínou geometrie, která byla prakticky využívána jako nauka o vyměřování země. Hranice jednotlivých pozemků u řeky Nilu byly každoročními povodněmi narušeny a bylo nutné je tedy pravidelně obnovovat. Lidé, kteří tuto práci vykonávali, byli geometry v pravém slova smyslu. Pomocí provazu a tyčí dokázali vyměřovat hranice jednotlivých pozemků. V této době již staří Egypťané věděli, že když vezmou tři provazy, jeden dlouhý tři určené jednotky, druhý čtyři a třetí pět jednotek, a natáhnou je tak aby navazovaly jeden na druhý, vznikne proti provazu o délce pět jednotek pravý úhel. Znali dokonce mnohem více, bylo jim známo, že ostrý úhel v pravoúhlém trojúhelníku je zcela určen poměrem jeho dvou kratších stran, dnes bychom řekli poměrem jeho odvěsen. V té době již existovaly i tabulky, podle nichž dovedou z tohoto poměru ostrý úhel určit. Je to zárodek našich dnešních tabulek funkce cotangens. Egypťané v této době už také znali trojčlenku a dovedli řešit rovnice o jedné neznámé.

2.2 Zlatý řez

Zlatý řez je jedním z vůbec nejdůležitějších čísel v celé geometrii. Má důležitou úlohu nejen v matematice, ale i v architektuře, ve výtvarném umění a dokonce jej nalezneme i jako součást přírody. Za zlatý řez je označen poměr přibližně 1 : 1,618, v umění a ve fotografii je pokládán za ideální proporci mezi délkami (např. formát tzv. zlatého obdélníku, kdy jeho strany jsou v poměru zlatého řezu, je dodnes nejpoužívanějším formátem fotografie a působí esteticky nejpříznivějším dojmem). Lze předpokládat, že je lidstvu znám již více než 2400 let, první písemné zmínky nalezneme již v období Egyptské říše.

Staří Egypťané používali matematiku zejména k praktickým účelům. Skotský egyptolog A. Henry Rhind nalezl papyrus, který byl napsán zhruba roku 1650 př. n. l. Je asi šest metrů dlouhý a asi 30 centimetrů široký. Rhindův papyrus uvádí, že při stavbě pyramid je využit tajemný kvocient nazvaný „seqt“. Vzhledem k tomu, že při stavbě pyramid byl prokazatelně využíván poměr založený na zlatém řezu, lze usuzovat, že se jedná právě o zlatý řez. [14]

První písemné zmínky přímo o zlatém řezu pak pocházejí z antiky od Eukleida (asi 340–287 př.n.l.), který ve svých spisech (Základy) uvádí následující úlohu. Rozdělte danou úsečku na dvě nestejné části tak, aby čtverec sestrojený nad větší částí měl stejný obsah jako pravoúhelník, jehož jedna strana má délku menší části a druhá má délku celé úsečky. Řešením této úlohy je právě rozdělení dané úsečky v poměru zlatého řezu. [14]

Bohužel po slavném období starověku a zejména antiky, přichází pro vědu období temného středověku, kdy veškerý život je podřízen vládnoucí církvi a jakékoliv vybočení z pevně stanovených pravidel je tvrdě postihováno.

O zlatém řezu tak dlouho neslyšíme a vrací se až v období renesance. V renesanci, která hlásala návrat ke kvalitám antické kultury, byli matematici očarováni tímto poměrem. Dali mu název božský poměr. Dalším důležitým mezníkem se stal rok 1509. V této době totiž vydává Luca Bartolomeo de Pacioli (1445 – 1517, italský františkánský mnich, vynikající matematik) svoji knihu De Divina Proportione (O božském poměru). Kniha je doplněna kresbami Leonarda da Vinciho (celým jménem Leonardo di ser Piero da Vinci, 15.4.1452 – 2.5.1519, všestranný renesanční génius, zejména malíř, sochař a architekt), který byl také asi prvním, kdo tento poměr nazval "sectio aurea", což v překladu z latiny znamená zlatý řez. [14]

V tomto období poměr najdeme na obrazech (např. Poslední večeře od Leonarda da Vinciho), v architektuře (chrám Notre-Dame v Paříži), tehdejší myslitelé mu přisuzují až božské vlastnosti.

Označení písmenem ϕ (fí) pro zlatý řez začal jako první používat americký matematik Mark Barr až ve 20. století. Pojmenoval jej takto po řeckém sochaři Feidiovi (asi 490 př. n. l. až asi 430 př. n. l., autor výzdoby Parthenónu, vytvoření kultovní sochy Athény ze zlata a slonoviny pro tento chrám). Mezi jeho díly najdeme i sochu Dia Olympského, který byl považován za jeden ze sedmi divů světa. Podle některých zdrojů se však označení ϕ zavedlo spíše na počest Leonarda Pisano zvaného Fibonacci (asi 1170–1240 n.l., italský matematik, výrazně se zasloužil na používání arabských číslic v Evropě). Ostatně, Fibonacciho posloupnost se zlatým řezem také úzce souvisí. [6]

Ve 20. století se zlatému řezu věnoval například Le Corbusier (vlastním jménem Charles Edouard Jeanneret, 6.10.1887 až 27.8.1965, švýcarský architekt, urbanista, teoretik a malíř, hlavní představitel funkcionalismu, je považován za největšího architekta 20. století), který se snažil vytvořit univerzální proporční jednotku (kniha Le Modulor, 1948). Zabýval se geometrií, přes niž se snažil pochopit fungování vesmíru a přírody. Příroda žije v absolutní harmonii a člověk jako jedinec, který vyšel z přírody a jemuž přírodní zákony utváří jeho život, musí nejdříve poznat tyto zákony a žít v souladu s nimi. Zároveň tvrdil, že příroda je substancí matematiky, která se na první pohled jeví jako hra propletených událostí. Proto, aby si člověk zajistil odpovídající prostředí, promítl systém přírody do geometrie. Pomocí geometrie hledal dokonalou proporci, kterou pro něj představoval právě zlatý řez. S jeho pomocí se snažil vymyslet univerzální proporční jednotku, která by vycházela z lidské postavy, a která by pak při použití nejlépe vyjadřovala vlastní cíl, tedy sloužit díky účelnosti právě člověku. [14]

3 VÝPOČET ZLATÉHO ČÍSLA

Již v úvodu této práce jsem se zmínila o pojmu zlaté číslo. Tato konstanta bývá v odborné matematické literatuře nejčastěji označována řeckým písmenem φ (fí), avšak ve starších dílech se může ukrývat pod řeckým písmenem τ (tau). Jeho hodnota je rovna iracionálnímu číslu φ = 1,618033988749…, a proto se v praxi často používá pouze jeho přibližná hodnota φ = 1,62. Nyní si povíme, jak jednoduše lze zlaté číslo vypočítat.

Pro sestavení rovnice, s jejíž pomocí lze snadno vypočítat hodnotu zlatého čísla, budeme vycházet z definice zlatého řezu, kterou ve své práci uvádí M. Němec: „*Mějme veličinu **a** a její část **x**. Pokud platí, že poměr veličin **a** a **x** je stejný jako poměr veličin **x** a **a − x**, pak řekneme, že **a** a **x** jsou v poměru zlatého řezu.*“ [11, s. 43]

Jinými slovy lze říci, že zlatý řez je takové rozdělení úsečky, kdy poměr její celé délky *a* k její delší části *x* je stejný jako poměr delší části *x* ku kratší části *(a-x)*.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{(a-x)} = \varphi$$

K lepšímu pochopení definice nám poslouží následující obrázek 3.1.

Obrázek 3.1 - Úsečka rozdělená v poměru zlatého řezu

Pro výpočet hodnoty zlatého čísla si zvolíme délku úsečky *a = 1* a dosadíme ji do rovnice zlatého řezu:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{(a-x)}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{(1-x)}$$

Po roznásobení rovnice hodnotou *x*(1 - x)* dostaneme jednoduchou kvadratickou rovnici:

$$1 - x = x^2$$

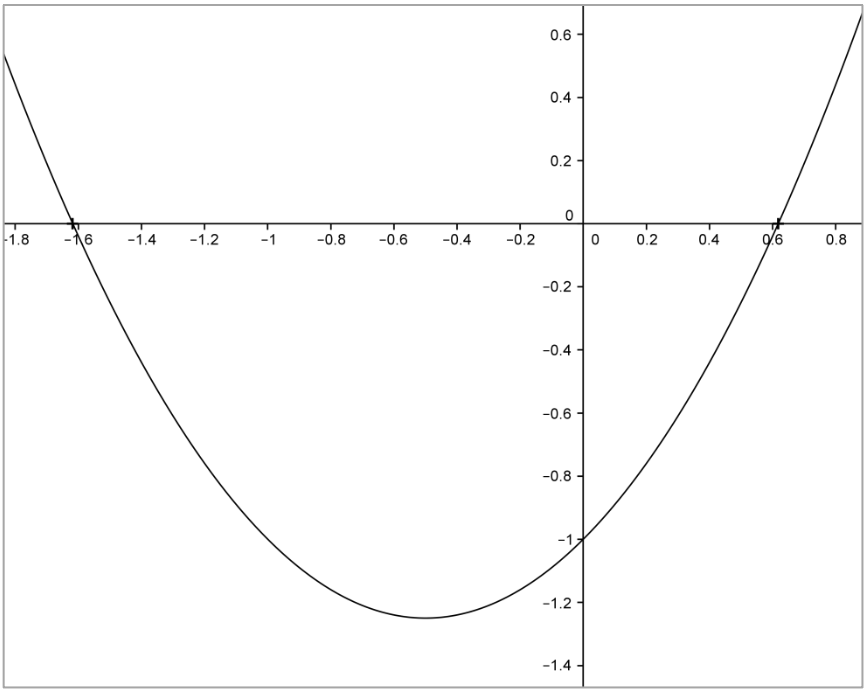
$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Po úpravách jsme vypočítali dva kořeny kvadratické rovnice: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ a $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Protože naším cílem bylo vypočítat délku úsečky *x*, budeme nyní brát v úvahu pouze kladné řešení rovnice. Po vyčíslení nám vyjde iracionální číslo.

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0.61803398874989484820458683436563811772030917 \ldots$$

Výsledek nám zobrazuje i následující obrázek s grafickým řešením rovnice. (Obr. 3.2)



Obrázek 3.2 - Grafické řešení kvadratické rovnice

Výsledek dosadíme zpět do vztahu $\frac{a}{x} = \varphi$ a dostaneme hodnotu zlatého řezu.

$$\varphi = \frac{a}{x} = \frac{1}{x} = 1.6180339887498948482045868343656381177203091 7 \ldots$$

Za povšimnutí také stojí neobvyklá vlastnost zlatého čísla. V následujícím výpočtu si ukážeme, co se stane, pokud od hodnoty zlatého čísla odečteme číslo 1. [2, s. 7]

$$\varphi - 1 \cong 1.61803399 - 1 \cong 0.61803399 \cong \frac{1}{\varphi}$$

Z toho tedy vyplývá, že hodnota zlatého čísla zmenšená o 1 se rovná převrácené hodnotě zlatého čísla.

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$

Poznámka:

Zlaté číslo je jediné kladné číslo, které má výše dokázanou vlastnost. Nevěříte? Zkuste najít nějaké jiné kladné číslo, které je po odečtení jedničky, rovné své převrácené hodnotě.

4 KONSTRUKCE ZLATÉHO ŘEZU

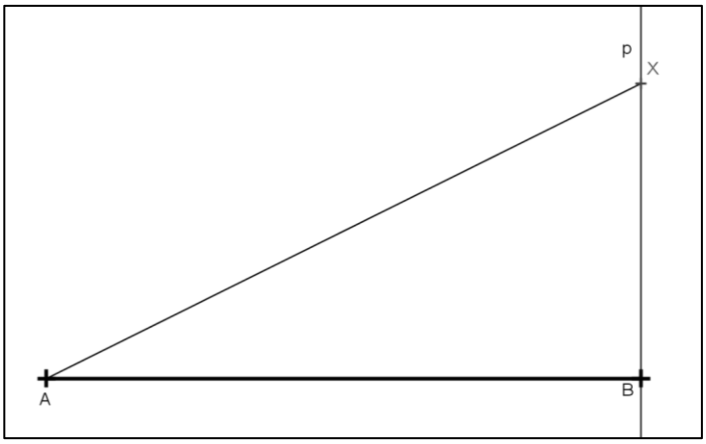
V minulé kapitole jsme si odvodili výpočet zlatého čísla. Avšak pokud bude naším úkolem rozdělit zadanou úsečku v poměru zlatého řezu, nebude pro nás vyčíslování délek jednotlivých částí příliš praktické. Vždyť vypočet příkladů s iracionálním číslem nás téměř nutí dělat chyby. Pouhé zaokrouhlování může mít za následek neúmyslné posunutí bodu rozdělujícího úsečku ve zlatém poměru.

V této kapitole si uvedeme postupy, pomocí nichž snadno sestrojíme zlatý řez. Při první konstrukci si ukážeme, jak danou úsečku tímto poměrem rozdělit. U druhé konstrukce budeme hledat délku celé úsečky, u které budeme znát pouze její delší část. Třetí konstrukce nám ukáže, jaký konstrukční postup zvolit, známe-li kratší část úsečky.

4.1 Konstrukce 1

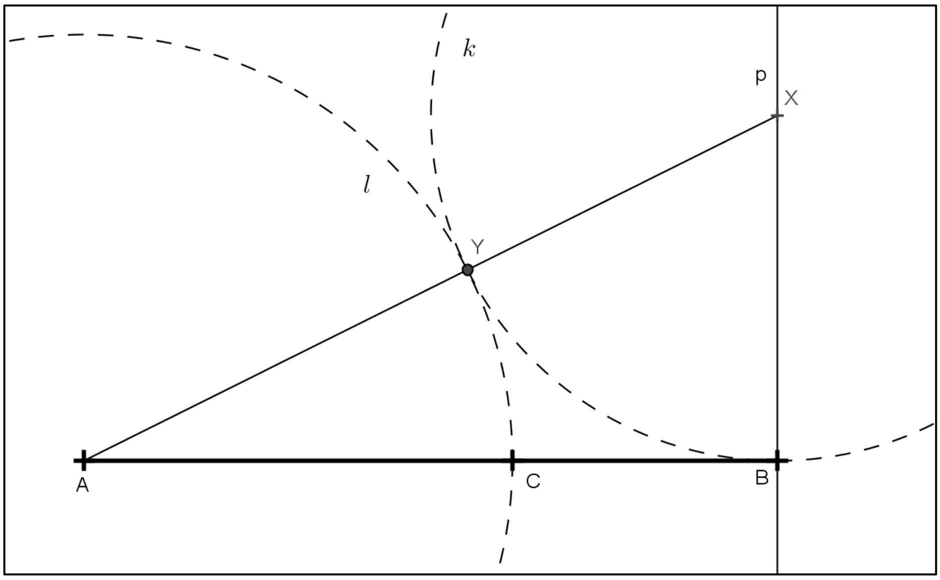
Máme zadanou úsečku *AB*, kterou chceme rozdělit bodem *C*, tak aby bod *C* dělil úsečku v poměru zlatého řezu.

Nejprve si v bodě *B* sestrojíme přímku *p*, která bude kolmá na úsečku *AB*. Poté na přímce *p* nalezneme bod *X*. Jeho vzdálenost od bodu *B* bude rovna polovině délky úsečky *AB*: $|BX| = \frac{1}{2}|AB|$. Nakonec spojíme body *A* a *X*. Tím dostaneme trojúhelník $\triangle ABX$, (Obr. 4.1). [5]



Obrázek 4.1 - Konstrukce 1a

Dále sestrojíme kružnici k. Kružnice k bude mít střed v bodě X a její poloměr bude roven vzdálenosti $|BX|$. Průsečík kružnice k a úsečky AX si označíme písmenem Y. Následně sestrojíme novou kružnici l, jejíž střed bude v bodě A a poloměr bude roven vzdálenosti $|AY|$. Nyní již zbývá označit průsečík kružnice l a úsečky AB. Tento průsečík nazveme bodem C. Bod C je námi hledaný bod, který dělí úsečku AB v poměru zlatého řezu, (Obr. 4.2). [5]

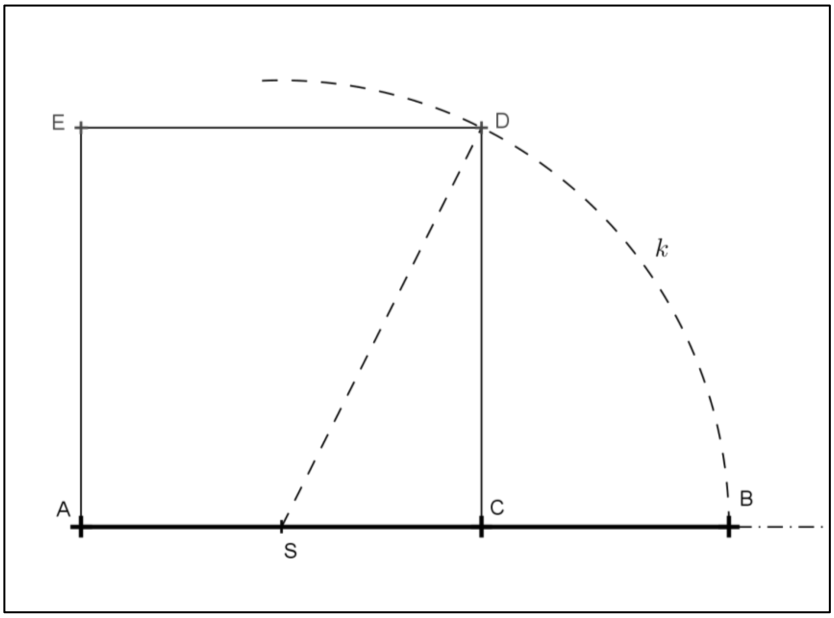


Obrázek 4.2 - Konstrukce 1b

4.2 Konstrukce 2

Máme zadanou úsečku AC, která představuje delší část úsečky AB rozdělené zlatým řezem. Naším cílem je zjistit délku celé úsečky AB.

Nejdříve si sestrojíme čtverec tak, aby zadaná úsečka byla jednou z jeho stran. Zbývající dva body si označíme písmeny D a E. Následně nalezneme střed úsečky AC, který označíme písmenem S. Dále musíme zkonstruovat kružnici k v bodě S. Poloměr této kružnice je roven vzdálenosti $|SD|$. Dostaneme bod B, který bude průsečíkem kružnice k a polopřímky AC. Tímto postupem zjistíme délku celé úsečky AB, která je rozdělena bodem C v poměru zlatého řezu, (Obr. 4.3). [4]

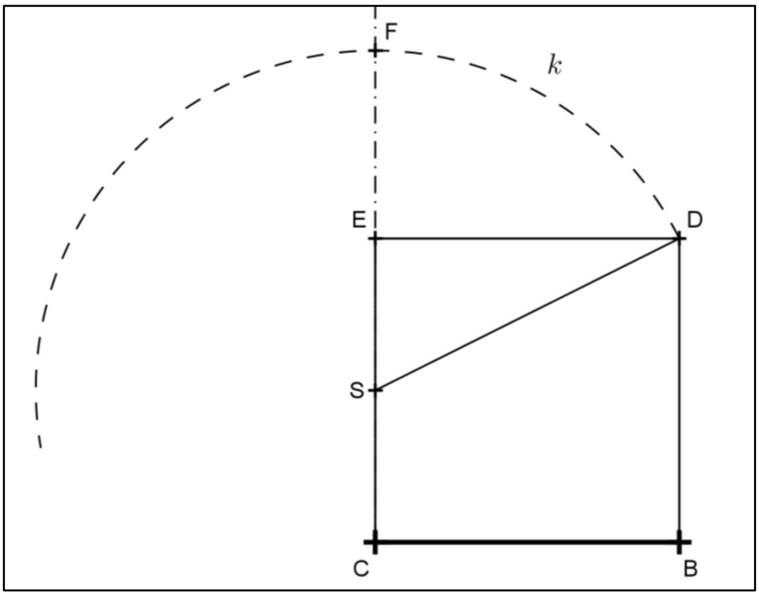


Obrázek 4.3 - Konstrukce 2

4.3 Konstrukce 3

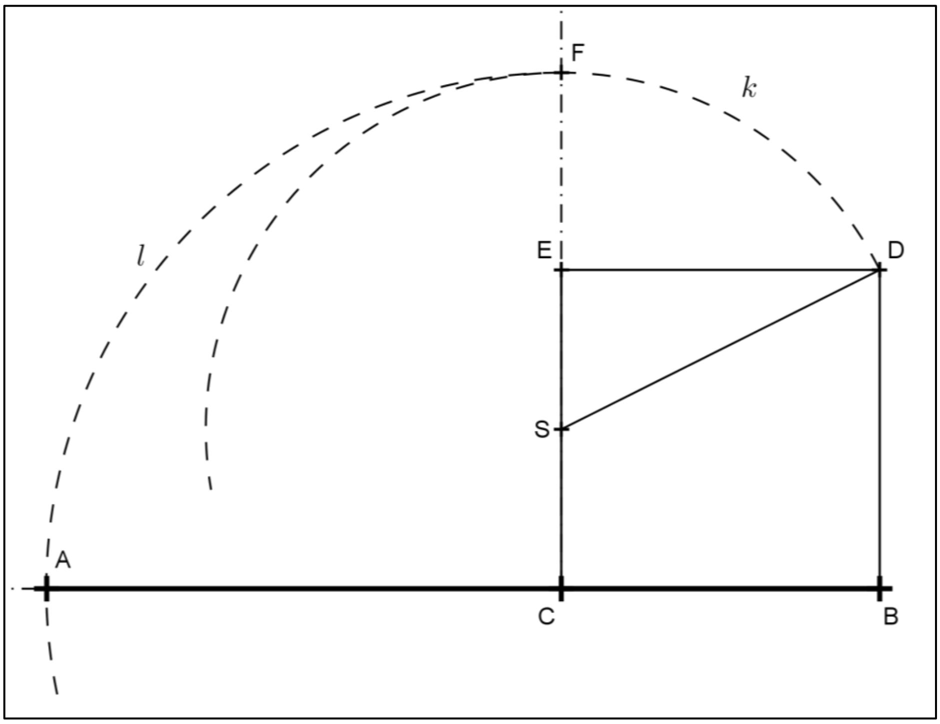
Máme zadanou úsečku CB, která představuje kratší část úsečky AB rozdělené zlatým řezem. Naším cílem je, stejně jako v předešlém případě, zjistit délku celé úsečky AB.

I v tomto postupu si sestrojíme čtverec tak, aby zadaná úsečka byla jednou z jeho stran. Zbývající dva body si označíme písmeny *D* a *E*. Nalezneme střed úsečky *CE*, který označíme písmenem *S*. Úsečku *CE* si protáhneme tak, aby nám vznikla polopřímka *CE*. Následně sestrojíme kružnici *k*. Tato kružnice bude mít střed v bodě *S* a její poloměr bude roven vzdálenosti $|SD|$. Průsečík kružnice k a polopřímky *CE* si označíme písmenem *F*, (Obr. 4.4). [4]



Obrázek 4.4 - Konstrukce 3a

Úsečku *CB* si protáhneme tak, aby nám vznikla polopřímka *BC*. Následně sestrojíme kružnici *l*, která bude mít střed v bodě *C*. Její poloměr bude roven vzdálenosti $|CF|$. V místě, kde se kružnice l protne s polopřímkou *BC*, vznikne nový bod. Tento bod pojmenujeme *A*. Touto konstrukcí jsme zjistili délku celé úsečky *AB*, která je rozdělena bodem *C* v poměru zlatého řezu, (Obr. 4.5). [4]



Obrázek 4.5 - Konstrukce 3b

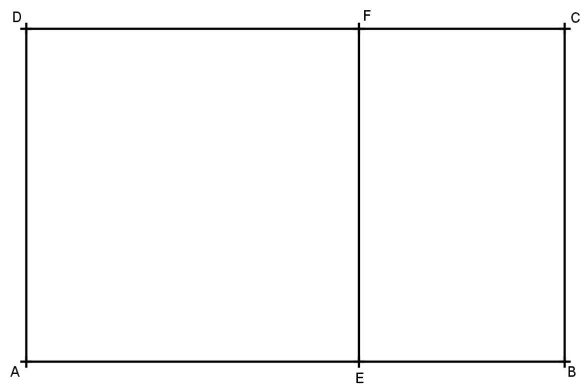
5 LOGARITMICKÁ SPIRÁLA

Jeden z důležitých pojmů matematiky je spirála. Tato křivka se nachází všude okolo nás. První spirálu popsal již známý řecký matematik Archimédes (287 - 212 př. n. l.). Dodnes je jednou z nejznámějších. Méně známá je spirála, která již vzbudila zájem nejednoho matematika. Tuto spirálu nazýváme nejčastěji logaritmickou. Asi kolem roku 1638 na ní upozornil René Descartes. Dále se o ní zajímali například Evangelista Toricceli a Jacob Bernoulli. [17]

Tato kapitola bude zaměřena na konstrukci logaritmické spirály. Podíváme se také na pojmy zlatý obdélník a zlatý trojúhelník. Jak již nám název napovídá, budou tyto dva obrazce ukrývat zlatý poměr. Oba obrazce následně využijeme k sestrojení logaritmické spirály.

5.1 Zlatý obdélník

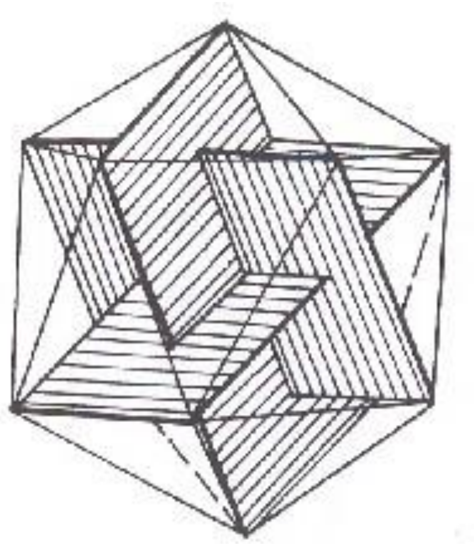
Je dán obdélník se stranami a, b. Tento obdélník nazveme zlatým právě tehdy, bude-li platit: $\frac{a}{b} = \varphi$. (Obr. 5.1)



Obrázek 5.1 - Zlatý obdélník

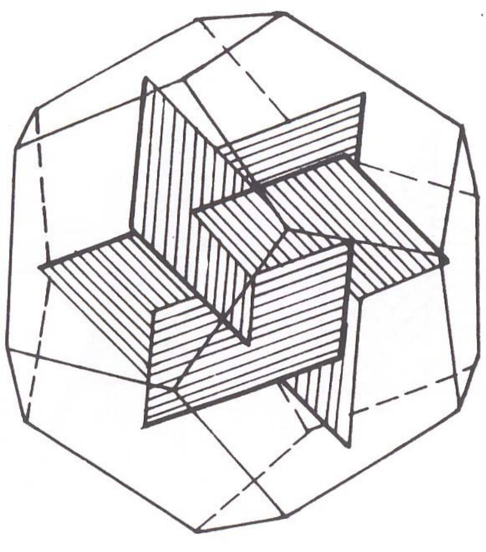
Nyní již víme, co je zlatý obdélník a můžeme si ukázat několik zajímavých vlastností, které s ním souvisí.

1. *Máme dány tři navzájem kolmé zlaté obdélníky, které mají dohromady 12 vrcholů. Pokud tyto obdélníky vepíšeme do dvacetistěnu, budou jejich vrcholy ležet ve dvanácti vrcholech dvacetistěnu*, (Obr. 5.2). [7]



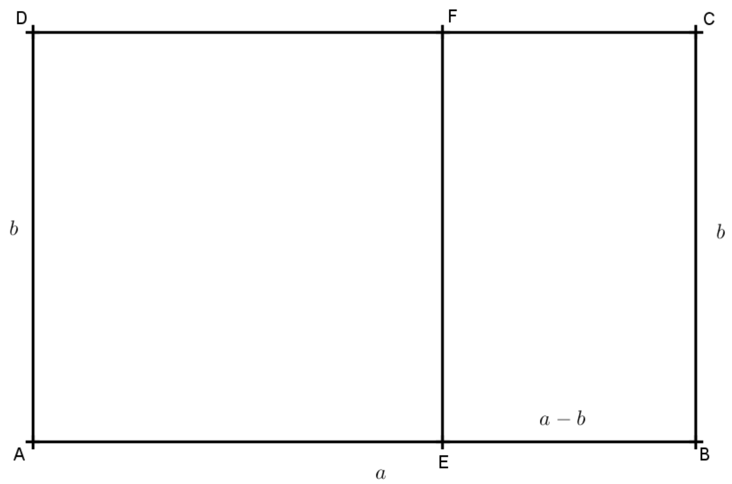
Obrázek 5.2 - Zlaté obdélníky vepsané do dvacetistěnu [4]

2. *Máme dány tři navzájem kolmé zlaté obdélníky, které mají dohromady 12 vrcholů. Pokud tyto obdélníky vepíšeme do dvanáctistěnu, budou jejich vrcholy ležet ve středech stran dvanáctistěnu*, (Obr. 5.3). [7]



Obrázek 5.3 - Zlaté obdélníky vepsané do dvanáctistěnu [4]

3. *Oddělíme-li od zlatého obdélníku ABCD (o obsahu a*b) čtverec AEFD (o obsahu a*a), bude zbývající část BCEF opět zlatým obdélníkem*, (Obr. 5.4). [8]



Obrázek 5.4 - Rozdělení obdélníku v poměru zlatého řezu

Víme, že pro zlatý obdélník platí vztah $\frac{a}{b} = \varphi$. Chceme dokázat, že nově vzniklý obdélník je také v poměru zlatého řezu, tedy že platí $\frac{b}{a-b} = \varphi$.

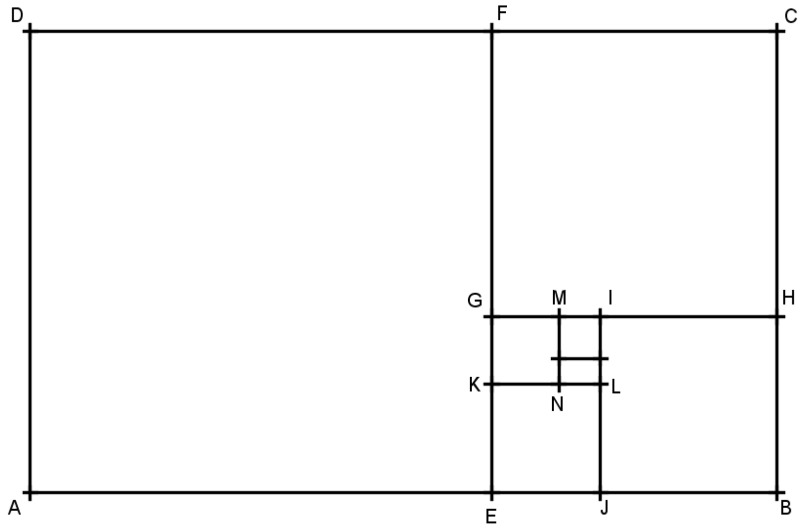
Na základě důkazu, který jsme provedli ve třetí kapitole, můžeme říci, že bod *E* dělí úsečku *AB* v poměru zlatého řezu, tedy platí následující:

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AE|}{|EB|} = \varphi$$

$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{b}{a-b} = \varphi$$

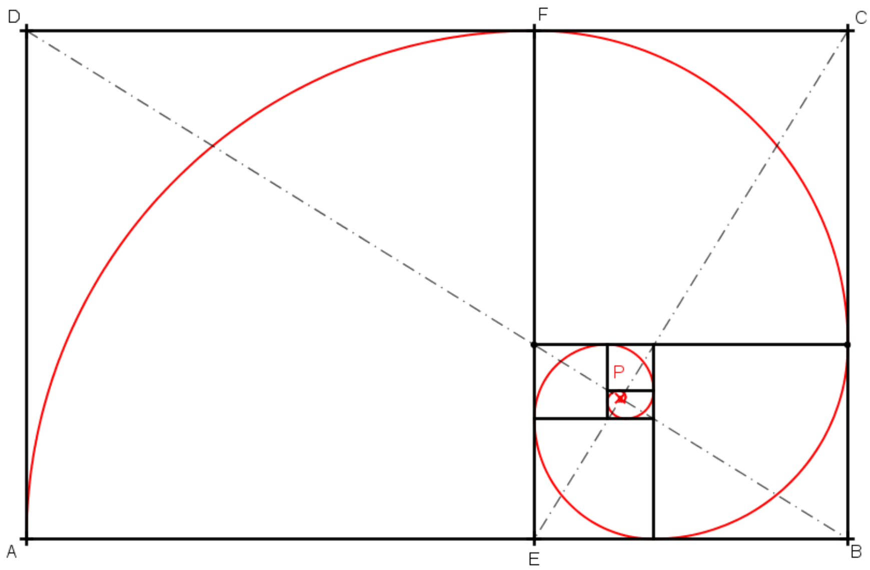
Tedy platí, že nově vzniklý obdélník *BCEF* je v poměru zlatého řezu.

Opakováním vlastnosti 3 můžeme vytvořit nekonečně mnoho nových zmenšujících se zlatých obdélníků. Z obrázku 5.5 je patrné, že poloha obdélníků se neustále pravidelně mění – obdélníky se otáčejí vždy o 90°.



Obrázek 5.5 - Otáčející se zlaté obdélníky

Tuto skutečnost využijeme při sestrojování logaritmické spirály. Nejprve si zvolíme pól[1] spirály. Tento bod nalezneme jako průsečík úhlopříček *BD* a *CE*. Následně můžeme sestrojit graf logaritmické spirály, (Obr. 5.6). [8]

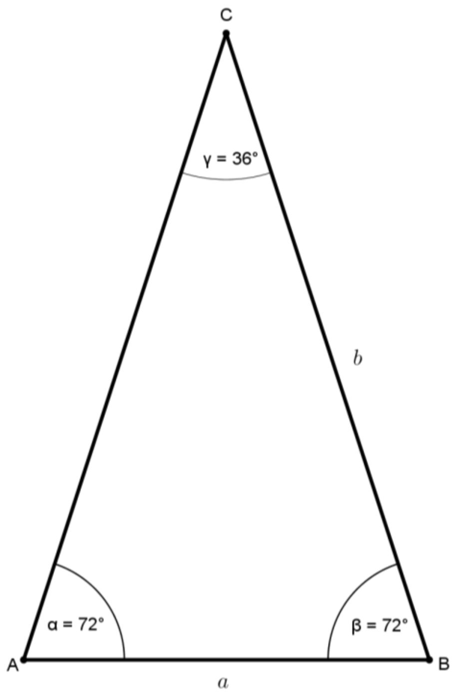


Obrázek 5.6 - Logaritmická spirála ve zlatém obdélníku

[1] Pól spirály je pevný bok, okolo něhož se spirála otáčí.

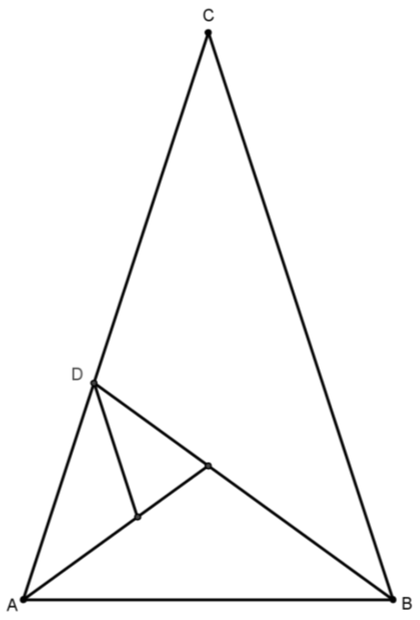
5.2 Zlatý trojúhelník

Je dán trojúhelník, jehož úhly při základně jsou rovny 72° a úhel při vrcholu je roven 36°. (Obr. 5.7) Tento trojúhelník nazýváme zlatým. Poměr délky ramene b a základny a v tomto trojúhelníku je roven φ.



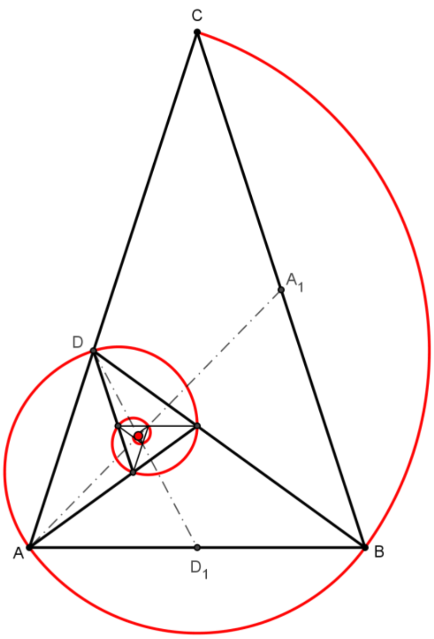
Obrázek 5.7 - Rovnoramenný trojúhelník ve zlatém řezu

Opět zde platí, že pokud budeme do daného trojúhelníku ABC vepisovat největší možné rovnoramenné trojúhelníky, které mají rameno rovno základně předcházejícího trojúhelníku, dostaneme další rovnoramenné trojúhelníky v poměru zlatého řezu. (Obr. 5.8)



Obrázek 5.8 - Rozdělení obdélníku v poměru zlatého řezu

V tomto rovnoramenném trojúhelníku lze sestrojit logaritmickou spirálu. Bude platit, že vrcholy rovnoramenných trojúhelníků budou ležet na spirále. Logaritmická spirála bude mít svůj pól v průsečíku těžnic AA_1 a DD_1, (Obr 5.9). [8]



Obrázek 5.9 - Logaritmická spirála ve zlatém trojúhelníku

6 PRAVIDELNÝ PĚTIÚHELNÍK

Pravidelný pětiúhelník je rovinný geometrický útvar, přesněji řečeno mnohoúhelník s pěti vrcholy a pěti stejně dlouhými stranami. Němec Miroslav pravidelný pětiúhelník definuje takto: *„Pravidelným pětiúhelníkem nazýváme pětiúhelník, který je konvexní*[2]*, rovnostranný a rovnoúhlý.“* [11, s. 26]

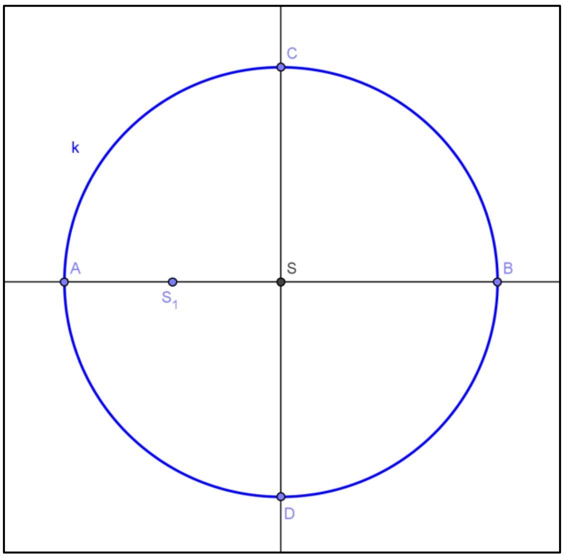
Co má tento pravidelný geometrický útvar společného se zlatým řezem? Jeho úhlopříčky se totiž protínají v poměru nám již známého zlatého řezu, což si ukážeme na konci této kapitoly. Proto se nyní budeme zabývat konstrukcí pětiúhelníku a také si ukážeme některé jeho základní vlastnosti.

6.1 Konstrukce pětiúhelníku

Každý student střední školy by měl umět zkonstruovat pravidelný pětiúhelník, pokud bude mít zadán poloměr kružnice opsané. Pro ty, kteří si již na tuto konstrukci nevzpomínají, si jí nyní zopakujeme krok po kroku. K sestrojení nám postačí kružítko a pravítko.

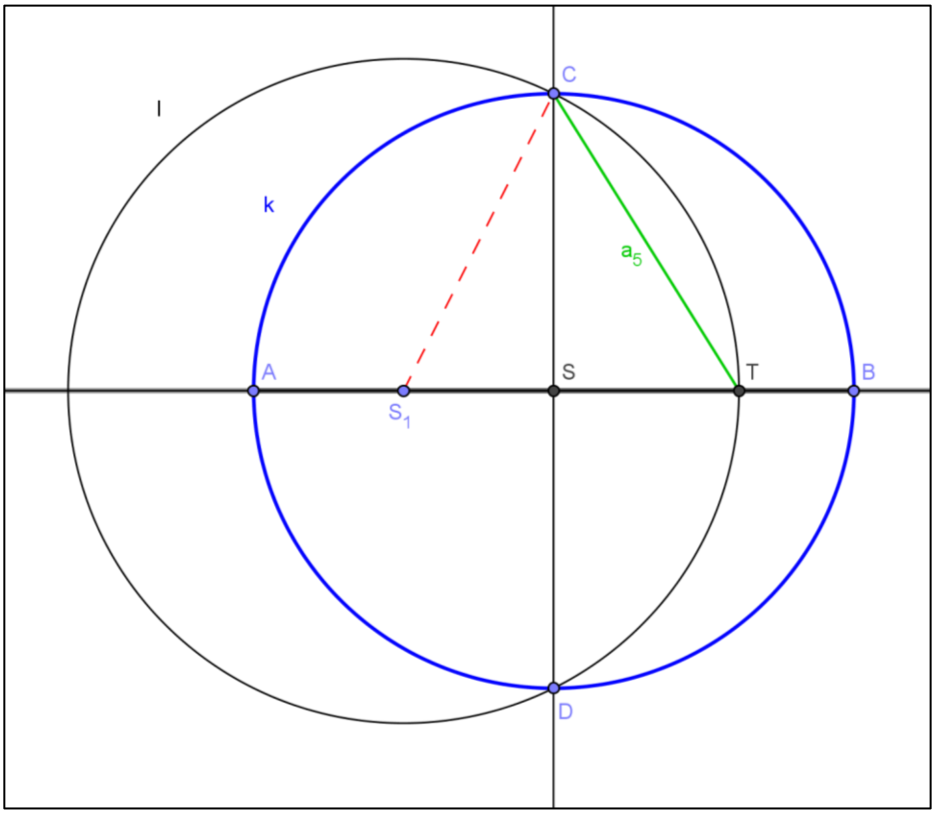
Nejprve si narýsujeme kružnici k se středem S a poloměrem r. Poté sestrojíme osový kříž, který se bude protínat ve středu kružnice S, a jehož dvě přímky budou na sebe kolmé. Průsečíky kružnice a sestrojeného osového kříže označíme písmeny A, B, C a D. Dále nalezneme střed úsečky AS, který si označíme písmenem S_1. (Obr. 6.1)

[2] Definice konvexnosti: *„Mějme útvar u. Útvar u nazýváme konvexní, pokud každá úsečka, jejíž krajní body leží v útvaru u, leží celá v útvaru u.“* [11, s. 9]



Obrázek 6.1 - Osový kříž s kružnicí

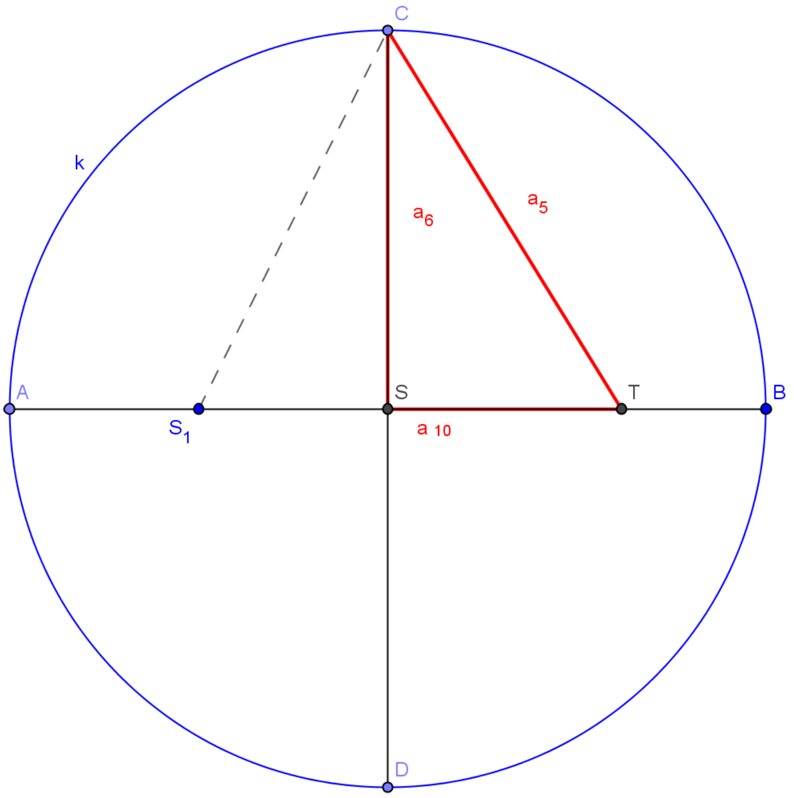
V bodě S_1 sestrojíme novou kružnici l jejíž poloměr je vzdálenost bodů S a C. V místě, kde kružnice l protíná úsečku AB, dostaneme nový bod T. Velikost jedné strany pětiúhelníku je rovna vzdálenosti $|TC|$. (Obr. 6.2)



Obrázek 6.2 - Velikost strany pětiúhelníku

Poznámka:

V takto sestrojeném trojúhelníku můžeme zjistit délky stran tří různých mnohoúhelníků. Jedná se o pětiúhelník, šestiúhelník a desetiúhelník. Délka strany pětiúhelníku a_5 se rovná vzdálenosti |TC|. Délka strany šestiúhelníku a_6 je rovna vzdálenosti |SC|, a tedy i poloměru dané kružnice. Strana desetiúhelníku a_{10} se rovná vzdálenosti |ST|. (Obr. 6.3)



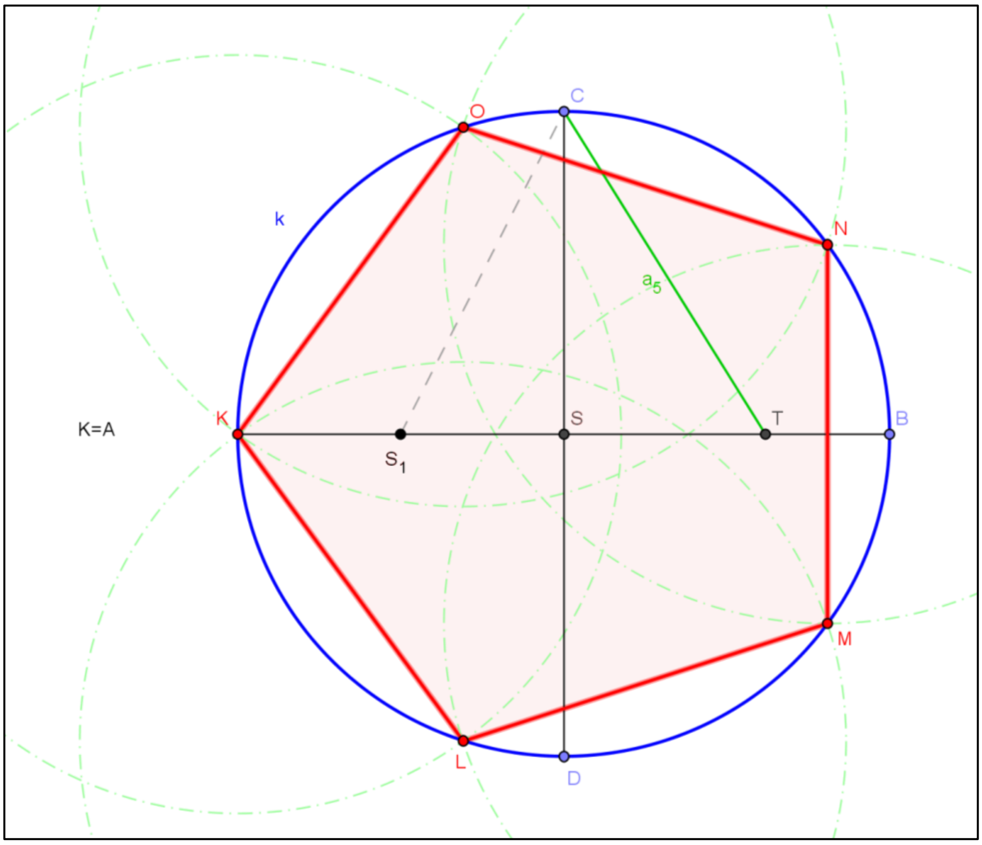
Obrázek 6.3 - Délky stran vybraných mnohoúhelníků

Nyní, když již známe délku strany pětiúhelníku, můžeme začít hledat jeho pět vrcholů *K, L, M, N* a *O*. První bod si můžeme zvolit libovolně a v naší konstrukci si ho označíme písmenem *K (K→A).*

Další dva body nalezneme tak, že sestrojíme pomocnou kružnici se středem v bodě *K* a poloměrem, který se rovná délce úsečky |TC|. V místě, kde se pomocná kružnice protne s původní kružnicí *k,* vzniknou body *L* a *O*, které jsou dalšími hledanými vrcholy pětiúhelníku.

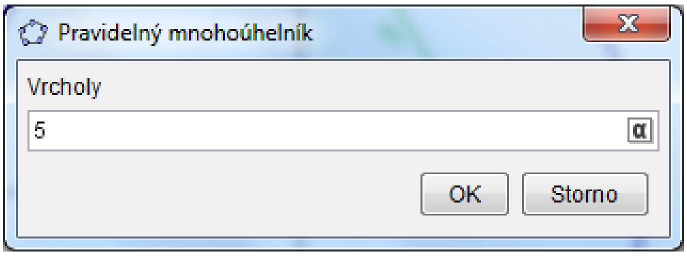
Poslední dva body nalezneme obdobně, a to tak, že sestrojíme další dvě pomocné kružnice s poloměrem $|TC|$. Tentokrát ovšem středy pomocných kružnic budou ležet v nově vzniklých bodech L a O. Opět nalezneme průsečíky kružnice k a pomocných kružnic. Získáme body M a N.

Zbývá tedy pouze nalezené vrcholy pětiúhelníku spojit. Tím vytvoříme pravidelný pětiúhelník $KLMNO$. (Obr. 6.4)



Obrázek 6.4 - Pravidelný pětiúhelník

Poznámka: Při tvorbě pravidelného mnohoúhelníku v matematickém programu GeoGebra je nejjednodušší použít nástroj „Pravidelný mnohoúhelník". Při použití tohoto nástroje stačí kliknout na dva sousedící body mnohoúhelníku a do tabulky zadat jeho počet stran. (Obr. 6.5)



Obrázek 6.5 - Sestrojení pětiúhelníku pomocí programu GeoGebra

6.2 Vlastnosti pětiúhelníku

Vlastnosti pětiúhelníku jsou zajímavé a je jich velice mnoho. Jejich odvozování není náplní této práce. Proto se nyní zaměříme pouze na některé. Nejprve si ukážeme, jaké úhly se v pravidelném pětiúhelníku ukrývají, a následně se zaměříme na výskyt zlatého poměru uvnitř pětiúhelníku a pokusíme se dokázat tři věty, které obecně o zlatém řezu v pravidelném pětiúhelníku platí.

6.2.1 Velikosti úhlů v pětiúhelníku

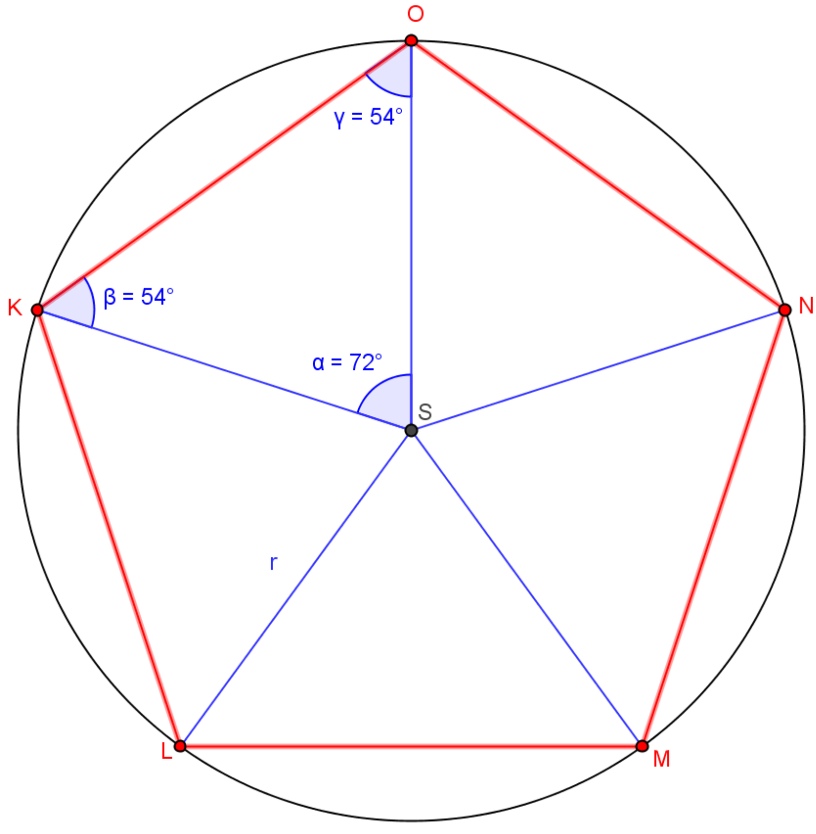
Následující dvě vlastnosti nám neukazují přímo výskyt zlatého řezu, avšak myslím, že jejich odvození je nezbytné pro další práci s pětiúhelníkem.

1. Velikost vnitřního úhlu při vrcholu pravidelného pětiúhelníku je 108°.
   [11, s. 26]

2. Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného pětiúhelníku je 540°.
   [11, s. 26]

Obě vlastnosti si lze snadno dokázat. Postačí nám, pokud si pětiúhelník rozdělíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků, které mají společný vrchol ve středu *S* kružnice opsané. Základnami těchto rovnoramenných trojúhelníků budou strany pětiúhelníku a ramena budou rovna poloměru *r* kružnice opsané. K určení velikosti vrcholového úhlu trojúhelníku postačí vydělit plný úhel[3] u vrcholu S počtem jednotlivých trojúhelníků (= 5). Takto dostaneme vrcholový úhel 72°. (Obr. 6.6)

Pro výpočet vnitřních úhlů, které svírají strany pravidelného pětiúhelníku, využijeme poznatku, že součet úhlů v rovnostranném trojúhelníku je roven 180°. Odtud získáme velikost zbývajících dvou úhlů: $180° - 72° = 108°$. Součet dvou zbývajících úhlů při základně je tedy roven 108°. Dále víme, že úhly při základně rovnostranného trojúhelníku jsou shodné, stačí jejich velikost vydělit dvěma. Takto dostaneme velikost jednoho úhlu, což je 54°. (Obr. 6.6)



Obrázek 6.6 - Velikosti úhlů v pravidelném pětiúhelníku

Z obrázku 6.6 je patrné, že jednotlivá ramena rovnostranných trojúhelníků půlí vnitřní úhly pětiúhelníku. Proto je velikost těchto hledaných úhlů rovna dvojnásobku

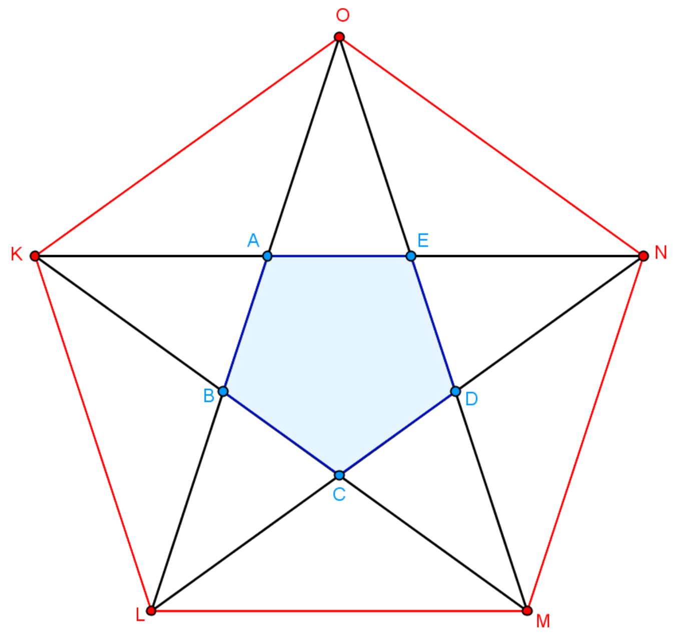
[3] Plný úhel – svírají ho dvě totožné polopřímky = úhel je tvořen celou okolní rovinou (=360°)

úhlu při základně rovnostranného trojúhelníku. Velikost vnitřního úhlu při vrcholu pravidelného pětiúhelníku je tedy 108°.

V pětiúhelníku je počet vnitřních úhlů roven pěti. Pro získání jejich součtu stačí vynásobit velikost vnitřního úhlu při vrcholu pravidelného pětiúhelníku a tím potvrdíme vlastnost č. 2.

6.2.2 Zlatý řez uvnitř pětiúhelníku

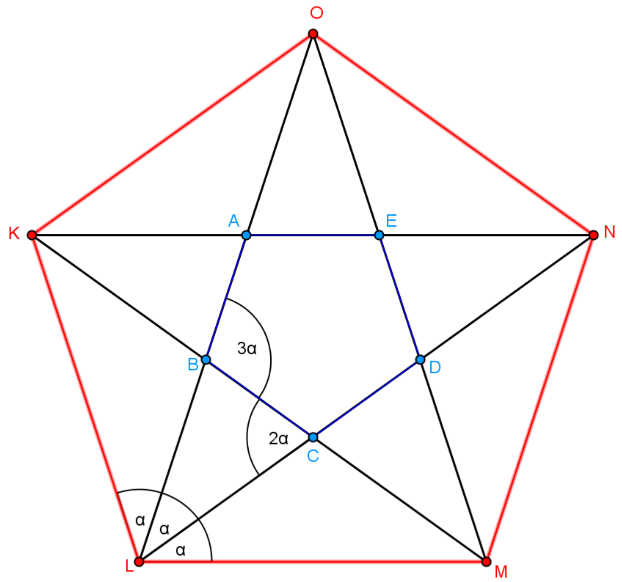
1. ***Spojíme – li všech pět vrcholů pravidelného pětiúhelníku úhlopříčkami, dostaneme pěticípou hvězdu. Uvnitř pěticípé hvězdy vznikne nový pravidelný pětiúhelník. Poměr stran původního pětiúhelníku KLMNO a pětiúhelníku ABCDE, který dostaneme konstrukcí úhlopříček, je roven φ^2,*** (Obr. 6.7). [12]



Obrázek 6.7 - Pětiúhelník vytvořený pomocí pěticípé hvězdy

K důkazu této vlastnosti použijeme následující větu: *„Úhlopříčky vycházející z daného vrcholu pravidelného pětiúhelníku dělí úhel při tomto vrcholu na úhly stejné velikosti* $\frac{1}{5}\pi$. *“* [11, s. 26]

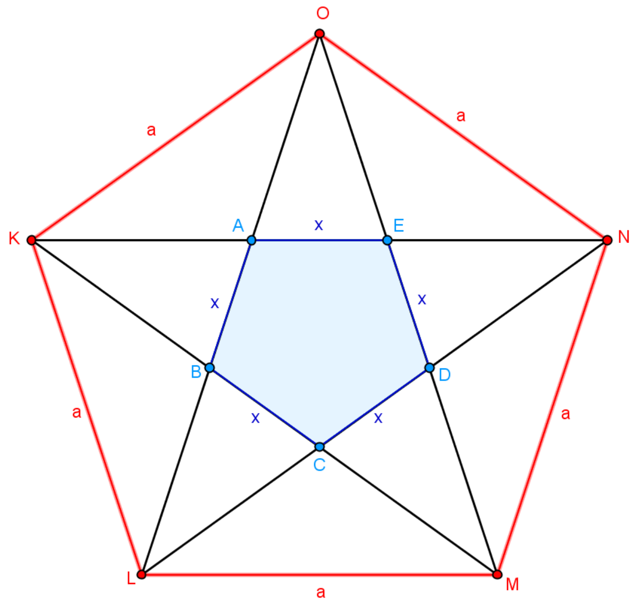
Z předchozí věty je patrné, že úhel u vrcholu *L* je rozdělen na tři shodné části. Velikost každé této části je rovna $\frac{1}{5}\pi = 36°$. Jelikož je trojúhelník *BLC* rovnoramenný, zbývající dva úhly jsou shodné a jejich velikost je rovna 72°=2α. Jelikož úhel *LBA* je přímý, bude vnitřní úhel pětiúhelníku *ABCDE* roven 108°=3α. (Obr. 6.8)



Obrázek 6.8 - Vnitřní úhly pětiúhelníku

Stejným postupem můžeme spočítat úhel u všech vrcholů. Tím jsme potvrdili, že uvnitř pěticípé hvězdy vznikne nový pravidelný pětiúhelník.

Označme si nyní písmenem *a* délku strany pětiúhelníku *KLMNO* a stranu nově vzniklého pětiúhelníku *ABCDE* písmenem *x*. Nyní se pokusíme dokázat, že pro poměr stran pětiúhelníků platí vztah: $\frac{a}{x} = \varphi^2$.



Obrázek 6.9 - Označení stran v pětiúhelníku

$$|KL| = |LA| = a$$
$$|AB| = x$$
$$|LB| = a - x$$

Obrázek 6.10 - Úsečka rozdělená v poměru zlatého řezu

$$\frac{a}{x} = \varphi^2$$

$$\varphi = \frac{|LA|}{|LB|} = \frac{|LA|}{|LA| - |AB|} = \frac{a}{a - x}$$
$$\varphi = \frac{a}{a - x}$$

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{a - x}{a} = 1 - \frac{x}{a}$$
$$\frac{1}{\varphi} = 1 - \frac{x}{a}$$

Pomocí ekvivalentních úprav si z rovnice vyjádříme $\frac{x}{a}$. Odtud dostáváme:

$$\frac{x}{a} = 1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi - 1}{\varphi}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{\varphi - 1}{\varphi}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{\varphi}{\varphi - 1}$$

Že se hodnota zlatého čísla zmenšená o 1 rovná převrácené hodnotě zlatého čísla $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$, jsme si ukázali již ve 3. kapitole. Tento vztah nyní použijeme k dokončení našeho důkazu.

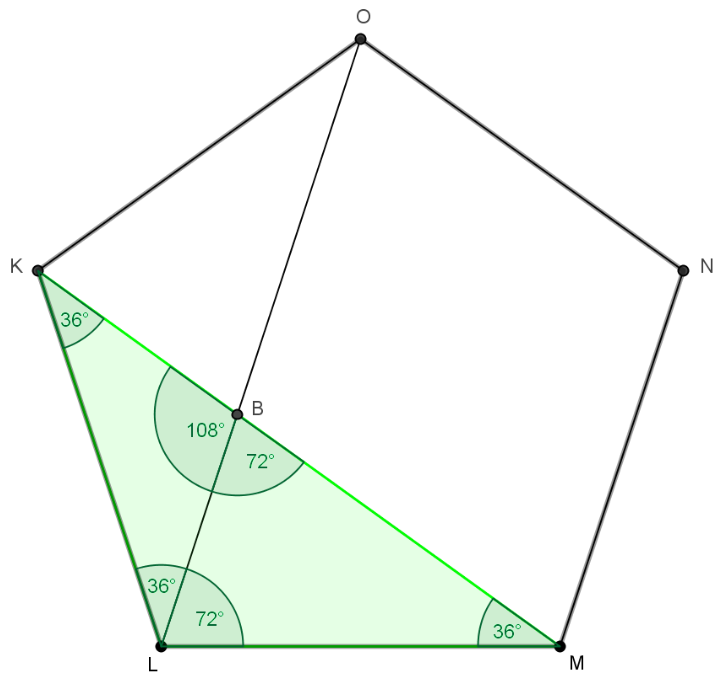
$$\frac{a}{x} = \frac{\varphi}{\frac{1}{\varphi}}$$

$$\frac{a}{x} = \varphi^2$$

Tímto jsme dokázali, že poměr stran původního pětiúhelníku *KLMNO* a pětiúhelníku *ABCDE* je roven φ^2.

2. ***Průsečíky úhlopříček v pravidelném pětiúhelníku dělí každou z nich v poměru zlatého řezu.*** [12]

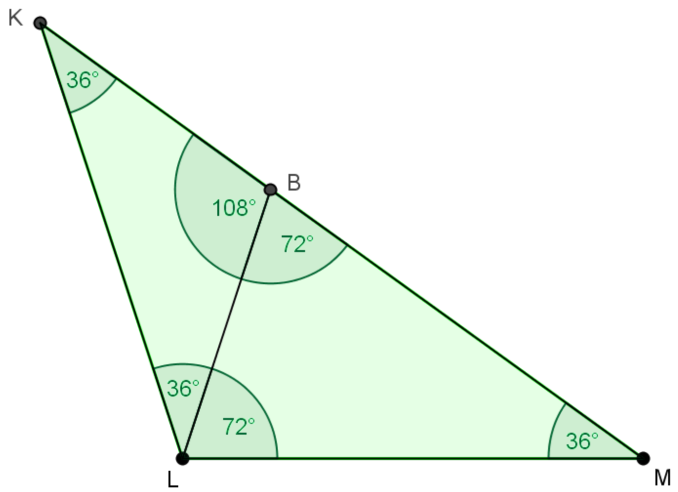
Sestrojením úhlopříčky v pravidelném pětiúhelníku ho můžeme rozdělit na rovnoramenný lichoběžník a rovnoramenný trojúhelník. Rovnoramenný trojúhelník má, jak již jsme si výše dokázali, při vrcholu úhel 108°. Zbývající dva úhly si můžeme snadno dopočítat, stejně jako v předešlém případě. Zjistíme tedy, že jejich velikost je rovna 36°. (Obr. 6.11)



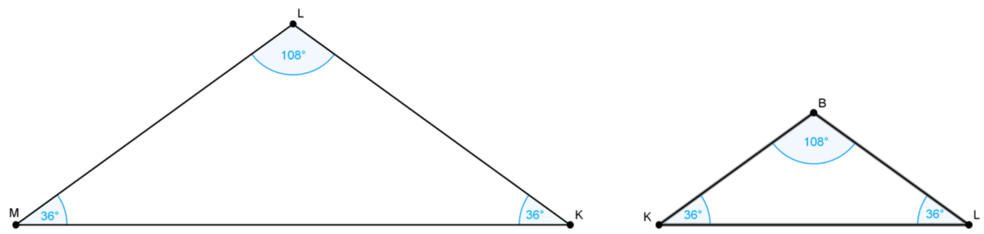
Obrázek 6.11 - Rovnoramenný trojúhelník v pětiúhelníku

K důkazu využijeme větu o podobnosti dvou trojúhelníků: *„Trojúhelník $\triangle ABC$ je podobný trojúhelníku $\triangle EFG$ právě tehdy, když všechny vnitřní úhly trojúhelníku $\triangle ABC$ mají stejné velikosti jako vnitřní úhly trojúhelníku $\triangle EFG$.“* [11, s. 42]

Na základě této věty můžeme říci, že trojúhelníky $\triangle KLM$ a $\triangle LBK$ jsou podobné, protože jejich úhly mají stejné velikosti. Tato vlastnost je zobrazena na obrázcích 6.12 a 6.13.



Obrázek 6.12 - Úhly v rovnoramenném trojúhelníku



Obrázek 6.13 - Podobnost trojúhelníků

Na základě předchozího tvrzení, můžeme odvodit následující vztah:

$$\frac{|MK|}{|KL|} = \frac{|KL|}{|LB|}$$

Při tomto důkazu je nutné si uvědomit, že ramena rovnoramenného trojúhelníku jsou stejně dlouhá a tedy platí následující:

$$|KL| = |LM| = |MB|$$
$$|LB| = |KB|$$

Po nahrazení některých členů dostaneme:

$$\frac{|MK|}{|MB|} = \frac{|MB|}{|KB|} = \varphi$$

Můžeme říci, že jsme úsečku rozdělili tak, že poměr její celé délky k její delší části je roven poměru její delší části ku kratší části. Pro lepší představu nám poslouží obrázek 6.14.

Obrázek 6.14 - Rozdělení úsečky v poměru zlatého řezu

Závěrem k tomuto důkazu můžeme říci, že bod *B* dělí úhlopříčku *MK* v poměru zlatého řezu. Tuto vlastnost lze využít k sestrojení pravidelného pětiúhelníku, pokud máme zadanou jeho úhlopříčku.

3. Poměr délek úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníka je zlatý. [12]

Chceme dokázat, že poměr úhlopříčky $|MK|$ a strany $|KL|$ je zlatý. Tedy:

$$\frac{|MK|}{|KL|} = \varphi$$

Připomeňme si nyní, jaký vztah nám vyplynul při odvozování 2. vlastnosti:

$$\frac{|MK|}{|KL|} = \frac{|KL|}{|LB|} = \varphi$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že v důkazu již není nutné dále pokračovat. Jeho pravdivost jsme si již odvodili při dokazování druhé vlastnosti.

7 VYUŽITÍ VE VÝUCE

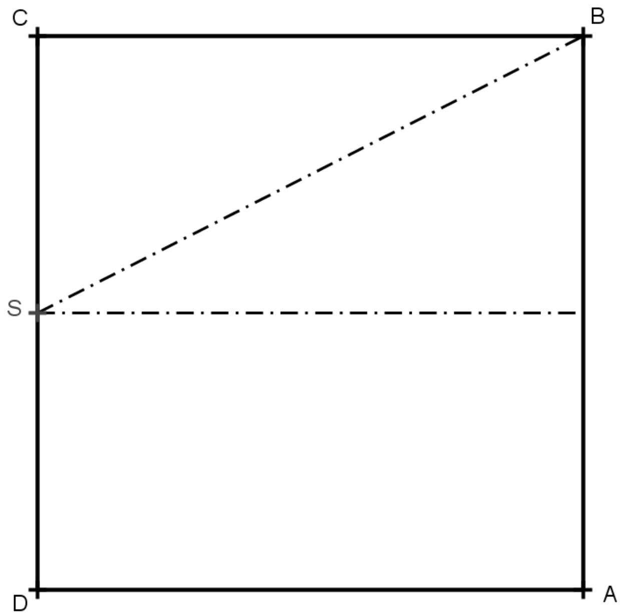
Jak již bylo řečeno v úvodu, existuje pouze malý okruh lidí, který zná zlatý poměr nebo který o této problematice již někdy slyšel. Většinou mezi tyto lidi patří matematici a architekti, kteří se o svůj obor zajímají, nebo kteří zlatý poměr ke své práci potřebují. Tato problematika totiž není zahrnuta do žádné výuky na základní a střední škole. A jak se o ní mají mladí studenti dozvědět, když se jim nikdo o tomto pojmu ani slovem nezmíní?

Proto jsem se rozhodla do své práce zařadit tuto kapitolu. Ráda bych zde ukázala nějaké jednodušší příklady, pomocí nichž lze žáky středních, popřípadě i základních, škol seznámit s touto problematikou.

7.1 Sestrojení zlatého řezu pomocí papíru

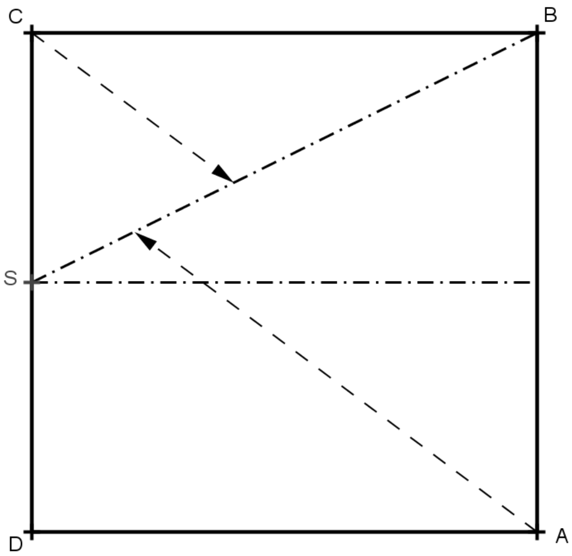
První úloha je zaměřena na jednoduché sestrojení zlatého řezu. A nebudeme k tomu potřebovat nic jiného, než obyčejný papír. Jistě mi dáte za pravdu, že tuto konstrukci dokáže opravdu každý.

Vezmeme si čtverec papíru, jehož délka jedné strany představuje délku úsečky, kterou chceme rozdělit v poměru zlatého řezu. Tento čtverec si pojmenujeme *ABCD*. Přeložíme si čtverec papíru přesně napůl tak, aby se body *A* a *B* překrývaly. Po rozevření nám vzniknou dva stejné obdélníky. Takto dostaneme dva středy. Jeden na straně *AB* a druhý na protější straně *CD*. Pro nás bude důležitý střed na straně *CD*. Tento bod si označíme písmenem *S*. Dále přehneme papír tak, aby body *B* a *S* ležely na jednotlivých koncích přehybu, (Obr. 7.1). [4]

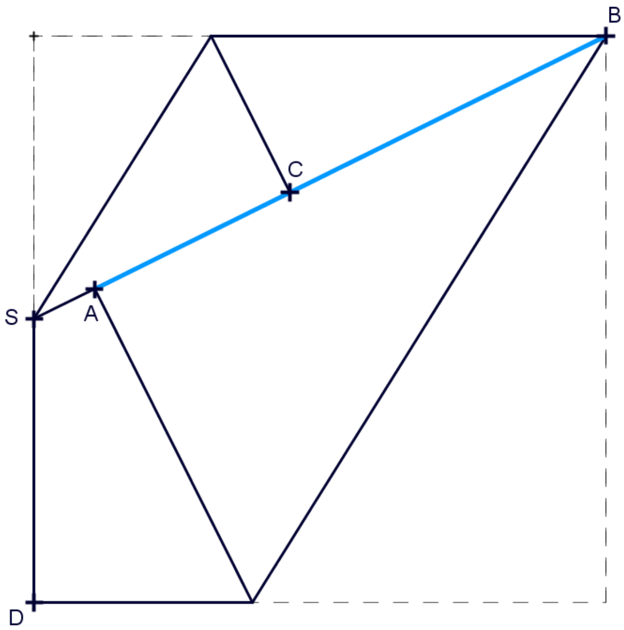


Obrázek 7.1 - Sestrojení zlatého řezu pomocí přehýbání papíru (a)

Nyní již zbývá jednotlivé body A a C přehnout tak, aby oba ležely na přehybu *SB*. Tím docílíme toho, že úsečku AB rozdělíme bodem C v poměru zlatého řezu, (Obr. 7.2, 7.3). [4]



Obrázek 7.2 - Sestrojení zlatého řezu pomocí přehýbání papíru (b)



Obrázek 7.3 - Sestrojení zlatého řezu pomocí přehýbání papíru (c)

7.2 Převrácená hodnota

Ve třetí kapitole jsme si řekli, že zlaté číslo je jediné kladné číslo, které po odečtení jedničky dává svou převrácenou hodnotu. Proto se ve druhém úkolu pokusíme tuto jednoduchou vlastnost ukázat.

Budeme hledat všechna čísla x, od kterých po odečtení jedničky dostaneme jejich převrácené hodnoty. Tedy chceme vyřešit rovnici:

$$x - 1 = \frac{1}{x}$$

Po roznásobení získáme kvadratickou rovnici, a pomocí vzorce pro úpravu rovnice $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ vypočítáme všechny hodnoty x.

$$x^2 - x = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 * 1 * (-1)}}{2 * 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0{,}6180339887$$

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}6180339887 = \varphi$$

Výpočtem jsme získali dva kořeny. Po jejich vyčíslení jsme zjistili, že jeden kořen je záporný a druhý odpovídá hodnotě zlatého řezu zmenšené o jedna. Můžeme tedy říci, že existuje jediné kladné číslo, jehož hodnota zmenšená o jedna se rovná jeho převrácené hodnotě a tím je zlaté číslo φ.

8 ZLATÝ ŘEZ OKOLO NÁS

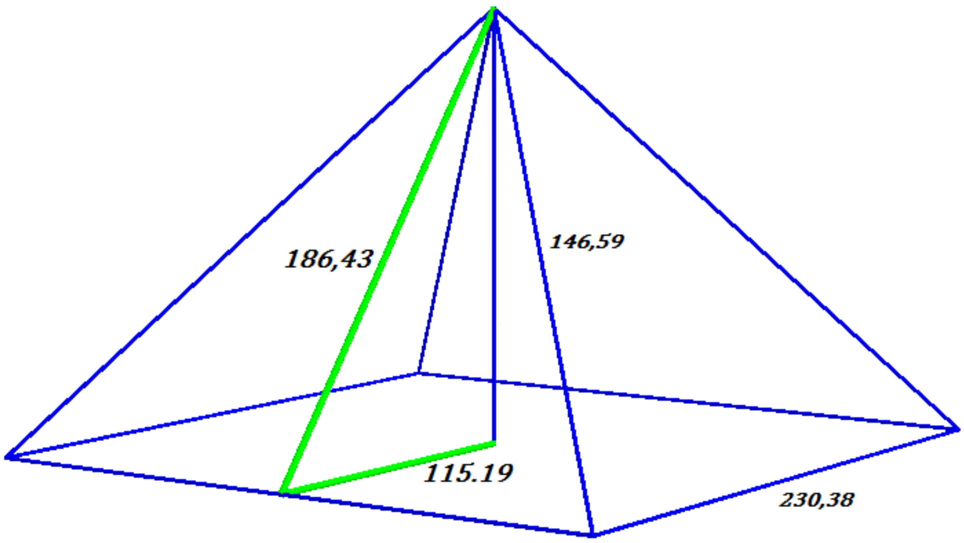
Jak již bylo zmíněno v úvodu, tato kapitola bude věnována zlatému řezu okolo nás. V našem okolí je ukryto mnoho předmětů, které v sobě ukrývají zlatý řez. Je potřeba se jen rozhlédnout a vnímat je. Ať už se za zlatým poměrem vydáte do přírody, nebo kvůli němu odcestujete do zahraničí, vždy se někde objeví.

Tato kapitola ukrývá předměty každodenního života i některé významné stavby. Na fotografiích světově známých památek, jako je Cheopsova pyramida v Gíze a pařížská pyramida v Louvru, můžeme najít poměr, který se velmi blíží zlatému řezu. A v Paříži zůstaneme i u následujícího obrázku, na kterém je zobrazena známá Mona Lisa. I v tomto známém portrétu ukryl malíř Leonardo da Vinci zlatý poměr.

Se zlatým poměrem v umění se můžeme setkat i u nás. Příznivci koncertní hudby se s ním setkají například u hudebních nástrojů. Zlatý poměr ukrývají třeba tradiční housle.

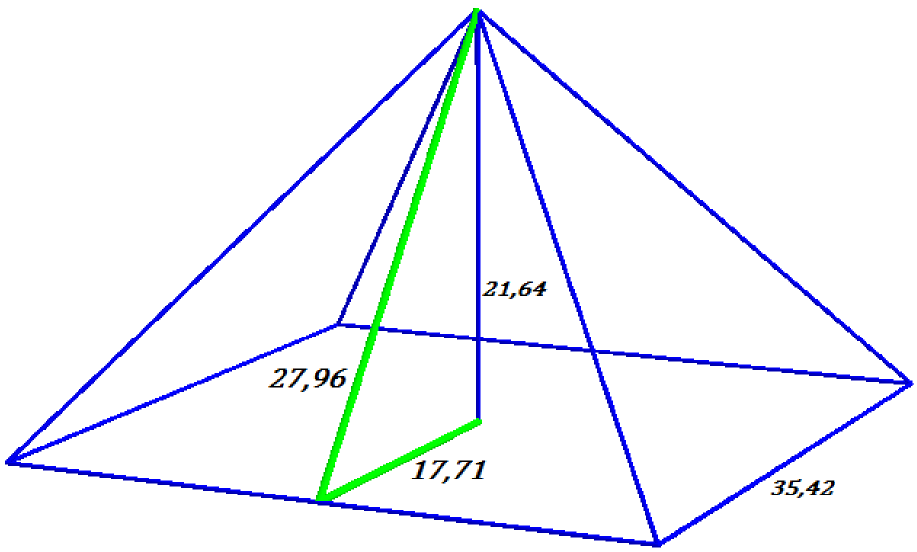
Pokud se ale při hledání tajemného zlatého řezu nechceme honit za památkami, můžeme se rozhlédnout po přírodě. Zbývající obrázky proto zachycují přírodu. Uvnitř květu slunečnice a sedmikrásky můžeme najít logaritmickou spirálu. Tato spirála je také zřetelná u schránek plžů. Dále jí můžeme vidět třeba u schránky Loděnky hlubinné.

Obrázek 8.1 - Cheopsova pyramida v Gíze [18]

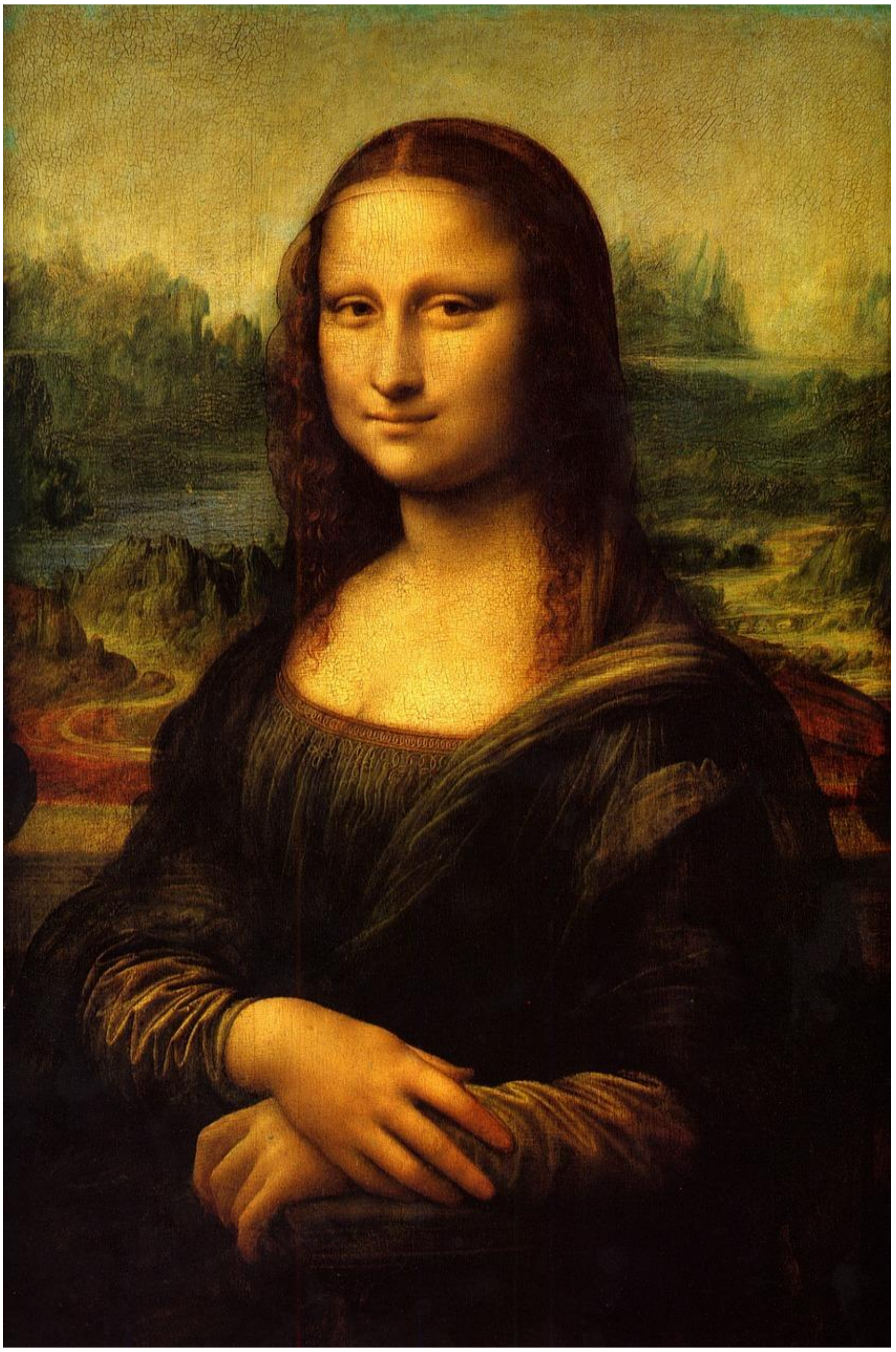


Obrázek 8.2 - Zlatý řez v Cheopsově pyramidě

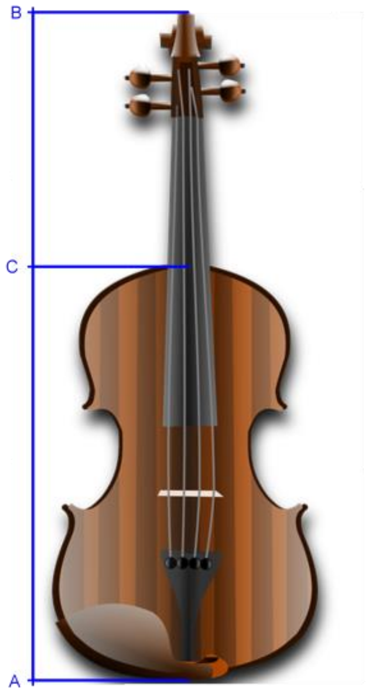
Obrázek 8.3 - Pyramida v Louvru [13]



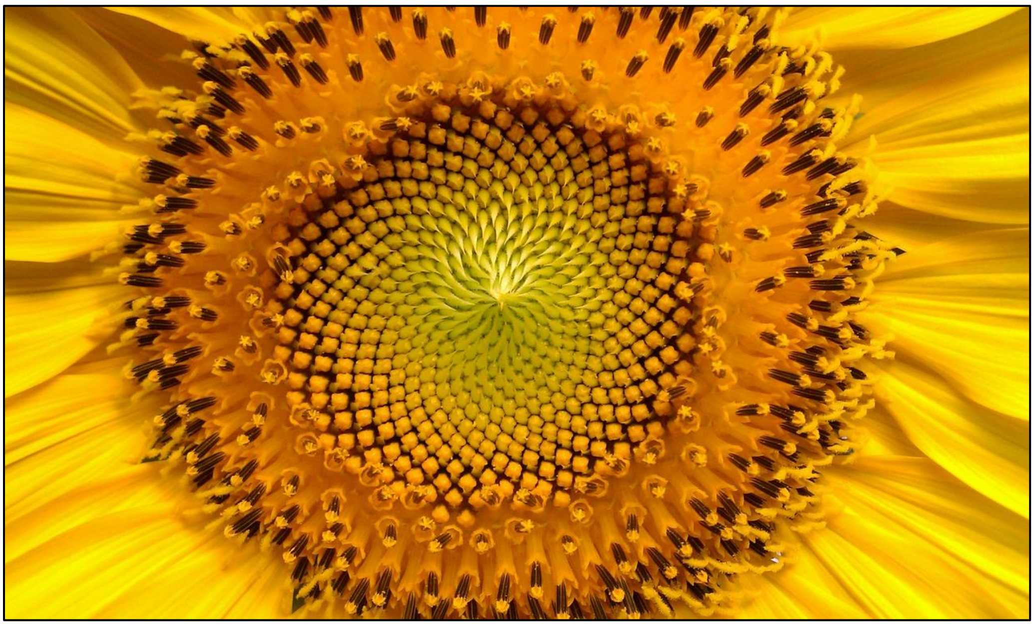
Obrázek 8.4 - Zlatý řez uvnitř pyramidy v Louvru



Obrázek 8.5 - Mona Lisa (Leonardo da Vinci) [18]



Obrázek 8.6 - Housle se zlatým poměrem [18]



Obrázek 8.7 - Logaritmická spirála uvnitř květu slunečnice [18]

Obrázek 8.8 - Logaritmická spirála uvnitř květu sedmikrásky [18]

Obrázek 8.9 - Ulita plže [18]

Obrázek 8.10 - Ulita plže [18]

Obrázek 8.11 - Loděnka hlubinná [18]

9 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] COOK, Theodore Andrea. *The curves of life: being an account of spiral formations and their application to growth in nature, to science, and to art : with special reference to the manuscripts of Leonardo da Vinci*. New York: Dover Publications, 1979, xxx, 479 p. ISBN 04-862-3701-X.

[2] GHYKA, Matila C. *The geometry of art and life*. New York: Dover Publications, c1977, xvii, 174 s. Dover science books. ISBN 04-862-3542-4.

[3] HUNTLEY, H. *The divine proportion: a study in mathematical beauty*. New York: Dover Publications, [1970], xii, 186 p. ISBN 04-862-2254-3.

[4] CHMELÍKOVÁ, Vlasta. *Zlatý řez*. Praha, 2006. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce PhDr. Alena Šarounová, CSc.

[5] JIROVSKÁ, Iveta. *Užití zlatého řezu*. České Budějovice, 1995. 73 s. Diplomová práce. Jihočeská univerzita. Pedagogická fakulta. Katedra matematiky.

[6] JUŠKEVIČ, Adolf P. *Dějiny matematiky ve středověku*. Vyd. 1. Praha: Academia, 1977, 446 s.

[7] KOTKOVÁ, Kateřina. *Zlatý řez*. Brno, 2008. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Fakulta pedagogická, katedra matematiky. Vedoucí práce Jaroslav Beránek.

[8] KOWAL, Stanislav. *Matematika pro volné chvíle: zábavou k vědě*. 2. upravené vydání. Praha: Sntl, 1985, 323 s.

[9] LIVIO, Mario. *Zlatý řez: příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. 1. vyd. v českém jazyce. Praha: Argo, 2006, 255 s. ISBN 80-720-3808-7.

[10] LUNDY, Miranda. *Posvátná geometrie*. 2. vyd. v českém jazyce. Překlad Jiří Pilucha. Praha: Dokořán, 2013, 58 s. Pergamen. ISBN 978-80-7363-565-7.

[11] NĚMEC, Miroslav. *Pravidelný pětiúhelník*. Praha, 2007. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.

[12] OLSEN, Scott Anthony. *Záhadný zlatý řez: největší tajemství přírody*. 2. vyd. v českém jazyce. Překlad Petr Holčák. Praha: Dokořán, 2013, 60 s. Pergamen. ISBN 978-80-7363-566-4.

[13] PIKLOVÁ ELIŠKA, osobní fotoarchiv

[14] ZOUBEK PETR, osobní archiv

[15] ČSN ISO 214 (01 0148). Abstrakty pro publikace a dokumentaci

Internetové odkazy:

[16] AZcitáty.cz. *Citáty* [online]. 2009 [cit. 2015-01-14].
Dostupné z: http://azcitaty.cz/johannes-kepler/4074/

[17] JAREŠOVÁ Miroslava, VOLF Ivo. Matematika křivek: Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku. In: [online]. [cit. 2015-02-09]. Dostupné z: http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/mkrivek.pdf

[18] *Pixabay: fotobanka* [online]. [cit. 2015-02-27].
Dostupné z: http://pixabay.com/

10 SEZNAM OBRÁZKŮ