

**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY**  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ MECHANICKÝCH ZKOUŠEK  
KOMPOZITŮ PRYŽ-OCELOVÉ VLÁKNO**

COMPUTATIONAL MODELLING OF MECHANICAL TESTS OF RUBBER –  
STEEL FIBRE

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**  
DIPLOMA THESIS

Diplomant:

Milan Jarý

Vedoucí diplomové práce:

Doc. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

Brno 2008

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2007/08

## **ZADANÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE**

student(ka): Jarý Milan

který/která studuje v **magisterském studijním programu**

obor: **Aplikovaná mechanika (3901T003)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem 5.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním Řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

**Výpočtové modelování mechanických zkoušek kompozitů pryž – ocelové vlákno**

v anglickém jazyce:

**Computational modelling of mechanical tests of composites “rubber – steel fibre“**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce se zabývá výpočtovým modelováním deformačně napěťových stavů vznikajících při mechanických zkouškách kompozitů s pryžovou maticí, a to na dvou úrovních modelu, jednak s fyzickým modelováním vláken a matrice, jednak s využitím konstitutivních modelů popisujících vlastnosti kompozitu jako celku.

Cíle diplomové práce:

- Seznámit se s konstitutivními modely hyperelastických izotropních a anizotropních materiálů a identifikací jejich parametrů na základě mechanických zkoušek.
- Vytvořit výpočtové modely zkušebních těles z kompozitu "pryž - ocelové vlákno" pro různá uspořádání vláken a využít je při simulaci vybraných zkoušek.
- Otestovat možnosti modelování kompozitu s využitím homogenizace jeho vlastností a porovnat výsledky obou přístupů.

Seznam odborné literatury:

1. ANSYS User manual - hyperelasticity
2. P. Skácel: Výpočtové a experimentální modelování deformačně napjatostních a mezních stavů elastomerů a jejich rozhraní s tuhými materiály. Disertační práce, FSI VUT BRno, 2005.
3. G.A. Holzapfel: Nonlinear Solid Mechanics, Willey and Sons, Chichester, 2000.
4. Constitutive Models of Rubber, ed. Dorfmann and Muhr, Balkema, Rotterdam, 1999.

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2007/08.

V Brně, dne 23.11.2007



prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
Ředitel ústavu

doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.  
Děkan fakulty

# LICENČNÍ SMLOUVA POSKYTOVANÁ K VÝKONU PRÁVA UŽÍT ŠKOLNÍ DÍLO

uzavřená mezi smluvními stranami:

## 1. Pan/paní

Jméno a příjmení: Milan Jarý

Bytem: Sládkova 865, 539 73 Skuteč

Narozen/a (datum a místo): 3.12. 1983, Ústí nad Orlicí

(dále jen „autor“)

a

## 2. Vysoké učení technické v Brně

Fakulta strojního inženýrství

se sídlem Technická 2896/2, 616 69 Brno

jejímž jménem jedná na základě písemného pověření děkanem fakulty:

doc. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

(dále jen „nabyvatel“)

### Čl. 1

#### Specifikace školního díla

1. Předmětem této smlouvy je vysokoškolská kvalifikační práce (VŠKP):

- disertační práce
  - diplomová práce
  - bakalářská práce
  - jiná práce, jejíž druh je specifikován jako .....
- (dále jen VŠKP nebo dílo)

Název VŠKP: Výpočtové modelování mechanických zkoušek kompozitů  
pryž-ocelové vlákno

Vedoucí/školitel VŠKP: doc. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Datum obhajoby VŠKP:

VŠKP odevzdal autor nabyvateli v\*:

- tištěné formě – počet exemplářů: 2
- elektronické formě – počet exemplářů: 1

---

\* hodící se zaškrtněte

2. Autor prohlašuje, že vytvořil samostatnou vlastní tvůrčí činností dílo shora popsané a specifikované. Autor dále prohlašuje, že při zpracovávání díla se sám nedostal do rozporu s autorským zákonem a předpisy souvisejícími a že je dílo dílem původním.
3. Dílo je chráněno jako dílo dle autorského zákona v platném znění.
4. Autor potvrzuje, že listinná a elektronická verze díla je identická.

## **Článek 2**

### **Udělení licenčního oprávnění**

1. Autor touto smlouvou poskytuje nabyvateli oprávnění (licenci) k výkonu práva uvedené dílo nevýdělečně užít, archivovat a zpřístupnit ke studijním, výukovým a výzkumným účelům včetně pořizování výpisů, opisů a rozmnoženin.
2. Licence je poskytována celosvětově, pro celou dobu trvání autorských a majetkových práv k dílu.
3. Autor souhlasí se zveřejněním díla v databázi přístupné v mezinárodní síti
  - ihned po uzavření této smlouvy
  - 1 rok po uzavření této smlouvy
  - 3 roky po uzavření této smlouvy
  - 5 let po uzavření této smlouvy
  - 10 let po uzavření této smlouvy(z důvodu utajení v něm obsažených informací)
4. Nevýdělečné zveřejňování díla nabyvatelem v souladu s ustanovením § 47b zákona č. 111/ 1998 Sb., v platném znění, nevyžaduje licenci a nabyvatel je k němu povinen a oprávněn ze zákona.

## **Článek 3**

### **Závěrečná ustanovení**

1. Smlouva je sepsána ve třech vyhotoveních s platností originálu, přičemž po jednom vyhotovení obdrží autor a nabyvatel, další vyhotovení je vloženo do VŠKP.
2. Vztahy mezi smluvními stranami vzniklé a neupravené touto smlouvou se řídí autorským zákonem, občanským zákoníkem, vysokoškolským zákonem, zákonem o archivnictví, v platném znění a popř. dalšími právními předpisy.
3. Licenční smlouva byla uzavřena na základě svobodné a pravé vůle smluvních stran, s plným porozuměním jejímu textu i důsledkům, nikoliv v tísní a za nápadně nevýhodných podmínek.
4. Licenční smlouva nabývá platnosti a účinnosti dnem jejího podpisu oběma smluvními stranami.

V Brně dne: .....

.....  
Nabyvatel

.....  
Autor

## ABSTRAKT

Motivací pro realizaci této diplomové práce bylo navrhnout výpočtový model vláknového kompozitu s elastomerovou maticí a dále se pokusit o homogenizaci vlastností tohoto kompozitu.

Práce se zabývá výpočtovým modelováním deformačně napěťových stavů vznikajících při mechanických zkouškách kompozitů. Kompozity, které jsou použity při mechanických zkouškách, jsou složeny z hyperelastické pryžové matrice a z ocelových výztužných vláken. Výpočtové modelování je uskutečněno na dvou úrovních modelu. Jednak s fyzickým modelováním vláken a matrice a jednak s využitím homogenizace vlastností, tj. konstitutivních modelů popisujících vlastnosti kompozitu jako celku. To znamená, že vlastnosti vláken jsou matematickou formulací konstitutivního modelu zahrnuty v měrné energii napjatosti (hustota deformační energie).

Dále se práce zabývá výpočtovým modelováním mechanických zkoušek hyperelastických izotropních materiálů, které slouží k identifikaci jejich materiálových parametrů a k ověření správného výběru konstitutivního modelu materiálu, jenž ho popisuje. Pro konkrétní hyperelastický materiál jsou provedeny simulace pro zkoušku jednoosým tahem, dvouosým tahem, jednoosým tlakem, dvouosým tlakem, smykem, jednoosým tahem se zabráněnou příčnou deformací. Mechanické parametry byly určeny z experimentálních dat, které sloužily jako data vstupní. Ověření modelu materiálu bylo provedeno porovnáním dat získaných z experimentů a výsledků simulace daných mechanických zkoušek pomocí MKP v systému Ansys. Takto ověřený konstitutivní model materiálu byl použit pro popis matrice v deformačně napěťových modelech mechanických zkoušek kompozitního materiálu a výsledky byly porovnávány s experimentálními daty.

Cíle, kterých má být dosaženo, jsou následující:

- Seznámit se s konstitutivními modely hyperelastických izotropních a anizotropních materiálů a identifikací jejich parametrů na základě mechanických zkoušek.
- Vytvořit výpočtové modely zkušebních těles z kompozitu "pryž - ocelové vlákno" pro různá uspořádání vláken a využít je při simulaci vybraných zkoušek.
- Otestovat možnosti modelování kompozitu s využitím homogenizace jeho vlastností a porovnat výsledky obou přístupů.

Výsledky, kterých bylo dosaženo:

- Byly vytvořeny výpočtové modely s namodelovanými vlákny, jejichž deformačně napěťové charakteristiky se kvalitativně shodují s experimentem a kvantitativní rozdíl je 20% až 40% (viz.(4.3)).
- Dále byla úspěšně provedena homogenizace vlastností výpočtového modelu s namodelovanými vlákny (viz.(4.4)).

**Klíčová slova:**

hyperelasticita, elastomer, metoda konečných prvků, kompozitní materiál, homogenizace vlastností kompozitu

## ABSTRACT

This diploma thesis focuses on realization of a computational model of fibre composite with elastomer matrix and on homogenization of properties of this composite.

The work deals with computational modelling of strain-stress states which arise in mechanical tests of composites. The composites investigated by mechanical tests comprise of hyperelastic rubber matrix and steel reinforcing fibres. Computational modelling is carried out at two levels of the model. First, with three-dimensional modelling of fibres and matrix as two different materials and, second, using a homogenized model of composite; this constitutive model describes the composite as a homogeneous anisotropic material. It means that properties of fibres are encompassed into strain energy density by the mathematical formulation of the constitutive model.

Further, the work deals with computational modelling of mechanical tests of hyperelastic isotropic materials used for identification of their material parameters and for verification of the selected constitutive model of material. For particular hyperelastic material, simulations of tests were carried out, namely of uniaxial tension, biaxial tension, uniaxial compression, biaxial compression, pure shear and uniaxial tension with constrained transversal strain (planar tension). Parameters of the constitutive model were determined of experimental input data. Verification of the constitutive model was carried out by comparison of the data acquired by experiments with the results of simulations of mechanical tests in FE program system Ansys. Then the authentic constitutive model of material was used for description of matrix behaviour in models of mechanical tests of composite material and results were compared with experimental data.

Principal objectives which I want to attain are following:

- to acquaint with the constitutive models of hyperelastic isotropic and anisotropic materials and identification of their parameters on base of mechanical tests.
- to create computational models of testing specimens of composite “ rubber – steel fibre“ for different fibre arrangements and to use the created computational models in simulations of chosen tests.



- to test the possibilities of computational modelling of composites with application of homogenized properties and to compare the results of both approaches.

Results which were attained:

- the computational models were created with the fibres modelled; the strain – stress characteristics are qualitatively corresponding to experiments, and quantitative difference is 20% - 40% (see (4.3)).
- the computational models based on homogenization of properties were tested and gave results corresponding to the models with modelled fibres (see (4.4)) with a good accuracy.

**Keywords:**

hyperelasticity, elastomer, finite elements method, built-up material, homogenization of attributes composite

JARÝ, M. *Výpočtové modelování mechanických zkoušek kompozitů pryž - ocelové vlákno*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008. 88 s.  
Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

## ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Tímto prohlašuji, že předloženou diplomovou práci jsem vypracoval samostatně pod vedením svého vedoucího diplomové práce Doc. Ing. Jiřího Burši, Ph.D. a na základě uvedené literatury.

.....  
Milan Jarý

V Brně dne 12. 5. 2008

## **PODĚKOVÁNÍ**

Rád bych tímto způsobem velice poděkoval svému vedoucímu diplomové práce Doc. Ing. Jiřímu Buršovi, Ph.D. za významnou pomoc, kterou mi poskytl při vytváření a psaní této diplomové práce. Dále bych chtěl poděkovat zaměstnancům Ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky FSI VUT v Brně, kteří mi vždy ochotně pomohli a vytvářeli přátelskou atmosféru. V neposlední řadě mnohokrát děkuji svým rodičům za jejich podporu, bez které by tato práce nemohla vzniknout.

## OBSAH

<b>1</b>	<b>ÚVOD</b> .....	<b>17</b>
1.1	Cíle práce .....	18
<b>2</b>	<b>POPIS PROBLÉMOVÉ SITUACE A FORMULACE PROBLÉMU</b> .....	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>VYBRANÉ STATĚ Z NELINEÁRNÍ MECHANIKY KONTINUA, MECHANIKA KOMPOZITŮ</b> .....	<b>20</b>
3.1	Tenzory popisující stav deformace v bodě tělesa .....	21
3.2	Tenzory popisující napjatost v bodě tělesa .....	25
3.3	Vymezení hyperelastických materiálů .....	28
3.4	Zadávání vlastností hyperelastických materiálů v systémech MKP .....	33
3.5	Deformačně napět'ové chování elastomerů .....	36
3.6	Technické kompozity lineárně elastické .....	37
3.7	Technické kompozity s hyperelastickou maticí .....	38
<b>4</b>	<b>REALIZACE PROCESU ŘEŠENÍ A ANALÝZA VÝSLEDKŮ</b> .....	<b>39</b>
4.1	Testovací úlohy hyperelastického materiálu .....	42
4.2	Tvorba výpočtového modelu .....	58
4.3	Simulace mechanických zkoušek .....	73
4.4	Homogenizace vlastností zkušební vzorku hyperelastického kompozitu .....	82
<b>5</b>	<b>ZÁVĚR</b> .....	<b>87</b>
<b>6</b>	<b>LITERATURA</b> .....	<b>88</b>

## SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

$\lambda_i = dx_i / dX_i$ [-]( $i=1,2,3$ )	poměrné protažení ve směru $i$
$\lambda_S = \sqrt[3]{J}$ [-]	střední poměrné protažení
$\varepsilon_i = \Delta l / l_0 = \lambda_i - 1$ ; $\varepsilon_{SM}$ [-]	normálové přetvoření inženýrské neboli smluvní ve směru $i$
$\varepsilon_i$ ( $i=1,2,3$ ) [-]	hlavní přetvoření ve směru $i$ , pro která platí $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$
$\varepsilon_C$ [-]	poměrné přetvoření kompozitu
$\varepsilon_{SM}^{HOM}$ [Pa]	smluvní homogenizované přetvoření kompozitu
$\gamma_{ij}$ [-]	úhlové přetvoření – zkos (změna pravého úhlu)
$\gamma_{LT}$ [-]	úhlové přetvoření v rovině rovnoběžné s podélným směrem
$dx_i$ [m]	deformovaný rozměr elementárního prvku ve směru $i$
$dX_i$ [m]	nedeformovaný rozměr elementárního prvku ve směru $i$
$S_{ef}$ [m <sup>2</sup> ]	efektivní příčný průřez kompozitu
$S_{min}$ [m <sup>2</sup> ]	minimální příčný průřez kompozitu
$S_{max}$ [m <sup>2</sup> ]	maximální příčný průřez kompozitu
$k$ [-]	součinitel zohledňující jiný příčný průřez kompozitu se “zuby”
$L$	směr Longitudinální – podélný (ve směru vláken)
$T$	směr Transverzální – příčný (kolmo na směr vláken)
$\alpha$ [°]	úhel odklonu vlákna od podélného směru vzorku kompozitu
$E_{ij}^L$ [-]	Green-Lagrangeův tenzor konečných přetvoření
$E_{ij}^A$ [-]	Almansiho tenzor konečných přetvoření
$E_i^C$ ; $\varepsilon_{ln}$ [-]	Cauchyho (logarimický) tenzor konečných deformací
$F_{ij}$ [-]	tenzor deformačního gradientu

$C_{ij}$	[-]	Cauchy-Greenův tenzor deformace
$C$	[-]	Cauchy-Greenův tenzor deformace v hlavním s.s.
$\sigma_{ij}^t ; \sigma_{SK}$	[Pa]	napětí skutečné (složka Cauchyho tenzoru napětí)
$\tau_{ik}^t ; \sigma_{SM}$	[Pa]	napětí smluvní (složka Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí 1. druhu)
$S_{ij}$	[Pa]	složka Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí 2. druhu
$\sigma_i$ ( $i=1,2,3$ )	[Pa]	hlavní napětí ve směru $i$ , pro která platí $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$
$\tau_{ij}$	[Pa]	smykové napětí
$\sigma_{uniax}^{crit}$	[Pa]	mezní napětí pevnosti při jednoosé napjatosti
$\sigma_{equibiax}^{crit}$	[Pa]	mezní napětí pevnosti při rovnoměrné dvouosé napjatosti
$\sigma_{triax}^{crit}$	[Pa]	mezní napětí pevnosti při trojosé napjatosti
$\sigma_{SM}^{HOM}$	[Pa]	smluvní homogenizované napětí kompozitu
$F_z$	[N]	reakční síla kompozitu v podélném směru vzorku
$W$	[Jm <sup>-3</sup> ]	hustota deformační energie, měrná energie napjatosti
$W_{iso}$	[Jm <sup>-3</sup> ]	izotropní složka hustoty deformační energie
$W_{aniso}$	[Jm <sup>-3</sup> ]	anizotropní složka hustoty deformační energie
$W_d$	[Jm <sup>-3</sup> ]	deviátorová složka hustoty deformační energie
$W_v$	[Jm <sup>-3</sup> ]	objemová složka hustoty deformační energie
$G$	[Pa]	modul pružnosti ve smyku
$c_{ij}$	[Pa]	modul pružnosti ve smyku u polynomického modelu
$\mu$	[-]	Poissonovo číslo
$\mu_{LT}$	[-]	Poissonovo číslo v rovině rovnoběžné s podélným směrem
$K$	[Pa]	objemový modul pružnosti

$E$	[Pa]	modul pružnosti v tahu
$E_m, E_f$	[Pa]	modul pružnosti v tahu pro matici (index $m$ ), vlákna (index $f$ )
$E_i$ ( $i = L, T$ )	[Pa]	modul pružnosti v tahu ortotropního materiálu ve směru $i$
$v_m, v_f$	[-]	objemový podíl matrice (index $m$ ), vláken (index $f$ ) v kompozitu
$d$	[Pa <sup>-1</sup> ]	parametr nestlačitelnosti materiálu, daný vztahem $d=2/K$
$e$	[-]	poměrná změna objemu
$c_{10}, c_{01}$	[Pa]	materiálové parametry Mooney-Rivlinova modelu
$c_{ij}, d_k$	[Pa]	materiálové parametry Polynomického modelu
$\mu_p, \alpha_p, d_p$	[Pa]	materiálové parametry Ogdenova modelu
$\lambda_L, \mu$	[Pa]	materiálové parametry modelu Arruda-Boyce
$k_1$	[Pa]	materiálový parametr Holzapfelova modelu vyjadřující tuhost
$k_2$	[-]	materiálový parametr Holzapfelova modelu vyjadřující progresivitu zpevnění, tvar exponenciální křivky
$d, a_i, b_j, c_k, d_l, e_m, f_m, g_0$		materiálové parametry anizotropního Polynomického modelu
[C]		matice elastických parametrů
$I_1, I_2, I_3$	[-]	invarianty pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace
$I_4, I_6$	[-]	invarianty pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace vyjadřující protažení první a druhé osnovy vláken v $\lambda^2$
$\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_4, \bar{I}_5, \bar{I}_6, \bar{I}_7, \bar{I}_8$	[-]	modifikované (pouze deviátorová složka deformace) invarianty pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace
J	[-]	třetí invariant tenzoru deformačního gradientu
A	[-]	směrový tenzor první osnovy vláken
B	[-]	směrový tenzor druhé osnovy vláken
$\delta$	[%]	odchylka konstitutivního modelu



## 1 ÚVOD

Kompozity jsou materiály složené z několika komponent s výrazně odlišnými vlastnostmi a různým uspořádáním a tvarem. Technické konstrukční kompozity a především vláknové kompozity se vyznačují řadovými rozdíly elastických parametrů, dále rozměry matrice vůči průměru výstužných vláken. Kompozity, které jsou používány v oblasti malých deformací, jsou obvykle lineárně elastické a jejich popis je poměrně dobře propracovaný (viz. [5]). Naproti tomu v konstrukci pneumatik jsou využívány kompozitní materiály v oblasti velkých a tudíž nelineárních deformací. Materiál matrice, pryž, vykazuje výrazně nelineární chování, jde o matici z hyperelastického materiálu (viz. [1], [3], [6]), který je schopen dosahovat velkých elastických deformací. Pryž je vulkanizovaný elastomer charakterizovaný zejména dvěma podstatnými vlastnostmi. První z nich je velmi malá stlačitelnost a druhou z vlastností je, schopnost pryže dosáhnout značných poměrných protažení než dojde k porušení. Konkrétní hodnoty maximálních možných poměrných protažení jsou okolo 800%. Co se týče problematiky výstužných vláken, tak ta mohou být ocelová, spřádaná z nití, uhlíková. Jednotlivé druhy vláken se používají u pneumatik, pneumatické válcové pružiny, nosné prvky letadel. Z toho vyplývá, že kompozit s hyperelastickou maticí a ocelovými vlákny je značně nehomogenní strukturou. Tento fakt prakticky znemožňuje detailní zohlednění struktury materiálu ve výpočtových modelech v MKP, z důvodu velmi vysokého počtu prvků popisujících zkoumané kontinuum. Skutečnost nehomogenity materiálu vede k nutné homogenizaci vlastností materiálu. Toto je také jedna z hlavních motivací pro tvorbu mé diplomové práce. V této práci se zabývám vytvořením výpočtových modelů kompozitů, které by věrně popisovaly reálné chování kompozitů při mechanických zkouškách. V první řadě je nutné identifikovat konstitutivní model samotné hyperelastické pryžové matrice s experimentálně naměřenými daty. Takto ověřený konstitutivní model matrice je aplikován do výpočtového modelu konkrétního kompozitu s hyperelastickou maticí. Na tomto kompozitu s namodelovanými vlákny se provedou příslušné simulace mechanických zkoušek a takto získané výsledky se porovnají s experimentálně naměřenými daty kompozitů. Tím se ověří věrohodnost kompozitu s vlákny, který bude dále sloužit pro ověření věrohodnosti homogenizovaného kompozitu, již bez namodelovaných vláken.

## 1.1 CÍLE PRÁCE

Cílem práce je seznámit se s konstitutivními modely hyperelastických izotropních a anizotropních materiálů a identifikací jejich parametrů na základě mechanických zkoušek. Dále vytvoření výpočtových modelů kompozitů s hyperelastickou maticí pro různá uspořádání vláken a to na dvou úrovních modelu. Nejprve vytvořit výpočtový model 3D kompozitu s namodelovanými vlákny a porovnat s experimentálními hodnotami měřených kompozitů. Tímto způsobem se verifikují výsledky simulací 3D kompozitu s namodelovanými vlákny na určité požadované rozlišovací úrovni. Druhá úroveň výpočtového modelu je taková, že se již nemodelují vlákna, ale použije se konstitutivní model materiálu s možností modelování kompozitu s využitím homogenizace jeho vlastností. Jedná se o dva konstitutivní modely materiálu. Prvním z nich je Holzapfelův anizotropní model (viz. [3]) prioritně využíván ve výpočtovém modelování biologických měkkých tkání, ale podle předpokladů by měl být využitelný i při modelování technických kompozitů s hyperelastickou pryžovou maticí. Druhým je polynomický anizotropní model, který je přímo implementován v programovém systému Ansys (viz. [1]). Cílem použití těchto konstitutivních modelů materiálu je homogenizace vlastností a tím dosažení menšího počtu prvků a výrazně nižších výpočtových časů. Pro ověření těchto výpočtových modelů se použijí již ověřené výpočtové modely s vlákny. Úroveň nynějších výpočtových modelů je ve stádiu, kdy se ještě musí modelovat vlákna, ale díky hyperelastickým anizotropním modelům materiálu je do budoucna možné počítat s vysokou úrovní homogenizace výpočtových modelů kompozitů. Holzapfelův konstitutivní model materiálu dosud není v Ansysu implementován, ovšem nyní je snaha jej do Ansysu implementovat. Z těchto faktů vyplývá, že bez kooperace širšího týmu by vznik této diplomové práce nebyl možný.

## 2 POPIS PROBLÉMOVÉ SITUACE A FORMULACE PROBLÉMU

### 2.1 POPIS PROBLÉMOVÉ SITUACE

Současné výpočtové modely jsou na úrovni, kdy je ještě nutné fyzicky modelovat výztužná vlákna, avšak je majoritní snaha nahradit tato řešení výpočtovým modelem, který by homogenizoval vlastnosti kompozitu. Kompozity jsou pro výpočtové modelování značně nehomogenním materiálem. Nehomogenita kompozitu je způsobena jeho strukturou. Kompozit je složen z pryžové matrice a ocelových výztužných vláken. Spojením těchto dvou materiálů značně rozdílných vlastností vzniká nehomogenita ve smyslu ocelová vlákna verus hyperelastická pryžová matrice. Soudobé výpočtové modely, které obsahují namodelovaná vlákna, jsou z hlediska popisu struktury velice náročné a to z důvodu vysokého počtu prvků popisujících zkoumaný objekt. Stávající výpočetní technika by v tomto případě nezvládla vyřešit zkoumaný objekt, například pneumatiku, v reálných výpočtových časech.

Možnost jak zjednodušit řešení výpočtového modelu s namodelovanými vlákny je taková, že provedu homogenizaci vlastností kompozitu pomocí konstitutivního modelu materiálu. Tyto konstitutivní modely materiálu popisují vlastnosti kompozitu jako celku. Pro praktické výpočtové modelování to znamená, že již nemusíme modelovat výztužná vlákna, ale vymodelujeme pouze geometrii vzorku z homogenního materiálu. Vlastnosti výztužných vláken jsou zahrnuty přímo v konstitutivních modelech. Tímto docílíme výrazně nižšího počtu prvků popisujících diskretizované kontinuum a tím i mnohonásobně kratších výpočtových časů. Dále by tento konstitutivní model materiálu vedl k výpočtovému modelování na vyšší rozlišovací úrovni.

### 2.2 FORMULACE A ANALÝZA PROBLÉMU

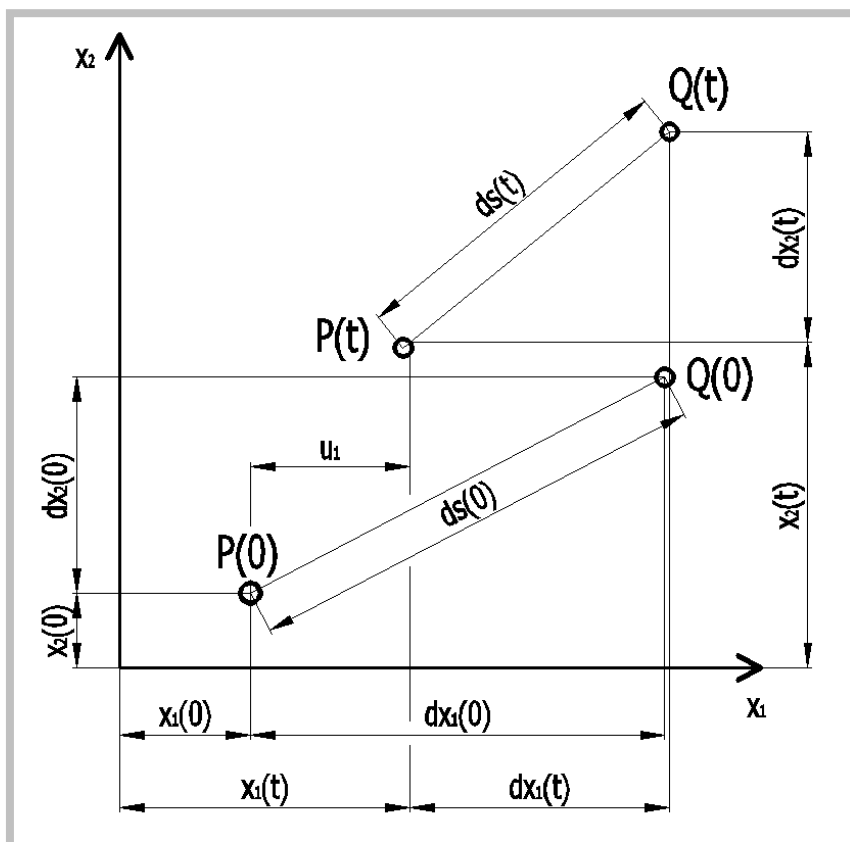
Z analýzy problémové situace jednoznačně vyplývá formulace problému:

*Provést výpočtové modelování deformačně napětových stavů vznikajících při mechanických*

zkouškách kompozitů s pryžovou maticí, a to na dvou úrovních modelu, jednak s fyzickým modelováním vláken a matrice, jednak s využitím konstitutivních modelů popisujících homogenizované vlastnosti kompozitu jako celku. Jelikož je známa geometrie, vazby, zatížení, vlastnosti objektu, označil bych můj problém jako **PŘÍMÝ**.

### 3 VYBRANÉ STATĚ Z NELINEÁRNÍ MECHANIKY KONTINUA, MECHANIKA KOMPOZITŮ

K popisu pohybu kontinua při velkých (konečných) deformacích musí být známo ke každému bodu tělesa zobrazení mezi výchozím a koncovým stavem => vektorové pole posuvů.



$x_{1,2}(0)$  - nedeformovaná  
souřadnice, délka jen ( $X$ )  
 $x_{1,2}(t)$  - deformovaná  
souřadnice, délka jen ( $x$ )

$P(0)$  – výchozí poloha  
 $P(t)$  – výsledná poloha  
v čase ( $t$ )  
 $u_1$  – přemístění bodu  
 $P$  ve směru 1

Obr. 1: Vektorové pole posuvů

Termínem konečné deformace (finite strain) označujeme přetvoření, která na rozdíl od klasické teorie pružnosti nejsou nekonečně malá (infinitesimální). V praktickém použití lze teorie založené na předpokladu malých (infinitesimálních, tedy nekonečně malých) přetvoření používat, pokud přetvoření nepřesáhnou cca 1%. V opačném případě je třeba používat teorie konečných (rozumí se konečně malých, tedy vlastně velkých) přetvoření (viz. [6]).

Existují dva přístupy popisu velkých deformací kontinua. Liší se tím, kterou konfiguraci tělesa považují za výchozí, jestli v čase  $t = 0$  ( $X$ ) nebo  $t = t(x)$ .

### 3.1 TENZORY POPISUJÍCÍ STAV DEFORMACE V BODĚ TĚLESA

#### A) Pro malé deformace

- Smluvní přetvoření

#### B) Pro velké deformace

- Green-Lagrangeův tenzor konečných přetvoření
- Almansiho tenzor konečných přetvoření
- Cauchyho (logaritmický) tenzor konečných deformací
- Tenzor deformačního gradientu
- Cauchy-Greenův tenzor deformace (pravý a levý)

#### A) PRO MALÉ DEFORMACE

##### 1) Smluvní přetvoření

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial Z} \quad (1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} \quad (2)$$

Vzhledem k tomu, že složkami tenzoru přetvoření jsou poloviční zksoy, lze napsat obecný tenzorový vztah

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (3)$$

kde souřadnicím x,y,z odpovídají x<sub>i</sub> a posuvům u,v,w posuvy u<sub>i</sub> (pro i=1,2,3).

## B) PRO VELKÉ DEFORMACE

### 1) Green-Lagrangeův tenzor konečných přetvoření

Přetvoření (poměrná deformace) je vztažena k původním (nedeformovaným) rozměrům t = 0 (X), ale je respektováno i natáčení elementu.

$$E_x^L = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 \right] \quad (4)$$

$$E_y^L = \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial Y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial Y} \right)^2 \right] \quad (5)$$

$$E_z^L = \frac{\partial w}{\partial Z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial Z} \right)^2 \right] \quad (6)$$

$$E_{ij}^L = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right] \quad (7)$$

### 2) Almansiho tenzor konečných přetvoření

Podle Almansiho se poměrné přetvoření vztahuje ke konečným (deformovaným) rozměrům. Pak délkové přetvoření lze vyjádřit obecným tenzorovým zápisem ve tvaru:

$$E_{ij}^A = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] \quad (8)$$

Praktické použití tohoto tenzoru je omezeno tím, že konečné (deformované) souřadnice obvykle předem neznáme.

### 3) Cauchyho (logarimický) tenzor konečných deformací

Cauchyho definice přetvoření je exaktnější v tom, že infinitezimální přírůstek délky vztahuje vždy k aktuální délce v daném stadiu zatěžovacího procesu. Přetvoření úsečky o původní délce  $\underline{X}_i(0)$ , která se vlivem zatížení mění na aktuální hodnotu  $\underline{x}_i$ , až dosáhne konečné (deformované) délky  $\underline{x}_i(k)$ , určíme integrací přírůstků její délky  $dx_i$ .

$$E_i^C = \int_{X_{i0}}^{x_{ik}} \frac{dx_i}{x_i} = [\ln x]_{X_{i0}}^{x_{ik}} = \ln x_{ik} - \ln X_{i0} = \ln \left( \frac{x_{ik}}{X_{i0}} \right) = \ln \lambda_i \quad (9)$$

Hlavní souřadnice tohoto tenzoru jsou tedy rovny přirozeným logaritům odpovídajícím poměrným protažením  $\lambda$ .

### 4) Tenzor deformačního gradientu

Složkami tenzoru deformačního gradientu  $F$  jsou poměrná protažení:

$$\lambda_x = \frac{\partial x}{\partial X}, \lambda_y = \frac{\partial y}{\partial Y}, \lambda_z = \frac{\partial z}{\partial Z} \quad (10)$$

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (11)$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Třetí invariant tenzoru deformačního gradientu je dán determinanem této matice  $F$ , který lze nejnázve určit z hlavních hodnot poměrných protažení pomocí vztahu:

$$J = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \quad (13)$$

Třetí invariant  $J$  tenzoru deformačního gradientu  $F$  udává poměrnou objemovou změnu elementu, jak plyne z následujícího vztahu:

$$e = \frac{V_{def} - V_{nedef}}{V_{nedef}} = \frac{dx \cdot dy \cdot dz - dX \cdot dY \cdot dZ}{dX \cdot dY \cdot dZ} = \frac{\partial x}{\partial X} \cdot \frac{\partial y}{\partial Y} \cdot \frac{\partial z}{\partial Z} - 1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 - 1 = J - 1 \quad (14)$$

Všechny dosud odvozené tenzory je možno vyjádřit po jeho polární dekompozici.

Jako každý tenzor lze i tenzor deformačního gradientu tedy rozložit na část kulovou (změna objemu) a deviátorovou (změna tvaru). Kulovou část určuje střední poměrné protažení, dané vztahem:

$$\lambda_s = \sqrt[3]{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3} = \sqrt[3]{J} \quad (15)$$

### 5) Cauchy-Greenův tenzor deformace

V tomto případě se nepracuje s přetvořením, ale s poměrnými protaženími, obdobně jako u tenzoru deformačního gradientu. Z něho se odvozuje pomocí následujících vztahů:

$$C_R = F^T \cdot F \quad (16)$$

$$C_L = F \cdot F^T \quad (17)$$

Například pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace lze složkově zapsat následovně (s využitím Einsteinova sčítacího pravidla):

$$C_{ij} = F_{ik} \cdot F_{kj} \quad (18)$$

Hlavními souřadnicemi tohoto tenzoru jsou tedy kvadráty poměrných protažení v hlavních směrech viz. vzorec (19).

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Invarianty Cauchy-Greenova tenzoru deformace lze vyjádřit v hlavním souřadném systému

takto:  $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$  (20)

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (21)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = J^3 \quad (22)$$

## VZÁJEMNÉ PŘEPOČTOVÉ VZTAHY PRO TENZORY PŘETVOŘENÍ

Nejvhodnější pro vzájemný přepočtení tenzorů přetvoření jsou poměrná protažení  $\lambda_i$



, což jsou složky tenzoru deformačního gradientu. Pro jednoduchost jsou přepočty vyjádřeny v hlavním souřadném systému:

$$\varepsilon_i = \lambda_i - 1 \quad (23)$$

$$E_i^L = \frac{\partial u_i}{\partial X_i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_i} \right)^2 = \lambda_i - 1 + \frac{1}{2} (\lambda_i - 1)^2 = \frac{1}{2} (\lambda_i^2 - 1) \quad (24)$$

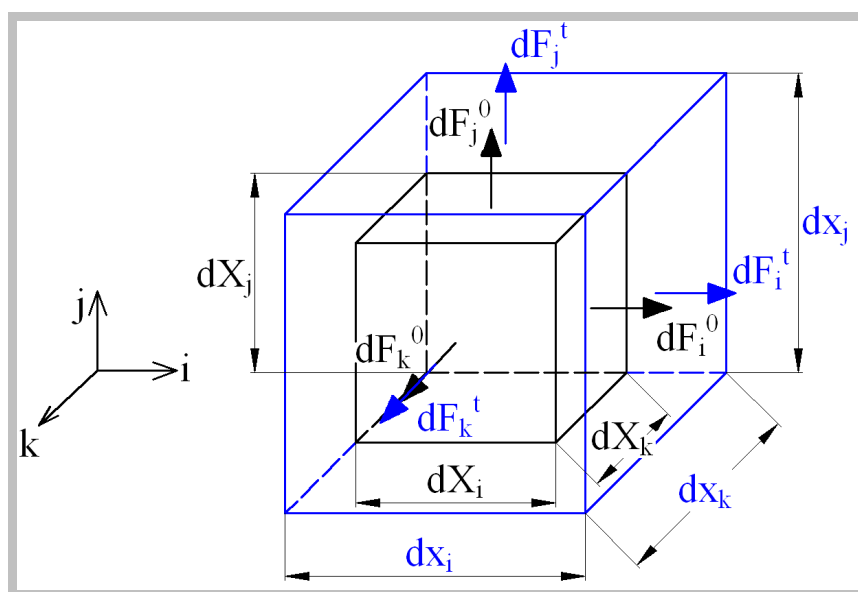
$$E_i^A = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 = 1 - \lambda_i^{-1} - \frac{1}{2} (1 - \lambda_i^{-1})^2 = \frac{1}{2} (1 - \lambda_i^{-2}) \quad (25)$$

$$E_i^C = \ln \lambda_i \quad (26)$$

Všechny výše uvedené vztahy jsem čerpal z literatury (viz. [6])

### 3.2 TENZORY POPISUJÍCÍ NAPJATOST V BODĚ TĚLESA

- Cauchyho tenzor napětí
- Piola-Kirchhoffův tenzor napětí 1. druhu
- Piola-Kirchhoffův tenzor napětí 2. druhu



Obr. 2: Elementární prvek

### 1) Cauchyho tenzor napětí

Cauchyho (Eulerův) tenzor napětí, představuje skutečná napětí. Je definován jako skutečná elementární síla v čase ( $t=t$ ) vztažená na skutečnou (deformovanou) plochu elementu v čase ( $t=t$ ) dle následujících vztahů:

$$\sigma_{ij}^t = \frac{dF_i^t}{dS_j^t} \quad (27)$$

$$\sigma_i = \frac{dF_i}{dx_j \cdot dx_k} \quad (28)$$

### 2) Piola-Kirchhoffův tenzor napětí 1. druhu

1. Piola-Kirchhoffův (Lagrangeův nebo Piolův) tenzor napětí, představuje smluvní napětí. Je definován jako skutečná elementární síla v čase ( $t=t$ ) vztažená na původní (nedeformovanou) plochu elementu v čase ( $t=0$ ) dle následujících vztahů:

$$\tau_{ik}^t = \frac{dF_i^t}{dS_k^0} \quad (29)$$

$$\tau_i = \frac{dF_i}{dX_j \cdot dX_k} \quad (30)$$

### 3) Piola-Kirchhoffův tenzor napětí 2. druhu

2. Piola-Kirchhoffův (Kirchhoffův) tenzor napětí, je definován jako elementární síla  $dF_{0i}$  vztažená na původní (nedeformovanou) plochu. Tato síla je však při přenášení na původní element změněna oproti skutečné síle  $dF_i$  stejným poměrem jako elementární rozměr v odpovídajícím směru. Ten se mění při zatížení podle vztahu:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_i} dX_i \quad \text{respektive} \quad dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_i} dx_i \quad (31)$$

Obdobně se podle těchto vztahů transformuje i elementární síla:

$$dF_{0i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_i} dF_i \quad \text{Transformace elementární síly v odpovídajícím směru} \quad (32)$$

$$S_i = \frac{dF_{0i}}{dX_j \cdot dX_k} \quad (33)$$

2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí nemá jasně definovaný fyzikální význam, používá se proto, že je i pro velká přetvoření symetrický a energeticky konjugovaný s Green-Lagrangeovým tenzorem přetvoření.

### VZÁJEMNÉ PŘEPOČTOVÉ VZTAHY PRO TENZORY NAPĚTÍ

Nejvhodnější pro vzájemný přepočet tenzorů napětí jsou poměrná protažení  $\lambda_i$ , což jsou složky tenzoru deformačního gradientu. Pro jednoduchost jsou přepočty vyjádřeny v hlavním souřadném systému:

$$\sigma_i = \frac{dF_i}{dx_j \cdot dx_k} = \frac{dF_i}{\lambda_j \cdot dX_j \cdot \lambda_k \cdot dX_k} = \frac{\tau_i}{\lambda_j \cdot \lambda_k} \quad \text{Cauchy napětí pomocí 1.P.K} \quad (34)$$

$$\sigma_i = \frac{\tau_i}{\lambda_j \cdot \lambda_k} = \tau_i \cdot \lambda_i \quad \text{Pro nestlačitelný materiál platí } \lambda_i \cdot \lambda_j \cdot \lambda_k = 1 \quad (35)$$

$$S_i = \frac{dF_{0i}}{dX_j \cdot dX_k} = \frac{\frac{\partial X_i}{\partial x_i} dF_i}{dX_j \cdot dX_k} = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \tau_i \quad \text{2.Piola-Kirchhof} \quad (36)$$

$$\sigma_i = \frac{\tau_i}{\lambda_j \cdot \lambda_k} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j \cdot \lambda_k} \cdot S_i \quad \text{Cauchy napětí pomocí 2.P.K} \quad (37)$$

$$\sigma_i = \frac{\tau_i}{\lambda_j \cdot \lambda_k} = \tau_i \cdot \lambda_i = \lambda_i^2 \cdot S_i \quad \text{Pro nestlačitelný materiál platí } \lambda_i \cdot \lambda_j \cdot \lambda_k = 1 \quad (38)$$

Všechny výše uvedené vztahy jsem čerpal z literatury (viz. [6]).

### ENERGETICKY KONJUGOVANÉ TENZORY

Proto, aby byla správně (jednoznačně) určena energie napjatosti je nutné pracovat se vzájemně si odpovídajícími tenzory napětí a přetvoření. Tyto příslušné odpovídající si dvojice tenzorů se nazývají energeticky konjugované. Jsou to tedy vzájemně přiřazené dvojice tenzorů napětí a přetvoření, jejichž vzájemnou kombinací lze dostat energii napjatosti. Např.:

- Green-Lagrangeův tenzor přetvoření a 2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí

### 3.3 VYMEZENÍ HYPERELASTICKÝCH MATERIÁLŮ

#### 3.3.1 DEFINICE HYPERELASTICKÉHO MATERIÁLU

Pod pojmem hyperelastický materiál si můžeme pro názornost představit například elastomer nebo vulkanizovaný elastomer (pryž), který vykazuje konečná (tj. velká) vratná přetvoření.

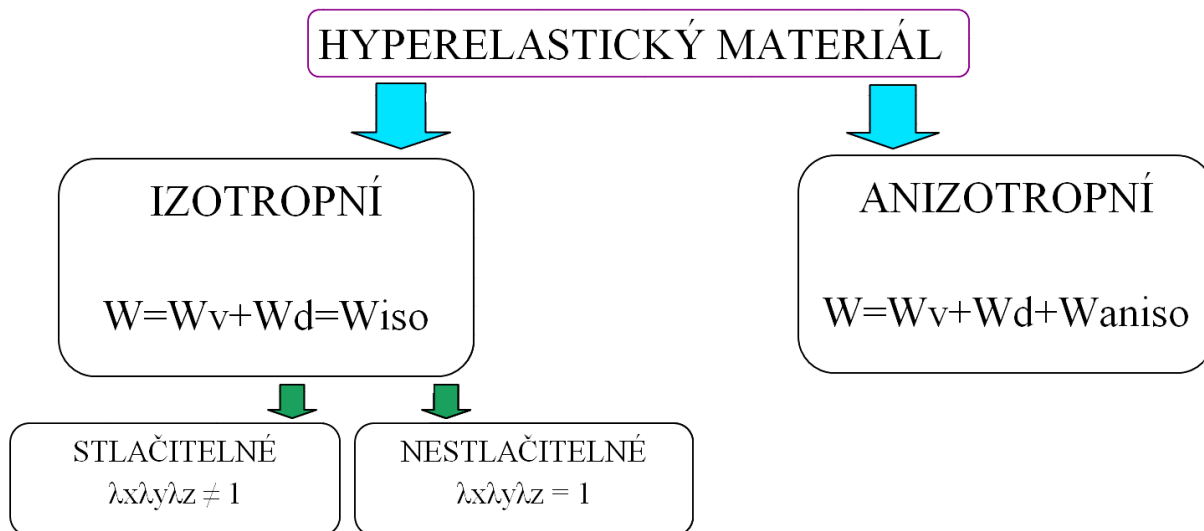
Materiál nazýváme hyperelastickým, pokud existuje elastická potenciální funkce  $W$  (měrná deformační energie), která je skalární funkcí některého z tenzorů přetvoření, resp. deformace a jejíž derivace podle některé složky přetvoření pak určuje odpovídající složku napětí. Tuto definici lze vyjádřit následovně:

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \quad (39)$$

Hystereze je v ideálních hyperelastických materiálech malá a zanedbatelná. Skutečnost, že hyperelastický materiál vykazuje velká vratná přetvoření je dána vlastnostmi a druhem materiálu. Youngův modul pružnosti, vystupující v Hookově zákoně, proto platí jen pro velmi krátké počáteční lineární oblasti, kde dochází k malým přetvořením. Takto získaný modul pružnosti pryže je jen 1 až 10 Mpa. Pryž je charakterizována zejména dvěma podstatnými vlastnostmi. První z nich je velmi malá stlačitelnost a druhou z vlastností je, schopnost pryže dosáhnout značných poměrných protažení, až 800%, než dojde k porušení.

U hyperelastických konstitutivních modelů, stejně jako u všech ostatních je třeba odděleně modelovat objemovou (kulovou) a tvarovou (deviátorovou) složku deformace. Z tohoto důvodu sestávají konstitutivní modely ze dvou částí. Vliv změny objemu na energii napjatosti popisují nejčastěji třetím invariantem tenzoru gradientu deformace  $J$  a konstantou popisující objemovou změnu (objemový modul pružnosti nebo parametr nestlačitelnosti materiálu). Kromě pěnových gum je změna objemu malá oproti změně tvaru a většinou vystačíme s jejím lineárním popisem. Vliv tvarové změny se popisuje nejčastěji pomocí modifikovaných invariantů některého z tenzorů přetvoření. Modifikace má za cíl právě oddělení tvarové změny (deviátorové složky tenzoru) od změny objemové (kulová složka tenzoru). Některé předešlé i dále uvedené vztahy a tvrzení jsem čerpal z literatury (viz. [6]).

## ZÁKLADNÍ ROZDĚLENÍ HYPERELASTICKÝCH MATERIÁLŮ



*Pozn.1: Jestliže se pohybujeme v elastických deformacích, pak termíny měrná energie napjatosti i hustota deformační energie jsou totožné. Proto dále pro veličinu  $W$  budu používat termín HUSTOTA DEFORMAČNÍ ENERGIE.*

### 3.3.2 KONSTITUTIVNÍ MODELY HYPERELASTICKÝCH MATERIÁLŮ

**A) Izotropní nestlačitelné** – materiál má ve všech směrech stejné vlastnosti

- Neo-Hooke
- Mooney-Rivlin
- Polynomický
- Ogden
- Arruda-Boyce

**B) Anizotropní** – materiál nemá ve všech směrech stejné vlastnosti

- Holzapfel
- Polynomický
- Exponenciální (Fung)

Konstitutivní modely hyperelastických materiálů můžeme interpretovat buď jako fenomenologické (Ogden, Mooney-Rivlin), jenž aproximují experimentální data matematicky pomocí polynomů a exponenciálních funkcí, které neberou ohled na fyzikální podstatu materiálu, anebo jako nefenomenologické (Arruda-Boyce) nebo také strukturní, které v sobě již zahrnují fyzikální podstatu chování materiálu.

## A) Izotropní nestlačitelné

### 1) Model Neo-Hooke

V tomto modelu je hustota deformační energie dána vztahem:

$$W = \frac{G}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2 \quad (40)$$

S ohledem na to, že tvarová změna je u tohoto modelu popsána jedinou elastickou konstantou, je tento model použitelný do cca 50% přetvoření, kdy nelinearita není příliš výrazná. Tento konstitutivní model je „robustní“ vůči chybě způsobené absencí experimentálních dat.

### 2) Model Mooney-Rivlin

Tento konstitutivní model je modifikován ve více variantách a to 2, 3, 5 a 9 parametrický. Všechny varianty Mooney-Rivlinova modelu fungují na stejném principu, jen s tím rozdílem, že se mění počet materiálových parametrů. Pro názornost použiji k vysvětlení 2 parametrický Mooney-Rivlinův model.

V tomto modelu je hustota deformační energie dána vztahem:

$$W = c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{01}(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2 \quad (41)$$

Tento model je použitelný do cca 100% přetvoření, pokud křivka přetvoření-napětí nevykazuje inflexi.

Mooney-Rivlin 5 parametrický je použitelný i tehdy, když křivka přetvoření-napětí vykazuje inflexi.

Mooney-Rivlin 9 parametrický je použitelný i pro komplikované tvary křivek přetvoření-napětí.

### 3) Model Polynomický

Tento model je zobecněním modelů Mooney-Rivlin. V tomto modelu je hustota deformační energie dána vztahem:

$$W = \sum_{i+j=1}^N c_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{k=1}^M \frac{1}{d_k} (J - 1)^{2k} \quad (42)$$

Pro  $M=1$  a  $N= 1,2,3$  obdržíme jednotlivé modely Mooney-Rivlin. U těchto modelů je počáteční modul pružnosti ve smyku  $G = 2(c_{10} + c_{01})$ . (43)

### 4) Model Ogden

Tento konstitutivní model je schopen popsat deformace řádově až do 700 % přetvoření. Naproti tomu vyžaduje důsledné zadání experimentálních materiálových dat, tzn. jestliže nezadáme všechny potřebné experimentální zkoušky výsledky mohou být zkreslené, nevěrohodné. Tento konstitutivní model není tak „robustní“ vůči chybě způsobené absencí experimentálních dat. V tomto modelu je hustota deformační energie dána vztahem:

$$W = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_p} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_p} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_p} - 3) + \sum_{p=1}^N \frac{1}{d_p} (J - 1)^{2p} \quad (44)$$

Pro  $N= 1$  a  $\alpha_p = 2$  dostaneme model Neo-Hooke. U obecného Ogdenova modelu je počáteční modul pružnosti ve smyku  $G = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \alpha_p \cdot \mu_p$ . (45)

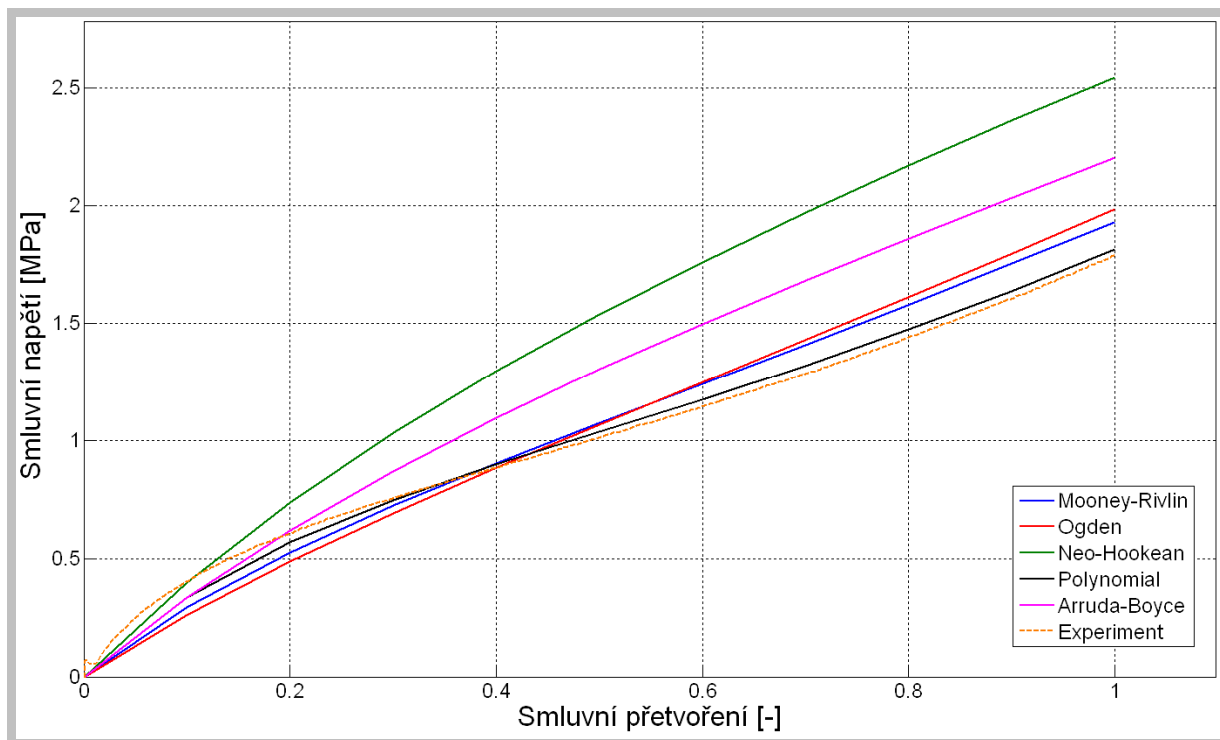
### 5) Model Arruda-Boyce

Všechny předchozí modely byly z hlediska popisu chování materiálu ryze fenomenologické. Naproti tomu model Arruda-Boyce vychází ze struktury materiálu a zavádí v hustotě deformační energie mezní protažení strukturálních řetězců  $\lambda_L$ .

$$W = G \left[ \frac{1}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{20\lambda_L^2} (\bar{I}_1^2 - 9) + \frac{11}{1050\lambda_L^4} (\bar{I}_1^3 - 27) + \frac{19}{7000\lambda_L^6} (\bar{I}_1^4 - 81) + \frac{519}{6737507000\lambda_L^8} (\bar{I}_1^5 - 243) \right] + \frac{1}{d} \left( \frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right)$$

..... (46)

Pro  $\lambda_L \rightarrow \infty$  dostaneme model Neo-Hooke.



**Obr. 3:** Porovnání konstitutivních modelů hyperelastického materiálu

Výše uvedená deformačně napěťová charakteristika (viz. **Obr. 3**) je výsledkem simulace zkoušky jednoosým tahem. V grafu (viz. **Obr. 3**) je znázorněna schopnost jednotlivých konstitutivních modelů, co nejlépe aproximovat naměřené experimentální výsledky.

## B) Anizotropní

Tyto modely jsou založeny na znalosti struktury materiálu, odvozené pro materiál izotropní hyperelastický. Dále tyto modely nerespektují stochastičnost, ale jsou popsány deterministicky. Vyjádřeny mohou být buď pomocí exponenciální funkce nebo polynomem.

### 1) Holzappel model

Holzappelův konstitutivní model materiálu obsahuje jednak izotropní složku hustoty deformační energie, která je totožná s Neo-Hookem a jednak anizotropní složku hustoty deformační energie, kde je konkrétně použita exponenciální funkce. Anizotropní složka hustoty deformační energie zde představuje mechanické vlastnosti a chování výstužných vláken.



V tomto modelu je hustota deformační energie dána vztahem:

$$W = W_{iso} + W_{aniso} = W_d + W_v + W_{aniso} \quad (47)$$

$$W = \frac{c}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2 + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \left( e^{k_2(\bar{I}_i - 1)^2} - 1 \right) \quad (48)$$

$$I_4 = C : A = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$I_6 = C : B = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin \beta \cos \beta & 0 \\ \sin \beta \cos \beta & \sin^2 \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

## 2) Polynomický model

Polynomický konstitutivní model materiálu taktéž obsahuje izotropní složku hustoty deformační energie, která je totožná s Neo-Hookem a dále také anizotropní složku hustoty deformační energie. Anizotropní složka  $W_{aniso}$  zde představuje chování výztužných vláken. Hustota deformační energie dána vztahem:

$$W = \frac{1}{d}(J - 1)^2 + \sum_{i=1}^3 a_i (\bar{I}_i - 3)^i + \sum_{j=1}^3 b_j (\bar{I}_j - 3)^j + \sum_{k=2}^6 c_k (\bar{I}_k - 1)^k + \sum_{l=2}^6 d_l (\bar{I}_l - 1)^l + \sum_{m=2}^6 e_m (\bar{I}_m - 1)^m + \sum_{n=2}^6 f_n (\bar{I}_n - 1)^n + \sum_{o=2}^6 g_o (\bar{I}_o - 1)^o \quad (51)$$

$a_i, b_j, c_k, d_l, e_m, f_n, g_o$  - jsou materiálové parametry

## 3.4 ZADÁVÁNÍ VLASTNOSTÍ HYPERELASTICKÝCH MATERIÁLŮ V SYSTÉMECH MKP

V současné době existují dva základní přístupy, jak zadávat vlastnosti hyperelastického materiálu do programových systémů MKP:

1) Prvním ze způsobů je zadání experimentálních závislostí napětí-přetvoření. Pomocí takto zadaných dat program vypočítá materiálové parametry námi zvoleného konstitutivního modelu. Výběr vhodného konstitutivního modelu je proveden na základě vizuálního porovnání experimentu a vypočtených křivek a také na základě vyčíslení celkové energetické chyby modelu (Residuum).

2) Druhým způsobem je přímé zadání elastických parametrů do předem zvoleného modelu.

Tento způsob lze však použít jen v těchto případech:

- Jestliže provádíme opakované výpočty s materiálem, jehož konstanty jsou již dříve známé
- Jestliže jsme konstanty modelu určili z experimentů jiným způsobem. Základem výpočtu konstant je obvykle metoda nejmenších čtverců, která hledá hodnoty konstant při minimalizaci kvadrátů odchylek. Při samostatném určování materiálových parametrů je možné použít sofistikovanější metody jejich určování, např. zvýraznění nebo potlačení některých částí deformačně napěťových křivek pomocí váhových koeficientů nebo změnou počtu zadávaných bodů experimentálních křivek.

### 3.4.1 ZÁKLADNÍ ZKOUŠKY PRO IDENTIFIKACI PARAMETRŮ HYPERELASTICKÝCH MODELŮ

V praxi jsou nejvíce užívanými zkouškami pro určení parametrů hyperelastických konstitutivních modelů tyto:

- **Zkouška jednoosým tahem** (v jednoosé tahové napjatosti)

Realizuje se na běžných zkušebních strojích pro tahovou zkoušku na plochých normalizovaných vzorcích ve tvaru oboustranné lopatky.

- **Zkouška ekvibiaxiální** (ve dvouosé rovnoměrné napjatosti)

Realizuje se na speciálních zkušebních strojích na plochých vzorcích kruhového nebo čtvercového tvaru.

- **Zkouška tahem při nulových příčných posuvech** (v rovinné deformaci)

Realizuje se na běžných zkušebních strojích pro tahovou zkoušku s použitím velmi širokých čelistí na plochých vzorcích obdélníkového tvaru s velmi malým poměrem délky ku šířce (cca 0,1).

- **Zkouška objemové stlačitelnosti** (v trojosé rovnoměrné napjatosti)

Realizuje se na běžných zkušebních strojích pro zkoušku tahem a tlakem na válcových

vzorcích (nejčastěji průměr 29mm, výška cca 13mm), vtlačovaných těsným pístem do ocelové komůrky stejného tvaru.

### 3.4.2 ZADÁVÁNÍ VÝSLEDKŮ ZKOUŠEK DO PROGRAMOVÝCH SYSTÉMŮ MKP

Téměř všechny nynější komerční programové systémy MKP standardně disponují softwarem pro identifikaci materiálových parametrů jednotlivých izotropních hyperelastických modelů z naměřených experimentálních křivek napětí-přetvoření. Při jejich zadávání je třeba mít na paměti následující:

- Rozsah zkoušek (extrémní velikost přetvoření) by měla splňovat mírný přesah očekávaného rozsahu přetvoření v řešeném výpočtovém modelu. Obvykle není předem znám, jedná se tedy o iterační proces, kdy v prvním kroku zadáme raději maximální změřený rozsah přetvoření a na základě výsledků jej poté upravujeme. Příliš velký rozsah modelu totiž významně snižuje jeho přesnost.
- Jestliže nejsou k dispozici výsledky výše uvedených čtyř základních zkoušek, je možné výpočtový model použít jen pro řešení takových problémů, při nichž se nevyskytnou typy deformačně-napěťových stavů, pro něž nebyly zadány experimentální křivky. V opačném případě mohou být výsledky zcela chybné, podobně jako když rozsah přetvoření při určitém typu napjatosti (např. při jednoosém tahu) přesáhne rozsah realizovaný při experimentu.

### 3.4.3 ZÁSADY PRÁCE S HYPERELASTICKÝMI MODELY V PROGRAMOVÝCH SYSTÉMECH MKP

- V prvním kroku musíme vždy důkladně prostudovat manuál programu, abychom zjistili použitý tvar funkce pro hustotu deformační energie a význam jednotlivých materiálových parametrů, což je důležité pro orientační kontrolu jejich hodnot.
- V druhém kroku zjistíme v jakých tenzorech napětí a přetvoření musíme zadávat experimentální hodnoty.
- Dále zjistíme, v jakých tenzorech napětí a přetvoření získáme konečné výsledky.

- Jestliže použijeme pro práci nový konstitutivní model, vždy nejprve provedeme simulaci základních zadaných zkoušek materiálu, abychom na úloze se známými výsledky eliminovali chybný postup při tvorbě a zadávání modelu.

### 3.5 DEFORMAČNĚ NAPĚŤOVÉ CHOVÁNÍ ELASTOMERŮ

Deformačně napěťové chování elastomerů (viz. [2]) závisí na jejich chemickém složení a vnitřní struktuře, která je podstatně ovlivněna podmínkami výrobního procesu. Výchozí surovinou je kaučuk (syntetický, přírodní), který je doplněn přísadami, jako jsou síra, oleje, kyseliny, akcelerátory, stabilizátory. Výsledná směs se doplňuje plnivý (saze), které dodají struktuře výstužnou a zpevňující funkci. Dále následuje poslední fáze vulkanizace, při níž za současného působení tlaku a teploty po určitou dobu dojde k vzájemnému chemickému sloučení molekulárních řetězců. Podmínky vulkanizace a složení vulkanizátu mají podstatný vliv na deformačně napěťové chování elastomeru. Z hlediska náhodné orientace vnitřní struktury lze z makromechanického hlediska považovat elastomery za izotropní materiál. Pryže se vyznačují několika podstatnými fenomény. Objemová nestlačitelnost, velké elastické deformace a nelineární deformačně napěťové chování, viskoelasticita, závislost na historii deformace, teplotní závislost, stárnutí.

#### 3.5.1 PORUŠOVÁNÍ SOUDRŽNOSTI ELASTOMERŮ A JEJICH ROZHRAŇÍ S JINÝMI MATERIÁLY

V důsledku specifické vnitřní struktury elastomerů se při jejich porušování soudržnosti uplatňují často jiné mikromechanismy, než jsou dnes známé u krystalických kovů. Jedná se o tyto mikromechanismy (viz. [2]):

- **Šíření trhlin** – hodnocení chování makroskopické trhliny pomocí nástrojů lomové m.
- **Kavitace** – elastická expanze a následný růst kavity infinitezimálních rozměrů

Oba procesy spolu do značné míry souvisí, neboť kavitace může iniciovat trhlínu. V dalším textu bude porušení elastomerů a jejich rozhraní s jinými materiály nazýváno *PODMÍŇKA KAVITACE* (viz. (54)).

### 3.5.2 KRITÉRIA PRO HODNOCENÍ PORUŠENÍ SOUDRŽNOSTI ELASTOMERŮ

$$\sigma_{uniax}^{crit} \leq 75 \cdot G - \text{jednoosá napjatost} \quad (52)$$

$$\sigma_{equibiax}^{crit} \leq 55 \cdot G - \text{dvouosá rovnoměrná napjatost} \quad (53)$$

$$\sigma_{triax}^{crit} \leq 2,5 \cdot G - \text{obecná trojosá napjatost} \quad (54)$$

## 3.6 LINEÁRNĚ ELASTICKÉ KOMPOZITY

Materiálové vlastnosti kompozitu závisí na materiálových vlastnostech složek, podílu jednotlivých složek a na geometrickém uspořádání. Toto vše je předem známo a cílem je určit mechanické charakteristiky kompozitního materiálu.

### 3.6.1 JEDNOSMĚROVÝ DLOUHOVLÁKNOVÝ KOMPOZIT – MECHANICKÉ VLASTNOSTI V PODÉLNÉM SMĚRU

Lineárně elastické dlouhovláknové kompozity mají několik mechanických vlastností, které je třeba uvést. Jedná se o tyto konkrétní vztahy, které jsou odvozeny na základě směšovacího pravidla, jenž platí pouze pro lineárně elastické kompozity a vychází z předpokladu, že přetvoření matrice a vláken v podélném směru jsou stejná (viz. [5]):

$$E_L = E_f v_f + E_m v_m = \sum E_i v_i \quad (55)$$

### 3.6.2 JEDNOSMĚROVÝ DLOUHOVLÁKNOVÝ KOMPOZIT – MECHANICKÉ VLASTNOSTI V PŘÍČNÉM SMĚRU

U kompozitu s příčnými vlákny jde o tyto konkrétní vztahy, které vychází z předpokladu, že napětí v matrici a ve vláknech v příčném směru jsou stejná (viz. [5]):

$$\varepsilon_C = \varepsilon_f v_f + \varepsilon_m v_m = \sum \varepsilon_i v_i \quad (56)$$

$$\frac{1}{E_T} = \frac{v_f}{E_f} + \frac{v_m}{E_m} = \sum \frac{v_i}{E_i} \quad (57)$$

$$\mu_{LT} = \mu_f v_f + \mu_m v_m = \sum \mu_i v_i \quad (58)$$

### 3.6.3 DEFINICE HOOKEOVA ZÁKONA PRO IZOTROPNÍ, ANIZOTROPNÍ A ORTOTROPNÍ MODEL MATERIÁLU

**Izotropie** je vlastnost, kterou se označuje nezávislost na směru. Naproti tomu **anizotropie** je vlastnost, kterou se označuje závislost určité veličiny na volbě směru. Speciálním případem anizotropie je **ortotropie**, kdy jsou materiálové osy totožné s osami geometrickými. Mechanické vlastnosti a chování izotropního, anizotropního a ortotropního modelu materiálu jsou popsány určitým počtem materiálových parametrů. Příslušné materiálové parametry jsou zapsány v matici  $[C]$ , která se nazývá matice elastických parametrů. Hookeův zákon pro model izotropního, anizotropního a ortotropního materiálu je dán vztahem:

$$\{\sigma\} = [C] \cdot \{\varepsilon\} \quad \text{Normální napětí v homogenním izotropním materiálu} \quad (59)$$

$$\{\tau\} = [C] \cdot \{\gamma\} \quad \text{Smykové napětí v homogenním izotropním materiálu} \quad (60)$$

Vztahy (viz. (59),(60)) se pro dané modely materiálu liší pouze maticí elastických parametrů  $[C]$ . To znamená, že pro popis vlastností a chování izotropního materiálu postačují 2 nezávislé materiálové parametry  $(E), (\mu)$ . Pro anizotropní model materiálu obsahuje matice  $[C]$  36 materiálových parametrů, ale díky tomu, že je matice  $[C]$  symetrická stačí pouze 21 parametrů k popisu chování a vlastností anizotropního modelu materiálu. Pro popis ortotropního modelu materiálu postačuje 9 materiálových parametrů, jenž jsou v matici  $[C]$  umístěny v prvním kvadrantu matice a na hlavní diagonále.

## 3.7 TECHNICKÉ KOMPOZITY S HYPERELASTICKOU MATRICÍ

V předchozí kapitole probraná teorie lineárně elastických vláknových kompozitů (viz. [5]) je založena na předpokladu velmi malých přetvoření ( $\varepsilon_i < 1\%$ ). V technické praxi se však používají i kompozitní materiály, u nichž některá složka (u vláknových kompozitů obvykle matrice), vykazuje velká elastická přetvoření. Typickým představitelem materiálů používaných pro matrice těchto kompozitů je pryž. Patří mezi elastomery, jak se obecně v technické praxi označují materiály podléhající velkým elastickým deformacím. Z pohledu konstitutivních vztahů se pro takové materiály používá název hyperelastické. V řadě aplikací, především při výrobě pneumatik a tlumících elementů, se používá pryž vyztužená vlákny.

Tato vlákna vytvářejí spolu s pryží vláknové kompozitní materiály, které vykazují určitou anizotropii. Zatímco u lineárně elastických kompozitů (tedy kompozitů splňujících předpoklad malých přetvoření) obvyklý rozdíl mezi elastickými parametry složek (nejčastěji skleněná nebo bórová vlákna v epoxidové matrici) činí jeden až dva řády, pro kompozity s elastomerovou matricí je typický mnohem větší rozdíl mezi elastickými parametry vláken a matrice; Youngův modul pružnosti vláken je obvykle o několik řádů vyšší než u matrice. V důsledku velkých přetvoření matrice je chování takových kompozitů výrazně nelineární a výpočtové metody pro určování vlastností kompozitu na základě vlastností jeho složek, nelze pro tyto materiály obecně použít. Dalším podstatným aspektem, který ještě není zvládnutý jsou výpočtové problémy spojené s homogenizací vlastností heterogenního materiálu, jímž kompozit je. Je velice důležité zdůraznit maximální obezřetnost při používání nejen všech běžně známých výpočtových vztahů, ale i intuice, protože i ta vychází z našich zkušeností s lineárně elastickými materiály (při malých deformacích) (viz. [7]).

## 4 REALIZACE PROCESU ŘEŠENÍ A ANALÝZA VÝSLEDKŮ

### SYSTEM PODSTATNÝCH VELIČIN

Pro úspěšné řešení problému je nezbytně nutné na řešené soustavě vytvořit systém podstatných veličin. Jestliže jsou zahrnuty nepodstatné veličiny do výpočtu, může dojít k nadměrnému prodloužení či velkému zkomplikování procesu řešení. Naproti tomu, dojde-li k opomenutí některých podstatných veličin, může být negativně ovlivněna věrohodnost výsledků.

*V následujícím textu platí: OBJEKT = ZKUŠEBNÍ VZOREK HYPERELASTICKÉHO  
KOMPOZITU*

#### **Okolí objektu:**

Objekt je podrobován mechanickým zkouškám v gravitačním poli země, ve vzdušné atmosféře, při teplotách  $20 \pm 3^\circ\text{C}$ . Při daných mechanických zkouškách je objekt vázán

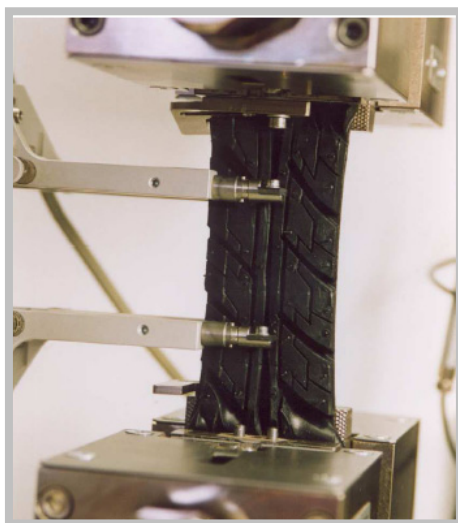
v zkušebním stroji. Objekt je v běžné praxi součástí složitějších technických soustav, jako je například pneumatika.

### **Geometrie a topologie objektu:**

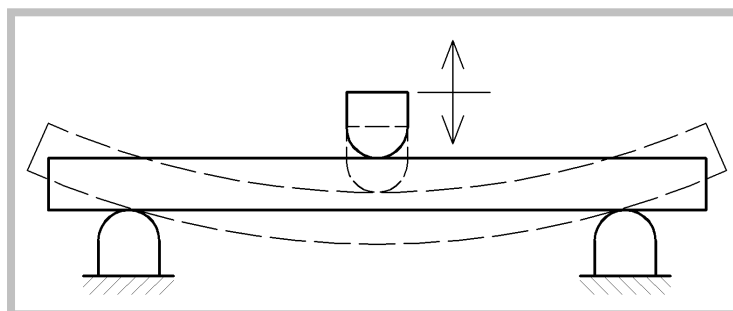
Geometrie objektu je známa, avšak pro rozdílné typy mechanických zkoušek jsou definovány jiné rozměry objektu. Pro zkoušku tahem (v jednoosé tahové napjatosti) má objekt rozměry 100x15x2.25, 100x10x2.25, 100x5x2.25. Tyto rozměry jsou navrženy tak, aby uprostřed vznikla homogenní napjatost, která je dále analyzována. Pro zkoušku ohybem má objekt rozměry 150x10x2.25, 100x10x2.25, 100x15x2.4. Všechny tyto rozměry byly prvotně navrženy při experimentu tak, aby se následně dala vyhodnotit věrohodně deformačně napěťová závislost u zkoušky jednoosým tahem a deformačně silová závislost u zkoušky ohybem.

### **Vazby objektu s okolím:**

Objekt je k okolí vázán dvěma způsoby a to podle typu mechanické zkoušky. U zkoušky jednoosým tahem je objekt upevněn v čelistech zkušebního trhačího stroje (viz. **Obr. 4**), kde jeden konec zůstává při zatěžování v klidu a druhý konec v čelistech vykonává pohyb vzhůru. U zkoušky trojbodovým ohybem (viz. **Obr. 5**) je objekt vázán k okolí tak, že jeho spodní strana je položena na dvou opěrných hrotech, které jsou pevně vázány a na horní stranu působí pohyblivý hrot, který vykonává pohyb směrem dolů proti opěrným hrotům.



**Obr. 4:** Zkouška tahem (viz. [8])



**Obr. 5:** Zkouška ohybem



### **Aktivace objektu:**

Při zkoušce jednoosým tahem je objekt aktivován deformačním posuvem, který je způsoben pohybem čelistí zkušebního trhačího stroje směrem vzhůru. Při druhé zkoušce, jedná se o zkoušku trojbodovým ohybem, je objekt aktivován silovým působením z jedné strany, které je vyvoláno pohybujícím se hrotem.

### **Ovlivnění objektu okolím:**

Ovlivnění objektu okolím může být způsobeno atmosférickými podmínkami a to ve smyslu různých druhů záření jako jsou sluneční, světlo zářivek. Záření se významnou měrou podílí na stárnutí pryže a tím způsobuje následně degradaci materiálu a zhoršení mechanických vlastností.

### **Vlastnosti objektu:**

Jelikož je zkoumaný objekt nehomogenním tělesem, složeným ze dvou velice odlišných materiálů, je zapotřebí popisovat mechanické vlastnosti a chování obou složek zvlášť. Objekt je složen z vláken a z matrice. Konkrétní rozměry objektu jsou uvedeny v odstavci geometrie a topologie objektu. Výztužná vlákna jsou vyrobena z oceli, na kterou jsou kladeny tyto požadavky. Vysoká pevnost a rozměrová stabilita, adheze ke gumové směsi, ohybová tuhost a rovnoměrné rozložení mezer mezi dráty. Matrice má elastomerovou strukturu, jedná se o pryž. Tento materiál se díky svým mechanickým vlastnostem nazývá hyperelastický. To znamená, že při zatěžování vykazuje velká elastická přetvoření, která se již pohybují v oblasti výrazně nelineárních deformačně napět'ových charakteristik. Popis vlastností materiálu matrice je popsán v kapitole (3.3).

### **Parametry popisující procesy a stavy do nichž se objekt dostane:**

Procesy, do nichž se objekt v průběhu zkoušek dostane, jsou velice složité předvídatelné, některé zatím neobjasněné, z tohoto důvodu se jimi nezabývám.

### **Projev a chování objektu:**

Projevem objektu jsou velká elastická přetvoření, která jsou odezvou na aktivaci objektu při daných vazbách na okolí. S jistotou mohu říci, že výpočty, které provádím, se pohybují pouze v oblasti elastických deformačně napět'ových charakteristik, jelikož dříve než by stačilo ocelové vlákno zplastizovat, došlo by k porušení pryže na rozhraní ocel – pryž.

## VOLBA METODY ŘEŠENÍ

Nejprve provádím řešení výpočtovým modelováním, kde část experimentálních hodnot slouží jako vstupní veličiny do výpočtového modelování čisté pryže a následně pak kompozitu s hyperelastickou maticí. V dalším kroku použiji k řešení experiment v tom smyslu, že další část experimentálních hodnot slouží k ověření správnosti výsledků z výpočtového modelování. Výpočtové modelování je realizováno pomocí metody konečných prvků (MKP) v systému Ansys. Experiment má vypovídací schopnost o reálných procesech probíhajících na objektu a tudíž slouží k ověření věrohodnosti výsledků výpočtového modelování.

## VÝBĚR SOFTWARE A HARDWARE

Pro řešení a tvorbu výpočtového modelu a pro vlastní výpočet byl použit konečnoprvkový systém **Ansys 11** od americké firmy Ansys Inc., který je dostupný na Ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky VUT FSI Brno. Pro zpracování a vyhodnocení dat byl dále použit matematický a simulační systém **Matlab**, který je dostupný tamtéž.

Hardware, na kterém byly výpočty realizovány, má tyto parametry:

- Intel Core 2 Duo
- CPU 2x 2,33 GHz
- RAM 2,0 GB
- HDD 350 GB

## 4.1 TESTOVACÍ ÚLOHY HYPERELASTICKÉHO MATERIÁLU

### 4.1.1 VSTUPNÍ ÚDAJE DO ŘEŠENÍ TESTOVACÍCH ÚLOH

Vstupními údaji do řešení testovacích úloh jsou experimentální data konkrétní pryže ze Zlína, tato pryž je dále používána jako surovina pro výrobu kompozitních částí pneumatik. Experimentální data jsem získal od Dr. Skácela jako soubory naměřených hodnot napětí a

přetvoření. Dále jsem je zpracoval tak, aby byla aplikovatelná pro výpočtové modelování. Konkrétním měřením experimentálních dat při tahových a ohybových zkouškách jsem se nezabýval, protože to není předmětem mé diplomové práce.

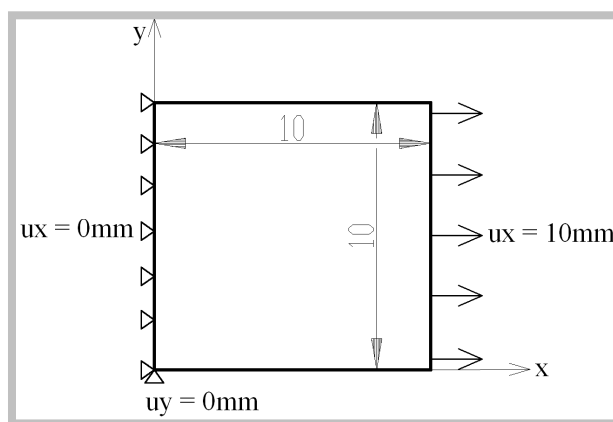
### **Motivace pro tvorbu testovacích úloh**

Všechny následující testovací úlohy jsou vytvořeny ze dvou důvodů. Prvním a nejpodstatnějším důvodem pro tvorbu testovacích úloh je výběr správného konstitutivního modelu materiálu, který by nejlépe aproximoval naměřená experimentální data s co možná nejmenší odchylkou. Tato byla ověřována vždy pro jeden náhodně zvolený bod deformačně napěťové křivky. Druhým důvodem je ověření schopností řešitele, orientovat se správně ve vyhodnocování výsledků hyperelastických materiálů.

Ve všech následujících testovacích úlohách je pro diskretizaci vzorku použit prvek PLANE 183 (kvadratický). Pro popis chování konkrétního hyperelastického materiálu je použit konstitutivní model OGDEN (2nd order).

#### **4.1.2 ZKOUŠKA JEDNOOSÝM TAHEM (UNIAXIÁLNÍ)**

Okrajové podmínky simulace jsou ekvivalentní skutečné tahové zkoušce (viz. **Obr. 6**). Aktivace vzorku při simulaci je provedena deformačním posuvem o jisté zvolené hodnotě tak, aby tato hodnota nepřekročila meze deformačně napěťové charakteristiky.



**Obr. 6:** Rozměry vzorku a okrajové podmínky pro zkoušku jednoosým tahem

Rozsah vstupní deformačně napět'ové křivky:  $\sigma_{SM} \in (0MPa;9MPa)$ ;  $\varepsilon_{SM} \in (0;2,2)$

Pro simulaci volím deformační posuv  $u_x = 10mm$  a tomu odpovídající hodnoty přetvoření a napětí z deformačně napět'ové křivky:  $\varepsilon_{SM} = 1$ ;  $\sigma_{SM} = 3,48MPa$ .

Abych mohl srovnávat výsledky, které získám z Ansysu s experimentem musím příslušné smluvní hodnoty odečtené z experimentálních dat přepočítat na skutečné hodnoty.

$$\lambda = \varepsilon_{SM} + 1 = 1 + 1 = 2 \quad (61)$$

$$\sigma_{SK} = \lambda \cdot \sigma_{SM} = 2 \cdot 3,48 = 6,96MPa \quad (62)$$

$$\varepsilon_{ln} = \ln \lambda = \ln 2 = 0,69 \quad (63)$$

Porovnání experimentálních výsledků s výsledky z Ansysu:

$$\text{Ansys:} \quad \varepsilon_{ln}^{Ansys} = 0,69 \quad (64)$$

$$\text{Experiment:} \quad \varepsilon_{ln}^{Experiment} = 0,69 \quad (65)$$

$$\text{Ansys:} \quad \sigma_{SK}^{Ansys} = 7,05Mpa \quad (66)$$

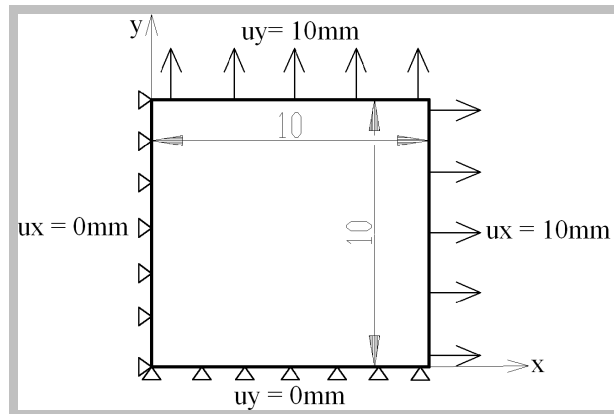
$$\text{Experiment:} \quad \sigma_{SK}^{Experiment} = 6,69Mpa \quad (67)$$

Pro posouzení odchylky  $\delta$  použitého konstitutivního modelu je zapotřebí provést porovnání skutečných napětí:

$$\delta = \frac{\sigma_{SK}^{Ansys} - \sigma_{SK}^{Experiment}}{\sigma_{SK}^{Experiment}} \cdot 100 = \frac{7,05 - 6,69}{6,69} \cdot 100 = 5,38\% \quad (68)$$

### 4.1.3 ZKOUŠKA DVOUOSÝM TAHEM (EQUIAXIÁLNÍ)

Zkouška dvouosým tahem má definované okrajové podmínky simulace (viz. **Obr. 7**). Aktivace vzorku při simulaci je provedena deformačním posuvem o jisté zvolené hodnotě tak, aby tato hodnota nepřekročila meze deformačně napět'ové charakteristiky.



**Obr. 7:** Rozměry vzorku a okrajové podmínky pro zkoušku dvouosým tahem

Rozsah vstupní deformačně napěťové křivky:  $\sigma_{SM} \in (0MPa;9MPa)$ ;  $\varepsilon_{SM} \in (0;2,2)$

Pro simulaci volím deformační posuv  $u_x = 10mm$ ,  $u_y = 10mm$  a tomu odpovídající hodnoty přetvoření a napětí z deformačně napěťové křivky:  $\varepsilon_{SM} = 1$ ;  $\sigma_{SM} = 6,15MPa$ .

Abych mohl srovnávat výsledky, které získám z Ansysu s experimentem musím příslušné smluvní hodnoty odečtené z experimentálních dat přepočítat na skutečné hodnoty.

$$\lambda = \varepsilon_{SM} + 1 = 1 + 1 = 2 \quad (69)$$

$$\sigma_{SK} = \lambda \cdot \sigma_{SM} = 2 \cdot 6,15 = 12,3MPa \quad (70)$$

$$\varepsilon_{ln} = \ln \lambda = \ln 2 = 0,69 \quad (71)$$

Porovnání experimentálních výsledků s výsledky z Ansysu:

$$\text{Ansys: } \varepsilon_{ln}^{Ansys} = 0,69 \quad (72)$$

$$\text{Experiment: } \varepsilon_{ln}^{Experiment} = 0,69 \quad (73)$$

$$\text{Ansys: } \sigma_{SK}^{Ansys} = 11,72Mpa \quad (74)$$

$$\text{Experiment: } \sigma_{SK}^{Experiment} = 12,3Mpa \quad (75)$$

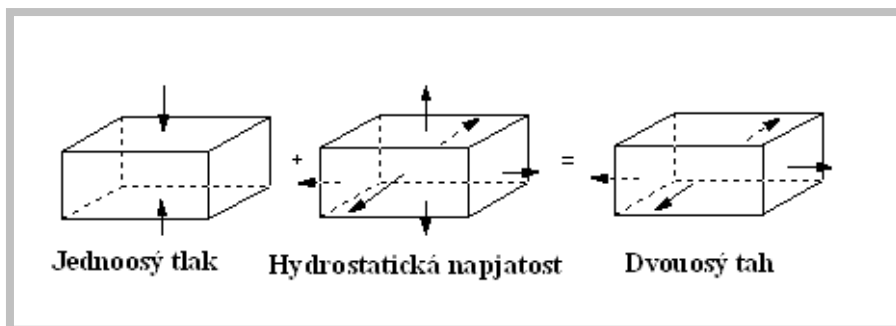
Pro posouzení odchylky  $\delta$  použitého konstitutivního modelu je zapotřebí provést porovnání skutečných napětí:

$$\delta = \frac{\sigma_{SK}^{Ansys} - \sigma_{SK}^{Experiment}}{\sigma_{SK}^{Experiment}} \cdot 100 = \frac{|11,72 - 12,3|}{12,3} \cdot 100 = 4,72\% \quad (76)$$

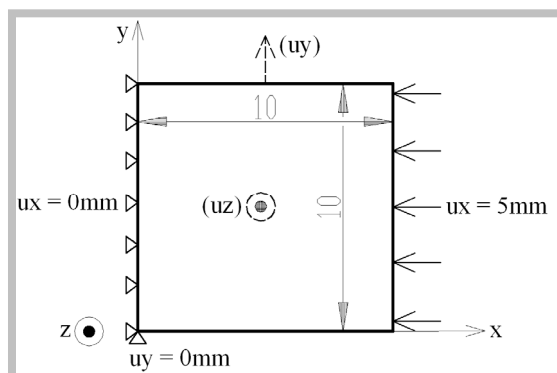
#### 4.1.4 ZKOUŠKA JEDNOOŠÝM TLAKEM

Zkouška jednoošým tlakem je již náročnější na výpočty veličin, které jsou zadávány do simulace a které z ní následně vystupují. Je velice důležité si uvědomit, že zkouška jednoošým tlakem je ekvivalentní zkoušce dvouošým tahem (equbiaxiální) (viz. **Obr. 8**), za podmínky nestlačitelnosti materiálu  $e = 0$ . Pak platí, že přidáme-li k jednoošé tlakové napjatosti napjatost hydrostatickou, výsledná deformace se nezmění. V Mohrově zobrazení to znamená, že vodorovné posunutí diagramu napjatosti (viz. **Obr. 12**) nemá vliv na diagram přetvoření. Z výše uvedených faktů vyplývá, že odchylka konstitutivního modelu při zkoušce jednoošým tlakem se musí rovnat odchylce konstitutivního modelu při zkoušce dvouošým tahem. Vzorek je při simulaci aktivován deformačním posuvem.

*Vysvětlení ekvivalence mezi zkouškou jednoošým tlakem a zkouškou dvouošým tahem:*



**Obr. 8:** Podstata ekvivalence mezi jednoošým tlakem a dvouošým tahem



**Obr. 9:** Rozměry vzorku a okrajové podmínky pro zkoušku jednoošým tlakem

U této úlohy není zpočátku výpočet stejný jako u předešlých dvou. I když se jedná o zkoušku jednoosým tlakem výsledné hodnoty z Ansysu se musí porovnávat s hodnotami z dvouosé tahové zkoušky, tento fakt umožňuje výše uvedená ekvivalence mezi jednotlivými zkouškami. V první řadě, si zvolím deformační posuv, tzn.  $u_x = 5\text{mm}$ . Následně si z podmínky nestlačitelnosti vyjádřím poměrné protažení  $\lambda_y = \lambda_z$ , tato protažení jsou stejná, jelikož uvažuji stejné posuvy v ose (y) i (z), ze kterých vypočítám  $\varepsilon_{SM}^y = \varepsilon_{SM}^z$ . Uvažujme dále jen  $\varepsilon_{SM}^y$ , pak toto přetvoření je smluvním přetvořením, které je obsaženo v experimentálních datech dvouosé tahové zkoušky. Tomuto smluvnímu přetvoření  $\varepsilon_{SM}^y$  náleží příslušné smluvní napětí  $\sigma_{SM}^y$ . Další postup je totožný s předešlými úlohami jen s tím rozdílem, že je zde ve smyslu chyby konstitutivního modelu vyhodnocováno smluvní napětí.

$$\varepsilon_{SM}^x = -0,5 \Rightarrow \lambda_x = 1 + \varepsilon_{SM}^x = 1 + (-0,5) = 0,5 \quad (77)$$

$$e = \lambda_x \lambda_y \lambda_z - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_x \lambda_y \lambda_z = 1 \quad (78)$$

$$\lambda_y = \lambda_z = \frac{1}{\sqrt{\lambda_x}} \Rightarrow \lambda_y = \frac{1}{\sqrt{\lambda_x}} = \frac{1}{\sqrt{0,5}} = 1,41 \quad (79)$$

$$\varepsilon_{SM}^y = \lambda_y - 1 = 1,41 - 1 = 0,41 \quad (80)$$

Z tohoto výsledku vyplývá, že pro  $\varepsilon_{SM}^y = 0,41$  je příslušné smluvní napětí z dvouosé tahové zkoušky  $\sigma_{SM}^y = 3,09\text{MPa} = \sigma_{SM}^{y \text{ Experiment}}$ .

#### Porovnání experimentálních výsledků s výsledky z Ansysu:

$$\text{Vycházím z předpokladu, že:} \quad -\sigma_{SK}^x = \sigma_{SK}^y \quad (81)$$

$$\text{Experiment:} \quad \varepsilon_{\ln}^{y \text{ Experiment}} = \ln \lambda_y = \ln 1,41 = 0,34 \quad (82)$$

$$\text{Ansys:} \quad \sigma_{SK}^{y \text{ Ansys}} = 5,45\text{MPa} \quad (83)$$

Z  $\sigma_{SK}^{y \text{ Ansys}}$  dále vypočítám napětí  $\sigma_{SM}^{y \text{ Ansys}}$ , které použiji pro výpočet chyby konstitutivního

$$\text{modelu:} \quad \sigma_{SM}^{y \text{ Ansys}} = \frac{\sigma_{SK}^{y \text{ Ansys}}}{\lambda_y} = \frac{5,45}{1,41} = 3,87\text{MPa} \quad (84)$$

Odchylka použitého konstitutivního modelu je:

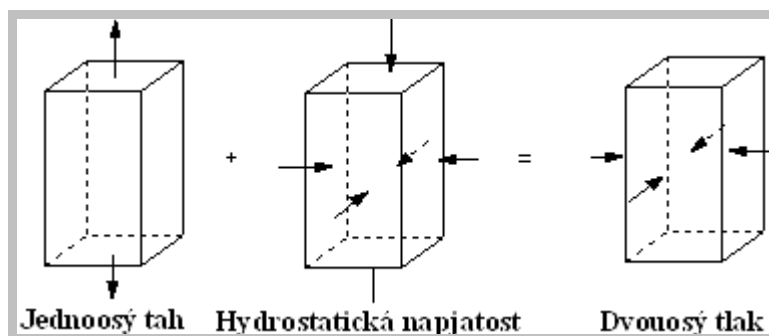
$$\delta = \frac{\sigma_{SM}^{y \text{ Ansys}} - \sigma_{SM}^{y \text{ Experiment}}}{\sigma_{SM}^{y \text{ Experiment}}} \cdot 100 = \frac{3,87 - 3,09}{3,09} \cdot 100 = 25,24\% \quad (85)$$

Tato relativně větší odchylka konstitutivního modelu je v pořádku, jelikož zvolené přetvoření bylo definované v místě, kde jsou experimentální data hůře aproximována křivkou daného konstitutivního modelu. Například pro přetvoření=1 by tato chyba byla řádově menší, protože je zde výrazně lepší aproximace křivkou konstitutivního modelu s experimentálními daty.

#### 4.1.5 ZKOUŠKA DVOUOSÝM TLAKEM

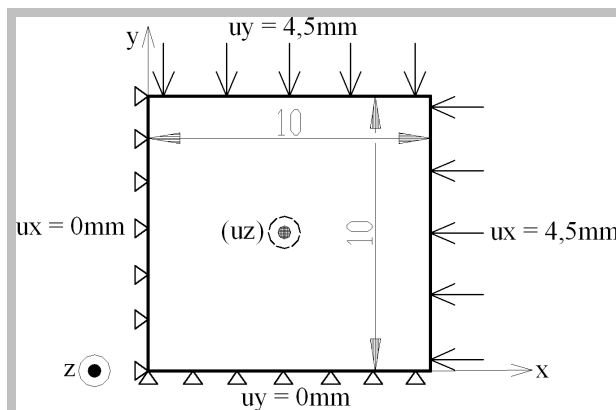
Zkouška dvouosým tlakem je principem řešení velice podobná zkoušce jednoosým tlakem jen s tím rozdílem, že zde platí jiná ekvivalence mezi zkouškami pro vyhodnocení odchylky daného konstitutivního modelu. Konkrétně to znamená, že zkouška dvouosým tlakem je ekvivalentní zkoušce jednoosým tahem. Z výše uvedeného vyplývá, že pro vyhodnocení odchylky konstitutivního modelu budou po příslušných přepočtech použity hodnoty napětí a přetvoření z jednoosé tahové zkoušky. Zde také platí, že se při výpočtu vychází z podmínky nestlačitelnosti materiálu  $e = 0$ . Tento předpoklad slouží k přepočtu poměrného protažení z dvouosé tlakové zkoušky na zkoušku jednoosou tahovou. Dále platí, že odchylka konstitutivního modelu při zkoušce dvouosým tlakem se rovná odchylce konstitutivního modelu při zkoušce jednoosým tahem. Vzorek je při simulaci aktivován deformačním posuvem.

***Vysvětlení ekvivalence mezi zkouškou dvouosým tlakem a zkouškou jednoosým tahem:***



**Obr. 10:** Podstata ekvivalence mezi dvouosým tlakem a jednoosým tahem





**Obr. 11:** Rozměry vzorku a okrajové podmínky  
pro zkoušku dvouosým tlakem

I přesto, že se jedná o zkoušku dvouosým tlakem, výsledné hodnoty z Ansysu se musí porovnávat s hodnotami z jednoosé tahové zkoušky, tento fakt umožňuje výše uvedená ekvivalence mezi jednotlivými zkouškami (viz. **Obr. 10**). V první řadě, si zvolím deformační posuv, tzn.  $u_x = 4,5\text{mm}$ ;  $u_y = 4,5\text{mm}$ .

Následující postup výpočtu je totožný s výpočty pro jednoosou tlakovou zkoušku, s tím rozdílem, že místo  $\lambda_y$ , vyjadřují  $\lambda_z$  a z toho další příslušné hodnoty:

$$\lambda_x = \lambda_y \quad (86)$$

$$e = \lambda_x \lambda_y \lambda_z - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_x \lambda_y \lambda_z = 1 \quad (87)$$

$$\varepsilon_{SM}^x = -0,45 \Rightarrow \lambda_x = 1 + \varepsilon_{SM}^x = 1 + (-0,45) = 0,55 \quad (88)$$

$$\lambda_z = \frac{1}{\lambda_x^2} = \frac{1}{0,55^2} = 3,31 \quad (89)$$

$$\varepsilon_{SM}^z = \lambda_z - 1 = 3,31 - 1 = 2,31 \quad (90)$$

Z tohoto výsledku vyplývá, že pro přetvoření jednoosé tahové zkoušky  $\varepsilon_{SM}^z = 2,31$  je příslušné smluvní napětí ze zkoušky jednoosým tahem  $\sigma_{SM}^z = 10,42\text{MPa} = \sigma_{SM}^z \text{Experiment}$ .

Porovnání experimentálních výsledků s výsledky z Ansysu:

$$\text{Vycházím z předpokladu, že:} \quad -\sigma_{SK}^x = \sigma_{SK}^z \quad (91)$$

$$\text{Ansys:} \quad \varepsilon_{\ln}^x \text{ Ansys} = -0,59 \quad (92)$$

$$\text{Experiment:} \quad \varepsilon_{\ln}^x \text{ Experiment} = \ln \lambda_x = \ln 0,55 = -0,59 \quad (93)$$

$$\text{Ansys:} \quad \sigma_{SK}^z \text{ Ansys} = 36,63 \text{ MPa} \quad (94)$$

Z  $\sigma_{SK}^z \text{ Ansys}$  dále vypočítám napětí  $\sigma_{SM}^z \text{ Ansys}$ , které použiji pro výpočet odchylky konstitutivního

$$\text{modelu:} \quad \sigma_{SM}^z \text{ Ansys} = \frac{\sigma_{SK}^z \text{ Ansys}}{\lambda_z} = \frac{36,63}{3,31} = 11,07 \text{ MPa} \quad (95)$$

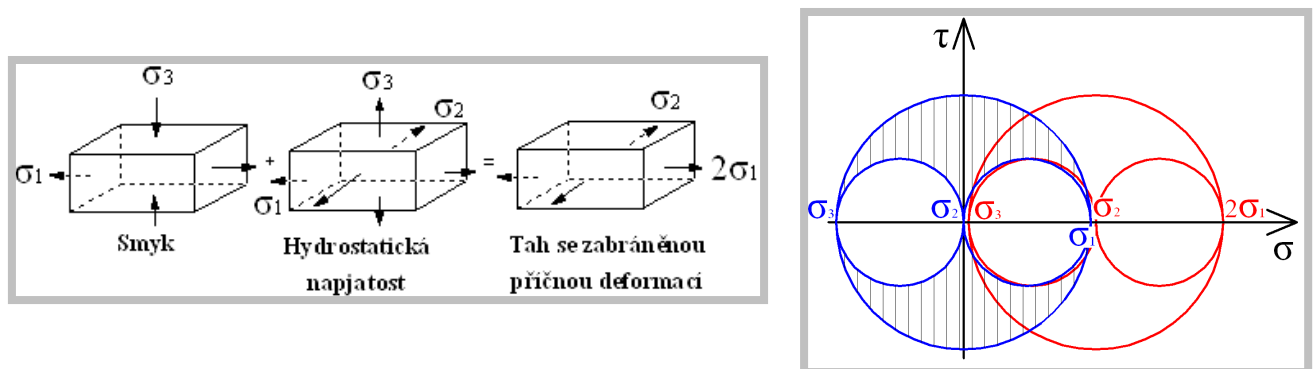
Odchylka použitého konstitutivního modelu je:

$$\delta = \frac{\sigma_{SM}^z \text{ Ansys} - \sigma_{SM}^z \text{ Experiment}}{\sigma_{SM}^z \text{ Experiment}} \cdot 100 = \frac{11,07 - 10,42}{10,42} \cdot 100 = 6,23\% \quad (96)$$

#### 4.1.6 ZKOUŠKA JEDNOOSÝM TAHEM V ŠIROKÝCH ČELISTECH SE ZABRÁNĚNO PŘÍČNOU DEFORMACÍ

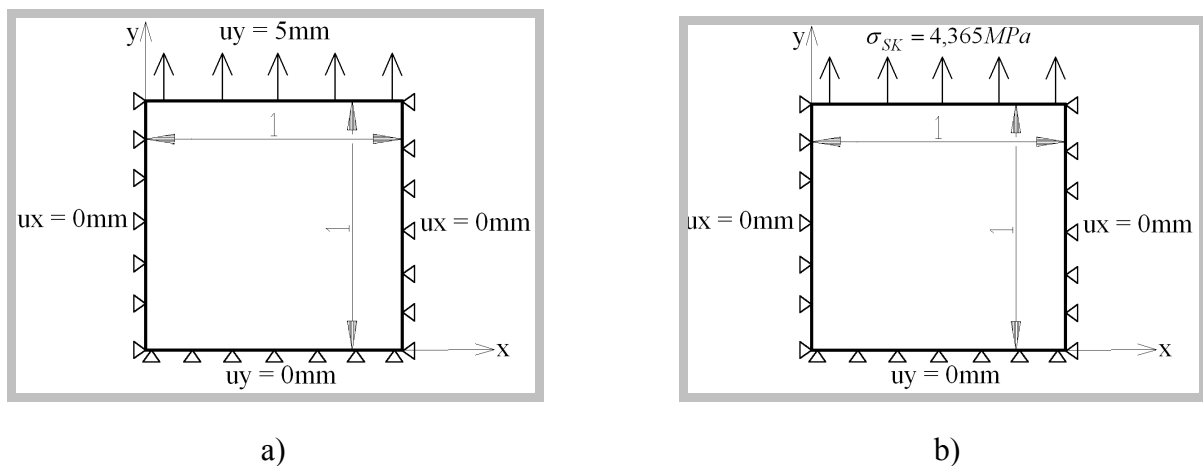
Tato zkouška je ekvivalentní ke zkoušce prostým smykem. Díky této ekvivalenci je možné provádět zkoušku jednoosým tahem se zabráněnou příčnou deformací. To je velice důležitý fakt, jelikož jsme reálně schopni udělat zkoušku jednoosým tahem se zabráněnou příčnou deformací přímo na trhacím zkušebním stroji, naproti tomu je velice obtížné provést zkoušku prostým smykem. Vzorek je při simulaci aktivován v první simulaci deformačním posuvem (viz. **Obr. 13 a**) a v další simulace silově (viz. **Obr. 13 b**). Toto je provedeno, aby bylo názorně vidět jaký vliv na odchylku konstitutivního modelu má buď deformační, nebo silové zatížení. Tato skutečnost bude vysvětlena v kapitole (4.1.9).

*Vysvětlení ekvivalence mezi zkouškou jednoosým tahem se zabráněnou příčnou deformací a zkouškou prostým smykem (pure shear) (viz. Obr. 12),:*



*Obr. 12: Podstata ekvivalence smykové zkoušky*

Jak je patrné z obrázku (viz. **Obr. 12**), jediný rozdíl mezi zkouškami je v posunutí Mohrovy kružnice napjatosti směrem doprava o hodnotu  $\sigma_1$  respektive  $\tau$ .



*Obr. 13: obr.13 a) O.P. pro zatížení deformačním posuvem, obr.13 b) O.P. pro zatížení skutečným napětím v ose y*

### a) Deformační varianta

Pro simulaci volím deformační posuv  $u_x = 5\text{mm}$  a tomu odpovídající hodnoty přetvoření a napětí z deformačně napěťové křivky:  $\varepsilon_{SM} = 0,5$ ;  $\sigma_{SM} = 2,91\text{MPa}$ .

Přepočítání smluvních hodnot na hodnoty skutečné:

$$\lambda = \varepsilon_{SM} + 1 = 0,5 + 1 = 1,5 \quad (97)$$

$$\sigma_{SK} = \lambda \cdot \sigma_{SM} = 1,5 \cdot 2,91 = 4,365 \text{MPa} \quad (98)$$

$$\varepsilon_{\ln} = \ln \lambda = \ln 1,5 = 0,41 \quad (99)$$

Porovnání experimentálních výsledků s výsledky z Ansysu:

$$\text{Ansys: } \varepsilon_{\ln}^{Ansys} = 0,41 \quad (100)$$

$$\text{Experiment: } \varepsilon_{\ln}^{Experiment} = 0,41 \quad (101)$$

$$\text{Ansys: } \sigma_{SK}^{Ansys} = 4,48 \text{Mpa} \quad (102)$$

$$\text{Experiment: } \sigma_{SK}^{Experiment} = 4,365 \text{Mpa} \quad (103)$$

Odchylka použitého konstitutivního modelu je:

$$\delta = \frac{\sigma_{SK}^{Ansys} - \sigma_{SK}^{Experiment}}{\sigma_{SK}^{Experiment}} \cdot 100 = \frac{4,48 - 4,365}{4,365} \cdot 100 = 2,43\% \quad (104)$$

### **b) Silová varianta**

Pro simulaci vyšlo ze smluvního napětí velikost skutečného napětí  $\sigma_{SK} = 4,365 \text{MPa}$ .  
Hodnoty smluvního napětí a přetvoření jsou totožné s deformační variantou.

Přepočítání smluvních hodnot na hodnoty skutečné:

$$\lambda = \varepsilon_{SM} + 1 = 0,5 + 1 = 1,5 \quad (105)$$

$$\varepsilon_{\ln} = \ln \lambda = \ln 1,5 = 0,41 \quad (106)$$

Porovnání experimentálních výsledků s výsledky z Ansysu:

$$\text{Ansys: } \varepsilon_{\ln}^{Ansys} = 0,69 \quad (107)$$

$$\text{Experiment: } \varepsilon_{\ln}^{Experiment} = 0,41 \quad (108)$$

$$\text{Ansys: } \sigma_{SK}^{Ansys} = 4,365 \text{Mpa} \quad (109)$$

$$\text{Experiment: } \sigma_{SK}^{Experiment} = 4,365 \text{Mpa} \quad (110)$$

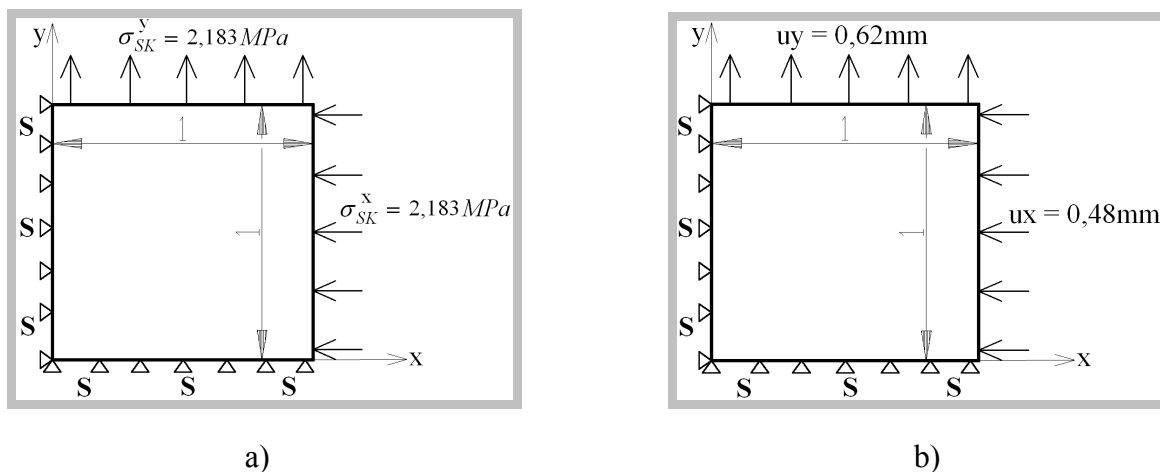
Pro posouzení odchylky  $\delta$  použitého konstitutivního modelu je zapotřebí provést porovnání skutečných přetvoření:

$$\delta = \frac{\varepsilon_{ln}^{Ansys} - \varepsilon_{ln}^{Experiment}}{\varepsilon_{ln}^{Experiment}} \cdot 100 = \frac{0,69 - 0,41}{0,41} \cdot 100 = 68,29\% \quad (111)$$

Tato relativně velká odchylka je naprosto v pořádku. Jak je tato odchylka způsobena a proč je korektní, bude vysvětleno v kapitole (4.1.9).

#### 4.1.7 ZKOUŠKA PROSTÝM SMYKEM (PURE SHEAR)

U zkoušky prostým smykem se aktivuje zkušební vzorek taktéž silově nebo deformačně. Silové zatížení je realizováno skutečným napětím, avšak polovičním než u zkoušky jednoosým tahem se zabráněnou příčnou deformací. Tato skutečnost vyplývá z Mohrovy kružnice napjatosti (viz. **Obr. 12**). Definování deformačního zatížení již není tak triviální. Z Ansysu (silového zatížení) nejprve odečtu hodnotu  $\varepsilon_{ln}^{x, Ansys}$ , ze které následně vypočítám  $\varepsilon_{SM}^x$ . Z tohoto přetvoření vyplývá příslušný deformační posuv, kterým budu zatěžovat v ose (x),  $u_x = -0,48\text{mm}$ . Stejným způsobem se vypočítá  $u_y = 0,62\text{mm}$ .



**Obr. 14:** obr.14 a) O.P. zatížení skutečným napětím, obr.14 b) O.P. zatížení posuvem

##### a) Silová varianta

Pro simulaci zkoušky jednoosým tahem se zabráněnými příčnými posuvy vyšlo ze smluvního napětí velikost skutečného napětí  $\sigma_{SK} = 4,365\text{MPa}$ . Avšak jak je patrné

z Mohrovy kružnice napjatosti (viz. **Obr. 12**), musím pro zkoušku prostým smykem použít zatížení poloviční, skutečné napětí  $\sigma_{SK} = 2,183MPa$ ;  $\varepsilon_{SM}^y = 0,5$ .

Přepočítání smluvních hodnot na hodnoty skutečné:

$$\lambda_y = \varepsilon_{SM}^y + 1 = 0,5 + 1 = 1,5 \quad (112)$$

$$\sigma_{SK}^y = \frac{4,365}{2} = 2,183MPa = \sigma_{SK}^{y \text{ Experiment}} \quad (113)$$

$$\varepsilon_{ln}^{y \text{ Experiment}} = \ln \lambda_y = \ln 1,5 = 0,41 \quad (114)$$

Porovnání experimentálních výsledků s výsledky z Ansysu:

$$\text{Ansys: } \varepsilon_{ln}^{y \text{ Ansys}} = 0,49 \quad (115)$$

$$\text{Experiment: } \varepsilon_{ln}^{y \text{ Experiment}} = 0,41 \quad (116)$$

$$\text{Experiment: } \sigma_{SK}^{y \text{ Experiment}} = 2,183MPa \quad (117)$$

Pro posouzení odchylky  $\delta$  použitého konstitutivního modelu je zapotřebí provést porovnání skutečných přetvoření:

$$\delta = \frac{\varepsilon_{ln}^{y \text{ Ansys}} - \varepsilon_{ln}^{y \text{ Experiment}}}{\varepsilon_{ln}^{y \text{ Experiment}}} \cdot 100 = \frac{0,49 - 0,41}{0,41} \cdot 100 = 19,51\% \quad (118)$$

Tato relativně velká odchylka je naprosto v pořádku. Jak je tato odchylka způsobena a proč je korektní, bude vysvětleno v kapitole (4.1.9).

## b) Deformační varianta

V této deformační variantě si již nemohu libovolně volit obě hodnoty deformačního posuvu dle rozsahu napětí-přetvoření, ale musím je vypočítat ze skutečných přetvoření, kterých vzorek při daných vstupních napětích dosahuje. Tyto hodnoty napětí jsou známé ze silové varianty.

Výpočet deformačních posuvů:

$$\sigma_{SK}^y = \frac{4,365}{2} = 2,183MPa = \sigma_{SK}^{y \text{ Experiment}} \quad (119)$$

$$\varepsilon_{\ln}^x{}^{Ansys} = 0,389 \Rightarrow \lambda_x = e^{0,389} = 1,48 \Rightarrow \varepsilon_{SM}^x = \lambda_x - 1 = 1,48 - 1 = 0,48 \quad (120)$$

$$\varepsilon_{SM}^x = \frac{ux}{1} \Rightarrow ux = \varepsilon_{SM}^x \cdot 1 = 0,48 \cdot 1 = 0,48 \text{ mm} \quad (121)$$

$$\varepsilon_{\ln}^y{}^{Ansys} = 0,485 \Rightarrow \lambda_y = e^{0,485} = 1,62 \Rightarrow \varepsilon_{SM}^y = \lambda_y - 1 = 1,62 - 1 = 0,62 \quad (122)$$

$$\varepsilon_{SM}^y = \frac{uy}{1} \Rightarrow uy = \varepsilon_{SM}^y \cdot 1 = 0,62 \cdot 1 = 0,62 \text{ mm} \quad (123)$$

Porovnání experimentálních výsledků s výsledky z Ansysu:

$$\text{Ansys:} \quad \sigma_{SK}^y{}^{Ansys} = 2,132 \text{ MPa} \quad (124)$$

$$\text{Experiment:} \quad \sigma_{SK}^y{}^{Experiment} = 2,183 \text{ MPa} \quad (125)$$

Pro posouzení odchylky  $\delta$  použitého konstitutivního modelu je zapotřebí provést porovnání skutečných napětí:

$$\delta = \frac{\left| \sigma_{SK}^y{}^{Ansys} - \sigma_{SK}^y{}^{Experiment} \right|}{\sigma_{SK}^y{}^{Experiment}} \cdot 100 = \frac{|2,132 - 2,183|}{2,183} \cdot 100 = 2,34\% \quad (126)$$

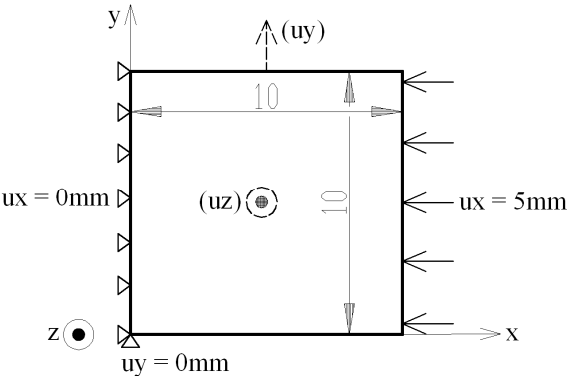
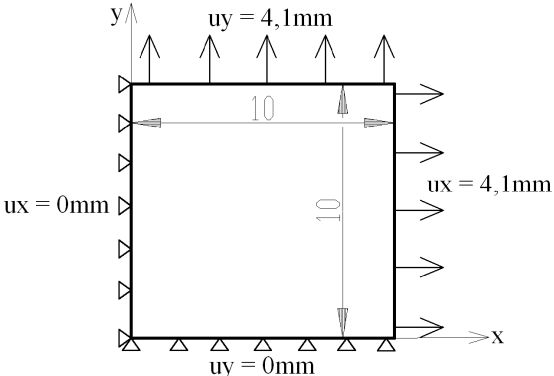
## 4.1.8 VZÁJEMNÉ POROVNÁNÍ PŘÍSLUŠNÝCH ZKOUŠEK

### 4.1.8.1 Porovnání odchylky zkoušky jednoosým tlakem a dvouosým tahem

V předešlých kapitolách (4.1.4, 4.1.5) byly odchylky daných konstitutivních modelů počítány pomocí ekvivalence mezi příslušnými zkouškami. V této kapitole bude provedeno srovnání odchylek mezi zkouškou jednoosým tlakem a zkouškou dvouosým tahem (equibiaxiální) a dále mezi zkouškou dvouosým tlakem a zkouškou jednoosým tahem (uniaxiální). Jelikož mezi těmito zkouškami platí ekvivalence, měly by být odchylky konstitutivních modelů stejné.

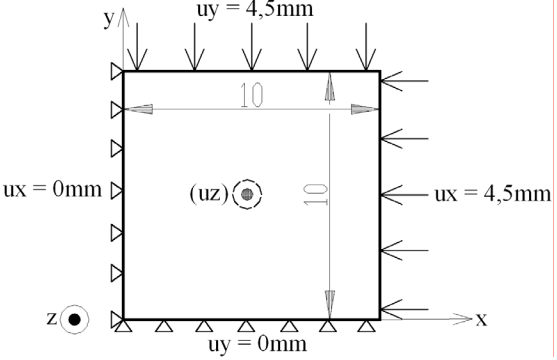
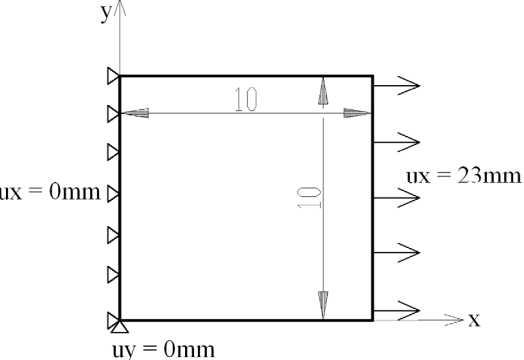
Postup při řešení ověřování správnosti ekvivalence mezi příslušnými zkouškami je následující. Jelikož víme, že pro vyhodnocení odchylky konstitutivního modelu při zkoušce jednoosým tlakem je zapotřebí přepočítané výsledky z této simulace porovnávat s experimentálními hodnotami ze zkoušky dvouosým tahem. To znamená, že ze zkoušky

jednoosým tlakem zjistím hodnotu skutečného napětí, které dále přepočítám na smluvní napětí. V experimentálních datech zkoušky dvouosým tahem k tomuto vypočtenému smluvnímu napětí přiřadím příslušné smluvní přetvoření. Pak již mohu vypočítat hodnotu deformačního posuvu, kterou budu zatěžovat příslušný vzorek pro zkoušku dvouosým tahem. V tomto případě jde o  $u_x = 4,1\text{mm}$ ;  $u_y = 4,1\text{mm}$ . Po zatížení tímto deformačním posuvem odečtu z Ansysu stejnou hodnotu skutečného napětí jako u Zkoušky jednoosým tlakem. To znamená, že odchylky konstitutivních modelů budou téměř stejné.

<p style="text-align: center;"><u>Zkouška jednoosým tlakem</u></p> 	<p style="text-align: center;"><u>Zkouška dvouosým tahem</u></p> 
<p><b>Obr. 15:</b> Rozměry vzorku a okrajové podmínky <b>TLAK</b></p> <p>Výpočet odchylky konstitutivního modelu:</p> $\sigma_{SM}^{y \text{ Experiment}} = 3,09\text{MPa} \quad (127)$ $\sigma_{SM}^{y \text{ Ansys}} = 3,87\text{MPa} \quad (128)$ $\delta = \frac{\sigma_{SM}^{y \text{ Ansys}} - \sigma_{SM}^{y \text{ Experiment}}}{\sigma_{SM}^{y \text{ Experiment}}} \cdot 100 =$ $= \frac{3,87 - 3,09}{3,09} \cdot 100 = 25,24\% \quad (129)$	<p><b>Obr. 16:</b> Rozměry vzorku a okrajové podmínky <b>EQUIBIAXIAL</b></p> <p>Výpočet odchylky konstitutivního modelu:</p> $\sigma_{SK}^{y \text{ Experiment}} = 4,365\text{MPa} \quad (130)$ $\sigma_{SK}^{y \text{ Ansys}} = 5,384\text{MPa} \quad (131)$ $\delta = \frac{\sigma_{SK}^{y \text{ Ansys}} - \sigma_{SK}^{y \text{ Experiment}}}{\sigma_{SK}^{y \text{ Experiment}}} \cdot 100 =$ $= \frac{5,384 - 4,365}{4,365} \cdot 100 = 23,34\% \quad (132)$



#### 4.1.8.2 Porovnání odchylky zkoušky dvouosým tlakem a jednoosým tahem

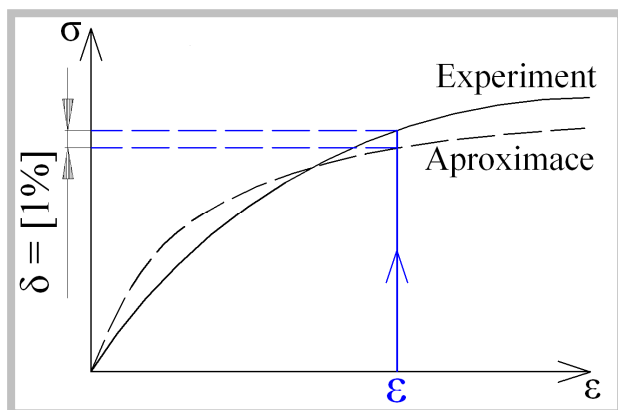
<p style="text-align: center;"><u>Zkouška dvouosým tlakem</u></p> 	<p style="text-align: center;"><u>Zkouška jednoosým tahem</u></p> 
<p><b>Obr. 17:</b> Rozměry vzorku a okrajové podmínky DVOUOSÝ TLAK</p>	<p><b>Obr. 18:</b> Rozměry vzorku a okrajové podmínky UNIAXIAL</p>
<p>Výpočet odchylky konstitutivního modelu:</p> $\sigma_{SM}^z \text{ Experiment} = 10,42 \text{ MPa} \quad (133)$ $\sigma_{SM}^z \text{ Ansys} = 11,07 \text{ MPa} \quad (134)$ $\delta = \frac{\sigma_{SM}^z \text{ Ansys} - \sigma_{SM}^z \text{ Experiment}}{\sigma_{SM}^z \text{ Experiment}} \cdot 100 =$ $= \frac{11,07 - 10,42}{10,42} \cdot 100 = 6,23\% \quad (135)$	<p>Výpočet odchylky konstitutivního modelu:</p> $\sigma_{SK} \text{ Experiment} = 34,43 \text{ MPa} \quad (136)$ $\sigma_{SK} \text{ Ansys} = 36,72 \text{ MPa} \quad (137)$ $\delta = \frac{\sigma_{SK} \text{ Ansys} - \sigma_{SK} \text{ Experiment}}{\sigma_{SK} \text{ Experiment}} \cdot 100 =$ $= \frac{36,72 - 34,43}{34,43} \cdot 100 = 6,65\% \quad (138)$

Postup při řešení ověřování správnosti ekvivalence mezi příslušnými zkouškami je shodný s 4.1.8.1.

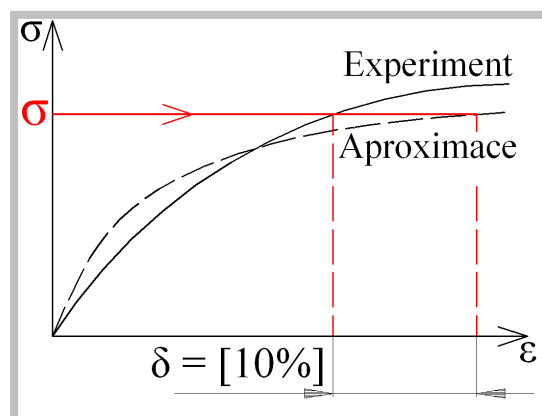
Rozdíly odchylek konstitutivních modelů příslušných zkoušek jsou s největší pravděpodobností způsobeny parametrem nestlačitelnosti materiálu  $d = K/2$ .

#### 4.1.9 VLIV ZPŮSOBU ZATĚŽOVÁNÍ NA ODCHYLKU KONSTITUTIVNÍHO MODELU

V důsledku klesajícího sklonu deformačně napěťové křivky bylo v předešlých kapitolách z výsledků odchylek konstitutivních modelů patrné, že velice výrazně záleží na tom, jak provádíme zatížení daného vzorku. Jestliže jde o deformační zatížení, pak odchylka experimentu od aproximace dané experimentální křivky příslušným konstitutivním modelem je relativně velmi malá (viz. **Obr. 19**). Naproti tomu silové zatížení způsobuje relativně velké odchylky experimentu od aproximace experimentální křivky příslušným konstitutivním modelem (viz. **Obr. 20**).



**Obr. 19:** Deformační zatěžování



**Obr. 20:** Silové zatěžování

#### 4.2 TVORBA VÝPOČTOVÉHO MODELU

Tato kapitola se zabývá tvorbou výpočtových modelů zkušebních těles ve tvaru kvádrů z kompozitů s hyperelastickou maticí a namodelovanými ocelovými vlákny, pro různá uspořádání vláken a jejich využitím při simulaci zkoušky tahem a ohybem. Dále si klade za cíl vytvořit takový výpočtový model zkušebního vzorku hyperelastického kompozitu, který by věrohodně popisoval skutečnost, to znamená, aby došlo k co možná

nejpřesnější shodě silově – deformačních charakteristik výpočtového modelu a experimentu. Mezi další velmi podstatné požadavky kladené na výpočtový model zkušební vzorku hyperelastického kompozitu patří také:

- Optimální diskretizace výpočtového modelu
- Krátký výpočtový čas
- Dobrá konvergence
- Možnost simulace různých charakterů zatěžování

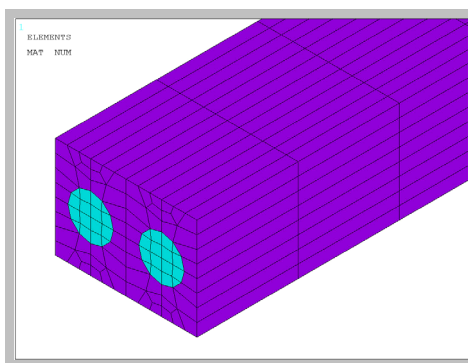
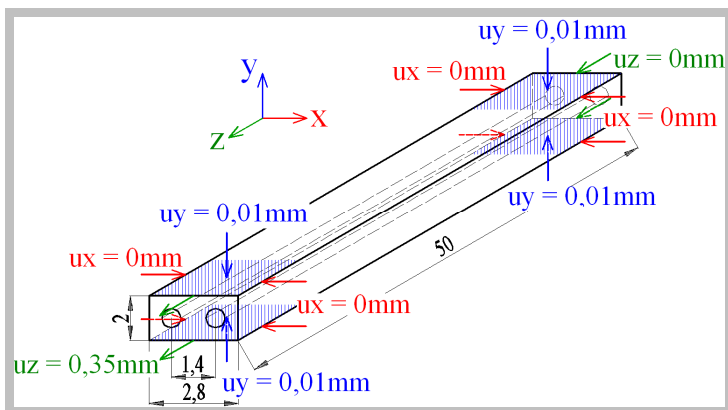
#### 4.2.1 VSTUPNÍ ÚDAJE DO PROCESU TVORBY VÝPOČTOVÉHO MODELU

Jelikož se jedná o výpočtové modelování nehomogenního tělesa, kterým je zkušební vzorek hyperelastického kompozitu, je nutné popsat zvlášť materiálové parametry hyperelastické matrice a zvlášť materiálové parametry ocelového vlákna. Hyperelastická matrice je zohledněna Ogdenovým konstitutivním modelem materiálu který má 5 materiálových parametrů, které jsou získány aproximací experimentálních naměřených hodnot (viz. kap.3.4.1). Konkrétní experimentální hodnoty, které jsou vstupními veličinami pro výpočet materiálových parametrů pomocí programu Ansys, jsem obdržel od Dr. Skácela. Ocelová výztužná vlákna jsou zohledněna izotropním elastickým lineárním modelem materiálu s Youngovým modulem pružnosti v tahu  $E = 210 \text{ GPa}$  a Poissonovým číslem  $\mu = 0,3$ . Dále pro tvorbu diskretizace výpočtového modelu byly použity kvadratické prvky. Konkrétně pro matici SOLID 186 a vlákna SOLID 95. Dalšími vstupními parametry jsou rozměry jednotlivých výpočtových modelů. Kompozit s podélnými vlákny má rozměr  $50 \times 2,8 \times 2$  a průměr ocelových výztužných vláken  $D = 0,9 \text{ mm}$ . Kompozit s příčnými vlákny má rozměr  $50,4 \times 3 \times 2$  a průměr ocelových výztužných vláken  $D = 0,9 \text{ mm}$ . Okrajové podmínky jsou definovány na **Obr. 4**, **Obr. 5**.

#### 4.2.2 ZKOUŠKA JEDNOOSÝM TAHEM – KOMPOZIT S PODÉLNÝMI VLÁKNY

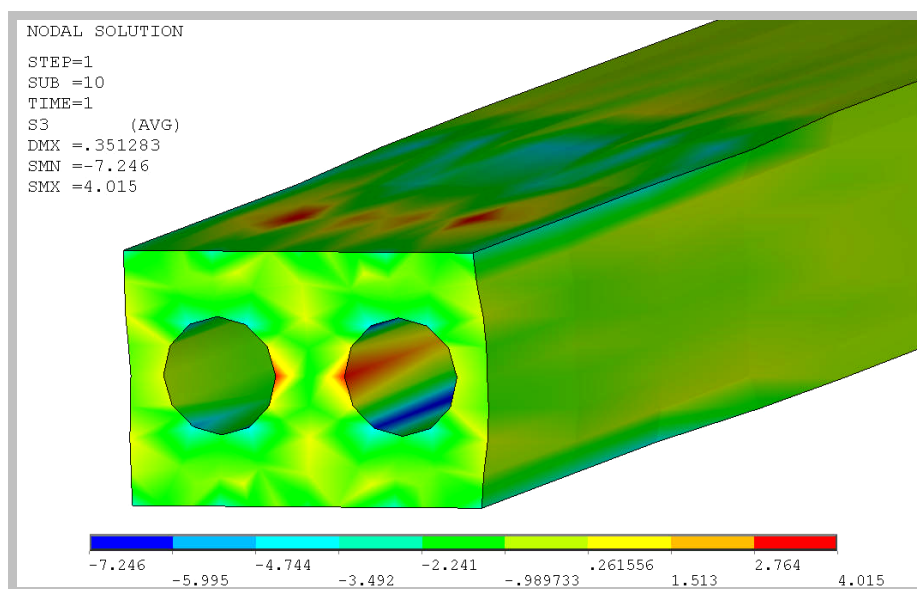
Zkouška jednoosým tahem je simulována tak, aby okrajové podmínky simulace (viz. **Obr. 4**, **Obr. 21**), byly ekvivalentní okrajovým podmínkám skutečné tahové zkoušky na

trhacím stroji. Aktivace vzorku při simulaci je provedena deformačním posuvem o hodnotě pouhých  $u_z = 0,35\text{mm}$ , protože se téměř celá deformace realizuje v ocelových výztužných vláknech a jestliže by došlo ke stejnému prodloužení u ocelových vláken jako u pryže, ocel by zplastizovala a výpočet by v tomto případě neměl význam. Výpočtový model sestává z 2400 elementů (viz. **Obr. 22**).



**Obr. 21:** Okrajové podmínky a geometrie vzorku pro zkoušku jednoosým tahem podélná vlákna

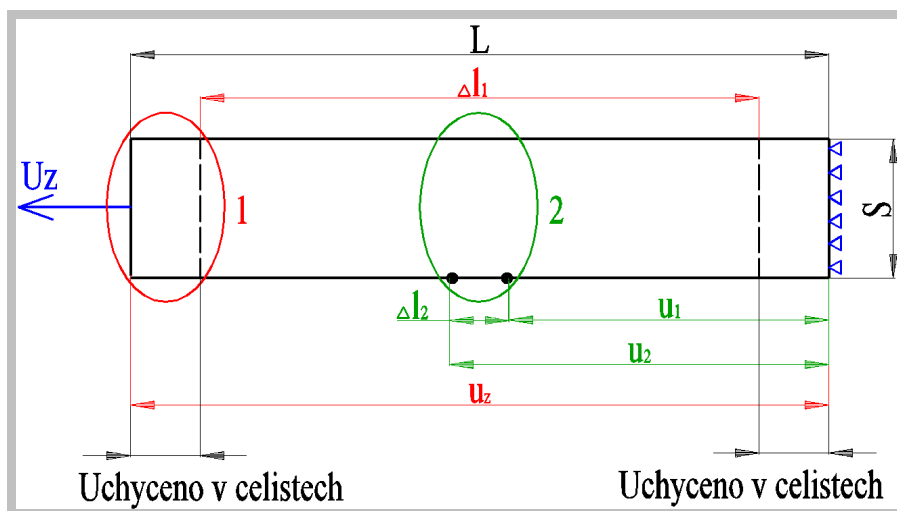
**Obr. 22:** Použitá diskretizace



**Obr. 23:** Hlavní napětí  $\sigma_3$  vzorku  $50 \times 2,8 \times 2$  s orientací  $0^\circ$  (tah)

Důležité je zhodnocení napjatosti (viz. **Obr. 23**) z hlediska *PODMÍNKY KAVITACE*. Obecně při zkoušce tahem vzniká jednoosá napjatost, ale v případě zkušebního vzorku hyperelastického kompozitu v blízkosti rozhraní ocel-pryž vzniká trojosá obecná napjatost, kde je řádově větší napětí než na povrchu. V postprocesingu Ansysu jsou průměrovány nízké hodnoty napětí pryže s vysokými hodnotami napětí vlákna, jestliže není řádně vyselektován konkrétní materiál. Podstatné pro podmínku kavitace, je kladné hlavní napětí  $\sigma_3$ , které rozrušuje vznikající kavity (viz. [2]) v pryži. U podmínky kavitace je důležité tahové napětí. Tlakové je nepodstatné, jelikož kavitu v pryži zavírá. Dále je důležité, že při tahové zkoušce kompozitu s podélnými vlákny se všechny podstatné deformace dějí pod čelistmi => odtud by se měly odečítat mezní hodnoty napětí pro podmínky kavitace (viz. [2]). Pod čelistmi jsou velká úhlová přetvoření => Dosažení velkých smykových přetvoření, což může vést ke špatné konvergenci výpočtu. Deformační posuv  $uz = 0,35\text{mm}$  z hlediska úhlových přetvoření může znamenat obrovské hodnoty řádu stovek procent. Z toho faktu vyplývá použití malých deformačních posuvů  $uz$ . Z **Obr. 23** je vidět, že  $\sigma_3 = 4,015\text{MPa}$ . Konkrétní podmínka porušení elastomeru (podmínka kavitace) při obecné trojosé napjatosti je  $\sigma_3 \leq 2,5 \cdot G$  (viz. [2]). K porušení by nemělo dojít  $4,015\text{MPa} \leq 6,65\text{MPa}$ . Napětí v pryži se tedy již blíží mezní hodnotě.

### Volba způsobu vyhodnocování napět'ově deformačních stavů



**Obr. 24:** Způsoby vyhodnocování deformačních a napět'ových stavů

1) Vyhodnocení napět'ově deformačních stavů pod čelistmi

Tento způsob vyhodnocení je vhodný pro posouzení napětí a přetvoření, které jsou příčinou kavitace, jelikož mezi čelistmi vzniká největší napětí a přetvoření.

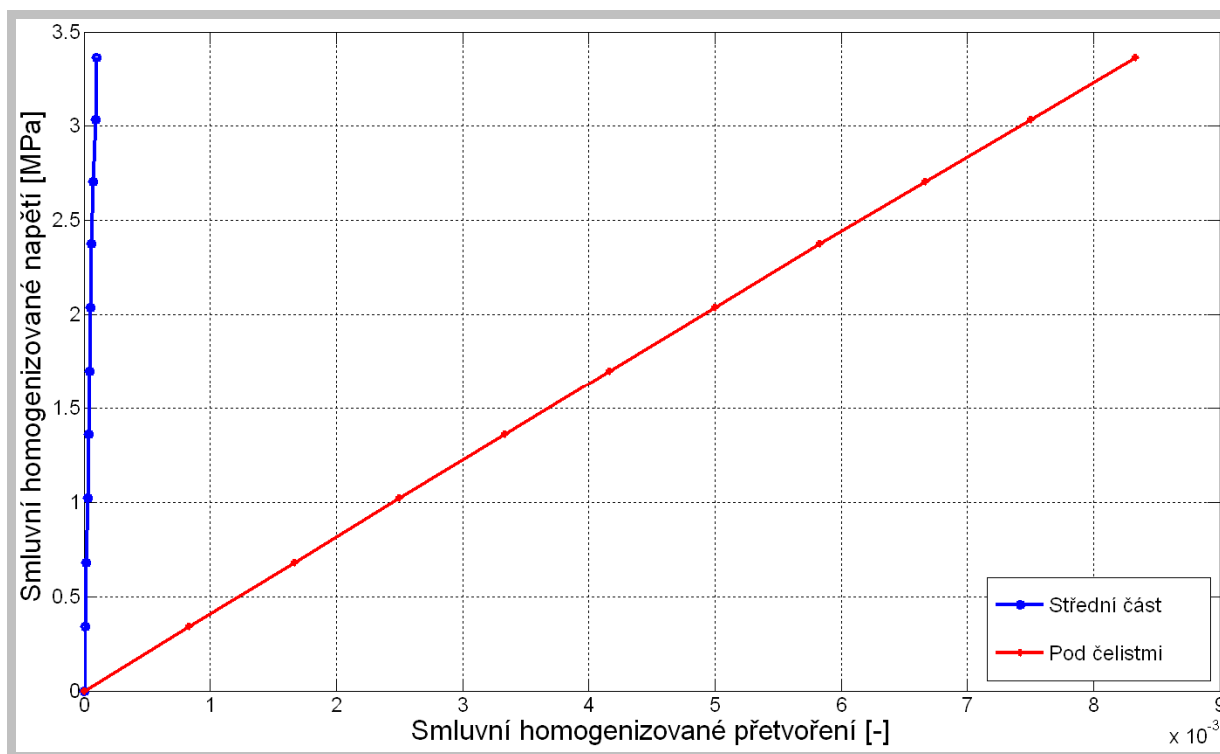
$$\sigma_{SM}^{HOM} = \frac{F_z}{S_C} \quad (139); \quad \varepsilon_{SM}^{HOM} = \frac{u_z}{\Delta l_1} \quad (140) \quad (\text{viz. Obr. 24})$$

2) Vyhodnocení napět'ově deformačních stavů v prostřední části vzorku

Vyhodnocování napětí a přetvoření uprostřed vzorku je důležité z hlediska následné tvorby  $\sigma - \varepsilon$  charakteristiky. Při experimentu byla přetvoření odečítána uprostřed vzorku pomocí extenzometrů a to z důvodů, aby nedošlo k ovlivnění měřených veličin lokální koncentrací napětí a přetvoření, která je způsobena interakcí zkušebního vzorku s čelistmi trhacího stroje. Tento způsob vyhodnocování závislostí homogenizovaných veličin  $\sigma_{SM}^{HOM} - \varepsilon_{SM}^{HOM}$ , bude používán v následujících kapitolách.  $\sigma_{SM}^{HOM}; \varepsilon_{SM}^{HOM}$  jsou homogenizované v tom smyslu, že nevyhodnocují smluvní napětí a přetvoření jednotlivých komponent kompozitu, ale hodnotím již  $\sigma_{SM}^{HOM} - \varepsilon_{SM}^{HOM}$  celé heterogenní struktury jako jednoho celku =>  $\sigma_{SM}^{HOM}; \varepsilon_{SM}^{HOM}$  kompozitu.

$$\sigma_{SM}^{HOM} = \frac{F_z}{S_C} \quad (141); \quad \varepsilon_{SM}^{HOM} = \frac{u_2 - u_1}{\Delta l_2} \quad (142) \quad (\text{viz. Obr. 24})$$

Výše uvedený postup (viz. 1), 2)) je dále použit pro vyhodnocení zkoušky jednoosým tahem vzorku 50x2,8x2 s orientací 0° ve formě napět'ově deformační charakteristiky (viz. Obr. 25).



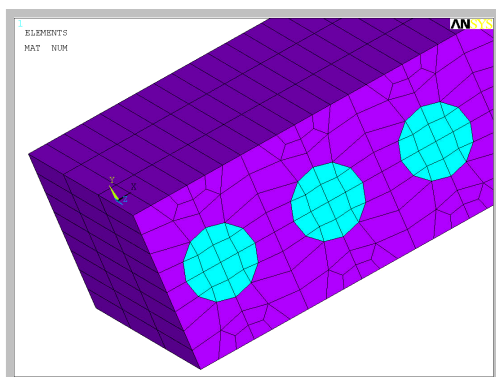
**Obr. 25:** Zkouška jednoosým tahem kompozitu s podélnými vlákny

Z grafu (viz. **Obr. 25**) je vidět, že pod čelistmi jsou velice výrazné deformace oproti střední části. To znamená, že čelisti zkušebního trhačího stroje by značně ovlivnily výsledky ve smyslu Saint Vénantova principu. Z tohoto důvodu byla prováděna experimentální měření uprostřed vzorku, kde vzniká v jednotlivých komponentách homogenní napjatost. To znamená, aby bylo možné porovnání experimentu a simulace, musí být napětí a přetvoření ze simulace vyhodnoceno ve střední části zkušebního vzorku.

#### 4.2.3 ZKOUŠKA JEDNOOSÝM TAHEM – KOMPOZIT S PŘÍČNÝMI VLÁKNY

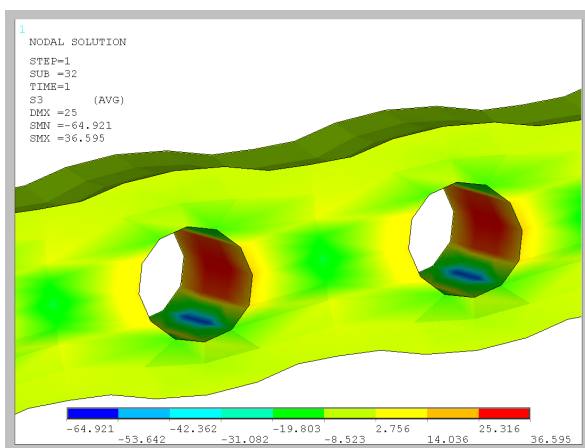
Zkouška jednoosým tahem kompozitu s příčnými vlákny je naprosto stejná jako zkouška jednoosým tahem kompozitu s podélnými vlákny jen s tím rozdílem, že zde si z důvodů menší tuhosti vzorku můžeme dovolit mnohem větší posuvy. To znamená, že kompozit s příčnými vlákny je schopen dosáhnout téměř stejné deformace jako čistá pryž, avšak v důsledku vzniku koncentrace od vláken

dosahuje přibližně dvojnásobku napětí (viz. **Obr. 30**). Aktivace vzorku při simulaci je provedena deformačním posuvem  $u_x = 25\text{mm}$ . Ostatní okrajové podmínky zkoušky odpovídají (viz. kap.4.2.2). Model sestává z 5184 elementů (viz. **Obr. 26**).

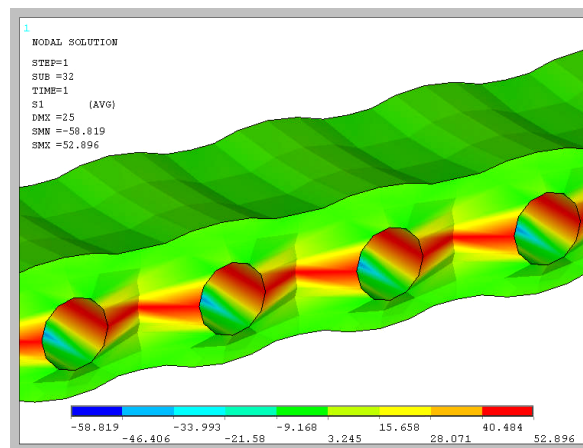


**Obr. 26:** Použitá diskretizace

Stejným způsobem jako v kapitole 4.2.2 je provedeno zhodnocení deformačně napěťových stavů a charakteristik (viz. **Obr. 29**). Je vhodné uvést následující výsledky ze simulace (viz. **Obr. 27**, **Obr. 28**).



**Obr. 27:** Hlavní napětí  $\sigma_3$  [MPa] vzorku  
50,5x3x2 s orientací 90° (tah)

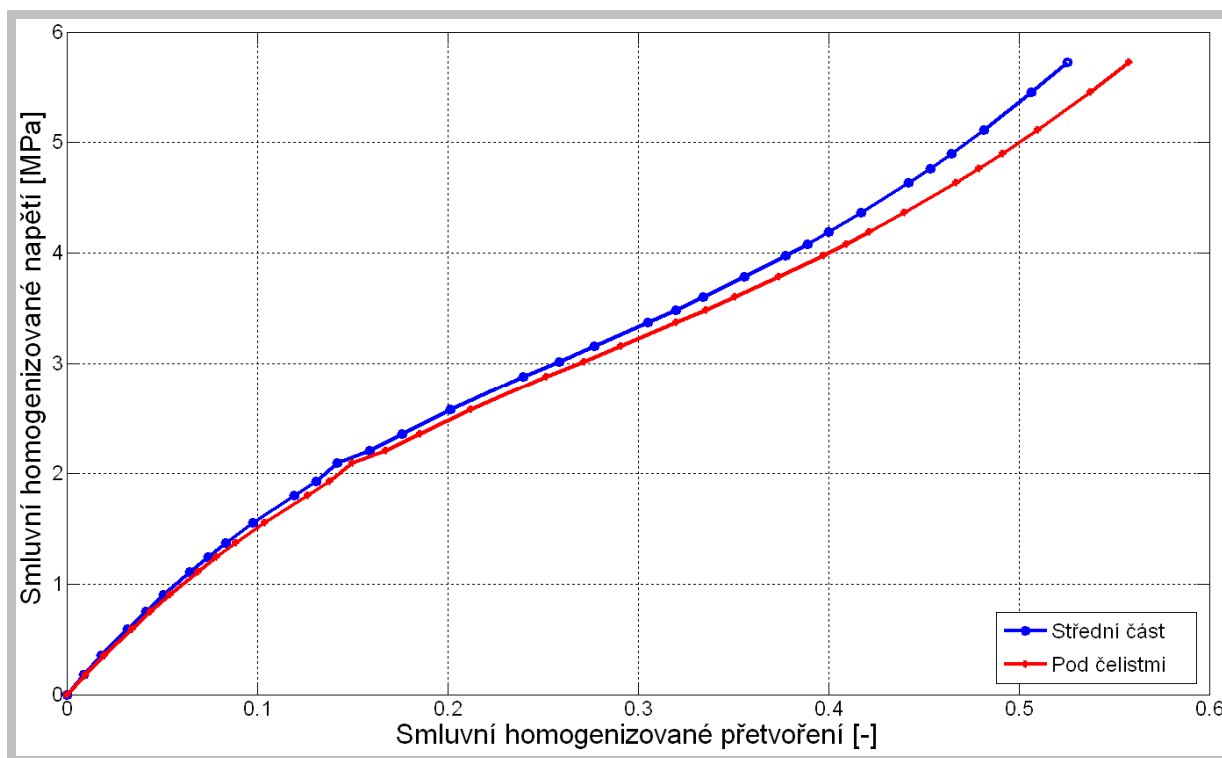


**Obr. 28:** Hlavní napětí  $\sigma_1$  [MPa]  
50,5x3x2 s orientací 90° (tah)

Z obrázku (viz. **Obr. 27**) je vidět rozložení kladného hlavního napětí  $\sigma_3 = 36,595\text{MPa}$ . Napětí  $\sigma_3 \geq 2,5 \cdot G$ , z čehož vyplývá velice pravděpodobné porušení soudržnosti rozhraní dle podmínky kavitace. Jelikož jsou výztužná vlákna kolmo na směr zatěžování, tak při natahování vzorku vzniká koncentrace napětí v těsné blízkosti rozhraní ocel-přýž. Na obrázku



(viz. **Obr. 28**) je znázorněno rozložení koncentrace napětí v podobě  $\sigma_1 = 52,896 \text{ MPa}$ , která vzniká v pryži mezi vlákny.



**Obr. 29:** Zkouška jednoosým tahem kompozitu s příčnými vlákny

Na obrázku (viz. **Obr. 29**) je vidět malý rozdíl mezi křivkou odečtenou ve střední části vzorku a křivkou odečtenou přímo pod čelistmi. Tento rozdíl je způsoben tím, že se pod čelistmi dochází k větším deformacím než ve střední části vzorku. Deformačně napěťová charakteristika je již výrazně nelineární, protože se veškerá deformace odehrává v pryži a vlákna zde působí pouze jako parazitní výstužný člen.

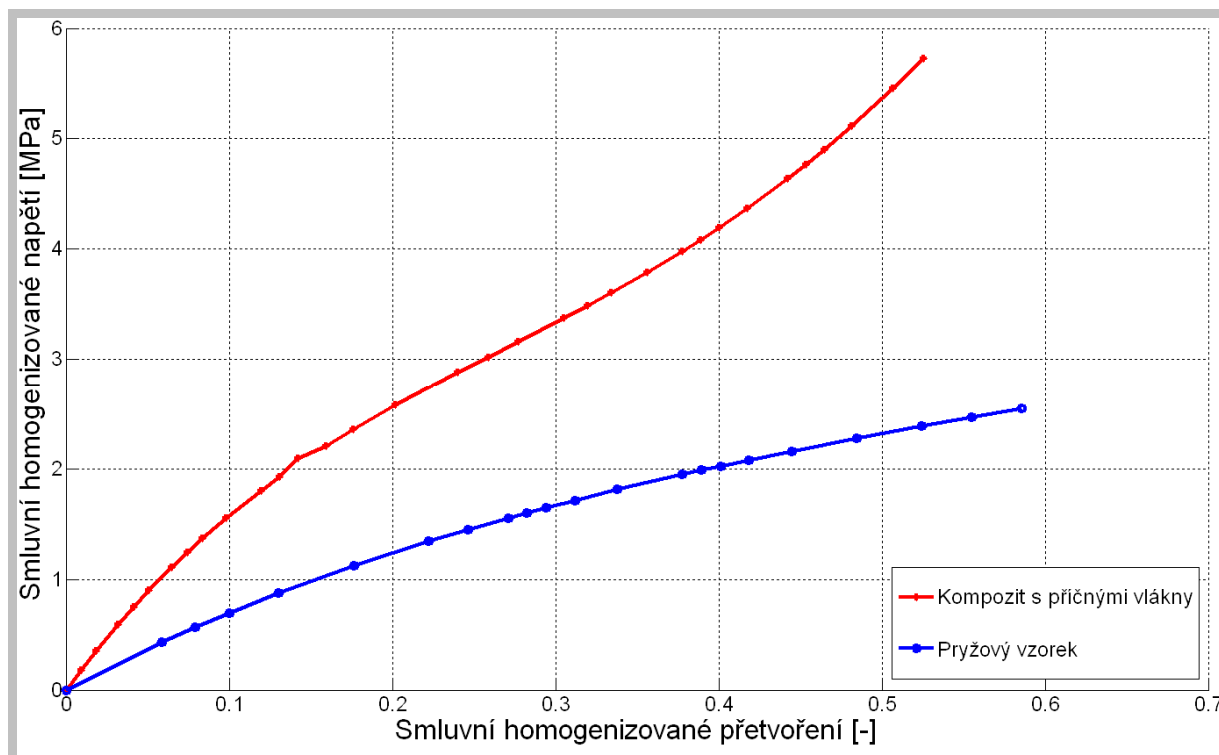
**Pozn.2:** Jestliže provádíme zkoušku jednoosým tahem kompozitu s příčnými vlákny, může zde vyvstat problém obecné trojosé napjatosti, která vzniká v blízkosti rozhraní ocel-pryž (viz. **Obr. 27**), kde hodnoty napětí, ale i přetvoření, mohou být mnohonásobně větší, než je rozsah vstupní deformačně napěťové charakteristiky. Z toho vyplývá, že mohou nastat problémy s konvergencí a věrohodností výpočtu. Proto doporučuji v místech koncentrace u vlákna ověřit hodnoty napětí a přetvoření a podmínku kavitace  $\sigma_3 \leq 2,5 \cdot G$  (viz. [2]).

*Pozn.3: Při hodnocení konečných výsledků napětí a přetvoření je zapotřebí dávat pozor na vyhodnocování výsledků v postprocessingu Ansysu. Jestliže si nevyselektujeme typ materiálu, na němž vyhodnocujeme napjatost může dojít k průměrování hodnot pryže a oceli v blízkosti rozhraní ocel-pryž.*

#### 4.2.4 ZKOUŠKA JEDNOOSÝM TAHEM – PRYŽOVÝ VZOREK

Význam zkoušky jednoosým tahem pryžového vzorku spočívá v tom, zjistit jeho deformačně napěťovou charakteristiku, která bude porovnána s deformačně napěťovou charakteristikou vzorku kompozitu s příčnými vlákny. Okrajové podmínky a rozměry pryžového vzorku jsou shodné s okrajovými podmínkami a rozměry vzorku kompozitu s příčnými vlákny.

#### 4.2.5 POROVNÁNÍ DEFORMAČNĚ NAPĚŤOVÝCH CHARAKTERISTIK – KOMPOZIT S PŘÍČNÝMI VLÁKNY VERZUS PRYŽOVÝ VZOREK



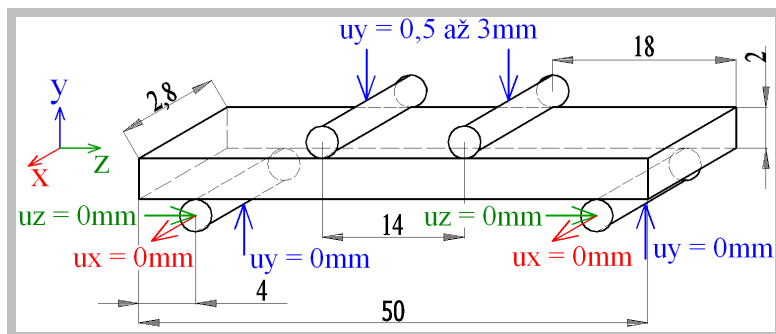
*Obr. 30: Porovnání zkoušky jednoosým tahem kompozitu s příčnými vlákny a pryžového vzorku*

Cílem vzájemného srovnání deformačně napět'ových charakteristik je zjistit jak velký je rozdíl mezi deformačně napět'ovou charakteristikou čistě pryžového vzorku a kompozitu s příčnými vlákny. U vzorku kompozitu s příčnými vlákny byl předpoklad, oproti pryžovému vzorku, že kompozit s příčnými vlákny dosáhne nižších hodnot přetvoření z důvodů vyztužení vláknů a vyšších hodnot napětí, z důvodů koncentrace napětí v blízkosti rozhraní ocel-pryž ve směru zatěžování kompozitu (viz. **Obr. 27**, **Obr. 28**).

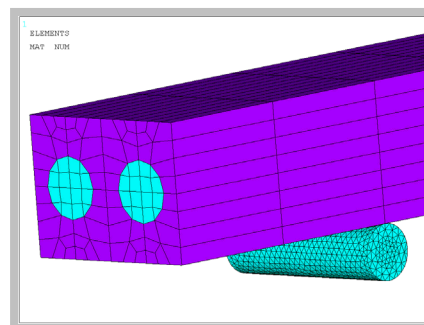
Na obrázku (viz. **Obr. 30**) jsou vidět rozdíly mezi deformačně napět'ovou charakteristikou kompozitu s příčnými vlákny a čistě pryžového vzorku. U vzorku z kompozitního materiálu je patrné nejprve změkčení, podobné jako u pryže, pak následuje výrazná progresivita křivky. U čistě pryžového vzorku, je vidět, že pro deformační posuv  $u = 25\text{mm}$  ( $\varepsilon_{SM} \approx 50\%$ ) vyvolá pouze změkčující charakter křivky. Deformační posuv pravděpodobně nebyl tak velký, aby došlo k napřímení molekulárních strukturních řetězců pryže, které jak je vidět na obrázku (viz. **Obr. 30**), vytváří progresivitu křivky. Přibližně dvakrát větší homogenizované napětí u kompozitu je způsobeno těmito činiteli. Jsou jimi jednak přítomnost vláken působící jako koncentrátor napětí a dále také vznik obecné trojosé napjatosti v blízkosti rozhraní ocel-pryž, která má za následek vyztužení blízkého okolí rozhraní. Tím se zvýší tuhost, zmenší se deformace a výrazně vzrostou reakční síly.

#### 4.2.6 ZKOUŠKA OHYBEM – VLIV POUŽITÍ KONTAKTU NA SIMULACI V MKP

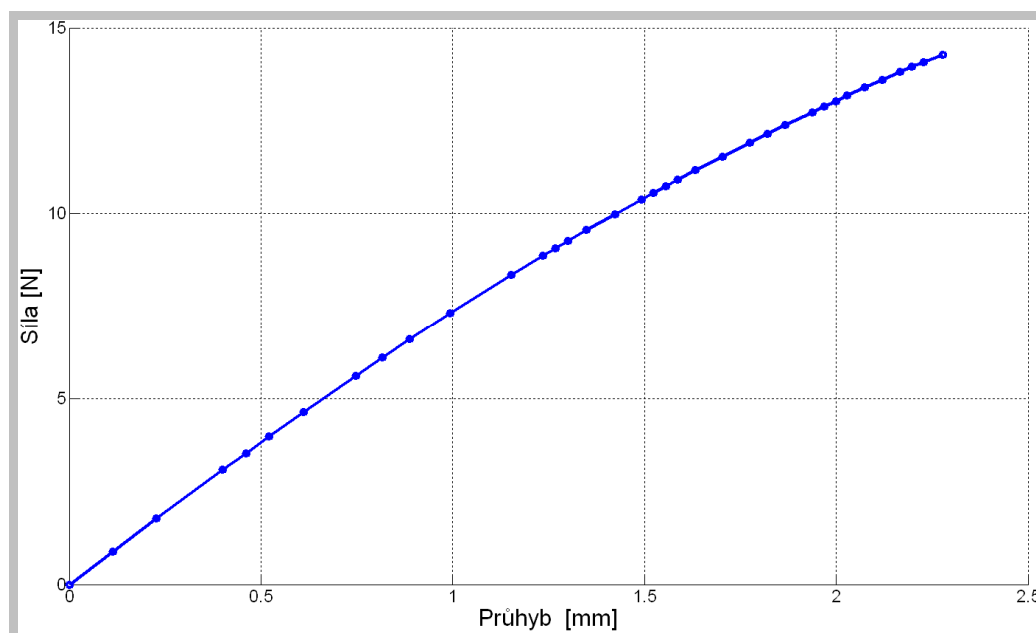
Zkouška čtyřbodovým ohybem je provedena na vzorku kompozitu s podélnými vlákny. Aktivace vzorku je zajištěna deformačním posuvem horní dvojice válečků, které jsou vtlačovány do vzorku. U reálné zkoušky ohybem by vznikla mezi válečkem a kompozitem nezanedbatelná styková plocha, která by měla být ve výpočtovém modelování zohledněna použitím kontaktu. Jestliže však použijí kontakt, znamenalo by to přidání další nelinearity, která by výrazně prodloužila čas výpočtu. Pro ilustraci byl proveden výpočet s deformačním posuvem  $u_y = 0,3\text{mm}$ , aby bylo možné porovnat výpočtové časy. Zkouška ohybem bez použití kontaktu trvala  $t = 30\text{min}$  a zkouška ohybem s kontaktem  $t = 90\text{min}$ . Proto dále kontakt nebyl modelován.



**Obr. 31:** Okrajové podmínky a geometrie pro zkoušku čtyřbodovým ohybem



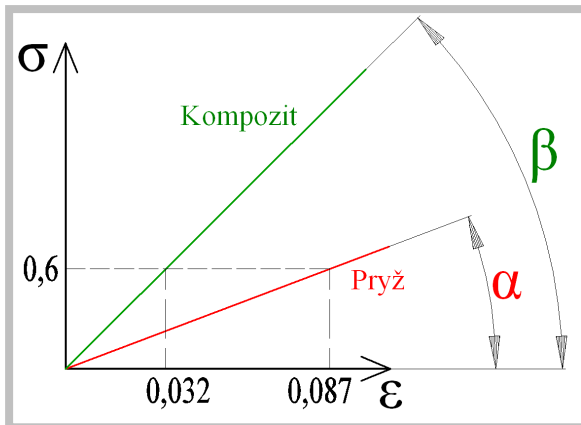
**Obr. 32:** Použitá diskretizace



**Obr. 33:** Zkouška ohybem – průhybu v závislosti na síle pro deformační posuvy 1 mm až 3 mm

#### 4.2.7 SMĚŠOVACÍ PRAVIDLO – LINEÁRNÍ VERZUS NELINEÁRNÍ KOMPOZIT

V této kapitole jsem se zabýval nejprve porovnáním modulu pružnosti v tahu ( $E$ ) vzorku kompozitu s příčnými vlákny a čistě pryžového vzorku. Dále byl porovnán modul pružnosti v tahu nejprve získaný jako směrnice deformačně napěťové křivky (viz. **Obr. 34**) s modulem pružnosti v tahu, který byl spočítán ze směšovacího pravidla pro lineárně elastické kompozity (viz. [5]). Podle předpokladů lineárních kompozitů by se měly výsledky shodovat.



$$E_{Kompozit} = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \frac{0,6}{0,032} = 18,75 \text{ MPa} \quad (143)$$

$$E_{Pryž} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{0,6}{0,087} = 6,89 \text{ MPa} \quad (144)$$

Výše uvedený výpočet byl proveden z tg úhlu v lineární oblasti  $\sigma - \varepsilon$ .

Obr. 34: Porovnání modulů pružnosti v tahu

Směšovací pravidlo pro lineární elastické kompozity:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{v_f}{E_f} + \frac{v_m}{E_m} \Rightarrow E_T = \frac{E_m}{v_m} = \frac{6,89}{0,774} = 8,9 \text{ MPa} \quad (145)$$

Pro malé deformace zanedbávám  $v_f / E_f$ , jelikož při malých  $\varepsilon$  se na E podílí pouze pryž.

$$E_{Kompozitu}^{Nelineární} = 18,75 \text{ MPa}; \quad E_T^{Lineární} = 8,9 \text{ MPa} \quad (146)$$

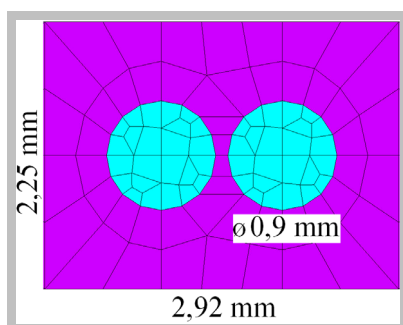
Rozpor mezi výsledky (146) lze vysvětlit tím, že u směšovacího pravidla pro kompozity je uvažována jednoosá tahová napjatost a lineární chování, ale v mém případě matrice z pryže, na rozhraní vzniká obecná trojosá napjatost, která kompozit s příčnými vlákny na rozhraní naopak velice vyztužuje. Dalším faktem je, že matrice použitá v simulaci je z hyperelastického materiálu, zatímco ve směšovacím pravidle se uvažuje lineární izotropní matrice. Směšovací pravidlo funguje jen pro lineární izotropní materiál, který vykazuje malé deformace. Proto jej nelze aplikovat u matrice z pryže.

#### 4.2.8 TVORBA MODELU ZKUŠEBNÍHO VZORKU HYPERELASTICKÉHO KOMPOZITU SE ŠIKMÝMI VLÁKNY

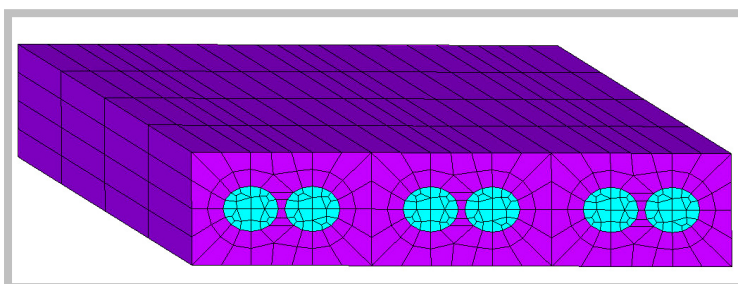
Ve výše uvedených zkouškách jsem se zabýval kompozity, které měly pouze podélná nebo příčná vlákna, avšak v praxi jsou využívány hlavně kompozity, u kterých jsou vyztužná vlákna v obecných úhlech odklonu od podélného směru. Pro ně byl vytvořen výpočtový model. V reálných experimentech se používají vzorky kompozitů obdélníkového tvaru, které jsou vyříznuté z vyrobeného pásu kompozitu. Model takového vzorku kompozitu nelze celý

pravidelně (mapovaně) diskretizovat a v některých místech je z tohoto důvodu značně jemná síť. To způsobí výrazné prodloužení výpočtových časů potřebných k řešení úlohy. Z tohoto důvodu musel být vzorek kompozitu upraven tak, aby bylo možné provést mapovanou a hrubší diskretizaci, tím snížit počet elementů a dosáhnout tak podstatně kratších výpočtových časů. Úprava vzorku kompozitu spočívá v tom, že základní prostorová buňka výpočtového modelu je modelována ve směru vlákna. Nakopírováním této prostorové buňky vznikne kompozit, který má na okrajích „zuby“ (viz. **Obr. 38**). Ty jsou způsobeny tím, že se prostorová buňka modeluje „šikmo“ ve směru vláken, takže vzorek kompozitu se „zuby“, bude mít jiný průřez než je u „plného kompozitu“.

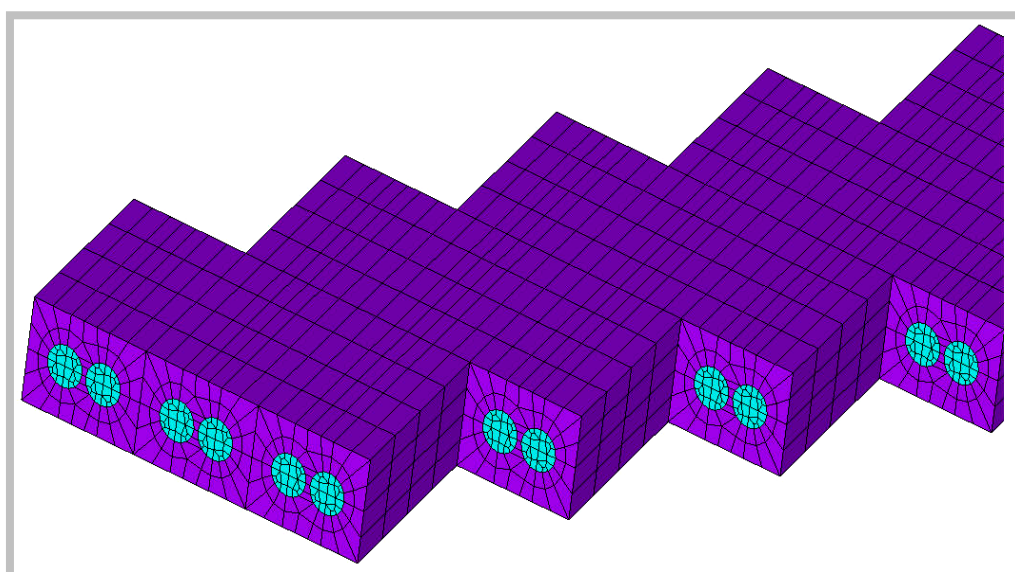
**Postup tvorby zkušebního vzorku hyperelastického kompozitu se „zuby“:**



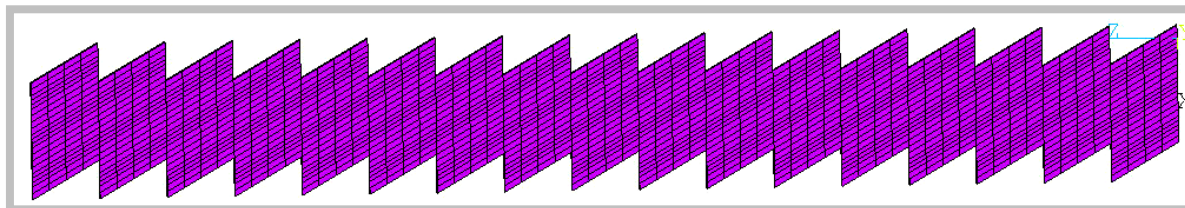
**Obr. 35:** Rozměry elementu



**Obr. 36:** Základní prostorová buňka



**Obr. 37:** 3D model zkušebního vzorku hyperelastického kompozitu se šikmými vlákny



**Obr. 38:** *Půdorys 3D modelu zkušebního vzorku hyperelastického kompozitu se „zuby“*

Základní buňka zkušebního vzorku hyperelastického kompozitu má rozměry shodné s reálným zkušebním vzorkem kompozitu, který se používá při experimentech. Volba použité diskretizace základní prostorové buňky (viz. **Obr. 36**) je volena na základě tohoto předpokladu. K výskytu největších hodnot napětí a přetvoření dochází u zkušebního vzorku hyperelastického kompozitu na rozhraní ocel-pryž. Z tohoto důvodu je jemnější síť právě u rozhraní, aby bylo možné co nejvěrohodněji postihnout deformačně napěťové stavy. Dále výstužné vlákno je taktéž diskretizováno optimálně tak, aby byla jemnější síť na obvodu a uprostřed co nejhrubší, jelikož se tam z pohledu napětí a deformace nic významného neděje. V tomto duchu je diskretizován celý výpočtový model.

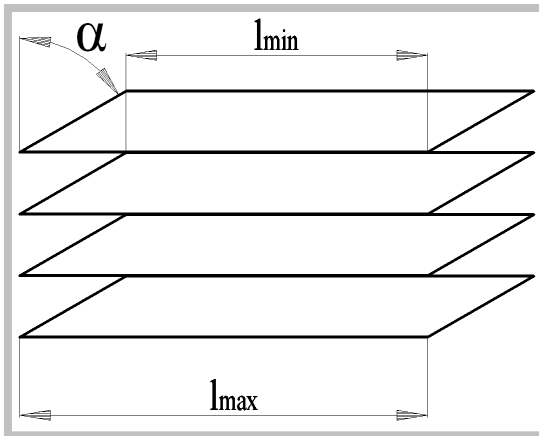
Dále 3D model zkušebního vzorku hyperelastického kompozitu se šikmými vlákny má ekvivalentní rozměry k vzorku, který je používán v experimentech. Tato ekvivalence je zaručena pomocí vypočteného průřezu kompozitu, který by při vyhodnocení dával smluvní napětí shodné se smluvním napětím obdélníkového vzorku. Průřez vzorku hyperelastického kompozitu se „zuby“ se dále bude nazývat *EFEKTIVNÍ PŘŮŘEZ KOMPOZITU* -  $S_{ef}$  (viz. (150)), ve kterém vystupuje součinitel ( $k$ ), jenž se stanoví z následujícího postupu.

Jelikož u reálné zkoušky tahem (experiment) je vzorek plný (bez zubů) a ve výpočtovém modelování bude dále používán model zkušebního vzorku hyperelastického kompozitu se „zuby“, je zapotřebí vytvořit přepočtový vztah pro  $S_{ef}$ . Pro jeho zjištění byla provedena simulace zkoušky jednoosým tahem na modelu „plného“ kompozitu a také na modelu vzorku kompozitu se „zuby“. Efektivní průřez kompozitu  $S_{ef}$ , respektive součinitel ( $k$ ), je tedy vypočten z rovnosti smluvních napětí „zubatého“ a „plného“ zkušebního vzorku kompozitu  $\sigma_{SM}^{Zuby} = \sigma_{SM}^{Plný}$ .

Ze simulace byly odečteny tyto hodnoty:  $F_Z^{Zuby} = 13,961N$ ;  $F_Z^{PIny} = 16,516N$ ;  $\varepsilon_Z^{Zuby} = 0,058$

$$\varepsilon_Z^{PIny} = 0,058; l_{max} = 13,5mm; l_{min} = 10,11mm$$

$$h = 2,25mm$$



$$S_{max} = l_{max} \cdot h = 13,5 \cdot 2,25 = 30,375mm^2 \quad (147)$$

$$S_{min} = l_{min} \cdot h = 10,11 \cdot 2,25 = 22,758mm^2 \quad (148)$$

$$S_{ef} = S_{min} + k(S_{max} - S_{min}) \quad (149)$$

**Obr. 39:** Maximální a minimální průřez

$$\sigma_{SM}^{Zuby} = \sigma_{SM}^{PIny} \Rightarrow \frac{F_Z^{Zuby}}{S_{ef}} = \frac{F_Z^{PIny}}{S_{PIny}} \Rightarrow \frac{F_Z^{Zuby}}{S_{min} + k(S_{max} - S_{min})} = \frac{F_Z^{PIny}}{S_{PIny}} \quad (150)$$

$$k = \frac{\frac{F_Z^{Zuby} \cdot S_{PIny}}{F_Z^{PIny}} - S_{min}}{S_{max} - S_{min}} = \frac{\frac{13,961 \cdot 30,375}{16,516} - 22,758}{30,375 - 22,758} = 0,383 \quad (151)$$

Takto zjištěný součinitel (k), bude dále použit jako přepočtový součinitel pro určení efektivního průřezu zkušební vzorku kompozitu pro všechny další mechanické zkoušky. To znamená, že konkrétní hodnoty smluvního napětí vzorku se „zuby“ budou počítány v následujících úlohách podle vztahu:

$$\sigma_{SM}^{Zuby} = \frac{F_Z^{Zuby}}{S_{ef}} = \frac{F_Z^{Zuby}}{S_{min} + k(S_{max} - S_{min})} = \sigma_{SM}^{HOM} \quad (152)$$

Tím je umožněno věrohodné porovnání simulace provedené na modelu zkušební vzorku hyperelastického kompozitu se „zuby“ s experimentem.



## 4.3 SIMULACE MECHANICKÝCH ZKOUŠEK

### 4.3.1 VSTUPNÍ ÚDAJE DO ALGORITMU

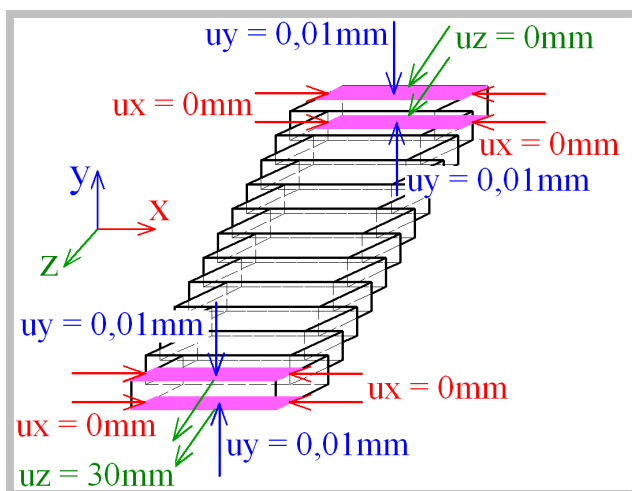
#### 4.3.1.1 Model topologie a geometrie zkušební vzorku hyperelastického kompozitu

Použitý výpočtový model má vnější rozměry shodné se vzorkem používaným při experimentu. Avšak mezi vzorkem pro simulaci a vzorkem pro experiment je rozdíl ve smyslu „zubů“, jenž jsou u výpočtového modelu. Rozdílná geometrie výpočtového modelu je zohledněna efektivním průřezem kompozitu, který byl podrobně odvozen v kapitole (4.2.8). To znamená, že hodnota smluvního napětí získaného ze vzorku se „zuby“ je rovna hodnotě smluvního napětí „plného“ vzorku jenž je používán při experimentu. Výsledky ze simulace mohou porovnat s výsledky z experimentu. Ve výpočtovém modelování bude použit vzorek hyperelastického kompozitu s šikmými vlákny o rozměrech 100x10x2,25mm, podélnými vlákny o rozměrech 150x10x2,25mm a příčnými vlákny o rozměrech 100x10x2,4mm.

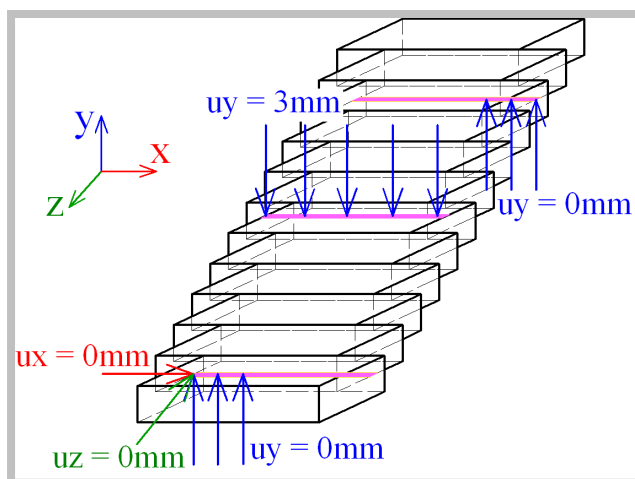
#### 4.3.1.2 Model okrajových podmínek zkušební vzorku hyperelastického kompozitu

Na výpočtových modelech zkušebních vzorků hyperelastického kompozitu budou v následujících kapitolách prováděny mechanické zkoušky dvojího typu. Prvním typem je zkouška jednoosým tahem, která je prováděna na zkušebním trhacím stroji. Okrajové podmínky u zkoušky jednoosým tahem jsou předepsány na výpočtovém modelu ekvivalentně reálné zkoušce (viz. **Obr. 40**). Spodní část zkušební vzorku je uchycena nepohyblivě a horní část zkušební vzorku, která je aktivována deformačním posuvem, se pohybuje směrem vzhůru. Druhým typem je zkouška třibodovým ohybem. Třibodový ohyb je pro simulaci zvolen proto, aby bylo možno věrohodně porovnat výsledky s experimentem, který byl taktéž prováděn třibodovým ohybem. Na horní stranu zkušební vzorku působí pohybující se břít směrem dolů a na spodní straně je zkušební vzorek podepřen dvěma nepohyblivými břity (viz. **Obr. 41**). U zkušební vzorku kompozitu s podélnými a příčnými vlákny jsou okrajové podmínky stejné. U zkoušky třibodovým ohybem je třeba uvést rozdíly mezi okrajovými podmínkami pro zkušební vzorek se šikmými a podélnými vlákny. Při

zkoušce tříbodovým ohybem zkušební vzorku hyperelastického kompozitu s podélnými nebo příčnými vlákny postačí předepsat na spodní straně vzorku pouze zamezení posuvu ve směru tloušťky vzorku a to po celé jeho šířce tak jak se dotýkají podpěrné břity. Ovšem u zkušební vzorku kompozitu se šikmými vlákny vzniká při ohybu přídavné zkroucení (nadvzednutí) okrajů vzorku a tudíž tento fakt musí být zohledněn v okrajových podmínkách tak, že vzorek nebude podepřen po celé šířce, ale jen na cca 1/3 šířky na stykové ploše hrotů (viz. **Obr. 41**).



**Obr. 40:** Okrajové podmínky zkouška tahem



**Obr. 41:** Okrajové podmínky zkouška ohybem

#### 4.3.1.3 Model konstitutivních vztahů zkušební vzorku hyperelastického kompozitu

Pro popis nehomogenního tělesa, kterým je zkušební vzorek hyperelastického kompozitu, je nutné popsat zvlášť materiálové parametry hyperelastické matrice a zvlášť materiálové parametry ocelového vlákna. To znamená, že pro popis obou složek kompozitu musím použít odlišné konstitutivní vztahy popisující daný materiál. Hyperelastická matrice je popsána Ogdenovým konstitutivním modelem materiálu který má 5 materiálových parametrů, které jsou získány aproximací experimentálních naměřených hodnot. Ocelová výztužná vlákna jsou popsána izotropním elastickým lineárním modelem materiálu s Youngovým modulem pružnosti v tahu  $E = 210 \text{ GPa}$  a Poissonovým číslem  $\mu = 0,3$ .

#### 4.3.1.4 Způsob získání vstupních experimentálních dat, experimentální data k ověření věrohodnosti výsledků výpočtového modelování

Vstupními, experimentální daty jsou chápány hodnoty napětí a přetvoření z jednoosé a dvouosé tahové zkoušky konkrétní pryže a elastické parametry oceli. Vstupními údaji do řešení simulace mechanických zkoušek jsou experimentální data pryže ze Zlína. Experimentální data jsem získal od Dr. Skácela jako soubory naměřených hodnot  $\sigma - \varepsilon$ .

K ověření věrohodnosti výsledků výpočtového modelování jsou zapotřebí experimentálně změřené hodnoty smluvního homogenizovaného napětí a přetvoření konkrétního vzorku kompozitu. V následujících kapitolách budou porovnávány výsledky jednotlivých simulací tahových a ohybových zkoušek právě s experimentálními daty, která jsou získána z mechanických zkoušek reálných vzorků. Tyto vzorky mají matici z pryže a výztužná vlákna z oceli. Všechna experimentální data k ověření správnosti výpočtového modelování jsem obdržel od Dr. Skácela.

#### 4.3.2 ZKOUŠKY JEDNOOSÝM TAHEM ZKUŠEBNÍHO VZORKU HYPERELASTICKÉHO KOMPOZITU

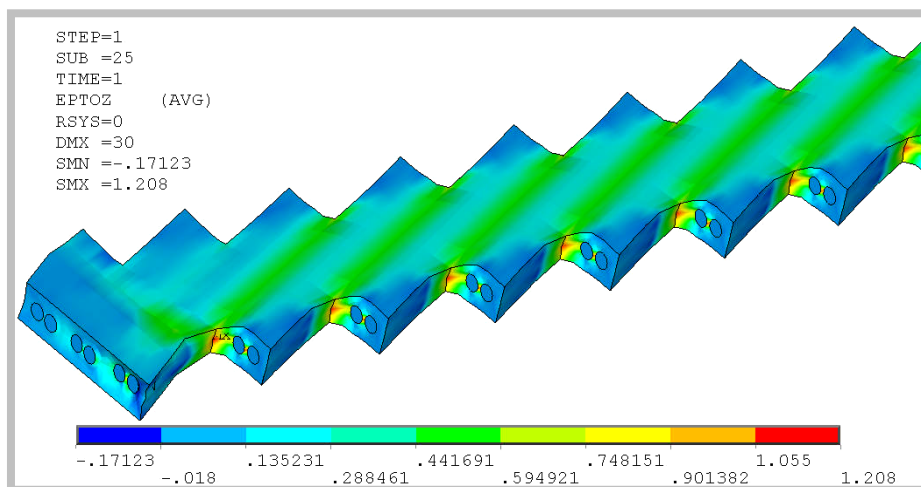
V této kapitole budou porovnány výsledky výpočtového modelování s experimentem. To znamená, že budou porovnány deformačně napěťové charakteristiky simulace, které byly provedeny na modelu zkušební vzorku hyperelastického kompozitu s příslušnými experimentálně změřenými daty vzorků z kompozitu ze Zlína. Výpočtové modelování bylo prováděno na modelech zkušebních vzorků z hyperelastického kompozitu a to s úhly odklonu vlákna od podélného směru  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\alpha = 90^\circ$ . V tabulce (viz. **Tab. 1**) jsou uvedeny, hustota použité diskretizace ve smyslu počtu elementů a uzlů potřebných pro popis zkušební vzorku a výsledný výpočtový čas, který byl zapotřebí pro řešení úlohy. V tabulce (viz. **Tab. 2**) jsou uvedeny hodnoty maximálních úhlových přetvoření, maximálních hlavních přetvoření, přetvoření v podélném směru vzorku a třetí hlavní napětí  $\sigma_3$ . Na obrázcích **Obr. 42**, **Obr. 43** jsou vidět rozdíly mezi skutečnými přetvořeními ve směru délky vzorků se šikmými a příčnými vlákny, kde k podstatné deformaci dochází v pryži mezi vlákny.

**Tab. 1:** Použitá diskretizace a výsledný výpočtový čas (Tah)

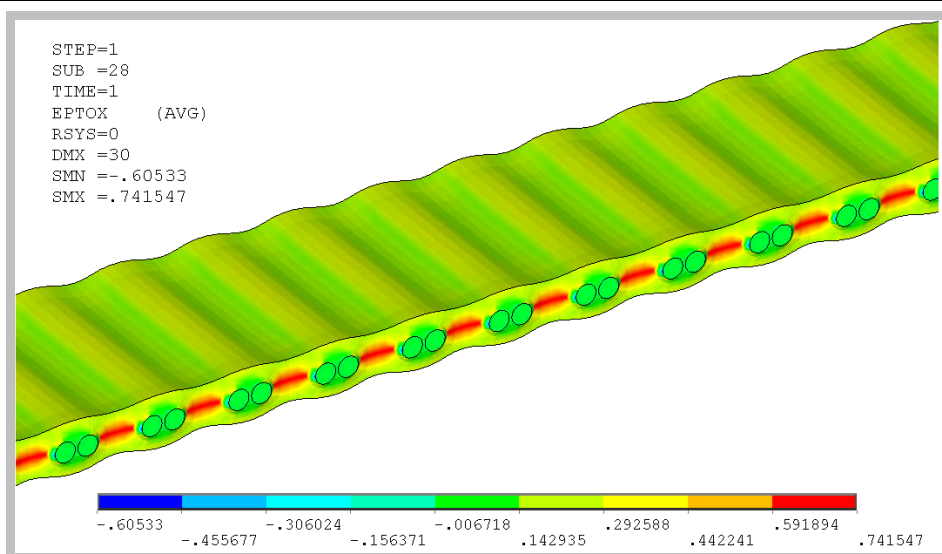
$\alpha$	Elementy	Uzly	Čas (t)
30°	19992	92089	4h 40min
45°	24576	120214	8h 30min
60°	30480	144226	7h 40min
90°	42160	191293	19h

**Tab. 2:** Hodnoty max. úhlových a hlavních přetvoření, podélné přetvoření, třetí hlavní napětí (Tah)

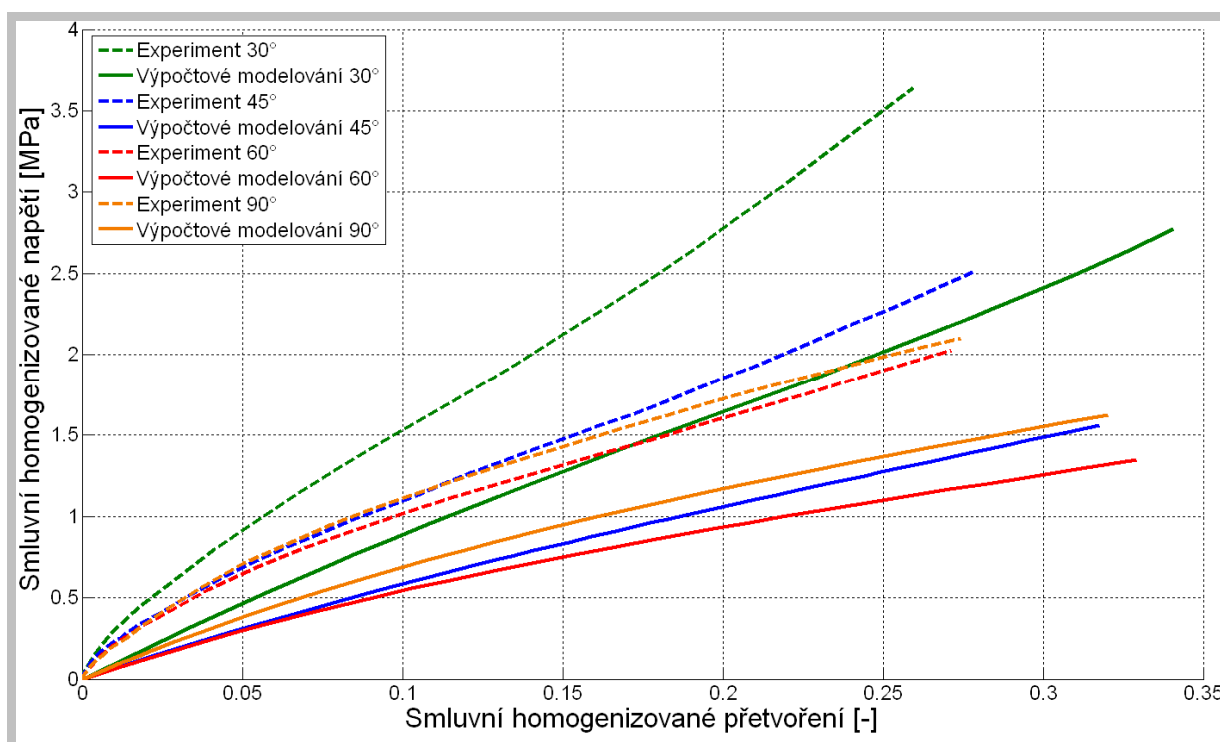
$\alpha$	$\gamma_{\max}$	$\epsilon_1$	$\epsilon_z$	$\sigma_3$
30°	1,132	1,209	1,208	14,128 MPa
45°	2,377	2,165	1,89	201,1 MPa
60°	1,55	1,265	1,139	28,159 MPa
90°	1,575	1,085	0,742	29,98 MPa



**Obr. 42:** Skutečné přetvoření v podélném směru vzorku se šikmými vlákny (TAH)



*Obr. 43: Skutečné přetvoření v podélném směru vzorku s příčnými vlákny (TAH)*



*Obr. 44: Porovnání výsledků výpočtového modelování s experimentem (TAH)*

Z obrázku (viz. **Obr. 44**) je patrné, že z kvalitativního hlediska se výpočtové modelování s experimentem shoduje. Ovšem kvantitativně se výsledky mezi výpočtovým modelováním a experimentem liší o 20% až 40%. Kvantitativní neshoda výpočtového

modelování s experimentem by mohla být způsobena jednak stárnutím pryže a jednak absencí experimentální smykové zkoušky, pro niž v danou dobu nebylo k dispozici experimentální zařízení. To, že absence smykové zkoušky má podstatný vliv na kvantitativní odchylku mezi experimentem a výpočtovým modelováním je doloženo v tabulce 2, kde je vidět výrazný podíl úhlových přetvoření na obecné trojosé deformaci, což mohlo způsobit kvantitativní odchylku simulace a experimentu.

### 4.3.3 ZKOUŠKY TŘÍBODOVÝM OHYBEM ZKUŠEBNÍHO VZORKU HYPERELASTICKÉHO KOMPOZITU

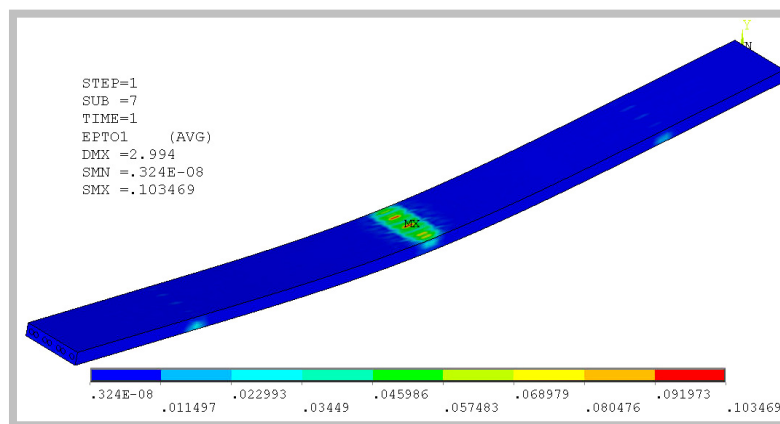
U zkoušky tříbodovým ohybem budou porovnány výsledky výpočtového modelování s experimentem stejně tak jako v předchozí kapitole u zkoušky jednoosým tahem. Výpočtové modelování bylo prováděno na modelech zkušebních vzorků z hyperelastického kompozitu a to s úhly odklonu vlákna od podélného směru  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\alpha = 90^\circ$ . V tabulce (viz. **Tab. 3**) jsou uvedeny, hustota diskretizace ve smyslu počtu elementů a uzlů potřebných pro popis zkušebního vzorku a výsledný výpočtový čas, který byl zapotřebí pro řešení úlohy. V tabulce (viz. **Tab. 4**) jsou uvedeny hodnoty maximálních zkosů, maximálních hlavních přetvoření a třetí hlavní napětí  $\sigma_3$ . Na obrázku (viz. **Obr. 46**) je u zkoušky tříbodovým ohybem zkušebního vzorku hyperelastického kompozitu se šikmými vlákny patrný vznik přídavného zkroucení (nadzvednutí) okrajů vzorku, které je způsobeno právě odklonem vláken od podélného směru vzorku.

**Tab. 3:** Použitá diskretizace a výsledný výpočtový čas (Ohyb)

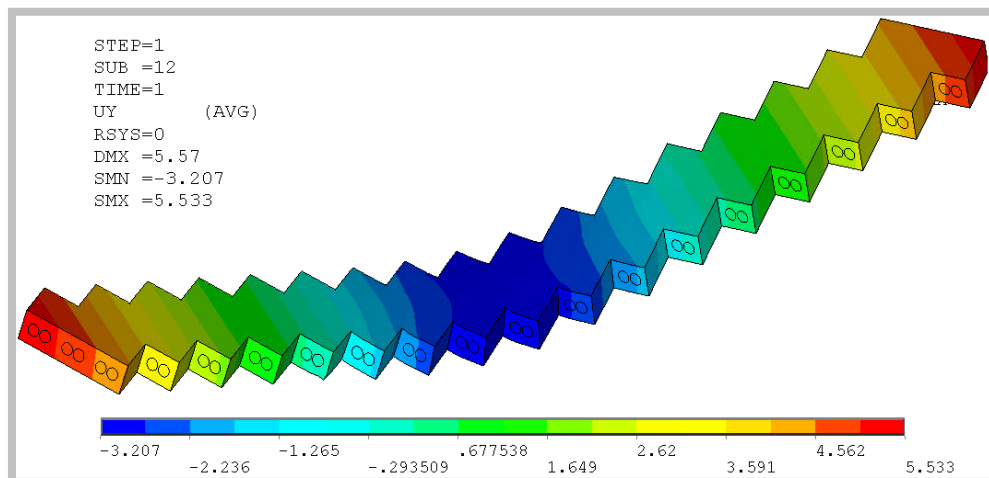
$\alpha$	Elementy	Uzly	Čas (t)
0°	36436	196637	7h
30°	19992	92089	3h
45°	24576	120214	5h
60°	30480	144226	4h 30min
90°	42160	191293	5h 30min

Tab. 4: Hodnoty max. úhlových a hlavních přetvoření, třetí hlavní napětí (Ohyb)

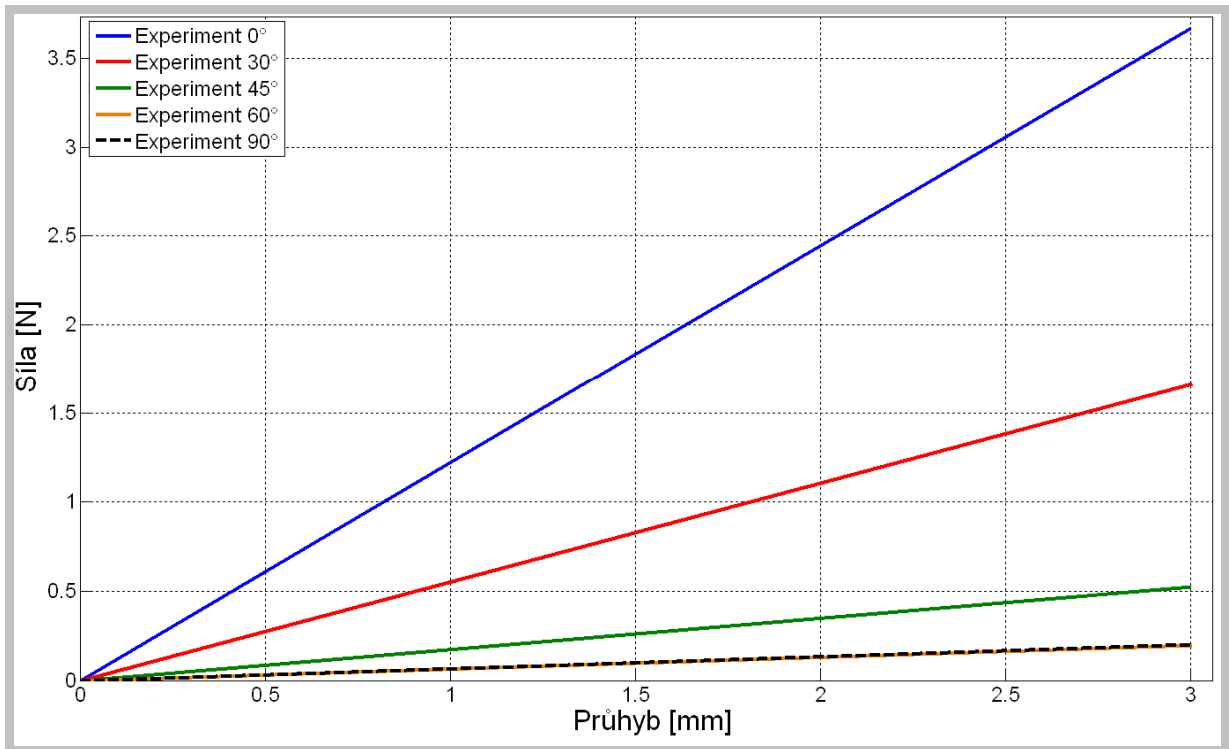
$\alpha$	$\gamma_{\max}$	$\epsilon_1$	$\sigma_3$
0°	0,054	0,103	0,49
30°	0,349	0,209	5,83
45°	0,407	0,269	6,27
60°	0,071	0,046	1,14
90°	0,037	0,022	0,94



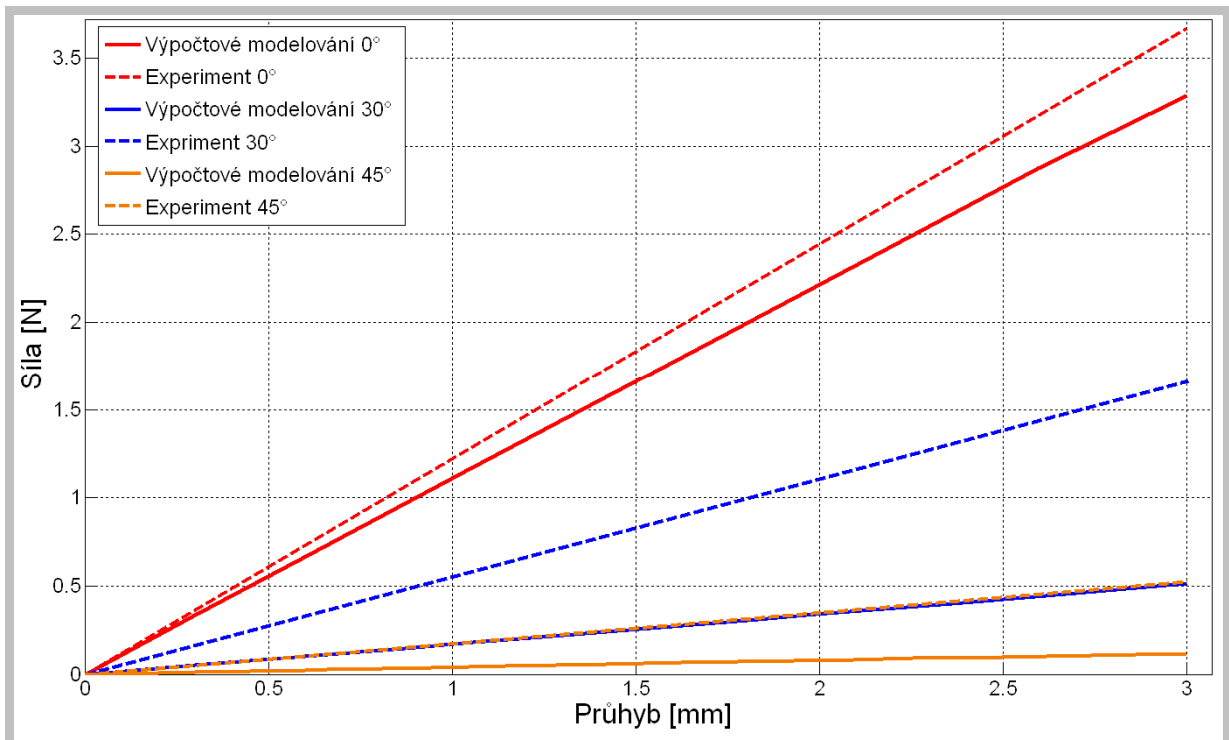
Obr. 45: Největší hlavní přetvoření  $\epsilon_1$  vzorku s podélnými vlákny (OHYB)



Obr. 46: Posuv ve směru tloušťky vzorku se šikmými vlákny (OHYB)

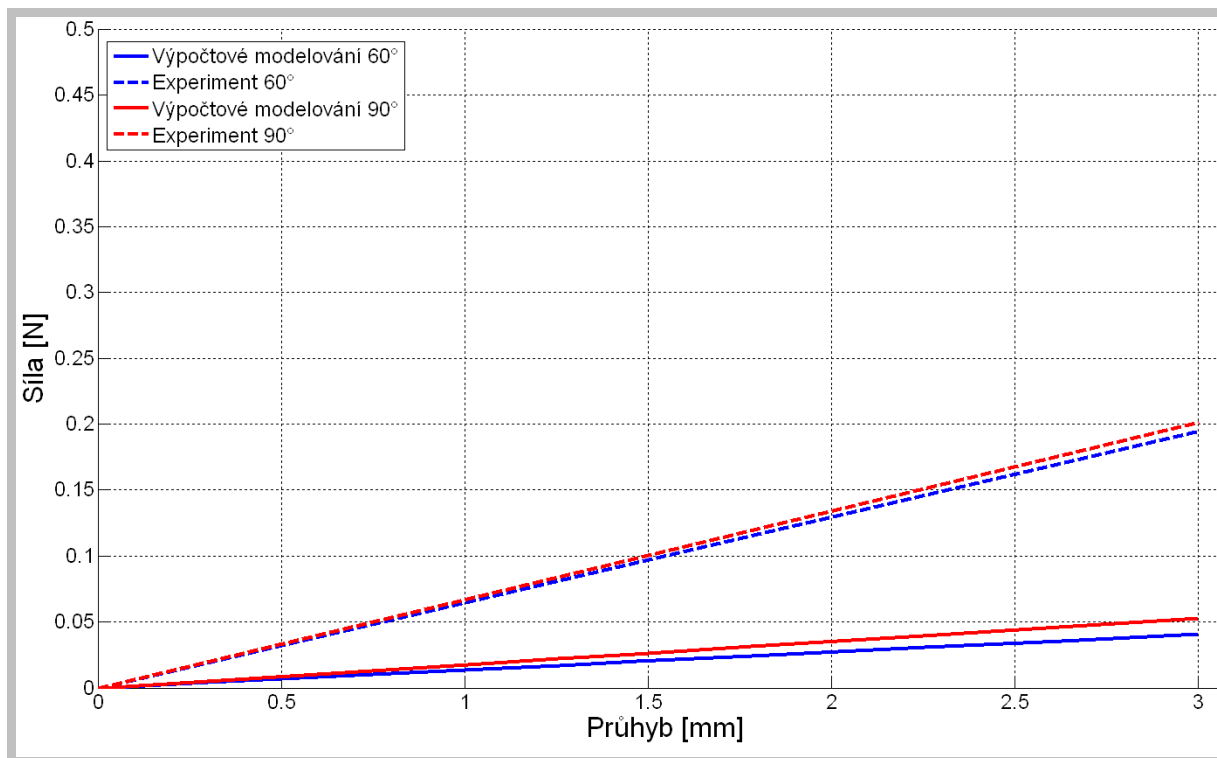


Obr. 47: Porovnání trendu experimentálních závislostí síly na průhybu (OHYB)



Obr. 48: Porovnání výsledků výpočtového modelování s experimentem (OHYB) 1





**Obr. 49:** Porovnání výsledků výpočtového modelování s experimentem (OHYB) 2

Z obrázků **Obr. 48** a **Obr. 49** je patrná závislost velikosti reakční síly na úhlu odklonu ocelových vláken od podélného směru. Z toho vyplývá, že při úhlu odklonu ocelových vláken  $\alpha = 0^\circ$  (podélná vlákna) je velikost reakční síly největší a se zvětšujícím se úlem odklonu vláken  $\alpha = (30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$  se velikost reakční síly zmenšuje (viz. **Obr. 47**). Výrazné změny velikosti reakčních sil jsou mezi úhly  $\alpha = (0^\circ, 30^\circ, 45^\circ)$  a pro úhly  $\alpha = (60^\circ, 90^\circ)$  je velikost reakčních sil téměř stejná a velice malá (do  $F = 0,2\text{N}$ ), z čehož vyplývá, že použití výztužných vláken pod úhlem  $\alpha = (60^\circ, 90^\circ)$  nemá příliš význam z hlediska zvýšení ohybové tuhosti kompozitu. Rozdíly mezi výpočtovým modelováním a experimentem mohou být způsobeny absencí experimentální smykové zkoušky, dále stárnutím pryže a například při zkoušce jednoosým tahem, z hlediska tuhosti, nezáleží na zcela přesném rozložení vláken po průřezu, avšak při zkoušce tříbodovým ohybem je tento fakt velice podstatný a může mít výrazný dopad na výsledky z výpočtového modelování. Z výsledků v kapitolách (4.3.2) a (4.3.3) jsem došel k závěru, že u zkoušky ohybem je kvantitativní odchylka mezi experimentem a simulací větší než u zkoušky tahem.

#### 4.4 HOMOGENIZACE VLASTNOSTÍ ZKUŠEBNÍHO VZORKU HYPERELASTICKÉHO KOMPOZITU

V této kapitole se zabývám homogenizací vlastností zkušební vzorku kompozitu. V současné době je vytváření výpočtových modelů hyperelastických kompozitů na takové úrovni, že je nezbytné modelovat výztužná vlákna kompozitu. Jelikož zatím výpočtové modely vzorků hyperelastických kompozitů obsahují namodelovaná výstužná vlákna, je pro popis chování tohoto zkoumaného kontinua nutné použít vysoký počet prvků, jenž je zapotřebí pro získání věrohodných výsledků, z čehož plyne, že pro vyřešení takové úlohy je dosahováno dlouhých výpočtových časů. Tento fakt prakticky znemožňuje např. provést výpočet pneumatiky jako celku v reálném výpočtovém čase. Z tohoto důvodu je nutné provést homogenizaci vlastností kompozitu tak, že by se již nemodelovala výztužná vlákna, ale stačilo by vymodelovat pouze geometrii vzorku z homogenního materiálu. Mechanické vlastnosti vláken by byly vyjádřeny matematicky v měrné energii napjatosti  $W$  příslušného konstitutivního modelu. Takto provedená homogenizace vlastností kompozitu by vedla k výraznému snížení počtu prvků popisujících dané kontinuum, tím by se mnohonásobně snížil výpočtový čas potřebný k řešení úlohy. V mé diplomové práci se zabývám homogenizací vlastností kompozitu pomocí dvou konstitutivních modelů materiálu. Jedná se o Holzapfelův hyperelastický anizotropní model materiálu a polynomický hyperelastický anizotropní model materiálu. V první fázi návrhu homogenizace vzorku byl uvažován pouze Holzapfelův konstitutivní model materiálu. Tento model materiálu je prioritně využíván pro popis měkkých tkání, konkrétně pro popis mechanických vlastností a chování cév. K použití tohoto konstitutivního modelu materiálu nás vedl fakt, že céva je taktéž kompozitní materiál stejně jako námi zkoumaný zkušební vzorek hyperelastického kompozitu a zadávání směrových vlastností je velice podobné. Jelikož však byly zjištěny omezené možnosti aplikace Holzapfelova konstitutivního modelu materiálu pro výpočtové modelování technických kompozitů (viz. 4.4.1), musel být použit polynomický anizotropní model materiálu. Výsledky výpočtového modelování s použitím polynomického anizotropního modelu materiálu budou uvedeny v kapitole (viz. 4.4.2).

#### 4.4.1 HOLZAPFELŮV HYPERELASTICKÝ ANIZOTROPNÍ MODEL MATERIÁLU

U tohoto konstitutivního modelu materiálu je hustota deformační energie dána vztahem (48). Holzapfelův model se dá použít jen za předpokladu, že jsou výztužná vlákna namáhána tahem nikoli tlakem. Ze vztahu (48) je patrná struktura anizotropní složky hustoty deformační energie, jenž obsahuje  $k_1, k_2, \dots$ . A právě materiálový parametr  $k_1$ , jenž vyjadřuje tuhost výztužných vláken byl zdrojem problému konvergence výpočtu zkušební vzorku hyperelastického kompozitu se šikmými vlákny a to z následujícího důvodu. Holzapfelův konstitutivní model materiálu je používán pro výpočtové modelování cév, kde se materiálový parametr  $k_1$  pohybuje řádově v jednotkách [MPa]. Naproti tomu pro výpočtové modelování technických kompozitů je hodnota  $k_1$  ve stovkách až tisících [MPa]. Toto byl problém, jenž způsoboval nekonvergenci výpočtu a tudíž nebylo dosaženo žádných výsledků pro výpočtový model se šikmými vlákny. Pro výpočtový model s příčnými vlákny výpočet zkonvergoval, ale jen proto, že byla vlákna kolmo na směr zatěžování a z tohoto důvodu byla neaktivní ve smyslu přenosu zatížení a celý vzorek hyperelastického kompozitu se choval jako samotná pryž, jelikož Holzapfelův konstitutivní model materiálu je schopen počítat pouze s vlákny namáhanými tahem. Z výše uvedeného vyplývá nemožnost použití tohoto modelu a nutnost použití polynomického anizotropního modelu.

#### 4.4.2 POLYNOMICKÝ HYPERELASTICKÝ ANIZOTROPNÍ MODEL MATERIÁLU

U tohoto konstitutivního modelu materiálu je hustota deformační energie dána vztahem (51). Ze vztahu (51) je vidět struktura anizotropní složky hustoty deformační energie. První člen ve vzorci pro hustotu deformační energie vyjadřuje změnu objemu, druhý člen je shodný s Neohookovým modelem s tím rozdílem, že materiálový parametr se musí násobit  $\frac{1}{2}$ , protože u Neohooka je tento člen poloviční. Čtvrtý a šestý člen vyjadřuje zahrnutí mechanických vlastností vláken do homogenizovaného vzorku kompozitu. Na tomto konstitutivním modelu materiálu byly prováděny pouze zkoušky jednoosým tahem a to na zkušebních vzorcích hyperelastického kompozitu s úhly odklonu „fiktivního“ vlákna od podélného směru  $\alpha = 30^\circ, \alpha = 45^\circ, \alpha = 60^\circ, \alpha = 90^\circ$ . Výsledky získané z výpočtového modelování homogenizovaného výpočtového modelu budou porovnány s výsledky

výpočtového modelu s namodelovanými vlákny. Podle předpokladu by se výsledky obou přístupů měli shodovat, čímž by bylo dosaženo homogenizace zkušební vzorku hyperelastického kompozitu.

Konkrétní materiálové parametry použité pro homogenizovaný vzorek:

Zadávatí materiálových parametrů se v tomto případě provádí pomocí makra, ve kterém jsou nadefinovány počáteční modul pružnosti ve smyku Neohook, jenž je podělen dvěma, dále materiálový parametr vyjadřující tuhost výstužných vláken, součinitel nestlačitelnosti materiálu a směrové vlastnosti výstužných vláken ve vzorku ve smyslu úhlu odklonu výstužných vláken od podélného směru. Konkrétní ukázka makra, které definuje vlastnosti materiálu je na obrázku (viz. **Obr. 50**).

```
/PREP7
TB,AHYPER,1,1,31,POLY

MODUL PRUŽNOSTI VE SMYKU/2
!!!!!!!KONSTANTY a1,a2,a3
TBDATA,1,0.5775,0,0

TUHOST VÝSTUŽNÝCH VLÁKEN
!!!!!!!KONSTANTY c2,c3,c4,c5,c6
TBDATA,7,6168,0,0,0,0

PARAMETR NESTLAČITELNOSTI
!!!!!!!KONSTANTA STLACITELNOSTI d
TB,AHYPER,1,1,1,PVOL
TBDATA,1,0.001

PRVNÍ OSNOVA VLÁKEN
!!!!!!!ORIENTACE VEKTORU A
TB,AHYPER,1,1,3,AVEC
TBDATA,1,0.886,0,0.5

DRUHÁ OSNOVA VLÁKEN
!!!!!!!ORIENTACE VEKTORU B
TB,AHYPER,1,1,3,BVEC
TBDATA,1,0,0,0
```

**Modul pružnosti ve smyku:**

$$a = \frac{G}{2} = \frac{1,155}{2} = 0,5775 \text{MPa} \quad (153)$$

kde G je modul pružnosti ve smyku u Neohooka, který byl vypočten z experimentálně získaných dat

**Tuhost výstužných vláken:**

$$E_L = \nu_f \cdot E_f = 0,117 \cdot 210000 = 24675 \text{MPa} \quad (154)$$

$$c = \frac{E_L}{4} = 6168 \text{MPa} \quad (155)$$

**Směrové vlastnosti vláken:** např. pro  $\alpha = 60^\circ$

$$A_x = \sin 60^\circ = 0,866 \quad (156)$$

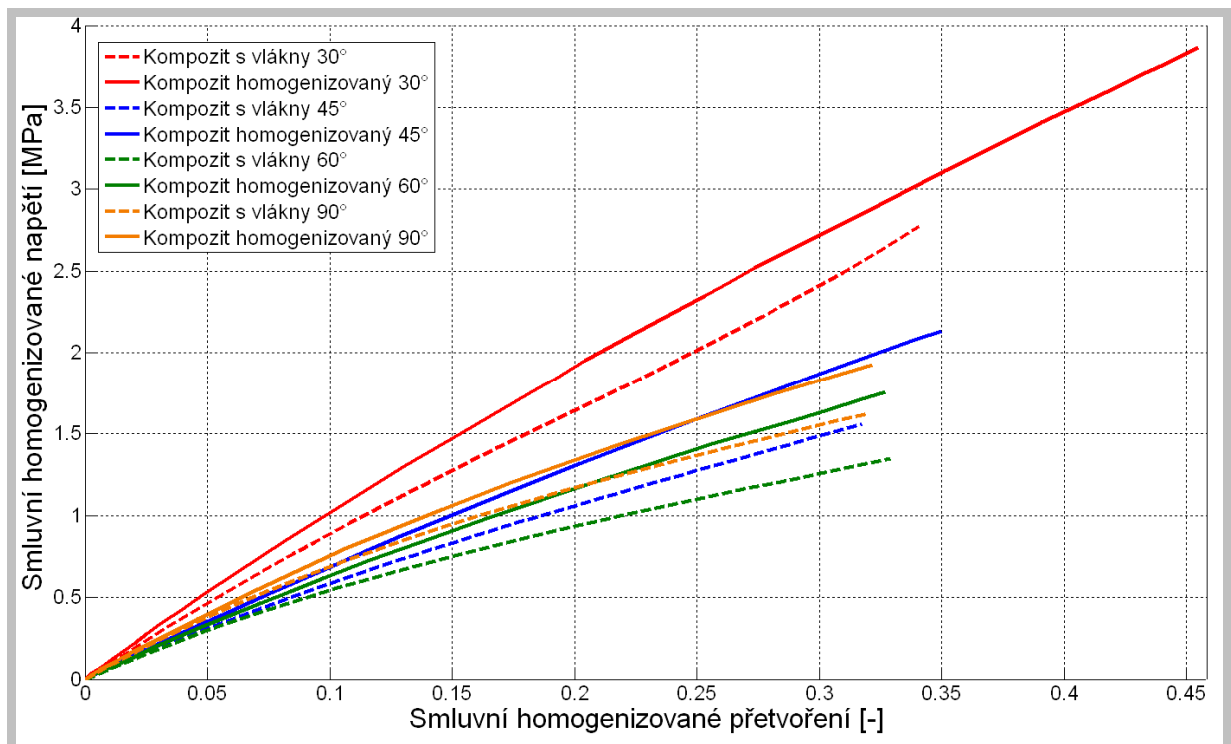
$$A_z = \cos 60^\circ = 0,5$$

**Obr. 50:** Definování polynomického anizotropního modelu materiálu v systému MKP

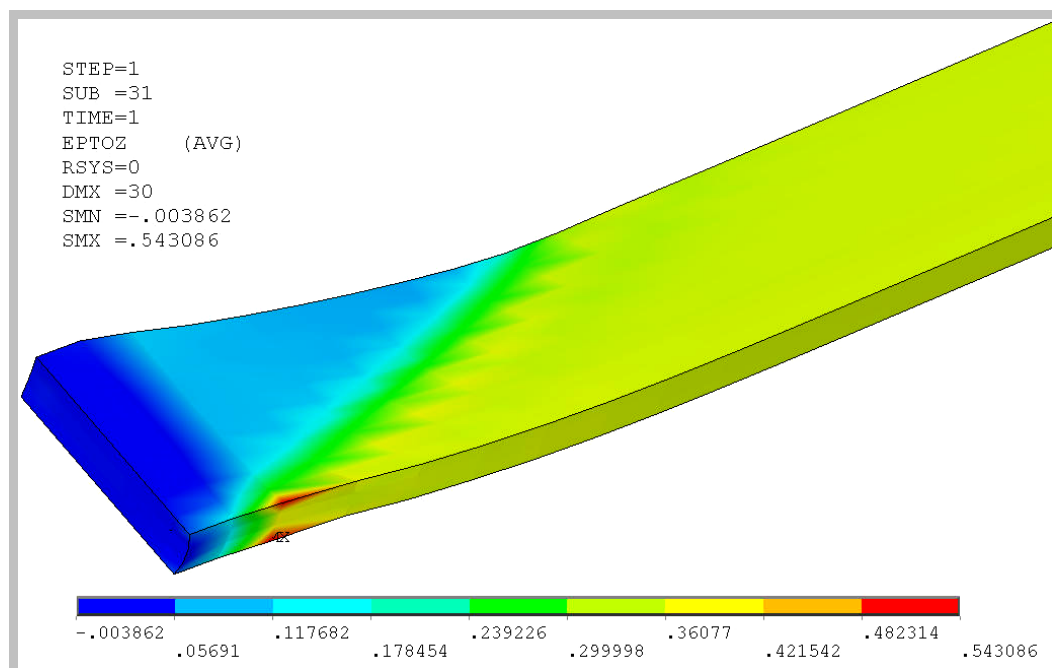
V tabulce (viz. **Tab. 5**) jsou uvedeny, hustota diskretizace ve smyslu počtu elementů a uzlů potřebných pro popis zkušebního vzorku a výsledný výpočtový čas, který byl zapotřebí pro řešení úlohy.

**Tab. 5:** Použitá diskretizace a výsledný výpočtový čas (Tah) homogenizovaný vzorek

$\alpha$	Elementy	Uzly	Čas (t)
30°	1380	7523	8min
45°			4min
60°			3min 40sec
90°			3min



**Obr. 51:** Porovnání výsledků kompozit s vlákny versus kompozit homogenizovaný (TAH)



*Obr. 52: Skutečné přetvoření v podélném směru homogenizovaného vzorku se “šikmými vlákny” (TAH)*

Z obrázku (viz. **Obr. 51**) je vidět, že z kvalitativního hlediska se deformačně napěťové křivky vzorku hyperelastického kompozitu s vlákny shodují s deformačně napěťovými křivkami homogenizovaného vzorku hyperelastického kompozitu a že z hlediska kvantitativního je zde velice malá odchylka v řádu jednotek procent, což je velice dobrý výsledek. Z toho vyplývá, že předpoklad o použití polynomickeho anizotropního modelu materiálu, který homogenizuje vlastnosti hyperelastického kompozitu je v pořádku a lze pomocí něj výpočtově modelovat ekvivalentně deformačně napěťové stavy jako u vzorku hyperelastického kompozitu s vlákny. Rozdíl je zde při vyhodnocování přetvoření. U vzorku hyperelastického kompozitu s vlákny je smluvní přetvoření vypočteno z rozdílu posuvů, naproti tomu u homogenizovaného vzorku hyperelastického kompozitu je smluvní přetvoření vypočteno dle příslušných vztahů ze skutečného přetvoření, které je odečteno přímo z Ansysu. Dále je z tabulky (viz. **Tab. 5**) patrné, že homogenizací vlastností vzorku hyperelastického kompozitu se velmi výrazně snížil počet prvků (přibližně o jeden až dva řády) popisující zkoumané kontinuum a tím se zkrátil čas potřebný pro řešení úlohy z řádů hodin pouze na několik minut.

## 5 ZÁVĚR

Cílem této diplomové práce bylo seznámit se s konstitutivními modely hyperelastických izotropních a anizotropních materiálů a identifikací jejich parametrů na základě mechanických zkoušek a vytvořit výpočtové modely zkušebních těles z kompozitu „pryž-ocelové vlákno“ s různým uspořádáním vláken a využít je při simulaci vybraných zkoušek. Dále otestovat možnosti modelování kompozitu s využitím homogenizace jeho vlastností a porovnat výsledky obou přístupů. Seznámení se s konstitutivními modely hyperelastických materiálů a identifikace jejich parametrů byla provedena v kapitole (4.1) formou testovacích úloh hyperelastického materiálu. Byly vytvořeny výpočtové modely zkušebních vzorků z hyperelastického kompozitu a to s úhly odklonu ocelového vlákna od podélného směru  $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ , které byly použity při simulaci zkoušky jednoosým tahem a zkoušky třibodovým ohybem. Výsledky simulací na výpočtovém modelu zkušebního tělesa z hyperelastického kompozitu s vlákny jsou prezentovány v kapitolách (4.3.2) a (4.3.3). Pro homogenizaci vlastností kompozitu byly zvoleny dva konstitutivní modely hyperelastického materiálu. Prvním z nich byl Holzapfelův konstitutivní model, který se ovšem ukázal jako nepoužitelný (viz. 4.4.1). Druhým byl polynomický konstitutivní model, pomocí něhož byla již úspěšně provedena homogenizace vlastností hyperelastického kompozitu (viz. 4.4.2). Z porovnání obou přístupů (kompozit s vlákny versus homogenizovaný kompozit) plyne fakt, že homogenizace vlastností kompozitu je možná a dává srovnatelné výsledky při řádově nižších výpočtových časech (viz. 4.4).

Vytvořené výpočtové modely homogenizovaných vzorků kompozitu by mohly být využitelné ve výpočtovém modelování celých pneumatik, což by výrazně zkrátilo výpočtové časy. K dosažení jejich lepší věrohodnosti (shody s experimentem) je nutné doplnit chybějící vstupní údaje (smyková zkouška elastomeru) a provést rozsáhlejší experimentální verifikace.

## 6 LITERATURA

- [1] ANSYS User manual - hyperelasticity
- [2] Skácel, P.: Výpočtové a experimentální modelování deformačně napjatostních a mezních stavů elastomerů a jejich rozhraní s tuhými materiály. Disertační práce, FSI VUT BRno, 2005.
- [3] G.A. Holzapfel: Nonlinear Solid Mechanics, Willey and Sons, Chichester, 2000.
- [4] Constitutive Models of Rubber, ed. Dorfmann and Muhr, Balkema, Rotterdam, 1999.
- [5] Agarwal,B.D., Broutman,L.J.: Vláknové kompozity, SNTL Praha, 1987.
- [6] Petruška, J., Burša, J.: Nelineární úlohy mechaniky v MKP
- [7] Burša, J.: Výpočtové modelování problémů mechaniky živých a neživých těles z kompozitních materiálů umožňujících velké deformace. Habilitační práce, FSI VUT Brno, 2005.
- [8] Krmela, J.: Návrh výpočtového prostorového modelu radiální pneumatiky. Disertační práce, Univerzita Pardubice, 2004.
- [9] Urban, R.: Modelování konstrukčních prvků z pryže vyztužené nitěmi. Disertační práce, Technické univerzity v Liberci, 2004.
- [10] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B.: Mechanika kontinua, Academia, 2005.