Česká zemědělská univerzita v Praze

Provozně ekonomická fakulta

Katedra systémového inženýrství

Bakalářská práce

Okružní dopravní problém ve vybrané logistické firmě

Markéta Tišerová

ČESKÁ ZEMĚDĚLSKÁ UNIVERZITA V PRAZE

Provozně ekonomická fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Markéta Tišerová

Systémové inženýrství a informatika
Systémové inženýrství

Název práce

Okružní dopravní problém ve vybrané logistické firmě

Název anglicky

Travelling salesman problem in a selected logistic company

Cíle práce

Cílem této bakalářské práce je analýza realizované trasy mezi vybranou logistickou firmou a jejími zákazníky pomocí modelu okružního dopravního problému a její následná optimalizace s využitím celočíseleného lineárního programování.

Metodika

1) Studium odborné literatury se zaměřením na celočíselené lineární programování a jeho aplikaci na problematiku okružních úloh

2) Sběr a zpracování dat ve zvolené firmě

3) Analýza získaných dat

4) Interpretace výsledků a ekonomická analýza

5) Diskuze a závěry

Doporučený rozsah práce

30-40 stran

Klíčová slova

okružní dopravní problém, problém obchodního cestujícího, lineární programování, logistika

---

Doporučené zdroje informací

APPLEGATE, D.L., BIXBY, R.E., CHVÁTAL, V. and COOK, W.J. The Traveling Salesman Problem – a Computational Study. Oxford: Princeton University Press. 2006. ISBN 978-0-691-12993-8

PELIKÁN, J. 1993. Praktikum z operačního výzkumu. 1.vyd. Praha: VŠE. 86 s. ISBN 80-7079-135-7

PELIKÁN, J. 2001. Diskrétní modely v operačním výzkumu. 1. vyd. Praha: Professional Publishing. 164 s. ISBN 80-86419-17-7

ŠUBRT, T. a kol. 2011. Ekonomicko-matematické metody. 1. vyd. Plzeň: Aleš Čeněk. 351 s. ISBN 978-80-738-0345-2

Předběžný termín obhajoby

2021/22 LS – PEF

Vedoucí práce

Ing. Igor Krejčí, Ph.D.

Garantující pracoviště

Katedra systémového inženýrství

Elektronicky schváleno dne 24. 11. 2021

doc. Ing. Tomáš Šubrt, Ph.D.

Vedoucí katedry

Elektronicky schváleno dne 29. 11. 2021

Ing. Martin Pelikán, Ph.D.

Děkan

V Praze dne 16. 03. 2023

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci "Okružní dopravní problém ve vybrané logistické firmě" jsem vypracovala samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou citovány v práci a uvedeny v seznamu použitých zdrojů na konci práce. Jako autorka uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že jsem v souvislosti s jejím vytvořením neporušil autorská práva třetích osob.

V Praze dne 16.3.2023 ____________________________

Poděkování

Ráda bych touto cestou poděkovala panu doc. Ing. Igorovi Krejčímu, Ph.D. vedoucímu mé bakalářské práce, za trpělivost, konzultace a odborné rady, které mi poskytoval po celou dobu její tvorby. Dále bych chtěla poděkovat logistické firmě, která mi poskytla data pro vypracování mé bakalářské práce. V neposlední řadě děkuji svým blízkým a rodině za jejich podporu během celého studia.

Okružní dopravní problém ve vybrané logistické firmě

Abstrakt

Bakalářská práce se věnuje problematice okružního dopravního problému a jeho praktické aplikaci v logistické společnosti. Cílem této práce je optimalizace trasy pro logistickou firmu, která se zabývá distribucí léčivých přípravků a dermokosmetiky po celém území České republiky. V rámci podnikání je pro společnost důležité minimalizovat veškeré náklady spojené s dopravou, a to zejména z důvodu aktuálního nárustu cen, který zapříčinil rusko-ukrajinský konflikt. Optimalizace je provedena pomocí statické úlohy obchodního cestujícího s časovými okny.

Teoretická část práce nejprve vysvětluje termíny jako logistika, její vývoj a hlavní cíle, dále operační výzkum a způsoby jeho aplikace a poté je popsána samotná úloha obchodního cestujícího. V této části práce je také představen doplněk OpenSolver pro Excel, který je nezbytným nástrojem pro výpočet optimalizace.

V praktické části práce je specifikován řešený problém a představena společnost, která poskytla potřebná vstupní data. Je sestaven matematický model a následně proveden jeho výpočet a optimalizace v OpenSolveru s použitím solver enginu CBC.

Závěrem je vypočtená trasa porovnána s trasou, která byla k rozvozu skutečně využita. Pomocí optimalizace je zjištěno, zdali není možné obsluhovat zákazníky v tomto okruhu efektivněji.

Klíčová slova: okružní dopravní problém, problém obchodního cestujícího, lineární programování, logistika

Travelling salesman problem in a selected logistic company

Abstract

The bachelor thesis is focused on the issue of the traveling salesman problem and its practical application in a logistics company. The aim of this thesis is to optimize the route for a logistics company that specializes in distributing medicinal products and dermo-cosmetics throughout the Czech Republic. In the context of business, it is important for the company to minimize all costs associated with transportation, especially due to the current rise in prices caused by the Russian-Ukrainian conflict. The optimization is performed using a static traveling salesman problem with time windows.

The theoretical part of the thesis first explains terms such as logistics, its development and main goals, followed by operations research and ways of its application, and then the traveling salesman problem itself is described. This part of the thesis also introduces the OpenSolver add-in for Excel, which is a necessary tool for for calculating optimization.

The practical part of the thesis specifies the problem to be solved and introduces the company that provided the necessary input data. A mathematical model is built and then its calculation and optimization is performed in OpenSolver using the CBC solver engine.

Finally, the calculated route is compared with the route that was actually used for delivery. Using the optimization, it is determined whether it is not possible to serve customers in this circuit more efficiently.

Keywords: circular transportation problem, traveling salesman problem, linear programming, logistics

Obsah

1 Úvod

V souvislosti s rostoucí mírou globalizace je doprava nezbytnou součástí jakékoliv obchodní aktivity. Většina výrobků a produktů je vyráběna a následně i dovážena ze zahraničí, a to ať už z jiného státu, nebo dokonce kontinentu. Současně takto bývají dopravovány i jednotlivé části a materiály k výrobě. Tato skutečnost nutí společnosti věnovat značnou pozornost svým logistickým procesům tak, aby mohly úspěšně zásobovat trh a uspokojovaly tak potřeby zákazníků, a to za dodržení co nejefektivnějšího ekonomického hospodaření s následnou maximalizací zisku.

Ačkoliv je možné rozvážet zboží od dodavatele vždy přímo k jednomu zákazníkovi a nezabývat se tak plánováním jednotlivých tras, uspořádáním všech zákazníků nutných k obsloužení do jednoho rozvozového okruhu dojde k nalezení značně úspornějšího řešení. Z tohoto důvodu využívá většina firem aplikace a programy, které dokáží analyzovat současně používané procesy a případně i doporučit jejich zlepšení.

Na problematiku optimalizace tras, které bude v této práci řešena, je vhodné použít metodu obchodního cestujícího s rozšířením o časová okna. V této úloze se předpokládá, že všechny body na cestě musí být navštíveny právě jednou, a to v předem stanoveném časovém okně. Až poté je možné se navrátit zpět do výchozího bodu. Díky rozšíření o časová okna metoda umožňuje zohlednit otevírací doby jednotlivých míst, či jejich smluveného času na předávku zboží, a taktéž i pracovní dobu řidiče.

V praktické části práce bude tato metoda aplikována na realizovanou dopravní trasu společnosti, která se zabývá distribucí léčivých přípravků a poskytování služeb jejich výrobcům po celém území České republiky.

2 Cíl práce a metodika

2.1 Cíl práce

Cílem bakalářské práce je optimalizace dopravní trasy společnosti zabývající se rozvozem sortimentu léčivých přípravků na území České republiky. Optimalizace má za úkol nalézt nejvhodnější pořadí míst pro realizaci rozvozového okruhu, a to s ohledem na otevírací doby zásobovaných odběrných míst a současně i pracovní dobu řidiče vozidla. Výsledek vypočtené trasy bude porovnán s trasou, kterou firma skutečně využila. Na základě tohoto porovnání bude následně firmě nabídnuta případná úprava trasy.

2.2 Metodika

Teoretická část práce se zaměřuje na zpracování poznatků z odborné literatury, které napomáhají k objasnění problematiky okružních problémů a metod jejich výpočtu. Jsou zde vysvětleny pojmy jako logistika, operační výzkum, okružní dopravní problém a doplněk pro Microsoft Excel s názvem Open Solver, pomocí kterého je poté realizován výpočet vlastní práce. Nejprve je v kapitole logistika popsána její definice, historie a primární cíle. Dále je rozebrán operační výzkumu od jeho počátků, způsoby jeho aplikace, členění modelů a poté jsou představeny jednotlivé disciplíny, kterými se operační výzkum zabývá. Následně je podrobně vysvětlen okružní dopravní problém, jeho obecná formulace, historický vývoj a taktéž kritéria, podle kterých lze okružní úlohy rozlišovat. Dále jsou v práci představeny některé ze základních užívaných metod řešení okružních problémů. Metodě Branch and Cut je věnována samostatná kapitola, a to z důvodu, že je tato metoda poté využita doplňkem OpenSolver k výpočtu vlastní práce. Následně je popsána jak statická, tak dynamická verze úlohy společně s jejich matematickými modely. V rámci statické verze úlohy okružního problému je taktéž rozebrána metoda obchodního cestujícího s časovými okny, kdy je nutné obsloužit zastávku v určitém časovém rozmezí. Teoretická část závěrem pojednává o volně dostupném doplňku OpenSolver pro program Microsoft Excel.

Praktická část nejprve představuje charakteristiku společnosti, která poskytla data pro výpočet. Poté je definován řešený rozvozový problém a jsou představena vstupní data. Těmi jsou zejména jednotlivá místa, ve kterých je nutné uskutečnit rozvoz produktů. Tato místa avšak podléhají časovým oknům, která pevně vymezují dobu, kdy je možné obsluhu realizovat. Následuje sestavení matematického modelu. Použita je strategie, kdy vozidlo čeká u zákazníka před jeho obsloužením. V rámci matematického modelu je nutné prvně vytvořit matici vzdáleností mezi jednotlivými místy. K výpočtu metodou okružního dopravního problému rozšířeného o časová okna je taktéž nezbytné sestrojit matici časové náročnosti. Ta je utvořena za pomoci vzdáleností matice a průměrné rychlosti, kterou vozidlo na trase jede. Důležitým prvkem modelu jsou podmínky, které zaručují splnění požadavku na obsluhu jednotlivých zastávek v rámci povoleného časového okna. Následně je proveden samotný výpočet pomocí softwaru Microsoft Excel pro Microsoft 365 s volně dostupným doplňkem OpenSolver 2.9.3.

Na konci práce jsou dosažené výsledky zhodnoceny a porovnány s trasou, kterou firma skutečně použila k realizaci daného rozvozu. V případě dosažení lepších výsledků je firmě doporučena úprava metody plánování tras.

3 Teoretická východiska

3.1 Logistika

Logistika je obor zabývající se přepravou nejen zboží, ale také osob a informací. Jejím hlavním cílem je minimalizovat čas a prostor potřebný k přepravě požadovaného množství zboží či služeb za co nejnižší náklady. Logistický proces začíná již při získání počáteční suroviny a končí až uspokojením požadavků zákazníka. Logistika se nezabývá pouze samotnou dopravou, ale také řízením zásob, organizací skladů a optimalizací materiálových toků výrobním procesem. Je tedy důležitým faktorem pro úspěšné fungování jakéhokoli podniku pro dosažení konkurenční výhody. Její úloha by tedy neměla být podceňována v procesu tvorby a implementace podnikové strategie. (Štůsek, 2007)

Heskett (1997) naopak zmiňuje, že je logistika často vnímána jen jako podpůrná funkce. Ve skutečnosti hraje kritickou roli při dosahování konkurenční výhody správným řízením toku zboží a informací v celém zásobovacím řetězci. Autor zdůrazňuje, že efektivní řízení logistiky vyžaduje přístup napříč funkcemi, zahrnující koordinaci mezi marketingem, výrobou, nákupem, dopravou a informačními systémy.

Obrázek 1: Příklad logistického řetězce (Sixta a Mačát, 2005, s. 119)

Podle Christophera (2011) je logistický řetězec souborem vzájemně propojených aktivit, které zahrnují plánování, nákup, výrobu, skladování, distribuci a přepravu výrobků a služeb od výrobce ke konečnému zákazníkovi. Obrázek 1 znázorňuje příklad řetězce. Mezi hlavní prvky tohoto logistického řetězce spadají (Christopher, 2011):

- **Aktivní prvky** – Prvky, které se aktivně podílejí na řízení a zajišťování plynulého toku materiálů, zboží a služeb. Podstatné je, že mohou být ovlivněny, jako například plánování, řízení a koordinace procesů, dodavatelský vztahy, inventura a řízení skladových zásob. (Christopher, 2011)

- **Pasivní prvky** – Za ně se považují prvky vnější, které nelze ovládat. Příkladem takovýchto prvků může být počasí, trh a konkurence, ekonomické a politické události a technologický vývoj. (Christopher, 2011)

3.1.1 Definice logistiky

Pro logistiku existuje mnoho různých definic, které se liší nejen podle pohledu na ni, ale také podle doby publikace. Podle Sixty a Mačáta (2005 s. 22) je za první významnou definici považována definice americké logistické společnosti Council of Logistic Management z počátku 60. let 20. století. Ta uvádí logistiku jako *„proces plánování, realizace a řízení účinného, nákladově úspěšného toku a skladování surovin, inventáře ve výrobě, hotových výrobků a příslušných informací z místa vzniku zboží na místo potřeby. Tyto činnosti mohou zahrnovat službu zákazníkovi, předpověď poptávky, distribuci informací, kontrolu zařízení, manipulaci s materiálem, vyřizování objednávek, alokaci pro zásobovací sklad, balení, dopravu, přepravu, skladování a prodej.“*

Mezi další významné definice řadí Sixta a Mačát definici od Evropské logistické asociace, která narozdíl od té americké upřednostňuje stránku ekonomickou. Ta definuje logistiku jako proces *„organizace, plánování, řízení a výkon toků zboží vývojem a nákupem počínaje, výrobou a distribucí podle objednávky finálního zákazníka konče, tak aby byly splněny požadavky trhu při minimálních nákladech a minimálních kapitálových výdajích.“* (Gros, 1995)

Schulte (1994, s. 13.) uvádí logistiku jako *„integrované plánování, formování, provádění a kontrolování hmotných a s nimi spojených informačních toků od dodavatele do podniku, uvnitř podniku a od podniku k odběrateli.“*

Podle prvního prezidenta České logistické asociace prof. Ing. Petra Pernici, CSc. (1998, s. 80) z Vysoké školy ekonomické v Praze lze logistiku charakterizovat jako *„disciplínu, která se zabývá celkovou optimalizací, koordinací a synchronizací všech aktivit v rámci samoorganizujících se systémů, jejichž zřetězení je nezbytné k pružnému a hospodárnému dosažení konečného (synergického) efektu.“*

Obecně lze logistiku chápat jako obor s cílem zajistit správný chod několika faktorů, což je vyjádřeno pravidlem "5 S" logistiky. Tedy správné zboží ve správném množství na správném místě ve správný čas za správnou cenu, jak uvádí Oudová (2016).

3.1.2 Vznik a vývoj logistiky

Samotné slovo logistika je odvozeno od řeckého základu „logos“, což je možné chápat jako slovo, myšlenku a rozum. Výraz „logisticon“, ze kterého „logos“ vychází, odkazuje tedy především na důmyslnost. (Oudová, 2016)

Původ je možné najít i ve starofrancouzštině, kdy je pojem logistika odvozen od slov „loger“ nebo „logis“, která znamenají zaopatřit, obydlí či úkryt. (Stehlík a Kapoun, 2008)

Byzantský císař Leontos VI., vládnoucí v letech 886 až 912, v díle "Souhrnný výklad vojenského umění" poskytl jedno z prvních vymezení oboru logistiky které pojednávalo, že předmětem logistiky je *„mužstvo zaplatit, příslušně vyzbrojit a vybavit ochranou i municí, včas a důsledně se postarat o jeho potřeby a každou akci v polním tažení příslušně připravit.“* Mezi další významné osobnosti, které logistiku spojovaly výhradně s armádou, patřil generál Antoine-Henry de Jomini. Ten základy logistiky popsal ve svém díle "Précis de l’art de la guerre", v překladu Náčrt vojenského umění. Generál pojem logistika odvozuje od funkce ve francouzské armádě "maréchal des logis", jejímž úkolem bylo organizovat umístění a táboření jednotek. Tímto jako první umístil logistiku vedle strategie a taktiky. (Stehlík a Kapoun, 2008)

V padesátých letech 20. století se logistika začala rozvíjet jako samostatná vědní disciplína, která našla uplatnění i v oblastech mimo vojenskou problematikou. Tento rozvoj úzce souvisel s rychlým nárůstem výrobních kapacit, což vedlo k větším požadavkům na distribuci vyráběných výrobků. V padesátých letech se také změnila podnikatelská koncepce z prodejní na marketingovou, což znamenalo rozšíření nabídky a palety služeb. Tento trend zvýšil nároky na distribuci výrobků a zdrojů. Logistika však nezahrnuje pouze dopravu materiálu nebo výrobků z místa na místo. Mezi její úkoly patří také řízení zásob, organizace a řízení skladů a optimalizace materiálových toků výrobního procesu. (Sixta a Mačát, 2005)

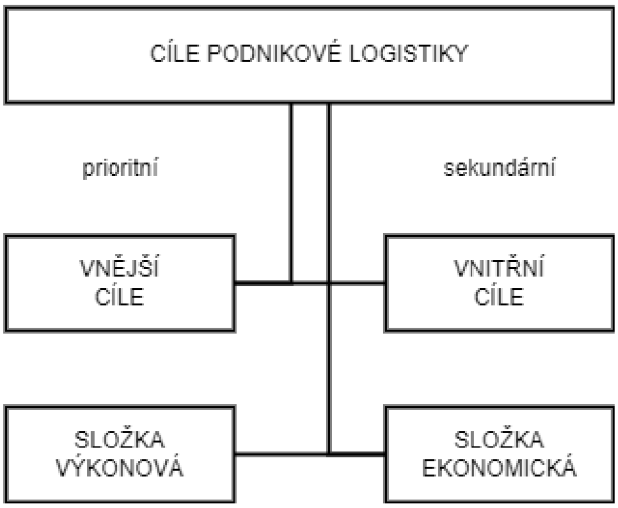
3.1.3 Cíle logistiky

Na začátku je důležité zdůraznit dvě klíčové skutečnosti o cílech podnikové logistiky (Sixta a Mačát, 2005):

- Cíle podnikové logistiky musí být odvozeny z celkové strategie podniku a napomáhat k dosažení celopodnikových cílů.
- Zároveň musí zajistit uspokojení zákaznických požadavků na produkty a služby na požadované úrovni s minimálními celkovými náklady.

Cíle logistiky lze rozdělit na dvě základní kategorie – prioritní a sekundární. Prioritní cíle jsou dále rozděleny na vnější a výkonové. Mezi vnější cíle logistiky patří zajištění dostatečného zásobování zákazníků na trhu společně s důrazem na jejich spokojenost, minimalizace nákladů na logistiku a zkrácení dodacích lhůt. Tyto cíle jsou zaměřeny především na vnější prostředí organizace a na vztahy se zákazníky. To vše přispívá k tvorbě dobrého jména společnosti. Výkonové cíle logistiky se na druhé straně zaměřují na interní procesy a výkonnost organizace. Důraz je kladen na dodržování požadované kvality a úrovně služeb. Není nutné dosahovat jejich maximální možné úrovně, ale spíše zajistit dostatečné množství zboží nebo materiálu v požadované kvalitě. (Sixta a Mačát, 2005)

Sekundární cíle se dělí na vnitřní a ekonomické. Vnitřní cíle se zaměřují se zaměřují na snižování nákladů při dodržení splnění vnějších cílů. Mezi ně spadají náklady spojené se skladováním, dopravou, manipulací, výrobou a řízením. Ekonomickým cílem logistiky je zajistit, aby byly poskytovány služby za co nejnižší možné náklady, které jsou přitom adekvátní kvalitě a úrovni poskytovaných služeb. Vysoká úroveň služeb může být sice atraktivní pro zákazníky, ale zároveň vede k vyšším nákladům na poskytování těchto služeb, což může naopak způsobit negativní dopad na zákazníky. Proto je důležité zajistit poskytování logistických služeb s optimálními náklady, aby nedocházelo k žádnému z extrémů. (Sixta a Mačát, 2005)



Obrázek 2: Dělení priorit a cílů logistiky (Sixta a Mačát, 2005, s. 42)

3.2 Operační výzkum

„Operační výzkum je prostředek pro nalezení nejlepšího (optimálního) řešení daného problému při respektování celé řady různorodých omezení, které mají na chod systému vliv“ (Winston a Goldberg, 2004, s. 1 – vlastní překlad)

Operační výzkum je soubor vědních disciplín se zaměřením na analýzu různých typů rozhodovacích problémů neboli výzkum operací. Nachází uplatnění v mnoha oblastech, kde je třeba analyzovat a koordinovat operace, aby se zajistilo nejlepší možné fungování daného celku, tedy optimalizace. (Winston a Goldberg, 2004)

Jablonský (2017) označuje za cíl operačního výzkumu snahu nalézt optimální řešení, což znamená výběr nejlepší varianty z množství dostupných možností. Pro posouzení toho, zda je systém funkční, je třeba stanovit nějaké kritérium nebo kritéria. Metody operačního výzkumu umožňují díky využití matematiky a grafického zpracování jednoduchou manipulaci s reálnými problémy a zahrnují také řešení problémů v nejistém prostředí.

3.2.1 Vývoj operačního výzkumu

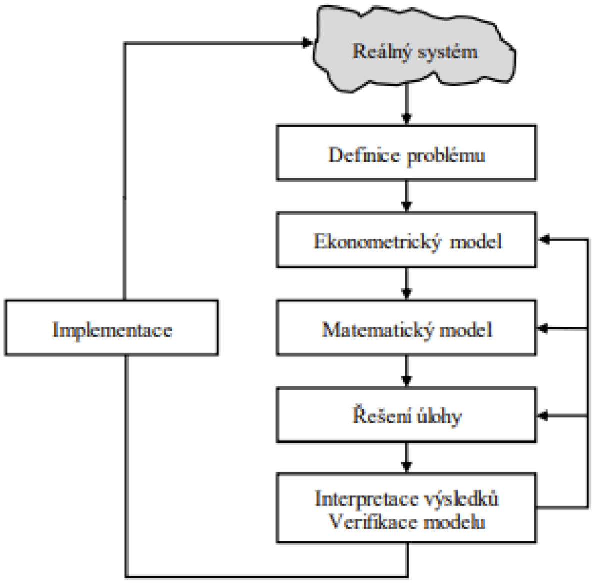
Operační výzkum se vyvinul jako disciplína, která se zabývá aplikací matematických metod, statistických analýz a informačních technologií k řešení praktických problémů. Přestože není jednoduché datovat jeho vznik, první zmínky se objevují od první poloviny 20. století. V roce 1937 byl v USA založen první operační výzkumný ústav, který se zaměřoval na analýzu vojenských operací a vývoj matematických modelů pro rozhodování. Hlavní rozvoj nastal během druhé světové války, kdy byl operační výzkum využíván pro řešení řady vojenských problémů, jako například optimalizace rozvržení lodí a letadel, řízení. (Gass a Assad, 2011)

Po válce se využití operačního výzkumu rozšířilo převážně do průmyslového sektoru, kde se stal klíčovým při optimalizaci, plánování a řízení výroby a logistiky. Své uplatnění však našel i ve zdravotnictví, dopravě či bankovnictví. Během druhé poloviny 20. století byly vyvinuty nové metody, jako lineární programování, teorie her, teorie front nebo teorie řízení zásob. Značný přínos poté přinesl rozvoj v informačních technologií a celkový růst technického pokroku v oblasti výpočetní techniky. Díky tomu mohly být řešeny složitější matematické operace a komplikované problémy. Významně se také urychlila samotná doba trvání výpočtu. (Jablonský, 2007)

V dnešní době existuje spousta možností pro aplikaci operačního výzkumu. Operační výzkum je využíván pro optimalizaci procesů, plánování a řízení, a to jak v soukromém, tak veřejném sektoru. Praktické využití můžeme najít například v rozvozových službách, kde je nutné optimalizovat trasu a řídit flotilu vozidel efektivně a rychle. (Gass a Assad, 2011)

3.2.2 Aplikace operačního výzkumu

Během rozhodovacího procesu je potřeba vybrat z několika alternativních řešení právě to jedno, které je pro danou situaci nejlepší. I když mohou existovat jiná řešení, mohou být méně vhodná nebo dokonce neefektivní. Je proto klíčové použít správné nástroje a metody, které nám umožní najít optimální řešení s respektováním všech omezení a podmínek, které danou situaci ovlivňují. (Šubrt a kol., 2019)



Obrázek 3: Průběh rozhodovacího procesu (Fábry, 2011, s. 10)

Aplikace operačního výzkumu na reálný rozhodovací problém se skládá z několika na sebe navazujících fází. Jejich dodržení zajistí správné řešení problému. Mezi tyto fáze patří (Jablonský, 2007, s. 10-13):

1. <u>Rozpoznání a následná definice problému</u>

Prvním krokem je rozpoznání a definice problému, který je nutné řešit. Tento krok obvykle spadá do kompetence vedoucích pracovníků, kteří by měli mít přehled o problémech a jejich důsledcích. Správná definice problému je klíčová pro zamezení vzniku dalších chyb a případných nedostatků v jejich řešení. (Jablonský, 2007)

2. <u>Formulace ekonomického modelu</u>

Jedná se o jednoduchý popis problému, který by měl obsahovat jen nezbytné prvky a vazby mezi nimi. V ekonomickém modelu by měly být jasně definovány cíle analýzy, procesy, činitelé a jejich vzájemné vztahy. Cíle mohou být různé, od minimalizace nákladů až po maximalizaci zisku nebo optimalizaci výkonu. Procesy by měly být popsány co nejvíce reálně, ideálně na konkrétní příkladu, jako je například výroba výrobku. Mezi činitele patří parametry, které jsou fixní, jako je počet strojů, objem materiálu nebo pracovní síla. V poslední fázi se propojí procesy s činiteli a získá se informace o nutných nákladech na výrobu, spotřebu a předpokládaném zisku. (Fábry, 2011)

3. Formulace matematického modelu

V této fázi se přechází od ekonomického modelu k matematickému modelu. Matematický model je výrazně přesnější a konkrétnější než ekonomický model. Matematický model je zapsán pomocí matematických rovnic a nerovnic. Tyto rovnice a nerovnice jsou vytvořeny na základě procesů a činitelů, které byly identifikovány v ekonomickém modelu. V matematickém modelu se procesy stávají proměnnými a jejich intenzita je vyjádřena hodnotou proměnných. Naopak činitelé jsou vyjádřeni pomocí lineárních nebo nelineárních rovnic a nerovnic. Matematický model umožňuje provést optimalizační výpočty, což je následný krok při aplikaci operačního výzkumu. (Jablonský, 2007)

4. Řešení modelu

Řešení matematického modelu představuje výpočetní část rozhodovacího procesu, kde se snažíme nalézt optimální hodnoty proměnných a splnit stanovené podmínky. Existuje několik metod pro řešení matematických modelů, jako jsou lineární programování, nelineární programování, celočíselné programování a další. Tyto metody se liší v závislosti na typu modelu a jeho složitosti. (Fábry, 2011)

5. Interpretace a verifikace

Interpretace výsledků matematického modelu může být náročná, neboť se často jedná o velké množství dat a složitých vztahů mezi nimi. Správná interpretace je klíčová pro to, aby se rozhodovatelé mohli spolehnout na výsledky modelu a přijmout relevantní rozhodnutí. Nicméně, samotná interpretace nestačí, a proto je nutné provést verifikaci, aby se ověřilo, zda bylo řešení správné a zda byl dosažen požadovaný cíl. Verifikace zahrnuje porovnání výsledků s očekávanými hodnotami a ověření správnosti matematických výpočtů a modelu jako celku. Tento proces pomáhá zajistit, že výsledky jsou spolehlivé a že rozhodnutí, která jsou na nich založena, jsou relevantní a účinná. (Jablonský, 2007)

6. Implementace

Jedná se o poslední fázi využití operačního výzkumu. V této fázi se provádí konkrétní kroky pro uplatnění navrhovaného řešení v praxi. Implementace může být realizována pomocí různých metod, například změnou pracovních postupů, nakoupením nových zařízení nebo zavedením nových technologií. Důležitým faktorem při implementaci je komunikace s pracovníky a s týmy, kteří budou řešení využívat. (Jablonský, 2007)

Důležité je také provádět kontrolu a sledování úspěšnosti implementace a případně upravovat postupy. Pokud se podaří úspěšně implementovat řešení, mohou být dosaženy pozitivní výsledky, jako například zvýšení produktivity, zlepšení kvality nebo snížení nákladů. (Fábry, 2011)

3.2.3 Klasifikace modelů

Podle Fábryho (2011, s. 13) je možné modely dělit dle následujících hledisek:

Deterministické a stochastické modely

Podle typu informací, které jsou k dispozici, lze modely dělit na deterministické a stochastické. Deterministické jsou založeny na přesných znalostech a jistotě. Tyto modely se používají, když jsou informace o rozhodování k dispozici bez jakýchkoliv náhodných nebo nepřesných prvků a zajišťují přesné a konzistentní výsledky. Stochastické modely se naopak řídí zákony pravděpodobnostního charakteru. Příkladem pro deterministický proces může být výroba na výrobní lince, přeprava nákladu po veřejné dopravní síti spadá pod stochastické procesy, jelikož se zde nepochybně vyskytují náhodné jevy. (Fábry, 2011)

Statické a dynamické modely

Podle zastoupení časové role lze modely dělit na statické a dynamické. Statické modely jsou takové modely, které pracují s jedním okamžikem času. To znamená, že vstupní data jsou pevně definována v čase a rozhodovací proces se odehrává v jednom konkrétním momentu. Tyto modely jsou vhodné pro situace, kdy jsou podmínky stabilní a v průběhu nedochází k žádné změně. (Winston a Goldberg, 2004)

Dynamické modely pracují s více okamžiky času. Tyto modely zahrnují vývoj situace v průběhu času a umožňují uvažovat například. o změnách vstupních podmínek a jejich vlivu na výsledky. (Fábry, 2011)

Mikroekonomické a makroekonomické modely

Z hlediska druhu a velikosti systému se modely dělí na mikroekonomické a makroekonomické. Mikroekonomické modely se zaměřují na menší, detailnější a konkrétní ekonomické systémy, jako jsou jednotlivé trhy pro zboží a služby nebo jednotlivé podniky. Tyto modely se snaží popsat chování jednotlivých subjektů na těchto trzích a vztahy mezi nimi. Makroekonomické modely se zaměřují na celkové ekonomické systémy a obvykle zahrnují větší množství subjektů a trhů. Tyto modely popisují vztahy mezi velkými ekonomickými faktory. Jako příklad může být uveden model celého národního hospodářství. (Fábry, 2011)

3.2.4 Disciplíny operačního výzkumu

Vzhledem k tomu, že je operační výzkum velmi široký obor, existuje jeho mnoho disciplín, z nichž se každá specializuje na jiný druh problému a využívá jiné metody a techniky pro jeho řešení. Uvedeny jsou ty nevýznamnější (Jablonský, 2007, s. 13-17):

- Matematické programování

„Je odvětví operačního výzkumu, zabývající se řešením optimalizačních úloh, ve kterých se jedná o nalezení extrému daného kritéria, definovaného ve tvaru kriteriální funkce n proměnných, na množině variant určených soustavou omezujících podmínek, které jsou zadány ve tvaru lineární nebo nelineární rovnic či nerovnic.“ (Jablonský, 2007, s. 13)

Matematické programování je disciplína operačního výzkumu, která se zaměřuje na řešení optimalizačních úloh. Tyto úlohy spočívají v hledání nejlepšího řešení pro danou situaci, které maximalizuje nebo minimalizuje určitý kritérium, tedy nalezne jeho extrém. (Fábry, 2011)

Cílem matematického programování je najít takové řešení, které splňuje všechna stanovená omezení. V praxi to znamená, že je potřeba nalézt optimální řešení problému a na základě předem určených podmínek učinit optimální rozhodnutí. (Brožová a Houška, 2009)

Matematický zápis úlohy matematického programování lze zapsat jako:

Maximalizace (minimalizace)	$z = f(x_1, x_2, \dots x_n)$	(1.1)
Za podmínek	$g_1 = (x_1, x_2, \dots x_n) \geq 0,$	(1.2)
	$g_1 = (x_1, x_2, \dots x_n) \geq 0,$	(1.3)
	$\vdots$	
	$g_m = (x_1, x_2, \dots x_n) \geq 0,$	(1.4)
	$x_j \geq 0, \quad j = 1,2, \cdots, n$	(1.5)

kde *n* je počet proměnných modelu, *m* je počet jeho omezujících podmínek a *f(x), gi(x)*, i = 1, 2,..., *m* jsou obecné funkce *n* proměnných. Pokud je kriteriální funkce lineární, a zároveň jsou všechny rovnice i nerovnice použité v modelu také lineární, jedná se potom o úlohu lineárního programování. (Jablonský, 2007)

- Vícekriteriální rozhodování

Vícekriteriální rozhodování je disciplína operačního výzkumu, která se zaměřuje na analýzu rozhodovacích úloh, při kterých je potřeba posoudit více než jedno kritérium současně. Tyto kritéria mohou být navzájem v rozporu a cílem této analýzy je nalézt řešení jejich konfliktu. (Jablonský, 2007)

Řešení konfliktu kritérií nebude vždy předpokládat optimalizaci všech kritérií, neboť kritéria jsou hodnocena subjektivně. Nejedná se tedy o optimální řešení, nýbrž o řešení kompromisní. (Brožová a Houška, 2009)

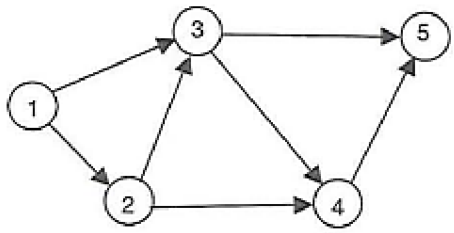
Tato disciplína je relativně nová a v současné době se stává stále důležitější v mnoha oblastech ekonomiky. Vícekriteriální rozhodování umožňuje vyhodnocovat a porovnávat různé varianty rozhodnutí a pomáhá rozhodovatelům nalézt nejlepší řešení v komplexních situacích. (Jablonský, 2007)

- Teorie grafů

Velmi využívaným odvětvím operačního výzkumu je teorie grafů. Grafy jsou zde rozuměny objekty tvořené uzly a spojnicemi mezi nimi (hranami), díky kterým lze znázorňovat reálné systémy. Obrázek 4 zobrazuje příklad takového grafu. Graf tedy může představovat reálnou komunikační síť s konkrétním i místy (uzly) a spojnicemi mezi nimi (hrany). Teorie grafů umožňuje řešit různé optimalizační úlohy, jako je nalezení nejkratší cesty mezi dvěma uzly v grafu. (Cook, 2011)

Ve většině případů však neexistují konečné algoritmy, které by vedly k optimálnímu řešení, a tak se pro získání řešení používají algoritmy přibližné. (Brožová a Houška, 2008)

V oblasti analýzy a řízení projektů se teorie grafů využívá k modelování činností tvořících projekt a návazností mezi nimi. Každá činnost má své ohodnocení, například dobu trvání, náklady nebo kapacity, a cílem analýzy je stanovit časový nebo nákladový rozbor celého projektu. (Jablonský, 2007)



Obrázek 4: Ukázka jednoduchého grafu (Jablonský, 2007, s. 15)

- Teorie hromadné obsluhy

Zabývá se modelem procesu, kdy se objekty (např. lidé, zákazníci, data) pohybují přes fronty a jsou obsluhovány. Z tohoto důvodu bývá tato disciplína nazývána také jako teorie front. Využití je možné v praxi uplatnit například k analýze fronty v bankách, na letištích, v obchodech a podobně. Cílem teorie hromadné obsluhy je kvantifikovat charakteristiky tohoto procesu, jako je průměrná doba čekání, počet lidí ve frontě, úspěšnost obsluhy a podobně. (Fábry, 2011)

- Modely obnovy

Zaměřují se na zkoumání systémů obsahující jednotky, které mohou po určité době provozu selhat a vyžadovat tak opravu nebo výměnu. Doba, po kterou jednotky pracují bez poruchy, je přitom náhodná veličina. Cílem těchto modelů je odhadnout, jak stáří jednotek ovlivňuje jejich funkčnost a predikovat, kolik jednotek bude potřeba opravit nebo nahradit. (Jablonský, 2007)

- Markovské rozhodovací procesy

Používají se k popisu chování dynamických systémů, které se mohou nacházet v určitém stavu v určitých časových intervalech a jejichž změna stavu v průběhu času je ovlivněna náhodným chováním. Hlavním cílem použití Markovské analýzy je odhad budoucího vývoje daného sledovaného systému. (Jablonský, 2007)

- <u>Teorie her</u>

Teorie her je založena na předpokladu, že mnoho rozhodovacích procesů, které zahrnují více účastníků (rozhodovatelů), může být přirovnáno k hře. V takovéto hře má každý hráč (rozhodovatel) své strategie chování a jeho výhra závisí na těchto strategiích. (Jablonský, 2007)

Teorie her se zaměřuje na řešení konfliktních situací, ve kterých v těchto hrách dochází. Jedná se o střet zájmů účastníků hry, přičemž dosažení optimálního výsledku jednoho účastníka hry je ovlivňováno cíli a zájmy ostatních účastníků. (Šubrt a kol., 2019)

- <u>Simulace</u>

Analýza složitých systémů může být často prováděna pomocí simulace, která je mocným nástrojem a v mnoha případech i jedinou možností. Simulace není samostatnou disciplínou operačního výzkumu, ale slouží jako centrum analýzy pro různé typy modelů. Při simulaci se zkoumá stav systému při změnách parametrů a simulace tak může být použita ke zlepšení jeho chování. Avšak nutností pro její využití jsou výkonné počítače a specializovaný software s vizualizací modelovaného systému. (Fábry, 2011)

3.3 Okružní dopravní problém

Okružní dopravní problém spadá mezi dopravní úlohy. V praxi se okružní dopravní problémy vyskytují často v případech problematiky plánování tras. Toto plánování se může týkat například rozvozu či naopak vyzvedávání zboží z několika míst. Úloha spočívá v nalezení optimální trasy, která prochází určenými místy, navrací se do výchozího bodu a zároveň minimalizuje určitý faktor, jako je ujetá vzdálenost nebo čas. (Brožová a Houška, 2009)

Z matematického hlediska se okružní dopravní problém řadí mezi NP-úplné problémy. S rostoucím počtem míst, které musí být zahrnuty v matematickém modelu okružního dopravního problému, se exponenciálně zvyšuje i počet omezujících podmínek. To způsobuje, že doba výpočtu řešení úlohy rychle roste a neexistuje žádný efektivní algoritmus, který by nalezl přesné matematické optimum. Proto se k některým řešením okružního dopravního problému používají aproximační metody, jako například metoda nejbližšího souseda, Vogelova aproximační metoda a Mayerova metoda, jejichž výsledek se považuje za ekonomické optimum. (Šubrt a kol., 2019)

Applegate a kol. (2006) pojednávají o okružním dopravním problému jako o problému obchodního cestujícího neboli TSP – Travelling salesman problem. Problém obchodního cestujícího patří mezi NP-hard problémy, což znamená, že není znám algoritmus, který by jej dokázal vyřešit v polynomiálním čase. Algoritmus pro řešení problému má časovou složitost, která roste pomaleji než exponenciálně vzhledem k velikosti vstupu.

Okružní dopravní problém se využívá v situacích, kdy je třeba přepravit materiál od jednoho dodavatele k většímu počtu spotřebitelům, nebo naopak. Zavedením okružního spojení se, narozdíl od realizace obsluhy ke každému spotřebiteli zvlášť, snižují náklady na přepravu, protože jedinou cestou lze uspokojit vícero spotřebitelů. (Šubrt a kol., 2019)

Využití lze najít i v jiných oblastech, než v dopravě. Okružní dopravní problém nachází uplatnění i v genetickém výzkumu, kde napomáhá určovat pozici genetických markerů. Dále při pozorování vesmíru, kde se používá k naplánování pozic teleskopů a jejich směrování, k výrobním účelům při práci s pulzními lasery jako je vypalování do krystalů, nebo u průmyslových strojů, které zpravidla opakují stejné úkony. (Cook, 2012)

Řešení okružní dopravní úlohy je taktéž možno provést pomocí teorie grafů. Jednotlivé odběratele označené jako uzly spojují orientované, nebo neorientované ohodnocené hrany, které mohou ve skutečnosti představovat cesty mezi jednotlivými uzly. Takto formulované modely jsou často označovány jako problém listonoše, kdy hrany představují konkrétní ulice, kterými jsou uzly vzájemně propojeny. Běžné ulice jsou reprezentovány neorientovanými hranami, kterými je možné cestovat v obou směrem. Jednosměrné ulice naopak představují orientované hrany, kterými je možné cestovat pouze jedním směrem, což zvyšuje náročnost řešené úlohy. (Kučera, 2009)

3.3.1 Formulace okružního dopravního problému

Okružní dopravní problém je možné popsat využitím teorie grafů. TSP je definován na úplném neorientovaném grafu $G = (V, E)$, pokud je symetrický, nebo na orientovaném grafu $G = (V, A)$, pokud je asymetrický. Množina $V = \{1, ..., n\}$ představuje vrcholovou množinu, $E = \{(i, j): i, j \in V, i < j\}$ je množina hran a $A = \{(i, j): i, j \in V, i \neq j\}$ je množina oblouků. Cílem je najít Hamiltonovský cyklus v grafu G takovým způsobem, aby byl součet ohodnocení hran cyklu co nejmenší. (Laporte, 2010)

Cenová matice $C = (c_{ij})$ je definována v množině E nebo A. Cenová matice splňuje trojúhelníkovou nerovnost, pokud platí $C_{ij} \leq C_{ik} + C_{kj}$ pro $i, j, k = 1,2, \dots n; i \neq j \neq k$. (Kučera, 2009)

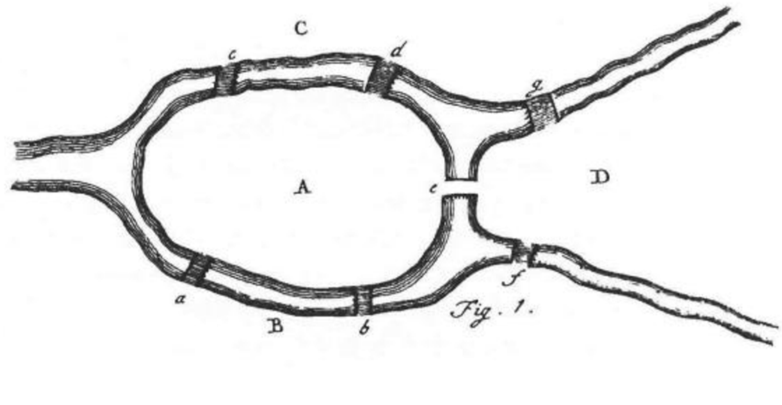
Aby bylo možné obecně popsat a definovat okružní úlohu, je třeba určit konečnou množinu míst M = $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ a sazby (představující vzdálenosti, časovou náročnost nebo jiné náklady) pro spojení c_{ij} ∀ i, j ∊ $\{1, 2, \dots, k\}$. (Brožová a Houška, 2009)

„Cílem je najít okružní spojení všech míst, tj. najít takovou posloupnost těchto míst, ve které se každé z nich vyskytuje právě jednou, aby cena tohoto okruhu byla minimální." Šubrt a kol. (2019, s. 102)

Jsou-li vybrané posloupnosti míst ze zadané množiny označeny indexy $i_1, i_2, \dots, i_k$, je možné hodnotu tohoto spojení vypočítat jako součet sazeb $z = \sum_{j=1}^{k-1} c_{i,ij+1} + c_{ik,i1}$ (Brožová a Houška, 2009)

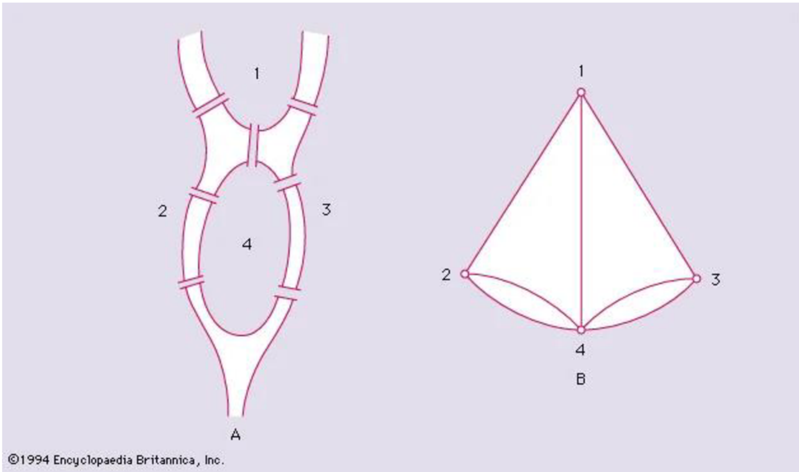
3.3.2 Počátky okružních dopravních problémů

Historie Problému obchodního cestujícího sahá až do 18. století. Mezi důležité osobnosti, které se podíleli na tvorbě základů pro budoucí zkoumání této problematiky z matematického hlediska, patřil Leonhard Euler. Ten formuloval řešení k hádance Mosty v Královci. Pruské město Královec, nyní známé jako Kaliningrad, bylo tou dobou rozděleno na čtyři části protékající řekou Pregel. V těchto částech se nacházelo sedm mostů které je spojovaly. Zakreslení mostů znázorňuje Obrázek 5. Euler se pokusil najít cestu, která by prošla přes každý most právě jednou a vrátila se zpět na výchozí místo. Ukázalo se, že taková cesta neexistuje. (Carlson. 2010)



Obrázek 5: Eulerův náčrtek mostů v Královci (Cook, 2012, s. 43)

Dokázal však, že existuje jiný způsob, jak tuto úlohu řešit, a to pomocí teorie grafů. Graf reprezentuje Královec, kde je každý ostrov vrcholem a každý most hranou tohoto grafu. Velikosti jednotlivých městských čtvrtí nehrají v úvahách žádnou roli, a tak je možné procházky znázornit na jednoduchém schématu na obrázku 6. (Cook, 2012)



Obrázek 6: Schéma mostů v Královci (Encyclopædia Britannica, ©1994)

Euler zjistil, že pro existenci cesty po všech mostech právě jednou společně s navrácením se zpět na výchozí místo musí být graf spojitý a musí existovat právě dva vrcholy s lichým počtem hran. V Královci byly takové vrcholy čtyři, takže neexistovala cesta, která by splňovala požadované podmínky. Graf tedy není možné projit takzvaným eulerovským tahem. Tento problém inspiroval rozvoj teorie grafů a dodnes se řadí mezi klíčové problémy této matematické oblasti. (Cook, 2012)

Cook (2012) dále řadí mezi známé úlohy, kterými se Euler zabýval, Cestu jezdcem po šachovnici. Ta představovala nalezení takového řešení, kdy jezdec proskákal skrze všechna pole, avšak na každé z nich může vstoupit právě jednou. Současně je potřeba, aby jeho poslední tah představoval navrácení se na výchozí pole. Problém lze zobecnit na šachovnice o jakémkoli rozměru, ale výzva spočívá v nalezení řešení pro šachovnici o standardních rozměrech 8x8.

Jezdec začíná na výchozím poli, které je označeno jako výchozí vrchol. Z tohoto pole hledá cestu na další, které je dostupné přímým skokem. Jakmile je tento skok proveden, mezi poli se vytvoří spojení a pole se stává dočasně-koncovým uzlem. Tato spojení jsou reprezentována hranami grafu. Úkolem je nalézt Hamiltonovskou kružnici, tedy cestou, která prochází všemi uzly grafu právě jednou a vrací se zpět na uzel výchozí. (Weisstein, 2002)

Další významnou osobností, která se podílela na počátcích vývoje okružních problému, je podle Cooka (2012) William Hamilton. Tento irský matematik se zabýval problém cesty, která má projít všech dvacet vrcholů dvanáctistěnu, přičemž je opět možné navštívit každý z nich právě jednou a současně má být výchozí vrchol zároveň vrcholem koncovým. Na motivy této úlohy byla později vytvořena společenská hra s názvem Icosian game. Dvanáctistěn byl v této hře vyjádřen grafem zakresleným na dřevěné desce, do které se postupně vkládaly očíslované kolíky reprezentující cestu. Icosian Game se hrála převážně pro zábavu a jako zdroj intelektuální stimulace, nicméně sloužila také jako inspirace pro některé z prvních výzkumníků, kteří se věnovali problému TSP. (Weisstein, 2003)

3.3.3 Rozdělení okružních dopravních problémů

Podle způsobu procházení (Applegate a kol, 2006):

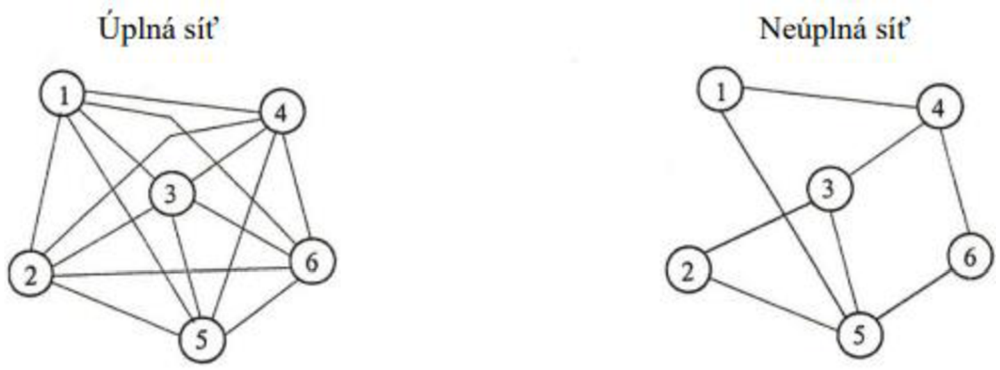
- Uzavřené okružní úlohy – Je nutné se vrátit zpět do výchozího bodu. Cílem je tedy projet množinu míst (uzlů) tak, aby každé místo bylo navštíveno pouze jednou.
- Otevřené okružní úlohy – Není nutné se vrátit zpět do výchozího bodu. Úkolem je najít takové řešení, ve kterém se projdou všechny cesty (hrany).

Podle počtu okruhů (Šubrt a kol., 2019):

- Jednookružní dopravní úlohy – Obsluhu všech míst je možné uskutečnit v rámci jednoho okruhu.
- Víceokružní dopravní úlohy – Obsluhu není možné uskutečnit v jednom jediném okruhu. Nejčastěji to je způsobeno zavedením kapacitního omezení vozidla a není tedy možné pokrýt požadavky všech míst zároveň. Trasu je potřeba rozdělit do vícero jednotlivých okruhů.

Podle struktury sítě cest (Brožová a Houška, 2009):

- Úplná síť – Mezi každou dvojicí uzlů existuje přímá cesta, která je spojuje. Uzly jsou takto mezi sebou propojeny stylem každý s každým.
- Neúplná síť – Nemá přímou cestu mezi všemi dvojicemi vrcholů. To znamená, že všechny uzly jsou sice spojeny, ale některé z cest vedou přes jeden další uzel.



Obrázek 7: Úplná a neúplná struktura sítí (Brožová a Houška, 2009, s. 156)

3.3.4 Metody řešení okružních dopravních problémů

Applegate a kol. (2006) dále uvádějí metody, které lze použít k nalezení ucházejících řešení pro malé až středně velké instance problému, stejně jako přibližných řešení pro větší instance. Mezi některé z těchto metod řadí:

Exaktní metody

Dokáží nalézt optimální řešení pro problém obchodního cestujícího s určitou garancí. Tyto algoritmy obvykle zahrnují vyčerpávající prohledávání všech možných řešení a jsou použitelné převážně pro malé instance problému. (Applegate a kol., 2006)

- **Branch and Bound** – Taktéž známá jako metoda větví a mezí, která se řídí principem rozděl a panuj, jak uvádí Cook (2012). Metoda spočívá v generování stromu možných řešení a ořezávání větví, které nemohou obsahovat optimální řešení. Algoritmus začíná generováním počátečního řešení (např. minimální kostry) a poté generuje všechny možné permutace zbývajících hran. (Brožová a Houška, 2009)

- **Metoda řezných rovin -** Postupně odstraňuje nadbytečná omezení z lineárního programu pomocí nových omezení, tzv. řezů. Tento postup zjednodušuje proces hledání řešení a umožňuje nalézt optimální výsledek rychleji a efektivněji než při využití plně vybaveného lineárního programu. Metoda je taktéž známá pod pojmem Cutting planes. (Applegate a kol., 2006)

Heuristické metody

Heuristiky jsou přístupy, které se snaží najít řešení problému pomocí heuristického algoritmu, který nemusí být optimální, ale často zajišťuje rychlá uspokojivá řešení. (Brožová a Houška, 2009)

- **Nejbližší soused -** Funguje na principu sestavování okruhu postupným přidáváním míst k aktuálnímu řešení. Nejprve se zvolí libovolný bod, ve kterém okruh začne. Poté se vybere nejbližší nenavštívené místo tomuto bodu, které se přidá do okruhu jako další zastávka trasy. Tento postup se opakuje, dokud nejsou navštívena všechna potřebná místa bez předčasného uzavření okruhu. (Cook, 2012)

- **Simulované žíhání** – Cook (2012) přirovnává simulované žíhání k horolezecké metodě, která se snaží najít optimální řešení podobně jako horolezec hledá ideální cestu na vrchol hory. Metoda je inspirována procesem žíhání kovů, kdy se kov nejprve zahřívá na velmi vysokou teplotu a pak se postupně ochlazuje, aby se dosáhlo požadované struktury. Princip spočívá v tom, že řešení je postupně vylepšováno pomocí náhodných změn, a přestože se některé z nich mohou ukázat jako horší, mohou vést ke konečnému řešení, které je lepší než jakékoliv jiné dosud nalezené. K dosažení řešení jsou využity parametry jako je počáteční teplota, rychlost ochlazování, a kritérium zastavení. (Applegate a kol., 2006)

Metaheuristické metody

Byly vyvinuty pro řešení složitých optimalizačních problémů a mohou být použity k řešení TSP pro větší instance. (Applegate a kol., 2006)

- **Genetické algoritmy** – Inspirují se procesy evoluce v přírodě a jsou založeny na principu selekce, křížení a mutace. V této metodě se nejprve vytvoří počáteční populace možných řešení, která jsou následně hodnocena podle kvality. Poté se provádí selekce těch nejlepších z nich, která jsou křížena mezi sebou, aby vznikla nová generace. V této generaci se některá řešení náhodně mutují, aby se zajistila diverzita populace. Tímto způsobem se postupně vytváří nové generace, dokud není dosaženo uspokojující řešení. (Applegate a kol., 2006)

- **Optimalizace mravenčí kolonií -** Metoda inspirovaná chováním kolonií mravenců při hledání nejkratší cesty k potravě. V této metodě se vytváří umělé mravenčí kolonie, které procházejí grafem a zanechávají feromonové stopy na cestách, které prošly. Tyto feromonové stopy jsou následně využity jinými mravenci jako vodítko pro nalezení nejlepší cesty. (De Oliveira a kol., 2021)

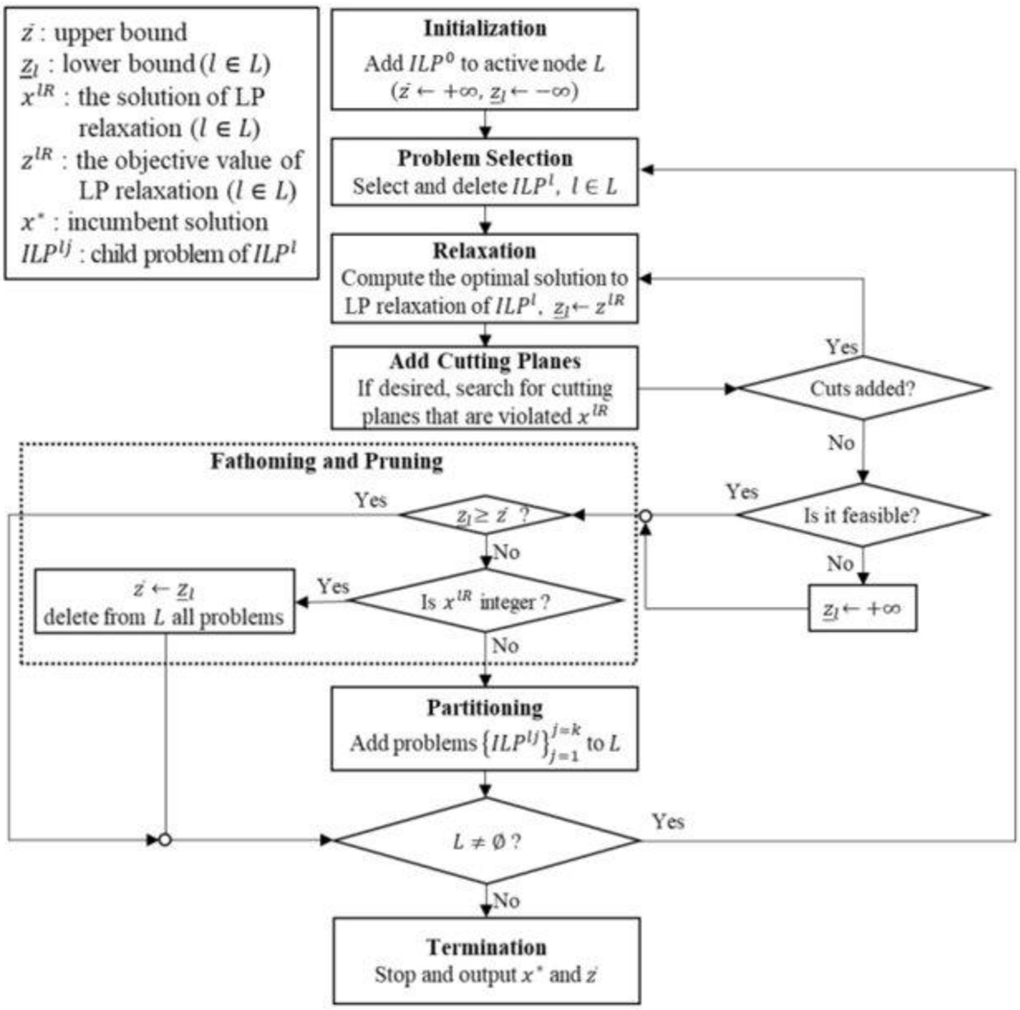
3.3.4.1 Metoda Branch and Cut

Kombinatorické optimalizační problémy lze často formulovat jako problémy smíšeného celočíselného lineárního programování. Tyto problémy lze řešit pomocí metody Branch and Cut, která patří mezi exaktní algoritmy. Princip této metody spočívá v kombinaci metody Branch and Bound a metody Cutting Planes. Tyto metody pracují řešením sekvence lineárních programování zprostředkovaných relaxací problému celočíselného programování. (Mitchell, 2002)

Metoda Branch and Cut využívá techniky Branch and Bound aby postupně prohledával celý prostor možných řešení a hledala optimální řešení. V každém kroku algoritmu se problém větví na podproblémy s menším počtem proměnných, které se poté řeší jednotlivě. Pro každý podproblém se vypočítají dolní a horní meze řešení. Pokud se dolní mez rovná horní mezi, řešení je nalezeno. (Applegate a kol., 2006)

Dále je v metodě využita technika algoritmu Cutting planes. V každém kroku jsou odstraněny neplatné nerovnosti a současně přidána nová lineární omezení k celočíselnému programu. Tím postupně dochází ke zlepšení dolního odhadu na optimální řešení. (Applegate a kol., 2006)

Princip metody Branch and Cut je znázorněn na vývojovém diagramu na obrázku 8.



Obrázek 8: Vývojový diagram metody Branch and Cut (Kim, 2019)

Nejznámějšími algoritmy využívající metodu Branch and Cut jsou ty, které se používají k řešení problému obchodního cestujícího. Tento přístup dokáže řešit a nalézt optimalitu mnohem větších instancí než jiné metody. Pro tyto problémy jsou řezy obvykle odvozeny z polyedrické (mnohostěnné) kombinatoriky odpovídajícího celočíselného programu. To umožňuje přidání silných řezů, obvykle nerovnic definující stěny, což umožňuje výrazné snížení velikosti stromu větví a mezí. (Mitchell, 2002)

Open-source implementací algoritmu branch-and-cut pro řešení celočíselných a smíšených celočíselných programů je COIN-OR Branch-and-Cut, neboli CBC. (OpenSolver, 2012).

Solver engine CBC je využit při výpočtu v doplňku OpenSolver pro Microsoft Excel v praktické části práce.

3.3.5 Statická úloha obchodního cestujícího

Ve statické úloze obchodního cestujícího je důležité získat veškeré potřebné informace před samotným výpočtem. Mezi tyto informace spadá například počet měst a jejich adresy. Seznam zastávek, které potřebují obsloužit, je tedy předem znám a nemůže se během trasy měnit. Kapacita vozidla není omezena a cílem je optimalizovat trasu tak, aby byla co nejkratší. (Applegate a kol., 2006)

Matematický model vypadá následovně (Šubrt a kol., 2019, s. 103):

Účelová funkce

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow MIN \tag{2.1}$$

Za splnění podmínek

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \mathrm{i} = 1,2, \dots, n \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,2, \dots, n \tag{2.3}$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n + 1 \qquad i = 1,2, \dots, n; j = 1,2, \dots, n;\ i \neq j \tag{2.4}$$

$$x_{ij} \in \{0\,;1\} \qquad i = 1,2, \dots, n; j = 1,2, \dots, n \tag{2.5}$$

V matematickém modelu představuje n počet míst (měst, uzlů), které musí vozidlo navštívit a sazba c_{ij} určuje vzdálenost spojení z místa i do místa j. Průběh nalezeného okruhu reprezentuje bivalentní proměnná x_{ij}. (proměnná nabývající pouze hodnot 1 a 0). (Šubrt a kol., 2019)

Pokud:

$x_{ij} = 1$ znamená to, že vozidlo realizuje přejezd z uzlu i do uzlu j

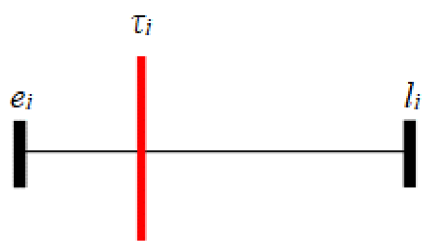
$x_{ij} = 0$ znamená to, že vozidlo neprovede přejezd z uzlu i do j, ale pojede do uzlu jiného (tam, kde $x_{ij} = 1$)

Dále model obsahuje proměnné u_i, které vyjadřují pořadí míst v nalezeném okruhu. Tyto proměnné jsou součástí podmínky (2.4) a zamezují vytváření možných parciálních cyklů. Podmínky (2.2) a (2.3) zajišťují, aby každé z míst bylo navštíveno pouze jednou. (Fábry, 2006)

3.3.5.1 Statická úloha s časovými okny

Statická úloha obchodního cestujícího s časovými okny vychází ze stejných předpokladů jako základní statické úlohy obchodního cestujícího, ale navíc jsou přidána časová omezení návštěvy jednotlivých míst za pomoci časových oken. To znamená, že každá zastávka může být navštívena pouze v určitém časovém intervalu. Optimalizace trasy musí být tedy prováděna s ohledem na tato omezení, kdy se splní požadavky možné doby návštěvy jednotlivých míst. Na obrázku číslo 9 lze vidět jednoduché zakreslení časového intervalu. (Pelikán, 1993)

V praxi to znamená, že obchodní cestující musí být schopen naplánovat svou trasu tak, aby v určených časových oknech navštívil každou zastávku na svém seznamu a vrátil se zpět na počáteční místo co nejrychleji a s co nejmenším množstvím čekání stráveného na cestě. (Fábry, 2006)



Obrázek 9: Časový interval (vlastní zpracování podle Písaříkové, 2023)

e_i = nejdříve možný začátek obsluhy

l_i = nejpozději možný začátek obsluhy

τ_i = okamžik, ve kterém se uskuteční začátek obsluhy zákazníka

Fábry (2006) rozděluje časová omezení na dva typy:

- **Hard, tj. silná omezení** - V modelu je přidána podmínka $e_i \leq \tau_i \leq l_i$, která zaručuje, že obsluha daného místa neproběhne dříve, než je začátek časového okna, ale i naopak, že vozidlo nemůže přijet a začít obsluhu později, než je nejzazší možný termín.

- **Soft, tj. slabá omezení** - Pokud vozidlo přijede dříve, musí čekat do termínu e_i, toto omezení zaručuje podmínka $\tau_i \geq e$. Naopak v případě nedodržení příjezdu do nejpozději přípustného termínu, tj. pokud je $\tau_i > l_i$, dochází ke vzniku sankcí.

Protože vozidlo musí respektovat časové okno zákazníka *j*, ve kterém má dojít k jeho obsluze, existují dvě strategie čekání vozidla u zákazníků (Fábry (2006):

1. Vozidlo odjede k zákazníkovi *j* bezprostředně po dokončení obsluhy zákazníka *i*. Pokud přijede k zákazníkovi *j* před otevřením časového okna, bude čekat do okamžiku e_j.

2. Vozidlo zůstane u zákazníka *i* a k zákazníkovi *j* odjede v takovém okamžiku, aby k němu dorazilo přesně ve chvíli otevření jeho časového okna, tj. vyjede v okamžiku e_i - t_{ij}.

Matematický model podle Fábryho (2006, s. 25-28) v případě čekání vozidla u zákazníka j před zahájením obsluhy vypadá takto:

minimalizovat $$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} + \sum_{j=2}^{n} W_j + \sum_{i=2}^{n} S_i \qquad (4.1)$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \mathrm{i} = 1,2, \dots, n \qquad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,2, \dots, n \qquad (4.3)$$

$$e_i \leq \tau_i \leq l_i \qquad \mathrm{i} = 2,3, \dots, n \qquad (4.4)$$

$$\tau_i + \mathrm{S}_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}) + \mathrm{W}_j + v_{ij} = \tau_j \qquad i = 1,2, \dots, n \quad i \neq j \quad j = 2,3, \dots, n \qquad (4.5)$$

$$\tau_1 = 0 \qquad (4.6)$$

$$\tau_i \geq 0 \qquad \mathrm{i} = 2,3, \dots, n \qquad (4.7)$$

$$0 \leq v_{ij} \leq 2M(1 - x_{ij}) \qquad i = 1,2, \dots, n; \quad i \neq j \quad j = 2,3, \dots, n; \qquad (4.8)$$

$$\mathrm{S}_i \geq 0 \qquad \mathrm{i} = 2,3, \dots, n \qquad (4.9)$$

$$x_{ij} \in \{0\,;1\} \qquad i,j = 1,2, \dots, n \qquad (4.10)$$

V tomto matematickém modelu jsou oproti úloze bez časových oken přidány proměnné e_i a l_i představující nejdříve možný a nejpozději přípustný termín obsluhy zákazníka i, proměnná τ_i, která udává přesný okamžik návštěvy místa i a proměnná t_{ij}, která představuje dobu přejezdu mezi místy i a j. Dobu obsluhy místa i určuje proměnná S_i a dobu čekání vozidla před obsluhou zákazníka proměnná W_j. Za M je dosazena vysoká konstanta. V poslední řadě je zde navíc pomocná proměnná v_{ij} zajišťující přípustnost řešení vzhledem k časovému rozvrhu. Obsluha zákazníků uvnitř časového okna je zajištěna podmínkou (4.4) a omezení (4.5) zaručuje, že časový interval mezi návštěvou zákazníka j bezprostředně po zákazníkovi i má minimálně hodnotu t_{ij}. (Fábry, 2006)

3.3.6 Dynamická dopravní úloha

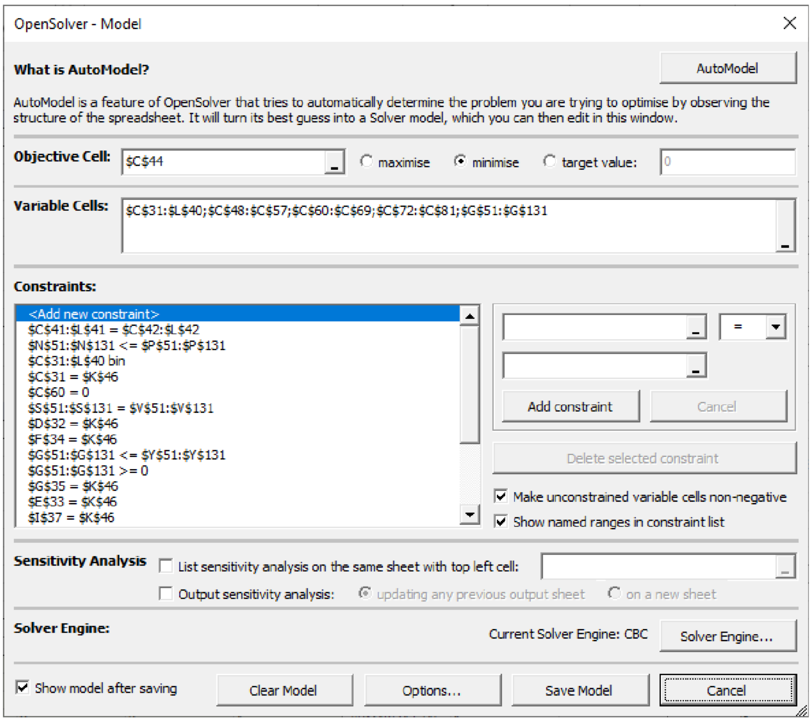
Dynamická úloha obchodního cestujícího se od statické úlohy liší tím, že během cesty může dojít ke změně seznamu zastávek. Existuje tedy možnost, že vozidlo dostane po zahájení jízdy nový požadavek na obsluhu nějakého místa, nebo se naopak některá z již naplánovaných zastávek z okruhu odstraní. Cílem je tedy najít nejoptimálnější trasu s využitím aktuálních měst v seznamu, které se mohou měnit v závislosti na okolnostech. (De Oliveira a kol., 2021)

„V praxi to znamená, že dispečer přijme nový požadavek a rozhodne o jeho zařazení do předem naplánovaného okruhu, resp. zbývající části okruhu, kterou vozidlo ještě musí absolvovat.“ (Fábry, 2006, s. 14)

3.4 Doplněk OpenSolver

OpenSolver je bezplatný doplněk pro Microsoft Excel, který umožňuje uživatelům řešit optimalizační úlohy pomocí matematického programování. Je obdobou doplňku Řešitel, který se nachází standartně v programu Microsoft Excel, avšak zvládá složitější výpočty v zásadně kratším čase. Tento nástroj umožňuje vytvářet vlastní modely k optimalizaci pomocí funkcí a formulí a následně tyto modely řešit prostřednictvím různých metod lineárního a nelineárního programování. OpenSolver dále umožňuje zobrazení těchto výsledků řešení v různých formátech, jako jsou grafy a tabulky, a také podporuje řešení problémů s celočíselnými proměnnými. Další výhodou je, oproti klasickému Řešiteli, vizualizace modelu, která zvýrazňuje proměnné, účelovou funkci a všechny podmínky přímo uvnitř tabulkového procesoru. (OpenSolver, 2012)

Využití lze v praxi nalézt pro řešení různých problémů, jako je optimalizace plánování dopravy, optimalizace výrobního procesu nebo například optimalizace výběru investičních portfolií. Jedná se o snadno ovladatelný doplněk a může být použit jak pro začátečníky, tak i pro pokročilé uživatele, kteří se tématem matematického modelování a optimalizací zabývají hlouběji. To lze vidět z obrázku číslo 10, který ukazuje jednoduchost uživatelského rozhraní při tvorbě modelu, na kterém má být optimalizace provedena. (OpenSolver, 2012)



Obrázek 10: OpenSolver - tvorba modelu (OpenSolver, 2012)

4 Vlastní práce

V této části bakalářské práce bude aplikována úloha obchodního cestujícího s časovými okny na rozvozovou trasu ve vybrané firmě. Na začátku bude krátce popsána charakteristika zvolené firmy a řešeného problému. Dále budou představena vstupní data a následně sestaven matematický model. Poslední částí bude výpočet úlohy.

4.1 Charakteristika společnosti

Společnost působí na trhu přes 30 let a mezi její klíčové aktivity spadá distribuce léčivých přípravků a poskytování služeb jejich výrobcům. Sídlem společnosti jsou pražské Malešice, kde se nachází i hlavní centrální sklad. Distribuční síť zahrnuje dále ještě tři distribuční centra, a to v Brně, Ostravě a Hradci Králové.

Společnost je předním distributorem léků v České republice a jejími odběrateli jsou nezávislé lékárny či nemocnice.

4.2 Specifikace problému

Společnost pravidelně poskytuje rozvoz sortimentu léčivých přípravků po celém území České republiky víc než 2 800 zákazníkům. Jejich vozidla ročně ujedou více jak 600 tisíc kilometrů a expedují 60 milionů balení. V rámci podnikání je tedy pro společnost důležité minimalizovat celkové náklady spojené s dopravou, a to zejména z důvodu aktuálního nárustu cen, který zapříčinil rusko-ukrajinský konflikt. Mezi tyto náklady můžeme zařadit amortizace vozidel a jejich související servis, pohonné hmoty a dále mzdy zaměstnanců.

Cílem praktické části je tedy optimalizace dopravní trasy mezi jejími odběrateli a výchozím místem, za dodržení určených časových oken a následně výsledek porovnat s trasou, kterou společnost zvolila a tím zjistit, zdali se jedná o optimální řešení závozu.

4.3 Vstupní data

Firma obdrží seznam zastávek, ve kterých je nutné v určitý den uskutečnit zásobování objednaným zbožím. Dále jsou zde taktéž uvedena požadovaná časová rozpětí, kdy má být doručení zboží zákazníkovi realizováno.

V tomto řešeném problému bude výpočet zaměřen pouze na jednu z realizovaných tras vedoucí Královehradeckým a Libereckým krajem. Ve výpočtu je využita jen informace o době vykládání zboží v dané zastávce, jeho objem či váha nejsou zohledněny. Na žádost firmy nejsou v práci zveřejněny názvy lékáren na daných adresách a jsou uvedeny pouze ulice.

Začátek trasy řidiče je v depu v Kuklenech, které jsou místí částí Hradce Králové. Toto místo je pro řidiče výchozím bodem trasy, do kterého se vzápětí musí taktéž navrátit. Na trase musí navštívit celkem 9 zastávek v předem stanoveném časovém okně. Jednotlivá místa, kam je nutné zavézt zboží, jejich časová okna a doba obsluhy jsou uvedena v tabulce číslo 1.

Označení zastávky	Adresa	Časové okno	Doba obsluhy
1	Markova, Kukleny	6:00 odjezd	-
2	Havlíčkova, Hořice	6:00 - 8:00	15 min
3	Husova, Jičín	6:00 - 10:00	15 min
4	Masarykovo nám., Jilemnice	6:00 - 12:00	20 min
5	Metyšova, Jilemnice	6:00 - 14:00	15 min
6	Obránců míru, Lomnice nad Popelkou	6:00 - 12:00	10 min
7	Rváčovská, Lomnice nad Popelkou	7:30 - 16:00	15 min
8	3. května, Semily	6:00 - 14:00	10 min
9	Nádražní, Semily	8:00 - 14:00	15 min
10	Jihoslovanská, Vrchlabí	10:00 - 16:00	20 min

Tabulka 1: Vstupní data (vlastní zpracování, 2023)

4.4 Matematický model

K provedení optimalizace bude sestaven model obchodního cestujícího s časovými okny. Jedná se o statickou úlohu, jelikož jsou známé veškeré parametry před výjezdem vozidla na trasu toho dne. Není možné, aby nastala situace, kdy by lékárna objednala zboží a doručení by proběhlo tentýž den. Řidič tedy odjede z místa ihned po dokončení obsluhy na další zastávku, kde případně čeká na otevření časového intervalu.

Pro výpočet je třeba sestavit matici vzdáleností a časové náročnosti mezi všemi zastávkami. Tyto hodnoty byly získány pomocí internetové služby Google Maps (Google, [b.r.]). Jedná se o internetovou mapovou aplikaci, která umožňuje naplánovat trasu z místa *i* do místa *j* zvoleným dopravním prostředkem, a to s ohledem na dopravní omezení. Počet všech možných naměřených proměnných pro jednu matici je 100. Matice vzdáleností c_{ij} je vyjádřena v tabulce číslo 2 a matice časové náročnosti v tabulce číslo 3.

Označení zastávky	Adresa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Markova, Kukleny	0	26	47	60	61	58	59	73	71	63,1
2	Havlíčkova, Hořice	26	0	23	34	35	34	34	48	47	37,6
3	Husova, Jičín	47	23	0	33	31	15	16	30	28	36,4
4	Masarykovo nám., Jilemnice	60	34	33	0	0,7	18	18	18	20	10,3
5	Metyšova, Jilemnice	61	35	31	0,7	0	18	18	18	19	12
6	Obránců míru, Lomnice nad Popelkou	58	34	15	18	18	0	1,4	16	15	29,4
7	Rváčovská, Lomnice nad Popelkou	59	34	16	18	18	1,4	0	15	13	29,1
8	3. května, Semily	73	48	30	18	18	16	15	0	2,7	25
9	Nádražní, Semily	71	47	28	20	19	15	13	2,7	0	27,5
10	Jihoslovanská, Vrchlabí	63	38	36	10	12	29	29	25	28	0

Tabulka 2: Matice vzdáleností c_{ij} v kilometrech (vlastní zpracování, 2023)

Tabulka 3: Matice časové náročnosti t_{ij} v minutách (vlastní zpracování, 2023)

Označení zastávky	Adresa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Markova, Kukleny	0	23	45	62	64	55	54	78	71	69
2	Havlíčkova, Hořice	28	0	28	37	46	35	34	52	50	46
3	Husova, Jičín	50	27	0	38	39	23	20	41	34	47
4	Masarykovo nám., Jilemnice	66	42	39	0	2	23	25	30	27	12
5	Metyšova, Jilemnice	62	45	40	3	0	24	21	28	22	17
6	Obránců míru, Lomnice nad Popelkou	58	41	23	29	26	0	4	20	19	36
7	Rváčovská, Lomnice nad Popelkou	63	37	20	26	21	3	0	19	16	32
8	3. května, Semily	80	56	43	35	26	23	16	0	5	44
9	Nádražní, Semily	82	53	37	29	23	19	14	5	0	35
10	Jihoslovanská, Vrchlabí	66	45	40	10	14	36	33	42	37	0

Dalším podstatným parametrem pro výpočet jsou časová okna. Tento parametr je nutno striktně dodržet, neboť v opačném případě nebude zboží převzato. Do modelu se zanesou proměnné e_i a l_i, které označují začátek a konec časového okna, kdy je možné návštěvu uskutečnit.

V tabulce 4 jsou uvedeny tyto hodnoty proměnných a taktéž doba nutná k obsluze každého místa v minutách značenou S_i. Ve výpočtu se čas výjezdu vozidla z depa považuje jako hodnota 0, v případě začátku trasy v 6:00 a hodnotě časového okna 6:00 - 8:00 je parametr převeden na hodnotu $e_i = 0$ a $l_i = 120$.

Označení zastávky	Adresa	Časové okno			S_i
		Čas	e_i	l_i	
1	Markova, Kukleny	-	-	-	-
2	Havlíčkova, Hořice	6:00 - 8:00	0	120	15
3	Husova Jičín	6:00 - 10:00	0	240	15
4	Masarykovo nám., Jilemnice	6:00 - 12:00	0	360	20
5	Metyšova, Jilemnice	6:00 - 14:00	0	480	15
6	Obránců míru, Lomnice nad Popelkou	6:00 - 12:00	0	360	10
7	Rváčovská, Lomnice nad Popelkou	7:30 - 16:00	90	600	15
8	3. května, Semily	6:00 - 14:00	0	480	10
9	Nádražní, Semily	8:00 - 14:00	120	480	15
10	Jihoslovanská, Vrchlabí	10:00 - 16:00	240	600	20

Tabulka 4: Časová okna včetně doby obsloužení (vlastní zpracování, 2023)

Následně je sestavena účelová funkce a rovnice dle předchozí kapitoly obchodního cestujícího s časovými okny, kdy vozidlo čeká u zákazníka před jeho obsloužením.

Účelová funkce udává cíl řešeného problému. V tomto případě je problém minimalizován.

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} + \sum_{j=2}^{n} W_j + \sum_{i=2}^{n} S_i \quad \rightarrow MIN \tag{5}$$

Celou účelovou funkci lze nalézt v příloze číslo 1.

Dále byla sestavena tato soustava rovnic:

$$\tau_i + S_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}) + W_j + v_{ij} = \tau_j, \quad i = 1,2, \dots n, \ , j = 2,3, \dots n, i \neq j \tag{6}$$

Za použití vysoké konstanty M = 1 000

τ_{ij} – okamžik, ve kterém vozidlo přijede na danou zastávku

S_i – doba nutná k obsluze zákazníka i

t_{ij} – časové náročnost jízdy mezi místy i a j

x_{ij} – bivalentní proměnná

W_j – doba čekání vozidla před začátkem obsluhy následujícího zákazníka

v_{ij} - pomocná proměnná zajišťující přípustnost řešení vzhledem k časovému rozvrhu

4.5 Výpočet modelu

Po sestavení matematického modelu je možné přejít k samotnému výpočtu. Vzhledem k náročnosti řešení úlohy je zapotřebí použití softwaru, který je schopen přinést výsledky dokonce i v řádech sekund.

Pro zpracování úlohy byl použit software Microsoft Excel pro Microsoft 365 s volně dostupným doplňkem OpenSolver 2.9.3.

Do softwaru byl vložen vstupní model, obsahující všechny předešlé stanovené údaje, které jsou pro výpočet této úlohy nezbytné. Během výpočtu se pracovalo celkem s 373 zadanými omezujícími podmínkami a 211 proměnnými. Ukázku ze vstupního modelu lze nalézt v Příloha 2. Uvedena je jen ukázka, a to z důvodu, že kompletní model zabírá 390 řádků v Microsoft Excel souboru.

Výpočet byl provedena na zařízení s těmito parametry:

Operační systém: Microsoft Windows 10 Home

Procesor: AMD Ryzen 5 2600 (3,4 / 3,9 GHz, 6 jader, 12 vláken)

Operační paměť: 16 GB DDR4 DIMM 3733 MHz CL19

Pevný disk: 500 GB SSD M.2 PCIe 3.0/NVMe, 2 TB HDD SATA III

Díky použití softwaru bylo možné získat výsledek úlohy téměř ihned. Celý výpočet trval konkrétně 4,32 sekund s celkem 58 242 iteracemi. Zastávky, které je během okruhu nutno navštívit, byly vypočteny v následujícím pořadí: 2 – 3 – 7 – 6 – 8 – 9 – 5 – 4 – 10. Během této trasy řidič vozidla ujede 177,45 kilometrů. Účelová funkce nabývá hodnot 338, což udává časovou náročnost trasy, která bude trvat 338 minut. Čistá doba jízdy zabere 203 minut a samotnou obsluhou řidič poté stráví 135 minut. Čas strávený obsluhou je však předem znám, na optimalizaci tedy nemá vliv.

Jak již bylo předem zmíněno, proměnné x_{ij} patří k takzvaným bivalentním proměnným, mohou tedy nabývat pouze číselné hodnoty 0 nebo 1. Jedná se tedy o dvouhodnotové proměnné. Pokud vyjde hodnota 1 ($x_{ij} = 1$), vozidlo jede z místa i do místa j, pokud ovšem hodnota vyjde 0, vozidlo spoj mezi těmito místy nejede. Výsledky proměnných x_{ij} jsou zobrazeny níže v tabulce číslo 5. Pořadí zastávek je vypsané v tabulce číslo 6.

Označení zastávky	Adresa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Markova, Kukleny	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	Havlíčkova, Hořice	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	Husova, Jičín	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
4	Masarykovo nám., Jilemnice	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
5	Metyšova, Jilemnice	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6	Obránců míru, Lomnice nad Popelkou	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
7	Rváčovská, Lomnice nad Popelkou	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8	3. května, Semily	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	Nádražní, Semily	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
10	Jihoslovanská, Vrchlabí	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabulka 5: Výsledky proměnných x_{ij} (vlastní zpracování, 2023)

Pořadí zastávky	Adresa
1	Markova, Kukleny
2	Havlíčkova, Hořice
3	Husova, Jičín
4	Rváčovská, Lomnice nad Popelkou
5	Obránců míru, Lomnice nad Popelkou
6	3. května, Semily
7	Nádražní, Semily
8	Metyšova, Jilemnice
9	Masarykovo nám., Jilemnice
10	Jihoslovanská, Vrchlabí

Tabulka 6: Výsledné pořadí zastávek trasy (vlastní zpracování, 2023)

Buňky, jejichž hodnota vyšla $x_{ij} = 1$, jsou v tabulce vyznačené zelenou výplní barvy. V těchto buňkách se tedy nachází spoj, který je využit v celkové výsledné trase.

Vozidlo na výsledné trase navštíví zastávky v tomto pořadí:

Řidič dodávky jako první vyjíždí z depa – centrálního skladu na adrese Markova, Kukleny v Hradci Králové a pojede k prvnímu zákazníkovi na zastávku Havlíčkova, Hořice.
Dále pokračuje z Havlíčkova, Hořice do Husova, Jičín,
z Hořice do Husova, Jičín do Rváčovská, Lomnice nad Popelkou,
z Rváčovská, Lomnice nad Popelkou do Obránců míru, Lomnice nad Popelkou,
z Obránců míru, Lomnice nad Popelkou do 3. května, Semily,
z 3. května, Semily do Nádražní, Semily,
z Nádražní, Semily do Metyšova, Jilemnice,
z Metyšova, Jilemnice do Masarykovo nám., Jilemnice,
z Masarykovo nám., Jilemnice do Jihoslovanská, Vrchlabí,
z Jihoslovanská, Vrchlabí se poté vrací na počáteční místo do depa na adrese Markova, Kukleny v Hradci Králové.

Proměnné w_j, které označují dobu čekání vozidla před začátkem obsluhy následujícího zákazníka, vyšly následovně:

$w_1 = 0$	$w_6 = 0$
$w_2 = 0$	$w_7 = 0$
$w_3 = 0$	$w_8 = 0$
$w_4 = 0$	$w_9 = 0$
$w_5 = 0$	$w_{10} = 0$

Všechny uvedené hodnoty proměnné w_j jsou rovny 0, z tohoto vyplývá, že řidič během celé trasy nebude ani jednou čekat na otevření časového okna pro obsluhu následujícího zákazníka.

Proměnné τ_1, neboli okamžik, ve kterém vozidlo přijede na danou zastávku, jsou:

$\tau_1 = 0$		$a_1 = 0$
$\tau_2 = 23$		$a_2 = 23$
$\tau_3 = 66$		$a_3 = 66$
$\tau_4 = 225$		$\tau_7 = 101$
$\tau_5 = 212$	Seřazení podle času $\longrightarrow$	$\tau_6 = 124$
$\tau_6 = 124$		$\tau_8 = 159$
$\tau_7 = 101$		$\tau_9 = 174$
$\tau_8 = 159$		$\tau_5 = 212$
$\tau_9 = 174$		$\tau_4 = 225$
$\tau_{10} = 252$		$\tau_{10} = 252$

5 Výsledky a diskuse

Během výpočtu vlastní práce bylo nalezeno optimální řešení pro zadaný vstupní model. Jeho výsledkem je nejvhodnější pořadí zastávek pro realizaci distribuce sortimentu léčivých přípravků, a to s dodržením všech podmínek pro časová okna těchto jednotlivých míst a současně i pracovní dobou řidiče. Celková délka trasy, během které dojde k obsluze 9 zákazníků, kdy se řidič poté navrátí do depa ze kterého vyjížděl, je dlouhá 177,45 kilometrů. Časová náročnost trasy byla stanovena na 338 minut. Čistá doba jízdy zabere 203 minut a samotnou obsluhou řidič stráví 135 minut.

Během trasy není nutné, aby řidič na žádné ze zastávek čekal. Všechna časová okna jsou v době příjezdu vozidla otevřena a je tedy možné ihned začít s obsluhou daného zákazníka.

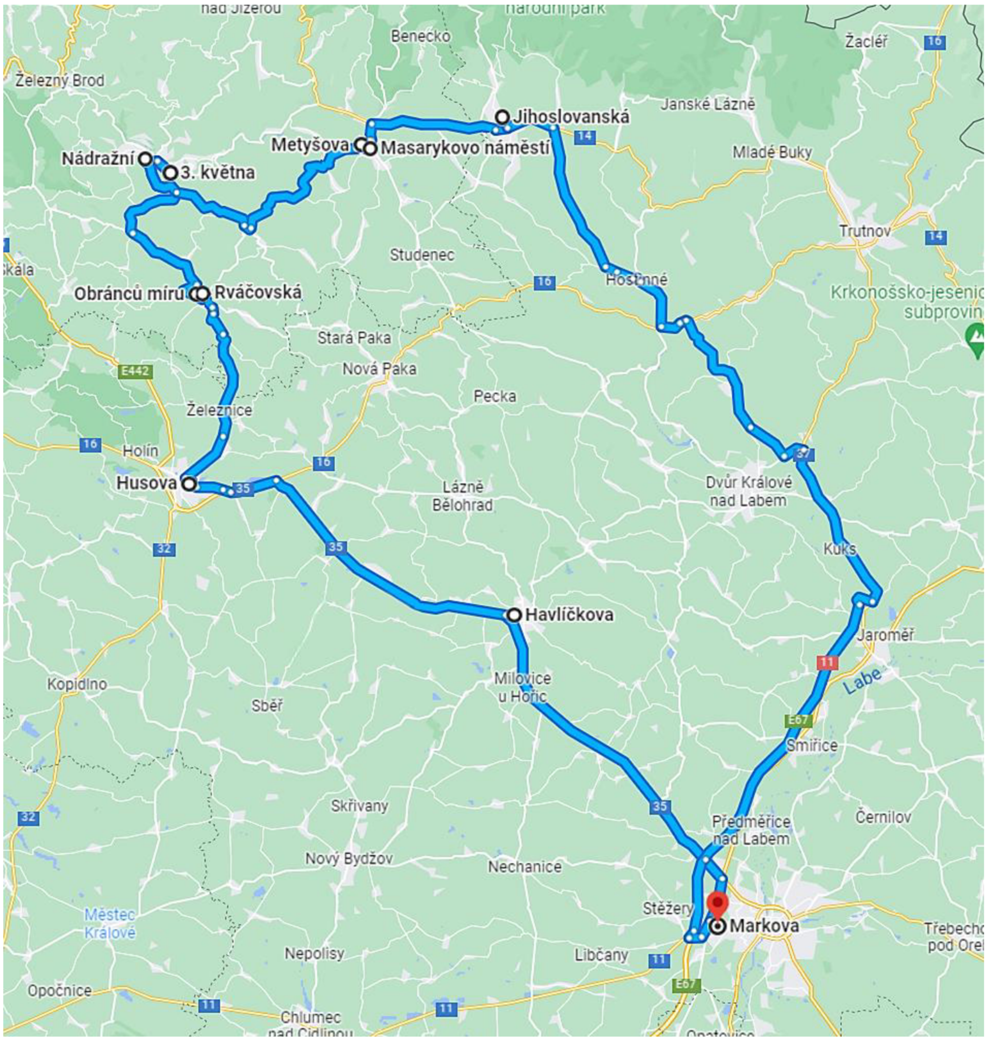
Popis okruhu:

Rozvoz začíná v 6:00 odjezdem z centrálního skladu na adrese Markova, Kukleny v Hradci Králové. První zastávkou je Havlíčkova ulice v Hořicích, kam řidič dorazí v 6:23 a obsluhou zde stráví 15 min. Dále pokračuje do Husové v Jičíně., na toto místo přijede v 7:06 a doba obsluhy je opět 15 min. Z Jičína rozvoz pokračuje do Lomnice nad Popelkou, konkrétně do ulice Rváčovská, s příjezdem v 7:41 a obsluhou trvající 20 min. Poté jede do Obránců míru, kam dorazí v 8:04 a předáváním zboží zde stráví 15 minut. Následně se vydá do Semil na adresu 3. května, čas příjezdu bude v 8:39 a obsluha potrvá 10 minut. Na adresu Nádražní poté přijede v 8:54 a obsluhovat zde bude 15 minut. Osmou zastávkou na trase bude Metyšova v Jilemnicích, kam vozidlo dorazí v 9:32 a obsluhovat se zde bude 10 minut. Následně rozvoz pokračuje na Masarykovo náměstí s příjezdem v 9:45 a obsluhou 15 minut. Poslední zastávkou je Vrchlabí, ulice Jihoslovanská. Příjezd bude v 10:12 a doba trvání obsluhy 20 minut. Poté se již řidič vrátí na původní adresu v Kuklenech do centrálního skladu a rozvoz je tímto ukončen.

Výsledný okruh je zaznamenán níže v tabulce 7, společně s časovými okny pro obsluhu každého z místa a času příjezdu na danou zastávku, dobou strávenou obsluhou a následným časem odjezdu na zastávku další. Obrázek 11 poté znázorňuje výslednou trasu přímo na mapě.

Zastávka	Adresa	Časové okno	Příjezd	Čekání	Doba obsluhy	Odjezd
1	Markova, Kukleny	-	-	-	-	6:00
2	Havlíčkova, Hořice	6:00 - 8:00	6:23	0 min	15 min	6:38
3	Husova, Jičín	6:00 - 10:00	7:06	0 min	15 min	7:21
4	Rváčovská, Lomnice nad Popelkou	6:00 - 12:00	7:41	0 min	20 min	8:01
5	Obránců míru, Lomnice nad Popelkou	6:00 - 14:00	8:04	0 min	15 min	8:19
6	3. května, Semily	6:00 - 12:00	8:39	0 min	10 min	8:49
7	Nádražní, Semily	7:30 - 16:00	8:54	0 min	15 min	9:09
8	Metyšova, Jilemnice	6:00 - 14:00	9:32	0 min	10 min	9:42
9	Masarykovo nám., Jilemnice	8:00 - 14:00	9:45	0 min	15 min	10:00
10	Jihoslovanská, Vrchlabí	10:00 - 16:00	10:12	0 min	20 min	10:32
1	Markova, Kukleny	-	11:38	-	-	-

Tabulka 7: Výsledná trasa s časy příjezdu a odjezdu (vlastní zpracování, 2023)



Obrázek 11: Výsledná trasa na mapě (vlastní zpracování v Google Maps, 2023)

Jak již bylo zmíněno v představení problému, jedná se o jeden z již realizovaných závozů. V porovnání s reálným pořadím navštívených míst, které firma při uskutečnění rozvozu využila, je výsledný okruh totožný. Z tohoto vyplívá, že trasa, kterou řidič zvolil pro distribuci objednaného sortimentu léčivých přípravků lékárnám, byla optimální a zajistila nejkratší možnou celkovou vzdálenost, a to za splnění daných časových oken.

6 Závěr

Bakalářská práce se zaměřila na problematiku okružních dopravních problémů, které jsou známé taktéž pod názvem problém obchodního cestujícího. Konkrétněji se práce zabývala optimalizací dopravních tras v logistické firmě, mezi jejíž klíčové aktivity spadá distribuce léčivých přípravků a poskytování služeb jejich výrobcům. Cílem bylo nalézt takové pořadí míst jednotlivých zastávek daného okruhu, které by bylo nejvhodnější z časového a i vzdálenostního hlediska.

Pro ulehčení zpracování a naplnění cíle se práce nejprve zaměřila na teoretická východiska a poznání řešené problematiky. Byla představena logistika obecně, její definice, historie a hlavní cíle. Následovalo zaměření na operační výzkum, kde byly stručně popsány nejvýznamnější historické úlohy, podrobný popis jeho aplikace na reálný problém, členění modelů a poté byly uvedeny jednotlivé disciplíny, kterými se operační výzkum zabývá. Dále se práce věnovala popisu a formulaci samotných okružních úloh a způsobům jejich řešení. Byla popsána jak statická, tak dynamická verze úlohy a taktéž byla vysvětlena statická verze úlohy rozšířená o časová okna. Tento druh úlohy byl později řešen v praktické části. Teoretická část závěrem představila volně dostupný doplněk OpenSolver pro program Microsoft Excel, který se používal při hledání řešení optimalizace.

Praktická část se věnovala samotnému problému optimalizace rozvozové trasy logistické firmy, která se zaměřuje zejména na distribuci sortimentu lékárnám. Práce se zaměřila na analýzu již uskutečněné trasy. Byla představena charakteristika firmy a taktéž podkladová data, která dále sloužila k vypracování problému. Následně byl sestaven matematický model úlohy obchodního cestujícího s časovými okny. Model byl dále vložen do tabulkového softwaru Microsoft Excel s využitím optimalizačního doplňku OpenSolver verze 2.9.3. Poté mohlo dojít k řešení modelu.

Výpočet proběhl úspěšně za použití solver enginu COIN-OR Branch-and-Cut. Podařilo se najít optimální řešení dané úlohy, kdy se dosáhlo hodnoty účelové funkce 338, která udává časovou náročnost trasy v minutách.

K nalezení lepšího řešení dané rozvozové trasy však nedošlo. Pořadí míst vypočtené trasy bylo v souladu s pořadím, ve kterém řidič závoz uskutečnil. To znamená, že firma své trasy plánuje správně a minimálně v tomto případě byla distribuce řešena optimálně.

7 Seznam použitých zdrojů

APPLEGATE, D. L., BIXBY, R. E., CHVÁTAL, V. and COOK, W. J. 2006. *The Traveling Salesman Problem - a Computational Study*. Oxford: Princeton University Press. ISBN 978-0-691-12993-8

BROŽOVÁ, H., HOUŠKA, M. 2008. *Základní metody operační analýzy*. Praha: Česká zemědělská univerzita v Praze - Provozně ekonomická fakulta. ISBN 978-80-213-0951-7.

CARLSON, S.C., *Konigsberg Bridge Problem* [online]. Encyclopædia Britannica, 2010 [cit. 7. března 2023]. Dostupné z: https://www.britannica.com/science/Konigsberg-bridge-problem

COOK, W. *Po stopách obchodního cestujícího: matematika na hranicích možností*. [online] Praha: Argo, 2012 [cit. 7. března 2023]. Zip (Argo: Dokořán). ISBN 978-80-7363-412-4.

DE OLIVEIRA a kol., *A computational study on ant colony optimization for the traveling salesman problem with dynamic demands* [online]. Computers & Operations Research, 2021 [cit. 7. března 2023]. Dostupné z: https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105359. ISSN 0305-0548.

Encyclopædia Britannica, *Konigsberg Bridge Problem* [online]. (JPEG). ©1994 [cit. 7. března 2023]. Dostupné z: https://cdn.britannica.com/32/7732-004-4E9F29DB/bridges-Konigsberg-multigraph.jpg?s=1500x700&q=85

FÁBRY, J. 2011. *Matematické modelování*. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-7431-066-9.

FÁBRY, J., 2006. *Dynamické okružní a rozvozní úlohy*, disertační práce. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky.

GASS, S. I., ASSAD, A. A., *History of Operations Research* [online]. TutORials in Operations Research, INFORMS, 2011 [cit. 25. února 2023]. Dostupné z: https://doi.org/10.1287/educ.1110.0084. ISBN 978-0-9843378-2-8.

Google Maps, *Google* [online]. [cit. 7. března 2023]. Dostupné z: https://www.google.cz/maps

GROS, I. 1995. *Logistika ano či ne?* Logistika: Měsíčník Hospodářských novin, roč. 1., č. 3., s. 58., ISSN 1211-0957

HESKETT, J. L. *Logistics—Essential to Strategy* [online]. Harvard Business Review, 1977 [cit. 28. února 2023]. Dostupné z: https://hbr.org/1977/11/logistics-essential-to-strategy

CHRISTOPHER, M. *Logistics & supply chain management* [online]. Pearson Education Limited, 2011 [cit. 25. února 2023]. Dostupné z: https://www.ascdegreecollege.ac.in/wp-content/uploads/2020/12/Logistics_and_Supply_Chain_Management.pdf. ISBN 978-0-273-73112-2.

JABLONSKÝ, J. 2007. *Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování*. 3. vyd. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-44-3

KIM, W. *Flow chart of the branch-and-cut algorithm*. In: ResearchGate [online]. 2019 [cit. 2023-03-07]. Dostupné z: https://www.britannica.com/science/Konigsberg-bridge-problem

KUČERA, P., 2009. *Metodologie řešení okružního dopravního problému,* disertační práce. Praha: Česká zemědělská univerzita v Praze, Provozně ekonomická fakulta.

LAPORTE, G. *A Concise Guide to the Traveling Salesman Problem*. [online]. The Journal of the Operational Research Society, 2010, [cit. 7. března 2023]. Dostupné z: https://www.jstor.org/stable/40540226?seq=1#metadata_info_tab_contents

MITCHELL, J. E. *Branch-and-cut algorithms for combinatorial optimization problems* [online]. Handbook of applied optimization, 2002. (PDF). [cit. 10. března 2023]. Dostupné z:
https://homes.di.unimi.it/righini/Didattica/ComplementiRicercaOperativa/MaterialeCRO/2000%20-%20Mitchell%20-%20branch-and-cut.pdf

OpenSolver: *The Open Source Optimization Solver for Excel*, [online]. 2012 [cit. 7. března 2023]. Dostupné z: https://opensolver.org

OUDOVÁ, A. 2016. *Logistika: základy logistiky*. Aktualizované 2. vydání. Prostějov: Computer Media. ISBN 978-80-7402-238-8

PELIKÁN, J., 1993. *Praktikum z operačního výzkumu*. Praha: Vysoká škola ekonomická. ISBN 80-7079-135-7.

PERNICA, P. 1998. *Logistický management: teorie a podniková praxe*. Praha: Radix. ISBN 80-86031-13-6

PÍSAŘÍKOVÁ, N., 2015. *Analýza systému obsluhy zákazníků,* bakalářská práce. Praha: Česká zemědělská univerzita v Praze, Provozně ekonomická fakulta.

SCHULTE, CH. 1994. *Logistika*. [překl.] Gustav TOMEK a Adolf BAUDYŠ. Praha: Victorica Publishing. ISBN 80-85605-87-2

SIXTA, J., MAČÁT V. 2005. *Logistika: teorie a praxe*. Brno: CP Books. ISBN 80-251-0573-3

STEHLÍK, A., KAPOUN J. 2008. *Logistika pro manažery*. Praha: Ekopress. ISBN 978-80-86929-37-8

ŠTŮSEK, J. 2007. *Řízení provozu v logistických řetězcích*. Praha: C. H. Beck. ISBN 8071795348

ŠUBRT, T. a kol. 2019. *Ekonomicko-matematické metody*. 3. upravené a rozšířené vydání. Plzeň: Vydavatelství a nakladatelství Aleš Čeněk. ISBN 978-80-7380-762-7

WEISSTEIN, E.W. *Icosian Game*. [online]. In MathWorld--A Wolfram Web Resource, 2003 [cit. 7. března 2023] https://mathworld.wolfram.com/IcosianGame.html

WEISSTEIN, E.W. Knight Graph. [online]. In MathWorld--A Wolfram Web Resource, 2002 [cit. 7. března 2023] https://mathworld.wolfram.com/KnightGraph.html

WINSTON, W. L., GOLDBERG, J. B. *Operations Research: Applications and Algorithms*. [online] 4th ed. Belmont, CA: Thomson/Brooks/Cole. 2004. (PDF) [cit. 28. února 2023]. Dostupné z: https://itslearningakarmazyan.files.wordpress.com/2015/09/operation-research-aplications-and-algorithms.pdf. ISBN 0-534-52020-0.

8 Seznam obrázků, tabulek, grafů a zkratek

8.1 Seznam obrázků

8.2 Seznam tabulek

Přílohy

Příloha 1: Účelová funkce

MINIMIZE

Obj: +0 C31 +23 D31 +45 _E31 +62 F31 +64 G31 +55 H31 +54 I31 +78 J31 +71 K31 +69 L31 +28 C32 +0 D32 +28 _E32 +37 F32 +46 G32 +35 H32 +34 I32 +52 J32 +50 K32 +46 L32 +50 C33 +27 D33 +0 _E33 +38 F33 +39 G33 +23 H33 +20 I33 +41 J33 +34 K33 +47 L33 +66 C34 +42 D34 +39 _E34 +0 F34 +2 G34 +23 H34 +25 I34 +30 J34 +27 K34 +12 L34 +62 C35 +45 D35 +40 _E35 +3 F35 +0 G35 +24 H35 +21 I35 +28 J35 +22 K35 +17 L35 +58 C36 +41 D36 +23 _E36 +29 F36 +26 G36 +0 H36 +4 I36 +20 J36 +19 K36 +36 L36 +63 C37 +37 D37 +20 _E37 +26 F37 +21 G37 +3 H37 +0 I37 +19 J37 +16 K37 +32 L37 +80 C38 +56 D38 +43 _E38 +35 F38 +26 G38 +23 H38 +16 I38 +0 J38 +5 K38 +44 L38 +82 C39 +53 D39 +37 _E39 +29 F39 +23 G39 +19 H39 +14 I39 +5 J39 +0 K39 +35 L39 +66 C40 +45 D40 +40 _E40 +10 F40 +14 G40 +36 H40 +33 I40 +42 J40 +37 K40 +0 L40 +0 C48 +0 C49 +0 C50 +0 C51 +0 C52 +0 C53 +0 C54 +0 C55 +0 C56 +0 C57 +0 C60 +0 C61 +0 C62 +0 C63 +0 C64 +0 C65 +0 C66 +0 C67 +0 C68 +0 C69 +1 C72 +1 C73 +1 C74 +1 C75 +1 C76 +1 C77 +1 C78 +1 C79 +1 C80 +1 C81 +0 G51 +0 G52 +0 G53 +0 G54 +0 G55 +0 G56 +0 G57 +0 G58 +0 G59 +0 G60 +0 G61 +0 G62 +0 G63 +0 G64 +0 G65 +0 G66 +0 G67 +0 G68 +0 G69 +0 G70 +0 G71 +0 G72 +0 G73 +0 G74 +0 G75 +0 G76 +0 G77 +0 G78 +0 G79 +0 G80 +0 G81 +0 G82 +0 G83 +0 G84 +0 G85 +0 G86 +0 G87 +0 G88 +0 G89 +0 G90 +0 G91 +0 G92 +0 G93 +0 G94 +0 G95 +0 G96 +0 G97 +0 G98 +0 G99 +0 G100 +0 G101 +0 G102 +0 G103 +0 G104 +0 G105 +0 G106 +0 G107 +0 G108 +0 G109 +0 G110 +0 G111 +0 G112 +0 G113 +0 G114 +0 G115 +0 G116 +0 G117 +0 G118 +0 G119 +0 G120 +0 G121 +0 G122 +0 G123 +0 G124 +0 G125 +0 G126 +0 G127 +0 G128 +0 G129 +0 G130 +0 G131

Příloha 2: Ukázka ze vstupního modelu

\ Model solved using the solver: CBC

\ Model for sheet bp

\ Model has 20 Excel constraints giving 373 constraint rows and 211 variables.

MINIMIZE

Obj: +0 C31 +23 D31 +45 _E31 +62 F31 +64 G31 +55 H31 +54 I31 +78 J31 +71 K31 +69 L31 +28 C32 +0 D32 +28 _E32 +37 F32 +46 G32 +35 H32 +34 I32 +52 J32 +50 K32 +46 L32 +50 C33 +27 D33 +0 _E33 +38 F33 +39 G33 +23 H33 +20 I33 +41 J33 +34 K33 +47 L33 +66 C34 +42 D34 +39 _E34 +0 F34 +2 G34 +23 H34 +25 I34 +30 J34 +27 K34 +12 L34 +62 C35 +45 D35 +40 _E35 +3 F35 +0 G35 +24 H35 +21 I35 +28 J35 +22 K35 +17 L35 +58 C36 +41 D36 +23 _E36 +29 F36 +26 G36 +0 H36 +4 I36 +20 J36 +19 K36 +36 L36 +63 C37 +37 D37 +20 _E37 +26 F37 +21 G37 +3 H37 +0 I37 +19 J37 +16 K37 +32 L37 +80 C38 +56 D38 +43 _E38 +35 F38 +26 G38 +23 H38 +16 I38 +0 J38 +5 K38 +44 L38 +82 C39 +53 D39 +37 _E39 +29 F39 +23 G39 +19 H39 +14 I39 +5 J39 +0 K39 +35 L39 +66 C40 +45 D40 +40 _E40 +10 F40 +14 G40 +36 H40 +33 I40 +42 J40 +37 K40 +0 L40 +0 C48 +0 C49 +0 C50 +0 C51 +0 C52 +0 C53 +0 C54 +0 C55 +0 C56 +0 C57 +0 C60 +0 C61 +0 C62 +0 C63 +0 C64 +0 C65 +0 C66 +0 C67 +0 C68 +0 C69 +1 C72 +1 C73 +1 C74 +1 C75 +1 C76 +1 C77 +1 C78 +1 C79 +1 C80 +1 C81 +0 G51 +0 G52 +0 G53 +0 G54 +0 G55 +0 G56 +0 G57 +0 G58 +0 G59 +0 G60 +0 G61 +0 G62 +0 G63 +0 G64 +0 G65 +0 G66 +0 G67 +0 G68 +0 G69 +0 G70 +0 G71 +0 G72 +0 G73 +0 G74 +0 G75 +0 G76 +0 G77 +0 G78 +0 G79 +0 G80 +0 G81 +0 G82 +0 G83 +0 G84 +0 G85 +0 G86 +0 G87 +0 G88 +0 G89 +0 G90 +0 G91 +0 G92 +0 G93 +0 G94 +0 G95 +0 G96 +0 G97 +0 G98 +0 G99 +0 G100 +0 G101 +0 G102 +0 G103 +0 G104 +0 G105 +0 G106 +0 G107 +0 G108 +0 G109 +0 G110 +0 G111 +0 G112 +0 G113 +0 G114 +0 G115 +0 G116 +0 G117 +0 G118 +0 G119 +0 G120 +0 G121 +0 G122 +0 G123 +0 G124 +0 G125 +0 G126 +0 G127 +0 G128 +0 G129 +0 G130 +0 G131

SUBJECT TO

\ C41:L41 = C42:L42

+1 C31 +1 C32 +1 C33 +1 C34 +1 C35 +1 C36 +1 C37 +1 C38 +1 C39 +1 C40 = +1

+1 D31 +1 D32 +1 D33 +1 D34 +1 D35 +1 D36 +1 D37 +1 D38 +1 D39 +1 D40 = +1

+1 _E31 +1 _E32 +1 _E33 +1 _E34 +1 _E35 +1 _E36 +1 _E37 +1 _E38 +1 _E39 +1 _E40 = +1

+1 F31 +1 F32 +1 F33 +1 F34 +1 F35 +1 F36 +1 F37 +1 F38 +1 F39 +1 F40 = +1

+1 G31 +1 G32 +1 G33 +1 G34 +1 G35 +1 G36 +1 G37 +1 G38 +1 G39 +1 G40 = +1

+1 H31 +1 H32 +1 H33 +1 H34 +1 H35 +1 H36 +1 H37 +1 H38 +1 H39 +1 H40 = +1

+1 I31 +1 I32 +1 I33 +1 I34 +1 I35 +1 I36 +1 I37 +1 I38 +1 I39 +1 I40 = +1

+1 J31 +1 J32 +1 J33 +1 J34 +1 J35 +1 J36 +1 J37 +1 J38 +1 J39 +1 J40 = +1

+1 K31 +1 K32 +1 K33 +1 K34 +1 K35 +1 K36 +1 K37 +1 K38 +1 K39 +1 K40 = +1

+1 L31 +1 L32 +1 L33 +1 L34 +1 L35 +1 L36 +1 L37 +1 L38 +1 L39 +1 L40 = +1

\ N51:N131 <= P51:P131

+10 D31 +1 C48 -1 C49 <= +9

+10 _E31 +1 C48 -1 C50 <= +9

+10 F31 +1 C48 -1 C51 <= +9

+10 G31 +1 C48 -1 C52 <= +9

+10 H31 +1 C48 -1 C53 <= +9

+10 I31 +1 C48 -1 C54 <= +9

+10 J31 +1 C48 -1 C55 <= +9

+10 K31 +1 C48 -1 C56 <= +9

+10 L31 +1 C48 -1 C57 <= +9

+10 _E32 +1 C49 -1 C50 <= +9

+10 F32 +1 C49 -1 C51 <= +9

+10 G32 +1 C49 -1 C52 <= +9