UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Hry s neúplnou a nedokonalou informací

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Lucie Havranová**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovnictví/pojišťovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2023

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Lucie Havranová

Název práce: Hry s neúplnou a nedokonalou informací

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2023

Abstrakt: Teorie her se jako samostatná vědní disciplína aplikované matematiky zabývá konfliktními situacemi, ve kterých dochází ke střetu zájmů. Modely teorie her se snaží předpovědět, jakým způsobem budou hráči reagovat na určité situace a hledají optimální strategie pro všechny účastníky konfliktu. V této bakalářské práci je nejprve popsána historie této disciplíny, dále základní pojmy teorie her a metody hledání rovnovážného bodu. Hlavní část se věnuje hrám, které se liší tím, co hráči ví o preferencích protihráčů, výplatách, stavu hry apod. Hlavním cílem této práce je rozlišit hry s neúplnou a nedokonalou informací a ukázat jejich řešení na vlastních příkladech.

Klíčová slova: Rozhodovací situace, hráč, hra, výplatní funkce, strategie, optimální řešení, Nashova rovnováha, Bayesovská hra, hra s nedokonalou informací

Počet stran: 43

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Lucie Havranová

Title: Games with Incomplete and Imperfect Information

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.

The year of presentation: 2023

Abstract: Game theory, as a separate discipline of applied mathematics, deals with conflict situations in which there is a conflict of interest. Game theory models try to predict how players will react to certain situations and try to find optimal strategies for all participants in the conflict. In this bachelor thesis, the history of the discipline is first described, followed by the basic terms of game theory and methods for finding the equilibrium point. The main part is devoted to games that differ in what players know about their opponents' preferences, payoffs, game state, etc. The main goal of this paper is to distinguish between games with incomplete and imperfect information and to show their solutions using our own examples.

Key words: Decision-making situation, player, game, payoff function, strategy, optimal solution, Nash equilibrium, Bayesian game, game with imperfect information

Number of pages: 43

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením paní Mgr. Ivety Bebčákové, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Ráda bych poděkovala paní Mgr. Ivety Bebčákové, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, cenné rady a připomínky. Také bych chtěla poděkovat svým blízkým za podporu během celého studia.

Úvod

Teorie her je významnou matematickou disciplínou, která se zabývá strategickým chováním při interakci dvou a více jedinců. Její vznik se datuje do první poloviny 20. století, kdy se matematická analýza konfliktních situací aplikovala především na sociální a ekonomické problémy. V dnešní době se teorie her uplatňuje v celé řadě oborů, například v ekonomii, sociologii, politologii, biologii a mnoho dalších.

V první kapitole této bakalářské práce se seznámíme s historií této disciplíny a osobnostmi, které přispěli k jejímu rozvoji. Dále si specifikujeme základní pojmy teorie her, které jsou pro pochopení a předpovídání lidského chování v rozhodovacích situacích nezbytné. Další část kapitoly se bude zaměřovat na hledání rovnováhy v teorii her, a to pomocí metod jako jsou dominantní strategie a Nashova rovnováha. Jejich použití si ukážeme na příkladech. Nakonec si stručně vysvětlíme princip her s nulovým součtem a metodu sedlového bodu.

Hlavní část této bakalářské práce je věnována hrám, které se liší úrovní informací, které mají hráči k dispozici. Postupně si představíme hry s úplnou, neúplnou, dokonalou a nedokonalou informací. Typy her si popíšeme, vysvětlíme si, jak lze v konkrétním typu hry nalézt rovnováhu a uvedeme konkrétní příklady těchto typů her.

Cílem práce je objasnit čtenářům základní principy teorie her, zaměřit se především na hry s neúplnou a nedokonalou informací a uvést příklady pro lepší pochopení problematiky.

Kapitola 1

Klasická teorie her

Teorie her je disciplína aplikované matematiky, která slouží k hledání optimálního řešení při různých konfliktních rozhodovacích situacích. Pojmem hra ovšem nemyslíme pouze hru jako takovou, ale jakoukoliv situaci, kdy je potřeba zvolit jednu z možných strategií k jejímu řešení. Předpokladem k řešení těchto situací je racionalita - nelze předpovědět chování v situaci, kdy hrají roli emoce (láska, hněv aj.) a jakási sebestřednost aktérů - účastníci se snaží maximalizovat svůj zisk a nehledí na zisk/ztrátu ostatních účastníků.

Teorie her lze aplikovat na mnoho situací z každodenního života. Jako příklad můžeme uvést situaci, kdy jdeme po chodníku a naproti nám kráčí člověk. Máme na výběr ze dvou možností (strategií), ustoupit doprava či ustoupit doleva. Chodec naproti nám má úplně stejné možnosti. Stojíme tedy před rozhodnutím, následkem kterého nastane jeden ze dvou možných výsledků: buď se s daným člověkem srazíme nebo kolem něj projdeme. Mezi další běžné situace užití teorie her patří volební kampaně, válečné strategie, investování do akcií apod.

1.1. Počátky teorie her

V této podkapitole si představíme stručný průřez historií teorie her a budeme čerpat z [5] a [12].

Je zřejmé, že se teorie her zabývá situacemi, ve kterých dochází ke střetu zájmů. S takovými situacemi se lidé již od pradávna setkávají velmi často.

Základní poznatky této disciplíny poprvé zmínil italský matematik Gerolamo Cardano ve své knize *Book on Games of Chance (1663)*. V roce 1713 Pierre Rémond de Montmort ve druhé edici své knihy *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* zmiňuje takzvaný The Problem of Waldegrave. Tento problém se zabývá francouzskou karetní hrou Le Her a vyřešil ho Charles Waldegrave v dopise, který napsal právě de Montmortovi. Hra se hraje se standardním balíčkem 52 karet a na konci vyhrává hráč, který v ruce drží kartu s nejvyšší hodnotou. Nejvyšší hodnotu má král, nejnižší eso. Hráč A rozdá každému hráči jednu kartu, lícem dolů. Pokud hráč B není spokojen se svou kartou, může si ji vyměnit s hráčem A. Tato výměna může nastat pouze pokud hráč A nemá krále. Následně si hráč A může svou kartu vyměnit za náhodně vybranou kartu ze zbytku balíčku. Opět jen v případě, že karta, kterou si vybere, není král. Ve výše zmíněné knize je popsána detailní analýza strategie, která maximalizuje pravděpodobnost hráčova vítězství bez ohledu na to, jakou strategii zvolí oponent. Tato strategie je založena na následujícím předpokladu: pokud má hráč B kartu s hodnotou 7 nebo nižší, pak si tuto kartu s pravděpodobností $\frac{5}{8}$ vymění s hráčem A a pokud má kartu s hodnotou 7 a vyšší, pak si tuto kartu s pravděpodobností $\frac{3}{8}$ ponechá. Pro hráče A platí, že pokud má kartu s číslem 8 a nižší, tak si s pravděpodobností $\frac{3}{8}$ vezme kartu z balíčku. Naopak pokud má kartu s hodnotou 8 a vyšší, tak si ji s pravděpodobností $\frac{5}{8}$ nechá. Hra může být rozšířena pro větší počet hráčů.

Hráč B	**Karta 7 a nižší**	**Karta 7 a vyšší**
Nechat si svou kartu		$\frac{3}{8}$
Vyměnit s hráčem A	$\frac{5}{8}$	

Hráč A	**Karta 8 a nižší**	**Karta 8 a vyšší**
Nechat si svou kartu		$\frac{5}{8}$
Vzít si kartu z balíčku	$\frac{3}{8}$	

Tabulka 1.1: Le Her

Mezi další významné osobnosti patří Augustin Cournot, Francis Ysidro Edgeworth a Emile Borel. Všichni tito matematici se ve svých dílech snažili popsat, předpovědět a vysvětlit lidské chování v určitém kontextu (například při duopolu).[1]

K vývoji teorie her výrazně přispěl matematik maďarského původu John von Neumann, který si jakožto příležitostný, a ne zrovna úspěšný hráč pokeru uvědomil, že se poker a podobné hry neřídí pouze teorií pravděpodobnosti, ale je potřeba i určitá strategie. Strategií se podrobně zabýval v publikaci *On the Theory of Games of Strategy (1928)*. Později Neumann společně s rakouským ekonomem Oskarem Morgensternem vydal knihu s názvem *Theory of Games and Economic Behaviour (1944)* a tím dal základy teorii her jako samostatné vědní disciplíny a zároveň došlo k jejímu velkému rozvoji v ekonomii. V této knize autoři představili koncept Nashovy rovnováhy ve smíšených strategiích v konečných hrách s nulovým součtem.[2]

V roce 1951 držitel Nobelovy ceny John Nash dokázal, že v každé konečné hře mohou hráči dosáhnout optimálního výsledku při zohlednění akcí ostatních hráčů a rozšířil Neumannovu definici rovnováhy na více typů her. Nashovu rovnováhu si více představíme v podkapitole 1.3. Za zmínku též stojí John Harsanyi, který je známý jako zakladatel Bayesovských her a stejně jako jeho předchůdci výrazně spojoval teorii her s ekonomií. Společně s dalšími matematiky získal v roce 1994 Nobelovu pamětní cenu za ekonomii za „průkopnickou analýzu rovnováhy v teorii nekooperativních her".

Teorie her se začala více a více používat k analýze celé řady jevů v reálném světě a její uplatnění se rozšířilo do mnoha vědních disciplín jako například politiky, počítačové vědy a sociologie.

1.2. Základní pojmy

V této podkapitole si představíme pojmy, bez kterých bychom nebyli schopni problematiku teorie her pochopit. Budeme čerpat z [3] a [2].

Jako první si vysvětlíme pojmy: **hra**, **hráč**, **strategie** a **výplata**. Hra označuje jakoukoliv konfliktní situaci, ve které vystupují alespoň dva jedinci nebo skupiny

[1] Situace, kdy na trhu jednoho výrobku soupeří pouze dva výrobci.
[2] Například hra kámen, nůžky, papír.

jedinců, které nazýváme hráči. Každý hráč má svůj prostor strategií, který je tvořen možnostmi (strategiemi), jak hru hrát. Hra pak jednotlivým hráčům na základě jejich strategií rozdělí výhry neboli výplaty v podobě užitku. Užitkem zde myslíme hodnotu, která uvádí, jakého zisku či ztráty hráč dosáhne při volbě určité strategie.

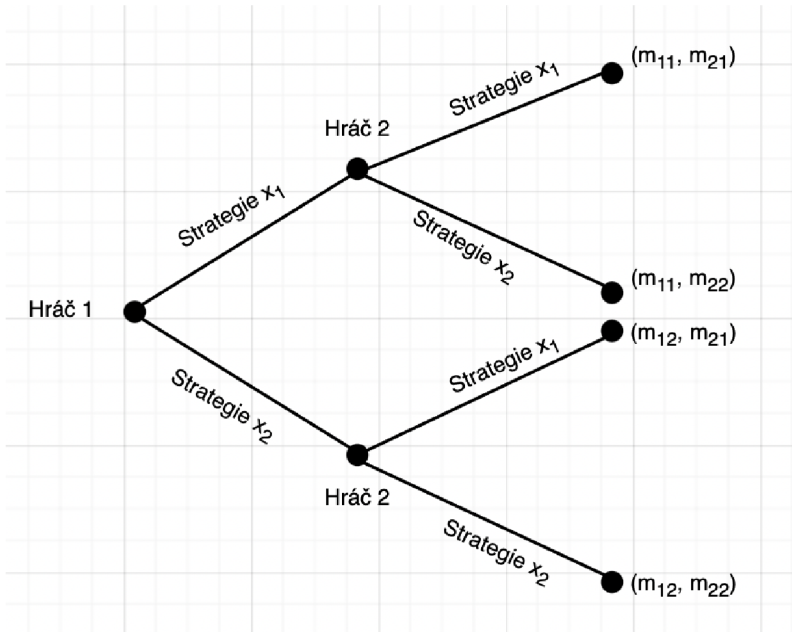
Teorie her předpokládá racionální chování hráčů a označuje je jako racionální neboli inteligentní hráče. **Racionální hráč** se rozhoduje na základě důkladné analýzy dostupných informací o hře a o svých protihráčích. V následujícím textu budeme za takového hráče považovat toho, kdo hraje strategii, která maximalizuje jeho očekávanou výhru.

Poznámka 1. Racionální hráč ovšem nemusí být nutně ten, kdo maximalizuje svou výplatu. V takzvaných kooperativních hrách může optimální strategie znamenat například spolupráci s ostatními a přijmutí méně optimálního výsledku za účelem dosažení vyššího celkového výsledku pro všechny hráče. Racionalita tedy spočívá ve volbě té možnosti, o které se hráč domnívá, že je pro něj v dané situaci tou nejlepší a je v souladu s jeho cíli a přesvědčeními.

Hry se mohou účastnit také **neinteligentní hráči**, jejichž chování je zcela náhodné. V některých modelech her neinteligentního hráče označujeme termínem *Příroda*. *Přírodou* máme na mysli například počasí, tržní síly či losovací zařízení. Chování *Přírody* nelze předvídat ani ovlivnit, jedná se o zcela náhodný mechanismus. Pokud se ve hře nachází jeden inteligentní a jeden neinteligentní hráč, rozlišujeme rozhodování při riziku a rozhodování při nejistotě. Rozhodování při riziku nastává v situaci, kdy inteligentní hráč zná pravděpodobnostní rozdělení výběru strategie hráče neinteligentního. Pokud inteligentní hráč toto rozdělení nezná, pak se jedná o rozhodování při nejistotě.

Budeme se zabývat dvěma nejdůležitějšími modely teorie her, a to hrami v normálním tvaru a hrami v rozvinutém (explicitním) tvaru. **Hra v normálním tvaru** (statická) je charakterizována třemi množinami: množinou hráčů, množinou prostorů strategií a množinou výplatních funkcí. Takovou hru zapisujeme pomocí výplatní matice, která zobrazuje všechny možné strategie a jim odpovídající výhry pro každého hráče. Přesnější podobu výplatní matice si ukážeme později v této kapitole. Tato forma hry se používá v případě simultánních her, ve kterých všichni hráči jednají současně, aniž by v momentě volby své strategie věděli, jak se zachovali ostatní hráči.

Hra v rozvinutém tvaru (dynamická) popisuje hru pomocí stromu hry. Tento tvar se používá k zápisu sekvenčních her, kdy hráči volí své strategie postupně a mají tak informace o předchozích volbách strategií ostatních hráčů. Strom hry je diagram zobrazující všechny možné tahy každého hráče, přičemž každý uzel stromu reprezentuje bod, ve kterém hráč volí mezi různými strategiemi. Možnou podobu stromu hry zobrazuje obrázek 1.1, kde jako první volí hráč 1 mezi strategiemi x_1 a x_2. Hráč 2 se mezi svými strategiemi rozhoduje poté, co zjistí, co zvolil hráč 1. Symboly m s příslušnými indexy představují možné výplaty hráčů. Například pokud oba hráči zvolí strategii x_1, pak výplaty hráčů budou (m_{11}, m_{21}).



Obrázek 1.1: Strom hry.

V následující definici si základní pojmy představíme z matematického hlediska.

Definice 1. **Hrou N hráčů v normálním tvaru** budeme rozumět uspořádanou $(2N+1)$-tici

$$G = \{H, X_1, ..., X_N, M_1, ..., M_N\}, \tag{1.1}$$

kde:

1. $H = \{1, ..., N\}$ je neprázdná, konečná **množina hráčů**
2. $X_1, ..., X_N$ jsou měřitelné množiny, přičemž množinu X_i nazveme **prostorem strategií hráče** $i \in H$ a prvek $x_i \in X_i$ nazveme strategií hráče $i \in H$
3. $M_1, ..., M_N$ jsou omezené reálné funkce definované na kartézském součinu $X_1 \times ... \times X_N$, přičemž funkci M_i nazýváme **výplatní funkcí hráče** $i \in H$ a hodnotu výplatní funkce M_i nazveme výplatou hráče $i \in H$

Je-li hodnota výplatní funkce pro daného hráče kladná, hovoříme o zisku, je-li záporná, hovoříme o ztrátě.

Poznámka 2. Definice 1 připouští možnost nekonečnosti či nespočetnosti prostorů strategií. My se omezíme pouze na konečné hry, ve kterých jsou prostory strategií jednotlivých hráčů konečné množiny, tj. mají konečný počet prvků.

Tyto základní pojmy by nám ovšem k pochopení celé problematiky nestačily, proto musíme uvést i následující.

Optimální strategie je taková strategie, která vede k nejlepšímu možnému výsledku vzhledem ke stanoveným cílům určitého hráče.

Rovnováha neboli ekvilibrium je stav hry, kdy žádný hráč nemá motivaci změnit svou strategii, jelikož je jeho strategie nejlepší možnou odpovědí na strategie ostatních hráčů. Bod, ve kterém tento stav nastane, nazýváme rovnovážný bod. Existuje více typů rovnováh, my se v dalším textu budeme zabývat především Nashovou rovnováhou.

Ryzí (čistá) strategie spočívá ve výběru jedné, přesně definované akce z množiny strategií. Při hraní hry hráč zvolí právě tuto vybranou strategii, aniž by zvažoval ostatní možnosti. Hráč se snaží najít tu ryzí strategii, která mu umožní dosáhnout co nejlepšího výsledku.

Můžeme uvažovat například situaci zmíněnou na úplném počátku první kapitoly, kdy jdeme po chodníku, proti nám jde osoba a my můžeme ustoupit buď doprava nebo doleva. Pokud si v takové situaci zvolíme jako svou ryzí strategii 'ustoupit doprava', pak tuto strategii použijeme v takové situaci vždy, bez ohledu na ostatní faktory hry (zvolená strategie oponenta, stav hry, předchozí akce protihráčů, preference hráče apod).

Smíšená strategie nastává v situaci, kdy hráč vybírá z více akcí s určitými pravděpodobnostmi. Použití smíšených strategií může hráči umožnit maximalizovat jeho užitek.

V případě smíšených strategiích by hráč s pravděpodobností p vybral strategii 'ustoupit doprava' a s pravděpodobností $1 - p$ strategii 'ustoupit doleva', kde p je číslo mezi nulou a jedničkou.

1.3. Rovnováha v teorii her

V hlavní části této bakalářské práce si jednotlivé druhy her ukážeme na příkladech, ve kterých budeme hledat rovnováhu hry. Základní principy nalezení rovnováhy si ukážeme v této podkapitole a budeme čerpat z [3], [8], [11] a [13].

Budeme uvažovat následující podmínky rozhodovacích situací:

- hra musí obsahovat alespoň dva hráče, minimálně jeden z hráčů musí být racionální
- hráči volí své strategie nezávisle na ostatních, tzn. že se mezi sebou nemohou domlouvat, jakou strategii zvolí
- všichni účastníci znají pravidla hry a ta se během hry nemění
- hra je konečná

Při hledání rovnováhy je z počátku klíčové správně identifikovat hru, hráče, jejich možné strategie a výplaty. Poté vše zaneseme do výplatní matice, kde v řádcích zobrazíme strategie jednoho hráče a ve sloupcích strategie druhého hráče.

Pro každého hráče musí být uvedeny všechny možné strategie a odpovídající výplaty. Dále můžeme přejít k hledání **dominantních strategií**, což je situace, která je pro hráče vždy výhodnější bez ohledu na to, co zvolí oponent.

Definice 2. Nechť $I = (H,\ \mathbf{Y},\ \mathbf{M})$ je smíšeným rozšířením [3] hry $G = (H,\ \mathbf{X},\ \mathbf{M})$, pak řekneme, že strategie $y_i^1 \in Y_i$ i-tého hráče **silně dominuje** (je lepší než) $y_i^2 \in Y_i$ i-tého hráče, pokud platí:

$$\forall y^i = (y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_N) : M_i(y^i, y_i^1) \geq M_i(y^i, y_i^2) \tag{1.2}$$

$$\exists y^i : M_i(y^i, y_i^1) > M_i(y^i, y_i^2) \tag{1.3}$$

Značíme pak $y_i^1 \succ y_i^2$. Pokud je splněna pouze podmínka 1.2, pak říkáme, že strategie y_i^1 i-tého hráče **slabě dominuje** (je aspoň tak dobrá jako) strategii y_i^2 i-tého hráče a značíme $y_i^1 \succeq y_i^2$. Pokud platí $y_i^1 \succeq y_i^2$ a zároveň $y_i^1 \preceq y_i^2$, pak říkáme, že strategie y_i^1 a y_i^2 i-tého hráče jsou **ekvivalentní** (jsou stejně dobré), značíme $y_i^1 \approx y_i^2$

Definice 2 nám umožňuje porovnávat mezi sebou jednotlivé strategie hráče. Silně dominantní strategie poskytne hráči větší užitek než ostatní dostupné strategie. Slabě dominantní strategie vede ke stejným či lepším výsledkům než alternativní strategie. Platí, že pokud je strategie silně dominantní tak je zároveň i slabě dominantní. To, že je slabě dominantní strategie i silně dominantní, zaručeno není. Pokud najdeme dominantní strategie pro oba hráče, pak průsečík těchto strategií reprezentuje Nashovu rovnováhu.

Definice 3. N-tici strategií $\overline{x} = (\overline{x_1}, ..., \overline{x_N})$ nazveme **rovnovážným bodem** (příslušné hry v normálním tvaru), jestliže platí:

$$M_i(\overline{x_1}, ..., \overline{x_{i-1}}, \overline{x_i}, \overline{x_{i+1}}, ..., \overline{x_N}) \geq M_i(\overline{x_1}, ..., \overline{x_{i-1}}, x_i, \overline{x_{i+1}}, ..., \overline{x_N}) \tag{1.4}$$

pro všechna $i \in H$ a všechna $x_i \in X_i$. Složka $\overline{x_i}$ se nazývá **rovnovážnou strategií i-tého hráče**.

[3] Smíšené rozšíření hry se používá v případě, kdy hra nemá řešení v ryzích strategiích.

V definici 3 rovnovážným bodem myslíme právě Nashovu rovnováhu, kterou lze popsat jako situaci, kdy hráč nemá motivaci odchýlit se od své strategie za předpokladu, že svou strategii nezmění ani ostatní účastníci hry. Tento koncept je pojmenován po Johnu Nashovi, který výrazně přispěl k rozvoji této myšlenky a to tím, že vyslovil a dokázal následující větu.

Věta 1. ***(Nashova věta)*** *Ve smíšených strategiích má každá konečná hra alespoň jeden rovnovážný bod. [3]*

Platí:

- Pokud hra nemá dominantní strategie stále může mít Nashovu rovnováhu.
- Dominantní strategie se často používají ke zredukování počtu strategií, o kterých hráč uvažuje.
- Nashova rovnováha může, ale nemusí být optimální strategií.
- V závislosti na tom, zda hráči používají ryzí či smíšenou strategii, rozlišujeme ryzí a smíšenou Nashovu rovnováhu.

Za nejznámější příklad užití Nashovy rovnováhy je považováno Vězňovo dilema popsané v [3] a mnoha dalších literaturách.

Výpočet Nashovy rovnováhy si ukážeme na následujících příkladech, které jsou obdobou známého konfliktu Souboj pohlaví.

Příklad 1. Uvažujme Aleše a jeho nového souseda Bena, kteří při seznamování zjistí, že sdílí zájem o sport. Aleš má nejraději tenis a Ben fotbal. Aleš navrhne, aby se následující den v určitý čas sešli v nedaleké sportovní hale. Rozloučí se s tím, že se v daný den domluví, jestli si půjdou jeden ze sportů zahrát společně, nebo půjde každý na jiný. Ben se druhý den zpozdí v práci a do sportovní haly jede rovnou ze zaměstnání. Telefonní čísla si noví sousedé vyměnit nestihli a sportovní hala má oddělené vchody pro tenis a fotbal, každý na jiné straně budovy. Nemají se jak domluvit a musí se tedy rozhodnout nezávisle, aniž by věděli, který sport si půjde zahrát ten druhý.

Označme si $a = 1$ jako užitek z trávení času se svým známým a $b = 2$ jako užitek z hraní svého oblíbeného sportu. Aleše si pro zjednodušení označíme jako hráče A a Bena jako hráče B. Nejprve si musíme sestavit výplatní matici, ve které si výplaty hráče A znázorníme modře a výplaty hráče B červeně. Platí, že pokud oba půjdou na tenis, hráč A bude mít užitek $a+b = 3$ a hráč B, který nebude hrát svůj preferovaný sport, bude mít užitek pouze $a = 1$. Tímto způsobem získáme matici znázorněnou v tabulce 1.2.

		Hráč B	
		Tenis	**Fotbal**
Hráč A	**Tenis**	3, 1	2, 2
	Fotbal	0, 0	1, 3

Tabulka 1.2: Výplatní matice hráčů A a B

Nyní můžeme začít hledat Nashovu rovnováhu. Postupujeme následovně:

- pokud by hráč A zvolil tenis, hráč B by volil mezi užitkem 1 a 2 - zvolil by možnost s větší výplatou - fotbal
- pokud by hráč A zvolil fotbal, hráč B by opět zvolil fotbal
- pokud by hráč B zvolil tenis, hráč A by volil mezi výplatou 3 a 0 - zvolil by tenis
- pokud by hráč B zvolil fotbal, hráč A by zvolil tenis

Fotbal je dominantní strategií hráče B, protože ji zvolí vždy, bez ohledu na to, co zvolí hráč A a tenis je dominantní strategií hráče A. Pár strategií (tenis, fotbal) tvoří v této hře Nashovu rovnováhu, jelikož v tomto bodě oba hráči volí nejlepší možnou strategii vzhledem ke zvolené strategii toho druhého. Zároveň je tenis optimální strategií hráče A a fotbal optimální strategií hráče B.

Příklad 2. Manželé Cyril a Dana se po telefonu domluví, že se po práci potkají ve sportovní hale. Cyril hraje raději tenis, Dana preferuje fotbal. Daně se při hovoru vybije telefon, takže se nestihnou domluvit, zda si zahrají jeden ze sportů společně, nebo půjde každý na jiný. Hala má oddělené vchody pro tenis a fotbal, takže se musí každý samostatně rozhodnout, který sport si půjde zahrát.

U manželů lze předpokládat, že získají větší užitek z trávení času spolu, než z hraní preferovaného sportu - tedy $a = 2$ a $b = 1$. Označme si Cyrila jako hráče C (a jeho výplaty modře) a Danu jako hráče D (a její výplaty červeně). Sestrojíme si výplatní matici znázorněnou v tabulce 1.3.

		Hráč D	
		Tenis	**Fotbal**
Hráč C	**Tenis**	3, 2	1, 1
	Fotbal	0, 0	2, 3

Tabulka 1.3: Výplatní matice hráčů C a D

Při hledání dominantních strategií a Nashovy rovnováhy postupujeme stejným způsobem jako v předchozím příkladě. Pokud by hráč C zvolil tenis, nejlepší odpovědí hráče D by byl tenis a pokud by hráč C zvolil fotbal, hráč D by zvolil taktéž fotbal. Pro hráče C také platí, že by vždy zvolil to, co hráč D. Nenašli jsme sice dominantní strategie ani jednoho hráče, našli jsme ovšem 2 Nashovy rovnováhy, a to páry strategií (tenis, tenis), (fotbal, fotbal). V těchto bodech ani jeden z nich nemůže zlepšit svou výplatu tím, že změní svou strategii, pokud ani druhý hráč svou strategii nezmění. V této hře neexistuje jednoznačná optimální strategie ani pro jednoho hráče.

Z příkladů je zřejmé, že nemusí existovat pouze jedna Nashova rovnováha, může jich být i více. Existují také hry, ve kterých neexistuje žádná Nashova rovnováha. Příkladem takové hry může být hra kámen, nůžky, papír, jejíž výplatní matice je znázorněna na obrázku 1.4. Počet Nashových rovnováh závisí na struktuře hry, počtu hráčů, na jejich strategiích a výplatách.

Nyní si krátce představíme **hry s nulovým součtem**, ve kterých budeme Nashovu rovnováhu hledat pomocí metody sedlového bodu. Ve hrách s nulovým součtem jsou zájmy hráčů v přímém rozporu, protože to, co jeden hráč získá, druhý ztratí. Podstata těchto her spočívá v tom, že je součet výplat všech hráčů

		Hráč B		
		Kámen	**Nůžky**	**Papír**
	Kámen	0, 0	1, -1	-1, 1
Hráč A	**Nůžky**	-1, 1	0, 0	1, -1
	Papír	1, -1	-1, 1	0, 0

Tabulka 1.4: Výplatní matice při hře kámen, nůžky, papír

roven nule. Typickým příkladem je poker, kdy jeden hráč vyhraje peníze, které ten druhý prohraje. Dále pak hry, ve kterých je jeden vítěz a jeden poražený, například šachy, piškvorky či kámen, nůžky, papír, ale i fotbal, tenis a další sporty.

V konečné hře pro dva hráče, kdy hráč A má na výběr ze strategií $i = 1, 2, ..., m$ a hráč B ze strategií $j = 1, 2, ..., n$ je hra reprezentována výplatní maticí A, kde řádky matice odpovídají strategiím hráče A a sloupce matice odpovídají strategiím hráče B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Prvek a_{ij} v matici A odpovídá výplatě hráče A v situaci, kdy hráč A zvolí i-tou strategii a hráč B zvolí j-tou strategii. Výplata hráče B je rovna opačné hodnotě a_{ij} tedy $-a_{ij}$. Pro nalezení sedlového bodu ve výplatní matici pro dva hráče budeme postupovat následovně:

1. V každém řádku matice najdeme minimální prvek.
2. V každém sloupci matice najdeme maximální prvek.
3. Pokud je nějaký prvek nejmenší ve svém řádku a zároveň největší ve svém sloupci našli jsme sedlový bod, který je zároveň ryzí Nashovou rovnováhou.

Stejně jako v případě Nashovy rovnováhy platí, že hra může mít jeden, více či žádný sedlový bod. Pokud hra nemá sedlový bod, stále může mít smíšenou Nashovu rovnováhu, kterou bychom hledali jinými metodami.

Příklad 3. Nechť máme hru dvou hráčů, kde je výplata hráče A popsána maticí A. Chceme najít rovnovážný bod této hry pomocí metody sedlového bodu.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 7 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Postupujeme následovně: jako první najdeme v každém řádku matice minimální prvek a označíme si ho tučně, poté vyhledáme maximální prvek v každém sloupci a ten si podtrhneme. Sedlový bod je prvek, který je nejmenší ve svém řádku a zároveň největší ve svém sloupci.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \underline{8} & 5 & -\mathbf{2} \\ \underline{4} & 3 & \underline{7} & \underline{\mathbf{0}} \\ -\mathbf{1} & 4 & 2 & \underline{0} \\ 2 & 0 & 0 & -\mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Vidíme, že jsme našli jeden sedlový bod ve druhém řádku a čtvrtém sloupci matice A. V tomto bodě je výplata hráče A rovna $a_{24} = 0$ a výplata hráče B je rovna $-a_{24} = 0$.

Kapitola 2

Dělení her podle dostupných informací

Hry v teorii her lze členit na základě různých kritérií. Jedním z nich je dělení podle toho, jaké informace k hraní hry mají hráči k dispozici. Existují **hry s úplnou a neúplnou informací**, ve kterých záleží na tom, jaké výchozí informace o hře hráči mají, zda znají její pravidla, stategie ostatních hráčů apod. Také existují **hry s dokonalou a nedokonalou informací**, které se liší znalostmi v průběhu hry. Záleží v nich na tom, zda hráči ví, v jakém stavu se hra nachází a jaké tahy byly dosud provedeny. Abychom byli schopni řešit situace, které nastanou, je důležité pochopit rozdíly mezi jednotlivými druhy her, proto se každým typem budeme postupně věnovat v následujících podkapitolách. Pro zjednodušení budeme uvažovat pouze hry dvou hráčů.

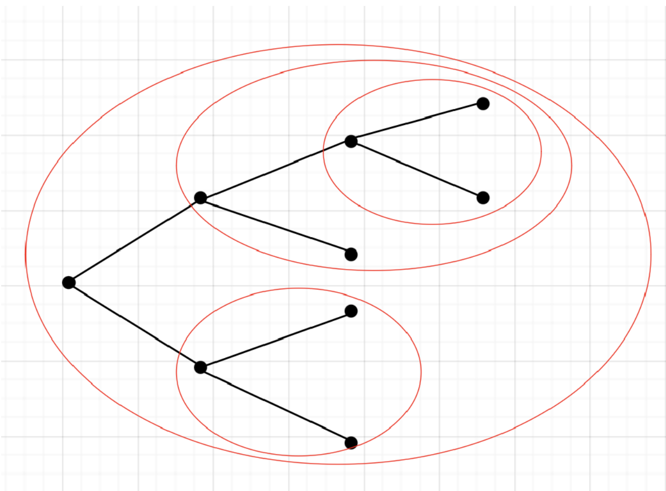
2.1. Hry s úplnou informací

V této podkapitole se budeme věnovat prvnímu typu her, a to hrám s úplnou informací, ve kterých je klíčová perfektní znalost struktury hry. Budeme čerpat z [4] a [16].

Úplná informace o struktuře hry zahrnuje znalost pravidel hry, strategií, které mají všichni hráči k dispozici, a také výplat, které jsou spojeny s každým možným výsledkem hry. Všichni hráči tedy mají úplné a shodné výchozí informace o hře a označujeme je jako společné informace či společnou znalost. V tomto smyslu tedy neexistuje žádná nejistota či skryté informace. Matematická interpretace hry s úplnou informací v normálním tvaru je shodná s definicí 1.

Klasickým příkladem jsou *šachy*, jelikož všichni hráči znají pravidla hry, vidí postavení figurek na šachovnici a ví, jaké jsou možné tahy každé figurky. Výplaty jsou určeny výsledkem hry, kterým je buď výhra, remíza nebo prohra. To samé platí o hře *dáma* a o čínské deskové hře *go*, ve které hráči kladou černé a bílé kameny na čtvercovou desku. V reálném životě se s takovými situacemi setkáváme pouze zřídka.

Hledání rovnováhy ve statických hrách s úplnou informací probíhá pomocí konceptu Nashovy rovnováhy, který jsme si vysvětlili v předchozí kapitole. V dynamických hrách ovšem musíme použít silnější verzi Nashovy rovnováhy a to **dokonalou (Nashovu) rovnováhu podhry** (anglicky *subgame perfect (Nash) equilibrium*). Podhra je podmnožina hry, která je posuzována samostatně a skládá se z nějakého počáteční uzlu a všech následujících uzlů. Například hra, jejíž strom je zobrazený na obrázku 2.1 má 4 podhry. Vidíme, že i hra samotná je podhrou.



Obrázek 2.1: Podhry hry.

Koncept dokonalé Nashovy rovnováhy podhry vyžaduje, aby hráči hráli optimálně v každé podhře původní hry, což znamená, že každý hráč volí nejlepší možnou strategii vzhledem k akcím ostatních hráčů v rámci každé podhry. Z tohoto popisu je zřejmé, že tak vznikají kombinace strategií, které jsou Nashovou rovnováhou v každé podhře.

K nalezení dokonalé rovnováhy podhry se používá princip zpětné indukce, při kterém se postupuje od posledního uzlu ve stromu hry až k počátečnímu uzlu. V každém uzlu identifikujeme podhru a určíme strategii, jakou by měl hráč provést, aby maximalizoval svůj užitek. To probíhá za předpokladu, že i ostatní hráči budou hrát optimálně.

Příklad 4. V obci probíhají volby na pozici starosty. Uvažujme kandidáta A a kandidáta B, kteří se snaží získat co největší počet voličů na svou stranu. Kandidát A má k dispozici dvě strategie, jak může vést svou kampaň, a to strategii aktivní a pasivní. Kandidát B je známý tím, že se nebojí použít kritiku vůči ostatním, takže má k dispozici i strategii agresivní. Kandidáti se rozhodují nezávisle a mají o sobě navzájem úplné informace díky předvolební kampani, veřejných prohlášeních a interakci s veřejností.

Aktivní strategie spočívá v účasti na debatách, oslovování voličů a v propagaci své kampaně. Zároveň přináší náklady na reprezentaci. Pasivní strategie naopak spočívá v minimalizaci veřejného vystupování a nepřináší žádné nadbytečné náklady. Agresivní strategie znamená kritiku názorů a postojů protihráče. To může odradit některé voliče, kteří upřednostňují neútočný přístup kandidáta.

K určení výplat si označíme:

- $a = 5$ jako užitek ze získání voličů při realizaci aktivní strategie
- $b = -2$ jako záporný užitek z nákladů při realizaci aktivní strategie
- $c = 3$ nadbytečný užitek ze získání voličů, který vzniká při realizaci aktivní strategie v případě, že druhý hráč strategii zvolí pasivní
- $d = 2$ jako užitek ze získání voličů při realizaci pasivní strategie
- $e = 3$ jako užitek ze získání voličů při realizaci agresivní strategie
- $f = -1$ jako záporný užitek kandidáta B při užití agresivní strategie, který nastane pouze pokud druhý kandidát zvolí aktivní strategii

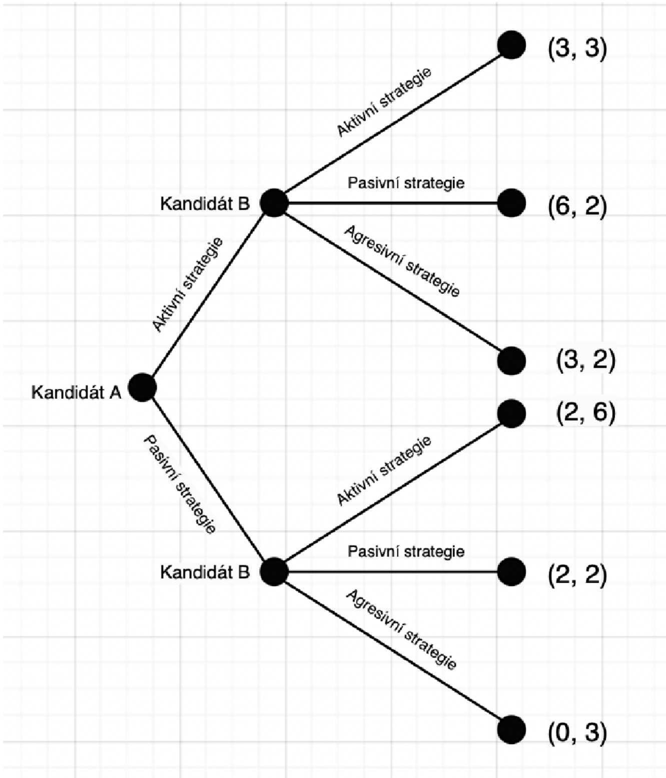
- $g = -2$ jako záporný užitek kandidáta A při užití pasivní strategie, který nastane pokud kandidát B zvolí agresivní strategii

Výplaty vypočteme následovně:

- v situaci, kdy oba hráči zvolí aktivní strategii, bude užitek každého z nich roven $a + b = 5 - 2 = 3$
- pokud jeden zvolí aktivní strategii a druhý pasivní, pak ten, který zvolil aktivní strategii, získá užitek $a + b + c = 5 - 2 + 3 = 6$ a kandidát, který zvolil pasivní strategii, získá užitek $d = 2$
- pokud kandidát A zvolí aktivní strategii a kandidát B agresivní, pak kandidát A získá užitek $a + b = 3$ a kandidát B získá užitek $e + f = 3 - 1 = 2$
- v případě, že se oba kandidáti rozhodnout pro pasivní strategii, oba získají užitek $d = 2$
- v případě, že kandidát A bude realizovat pasivní strategii a kandidát B agresivní, pak kandidát A získá výplatu $d + g = 2 - 2 = 0$ a kandidát B výplatu $e = 3$

Jako první řešme situaci, kdy kandidát A volí svou strategii jako první a kandidát B si strategii vybírá na základě strategie zvolené kandidátem A. Strom rozhodovací situace vidíme na obrázku 2.2.

Pokud chceme nalézt optimální strategie pro oba hráče, použijeme zpětnou indukci. Začneme u uzlu, kde mezi svými strategiemi vybírá kandidát B, po tom, co by kandidát A zvolil aktivní strategii. V tom případě by hráč B vybíral mezi výplatami 3, 2 a 2. Zvolil by strategii aktivní. Nyní se přesuňme do uzlu, který následuje po tom, co by hráč A zvolil strategii pasivní. Pak by nejlepší možnou odpovědí hráče B byla opět strategie aktivní. Nalézt dokonalou rovnováhu podhry je už snadné. Hráč A by volil mezi výplatami 3 a 2. Je pro něj tedy nejvýhodnější zvolit aktivní strategii a dokonalou rovnováhou podhry tvoří pár strategií (aktivní, aktivní) s výplatami (3,3).



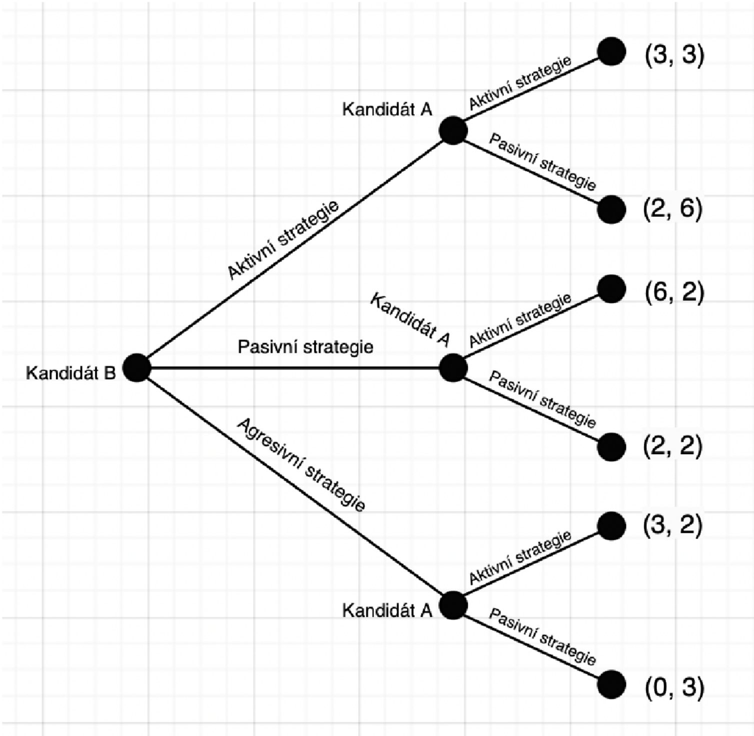
Obrázek 2.2: Strom volební kampaně - varianta 1.

Nyní předpokládejme, že je na tahu první kandidát B, který se rozhoduje, jakou ze tří možných strategií použít při realizaci své kampaně. Strom při této variantě hry je znázorněn na obrázku 2.3.

Při hledání rovnováhy postupuje obdobně, pouze začínáme jedním ze tří uzlů, ve kterých si volí svou strategii kandidát A. Postupně zjistíme, že je pro kandidáta A vždy nejvýhodnější volit strategii aktivní. Následně se přesuneme k počátečnímu uzlu, kde volí svou strategii kandidát B a dospějeme ke stejné dokonalé rovnováze podhry jako v případě varianty 1.

Nehledě na to, zda bude svou strategii jako první volit kandidát 1 či kandidát 2, vždy je pro oba nejlepší volit aktivní strategii a snažit se získat voliče férovým způsobem.

Hru by šlo zapsat i v normálním tvaru, což by znamenalo, že by se kandidáti o své kampani rozhodovali současně. Tento model bychom řešili pomocí konceptu



Obrázek 2.3: Strom volební kampaně - varianta 2.

Nashovy rovnováhy.

2.2. Hry s neúplnou informací

Ve většině konfliktních situací nám nějaká zásadní informace chybí. Pokud se jedná o výchozí informace o struktuře hry, pak tyto hry nazýváme hry s neúplnou informací neboli Bayesovské hry. Při analýze tohoto typu her budeme vycházet z [2], [3], [4], [9] a [14].

Chybějící informace ve hrách s neúplnou informací musí být pro hru zásadní a mohou být tohoto charakteru:

- informace o ostatních hráčích - hráči nemusí znát identitu svých protihráčů, jaké jsou jejich cíle, preference apod.
- výplaty - hráči nemusí vědět přesné výplaty spojené s každým možným výsledkem hry

- strategie ostatních hráčů - hráči nemusí vědět, jaké tahy mohou ostatní hráči provést
- důsledky akcí - hráči nemusí vědět, co bude následkem tahu, který oni sami nebo ostatní hráči provedou

Významnou roli v rozvoji her s neúplnou informací sehrál John Harsanyi, který v roce 1967 publikoval rozsáhlý článek *Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players*. Publikace je rozdělena na tři části, ve kterých se postupně věnuje modelu her s neúplnou informací, hledáním Bayesovské rovnováhy a uplatněním konceptu Bayesovských her v reálném světě. Autorovou hlavní myšlenkou je, že se dá hra s neúplnou informací transformovat na hru s úplnou, ale nedokonalou informací[1], aniž by se změnila její podstata.

Při analýze rozhodovací situace se hráč nejprve nachází v situaci rozhodování za nejistoty, jelikož je nějaký parametr hry náhodná veličina. První fází při rozhodování za nejistoty je určení tzv. **apriorního rozdělení**, které reprezentuje hráčovy počáteční předpoklady o hodnotách náhodné veličiny, kterou chce odhadnout. Toto rozdělení může být založeno na předchozích zkušenostech, subjektivních odhadech či statistických údajích. Díky tomuto počátečnímu odhadu se hráč dostane do situace rozhodování za rizika.

Definice 4. Bayesovská hra H dvou hráčů obsahuje následující prvky:

1. množinu hráčů $\{1, 2\}$
2. množinu $\{X_1, X_2\}$, kde $X_1 = \{x_{11}, x_{12}, ..., x_{1p}\}$ je prostor strategií hráče 1 a $X_2 = \{x_{21}, x_{22}, ..., x_{2q}\}$ je prostor strategií hráče 2
3. množinu $\{T_1, T_2\}$, kde $T_1 = \{t_{11}, t_{12}, ..., t_{1m}\}$ je prostor typů hráče 1 a $T_2 = \{t_{21}, t_{22}, ..., t_{2n}\}$ je prostor typů hráče 2
4. sdružené pravděpodobnostní rozdělení typů $p(t_{1i}, t_{2j})$ pro $i = 1, ..., m$ a $j = 1, ..., n$

[1] O hrách s nedokonalou informací si více řekneme v podkapitole 2.4.

5. množinu výplatních funkcí $\{f_1, f_2\}$, kde $f_k(x_{1r}, x_{2s}, t_{1i}, t_{2j})$ pro $r = 1, ..., p$; $s = 1, ..., q$; $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$ a $k = 1, 2$

V Bayesovských hrách se vyskytují nové prvky a to takzvané **typy hráče**. Každý hráč má množinu různých typů, které mohou představovat různé faktory, například úroveň dovedností hráče, jeho preference, dostupné zdroje apod. Tyto typy určují, jakým způsobem se hráči rozhodují v dané situaci hry. Množina typů hráčů může obsahovat například prvky 'začátečník', 'středně pokročilý', 'pokročilý', ve fotbale by množina typů hráčů mohla obsahovat prvky 'útočník', 'obránce', 'brankář' apod.

Poznámka 3. Vztah mezi typem hráče a jeho strategií lze popsat zápisem $s_k : T_k \to X_k$ pro hráče k, který říká, že funkce s_k je zobrazení z prostoru typů hráče k do prostoru strategií hráče k. Tato funkce popisuje, jakým způsobem hráč k volí svou strategii na základě svého typu (vše pro $k = 1, 2$).

V definici 4 se objevuje pojem sdružená pravděpodobností funkce. Tato pravděpodobností funkce je potřeba v případě, kdy chceme znát pravděpodobnosti pro nastání kombinace typů různých hráčů zároveň. Pokud máme hru dvou hráčů, kdy jeden hráč má dva možné typy a druhý bude s jistotou pouze jeden typ, pak je sdružené pravděpodobností rozdělení rovno marginálnímu pravděpodobnostnímu rozdělení, viz příklad 5. Pokud ovšem používáme sdruženou pravděpodobností funkci, lze z ní jednoduše vypočítat marginální pravděpodobností funkce pro hráče 1:

$$p(t_{1i}) = \sum_{j=1}^{n} p(t_{1i}, t_{2j}) \tag{2.1}$$

i pro hráče 2:

$$p(t_{2j}) = \sum_{i=1}^{m} p(t_{1i}, t_{2j}). \tag{2.2}$$

Z definice 4 je zřejmé, že ve hrách s neúplnou informací má hráč více možných výplatních funkcí, jelikož každá závisí na 4 parametrech: strategii hráče 1, strategii hráče 2, typu hráče 1 a typu hráče 2. To do rozhodovací situace přidává další faktor nejistoty a zvyšuje tím její komplexitu.

Základem Harsanyiho transformace na hru s úplnou a nedokonalou informací je přidání počátečního tahu *Přírody*, který náhodně určí typy hráčů na základě jejich přiřazených pravděpodobností. Každý hráč zná svůj typ, ale nezná typy ostatních hráčů.

Definice 5. Transformovaná hra H^* s úplnou a nedokonalou informací obsahuje:

1. M hráčů, kde $M = m + n$, kde m je počet typů hráče 1 v původní hře H a n je počet typů hráče 2 v původní hře H
2. množinu hráčů $\{(1, t_{1i}) \mid i = 1, \ldots, m\} \cup \{(2, t_{2j}) \mid j = 1, \ldots, n\}$
3. množinu prostorů akcí $\{Y_{(1,t_{1i})}, Y_{(2,t_{2j})}\}$, kde $Y_{(1,t_{1i})} = \{y_{(1,t_{1i}),1}, ..., y_{(1,t_{1i}),p}\}$ je prostor akcí hráče $(1, t_{1i})$ a $Y_{(2,t_{2j})} = \{y_{(2,t_{2j}),1}, ..., y_{(2,t_{2j}),q}\}$ je prostor akcí hráče $(2, t_{2j})$ pro $i = 1, ..., m$ a $j = 1, ..., n$
4. množinu výplatních funkcí $\{g(1, t_{1i}), g(2, t_{2j})\}$, kde $g_{(1,t_{1i})}(y_{(1,t_{1i}),r}, y_{(2,t_{2j}),s})$ je výplatní funkce hráče $(1, t_{1i})$ a $g_{(2,t_{2j})}(y_{(1,t_{1i}),r}, y_{(2,t_{2j}),s})$ je výplatní funkce hráče $(2, t_{2j})$, kde $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, $r = 1, ..., p$ a $s = 1, ..., q$

Místo o prostorech strategií a strategiích zde hovoříme o prostorech akcí a akcích. Rozdíl je v tom, že v případě volby akce již hráč zná svůj typ, v případě volby strategie ne, a proto musí naplánovat optimální akci pro každý možný typ.

Hodnoty výplatní funkce v transformované hře H^* se počítají jako očekávané hodnoty. V případě, že původní hra měla pouze dva hráče potřebujeme dva vzorce, jeden pro typy hráče 1 a druhý pro typy hráče 2.

Vzorec pro výpočet očekávané výplaty hráče $(1, t_{1i})$, $i = 1, ..., m$ v transformované hře H^* je následující:

$$g_{(1,t_{1i})}(y_{(1,t_{1i}),r}, y_{(2,t_{2j}),s}) = \sum_{t_{2j}} p(t_{1i}, t_{2j}) \cdot f_1(x_{1r}, x_{2s}, t_{1i}, t_{2j}) \tag{2.3}$$

a vzorec pro výpočet očekávané výplaty hráče $(2, t_{2j})$, $j = 1, ..., n$ je následující:

$$g_{(2,t_{2j})}(y_{(1,t_{1i}),r}, y_{(2,t_{2j}),s}) = \sum_{t_{1i}} p(t_{1i}, t_{2j}) \cdot f_2(x_{1r}, x_{2s}, t_{1i}, t_{2j}), \tag{2.4}$$

pro $r = 1, ..., p$ a $s = 1, ..., q$.

Pokud uvažujeme konečnou Bayesovskou hru dvou hráčů, kdy hráč 1 má možné typy a, b a hráč 2 má možné typy c, d, pak každý hráč může na základě znalosti vlastního typu a apriorního pravděpodobnostního rozdělení odvodit tzv. **aposteriorní rozdělení** pomocí podmíněné pravděpodobnosti. Například pravděpodobnost toho, že je hráč 2 typ c za předpokladu že víme, že je hráč 1 typ a, vypočteme následovně:

$$P(t_2 = c | t_1 = a) = \frac{P(t_1 = a \cap t_2 = c)}{P(t_1 = a)} = \frac{P(t_1 = a | t_2 = c) \cdot P(t_2 = c)}{P(t_1 = a)}, \qquad (2.5)$$

kde $P(t_2 = c | t_1 = a)$ je hledaná aposteriorní pravděpodobnost a $P(t_2 = c)$ je apriorní pravděpodobnost toho, že je hráč 2 typ c. Rovnice se nazývá Bayesova věta nebo též Bayesův vzorec. Aposteriorní rozdělení bude blíže skutečnému pravděpodobnostnímu rozdělení náhodné veličiny než apriorní rozdělení. Skutečné rozdělení zná pouze *Příroda*.

Nyní přejdeme k hledání rovnováhy v Bayesovských hrách. V případě statických her s neúplnou informací se používá **Bayesova-Nashova rovnováha**. Rovnovážný bod je v tomto případě množina strategií, jedna pro každý typ hráče, taková, že žádný typ hráče nemá motivaci změnit svou strategii vzhledem k jeho přesvědčení o typech a o tom, jaké strategie volí ostatní typy hráčů. Přesvědčení o typech ostatních hráčů je obsaženo v jeho aposteriorním rozdělení. Tento stav je stabilní, protože žádný hráč nemá motivaci změnit svou strategii, jelikož žádný hráč nemůže získat vyšší výplaty změnou své strategie. Bayesova-Nashova rovnováha ve hře s neúplnou informací H je jednoduše Nashova rovnováha hry s úplnou a nedokonalou informací H^*. Platí zde následující věta:

Věta 2. *V každé konečné hře s neúplnou informací existuje alespoň jedna Bayesova-Nashova rovnováha.* [2]

Příklad 5. Na trhu soupeří dvě firmy. Firma 1 má dva možné typy: expanzivní a konzervativní. V případě, že je expanzivní, se snaží zvýšit svůj podíl na trhu a pokud je konzervativní, tak se snaží udržet si svůj podíl na trhu. Firma 2 je konzervativní. Obě firmy si mohou vybrat mezi dvěma strategiemi: zlepšit zákaznické služby či inovovat své výrobky. Zlepšováním zákaznických služeb si firma udrží konkurenceschopnost a své zákazníky. Inovace výrobků umožní firmě zlepšit kvalitu výrobků a tím přilákat více zákazníků.

Máme tedy dvouprvkovou množinu hráčů {firma 1, firma 2}, prostory strategií jsou pro oba hráče stejné a obsahují prvky inovovat výrobky, zlepšit služby. Množina typů hráče 1 vypadá následovně: $T_1 = \{\text{expanzivní, konzervativní}\}$, množina typů hráče 2 je jednoprvková: $T_2 = \{\text{konzervativní}\}$. Firma 2 na základě dostupných informací o firmě 1 odhaduje, že s pravděpodobností $p = 0.6$ bude firma 1 expanzivní a s pravděpodobností $1 - p = 0.4$ bude konzervativní. Tyto pravděpodobnosti tvoří marginální pravděpodobností rozdělení.

Sestrojíme si dvě výplatní matice, každou pro jiný typ firmy 1. V řádcích označíme strategie firmy 1, ve sloupcích strategie firmy 2. Výplaty v tabulkách 2.1 a 2.2 zobrazují celkové užitky firem, ve kterých je zahrnut užitek ze zvolení preferované strategie - expanzivní firma preferuje inovaci výrobků, konzervativní firma preferuje zlepšení zákaznických služeb. Do výplaty je také zahrnut užitek ze zlepšení postavení firmy na trhu a jsou od něj odečteny náklady, které jsou při inovaci výrobků větší než při zlepšování služeb.

		Firma 2	
		Služby	**Inovace**
Firma 1	**Služby**	-1, 1	-2, -1
	Inovace	3, 0	0, -2

Tabulka 2.1: Výplatní matice pro expanzivní firmu 1 a firmu 2

		Firma 2	
		Služby	**Inovace**
Firma 1	**Služby**	1, 1	0, -1
	Inovace	-1, 0	-2, -2

Tabulka 2.2: Výplatní matice pro konzervativní firmu 1 a firmu 2

Firmy momentálně mají na trhu stejné postavení, volí své strategie současně a rozhodují se nezávisle. Jedná se o situaci s neúplnou informací, jelikož firma 2 může pouze odhadnout, zda firma 1 usiluje o zlepšení pozice na trhu či ne.

Hru s neúplnou informací převedeme na hru s nedokonalou informací, která bude obsahovat tři hráče a to expanzivní firmu 1, konzervativní firmu 1 a firmu 2. Pravděpodobnostní rozdělení typů před tahem *Přírody* znají obě firmy, ale pouze firma 1 bude před začátkem hry znát svůj typ zvolený *Přírodou*. Pro firmu 2 je klíčové odhadnout optimální strategie pro oba typy firmy 1.

Vytvoříme výplatní matici tří hráčů, kdy první hodnota je výplata expanzivní firmy 1, druhá hodnota je výplata konzervativní firmy 1 a třetí hodnota je výplata firmy 2.

	Služby	**Inovace**
(SS)	-1, 1, 1	-2, 0, -1
(SI)	-1, -1, 0.6	-2, -2, -1.4
(IS)	3, 1, 0.4	0, 0, -1.6
(II)	3, -1, 0	0, -2, -2

Tabulka 2.3: Výplatní matice transformované hry

Dvojice strategií (SI) značí situaci, kdy expanzivní firma 1 zvolí jako strategii zlepšování zákaznických služeb a konzervativní firma 1 zvolí inovaci výrobků. Obdobně bychom interpretovali i ostatní dvojice strategií. Při výpočtu hodnot výplatních funkcí postupujeme následovně. První dvě hodnoty bereme z tabulek 2.1 a 2.2, třetí hodnoty musíme vypočítat podle rovnice (2.4). Například výplatu v situaci, kdy expanzivní firma 1 zvolí zlepšení služeb, konzervativní firma 1 zvolí inovaci a firma 2 taktéž inovaci, získáme následovně: z tabulky 2.1 vezmeme z kombinace akcí (služby, inovace) hodnotu -2 pro expanzivní firmu 1, z tabulky 2.2 vezmeme z kombinace akcí (inovace, inovace) pro konzervativní firmu 1 hodnotu -2 a výplatu pro firmu 2 vypočítáme: $(-1) \cdot 0.6 + (-2) \cdot 0.4 = -1.4$.

Konečně můžeme přejít k hledání Nashovy rovnováhy. Zjednodušeně lze říct, že pro expanzivní firmu 1 hledáme sloupcová maxima z prvních hodnot, pro konzervativní firmu 1 hledáme sloupcová maxima z druhých hodnot a pro firmu

2 hledáme řádková maxima z třetích hodnot. Tyto hodnoty si ve výplatní matici označíme tučně.

	Služby	**Inovace**
(SS)	-1, **1**, **1**	-2, **0**, -1
(SI)	-1, -1, **0.6**	-2, -2, -1.4
(IS)	**3**, **1**, **0.4**	**0**, **0**, -1.6
(II)	**3**, -1, **0**	**0**, -2, -2

Tabulka 2.4: Výplatní matice transformované hry - rovnováha

Našli jsme Bayesovu-Nashovu rovnováhu v ryzích strategiích. Firma 2 se zaměří na zlepšení kvality svých zákaznických služeb, stejně jako firma 1 pokud bude typ konzervativní. Pokud bude firma 1 typ expanzivní, pak bude inovovat výrobky.

Již víme, že při dynamických hrách požadujeme rovnováhu v každé podhře hry. V případě her s neúplnou informací se tento koncept nazývá **dokonalá Bayesovská rovnováha**, která je definována jako množina strategií a přesvědčení hráče. Přesvědčením máme na mysli apriorní rozdělení, které hráč má před začátkem hry a také aposteriorní rozdělení, které hráč během hry aktualizuje pomocí Bayesova vzorce (2.5). Nalezení tohoto typu rovnováhy závisí na konkrétních podmínkách hry a často se jedná o velmi složitý proces, lze ovšem, stejně jako v dynamických hrách s úplnou informací, použít zpětnou indukci.

Mezi hry s neúplnou informací patří *aukce*, ve kterých hráči neznají výplatní funkce ostatních hráčů. Dále pak karetní hry jako *poker*, kdy hráč neví, jaké karty v ruce drží protivníci, ani jakou mají ostatní představu o jeho kartách. Také například hra *lodě*, ve které hráč nezná rozmístění lodí protihráče. Při náboru nových zaměstnanců firma nezná uchazečovy schopnosti. Při vstupu firmy na trh je častá neznalost podrobností o trhu, konkurenci, preferencích zákazníků apod. Mnoho situací z reálného života by se dalo označit za hry s neúplnou informací, především ekonomické situace, ale i válečné konflikty apod.

2.3. Hry s dokonalou informací

Po vysvětlení her s úplnou a neúplnou informací můžeme přejít k popisu her, ve kterých vše závisí na tom, jaké informace mají hráči během hry. Jako první se zaměříme na hry s dokonalou informací, při jejichž popisu budeme využívat literaturu [1], [2], [6] a [15].

Ve hrách s dokonalou informací jsou všichni účastníci rozhodovací situace plně informováni o všech předchozích pohybech hráčů a o tom, v jakém stavu hry se zrovna nachází. To znamená, že pokud bychom hru zapisovali ve formě stromu, pak vždy všichni ví, v jakém uzlu momentálně jsou. Všechny tyto předpoklady platí po celou dobu hry. Hry s dokonalou informací ovšem mohou obsahovat i náhodné prvky, jako je například hod kostkou či hod mincí. Hráči totiž vědí o všech možných výsledcích a pravděpodobnostech těchto výsledků. Tím máme na mysli to, že při hodu férovou kostkou všichni hráči ví, že každá strana kostky padne se stejnou pravděpodobností, a to $p = \frac{1}{6}$. Obdobně při hodu mincí padne orel/panna s pravděpodobností $p = \frac{1}{2}$.

Definice 6. Rozvinutá hra s dokonalou informací obsahuje:

1. množinu hráčů
2. množinu sekvencí neboli množinu historií, která obsahuje všechny možné posloupnosti tahů, které ve hře mohou nastat, přičemž žádná sekvence není podsekvencí jiné sekvence
3. funkce, která každému rozhodovacímu bodu ve hře, tedy každému uzlu ve stromu hry, přiřazuje hráče
4. preferenční funkce pro každého hráče nad množinou sekvencí, kterou reprezentujeme pomocí výplat

Při hledání rovnováhy nenarazíme na nic, co již neznáme z předchozích typů her. Pokud uvažujeme statickou hru, pak použijeme klasickou Nashovu rovnováhu, pokud se jedná o hru dynamickou tak použijeme dokonalou rovnováhu podhry.

Pro analýzu rovnováhy hry s dokonalou informací má zásadní význam následující věta:

Věta 3. *Každá konečná hra v rozvinutém tvaru s dokonalou informací má řešení v ryzích strategiích. [2]*

Jako příklad her s dokonalou informací můžeme uvést mnoho klasických deskových her jako *šachy*, *dáma*, *go*, ale i *Monopoly* a *Člověče, nezlob se!*. Ve všech těchto hrách zná každý hráč předchozí tahy a tím i aktuální pozici na hrací ploše. V případě deskových her je obvykle složité najít optimální strategii každého hráče, jelikož obsahují velké množství možných tahů a hráči musí být schopni reagovat na tahy protivníka. V reálném světě se situace, kdy mají hráči všechny informace o průběhu hry, vyskytují pouze ojediněle.

Dokonalou informaci jsme uvažovali i v příkladě 4 v podkapitole o hrách s úplnou informací. Dokonalost informace spočívala v tom, že kandidát, který svou strategii volil jako druhý, věděl, co zvolil kandidát, který svou strategii volil jako první. Pokud by tomu tak nebylo, strom hry by vypadal jinak a hru bychom řešili jinými metodami. To si ukážeme v další podkapitole.

2.4. Hry s nedokonalou informací

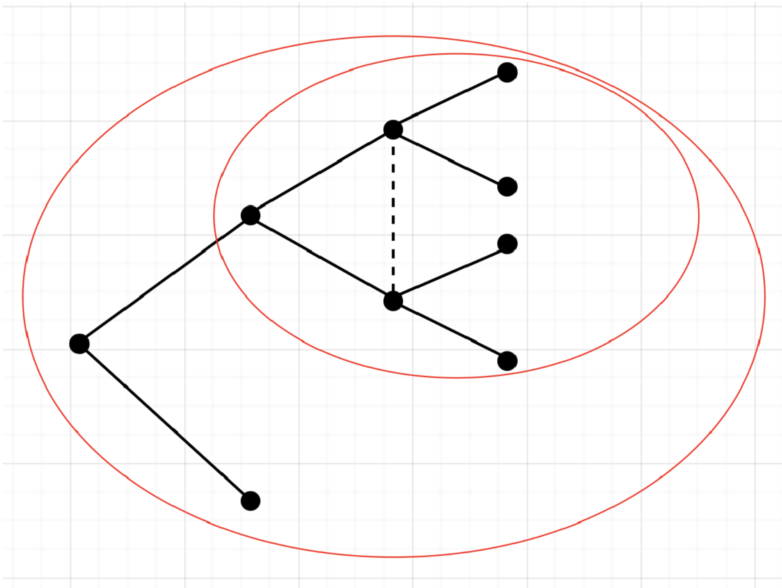
Nakonec si vysvětlíme podstatu her s nedokonalou informací, v nichž hráčům chybí nějaká zásadní informace během hraní hry. Zaměříme se především na hry dynamické, které jsou mnohem častější než statické hry s nedokonalou informací. V této podkapitole budeme čerpat z [7], [10] a [17].

Hra s nedokonalou informací se vyznačuje tím, že hráč v momentě své volby nezná předchozí tahy ostatních hráčů a neví, v jakém stavu se hra nachází. To musí platit pro alespoň jednu rozhodovací situaci ve hře. Při zápisu hry formou stromu to znamená, že hráč neví, v jakém uzlu se zrovna nachází. Nejběžnějším příkladem her s nedokonalou informací jsou karetní hry jako *poker*, *mariáš* či *bridž*. Hra často obsahuje **soukromé informace**, což jsou informace, které nejsou známé všem hráčům. Ty se hráči mohou pokusit odhadnout pomocí různých technik. Například v karetních hrách jsou za soukromou informaci považovány karty. Hráč neví, jaké karty mají jeho protihráči, takže neví jak se hra bude dál vyvíjet, ale může nahradit neznámou informaci odhadem získaným z analýzy aktuální situace - hráč ví, jaký je celkový počet karet v balíčku a jaké karty sám vlastní, snadno lze zjistit i počet zbývajících karet a jaké karty byly odehrány. Nicméně riziko, že se hráč mýlí a jeho odhady jsou nepřesné, je ve složitějších hrách poměrně vysoké.

Při grafickém znázornění dynamické hry s nedokonalou informací budeme používat strom hry, ve kterém rozlišujeme jednotlivé informační množiny. Každý uzel patří jednomu hráči, jelikož se rozhodují postupně a v předem určeném pořadí. **Informační množina** je množina uzlů, které jsou pro hráče nerozlišitelné, tzn. že hráč si nemůže být zcela jistý, kterou z možných cest ke konkrétnímu stavu hry zvolil jeho protihráč. Pokud je informační množina jednoprvková (obsahuje jen jeden uzel), pak hráč přesně ví, jak se do určitého herního stavu dostal a jedná se o hru s dokonalou informací. Pokud je informační množina víceprvková, hráč musí odhadovat a předpokládat tahy svého protihráče. To vede ke vzniku nedokonalosti informace, což ovlivňuje rozhodovací proces hráče a v konečném důsledku může mít dopad na výsledek hry. Strategie v dynamické hře s nedokonalou informací musí specifikovat akci, kterou provede hráč v každé své informační množině.

V herním stromu uzly patřící do jedné informační množiny spojujeme čárkovanou čarou, viz obrázek 2.4. Na obrázku vidíme znázorněné i podhry, které musí splňovat pravidlo, že obsahují celou informační množinu.

Při hledání rovnováhy hry v rozvinutém tvaru budou velkou roli hrát přesvědčení hráče o uzlech v informačních množinách. Tato přesvědčení budou mít podobu pravděpodobnostního rozdělení, obdobně jako v případě her s neúplnou informací. Během hry musí být přesvědčení každého hráče konzistentní s hranou strategií. Hráč tedy musí mít korektní představu o tom, jak hráči hrají a jeho vlastní strategie musí být v souladu s jeho přesvědčením. K aktualizaci přesvědčení hráč používá Bayesův vzorec (2.5). To mu umožňuje hrát nejlepší možnou strategii v



Obrázek 2.4: Dynamická hra s nedokonalou informací

danou chvíli. Kromě konzistence přesvědčení budeme požadovat sekvenční racionalitu, která předpokládá, že hráči v každém kroku hledají optimální strategii vzhledem k tomu, co ví o hře a rozhodnutích, která byla provedena v minulosti.

Definice rozvinuté hry s nedokonalou informací je shodná s definicí rozvinuté hry s dokonalou informací 6, pouze jsou zde navíc přesvědčení hráče. Řešení hry s nedokonalou informací je popsáno dvěma objekty:

- profilem strategií - množina strategií, která uvádí, jakou strategii budou hráči hrát v každém uzlu hry
- systém přesvědčení - skládá se z pravděpodobností specifikovaných pro každý uzel v dané informační množině, které vyjadřují přesvědčení hráče, že je hra právě v daném uzlu (dané informační množiny)

Pokud hra obsahuje pouze jednu podhru a to hru samotnou, pak rovnováhu nalezneme jednoduše pomocí Nashovy rovnováhy. V opačném případě použijeme dokonalou Nashovu rovnováhu podhry.

Příklad 6. Uvažujme dva studenty vysoké školy Jakuba a Petra. Jakub je studentem oboru Informatika a její specializace, Petr studuje obor Historie. Mají společný předmět, ve kterém mají za úkol vytvořit buď společně či každý zvlášť projekt na libovolné téma. Jakub má více zkušeností s projekty a prací v týmu, takže on rozhodne, zda chce s Petrem spolupracovat či ne. Následně Petr vybere téma a Jakub zvolí metodu, kterou budou používat při vytváření projektu. To, jaké téma Petr vybral se Jakub dozví až po zvolení metody.

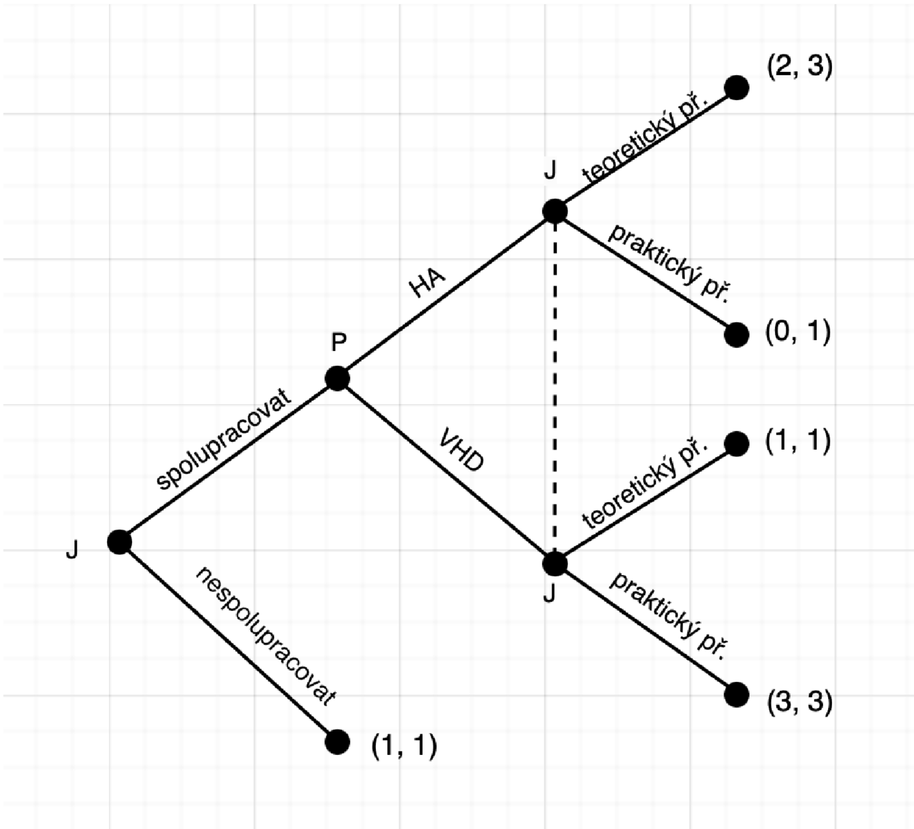
Petr se rozhoduje mezi dvěma tématy. Jedno o historické antropologii, druhé téma by bylo zaměřeno na vizualici historických dat. Jakub se bude rozhodovat mezi dvěma přístupy, jak budou projekt vytvářet. Jeden z nich je teoretický, který zahrnuje především studii literatury, formování myšlenek a teorií. Druhý přístup je praktický, který se zaměřuje na aplikaci teorie do praxe, řešení konkrétních problémů a tvorbu reálných výsledků. Teoretický přístup by byl vhodnější pro téma historická antropologie, praktický pro téma vizualizace historických dat.

Jakuba si pro zjednušení označíme písmenem J, Petra písmenem P, téma o historické antropologii jako HA a téma o vizualizaci historických dat jako VHD. Výplaty ve stromu na obrázku 2.5 jsou vypočítány následovně: označíme si $a = 1$ jako užitek studenta, který zpracovává téma, které ho baví (Petrovi se líbí obě témata, Jakub rozumí pouze tématu o VHD) a $b = 2$ jako užitek z použití metody, která je vhodnější pro dané téma. Výplata v situaci, kdy studenti nebudou spolupracovat, bude pro oba stejná, a to $a = 1$. Pokud budou spolupracovat na tématu o HA a použijí teoretický přístup, pak Jakub získá výplatu $b = 2$ a Petr výplatu $a + b = 3$. Obdobně bychom vypočítali všechny ostatní celkové užitky.

Při hledání rovnovážného bodu se nejprve zaměříme na podhru začínající v uzlu, kde Petr vybírá mezi tématem o historické antropologii a tématem o vizualizace historických dat. Tuto podhru lze zapsat v normálním tvaru, jak můžeme vidět v tabulce 2.5.

		Petr	
		HA	**VHD**
Jakub	**Teoretický přístup**	2, 3	1, 1
	Praktický přístup	0, 1	3, 3

Tabulka 2.5: Výplatní matice Jakuba a Petra



Obrázek 2.5: Strom tvorby projektu.

Klasickým způsobem budeme hledat Nashovu rovnováhu a dospějeme k tomu, že tato podhra má možné dvě ryzí Nashovy rovnováhy: (teoretický přístup, HA), (praktický přístup, VHD).

Nyní uvažujme, že by Nashovou rovnováhou byl profil strategií (teoretický přístup, HA) s výplatami 2, 3. Pak by Jakub zvolil možnost spolupracovat, jelikož by mu to přineslo větší výplatu. To samé v případě, že by Nashovou rovnováhou byl profil strategií (praktický přístup, VHD).

Optimální strategie Jakuba při výběru metody - zda zvolit praktický či teoretický přístup, závisí na jeho přesvědčení o tom, jaké téma zvolí Petr. Uvažujme dvě rozdílné situace:

a) Jakub s pravděpodobnostní $p = 0.3$ věří, že Petr vybere téma HA a s pravdě-podobností $1-p = 0.7$, že vybere téma VHD. Jeho očekávaný užitek ze zvolení teoretického přístupu by byl: $2 \times 0.3 + 1 \times 0.7 = 1.3$. Při zvolení praktického přístupu by byla očekávaná výplata vypočtena následovně: $0 \times 0.3 + 3 \times 0.7 = 2.1$. Při tomto přesvědčení je optimální strategií Jakub je vybrat akce (spolupracovat, praktický přístup).

b) Jakub se s pravděpodobností $p = 0.5$ domnívá, že by Petr mohl zvolit téma HA a s pravděpodobností $1 - p = 0.5$ téma VHD. Pak by očekávaný užitek při zvolení teoretického přístupu byl: $2 \times 0.5 + 1 \times 0.5 = 1.5$. Očekávaný užitek ze zvolení praktického přístupu by vyšel stejně: $0 \times 0.5 + 3 \times 0.5 = 1.5$. V tomto případě pro Jakuba neexistuje jednoznačná optimální strategie.

Závěr

V této bakalářské práci jsme se zaměřili na obor aplikované matematiky zvaný teorie her. Vysvětlili jsme si, že teorie her najde uplatnění v kterékoli situaci, ve které dochází ke střetu zájmů dvou a více jedinců či skupin jedinců. Cílem práce bylo seznámit čtenáře se základy této matematické disciplíny a zaměřit se na hry, které se liší v množství informací, které jsou hráčům dostupné.

V první kapitole jsme se věnovali klasické teorii her, konkrétně její historií a významným osobnostem. Ke správnému pochopení problematiky jsme si vysvětlili základní pojmy teorie her jako hráč, hra, strategie, výplata a další. Nakonec jsme uvedli, jak se ve hrách hledá rovnovážný bod pomocí dominantních strategií, Nashovy rovnováhy a metody sedlového bodu.

Nejdůležitější částí této práce je kapitola zaměřující se na čtyři typy her, konkrétně hry s úplnou, neúplnou, dokonalou a nedokonalou informací. Cílem bylo především vysvětlit rozdíl mezi hrami s neúplnou a nedokonalou informací, jelikož jsou tyto typy her v literaturách často zaměňovány. U každého typu jsme uvedli základní charakteristiku konfliktní situace a metody hledání rovnováhy pro dynamické i pro statické hry. Pro lepší pochopení jsme tyto metody názorně ukázali na konkrétních příkladech.

Závěrem lze říci, že je teorie her velmi užitečný nástroj pro analýzu a modelování interakcí mezi jedinci v mnoha různých situacích. Můžeme díky ní porozumět rozhodovacím procesům jednotlivých hráčů a předpovídat, jak se budou chovat v konkrétních situacích, což může být velmi cenné pro oblasti jako ekonomie, politika, psychologie a mnoho dalších.

Literatura

[1] BINMORE, Ken., *Playing for Real: A Text on Game Theory.* Oxford University Press, 2007. ISBN 978-0195300574.

[2] DLOUHÝ, M. a FIALA, P., *Teorie ekonomických a politických her.* Praha: Oeconomica, nakladatelství VŠE, 2015. ISBN 978-80-245-2124-4.

[3] CHVOJ, Martin., *Pokročilá teorie her ve světě kolem nás.* Praha: Grada, 2013. ISBN 978-80-247-4620-3.

[4] TADELIS, Steven., *Game theory: An Introduction.* Princeton University Press, 2013. ISBN 978-0691129082.

[5] BELLHOUSE, David., *The Problem of Waldegrave.*, 2007, [online]. Dostupný na: `https://www.jehps.net/Decembre2007/Bellhouse.pdf`, [cit. 15. 11. 2022].

[6] BUDDHIRAJU, Ankit., *On Games, Part 3: Perfect Information Games*, 2020, [online]. Dostupný na: `https://medium.com/theuglymonster/on-games-part-3-perfect-information-games-95c0b9600070`, [cit. 30. 03. 2023].

[7] DOUGHERTY, Keith L., *Imperfect Information (Sub-game Perfect Bayesian Equilibrium).* [online]. Dostupný na: `https://spia.uga.edu/faculty_pages/dougherk/svt_10_bayesian_subgame_perfect.pdf`, [cit. 02. 04. 2023].

[8] EVANS, Wayne O'Neil., *Two-person zero-sum game theory.*, 1962, [online]. Dostupný na: `https://core.ac.uk/download/pdf/33363597.pdf`, [cit. 14. 02. 2023].

[9] HARSANYI, John C., *Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players, I-III.* Management Science, 1967-1968.

[10] IOANNOU, Christos A., *Extensive Games with Imperfect Information.*, [online]. Dostupný na: `http://christosaioannou.com/Extensive%20Games%20with%20Imperfect%20Information.pdf`, [cit. 02. 04. 2023].

[11] MAJASKI, Christina., *Comparing a Dominant Strategy Solution vs. Nash Equilibrium Solution.*, 2021, [online]. Dostupný na:https://www.investopedia.com/ask/answers/071515/what-difference-between-dominant-strategy-solution-and-nash-equilibrium-solution.asp, [cit. 17. 2. 2023].

[12] NAJERA, Jesus., *Game Theory — History & Overview.*, 2019, [online]. Dostupný na: https://towardsdatascience.com/game-theory-history-overview-5475e527cb82, [cit. 13. 12. 2022].

[13] KENTON, Will., *Zero-Sum Game Definition in Finance, With Example.*, 2022, [online]. Dostupný na:https://www.investopedia.com/terms/z/zero-sumgame.asp, [cit. 22. 02. 2023].

[14] LEVIN, Jonathan., *Games of Incomplete Information.*, 2002, [online]. Dostupný na: https://web.stanford.edu/~jdlevin/Econ%20203/Bayesian.pdf, [cit. 15. 03. 2023].

[15] SPIRAKIS, Paul G., *Extensive Games with Perfect Information.*, 2015, [online]. Dostupný na: https://cgi.csc.liv.ac.uk/~spirakis/COMP323-Fall2015/lectures/week05.pdf, [cit. 30. 03. 2023].

[16] *Dynamic Game of Complete Information.* [online]. Dostupný na: https://home.kku.ac.th/armeros/Course/IO/Sequential.pdf, [cit. 24. 03. 2023].

[17] *Dynamic Games 2: Imperfect information.* [online]. Dostupný na: https://www.eco.uc3m.es/docencia/new_juegos/en_doc/2.2%20Dynamic%20imperfect%20info.pdf, [cit. 02. 04. 2023].