UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Funkční posloupnosti a řady

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Ondřej Manina**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovnictví/pojišťovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2016

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Ondřej Manina

Název práce: Funkční posloupnosti a řady

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2016

Abstrakt: Tato práce se zabývá funkčními posloupnostmi a řadami. V první kapitole jsou uvedeny základní definice a vlastnosti funkčních posloupností. Druhá kapitola zahrnuje funkční řady, jejich definice, vlastnosti a využití. Poslední kapitola se věnuje Fourierovým řadám. Definice a věty jsou doprovázeny řešenými příklady a některé z těchto příkladů jsou doplněny grafy.

Klíčová slova: funkční posloupnost, funkční řada, Fourierova řada, bodová konvergence, stejnoměrná konvergence, absolutní konvergence, obor konvergence, Weierstrassovo kritérium, trigonometrická řada, Dirichletova věta

Počet stran: 40

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Ondřej Manina

Title: Functional sequences and series

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.

The year of presentation: 2016

Abstract: This thesis is focused on the functional sequences and series. There are the basic definitions and attributes of the functional sequences in the first chapter. The second chapter covers functional series, their definitions, attributes and uses. The last chapter is about Fourier series. The definitions and theorems are accompanied with solved exercises and some of them contain graphs.

Key words: functional sequence, functional series, Fourier series, pointwise convergence, uniform convergence, absolute convergence, range of convergence ,Weierstrass criterion, trigonometric series, Dirichlet theorem

Number of pages: 40

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením paní Mgr. Ivety Bebčákové, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....
podpis

Obsah

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucí mé bakalářské práce Mgr. Ivetě Bebčákové, Ph.D. za její spolupráci, čas věnovaný konzultacím a v neposlední řadě za její rady a připomínky během vedení mé bakalářské práce. Děkuji také své rodině za podporu během celého studia.

Úvod

S pojmem funkční posloupnosti a řady jsem se poprvé potkal na přednášce předmětu Matematika 2, kde byly této problematice věnovány poslední dvě hodiny. Když se mi naskytla příležitost, zvolit si toto téma závěrečné práce, bral jsem to jako možnost ucelit a prohloubit si znalosti již získané z přednášek. A byl bych rád, kdyby k tomuto účel má práce posloužila i ostatním čtenářům.

Celá práce je rozdělena na tři kapitoly a je psána s předpokladem, že čtenář má osvojené znalosti týkající se posloupností a číselných řad.

První kapitola je věnována funkčním posloupnostem, jejím vlastnostem a tomu kdy a jakým způsobem mohou konvergovat. V druhé kapitole se dostáváme k funkčním řadám. Opět zde uvedeme základní pojmy, vlastnosti řad, kritéria konvergence, zmíníme se o dvou speciálních tvarech funkčních řad a nakonec uvedeme jejich aplikaci. Poslední kapitola se zabývá Fourierovými řadami, což je přímo jedna z odnoží funkčních řad. Konkrétně se jedná o funkční řadu, jejíž členy jsou goniometrické funkce. Také v této kapitole si uvedeme podmínky konvergencí a ukážeme si, jak lze rozvinout periodickou funkci ve Fourierovu řadu.

Každá kapitola zahrnuje i příklady k dané problematice a některé z těchto příkladů budou doplněny i grafy vytvořenými v prostředí matematického softwaru MATLAB.

Použité značení

$\mathbb{R}$	obor reálných čísel
$\mathbb{N}$	obor přirozených čísel
(f_n)	funkční posloupnost
$\square$	konec příkladu
$f_n \to f$	posloupnost (f_n) konverguje bodově k funkci f
$f_n \rightrightarrows f$	posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně k funkci f
K	obor konvergence
K_a	obor absolutní konvergence

Kapitola 1

Funkční posloupnost

Nejdříve se budeme zabývat problematikou funkčních posloupností. Konkrétně si v této kapitole uvedeme jejich definici a způsoby zadání, dále se budeme zabývat různými typy konvergencí (v bodě, bodovou a stejnoměrnou) a jejich vzájemnými vztahy, ukážeme si tři věty, které nám pomohou při vyšetřování stejnoměrné konvergence a nakonec si uvedeme věty o spojitosti, integrovatelnosti a derivaci funkčních posloupností.

Všechny uvedené definice a věty jsou čerpány z [1], [2] a [4].

1.1. Funkční posloupnost

Definice 1.1.1. Jestliže ke každému přirozenému číslu $n \in \mathbb{N}$ je přiřazena právě jedna funkce f_n definovaná na některé (pro všechny funkce společné) množině $D \subset \mathbb{R}$, pak tomuto jednoznačnému přiřazení (zobrazení) se říká **posloupnost funkcí** (neboli **funkční posloupnost**). Značí se (obdobně jako u číselných posloupností):

$$(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots) = (f_n(x))_{n=1}^{\infty}, x \in D.$$

Poznámka 1.

Také se může použít následující značení $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, resp. (f_n).

V Příkladu 1 ukážeme, jak může být funkční posloupnost $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ zadána a jak vypadá její grafické znázornění.

Příklad 1.

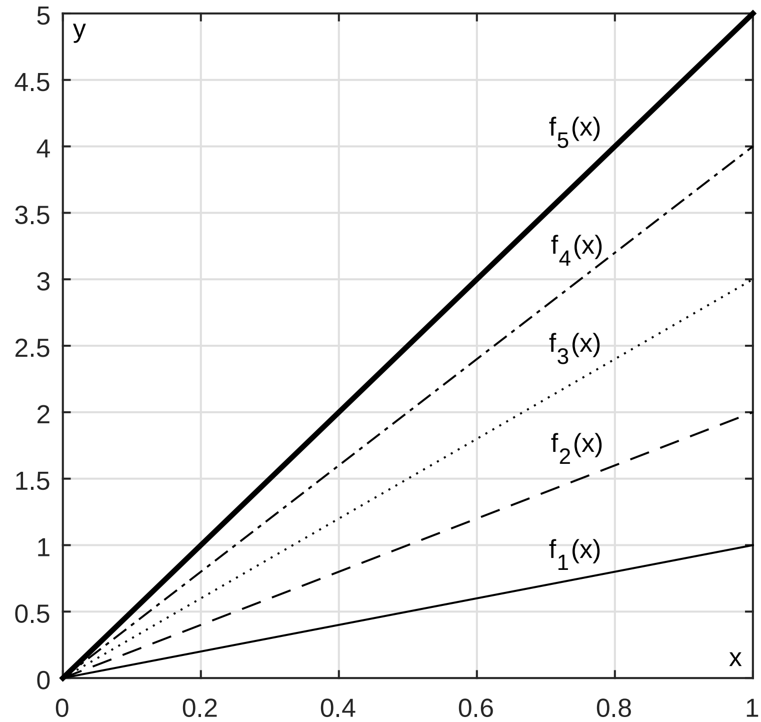
Vykreslete prvních pět členů zadaných funkčních posloupností.

i) $(f_n(x)) = (nx), x \in \langle 0, \infty)$,

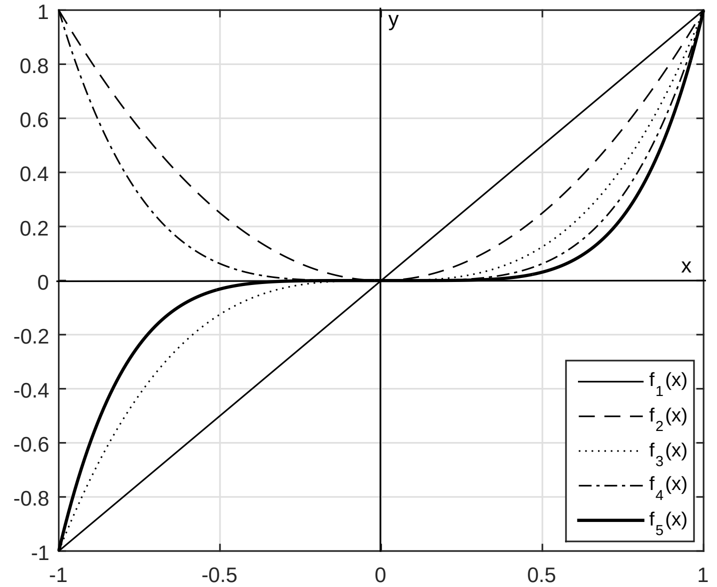
ii) $(f_n(x)) = (x^n), x \in (-1, 1)$,

iii) $(f_n(x)) = (\operatorname{arctg}(nx)), x \in \mathbb{R}$.

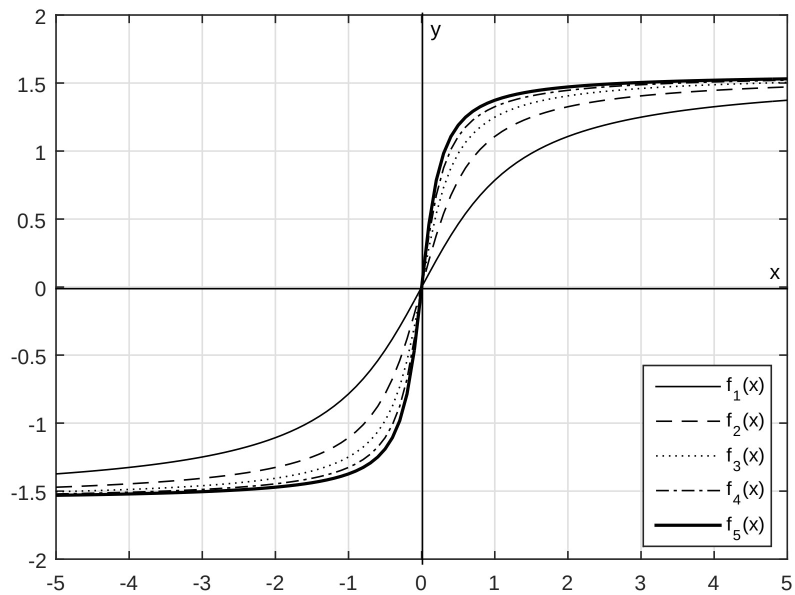
Řešení



Obrázek 1.1: Prvních pět členů posloupnosti $(f_n(x)) = (nx)$



Obrázek 1.2: Prvních pět členů posloupnosti $(f_n(x)) = (x^n)$



Obrázek 1.3: Prvních pět členů posloupnosti $(f_n(x)) = (\text{arctg}(\text{nx}))$

$\square$

1.2. Konvergence v bodě a bodová konvergence

Definice 1.2.1. Řekneme, že **posloupnost funkcí** $(f_n(x))$ **konverguje v bodě** $x_0 \in D$, jestliže konverguje posloupnost čísel $(f_n(x_0))$.

Poznámka 2.

- pokud posloupnost funkcí konverguje v bodě x_0, pak existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = b \in \mathbb{R}$
- pokud je výše uvedená limita nevlastní (rovná se $+/-\infty$) nebo neexistuje, pak fukční posloupnost diverguje v bodě x_0

Příklad 2.

Konverguje posloupnost $(\frac{n}{x})_{n=1}^{\infty}$ v bodě $x_0 = 5$?

Řešení

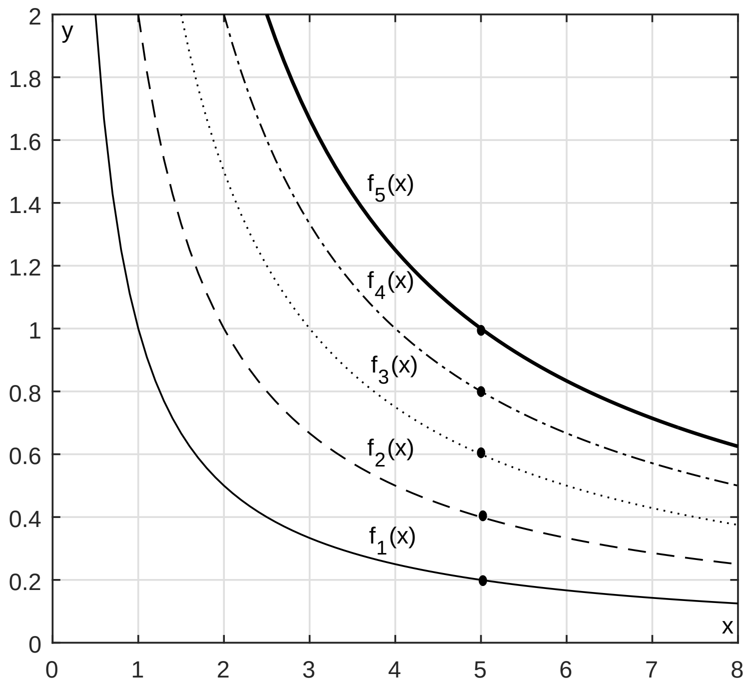
Ukážeme si, jak by vypadalo prvních pár členů této posloupnosti:

$$\begin{array}{cc} f_1(x_0) = \frac{1}{x_0} & f_1(5) = \frac{1}{5} \\ f_2(x_0) = \frac{2}{x_0} & f_2(5) = \frac{2}{5} \\ & \vdots \\ f_n(x_0) = \frac{n}{x_0} & f_n(5) = \frac{n}{5} \\ & \vdots \end{array}$$

Nyní se podíváme, jestli je limita naší číselné posloupnosti $(\frac{n}{5})_{n=1}^{\infty}$ vlastní nebo nevlastní:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{5} = \frac{1}{5} \cdot \lim_{n\to\infty} n = \infty \cdot \frac{1}{5} = \infty$$

Vidíme, že limita je rovna nekonečnu (je nevlastní), což v tomto případě znamená, že funkční posloupnost $(\frac{n}{x})$ v bodě $x_0 = 5$ diverguje.



Obrázek 1.4: Prvních pět členů posloupnosti $(\frac{n}{x})_{n=1}^{\infty}$

Toto si ukážeme i na grafu, který nám znázorňuje prvních pět členů posloupnosti. Lze pozorovat, jak funkční hodnota jednotlivých členů posloupnosti $(f_n(x))$ v bodě $x_0 = 5$ roste s každým dalším členem o $\frac{1}{5}$. Takovýto trend by si držela s každým dalším členem až do hodnoty rovné nekonečnu.

$\square$

Definice 1.2.2. Řekneme, že **posloupnost** $(f_n(x))$ **bodově konverguje** na množině D k funkci $f(x)$, jestliže konverguje v každém bodě $x_0 \in D$ k $f(x_0)$, tj.

$$\forall x_0 \in D \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \; n \geq n_0 \text{ platí } |f_n(x_0) - f(x)| < \varepsilon \tag{1.1}$$

Tuto skutečnost značíme $f_n(x) \to f(x)$.

Bodovou konvergenci si ukážeme na funkční posloupnosti $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$, jejíž prvních osm členů je znázorněno na Obrázku 1.5. Podle symbolického zápisu

(1.1) si nejprve zvolíme jakékoliv x_0 z množiny D. Pro všechna ε libovolné hodnoty větší než 0 vždy najdeme nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby pro všechna $n \in \mathbb{N}$, která jsou větší nebo rovna n_0, platil vztah $|f_n(x_0) - f(x)| < \varepsilon$. Pro $x \in \langle 0, 1)$ se $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ a v bodě $x = 1$ se $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$. Tudíž například při volbě $x_0 = 0.5$ a $\varepsilon = 0.2$ lze odvodit, že $n_0 = 3$.

$$|0.5^n - 0| < 0.2$$

$$0.5^n < 0.2$$

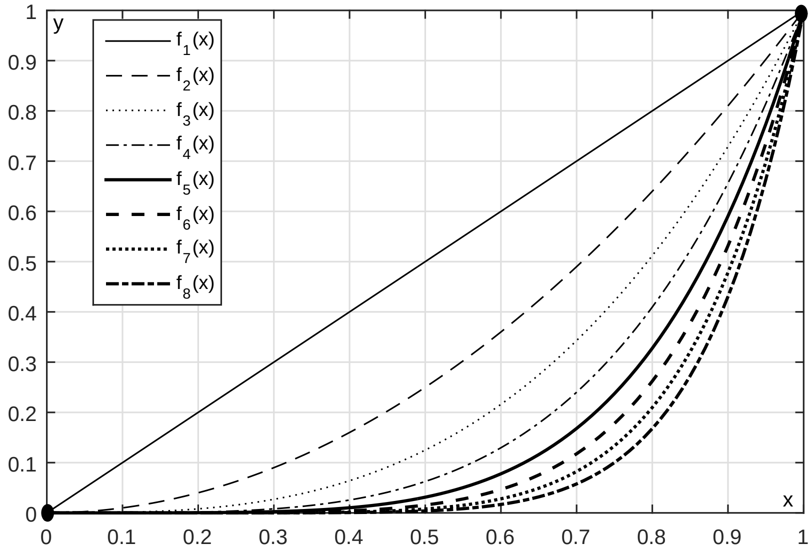
$$\log 0.5^n < \log 0.2$$

$$n \log 0.5 < \log 0.2$$

$$n > \frac{\log 0.2}{\log 0.5}$$

$$n > 2,321928$$

V tabulce 1.1 vidíme, jak se hodnota n_0 mění v závislosti na změně jak x_0 tak i ε.



Obrázek 1.5: Prvních osm členů posloupnosti $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$

x_0	ε	n_0
0.5	0.2	3
0.6	0.4	2
0.7	0.4	3
0.8	0.4	5
0.3	0.2	2
0.3	0.3	2
0.3	0.5	1
1	0.2	1
1	5	1
1	0.8	1
0	0.1	1

Tabulka 1.1: Ukázka závislosti n_0 na výběru x_0 a ε

Definice 1.2.3. Množinu $K \subset D$, kterou tvoří body, v nichž posloupnost funkcí konverguje, nazveme **oborem konvergence** uvažované posloupnosti funkcí.

Příklad 3.

a) Nalezněte obor konvergence funkční posloupnosti $(\sqrt[n]{1+x^n})_{n=1}^{\infty}$
Pro limitu posloupnosti platí následující:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n} = \begin{cases} \nexists & \text{je-li } x \in (-\infty, -1\rangle\,, \\ 1 & \text{je-li } x \in (-1, 1\rangle\,, \\ x & \text{je-li } x \in (1, +\infty)\,. \end{cases}$$

Při pohledu na tyto výsledky můžeme říct, že funkční posloupnost $(\sqrt[n]{1+x^n})_{n=1}^{\infty}$ konverguje na intervalu $K = (-1; +\infty)$.

b) Nalezněte obor konvergence funkční posloupnosti $(\operatorname{arctg} nx)_{n=1}^{\infty}$
Jednotlivé členy této posloupnosti $(\operatorname{arctg} x, \operatorname{arctg} 2x, \operatorname{arctg} 3x, \dots)$ mají stejný definiční obor $D = \mathbb{R}$.
Vypočteme si limitu této funkční posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{je-li } x < 0, \\ 0 & \text{je-li } x = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{je-li } x > 0. \end{cases}$$

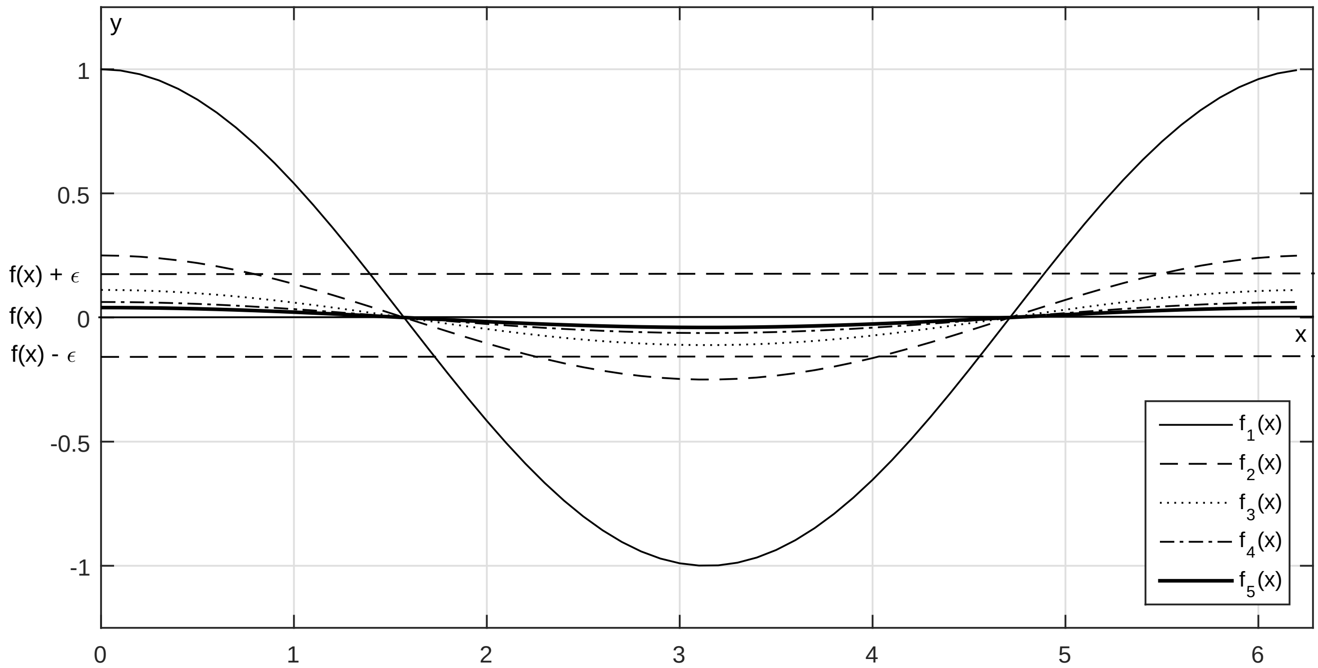
Tyto výsledky nám říkají, že obor konvergence je v tomto případě roven definičnímu oboru jednotlivých členů zadané posloupnosti, tzn. $K = D$.

$\square$

1.3. Stejnoměrná konvergence

Definice 1.3.1. Řekneme, že **posloupnost funkcí** $(f_n(x))$ **konverguje stejnoměrně** k funkci $f(x)$ na intervalu K, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ a pro každý bod $x \in K$ platí nerovnost $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall x \in K \; \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \tag{1.2}$$



Obrázek 1.6: Prvních pět členů posloupnosti $(\frac{\cos x}{n^2})_{n=1}^{\infty}$ pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Na Obrázku 1.6 vidíme graf funkční posloupnosti $(\frac{\cos x}{n^2})_{n=1}^{\infty}$ na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Je potřeba vědět, že $\lim\limits_{n \to \infty} (\frac{\cos x}{n^2}) = 0$, tzn. $f(x) = 0$. Podle vztahu (1.2) si můžeme zvolit ε libovolné hodnoty větší než nula. Zvolíme si tedy $\varepsilon = \frac{1}{6}$. Nyní si vytvoříme epsilonový pás kolem $f(x)$ tak, že jeho horní mez bude $f(x)+\varepsilon$ a spodní $f(x)-\varepsilon$. V tuto chvíli hledáme takový člen posloupnosti, který se bude pro všechna x z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ nacházet právě uvnitř epsilonového pásu a bude platit, že každý další člen posloupnosti se v něm nachází také. V našem případě tyto podmínky splňuje $n_0 = 3$.

Při pohledu na symbolické zápisy bodové a stejnoměrné konvergence je patrné, že si jsou podobné. Jediný rozdíl najdeme v pozici kvantifikátoru $\exists n_0 \in \mathbb{N}$. V zápisu bodové konvergence se nachází na třetí pozici a to znamená, že při pevně zvoleném $\varepsilon > 0$ závisí i na volbě $x \in D$.
U stejnoměrné konvergence je ovšem n_0 stejné pro všechna $x \in D$, při pevně zvoleném $\varepsilon > 0$. Tento vztah mezi konvergencemi nám ukazuje, že „silnější“ je konvergence stejnoměrná, což vysvětluje následující věta.

Věta 1.3.1. ***(o vztahu mezi stejnoměrnou konvergencí a bodovou konvergencí)***
Jestliže funkční posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně na množině K ($K \subset \mathbb{R}, K \neq \emptyset$) k limitní funkci f, pak také konverguje bodově na K k téže limitní funkci f.

Poznámka 3.

Obrácené tvrzení, že pokud funkční posloupnost konverguje bodově, tak konverguje i stejnoměrně, obecně neplatí. Dále z této věty vyplývá, že pokud funkční posloupnost nekonverguje bodově, nemůže konvergovat ani stejnoměrně.

Následující věta nám umožní vyšetřovat stejnoměrnou konvergenci poměrně snadněji, než by tomu bylo s použitím její definice. Zároveň je to i postačující podmínka stejnoměrné konvergence.

Věta 1.3.2. ***(postačující podmínka stejnoměrné konvergence funkční posloupnosti)***

Nechť (f_n) je funkční posloupnost a $K \subset D = D(f_n), (K \neq \emptyset$ a $D(f_n)$ je definiční obor $(f_n))$. Jestliže existuje posloupnost (a_n), $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ taková, že platí:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

a pro skoro všechny členy f_n dané posloupnosti (tj. všechny členy f_n od určitého indexu n_0 počínaje) je

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \text{ pro každé } x \in K,$$

pak funkční posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně na množině K k limitní funkci f.

Aplikaci této podmínky si ukážeme na Příkladu 4.

Příklad 4.

Rozhodněte, zda funkční posloupnost $(f_n(x)) = (e^{-nx})$ konverguje stejnoměrně na množině $K = \langle 1, \infty)$.

Řešení

Nejprve určíme limitní funkci f bodové konvergence dané funkční posloupnosti:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-nx} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{e^{nx}} = \tfrac{1}{\infty} = 0, x \in K$$

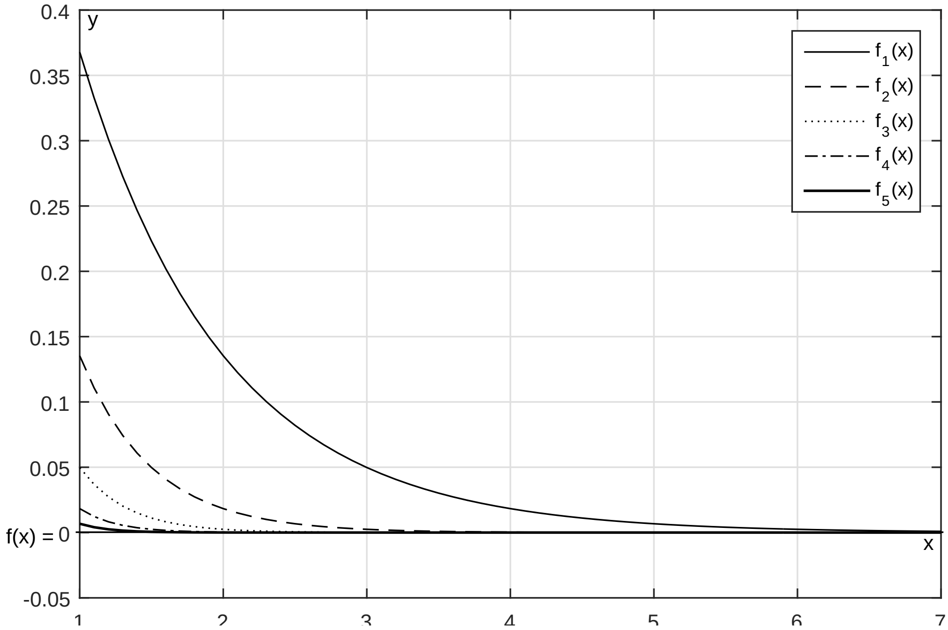
Dále najdeme (a_n) takovou, že bude pro každé $x \in K$ platit $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$:

$$|f_n(x) - f(x)| = |e^{-nx} - 0| = \left|\tfrac{1}{e^{nx}}\right| = \tfrac{1}{e^{nx}} \leq \tfrac{1}{n}, \text{ pro } x > 1 \text{ (tj. na } K) \text{ a } \forall n \in \mathbb{N}$$

A teké platí:

$$a_n = \tfrac{1}{n} > 0, \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} = 0$$

Podle věty 1.3.2 tedy $e^{-nx} \rightrightarrows 0$ na množině $K = \langle 1, \infty) \subset \mathbb{R}$, tzn. že $(e^{-nx})_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině $K = \langle 1, \infty)$ stejnoměrně k funkci $f(x) = 0$.



Obrázek 1.7: Prvních pět členů posloupnosti $(e^{-nx})_{n=1}^{\infty}$ pro $x \in \langle 1, \infty)$

$\square$

1.4. Věta o spojitosti, integrovatelnosti a derivaci

Věta 1.4.1. ***(o spojitosti limitní funkce stejnoměrně konvergentní funkční posloupnosti)***
Je-li (f_n) posloupnost funkcí spojitých na libovolném intervalu J, která na něm konverguje stejnoměrně k limitní funkci f, pak funkce f je také spojitá na intervalu J.

Příklad 5.

Jak jsme si ukázali v Příkladu 4., tak posloupnost spojitých funkcí $(e^{-nx})_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $K = \langle 1, +\infty)$ k nulové limitní funkci f, to znamená, že i funkce f je spojitá na stejném intervalu, viz. Obrázek 1.7.

□

Věta 1.4.2. ***(o integrovatelnosti limitní funkce stejnoměrně konvergentní funkční posloupnosti)***
Je-li (f_n) posloupnost funkcí integrovatelných na omezeném intervalu $J = \langle a, b\rangle$, která na něm konverguje stejnoměrně k limitní funkci f, pak tato funkce f je také integrovatelná na intervalu $J = \langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)dt \text{ pro každé } x \in \langle a, b\rangle$$

čili speciálně pro $x = b$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \tag{1.3}$$

Příklad 6.

Vezmeme si funkční posloupnost $(f_n(x)) = (\frac{\cos x}{n^2})$, která konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ k limitní funkci:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos x}{n^2} = 0$$

Nyní dosadíme do první části vztahu (1.3):

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{\cos x}{n^2}dx = \int_0^{2\pi} 0dx = 0 \tag{1.4}$$

Teď dosadíme do druhé části vztahu (1.3):

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^x f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos x}{n^2}dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin x}{n^2}\right]_0^{2\pi} = \lim_{n\to\infty}[\frac{\sin 2\pi}{n^2} - \frac{\sin 0}{n^2}] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(0-0) = 0 \tag{1.5}$$

Vidíme tedy, že při splnění podmínek, které nám udává Věta 1.4.2, lze využít záměny pořadí operací tak, jak je uvedeno ve vztahu (1.3).

□

Věta 1.4.3. ***(o derivaci limitní funkce stejnoměrně konvergentní funk-ční posloupnosti)***
Je-li (f_n) *posloupnost funkcí diferencovatelných na intervalu* $J = \langle a, b\rangle$*, (tj. majících na něm vlastní derivace* $f_n^{'}(x)$*, přičemž derivací* $f_n^{'}(a)$ *se rozumí derivace zprava a derivací* $f_n^{'}(b)$ *se rozumí derivace zleva),* (f_n) *je konvergentní alespoň v jednom bodě* $x_0 \in \langle a, b\rangle$ *a posloupnost derivací* $(f_n^{'})$ *konverguje stejnoměrně na intervalu* $J = \langle a, b\rangle$*, pak limitní funkce*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

je také diferencovatelná na J *a platí*

$$f^{'}(x) = \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]^{'} = \lim_{n\to\infty} f_n^{'}(x). \tag{1.6}$$

Příklad 7.

Mějme funkční posloupnost $(\frac{x}{1+n^2x^2})_{n=1}^{\infty}$ zadanou pro $x \in \langle 0, 1\rangle$. Ukážeme si, že $(f_n(x))$ je diferencovatelná na našem intervalu pro všechna n.

$$f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

Posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně na intervalu $x \in \langle 0, 1\rangle$ k nulové limitní funkci. A nyní si dosadíme do vztahu (1.6) uvedeného ve Větě 1.4.3.

$$\left[\lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}\right]' = [0]' = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq 0, \\ 1 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

Z těchto výsledků je patrné, že v tomto případě uvedený vztah neplatí, jelikož (f_n') je posloupnost spojitých funkcí a limitní funkce je nespojitá, tzn. že konvergence je nestejnoměrná. Tím pádem nemůžeme zaměňovat pořadí operací.

$\square$

Kapitola 2

Funkční řady

V této kapitole si osvětlíme problematiku funkčních řad. Struktura kapitoly bude podobná té předchozí. Nejprve si nadefinujeme, jak funkční řada vůbec vypadá. Ukážeme si i využití jejího částečného součtu. Hlavní část bude tvořit problematika týkající se konvergencí a to konvergence v bodě, stejnoměrné konvergence a jejího vyšetřování. Nakonec si uvedeme, k čemu nám stejnoměrná konvergence slouží.
Všechny uvedené definice a věty jsou čerpány z [1], [2], [3] a [4].

2.1. Funkční řada a její částečný součet

Definice 2.1.1. Nechť $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí f_n definovaných na množině $D \subset \mathbb{R}$. Pak symbol (výraz)

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots \\ \text{neboli} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \end{cases}$$

se nazývá **řada funkcí** (neboli **funkční řada**) a funkci f_n se říká **n-tý člen funkční řady**.

V Příkladu 8 si ukážeme, jak taková funkční řada může vypadat:

Příklad 8.

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{12} + \dots$

ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \ln^n x = 1 + \ln x + \ln^2 x + \dots$

$\square$

Poznámka 4.

Speciálním případem funkčních řad jsou **mocninné řady** a **řady trigonometrické**. Jejich tvary si zde také uvedeme. Konkrétně řadami trigonometrickými se budeme zabývat ve třetí kapitole a praktické použití řad mocniných si uvedeme v poslední podkapitole funkčních řad.

i) Mocninná řada má pro $x \in \mathbb{R}$ tento tvar:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

($x_0, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{R}$ jsou konstanty).
ii) Trigonometrická řada má pro $x \in \mathbb{R}$ tento tvar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_0 + (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

(a_0, a_n, b_n jsou reálné konstanty pro $n \in \mathbb{N}$).

Definice 2.1.2. Nechť je dána řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funkcí definovaných na neprázdné množině $D \subset \mathbb{R}$. Funkci s_n určenou předpisem

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \qquad x \in D,$$

nazýváme **n-tým částečným součtem funkční řady**. Posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupností částečných součtů funkční řady**.

2.2. Bodová konvergence a obor konvergence

Definice 2.2.1. Řekneme, že funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **konverguje bodově** na D a má součet $s(x)$, jestliže posloupnost částečných součtů $(s_n(x))$ konverguje bodově na D k funkci $s(x)$, tj. $s_n \to s$. Značíme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x).$$

Definice 2.2.2. **Oborem konvergence** funkční řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x), x \in D$, nazýváme množinu všech čísel $x \in D$, ve kterých funkční řada bodově konverguje. Obor budeme značit K.

Definice 2.2.3. Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada funkcí definovaných na množině D a nechť $a \in D$. Říkáme, že daná funkční řada je **absolutně konvergentní** v bodě a, právě když v něm konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$, tj. je-li konvergentní číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(a)|$

Při vyšetřování absolutní konvergence funkční řady můžeme použít kritéria srovnávací, limitní podílová nebo třeba odmocninová, která se používají pro zjištění konvergence číselných řad.

Definice 2.2.4. Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada funkcí definovaných na množině D. Množina všech čísel $x \in D$ takových, že je v nich daná funkční řada absolutně konvergentní, se nazývá **obor absolutní konvergence funkční řady**. Značí se K_a. Obor absolutní konvergence K_a funkční řady je tedy maximální množina, na níž funkční řada absolutně konverguje.

Poznámka 5.

Z definic uvedených v této kapitole zjevně vyplývá, že obor absolutní konvergence funkční řady je podmnožinou oboru konvergence funkční řady, tj. $K_a \subset K$.

Vyšetření oboru konvergence funkční řady si ukážeme na Příkladu 9

Příklad 9.

Určete obor konvergence funkční řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}x^n}{n}$.

Řešení

Použijeme limitní odmocninové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n}}{n}\,|x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n}}{n}} = 4\,|x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 4\,|x|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}x^n}{n} \begin{cases} \text{konverguje} & \text{pro } x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \\ \text{diverguje} & \text{pro } |x| > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Interval absolutní konvergence je tedy $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Nyní budeme zkoumat konvergenci v krajních bodech tohoto intervalu.

Jestliže, $x = \frac{1}{4}$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Získaná funkční řada je známá harmonická řada, o které víme, že je divergentní.

Pro $x = -\frac{1}{4}$ lze naši funkční řadu upravit na tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Tentokrát dostáváme alternující funkční řadu, která je relativně konvergentní.

Dostáváme se tedy k našemu oboru konvergence, kterým je interval $\left\langle -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

$\square$

2.3. Stejnoměrná konvergence

Definice 2.3.1. Řekneme, že řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **konverguje stejnoměrně** na intervalu D ke svému součtu $s(x)$, jestliže posloupnost $(s_n(x))$ jejich částečných součtů stejnoměrně konverguje na D k funkci $s(x)$.

Chceme-li zjistit, zda řada funkcí konverguje stejnoměrně na intervalu D, je vhodné použít tzv. Weierstrassovo kritérium, které je popsáno ve Větě 2.3.1.

Věta 2.3.1. ***(Weierstrassovo kritérium)***

Nechť na intervalu D je definována řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a existuje konvergentní číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy taková, že pro každé $x \in D$ a všechna $n \in \mathbb{N}$ je

$$|f_n(x)| \leq a_n,$$

pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu D.

Použití Weierstrassova kritéria demonstruje Příklad 10.

Příklad 10.

Dokažte, že funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}+n^3}$ konverguje stejnoměrně na $\langle 0, +\infty)$.

Řešení

Podle Weierstrassova kritéria hledáme k dané funkční řadě majorantní řadu, která bude zároveň konvergentní. Protože víme, že pro všechna $x \geq 0$ je $\sqrt[n]{x} \geq 0$, tak můžeme jako majorantu brát například řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Pro všechna $x \in \langle 0, \infty)$ a všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x}+n^3} \leq \frac{1}{n^3}.$$

Naše majoranta je konvergentní a tím pádem můžeme říct, že na intervalu $\langle 0, +\infty)$ je funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}+n^3}$ stejnoměrně konvergentní.

$\square$

2.4. Vlastnosti stejnoměrně konvergentních funkčních řad

Stejnoměrná konvergence funkčních řad je užitečná i v tom, že nám zajišťuje přenos určitých vlastností. O takových třech užitečných vlastnostech se zmíníme ve Větách 2.4.1, 2.4.2 a 2.4.3.

Věta 2.4.1. ***(o spojitosti součtové funkce stejnoměrně konvergentní funkční řady)***

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ je funkční řada, která konverguje stejnoměrně na daném (libovolném) intervalu $J \in \mathbb{R}$ k funkci (součtu) s. Jestliže všechny členy řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jsou funkce spojité na J, pak také součtová funkce s je spojitá na J.

Věta 2.4.2. ***(o integrování stejnoměrně konvergentní funkční řady po členech)***

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ je funkční řada, která stejnoměrně konverguje na intervalu $J \subset \mathbb{R}$ k součtové funkci s. Jestliže všechny členy funkční řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jsou funkce integrovatelné (speciálně spojité) na intervalu J, pak pro každé $x_0, x \in J$ konverguje také funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t$ a její součet je $\int\limits_{x_0}^{x} s(t)\mathrm{d}t$, tj. platí

$$\int\limits_{x_0}^{x} s(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{x_0}^{x} (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t))\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

Speciálně , je-li J omezený interval s krajními body a, b (a ¡ b), pak položíme-li $x_0 = a, x = b$, dostáváme:

$$\int\limits_{a}^{b} s(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{b} (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{a}^{b} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Stručně říkáme, že za uvedených předpokladů lze funkční řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$

integrovat po členech *(člen po členu), tj. stejně jako v případě integrování konečného počtu funkcí.*

V Příkladu 11 si nyní ukážeme, jak se dá Věta 2.4.2 využít v praxi.

Příklad 11.

Vypočtěte určitý integrál v mezích od -1 do 1 funkce definované v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

Řešení

Nejprve vyšetříme, zda daná řada konverguje stejnoměrně. Použijeme proto Weierstrassovo kritérium z Věty 2.3.1. Na daném intervalu můžeme zvolit jako majorantu například $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

$$\left|\frac{x^n}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$$

Všechny členy dané řady jsou v uvažovaném intervalu spojité. Tudíž podle Věty 2.4.2:

$$\int\limits_{-1}^{1} s(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{1^3}\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{2^3}\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{3^3}\mathrm{d}x + \cdots + \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^n}{n^3}\mathrm{d}x + \ldots .$$

Protože platí

$$\int\limits_{-1}^{1} x^n \mathrm{d}x = 0 \qquad\qquad \text{pro } n = 1, 3, 5, \ldots ,$$

$$\int\limits_{-1}^{1} x^n \mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{1} \frac{x^n}{1^3}\mathrm{d}x \qquad \text{pro } n = 2, 4, 6, \ldots ,$$

je

$$\int\limits_{-1}^{1} s(x)\mathrm{d}x = 2[\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{2^3}\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \frac{x^4}{4^3}\mathrm{d}x + \cdots + \int\limits_{0}^{1} \frac{x^2n}{(2n)^3}\mathrm{d}x + \ldots] = 2(\frac{1}{3}\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{4^3} + \frac{1}{7}\frac{1}{6^3} + \ldots).$$

Díky splnění podmínek z Věty 2.4.2 jsme mohli využít vztahu (2.1) a vyměnit pořadí operací a tím si zjednodušit výpočet určitého integrálu.

$\square$

Věta 2.4.3. ***(o derivování funkční řady po členech)***

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *je funkční řada, jejíž všechny členy* f_n *mají derivace* f'_n *na intervalu* $J \subset \mathbb{R}$. *Jestliže funkční řada derivací* $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ *je stejnoměrně konvergentní na* J *a je-li funkční řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergentní alespoň v jednom bodě* $x_0 \in J$, *pak je konvergentní na celém intervalu* J, *a to stejnoměrně, přičemž součtová funkce* s *funkční řady* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *má vlastní derivaci* s', *která je součtovou funkcí funkční řady derivací* $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ *na* J, *tj. platí*

$$s'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \qquad \textit{pro každé } x \in J$$

Stručně říkáme, že za uvedených předpokladů lze funkční řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ***derivovat po členech*** *(člen po členu), tj. stejně jako v případě derivování konečného součtu funkcí.*

Příklad 12.

Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$ má diferencovatelný součet na $\mathbb{R}$.

Řešení

Věta o derivování funkční řady člen po členu říká, že je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergentní alespoň v jednom bodě $x_0 \in J$ a pokud řada derivací konverguje stejnoměrně na J, potom je součet vyšetřované řady diferencovatelný na J. Dosadíme-li do naší řady za x například 0, ukáže se, že řada v tomto bodě konverguje - $f_n(0) = 0$. V dalším kroku se budeme zajímat o konvergenci řady derivací.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f_n)' = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{x}{1+n^2x^2}$$

Zda tato řada konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ vyšetříme pomocí Weierstrassova kritéria. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\frac{x}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Zvolená majoranta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní na $\mathbb{R}$, to znamená, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ je stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$. Při splnění těchto předpokladů můžeme tedy použít uvedený vztah:

$$s'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{x}{1+n^2x^2} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Díky Větě 2.4.3 můžeme tedy derivovat funkční řadu člen po členu, což může být v mnoha případech jednodušší.

$\square$

2.5. Využití funkčních řad

Jak již bylo zmíněno v Poznámce 4., speciálním tvarem funkčních řad je řada mocninná. Právě rozvoj funkce na mocninou řadu nám může ulehčit výpočty v případech, jako jsou tyto - přibližný výpočet funkčních hodnot, výpočet limit nebo přibližný výpočet integrálů. Všechna tato využití stojí na stejném principu a to takovém, že složitou funkci nahrazujeme řadou funkcí jednodušších. Při výpočtu přibližných funkčních hodnot funkcí pomocí rozvoje funkce v mocninou řadu bývá typickým zástupcem funkcí například e^x nebo goniometrické funkce $\cos x$ a $\sin x$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 n}{(2n)!} \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

Co se týká výpočtu limit, tak při jejich výpočtu můžeme použít právě některé z výše uvedených rozvojů. Na stejném principu funguje i přibližný výpočet integrálu. Ukážeme si na konkrétním příkladu.

Příklad 13.

Vypočítejte limitu.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots)(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots)-x(1+x)}{x^3} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}+\dots)-x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{30}x^2 + \dots) = \tfrac{1}{3}$$

$\square$

Kapitola 3

Fourierovy řady

V poslední kapitole se budeme zabývat jednou z odnoží funkčních řad a to řadami trigonometrickými, konkrétně rozvojem funkcí do Fourierových řad. Fourierovy trigonometrické řady jsou speciálním případem řad trigonometrických. Výhodou Fourierových řad oproti řadám Taylorovým je, že jsou méně náročné na podmínky konvergence řady (například se nepožaduje existence derivace všech řádů dané funkce v daném bodě).
Před tím, než se dostaneme k samotné definici Fourierovy řady, je nezbytné si uvést některé důležité pojmy. Prvním z nich bude trigonometrický polynom následovaný trigonometrickou řadou.
Všechny uvedené definice a věty jsou čerpány z [1], [3], [5] a [6].

Definice 3.0.1. Funkce S_n definovaná funkčním předpisem

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos\,(k\omega x) + b_k \sin\,(k\omega x)) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, x \in \mathbb{R},$$

kde a_0, a_k a $b_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, se nazývá **trigonometrický polynom**.

Definice 3.0.2. Funkční řada tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos{(n\omega x)} + b_n \sin{(n\omega x)} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, x \in \mathbb{R}$$

se nazývá **trigonometrická řada** s periodou $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Reálná čísla a_0, a_n, b_n (n = 1, 2,. . .) se nazývají koeficienty trigonometrické řady.

Trigonometrická řada se může objevovat ve dvou speciálních tvarech, které si teď ukážeme:

1) pokud koeficient $b_n = 0, n = 1, 2, \ldots$, dostáváme tento tvar:

$$\tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x.$$

Říkáme, že se jedná o kosinovu trigonometrickou řadu.

2) v situaci, kdy koeficient $a_n = 0, n = 1, 2, \ldots$, má řada tvar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega x.$$

Řadu v takovémto tvaru nazýváme sinova trigonometrická řada.

Nyní se už přesuneme přímo do problematiky Fourierových řad, kde zejména využijeme znalost tvaru právě definové trigonometrické řady.

Definice 3.0.3. Nechť f je periodická funkce se základní periodou T, integrovatelná na intervalu periodicity $\langle \alpha, \alpha + T \rangle$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, x \in \mathbb{R},$$

kde

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\ \mathrm{d}x, \tag{3.1}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \cos n\omega x\, \mathrm{d}x, n = 1, 2, \ldots, \tag{3.2}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \sin n\omega x\, \mathrm{d}x, n = 1, 2, \ldots, \tag{3.3}$$

se nazývá **Fourierova řada funkce f**. Koeficienty a_n, b_n této řady se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f.

Zpravidla volíme délku periody jako $T = 2l$ a $\alpha = -\frac{T}{2}$. Po dosazení těchto délek period do výše uvedených vztahů dostaneme $\alpha = -l$ a $\alpha + T = l$.
Fourierovu řadu, kterou jsme si právě nadefinovali, zapisujeme tímto způsobem:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\ n\omega x + b_n\sin\ n\omega x), \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

V zápise tohoto vztahu se nám objevuje symbol $\sim$, který říká, že funkci f je Fourierova řada přiřazena jen formálně. Jinak řečeno, Fourierova řada nemusí konvergovat k této funkci f.

Věta 3.0.1. *1. Pro Fourierovy koeficienty sudé periodické funkce f se základní periodou $T = 2l, l > 0$, integrovatelné na intervalu periodicity délky T, platí*

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos n\omega x\ \mathrm{d}x \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, n = 1, 2, \dots,$$

$$b_n = 0,\ n = 1, 2, \dots$$

Fourierova řada sudé periodické funkce f je tedy kosinova trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\ n\omega x \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}.$$

2. Pro Fourierovy koeficienty liché periodické funkce f se základní periodou $T = 2l, l > 0$, integrovatelné na intervalu periodicity délky T, platí

$$a_n = 0,\ n = 1, 2, \dots\ ,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin n\omega x\ \mathrm{d}x \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, n = 1, 2, \dots$$

Fourierova řada liché periodické funkce f je tedy sinová trigonometrická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\ n\omega x \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}.$$

Při formulování kritérií konvergence Fourierových řad, budeme využívat pojmů, které nám jsou již důvěrně známy. Jedná se například o definici funkce po částech spojité nebo funkce po částech monotónní.

O konvergenci Fourierových řad můžeme rozhodovat na základě koeficientů a_n a b_n nebo na základě vlastností funkce f. K tomuto rozhodování nám pomůžou následující dvě věty - Dirichletova a věta o stejnoměrné konvergenci pro Fourierovy řady, které říkají, při jakých podmínkách tato funkce f konverguje bodově nebo stejnoměrně.

Věta 3.0.2. ***(Dirichletova)***
Nechť funkce f je po částech spojitá a po částech monotónní na intervalu $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada konverguje na $[-\pi, \pi]$ a její součet je roven:

1. *$f(x_0)$ v každém bodě $x_0 \in (-\pi, \pi)$, v němž je f spojitá,*
2. *$\frac{1}{2}[f(x_0^-) + f(x_0^+)]$ v každém bodě $x_0 \in (-\pi, \pi)$, v němž je f není spojitá,*
3. *$\frac{1}{2}[f(-\pi^+) + f(\pi^-)]$ v krajních bodech intervalu $[-\pi, \pi]$.*

Poznámka 6.

Symbolem $f(x_0^+)$ je myšleno číslo $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ a analogicky se $f(x_0^-)$ bude rovnat $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

Věta 3.0.3. *Nechť 2π-periodická funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $[-\pi, \pi]$ a její derivace $f'(x)$ je na témže intervalu po částech spojitá. Pak její Fourierova řada konverguje k funkci $f(x)$ stejnoměrně na intervalu $(-\infty, \infty)$.*

Definice 3.0.4. Jestliže určíme Fourierovu řadu dané periodické funkce f a tato řada konverguje na $\mathbb{R}$ tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, x \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

nebo

$$\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\, n\omega x + b_n\sin\, n\omega x) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, x \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

potom říkáme, že tím danou periodickou funkci f rozvíjíme ve Fourierovu řadu. Tato řada se nazývá Fourierův rozvoj dané periodické funkce.

Při řešení úlohy, ve které máme funkci f rozvinout na řadu Fourierovu si nejprve ověříme, zda funkce f splňuje podmínky z Věty 3.0.2. Dále si pomocí vzorců (3.1), (3.2) a (3.3) vypočítáme Fourierovy koeficienty a nakonec zapíšeme rozvoj dané funkce ve Fourierovu řadu do tvaru (3.4) nebo (3.5). Tento postup si nyní ukážeme přímo na příkladech.

Příklady

Nechť máme funkci $f(x) = x^2 - 2x$, definovanou na intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Rozvineme tuto funkci ve Fourierovu řadu.

Řešení

Naše funkce $f(x) = x^2 - 2x$ je na definovaném intervale po částech spojitá i monotónní, tím splňuje Dirichletovy podmínky pro konvergenci. Dále si spočítáme Fourierovy koeficienty. Základní periodou $f(x)$ je $T = 2$, takže $l = \frac{T}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

$$\mathrm{a_0} = \tfrac{2}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 (x^2-2x)\ \mathrm{d}x = \left[\tfrac{x^3}{3} + 2\tfrac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left[\tfrac{8}{3}+4\right] = -\tfrac{4}{3}$$

$$\mathrm{a_n} = \tfrac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\tfrac{n\pi x}{l}\right)\ \mathrm{d}x = \int_0^2 (x^2-2x)\ \cos(n\pi x)\ \mathrm{d}x =$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = x^2 - 2x & u' = 2x - 2 \\ v' = \cos(n\pi x) & v = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x) \end{array} \right| =$$

$$\left[\tfrac{x^2-2x}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_0^2 - \tfrac{2}{n\pi}\int_0^2 (x-1)\sin(n\pi x)\ \mathrm{d}x =$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = x - 1 & u' = 1 \\ v' = \sin(n\pi x) & v = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x) \end{array} \right| = 0 - \tfrac{2}{n\pi}\left\{\left[-\tfrac{(x-1)}{n\pi}\right]_0^2 + \tfrac{1}{n\pi}\int_0^2 \cos(n\pi x)\ \mathrm{d}x\right\} =$$

$$\frac{2}{n^2\pi^2}\left\{[(x-1)\ \cos(n\pi x)]_0^2+\frac{1}{n^2\pi^2}\left[\sin(n\pi x)\right]_0^2\right\}=$$
$$\frac{2}{n^2\pi^2}\left[(x-1)\cos(n\pi x)\right]_0^2+0-\frac{2}{n^2\pi^2}\left[\cos(2n\pi)-(-1)\right]=\frac{2}{n^2\pi^2}(1+1)=\frac{4}{n^2\pi^2}$$

$$\mathrm{b_n}=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(\tfrac{n\pi x}{l})\,\mathrm{d}x=\int_0^2(x^2-2x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x=$$
$$\left|\begin{array}{ll} u=x^2-2x & u'=2x-2 \\ v'=\sin(n\pi x) & v=-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\end{array}\right|=[-\tfrac{(x^2-2x)}{n\pi}\cos(n\pi x)]_0^2+$$
$$\frac{2}{n\pi}\int_0^2(x-1)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{ll} u=x-1 & u'=1 \\ v'=\cos(n\pi x) & v=\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\end{array}\right|=$$
$$[-\tfrac{(x^2-2x)}{n\pi}\cos(n\pi x)]_0^2+\frac{2}{n\pi}\left\{[\tfrac{(x-1)}{n\pi}\cos(n\pi x)]_0^2-\frac{1}{n\pi}\int_0^2\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x\right\}=$$
$$[-\tfrac{(x^2-2x)}{n\pi}\cos(n\pi x)]_0^2+0+\frac{2}{n^3\pi^3}[\cos(n\pi x)]_0^2=-\frac{1}{n\pi}[(4-4)\cos(2n\pi)-$$
$$(0)\cos(2n\pi)]+0+\frac{2}{n^3\pi^3}[\cos(2n\pi)-\ (\cos 0)]=-\frac{1}{n\pi}[0-0]+0+\frac{2}{n^3\pi^3}[1-1]=0$$

Po dosazení právě vypočtených koeficientů do (3.4) dostáváme výsledný tvar rozvoje $f(x)$ ve Fourierovu řadu.

$$f(x)=-\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)$$

□

Fourierovy řady mají široké uplatnění v oblastech fyziky a některých technických oborech. Při ukládání zvuku, když dostaneme zvukový vzorek, tak právě Fourierova transformace nám umožňuje jej rozložit na základní vlny a uchovat v tomto tvaru. To je základ zvukového formátu mp3. Fourierův rozklad je možno zobecnit na více dimenzí, což se dá využít i pro zachování obrazové informace. Tento princip je například základem systému používaného FBI k uchovávání databáze otisků prstů. V dnešní době existují různé modifikace Fourierových řad, jako je například FFT (Fast Fourier Transform). Tyto modifikace především zrychlují celý proces hledání Fourierových koeficientů, k čemuž přispívají samozřejmě i novější a výkonější softwary.

Závěr

Cílem práce bylo blíže nastudovat problematiku funkčních posloupností a řad. Tato látka byla obsažena v kurzu Matematika 2, kde jsme byli seznámeni se základy, které jsem se snažil upevnit a následujícím samostudiem rozvinout o něco dál. Základní poznatky jsem tedy doplnil třeba o téma Fourierových řad, jejichž aplikace nás dennodenně obklopují a ve většině případů si toho nejsme ani vědomi. Ke každému okruhu problémů jsem se snažil vybrat vhodné příklady, které by čtenáři pomohly lépe pochopit danou problematiku, pro ještě lepší porozumění jsem konkrétní příklady doplnil grafy a celý proces jsem se snažil okomentovat svými slovy.

Celá práce byla psaná v prostředí systému LaTeX, který je určen pro sazbu matematického textu. Grafy byly vytvořeny v matematické softwaru MATLAB. Pro orientaci v těchto prostředích a naučení se základním dovednostem, bylo nutno navštěvovat předměty tomu určené. Díky této práci jsem se tedy naučil i těmto dovednostem.

Literatura

[1] POLÁK, Josef. *Funkční posloupnosti a řady: Fourierovy řady.* 2. upr. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2004

[2] MOŠOVÁ, Vratislava. *Matematická analýza II: posloupnosti a řady funkcí, funkce více proměnných.* Olomouc: Univerzita Palackého, 2005.

[3] DOŠLÁ, Zuzana a Vítězslav NOVÁK. *Nekonečné řady.* 3. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2013

[4] KMA/M2 Matematika 2: Přednáška č. 23 - 24. E-learningový portál Moodle. [online]. [cit. 2016-03-06]
Dostupné na: http://elearning-math.upol.cz/course/view.php?id=178

[5] MS2 Matematika 2: 3. Fourierovy řady. [online]. [cit. 2016-03-24]
Dostupné na: http://trial.kma.zcu.cz/main.php?Obsah=0000000000&podObsah=3.

[6] Aplikace řad: Fourierova řada a frekvence. [online]. [cit. 2016-05-03]
Dostupné na: http://math.feld.cvut.cz/mt/txte/3/txc3ea3h.htm