UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Gamma funkce a její aplikace

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí diplomové práce: **Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Bc. Barbora Dohnalová**
Studijní program: N1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Aplikace matematiky v ekonomii
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2016

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Bc. Barbora Dohnalová

Název práce: Gamma funkce a její aplikace

Typ práce: Diplomová práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2016

Abstrakt: Funkce gamma je speciální funkcí definovanou pomocí neurčitého integrálu. Práce se zaměřuje na různé definice a vlastnosti funkce gamma a využití v integrálním počtu a statistice.

Klíčová slova: gamma, funkce, euler, beta, rozdělení, integrál, faktoriál, interpolace

Počet stran: 71

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Bc. Barbora Dohnalová

Title: Gamma function and its applications

Type of thesis: Diploma thesis

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.

The year of presentation: 2016

Abstract: Gamma function is a special function which is defined by improper integral. This thesis deals with various definitions and characteristics of gamma function and its applications in the theory of integration and statistics.

Key words: gamma, function, euler, beta, distribution, integral, factorial, interpolation

Number of pages: 71

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením Mgr. Pavly Kouřilové, Ph.D., a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala své vedoucí Mgr. Pavle Kouřilové, Ph.D. za její rady a poznatky, bez nichž by práce nemohla vzniknout. Děkuji také všem mým blízkým, kteří mě při psaní práce podporovali.

Úvod

Tématem diplomové práce je funkce gamma a její aplikace. Funkce gamma se odlišuje od běžných funkcí již svou definicí, neboť je definována pomocí neurčitého integrálu.

Obsahem práce je stručné seznámení se s historií funkce gamma. Funkce gamma byla definována při zkoumání interpolace faktoriálu, což byl úkol, na němž se podíleli výborní matematikové tehdejší doby v čele s Leonhardem Eulerem. Následně se v práci zaměříme na definici a existenci funkce gamma, několik alternativních definic dané funkce a popis jejích vlastností.

Hlavním cílem je ukázat využití funkce gamma v různých odvětvích matematiky, ať už se jedná o teorii integrálního počtu, ve které se funkce gamma hojně nalézá, nebo o statistiku, v níž nalezneme několik spojitých rozdělení, jenž mají s funkcí gamma souvislost, která není obecně známá.

Kapitola 1

Historie a vznik funkce gamma

V úvodní kapitole si stručně nastíníme historii funkce gamma. Historie této funkce vychází z interpolace faktoriálu, na které se podíleli přední matematici tehdejší doby Leonhard Euler, Christian Goldbach a Adrien-Marie Legendre.

V této kapitole byly využity zdroje [1], [2],[3], [4], [5], [6], [7].

Vznik gamma funkce se připisuje nejslavnějšímu matematikovi 18. století, Leonhardu Eulerovi (1707 – 1783). Tehdy pouze 22letý švýcarský matematik působící na ruské akademii věd v Petrohradu ji definoval během vzájemné korespondence s Christianem Goldbachem (1690 – 1764), německým právníkem a vědcem, stýkajícím se s předními mysliteli tehdejší doby při své práci v Moskvě.

V 18. století byla mezi vědci populárním tématem teorie interpolace. Christian Goldbach uvažoval posloupnost faktoriálů přirozených čísel $\{1!,\ 2!,\ 3!,\ 4!,\ 5!,\ \ldots\}$, tedy $\{1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,\ \ldots\}$, a snažil se nalézt funkci, která by dala smysl i hodnotám, které nejsou z oboru přirozených čísel.

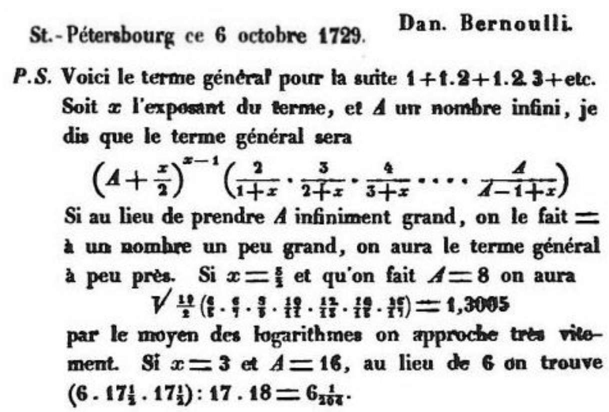
Interpolací faktoriálu se zabýval také Daniel Bernoulli, švýcarský fyzik a matematik, jenž proslul zejména jako zakladatel hydrodynamiky. V dopise datovaném 6. října 1729 Christianu Goldbachu navrhl Bernoulli Goldbachovi následující výraz, jenž mu prezentoval jako výsledek interpolace pro faktoriál jakéhokoliv $x > 0$, kde přesnost výsledku dle Bernoulliho rostla s použitím větší celočíselné hodnoty A

$$x! = \left(A + \frac{x}{2}\right)^{x-1} \left(\frac{2}{1+x} \cdot \frac{3}{2+x} \cdot \frac{4}{3+x} \cdots \frac{A}{A-1+x}\right). \tag{1.1}$$

Aproximaci faktoriálu pak formuloval pomocí limity pro $n \to +\infty$, kde místo čísla A dosadil $n+1$

$$x! = \lim_{n \to +\infty} \left(n + 1 + \frac{x}{2}\right)^{x-1} \prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i+x},\ x > 0.$$

Pro $x = \frac{3}{2}$ a $A = 8$ dostal Daniel Bernoulli přibližnou hodnotu $\frac{3}{2}! \doteq 1,329$ a pro $x = 3$ a $A = 16$ jeho formule dávala výsledek $3! \doteq 6,0049$ namísto celého čísla 6. S těmito výsledky ukončil Bernoulli s Goldbachem svou korespondenci.


St.-Pétersbourg ce 6 octobre 1729. **Dan. Bernoulli.**

P.S. Voici le terme général pour la suite $1 + 1.2 + 1.2.3 +$ etc. Soit x l'exposant du terme, et A un nombre infini, je dis que le terme général sera

$$\left(A + \frac{x}{2}\right)^{x-1} \left(\frac{2}{1+x} \cdot \frac{3}{2+x} \cdot \frac{4}{3+x} \cdots \frac{A}{A-1+x}\right)$$

Si au lieu de prendre A infiniment grand, on le fait $=$ à un nombre un peu grand, on aura le terme général à peu près. Si $x = \frac{3}{2}$ et qu'on fait $A = 8$ on aura

$$\sqrt{\tfrac{19}{2}} \left(\tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{10}{11} \cdot \tfrac{12}{13} \cdot \tfrac{14}{15} \cdot \tfrac{16}{17}\right) = 1,3005$$

par le moyen des logarithmes on approche très vitement. Si $x = 3$ et $A = 16$, au lieu de 6 on trouve $(6 \,.\, 17\tfrac{1}{2} \,.\, 17\tfrac{1}{2}) : 17 \,.\, 18 = 6\tfrac{1}{204}$.

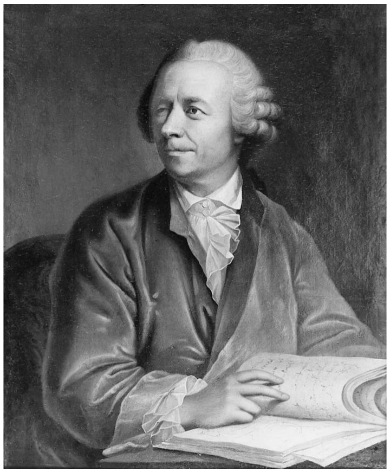
Obrázek 1.1: Dopis Bernoulliho Goldbachovi [2]

Euler se velmi často potkával s Danielem Bernoullim, a tak věděl mnoho o probíhající diskuzi nad interpolací faktoriálů. Povzbuzen Danielem Bernoullim se Leonhard Euler odhodlal napsat Christianu Goldbachovi dne 13. října 1729 dopis se svým názorem. Euler svůj dopis uvedl vztahem nazvaným "terminum generalem", ve kterém navrhl zapsat m-tý člen posloupnosti $\{1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,\ \ldots\}$ následujícím vztahem pro $m \in \mathbb{R}$

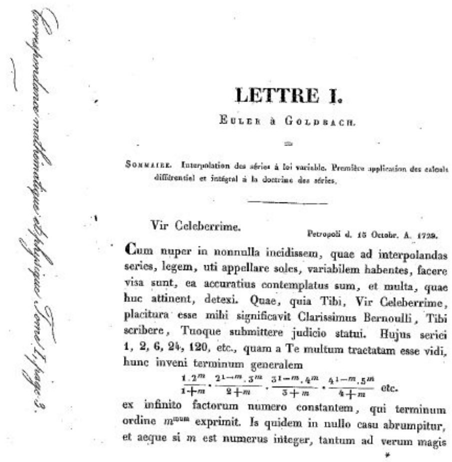
$$m! = \frac{1 \cdot 2^m}{1+m} \cdot \frac{2^{1-m} \cdot 3^m}{2+m} \cdot \frac{3^{1-m} \cdot 4^m}{3+m} \cdots \tag{1.2}$$

Pro n-tou aproximaci dostáváme

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1)^m}{(1+m) \cdot (2+m) \cdot (3+m) \cdots (n+m)}. \tag{1.3}$$



Obrázek 1.2: Leonhard Euler [4]



Correspondance mathématique et physique Tome I, page 3.

LETTRE I.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Interpolation des séries à loi variable. Première application des calculs différentiel et intégral à la doctrine des séries.

Vir Celeberrime.

Petropoli d. 13 Octobr. A. 1729.

Cum nuper in nonnulla incidissem, quae ad interpolandas series, legem, uti appellare soles, variabilem habentes, facere visa sunt, ea accuratius contemplatus sum, et multa, quae huc attinent, detexi. Quae, quia Tibi, Vir Celeberrime, placitura esse mihi significavit Clarissimus Bernoulli, Tibi scribere, Tuoque submittere judicio statui. Hujus seriei 1, 2, 6, 24, 120, etc., quam a Te multum tractatam esse vidi, hunc inveni terminum generalem

$$\frac{1.2^m}{1+m} \cdot \frac{2^{1-m}.3^m}{2+m} \cdot \frac{3^{1-m}.4^m}{3+m} \cdot \frac{4^{1-m}.5^m}{4+m} \text{ etc.}$$

ex infinito factorum numero constantem, qui terminum ordine m^{tum} exprimit. Is quidem in nullo casu abrumpitur, et aeque si m est numerus integer, tantum ad verum magis

Obrázek 1.3: Dopis Eulera Goldbachovi [5]

Euler tvrdil, že se vzrůstajícím n se výraz (1.3) blíží hodnotě faktoriálu m. Bylo také dokázáno, že Bernoulliho formule (1.1) a Eulerova formule (1.2) dosahují shodných výsledků.

Euler byl přesvědčen, že jeho výraz (1.2) je vhodný pro interpolaci faktoriálů zlomků, respektive pro interpolaci všech hodnot, které nejsou z oboru přirozených čísel, ale zároveň byl odhodlán nalézt metodu, která by poskytla přesné výsledky. Do své formule (1.2) dosadil $m = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdots} \tag{1.4}$$

Tento výraz si Euler ihned spojil s dřívějším výsledkem Johna Wallise, který zjistil, že obsah kruhu s jednotkovým poloměrem může být vyjádřen jako nekonečný součin

$$\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdots \tag{1.5}$$

Euler usoudil, že výraz (1.4) je roven odmocnině obsahu kruhu s jednotkovým poloměrem a učinil závěr, že $(\frac{1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Toto byl přelomový okamžik, který Eulerovi vyvrátil jeho původní myšlenku, že obecný výraz pro posloupnost faktoriálu bude dán v algebraickém či exponenciálním tvaru. Euler se rozhodl, že se pokusí vyjádřit svou formuli (1.2) v integrálním tvaru. Vycházel opět z práce Johna Wallise, který při počítání obsahu kruhu pracoval s integrálem $\int_0^1 x^p \cdot (1-x)^q \, dx$, $p > 0$, $q > 0$. Euler po vzoru Wallise uvažoval integrál $\int_0^1 x^e \cdot (1-x)^n \, dx$, kde $n \in \mathbb{R}$ a představovalo pro něj číslo, jehož faktoriál hledáme, a e bylo libovolné číslo (v 18. století e reprezentovalo jakýkoliv exponent, nikoli konstantu, která je s tímto písmenem v dnešní matematice spojena). Tento integrál byl později Legendrem nazván Eulerovým integrálem prvního druhu, neboli také funkcí beta, pokud jej modifikujeme do tvaru

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1} \cdot (1-t)^{b-1} \, dt, \; a, b > 0.$$

Euler rozšířil $(1-x)^n$ pomocí binomické věty a zjistil, že

$$\int_0^1 x^e \cdot (1-x)^n \, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{(e+1) \cdot (e+2) \cdots (e+n+1)}.$$

Vynásobil obě strany výrazem $(e+n+1)$

$$(e+n+1) \cdot \int_0^1 x^e \cdot (1-x)^n \, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{(e+1) \cdot (e+2) \cdots (e+n)}.$$

Z pravé strany se pak chystal vyjádřit čitatel ve formě integrálu, tedy izolovat vztah pro faktoriál. Použil na to svůj vlastní trik, když substituoval $e = \frac{f}{g}$, kde f a g jsou reálné konstanty a $g \neq 0$. Rovnice se tímto po několika úpravách změnila na

$$\frac{f + (n+1) \cdot g}{g^{n+1}} \cdot \int_0^1 x^{\frac{f}{g}} \cdot (1-x)^n \, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{(f+g) \cdots (f + n \cdot g)}. \tag{1.6}$$

Všiml si, že pokud by položil v rovnici (1.6) $f = 1$ a $g = 0$, na pravé straně by pak zbyl pouze faktoriál a nalevo integrální zápis. Po dosazení zmiňovaného f a g ale obdržel nalevo neurčitý výraz

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{0}} \cdot (1-x)^n}{0^{n+1}} \, dx.$$

Zde využil další trik, který není z hlediska značení úplně korektní, ale využijeme jej tak, jak to udělal on. Zvolil substituci

$$x = x^{\frac{g}{f+g}}$$

Potom tedy

$$dx = \frac{g}{f+g} \cdot x^{-\frac{f}{f+g}}\, dx$$

Levou stranu vztahu pak přepsal

$$\frac{f+(n+1)\cdot g}{g^{n+1}} \cdot \int x^{\frac{f}{g}} \cdot (1-x)^n \, dx =$$

$$= \frac{f+(n+1)\cdot g}{g^{n+1}} \cdot \int x^{\frac{f}{f+g}} \cdot (1-x^{\frac{g}{f+g}})^n \cdot \frac{g}{f+g} \cdot x^{-\frac{f}{f+g}}\, dx =$$

$$= \frac{f+(n+1)\cdot g}{g^{n+1}} \cdot \int (1-x^{\frac{g}{f+g}})^n \cdot \frac{g}{f+g}\, dx =$$

$$= \frac{f+(n+1)\cdot g}{(f+g)^{n+1}} \cdot \int \left(\frac{1-x^{\frac{g}{f+g}}}{g/(f+g)}\right)^n dx.$$

Nyní dosadil uvažované $f=1$ a $g=0$ a dostal

$$n! = \int \frac{(1-x^0)^n}{0^n}\, dx. \tag{1.7}$$

Aby Euler nepracoval se jmenovatelem rovným hodnotě 0, uvažoval místo nuly nějakou obecnou proměnnou z. Opět se nejedná o korektní krok, ale kopíruje Eulerův postup. Integrand $\frac{(1-x^0)^n}{0^n}$ si zapsal jako $\frac{(1-x^z)^n}{z^n}$. Pro limitu tohoto výrazu bez mocniny n platí za pomoci L'Hospitalova pravidla

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-x^z}{z} = -x^z \cdot \ln x. \tag{1.8}$$

Poté se vrátil zpět k hodnotě $z=0$, kterou dosadil do (1.8) a integrand nabyl tvaru $-\ln x$. Dosazením do (1.7) dostal vytoužený vztah

$$n! = \int_0^1 (-\ln x)^n \, dx. \tag{1.9}$$

Eulerův integrál nebyl v té době chápán při hledání faktoriálu libovolného čísla jako funkce, ale spíše jako nástroj k reprezentaci faktoriálu pro $n \notin \mathbb{N}$.

Francouzský matematik Adrien-Marie Legendre poté přišel s nápadem, jak Eulerův integrál zadefinovat pomocí funkce, kterou nazval gamma funkcí

$$\Gamma(a) = (a-1)! = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{a-1} dx,\ a > 0.$$

Pokud užijeme substituci $t = \ln \frac{1}{x}$ dostaneme definici funkce gamma ve známém tvaru

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} \cdot e^{-t}\, dt,\ a > 0. \tag{1.10}$$

Legendre použil svou definici (1.10), aby ukázal, že $\Gamma(1) = 1$, tedy $0! = 1$ a dokázal funkcionální rovnici

$$\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a) = a!,\ a > 0. \tag{1.11}$$

Opakovaným užitím této funkcionální rovnice, která je zároveň rekurentním vzorcem, obdržel Legendre hodnoty funkce gamma nejen pro přirozená čísla. Pokud do vztahu (1.11) dosadíme hodnoty 0 a -1, dostaneme následující výsledky $\Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} = \infty$, $\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{1} = -\infty$. Jelikož je vzorec (1.11) rekurentní, platí pro nekladné celé číslo a

$$\lim_{a \to \infty} \Gamma(a) = \pm\infty.$$

Funkce gamma tak rozšířila faktoriál na všechna reálná čísla kromě nekladných celých čísel.

Po téměř dvou set letech zkoumání zjistili v roce 1922 matematikové Harald Bohr, Johannes Mollerup a Emil Artin, že funkce gamma je jediná, která odpovídá požadavkům k rozšíření faktoriálu na čísla, jež nejsou pouze přirozená, gamma funkce se dá zapsat pomocí rekurzivního vzorce a je logaritmicky konvexní funkcí. Toto tvrzení je uvedeno ve větě 2 v druhé kapitole. Zároveň přišli na to, že pro ještě lepší porozumění funkci gamma je vhodné pracovat s ní v množině komplexních čísel.

Kapitola 2

Definice a vlastnosti funkce gamma

Ve druhé kapitole si zadefinujeme funkci gamma několika způsoby, seznámíme se s nejznámějšími vlastnostmi této funkce, uvedeme si tabulku hodnot a graf funkce gamma a následně se stručně zmíníme o funkci beta, která je s funkcí gamma neodmyslitelně spojena.

V této kapitole byly využity zdroje [1],[8], [9],[11],[12], [14], [16], [17], [21] a [22].

2.1. Definice a existence funkce gamma

Tato podkapitola se věnuje různým definicím funkce gamma a důkazu existence funkce gamma na kladné poloose.

Definice 1. *Gamma funkce*, někdy též nazývána jako Eulerův integrál druhého druhu, je definována jako nevlastní integrál tvaru

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt,\ \forall x \in (0, +\infty).$$

Poznámka 1. Oprávněnost definice 1 je dokázána ve větě 1 níže. Platí tedy, že pro všechna $x \in (0, +\infty)$ je integrál definovaný jako gamma funkce konvergentní.

Vlastnost 1. Při využití substituce $y = e^{-t}$ dostaneme ekvivalentní definici funkce gamma ve tvaru

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\ln(y))^{x-1}\, dy,\ \forall x \in (0, +\infty).$$

Důkaz.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt = \begin{vmatrix} y = e^{-t}, t = -\ln y \\ dt = -\frac{1}{y}\, dy \end{vmatrix} =$$

$$= \int_1^0 (-\ln y)^{x-1} \cdot y \cdot \frac{-1}{y}\, dy = \int_0^1 (-\ln y)^{x-1}\, dy.$$

$\square$

Vlastnost 2. Při využití substituce $z = \ln(t)$ dostaneme další ekvivalentní definici funkce gamma ve tvaru

$$\Gamma(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{x \cdot z} \cdot e^{-e^z}\, dz,\ \forall x \in (0, +\infty).$$

Důkaz.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt = \begin{vmatrix} z = \ln(t) \\ t = e^z \\ dt = e^z\, dz \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty e^{z^{x-1}} \cdot e^{-e^z} \cdot e^z\, dz = \int_{-\infty}^\infty e^{x \cdot z} \cdot e^{-e^z}\, dz.$$

$\square$

Věta 1. *Pro každé $x > 0$ je nevlastní integrál*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt$$

konvergentní.

Pro důkaz této velmi důležité věty je potřeba vyslovit několik pomocných lemmat.

Lemma 1. *Nechť $a < b$, kde b je reálné číslo nebo $b = \infty$. Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité a nezáporné funkce na intervalu $[a, b)$ a $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b)$. Potom platí*

1. *Jestliže $\int_a^b g(x)\, dx$ konverguje, pak konverguje také $\int_a^b f(x)\, dx$.*

2. Jestliže $\int_a^b f(x)\,dx$ diverguje, pak diverguje také $\int_a^b g(x)\,dx$.

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [11]. $\square$

Lemma 2. *Nevlastní integrál $\int_0^\infty e^{-s\cdot t}\,dt$ konverguje pro každé $s > 0$.*

Důkaz. Vypočteme si

$$\int_0^N e^{-s\cdot t}\,dt = \left[-\frac{e^{-s\cdot t}}{s}\right]_0^N = -\frac{e^{-s\cdot N}-1}{s}$$

Dále platí

$$\int_0^\infty e^{-s\cdot t}\,dt = \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}\,dt = -\lim_{N\to\infty}\frac{e^{-s\cdot N}-1}{s} = \frac{1}{s}. \tag{2.1}$$

Integrál je tedy pro každé $s > 0$ konvergentní. $\square$

Lemma 3. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom platí*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^{n-1}}{e^{\frac{t}{2}}} = 0. \tag{2.2}$$

Důkaz. Z L'Hospitalova pravidla plyne, že

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^{n-1}}{e^{\frac{t}{2}}} = \lim_{t\to\infty}\frac{(n-1)\cdot t^{n-2}}{\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{t}{2}}}.$$

Protože t^{n-1} je mocninná funkce řádu $(n-1)$, známe její n-tou derivaci, tedy víme, že

$$\frac{d^n}{dt^n}t^{n-1} = 0.$$

Poté ihned vidíme, že platí

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^{n-1}}{e^{\frac{t}{2}}} = \lim_{t\to\infty}\frac{0}{(\frac{1}{2})^n\cdot e^{\frac{t}{2}}} = 0.$$

$\square$

Nyní přistoupíme již k důkazu věty 1. Naším úkolem je dokázat konvergenci integrálu $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt$ pro všechna $x \in (0, \infty)$.

Důkaz Věty 1: Důkaz si rozdělíme na tři podsekce.

1. Případ, kdy $x = 1$.

   Chceme dokázat, že $\int_0^\infty e^{-t}\, dt$ je konvergentní. To plyne ihned ze vztahu (2.1), pokud za s dosadíme hodnotu 1. Dostaneme $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$.

2. Případ, kdy $x > 1$.

   Snažíme se dokázat konvergenci integrálu $\int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt$ pro hodnoty $x > 1$. Důkaz této podsekce vychází ze vztahu dokázaného v lemmatu (2.2), který říká

   $$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{n-1}}{e^{\frac{t}{2}}} = 0.$$

   Definice vlastní limity v nevlastním bodě nám říká, že funkce $f(x)$ má v nevlastním bodě limitu A, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x > \delta$ platí $|f(x) - A| < \epsilon$. V našem případě zvolíme $\epsilon = 1$ pro které existuje takové δ, že pro všechna $t > \delta$ platí

   $$\left| \frac{t^{n-1}}{e^{\frac{t}{2}}} \right| < \epsilon = 1.$$

   Z toho vyplývá, že $\forall t > \delta$ dostáváme nerovnost $0 \leq t^{n-1} < e^{\frac{t}{2}}$. Po vynásobení této nerovnosti e^{-t} dostaneme

   $$0 \leq t^{n-1} \cdot e^{-t} < e^{-\frac{t}{2}},\ \forall t > \delta.$$

   Z lemmatu 2 víme, že integrál $\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}}\, dt$ konverguje, dle lemmatu 1 integrál $\int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-t}\, dt$ konverguje také, v tomto případě $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$. Nechť $\lfloor x \rfloor$ je celá část čísla x. Celá část splňuje vztah $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Pro $t \geq 0$ poté dostaneme

   $$0 \leq t^{x-1} \cdot e^{-t} < t^{\lfloor x \rfloor} \cdot e^{-t}.$$

Z předchozího víme, že $\int_0^\infty t^{\lfloor x \rfloor} \cdot e^{-t}\, dt$ konverguje, integrál $\int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt$ konverguje také, v tomto případě $x \in \mathbb{R},\ \ x > 1$.

3. Případ, kdy $0 < x < 1$.

   V případě, kdy $0 < x < 1$, platí pro $t \geq 1$ nerovnost

$$\frac{1}{e^{\frac{t}{2}}} \leq \frac{t^{x-1}}{e^{\frac{t}{2}}} \leq \frac{t}{e^{\frac{t}{2}}}.$$

   Víme, že

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^{x-1}}{e^{\frac{t}{2}}} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{e^{\frac{t}{2}}} = 0.$$

   Dle věty o třech limitách, která říká, že jestliže dvě funkce $f(x)$ a $h(x)$ mají v bodě a tutéž limitu L

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

   pak funkce $g(x)$, taková, že $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ na nějakém okolí bodu a, má v bodě a také limitu L

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

   S ohledem na předchozí nerovnost snadno zjistíme, že

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^{x-1}}{e^{\frac{t}{2}}} = 0,\ \forall x \in (0, 1).$$

   Odtud a z podsekce důkazu pro $x > 1$ plyne, že

$$0 \leq t^{x-1} \cdot e^{-t} \leq e^{-\frac{t}{2}},\ \forall t \geq 1,\ \forall x \in (0, 1).$$

   Z lemmatu 2 plyne, že integrál $\int_1^\infty e^{-t/2}\, dt$ je konvergentní. Z konvergence tohoto integrálu a z předchozí nerovnosti nám dle lemmatu 1 plyne také konvergence integrálu $\int_1^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt$ pro $0 < x < 1$. Nyní nám zbývá ověřit konvergenci $\int_0^1 t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt$.

Ze znalosti exponenciální funkce e^{-t} pro $t \in [0,1]$ plyne nerovnost

$$0 < e^{-t} \leq e.$$

Po vynásobení této nerovnosti t^{x-1} dostaneme nerovnost

$$0 < t^{x-1} \cdot e^{-t} \leq t^{x-1} \cdot e.$$

Pokud konverguje integrál $\int_0^1 t^{x-1} \cdot e \ dt$, konverguje dle lemmatu 1 také $\int_0^1 t^{x-1} \cdot e^{-t} \, dt$. Integrál $\int_0^1 t^{x-1} \, dt$ je nevlastním integrálem druhého druhu a má hodnotu rovnu následující limitě

$$\int_0^1 t^{x-1} \, dt = \lim_{b \to 0} \int_b^1 t^{x-1} \, dt =$$

$$\lim_{b \to 0} \left[\frac{t^x}{x} \right]_b^1 = \lim_{b \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{b^x}{x} \right) = \frac{1}{x}.$$

Tímto jsme dokázali konvergenci integrálu $\int_0^1 t^{x-1} \cdot e^{-t} \, dt, \ \forall x \in (0, +\infty)$, čímž je náš důkaz hotov. $\square$

2.2. Vlastnosti funkce gamma

Tato podkapitola se věnuje nejznámějším vlastnostem týkající se funkce gamma.

Vlastnost 3. Pro funkci gamma platí následující funkcionální rovnice

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x), \ \forall x \in (0, +\infty). \tag{2.3}$$

Důkaz. V důkazu využijeme integrační metody per partes. Meze se integrací nezmění.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x \cdot e^{-t} \, dt = \begin{vmatrix} u = t^x, \, du = x \cdot t^{x-1} \\ dv = e^{-t}, v = -e^{-t} \end{vmatrix} =$$

$$= \left[t^x \cdot (-e^{-t}) \right]_0^\infty - \int_0^\infty x \cdot t^{x-1} \cdot (-e^{-t}) =$$

$$= \left[t^x \cdot (-e^{-t})\right]_0^\infty + x \cdot \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} =$$

$$= -\left[t^x \cdot e^{-t}\right]_0^\infty + x \cdot \Gamma(x) = x \cdot \Gamma(x),\ \forall x \in (0, +\infty).$$

□

Vlastnost 4. Pro funkci gamma platí následující vztah

$$\Gamma(x) = (x-1)!,\ \forall x \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. S využitím vlastnosti (2.3) platí následující

$$\Gamma(x) = (x-1) \cdot \Gamma(x-1) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot \Gamma(x-2) = \cdots =$$

$$= (x-1) \cdot (x-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1).$$

Přičemž

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 1.$$

Poté tedy

$$\Gamma(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdots 2 \cdot 1 = (x-1)!,\ \forall x \in \mathbb{N}.$$

□

Vlastnost 5. Pro funkci gamma platí vztah

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1) \cdot (x+n-2) \cdots (x+1) \cdot x \cdot \Gamma(x), \forall x \in (0, +\infty), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. Pro $n = 1$ dostáváme již známý a dokázaný vztah

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x),\ \forall x \in (0, +\infty).$$

Pro $n \geq 1$ dostaneme s využitím a opakováním tohoto vztahu řešení i pro obecný tvar

$$\Gamma(x+n) = \Gamma((x+n-1)+1) = (x+n-1) \cdot \Gamma(x+n-1) =$$

$$= (x+n-1) \cdot \Gamma((x+n-2)+1) = (x+n-1) \cdot (x+n-2) \cdot \Gamma(x+n-2) =$$

$$= \cdots = (x+n-1) \cdot (x+n-2) \cdots (x+2) \cdot (x+1) \cdot \Gamma(x+1) =$$

$$= (x+n-1) \cdot (x+n-2) \cdots (x+1) \cdot x \cdot \Gamma(x),\ \forall x \in (0, +\infty),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Lemma 4. *Mějme prostor s mírou (X, Σ, μ). Nechť funkce f a g jsou μ-měřitelné na X a nechť pro $p,\ q \in [1, \infty)$ platí, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Jestliže $\Big(\int_X |f|^p \, d\mu \Big)^{(1/p)} < \infty$ a $\Big(\int_X |g|^q \, d\mu \Big)^{(1/q)} < \infty$, pak existuje také integrál $\int_X f \cdot g \, d\mu$ a platí*

$$\int_X |f \cdot g| \, d\mu \leq \Big(\int_X |f|^p \, d\mu \Big)^{(1/p)} \cdot \Big(\int_X |g|^q \, d\mu \Big)^{(1/q)}. \tag{2.4}$$

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v [22]. □

Poznámka 2. Nerovnost (2.4) se nazývá Hölderovou nerovností v integrálním tvaru.

Definice 2. Nechť je funkce f definovaná na $I \subseteq \mathbb{R}$. Tuto funkci nazveme *konvexní funkcí*, pokud pro libovolnou dvojici bodů $x, y \in I$ a libovolné $\lambda \in [0, 1]$ platí

$$f(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y) \leq \lambda \cdot f(x) + (1 - \lambda) \cdot f(y).$$

Definice 3. Nechť je funkce f definovaná na $I \subseteq \mathbb{R}_+$. Tuto funkci nazveme *logaritmicky konvexní funkcí*, pokud pro libovolnou dvojici bodů $x, y \in I$ a libovolné $\lambda \in [0, 1]$ platí

$$f(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y) \leq (f(x))^{\lambda} \cdot (f(y))^{1-\lambda}.$$

Vlastnost 6. Složená funkce $\ln(\Gamma(x))$ je konvexní na intervalu $(0, \infty)$.

Důkaz. V důkazu se využívá Hölderovy nerovnosti v integrálním tvaru (2.4). Na počátku zvolíme $p,\ q \geq 1$ tak, aby platil předpoklad pro Hölderovu nerovnost, tedy $(1/p) + (1/q) = 1$. Pro všechna $x,\ y \in (0, \infty)$ platí dle Hölderovy nerovnosti (2.4) následující

$$\Gamma\Big(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\Big) = \int_0^\infty t^{(x/p)+(y/q)-1} \cdot e^{-t} \, dt =$$

$$= \int_0^\infty \Big(t^{x-1} \cdot e^{-t}\Big)^{1/p} \cdot \Big(t^{y-1} \cdot e^{-t}\Big)^{1/q} \, dt \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \Big(t^{x-1} \cdot e^{-t} \, dt\Big)^{1/p} \cdot \int_0^\infty \Big(t^{y-1} \cdot e^{-t} \, dt\Big)^{1/q} =$$

$$= \Big(\Gamma(x)\Big)^{1/p} \cdot \Big(\Gamma(y)\Big)^{1/q}.$$

Výsledkem je nerovnost

$$\Gamma\Big(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\Big) \leq \Big(\Gamma(x)\Big)^{1/p} \cdot \Big(\Gamma(y)\Big)^{1/q}.$$

Zvolíme-li za $\lambda = \frac{1}{p}$, pak z definice 4 plyne, že $1 - \lambda = \frac{1}{q}$. S ohledem na znalost přirozené logaritmické funkce, která je na intervalu $(0, \infty)$ rostoucí, můžeme obě strany nerovnice logaritmovat

$$\ln \Gamma(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) \leq \ln \Big((\Gamma(x))^{\lambda} \cdot (\Gamma(y))^{1-\lambda} \Big)$$

$$\ln \Gamma(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) \leq \lambda \cdot \ln \Gamma(x) + (1-y) \cdot \ln \Gamma(y).$$

Tento vztah splňuje definici konvexity 2, čímž je důkaz hotov. □

Další vztah nám pomůže získat představu o chování funkce gamma. V zahraniční literatuře jej často nalezneme pod názvem "The cosecant identity"nebo "Euler's reflection formula"[8].

Vlastnost 7. Platí

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \ \forall x \notin \mathbb{Z}.$$

Důkaz. Důkaz této rovnosti je značně zdlouhavý, proto jej zde nebudeme uvádět celý, využijeme z něj ale některé postupy pro hledání hodnoty funkce gamma v bodě $x = \frac{1}{2}$, která má využití v teorii pravděpodobnosti a statistiky. Celý důkaz lze nalézt v [8]. □

Příklad 1. Dokažte, že $\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}$.

Řešení: Z definice lze psát

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt \cdot \int_0^{\infty} y^{(1-x)-1} \cdot e^{-y}\, dy =$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} \cdot y^{-x} \cdot e^{-y}\, dt\, dy.$$

Jako vhodná substituce se hodí $u = \frac{t}{y}$. Pro pevné y dopočítáme $du = \frac{dt}{y}$. Po dosazení do vztahu dostáváme

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \int_{y=0}^{\infty} e^{-y} \cdot \Big[\int_{u=0}^{\infty} e^{-u \cdot y} \cdot u^{x-1}\, du \Big]\, dy.$$

Pro záměnu těchto dvou integrálů je třeba vzít v potaz, že integrální reprezentace funkce gamma je definována pro kladná x. V našem případě tedy musí platit, že $x > 0 \wedge (1-x) > 0$, z čehož vyplývá, že $x \in (0,1)$. Poté lze psát

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \int_{0}^{\infty} u^{x-1} \cdot \Big[\int_{0}^{\infty} e^{-(u+1)y}\, dy \Big]\, du =$$

$$= \int_{0}^{\infty} u^{x-1} \cdot \Big[\Big[-\frac{e^{-(u+1)\cdot y}}{u+1} \Big]_0^{\infty} \Big]\, du =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{u^{x-1}}{u+1}\, du. \tag{2.5}$$

Pro $x = \frac{1}{2}$ dosazením do (2.5) dostáváme

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) \cdot \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_{0}^{\infty} \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{u+1}\, du.$$

Vhodná substituce je tvaru $u = z^2$, $du = 2z\, dz$, integrační meze se nezmění. Po dosazení dostáváme

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) \cdot \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+z^2} \cdot 2z\, dz =$$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+z^2}\, dz = 2 \cdot [\arctan z]_0^{\infty} = \pi.$$

Tímto jsme odvodili hodnotu $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Vlastnost 8. *Gaussův integrál:* Platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Důkaz. Důkaz je založen na druhé mocnině vztahu pro Gaussův integrál a následné substituci do polárních souřadnic.

$$J^2 = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\Big)^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Po provedení substituce do polárních souřadnic dostáváme

$$J^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi \cdot \int_0^{\infty} r \cdot e^{-r^2}\,dr.$$

Nyní uděláme substituci do proměnné $s = -r^2$, pak $ds = -2r\,dr$ a platí

$$J^2 = 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}\cdot e^s\,ds = \pi \cdot \int_{-\infty}^{0} e^s\,ds = \pi.$$

Po odmocnění je důkaz hotov a ověřili jsme, že platí $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. □

Příklad 2. Ukažte souvislost mezi Gaussovým integrálem a funkcí gamma.

Řešení: Užijeme substituci $x = \sqrt{t}$ a toho, že funkce e^{-x^2} je sudá. Po zavedení substituce platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\cdot\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\cdot\int_0^{\infty} e^{-t}\cdot t^{-\frac{1}{2}}\,dx = \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}.$$

Nyní si uvedeme vlastnost známou pod pojmem Stirlingova formule, která nám poslouží k vyšetření asymptotického chování faktoriálu, potažmo funkce gamma.

Vlastnost 9. *Stirlingova formule:* Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n \cdot e^{-n}} = 1.$$

Důkaz. Možností jak dokázat platnost Stirlingovy formule je hned několik. My si ukážeme způsob, který využívá definice a vlastností funkce gamma.

Z výše uvedeného víme, že platí $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^n \, dt$. Provedeme substituci do proměnné s tvaru $t = n + s \cdot \sqrt{2n}$, poté $dt = \sqrt{2n}\, ds$. Integrační meze se změní na $-\sqrt{\frac{n}{2}}$ a ∞.
Po provedení substituce dostáváme

$$n! = \int_{-\sqrt{n/2}}^{\infty} e^{-n-s\cdot\sqrt{2n}} \cdot (n + s\sqrt{2n})^n \cdot \sqrt{2n}\, ds =$$

$$= \sqrt{2n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot \int_{-\sqrt{n/2}}^{\infty} e^{-s\cdot\sqrt{2n}} \cdot \left(1 + s \cdot \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n ds$$

Integrand zapíšeme jako exponencielu

$$n! = \sqrt{2n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot \int_{-\sqrt{n/2}}^{\infty} \exp\Big(- s \cdot \sqrt{2n} + n \cdot \ln\Big(1 + s \cdot \sqrt{\frac{2}{n}}\Big)\Big)\, ds.$$

Zavedeme novou funkci $q(u) = 2u^{-2} \cdot (u - \ln(1+u))$ a spojitě dodefinujeme $q(0) = 1$. Poté lze psát

$$n! = \sqrt{2n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot \int_{-\sqrt{n/2}}^{\infty} \exp\Big(- s^2 \cdot q(s\sqrt{2/n})\Big)\, ds.$$

Rovnost následujících limit platí právě tehdy, když existuje alespoň jedna z nich. Snažíme se tedy nalézt limitu na pravé straně.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2n} \cdot n^n \cdot e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \int_{-\sqrt{n/2}}^{\infty} exp\Big(- s^2 \cdot q(s\sqrt{2/n})\Big)\, ds.$$

Abychom se vyhnuli integrování přes obor závisející na proměnné, zavedeme charakteristickou funkci $\chi_{(-\sqrt{n/2},\infty)}$ pro daný interval a integrál na pravé straně upravíme do tvaru

$$\int_{-\infty}^{\infty} exp\Big(- s^2 \cdot q(s\sqrt{2/n}) \cdot \chi_{(-\sqrt{n/2},\infty)}(s)\Big) \cdot \chi_{(-\sqrt{n/2},\infty)}(s)\, ds.$$

Funkce q je na svém definičním oboru $(-1, \infty)$ klesající a pro hodnoty $s < 0$ se s rostoucím n argumenty funkce q blíží k nule zleva a celý integrand tedy roste. Pro integraci na oboru reálných záporných čísel lze užít Leviho větu o záměně limity a integrálu [17] Pro hodnoty $s > 0$ se s rostoucím n argumenty funkce q naproti tomu blíží k nule zprava a celý integrand klesá. Určujeme zde limitu pro n jdoucí k nekonečnu, lze tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že platí nerovnost $0 < k < n$ pro k pevné. Tímto dostaneme integrovatelnou majorantu $\exp(-s^2 \cdot q(s\sqrt{2/n}))$. Dle Lebesgueovy věty o limitě majorizovaného integrálu [17] lze zaměnit limitu a integrál i na množině kladných reálných čísel. S využitím znalostí o záměně limity a integrálu a z Gaussova integrálu plyne

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\sqrt{n/2}}^{\infty} exp\Big(- s^2 \cdot q(s\sqrt{2/n})\Big)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} exp(-s^2)\, ds = \sqrt{\pi}.$$

Tímto jsme dokázali platnost Stirlingovy formule.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2n} \cdot n^n \cdot e^{-n}} = \sqrt{\pi}.$$

□

Následující věty a jejich důsledek vedou k zavedení funkce gamma pomocí méně náročné alternativní definice ve formě nekonečného součinu.

Věta 2. *Existuje právě jedna funkce f definovaná na intervalu $(0, \infty)$, která vyhovuje funkcionální rovnici $f(x+1) = x \cdot f(x)$, podmínce $f(1) = 1$ a je logaritmicky konvexní na intervalu $(0, \infty)$.*

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [11]. □

Věta 3. *Nechť f je libovolná funkce splňující předpoklady věty 2. Potom pro každé $x \in (0, \infty)$ existuje v $\mathbb{R}$ následující limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = f(x).$$

Důkaz. Důkaz této věty je uveden v [11]. □

Z předchozích vlastností je zřejmé, že funkce gamma splňuje všechny předpoklady věty 2, potažmo věty 3, a tak ji lze vyjádřit ve formě nekonečného součinu.

Důsledek 1.

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},\ \forall x \in (0,\infty).$$

Odvodili jsme několik vlastností, které nám ukazují chování funkce gamma na kladné poloose. Nyní si ukážeme, jak definovat funkci gamma na záporné poloose. Abychom toto dovedli, musíme si zavést několik pojmů z teorie funkce komplexní proměnné.

Definice 4. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Řekneme, že komplexní funkce f je *holomorfní funkcí* na G, jestliže $f'(z)$ existuje ve všech bodech množiny G.

Definice 5. Nechť f je holomorfní funkce v otevřené množině obsahující prstencové okolí $U(z_0,\epsilon) \setminus \{z_0\}$, přičemž $z_0 \in \mathbb{C}$ není v definičním oboru funkce f. Bod z_0 se nazývá *izolovaným singulárním bodem* funkce f neboli singularitou. Řekneme, že z_0 je

- *odstranitelná singularita* funkce f, existuje-li vlastní limita funkce f v bodě z_0,
- *pól* funkce f, je-li $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$,
- *podstatná singularita* funkce f, jestliže $\lim_{z\to z_0} f(z)$ neexistuje.

Definice 6. Nechť

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

je Laurentův rozvoj funkce f v prstencovém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Nechť z_0 je singularita funkce f. Koeficient a_{-1} Laurentovy řady funkce f se středem v bodě z_0 se nazývá *reziduum* funkce f v bodě z_0 a značí se $res_{z_0} f(z)$.

Poznámka 3. Reziduum funkce f v bodě z_0 se obvykle prakticky počítá pomocí limity

$$res_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot f(z).$$

Začneme definicí funkce gamma na pravé polorovině komplexních čísel.

Definice 7. *Funkce gamma* je komplexní funkcí definovanou pro z splňující $Re(z) > 0$ následujícím vztahem

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t}\, dt.$$

Tato definice je jakýmsi zobecněním definice funkce gamma v oboru reálných čísel, neboť platí, že pokud je z reálné, je reálná i hodnota $\Gamma(z)$. U každého integrálu z neomezené funkce na neomezené množině je však potřeba ověřit jeho existenci. Tímto se zde zabývat nebudeme, ale odkážeme se na literaturu, ve které lze dané ověření existence nalézt.

Lemma 5. *Funkce $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t}\, dt$ existuje a je holomorfní pro všechna z, pro s $Re(z) > 0$.*

Důkaz. Důkaz lemmatu nalezneme v [21]. □

Holomorfní funkce v $\mathbb{C}$ je obdobou diferencovatelné funkce v oboru reálných čísel. Tvrzení, že funkce gamma je pro všechna z s kladnou reálnou částí holomorfní, nám říká, že funkce gamma má derivaci ve všech bodech této množiny. Z existence derivace plyne spojitost funkce, takže jsme zjistili, že funkce gamma je na pravé polorovině spojitá. Předpis funkce gamma na levé polorovině nedokážeme vyjádřit v integrálním tvaru, ale pouze v kombinaci součtu nekonečné řady a integrálu. K tomu nám pomůže následující lemma, které ukazuje, jak zapsat funkci gamma na pravé poloose pomocí této kombinace.

Lemma 6. *Funkce gamma je definována následujícím předpisem*

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z+n) \cdot n!} + \int_1^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t}\, dt$$

pro všechna z, pro něž $Re(z) > 0$.

Důkaz. Důkaz tohoto lemmatu lze nalézt v [21]. $\square$

Toto lemma je pro nás velice důležité, neboť jsme díky němu dokázali vyjádřit integrál $\int_0^1 t^{z-1} \cdot e^{-t}\, dt$ pomocí součtu nekonečné řady, díky které budeme později schopni definovat funkci gamma na záporné polorovině. Integrál $\int_1^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t}\, dt$ navíc existuje pro každé $z \in \mathbb{C}$ a definuje nám holomorfní funkci na celém $\mathbb{C}$. Vyvstává před námi tedy přirozená otázka, zda je funkce gamma holomorní a spojitá také na levé polorovině.

Lemma 7. *Funkce*

$$\Gamma(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(z+n)\cdot n!} + \int_1^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t}\, dt$$

je holomorfní v množině $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \cdots\}$*. Body* 0 *,*-1 *,* -2 *, … jsou póly funkce* $\Gamma(z)$ *a pro všechna* $n = 0$ *,*1 *,* 2 *, … je reziduum* $\Gamma(z)$ *dáno vztahem*

$$res_{-n}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Důkaz. Celý důkaz lze nalézt v [21]. My si ukážeme, jak nalézt póly a reziduum. Nechť platí $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$ pro $Re(z) > 0$. (Tato vlastnost neplatí pouze pro $z \in (0, \infty)$, jak je dokázáno v 3, ale také pro všechna z, pro něž $Re(z) > 0$. Důkaz vlastnosti lze najít například v [21]). Budeme vycházet ze vztahu

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z},\ Re(z) > 0. \tag{2.6}$$

Nechť $-1 < Re(z) \leq 0$, poté $Re(z+1) > 0$ a známe $\Gamma(z+1)$ definované jako $\int_0^\infty t^z \cdot e^{-t}\, dt$. Dosazením do (2.6) nalezneme hodnotu $\Gamma(z)$, $-1 < Re(z) \leq 0$, $z \neq 0$. Tato funkce je holomorfní pro $Re(z) > -1$ kromě nuly. Pro $z = 0$ nalezneme reziduum

$$res_0\Gamma(z) = \lim_{z\to 0} z \cdot \Gamma(z) = \lim_{z\to 0} \Gamma(z+1) = \Gamma(1) = 1.$$

Nula je tedy pól funkce gamma s reziduem rovným hodnotě jedna. Tento proces můžeme následně opakovat pro $-2 < Re(z) \leq -1$, $-3 < Re(z) \leq -2$, a tak dále. Zjistíme, že funkce gamma je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \cdots\}$. Reziduum v bodě $z = -n$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ je

$$res_{-n}(n+z) \cdot \Gamma(z) = \lim_{z \to -n} (z+n) \cdot \frac{\Gamma(z+1)}{z} =$$

$$= \lim_{z \to -n} (z+n) \cdot \frac{\Gamma(z+n+1)}{z \cdot (z+1) \cdots (z+n))} = \frac{\Gamma(1)}{(-n) \cdots (-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

□

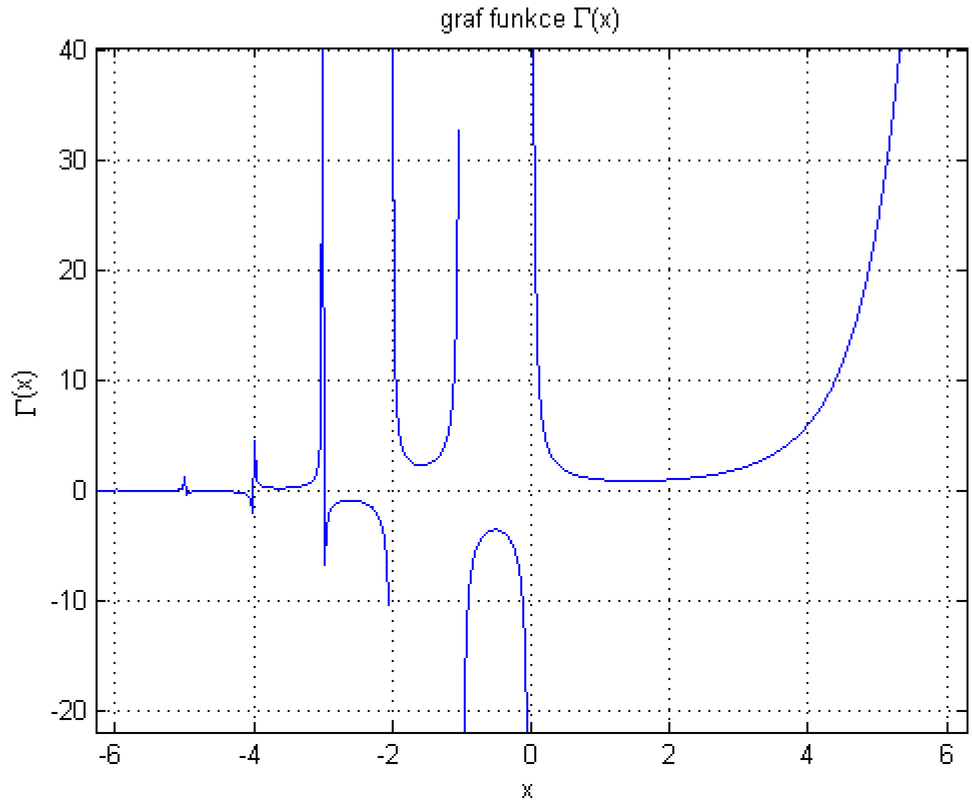
Funkce gamma v nekladných celých číslech není holomorfní, neboť zde má póly. Z definice pólu 5 plyne, že pokud je bod z_0 pólem funkce $\Gamma(z)$, nutně platí $\lim_{z \to z_0} \Gamma(z) = \infty$. V číslech 0 ,$-1$, -2 , ... , má tedy funkce gamma limitu rovnu hodnotě nekonečno. Přikročme závěrem k definici funkce gamma v oboru komplexních čísel.

Definice 8. *Funkce gamma* je definovaná na množině $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \cdots\}$ následujícím vztahem

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z+n) \cdot n!} + \int_1^{\infty} t^{z-1} \cdot e^{-t} \, dt.$$

Z definice vidíme, že za z lze dosadit i libovolné reálné číslo kromě nekladných celých čísel. Nyní již máme představu o chování funkce gamma na obou poloosách, a tak si uvedeme tabulku některých hodnot a také graf funkce gamma.

x	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$
$\Gamma(x)$	$\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$	$-2\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$	1	$\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$	2	$\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$



Obrázek 2.1: Graf funkce gamma pro $x \in \mathbb{R}$

Z grafu je možno vyčíst, jak se různí chování funkce gamma na kladné a záporné poloose. Zatímco na kladné poloose je funkce gamma spojitá, na záporné poloose se chová odlišně. Víme, že v komplexní rovině má funkce gamma v nekladných celých číslech póly, protože platí, že $lim_{z \to 0} \Gamma(z) = \infty$ pro $z_0 = 0, \ -1, \ -2, \ \cdots$. Graf nám však napovídá, že v nekladných celých číslech má funkce gamma vertikální asymptoty. V prostoru reálných čísel vertikální asymptoty nalezneme, neboť pro čísla $z_0 = 0, \ -1, \ -2, \ \cdots$ bude platit, že

$$\lim_{z \to z_0^+} \Gamma(z) = \infty \ \wedge \ \lim_{z \to z_0^-} \Gamma(z) = -\infty.$$

Z definice asymptoty plyne, že pokud je alespoň jedna nevlastní limita v daném bodě nevlastní, má funkce v tomto bodě asymptotu. Funkce gamma tak má vertikální asymptoty v nekladných celých číslech. Oborem hodnot funkce gamma jsou všechna reálná čísla kromě nuly.

2.3. Funkce beta a její souvislost s funkcí gamma

Beta funkce, značená písmenem B dle francouzského matematika, fyzika a astronoma Jacquesa Bineta, je definována pomocí nevlastního integrálu a je s funkcí gamma neodmyslitelně spojena. Využití beta funkce nalezneme například v integrálním počtu, jak je možno vidět v kapitole 3, kde většinu integrálů pomocí této funkce spočítáme značně rychleji. Nelze opomenout také beta rozdělení pravděpodobnosti a jeho užití.

Definice 9. *Beta funkce*, někdy též nazývána jako Eulerův integrál prvního druhu, je definována jako nevlastní integrál $B(a,b)$ tvaru

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1} \cdot (1-t)^{b-1}\, dt,\ a > 0,\ b > 0.$$

Příklad 3. Ověřte konvergenci integrálu $B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1} \cdot (1-t)^{b-1}\, dt$ pro $a > 0$,$b > 0$.

Řešení: Nejprve se podívejme na případ, kdy $a \geq 1$, $b \geq 1$. V takovémto případě je integrand $t^{a-1} \cdot (1-t)^{b-1}$ spojitá funkce na intervalu $[0,1]$ a konvergence integrálu je zaručena. V případě, že $a \in (0,1)$, $b \in (0,1)$ si integrál přepíšeme

$$\int_0^1 t^{a-1} \cdot (1-t)^{b-1}\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{a-1} \cdot (1-t)^{b-1}\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{a-1} \cdot (1-t)^{b-1}\, dt.$$

Uvažujme integrál $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{a-1} \cdot (1-t)^{b-1}\, dt$. Tento integrál je pro $a \in (0,1)$, $b \in (0,1)$, $t \in (0, \frac{1}{2}]$ konvergentní, neboť $(1-t)^{b-1}$ je na intervalu $(0, \frac{1}{2}]$ omezená funkce a platí, že $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{a-1}\ dt = \frac{1}{a \cdot 2^a}$. Konvergence integrálu $\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{a-1} \cdot (1-t)^{b-1}\, dt$ plyne z omezenosti funkce t^{a-1} na intervalu $[\frac{1}{2}, 1)$ a pro $b \in (0,1)$ platí $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{b-1}\, dt = \frac{1}{b \cdot 2^b}$.

Vlastnost 10. Souvislost mezi funkcí gamma a beta je vyjádřena následujím vztahem

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\ a>0,\ b>0.$$

Důkaz.

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(b) = \int_0^\infty t^{a-1}\cdot e^{-t}\,dt\cdot\int_0^\infty u^{b-1}\cdot e^{-u}\,du =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty t^{a-1}\cdot u^{b-1}\cdot e^{-t-u}\,dt\,du.$$

Proměnné substituujeme do zobecněných polárních souřadnic

$$t = \rho\cdot\cos^2\varphi, u = \rho\cdot\sin^2\varphi,$$

$$J = \begin{vmatrix}\cos^2\varphi & -2\cdot\rho\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\\ \sin^2\varphi & 2\cdot\rho\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\end{vmatrix} = 2\cdot\rho\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$

Platí, že $t,u\geq 0 \Leftrightarrow \rho\geq 0, \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Nyní využijeme danou substituci

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(b) = 2\cdot\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho}\cdot\rho^{a-1}\cdot(\cos^2\varphi)^{a-1}\cdot\rho^{b-1}\cdot(\sin^2\varphi)^{b-1}\cdot\rho\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\,d\varphi\,d\rho =$$

$$= 2\cdot\int_0^\infty e^{-\rho}\cdot\rho^{a+b-1}\,d\rho\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{2a-1}\varphi)\cdot(\sin^{2b-1}\varphi)\,d\varphi =$$

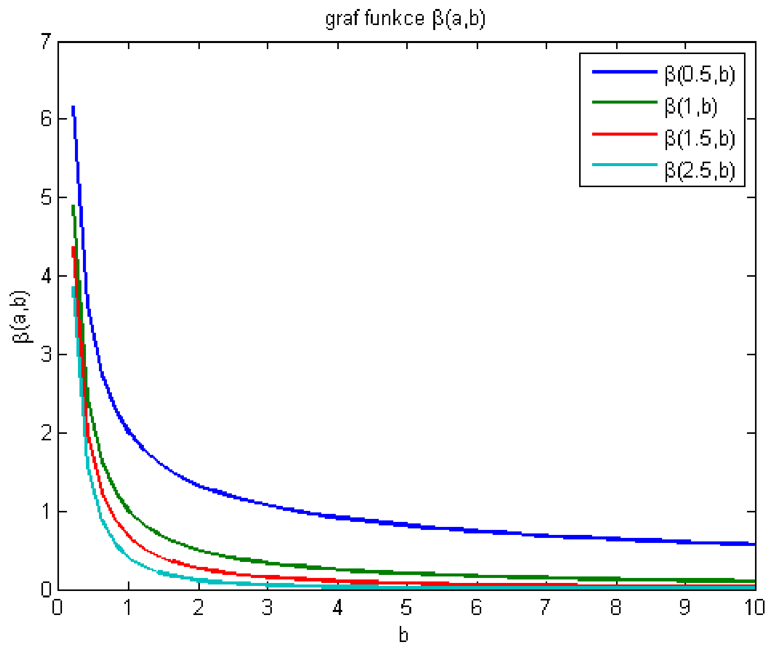
$$= 2\cdot\Gamma(a+b)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{2a-1}\varphi)\cdot(\sin^{2b-1}\varphi)\,d\varphi.$$

Na zbylý integrál využijeme substituci $z = \cos^2\varphi, dz = -2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\,d\varphi$, integrační meze se změní na 0 a 1.

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\cdot\int_0^1 z^{a-1}\cdot(1-z)^{b-1}\,dz = \Gamma(a+b)\cdot B(a,b).$$

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

$\square$



Obrázek 2.2: Graf funkce beta v proměnné b s různými hodnotami parametru a

Kapitola 3

Aplikace funkce gamma

Funkce gamma má využití v mnoha matematických odvětvích. Nejznámější využití funkce gamma nalezneme v integrálním počtu, ve kterém se díky funkci gamma můžeme vyhnout značně komplikovaným integrálům a dojít k výsledku snadnější cestou. Nelze opominout ani pole pravděpodobnosti a statistiky. Pomocí funkce gamma je definováno gamma rozdělení. Funkci gamma ale nalezneme i v dalších rozděleních pravděpodobnosti.

V této kapitole byly využity zdroje [13],[14],[15],[16], [18], [19],[20], [23],[24].

3.1. Integrální počet

Funkce gamma má v integrálním počtu široké využití. Mnohé integrály, které bychom jinak řešili pomocí mnohonásobného použití substitucí a metody per partes, se dají převést na funkci gamma, jenž nám značně usnadní výpočet. Protože vzorců a vztahů s funkcí gamma je mnoho, uvedeme zde ty nejčastěji využívané.

Příklad 4. Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cdot \cos^{q-1} x \, dx, \; p > 0, \; q > 0.$$

Řešení: Integrand si nejprve pomocí vytýkání upravíme do vhodného tvaru a následně využijeme substituci $y = \sin^2 x$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cdot \cos^{q-1} x \, dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-2} x \cdot \cos^{q-2} x \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \, dx =$$

$$\left|\begin{matrix} y = \sin^2 x, 1-y = \cos^2 x \\ dy = 2\cdot \sin x \cdot \cos x\, dx \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot \int_0^1 y^{\frac{p}{2}-1}\cdot (1-y)^{\frac{q}{2}-1}\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot B\Big(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\Big) = \frac{1}{2}\cdot \frac{\Gamma(\frac{p}{2})\cdot \Gamma(\frac{q}{2})}{\Gamma(\frac{p+q}{2})},\ p>0,\ q>0.$$

Příklad 5. Vypočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^a}\, dx,\ a > \frac{1}{2}.$$

Řešení: Integrál má konečnou hodnotu pro $a > \frac{1}{2}$ a funkce $\frac{1}{1+x^2}$ je sudá, takže platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^a}\, dx = 2\cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^a}\, dx.$$

Nyní využijeme substituce $y = \frac{1}{1+x^2}$, pak platí, že $dx = \frac{1}{2}\cdot \sqrt{\frac{y}{1-y}}\cdot \frac{-1}{y^2}\, dy$, kde $x \in (0,\infty)$, $y \in (0,1)$. Po provedení substituce dostáváme

$$2\cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^a}\, dx = 2\cdot \int_1^0 y^a \cdot \frac{1}{2}\cdot \sqrt{\frac{y}{1-y}}\cdot \frac{-1}{y^2}\, dy =$$

$$= \int_0^1 y^a \cdot \sqrt{\frac{y}{1-y}}\cdot \frac{1}{y^2}\, dy = \int_0^1 y^{a-\frac{3}{2}}\cdot (1-y)^{-\frac{1}{2}}\, dy =$$

$$= \int_0^1 y^{a-\frac{1}{2}-1}\cdot (1-y)^{\frac{1}{2}-1}\, dy = B\Big(a-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) =$$

$$= \frac{\Gamma(a-\frac{1}{2})\cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a)},\ a > \frac{1}{2}.$$

Příklad 6. Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\infty} x^{p-1}\cdot e^{(-a\cdot x)^q}\, dx,\ a>0,\ p>0,\ q\in\mathbb{N}.$$

Řešení: Pro výpočet tohoto integrálu užijeme substituci $y = a\cdot x^q$, potom platí $dx = \frac{1}{q}\cdot (\frac{y}{a})^{\frac{1-q}{q}}\cdot \frac{1}{a}\, dy$. Integrační meze se substitucí nezmění.

$$\int_0^{\infty} x^{p-1}\cdot e^{(-a\cdot x)^q}\, dx = \int_0^{\infty} \Big(\frac{y}{a}\Big)^{\frac{p-1}{q}}\cdot e^{-y}\frac{1}{q}\cdot \Big(\frac{y}{a}\Big)^{\frac{1-q}{q}}\cdot \frac{1}{a}\, dy =$$

$$= \frac{1}{q} \cdot a^{-(p/q)} \cdot \int_0^\infty y^{(p/q)-1} \cdot e^{-y}\, dy =$$

$$\frac{1}{q} \cdot a^{-(p/q)} \cdot \Gamma\left(\frac{p}{q}\right),\ a > 0,\ p > 0,\ q \in \mathbb{N}.$$

Důsledek 2. Z předchozího příkladu dostáváme při konkrétní volbě p, q následující výsledky

- $p = q = 1$: $\int_0^\infty e^{-a\cdot x}\, dx = \frac{1}{a} \cdot \Gamma(1) = \frac{1}{a}$.
- $p = 1, q = 2$: $\int_0^\infty e^{(-a\cdot x)^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot a^{-1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{a}$.
- $p = q$: $\int_0^\infty x^{q-1} \cdot e^{(-a\cdot x)^q}\, dx = \frac{1}{aq} \cdot \Gamma(1) = \frac{1}{aq}$.

Příklad 7. Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 x^{p-1} \cdot (1 - x^m)^{q-1}\, dx,\ p > 0,\ q > 0,\ m \in \mathbb{N}.$$

Řešení:

$$\int_0^1 x^{p-1} \cdot (1 - x^m)^{q-1}\, dx = \int_0^1 x^{p-m} \cdot x^{m-1} \cdot (1 - x^m)^{q-1}\, dx.$$

Zde využijeme substituce $y = x^m$, poté $dy = m \cdot x^{m-1}\, dx$, integrační meze se zde nezmění. Po zavedení subtituce dostaneme

$$\int_0^1 x^{p-1} \cdot (1 - x^m)^{q-1}\, dx = \frac{1}{m} \cdot \int_0^1 y^{(p/m)-1} \cdot (1 - y)^{q-1}\, dy =$$

$$= \frac{1}{m} \cdot B\left(\frac{p}{m}, q\right) = \frac{1}{m} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right) \cdot \Gamma\left(q\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{m} + q\right)},\ p > 0,\ q > 0,\ m \in \mathbb{N}.$$

Příklad 8. Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(a + x)^{p+q}}\, dx,\ a > 0,\ p > 0,\ q > 0.$$

Řešení:
$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(a+x)^{p+q}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{p+q}}{(a+x)^{p+q}} \cdot x^{-q-1}\,dx.$$
Nyní využijeme substituce tvaru $y = \frac{x}{a+x}$, potom $x = \frac{a\cdot y}{1+y},\ dx = \frac{a}{(1-y^2)}\,dy$. Dolní integrační mez zůstane beze změny, horní integrační mez se změní na hodnotu 1. Po substituci dostáváme
$$\int_0^1 y^{p+q} \cdot \Big(\frac{ay}{1-y}\Big)^{-q-1} \cdot \frac{a}{(1-y)^2}\,dy = \int_0^1 y^{p+q} \cdot \Big(\frac{1-y}{ay}\Big)^{q+1} \cdot \frac{a}{(1-y)^2}\,dy =$$
$$= \frac{1}{a^q} \cdot \int_0^1 y^{p-1} \cdot (1-y)^{q-1}\,dy = \frac{1}{a^q} \cdot B(p,q),\ a > 0,\ p > 0,\ q > 0.$$

Důsledek 3. Položíme-li $a = 1$, $q = 1 - p$, dostaneme již dříve zmiňovaný vztah "The cosecant identity".
$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = B(p, 1-p) = \Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p},\ p \in (0,1).$$

3.1.1. Bernoulliho lemniskáta a eliptické integrály

Bernoulliho lemniskáta je křivka definovaná Jacobem Bernoullim, o níž se poprvé zmínil v publikaci Acta Eruditorum z roku 1694. Název "lemniscus"je latinský výraz pro stuhu či mašli. Bernoulli v té době nevěděl, že křivka, o které píše, je speciálním případem Cassiniho oválů, které publikoval Giovanni Domenico Cassini již v roce 1680. Později se délkou oblouku Bernoulliho lemniskáty zabývali významní matematikové Euler a Gauss, jenž definovali eliptické funkce a eliptické integrály.

Definice 10. Nechť $F_1,\ F_2 \in \mathbb{R}$ jsou dva pevně dané body v rovině, kde $F_1 \neq F_2$. *Bernoulliho lemniskátou* pak nazveme množinu bodů P v rovině takových, že součin vzdáleností od těchto dvou pevně zvolených bodů $F_1,\ F_2$, je konstantní a rovná se b^2, $b \in \mathbb{R}$, tj. platí
$$|F_1P| \cdot |F_2P| = \Big(\frac{|F_1F_2|}{2}\Big)^2 = b^2,$$

a platí, že vzdálenost bodů $F_1,\ F_2$ je rovna $2 \cdot b$, tedy $|F_1F_2| = 2 \cdot b$.

Poznámka 4. Body $F_1,\ F_2$ z definice 10 se nazývají ohniska.

Implicitní rovnice Bernoulliho lemniskáty se obvykle uvádí v následujícím tvaru

$$((x - b^2) + y^2) \cdot ((x + b^2) + y^2) = b^4.$$

Po úpravě dostaneme

$$(x^2 + y^2)^2 = 2 \cdot b^2 \cdot (x^2 - y^2).$$

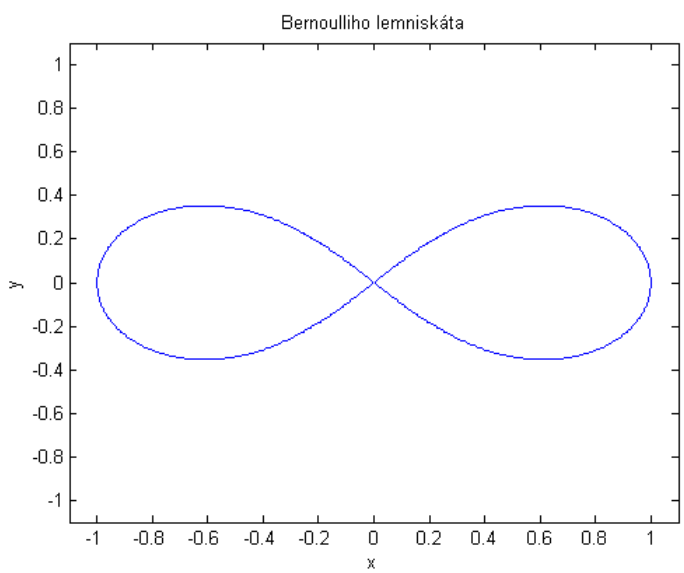
Po substituci do polárních proměnných $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$ dostaneme polární rovnici Bernoulliho lemniskáty

$$r^2 = 2 \cdot b^2 \cdot \cos 2\varphi,$$

kde

$$\varphi \in \Big(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \Big) \cup \Big(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \Big).$$

Pro zjednodušení položme $a^2 = 2 \cdot b^2$, $a,\ b \in \mathbb{R}$.



Obrázek 3.1: Bernoulliho lemniskáta zadána parametrickou rovnicí $r^2 = \cos^2\varphi$

Příklad 9. Vypočtěte obsah plochy vymezené Bernoulliho lemniskátou.

Řešení:

$$S = 2 \cdot \Big(\frac{1}{2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 \, d\varphi\Big) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 \, d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cdot \cos 2\varphi \, d\varphi = a^2 \cdot \Big[\frac{1}{2} \cdot \sin 2\varphi\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

Výrazné usnadnění přináší funkce gamma při aplikaci v eliptických integrálech. Eliptické integrály spadají do kategorie neelementárních integrálů, kdy integrujeme spojité funkce jedné proměnné, jejichž primitivní funkce ale zpravidla neumíme vyjádřit pomocí konečného počtu elementárních funkcí.

Definice 11. *Eliptickým integrálem* nazveme integrál tvaru $\int R(x, \sqrt{P(x)})\, dx$, kde $R(x, y)$ je racionální funkce dvou proměnných a $P(x)$ je mnohočlen třetího nebo čtvrtého stupně, který nemá násobné kořeny.

Příklad 10. Vypočítejte integrál $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^4)}}\, dx$.

Řešení:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^4)}}\, dx = \int_0^1 (1-x^4)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \int_0^1 x^{1-1} \cdot (1-x^4)^{\frac{1}{2}-1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot B\Big(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{4}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})}.$$

Definice 12. *Úplným eliptickým integrálem prvního druhu* nazýváme integrál tvaru

$$K(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2) \cdot (1-k^2x^2)}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2 \varphi}}\, d\varphi,$$

kde $0 \le k^2 \le 1$.

Eliptické integrály získaly své pojmenování při zkoumání výpočtu délky elipsy. Jejich využití se však nalézá i při výpočtu dalších křivek, my se podíváme na výpočet délky Bernoulliho lemniskáty.

Příklad 11. Vypočtěte délku Bernoulliho lemniskáty.

Řešení: Vycházíme z parametrické rovnice lemniskáty tvaru $r^2 = a^2 \cdot \cos 2\varphi$. Mějme dva body, počátek $O = [0; 0]$ a bod $P = [r \cdot \cos\varphi;\ r \cdot \sin\varphi]$. Nechť d je délka Bernoulliho lemniskáty v prvním kvadrantu. Pro výpočet délky oblouku obecně platí $ds^2 = dr^2 + r^2 \cdot d\varphi^2$, tedy $ds = \sqrt{1 + r^2 \cdot (\frac{d\varphi}{dr})^2}\, dr$. Délka lemniskáty v prvním kvadrantu se pak spočte následovně

$$d = \int_O^P \sqrt{dr^2 + r^2 \cdot d\varphi^2}\, dr = \int_0^a \sqrt{1 + r^2 \cdot (\frac{d\varphi}{dr})^2}\, dr.$$

Vypočteme si derivaci $\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, potom $(\frac{d\varphi}{dr})^2 = \frac{r^2}{a^4 - r^4}$, kde jsme využili toho, že $\cos 2\varphi = \frac{r^2}{a^2}$ a $\sin^2 2\varphi = \frac{a^4 - r^4}{a^4}$. Poté platí

$$d = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{r^4}{a^4 - r^4}}\, dr = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1 - (r/a)^4}\, dr.}$$

Délku celé lemniskáty označíme písmenem s a bude pro ni platit

$$s = 4 \cdot \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1 - (r/a)^4}}\, dr.$$

Zavedeme substituci $t = \frac{r}{a}$, potom $dt = \frac{1}{a}\, dr$. Dolní integrační mez se nezmění, horní integrační mez nabyde hodnoty 1.

$$s = 4 \cdot \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1 - (r/a)^4}}\, dr = 4 \cdot a \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^4}}\, dt =$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot a \cdot K(1/\sqrt{2}).$$

Nyní je tedy naším úkolem vypočítat hodnotu $K(1/\sqrt{2})$.

$$K(1/\sqrt{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - (1/2) \cdot \sin^2\varphi}}\, d\varphi =$$

Funkci sinus nahradíme ze známého vztahu $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ funkcí cosinus a dostaneme

$$K(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}}\, d\varphi.$$

Ideální substitucí je v tomto případě univerzální substituce pro goniometrické funkce tvaru $t = \tan(\varphi/2)$, pak $d\varphi = \frac{2}{1+t^2}\,dt$. Potom platí, že $\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Integrační meze se změní na 0 a 1. Po dosazení dostáváme

$$K(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}\cdot\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\right)^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 2\cdot\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt.$$

Substituujeme do nové proměnné $y = \frac{1}{1+t^4}$, poté $dt = \frac{-1}{4y^2}\cdot(\frac{1-y}{y})^{(-3/4)}\,dy$.

$$K(1/\sqrt{2}) = -2\cdot\int_{\frac{1}{2}}^1 y^{(1/2)}\cdot\frac{-1}{4y^2}\cdot\left(\frac{1-y}{y}\right)^{(-3/4)}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_{\frac{1}{2}}^1 y^{(-3/4)}\cdot(1-y)^{(-3/4)}\,dy.$$

Proveďme substituci do proměnné z tvaru $z = y - \frac{1}{2}$. Integrační meze se změní na 0 a $\frac{1}{2}$ a dostaneme

$$K(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}} \left(z+\frac{1}{2}\right)^{(-3/4)}\cdot\left(\frac{1}{2}-z\right)^{(-3/4)}\,dz. \tag{3.1}$$

Označme $f(z) = \left(z+\frac{1}{2}\right)^{(-3/4)}\cdot\left(\frac{1}{2}-z\right)^{(-3/4)}$. Tato funkce je sudá, neboť pro ni platí $f(z) = f(-z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$, takže lze psát integrál (3.1) následovně

$$K(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(z+\frac{1}{2}\right)^{(-3/4)}\cdot\left(\frac{1}{2}-z\right)^{(-3/4)}\,dz.$$

Substiuujeme-li zpět do proměnné y, kde $z = y-\frac{1}{2}$, změní se nám integrační meze na 0 a 1 a tímto krokem se dostaneme k funkci beta, potažmo funkci gamma, a k výsledku $K(1/\sqrt{2})$.

$$K(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 y^{(-3/4)}\cdot(1-y)^{(-3/4)}\,dy =$$

$$\frac{1}{4} \cdot B\Big(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\Big) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma^2(1/4)}{\sqrt{\pi}}.$$

Poté již snadno dopočítáme délku křivky

$$s = 2\sqrt{2}a \cdot K(1/\sqrt{2}) = a \cdot \frac{\Gamma^2(1/4)}{\sqrt{2\pi}} \approx a \cdot 5,2441151086.$$

3.2. Pravděpodobnost a statistika

Nemalé využití funkce gamma nalezneme v teorii pravděpodobnosti a statistiky. Gamma funkce se vyskytuje v mnoha spojitých rozdělení pravděpodobnosti jako je například gamma rozdělení, ze kterého vychází také rozdělení chí-kvadrát či exponenciální rozdělení. Nemůžeme opomenout ani beta rozdělení, Studentovo rozdělení a Fisher-Snedecorovo rozdělení. Zmíníme si také rozdělení Weibullovo a Wishartovo.

3.2.1. Gamma rozdělení

Gamma rozdělení je jednou z aplikací funkce gamma, které má široké využití. Používá se převážně ke zkoumání proměnných s asymetrickým rozdělením pravděpodobnosti. V matematické statistice se využívá k modelování pravděpodobnosti doby čekání, v pojistné matematice má využití například při modelování výše pojistného plnění - nejčastěji se používá pro výpočet rozdělení výše pojistných nároků v neživotním pojištění, protože je flexibilnější než rozdělení exponenciální. Jeho nevýhodou v oblasti pojistné matematiky jsou nepřesné odhady pravděpodobnosti příliš vysokých pojistných plnění. Využití nalézá gamma rozdělení také v geologii při analýze obsahů kovů v rudních blocích. Neméně zajímavé využití nalezneme také v meteorologii, kde se při výpočtu standardizovaného srážkového indexu využívá pro výpočet kumulativní distribuční funkce srážkových úhrnů aproximace rozdělením gamma. Obvykle se předpokládá, že funkce popisující rozložení měsíčních srážkových úhrnů má gamma rozdělení, toto rozdělení je vhodné pro studium sucha ve většině oblastí Evropy.

Definice 13. Spojitá náhodná veličina X s hustotou f_X má *gamma rozdělení*, jestliže existují reálná čísla $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ tak, že f_X je tvaru

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta}, & \text{pro } x \geq 0 \\ 0, & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Poznámka 5. Gamma rozdělení s parametry α a β značíme $\Gamma(\alpha, \beta)$.

Poznámka 6. Gamma rozdělení s parametry $\alpha \in \mathbb{N}$ a $\beta > 0$ lze v literatuře někdy nalézt pod názvem *Erlangovo rozdělení*.[18]

Věta 4. *Exponenciální rozdělení je speciálním případem gamma rozdělení.*

Důkaz. Pokud v definici gamma rozdělení položíme hodnotu $\alpha = 1$, dostáváme ihned exponenciální rozdělení s parametrem $(1/\beta) > 0$ s funkcí hustoty tvaru

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \cdot e^{-x/\beta}, & \text{pro } x > 0 \\ 0, & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}$$

□

Věta 5. *Chí-kvadrát rozdělení je speciálním případem gamma rozdělení.*

Důkaz. Pokud ve vztahu pro hustotu gamma rozdělení položíme hodnotu $\alpha = \frac{n}{2}$ a $\beta = 2$, dostaneme hustotu χ^2 kvadrát rozdělení s n stupni volnosti ve tvaru

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n/2) \cdot 2^{(n/2)}} \cdot e^{-x/2} \cdot x^{(n/2)-1}, & \text{pro } x > 0 \\ 0, & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}$$

□

Věta 6. *Náhodná veličina X s rozdělením pravděpodobnosti $\Gamma(\alpha, \beta)$ má $E(X) = \alpha \cdot \beta$ a $var(X) = \alpha \cdot \beta^2$.*

Důkaz.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^\alpha}\cdot\int_0^\infty x^\alpha\cdot e^{-x/\beta}\,dx = \left|\begin{matrix} t=\frac{x}{\beta},\; x=\beta\cdot t \\ dx=\beta\,dt\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^\alpha}\cdot\int_0^\infty (\beta\cdot t)^\alpha\cdot e^{-t}\beta\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^\alpha}\cdot\beta^{\alpha+1}\cdot\int_0^\infty t^\alpha\cdot e^{-t}\,dt =$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\cdot\Gamma(\alpha+1) =$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\cdot\alpha\cdot\Gamma(\alpha) = \alpha\cdot\beta.$$

Jednoduchým postupem využívajícím znalost substituce, základy pravděpodobnosti a znalosti definice funkce gamma a její funkcionální rovnice, jsme odvodili střední hodnotu náhodné veličiny, která má gamma rozdělení.

Pro odvození rozptylu náhodné veličiny s rozdělením gamma spočteme nejprve hodnotu $E(X^2)$. Využijeme stejnou substituci jako při výpočtu střední hodnoty. Užijeme také znalost již zmiňované funkcionální rovnice 3.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^\infty x^2\cdot f_X(x)\,dx = \int_0^\infty x^2\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^\alpha}\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{-x/\beta}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^\alpha}\cdot\int_0^\infty x^{\alpha+1}\cdot e^{-x/\beta}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^\alpha}\cdot\int_0^\infty (\beta t)^{\alpha+1}\cdot e^{-t}\cdot\beta\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^\alpha}\cdot\beta^{\alpha+2}\cdot\int_0^\infty t^{\alpha+1}\cdot e^{-t}\,dt =$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\cdot\Gamma(\alpha+2) = \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\cdot(\alpha+1)\cdot\Gamma(\alpha+1) =$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\cdot\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\Gamma(\alpha) = \alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\beta^2.$$

Z pravděpodobnosti a statistiky víme, že definice rozptylu je

$$var(X) = E(X - E(X))^2.$$

Platí, že

$$var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X - 2 \cdot X \cdot E(X) + (E(X))^2 =$$
$$= E(X^2) - 2 \cdot (E(X))^2 + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Poté již lehce dopočítáme rozptyl

$$var(X) = \alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot \beta^2 - (\alpha \cdot \beta)^2 =$$
$$= \alpha^2 \cdot \beta^2 + \alpha \cdot \beta^2 - \alpha^2 \cdot \beta^2 = \alpha \cdot \beta^2.$$

□

Definice 14. *Momentovou vytvořující funkcí* pro spojitou náhodnou veličinu X s funkcí hustoty $f_X(x)$ nazýváme funkci $M(t)$ tvaru

$$M(t) = E[e^{t \cdot X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f_X(x)\, dx,\ \forall |t| \leq b.$$

Příklad 12. Odvoďte momentovou vytvořující funkci pro náhodnou veličinu X s gamma rozdělením $\Gamma(\alpha, \beta)$.

Řešení:

$$M(t) = E[e^{t \cdot X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t \cdot x} \cdot f_X(x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \cdot \int_0^{\infty} e^{-x \cdot \left(\frac{1}{\beta} - t\right)} \cdot x^{\alpha - 1}\, dx.$$

Nyní budeme substituovat do proměnné $y = x \cdot \left(\frac{1}{\beta} - t\right)$, poté $x = \frac{\beta \cdot y}{1 - \beta \cdot t}$, $dx = \frac{\beta}{1 - \beta \cdot t}\, dy$. Integrační meze se nezmění.

$$M(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \int_0^{\infty} e^{-y} \cdot \left(\frac{\beta \cdot y}{1 - \beta \cdot t}\right)^{\alpha - 1} \cdot \left(\frac{\beta}{1 - \beta \cdot t}\right) dy =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \cdot \left(\frac{\beta}{1 - \beta \cdot t}\right)^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-y} \cdot y^{\alpha - 1} =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{(1 - \beta \cdot t)^\alpha} \cdot \Gamma(\alpha) = \frac{1}{(1 - \beta \cdot t)^\alpha},\ \forall t < \frac{1}{\beta}.$$

Věta 7. *Nechť máme n nezávislých náhodných veličin s rozdělením pravděpodobnosti gamma, takových, že* $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$, $\cdots$, $X_n \sim \Gamma(\alpha_n, \beta)$. *Pak náhodná veličina* $Y = X_1 + \cdots + X_n$ *má rozdělení* $\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \beta)$.

Důkaz. Důkaz provedeme pomocí momentové vytvořující funkce. Pro náhodnou veličinu $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$ je momentová vytvořující funkce rovna

$$M_{X_i}(t) = (1 - \beta \cdot t)^{-\alpha_i}.$$

Poté momentová vytvořující funkce náhodné veličiny $Y = X_1 + \cdots + X_n$ vypadá následovně

$$M_Y(t) = E[e^{t \cdot Y}] = E\Big[e^t \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i\Big] =$$

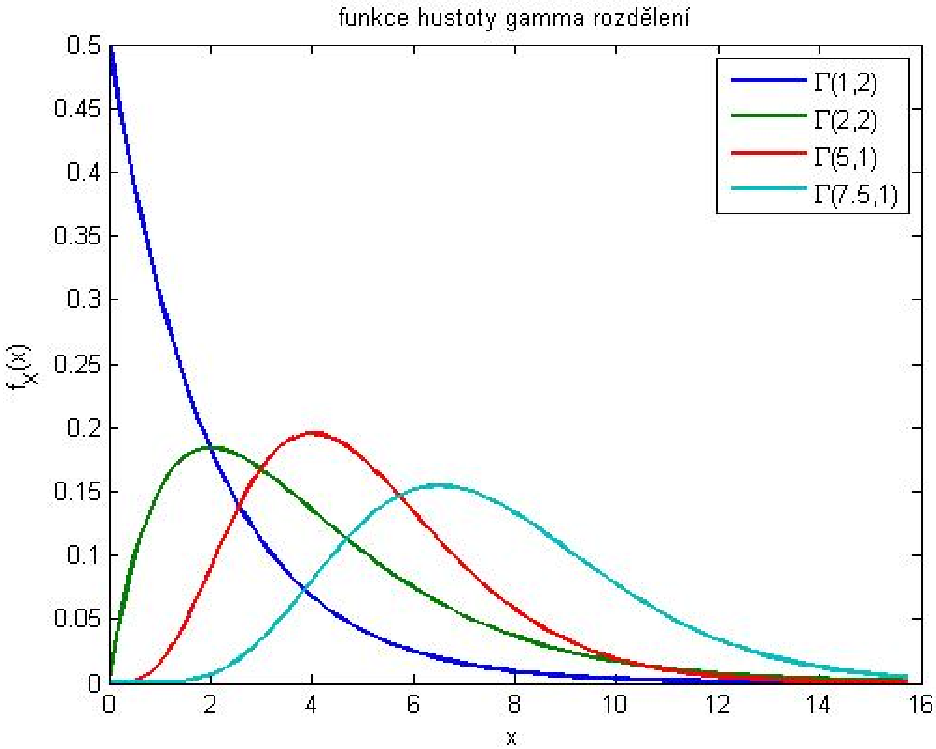
$$= E[e^{t \cdot X_1}] \cdot E[e^{t \cdot X_2}] \cdots E[e^{t \cdot X_n}] =$$

$$= M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t) =$$

$$= \frac{1}{(1 - \beta \cdot t)^{\alpha_1}} \cdots \frac{1}{(1 - \beta \cdot t)^{\alpha_n}} =$$

$$= (1 - \beta \cdot t)^{-(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}, \ \forall t < \frac{1}{\beta}.$$

Momentová vytvořující funkce náhodné veličiny s $\Gamma(\alpha, \beta)$ je tvaru $\frac{1}{(1-\beta \cdot t)^{\alpha}}$, z čehož plyne, že z tvaru momentové vytvořující funkce $M_Y(t)$ ihned zjistíme, že náhodná veličina $Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \beta)$. □



Obrázek 3.2: Funkce hustoty gamma rozdělení s různými parametry

Tvar hustoty náhodné veličiny s gamma rozdělením je dán parametrem α. Pokud je $\alpha < 1$, pak hustota má tvar klesající exponenciální funkce. Pro $\alpha = 1$ dostaneme přímo funkci hustoty exponenciálního rozdělení. V případě, že $\alpha > 1$ má hustota vyboulený a zešikmený tvar. Šikmost se s rostoucím α snižuje.

Nyní se podívejme na praktické využití gamma rozdělení. Buď $X(t)$ Poissonův proces, tedy náhodný proces, který nám udává počet výskytů dané události v intervalu $[0, t]$. Pro Poissonův proces platí, že doby mezi výskyty jednotlivých událostí jsou náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem β, kde parametr β udává střední počet výskytů dané události za jednotku času. Uvažujme například příchody zákazníků do obchodu. Tyto příchody tvoří Poissonův proces a doby mezi příchody jednotlivých zákazníků jsou dány exponenciálním rozdělením. Doba čekání na α zákazníků je pak dle věty 7 dána jako náhodná veličina s rozdělením pravděpodobnosti $\Gamma(\alpha, \beta)$, neboť doby mezi příchody jednotlivých zákazníků jsou náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem β, přičemž exponenciální rozdělení je speciálním případem gamma rozdělení.

Příklad 13. Do obchodu s domácími potřebami dochází 30 zákazníků za hodinu. Jaká je pravděpodobnost, že budeme na první dva zákazníky čekat déle než 7 minut?

Řešení: V tomto případě nám parametr α určuje počet zákazníků, na něž čekáme, tedy $\alpha = 2$. Parametr β určuje průměrnou dobu čekání na jednoho zákazníka, zde tedy $\beta = \frac{60}{30} = 2$. S využitím faktu, že primitivní funkce k funkci $x \cdot e^{-x/2}$ je $-2 \cdot (x+2) \cdot e^{-x/2}$ vypočítáme pravděpodobnost

$$\mathbb{P}\{X > 7\} = \int_7^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int_7^\infty x \cdot e^{-x/2} = \frac{1}{4} \cdot \left[-2 \cdot (x+2) \cdot e^{-x/2}\right]_7^\infty =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot e^{-7/2} \approx 0,13589.$$

S pravděpodobností $0,13$ budeme na první dva zákazníky čekat déle než sedm minut.

Příklad 14. Mějme tři žárovky. Předpokládejme, že čas vyhoření každé z nich je modelován náhodnou veličin s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 200 hodin. Nechť je doba života jedné žárovky nezávislá na ostatních. Nalezněte rozdělení pravděpodobnosti a střední hodnotu doby života všech tří žárovek.

Řešení: Doby života jednotlivých žárovek jsou modelovány náhodnými veličinami $X_1,\ X_2$ a X_3 s exponenciálním rozdělením pravděpdobnosti. Celková doba života všech tří žárovek bude dána náhodnou veličinou $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Exponenciální rozdělení je speciální případem gamma rozdělení pro $\alpha = 1$. Náhodná veličina Y pak má dle věty 7 gamma rozdělení $\Gamma(3, 200)$ a funkci hustoty tvaru

$$f_Y(x) = \frac{1}{\Gamma(3) \cdot 200^3} \cdot x^2 \cdot e^{-(x/200)},\ x \geq 0.$$

Střední hodnota doby života všech tří žárovek najednou je

$$E(Y) = \alpha \cdot \beta = 600.$$

Rozdělení pravděpodobnosti je $\Gamma(3, 200)$ a střední hodnota doby života všech tří žárovek je 600 hodin.

Příklad 15. Životnost zařízení (v hodinách) je dána gamma rozdělením $\Gamma(4, 100)$.

- Určete průměrnou životnost zařízení.
- Určete pravděpodobnost, že zařízení vydrží déle než 300 hodin.

Řešení: Průměrná životnost zařízení je dána střední hodnotou náhodné veličiny $X \sim \Gamma(4, 100)$, tedy

$$E(X) = \alpha \cdot \beta = 400.$$

Průměrná životnost daného zařízení je 400 hodin.

Nyní je naším úkolem spočítat $P\{X > 300\}$. V tomto příkladu využijeme třikrát integrační metodu per partes.

$$P\{X > 300\} = \frac{1}{\Gamma(4) \cdot 100^4} \int_{300}^{\infty} x^3 \cdot e^{-(x/100)} \, dx =$$

$$= \frac{1}{6 \cdot 10^8} \int_{300}^{\infty} x^3 \cdot e^{-(x/100)} \, dx = \begin{vmatrix} u = x^3 & v' = e^{-(x/100)} \\ u' = 3 \cdot x^2 & v = -100 \cdot e^{-(x/100)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6 \cdot 10^8} \cdot \left(\Big[-100 \cdot x^3 \cdot e^{-(x/100)} \Big]_{300}^{\infty} + 300 \cdot \int_{300}^{\infty} x^2 \cdot e^{-(x/100)} \, dx \right) =$$

$$= \frac{9}{2 \cdot e^3} + \frac{1}{2 \cdot 10^6} \cdot \int_{300}^{\infty} x^2 \cdot e^{-(x/100)} \, dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & v' = e^{-(x/100)} \\ u' = 2 \cdot x & v = -100 \cdot e^{-(x/100)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{9}{2 \cdot e^3} + \frac{1}{2 \cdot 10^6} \cdot \left(\Big[-100 \cdot x^2 \cdot e^{-(x/100)} \Big]_{300}^{\infty} + 200 \cdot \int_{300}^{\infty} x \cdot e^{-(x/100)} \, dx \right) =$$

$$= \frac{9}{2 \cdot e^3} + \frac{9}{2 \cdot e^3} + \frac{1}{10^4} \int_{300}^{\infty} x \cdot e^{-(x/100)} \, dx = \begin{vmatrix} u = x & v' = e^{-(x/100)} \\ u' = 1 & v = -100 \cdot e^{-(x/100)} \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \cdot e^{-3} + \frac{1}{10^4} \cdot \left(\Big[-100 \cdot x \cdot e^{-(x/100)} \Big]_{300}^{\infty} + 100 \cdot \int_{300}^{\infty} e^{-(x/100)}\, dx \right) =$$

$$= 9 \cdot e^{-3} + 3 \cdot e^{-3} + \frac{1}{10^2} \cdot \int_{300}^{\infty} e^{-(x/100)}\, dx =$$

$$= 12 \cdot e^{-3} + \frac{1}{10^2} \cdot \Big[-100 \cdot e^{-(x/100)} \Big]_{300}^{\infty} =$$

$$= 13 \cdot e^{-3} \approx 0,6472.$$

S pravděpodobností $0,6472$ vydrží zařízení funkční více než 300 hodin.

3.2.2. Beta rozdělení

Beta rozdělení patří mezi spojitá rozdělení pravděpodobnosti definovaná na intervalu $[0,1]$. Toto rozdělení má stejně jako gamma rozdělení široké využití v různých odvětvích. V lékařství se využívá v oboru genetiky k popisu alelické frekvence, jenž popisuje genetické projevy v lidské populaci a při zkoumání heterogenity v pravděpodobnosti HIV přenosů. Dalším oborem, v němž nalezneme beta rozdělení, je management, konkrétně se jedná o rozvržení času při tvorbě kontrolních systémů a projektování.

Definice 15. Spojitá náhodná veličina X s hustotou f_X má na intervalu $[0,1]$ *beta rozdělení*, jestliže existují reálná čísla $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ tak, že f_X je tvaru

$$f_X(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1},\ \forall x \in [0,1].$$

Neboli

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1},\ \forall x \in [0,1].$$

Poznámka 7. Beta rozdělení s parametry α, β označme $Beta(\alpha,\beta)$.

Věta 8. *Náhodná veličina X s rozdělením pravděpodobnosti $Beta(\alpha,\beta)$ má $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ a $var(X) = \frac{\alpha\cdot\beta}{(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta+1)}$.*

Důkaz.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}\, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^1 x^{\alpha} \cdot (1-x)^{\beta-1}\, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot B(\alpha+1,\beta) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\cdot\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\alpha+\beta+1)}.$$

Z funkcionální rovnice 3 plyne, že $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\cdot\Gamma(\alpha)$ a $\Gamma(\alpha+\beta+1) = (\alpha+\beta)\cdot\Gamma(\alpha+\beta)$. Poté platí

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Při výpočtu rozptylu budeme stejně jako u gamma rozdělení vycházet ze vztahu $var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ a nejprve si vypočteme $E(X^2)$. Postup odvození je téměř totožný jako odvození střední hodnoty beta rozdělení.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\, dx = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}\, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^1 x^{\alpha+1} \cdot (1-x)^{\beta-1}\, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot B(\alpha+2,\beta) =$$

$$= \frac{\alpha\cdot(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta+1)}.$$

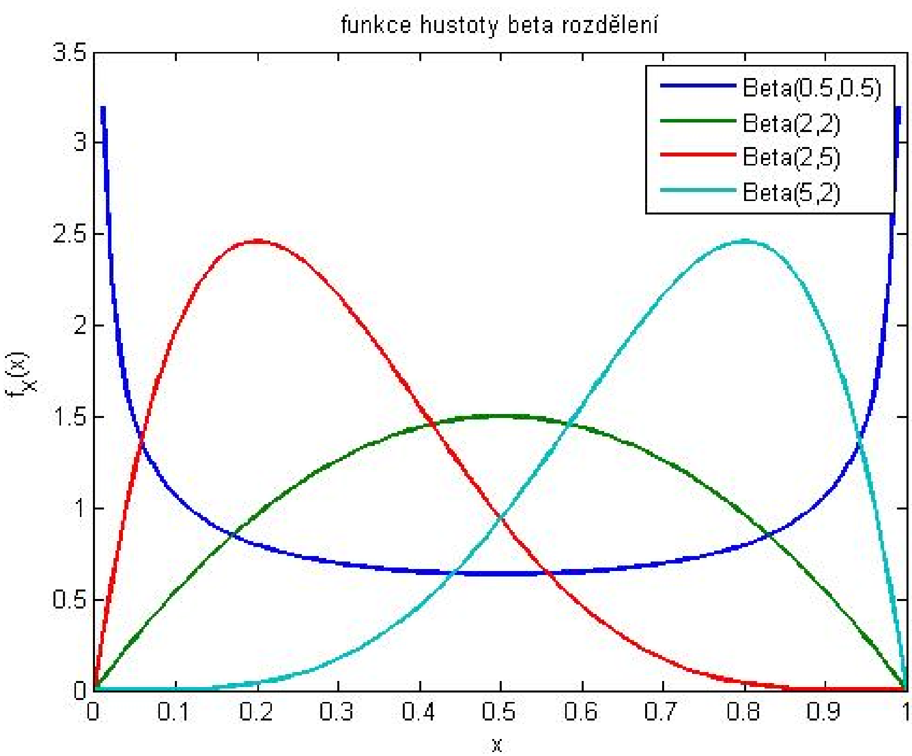
Dopočítáme rozptyl náhodné veličiny s beta rozdělením.

$$var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\alpha\cdot(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} =$$

$$= \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdot (\alpha+\beta) - \alpha^2 \cdot (\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2 \cdot (\alpha+\beta+1)} =$$

$$= \frac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha+\beta)^2 \cdot (\alpha+\beta+1)}.$$

□



Obrázek 3.3: Funkce hustoty beta rozdělení s různými parametry

Funkce hustoty beta rozdělení nabývá mnoha tvarů v závislosti na parametrech α a β. Například pro hodnoty $\alpha,\ \beta \in (0,1)$ je funkce hustoty konvexní funkcí, čehož se využívá při modelování výše škody v pojistné matematice v extrémních případech, jakými jsou například zemětřesení či požár. Pro $\alpha,\ \beta > 1$ má funkce hustoty beta rozdělení vyboulený tvar.

Využití beta rozdělení je zpravidla v případech, kdy provádíme omezený počet pokusů, jejichž výsledkem mohou být pouze dva výstupy. Uvažujeme-li experiment s výsledky typu úspěch-neúspěch, pak parametr α určuje počet úspěchů a parametr β počet neúspěchů.

Příklad 16. Mluvčí loterijní společnosti tvrdí, že alespoň 50% losů je výherních. Z posledních pěti losů byly dva losy výherní a tři nevýherní. Určete pravděpodobnost, s jakou je tvrzení mluvčího správné.

Řešení: Parametr α určuje v tomto příkladu počet výherních losů, tedy $\alpha = 2$. Parametr β určuje počet nevýherních losů, tedy $\beta = 3$. Nyní určíme, s jakou pravděpodobností říká mluvčí loterijní společnosti pravdu.

$$\mathbb{P}\{X \geq\ 0,5\} = \int_{0,5}^{1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}\, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(2)\cdot\Gamma(3)} \cdot \int_{0,5}^{1} x \cdot (1-x)^2\, dx = 12 \cdot \int_{0,5}^{1} (x - 2\cdot x^2 + x^3)\, dx =$$

$$= 12 \cdot \left[\frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{2}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{4}\cdot x^4\right]_{0,5}^{1} = 0,3125.$$

Mluvčí loterijní společnosti mluví pravdu s pravděpodobností $0,3125$.

Příklad 17. Předpokládejme, že výrobní linka produkuje kromě kvalitních výrobků také zmetky, a že počet zmetků za jednotku času lze modelovat náhodnou veličinou s rozdělením pravděpodobnosti $Beta(2,4)$. Spočítejte pravděpodobnost, že ve várce se nachází deset až dvacet procent zmetků.

Řešení: Pravděpodobnost, že ve várce se nachází $10-20\%$ zmetků, se vypočítá z integrálu funkce hustoty náhodné veličiny s rozdělením pravděpodobnosti $Beta(2,4)$.

$$\mathbb{P}\{0,10 \leq X \leq\ 0,20\} = \int_{0,10}^{0,20} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}\, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(2)\cdot\Gamma(4)} \int_{0,10}^{0,20} x \cdot (1-x)^3\, dx = 20 \cdot \int_{0,10}^{0,20} (x + 3\cdot x^2 - 3\cdot x^3 - x^4)\, dx =$$

$$= 20 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 + x^3 - \frac{3}{4} \cdot x^4 - \frac{1}{5} \cdot x^5\right]_{0,10}^{0,20} \approx 0,41626.$$

S pravděpodobností 0,42 nalezneme ve várce deset až dvacet procent defektních výrobků.

Příklad 18. Mějme dva prodejce zboží A a B. Oba prodejci nabízí stejné produkty za stejné ceny, jediné kritérium, ve kterém se rozchází, je rating od zákazníků. Zákazníci při hodnocení prodejců vybírají pouze ze dvou možností, buďto se jim zdál prodejce dobrý, nebo špatný. Prodejce A obdržel od zákazníků celkem 100 hodnocení, z nichž 90 bylo dobrých a 10 bylo špatných. Rating prodejce A je dán jako poměr dobrých hodnocení vůči celkovému počtu hodnocení, tudíž rating prodejce A je 90%. Rating prodejce B je 100%, neboť obdržel 3 dobrá hodnocení a žádné špatné. Zjistěte, u kterého prodejce je výhodnější nakoupit zboží.

Řešení: První věc, která většinu lidí napadne, je nakoupit u prodejce s vyšším ratingem. Tento přístup vychází z předpokladu, že rating prodejce je dán pouze jeho vystupováním a není dán jinými okolnostmi. Když se nad tím ale zamyslíme hlouběji, zjistíme, že i prodejce s nízkým ratingem se může vyhoupnout na chvíli na například rating 90%, pokud se vše sejde, a prodejce s výborným ratingem se naopak může dostat do situace, kdy se jeho rating sníží, i když je v tom zcela nevinně (například poškozené balení zboží či nesolventnost dodavatelů). Beta rozdělení nám pomůže získat spravedlivější náhled na hodnocení obou prodejců.

Nyní nahlédneme do Bayesovské statistiky. V Bayesovské statistice se užívá apriorní a aposteriorní rozdělení pravděpodobnosti. Apriorini rozdělení pravděpodobnosti vychází z všeobecného vědění nebo naší představy o daném tématu, jedná se tedy o jakýsi hrubý odhad. Aposteriorní rozdělení pravděpodobnosti je pak rozdělení, jenž dostaneme, pokud do výpočtu zahrneme data.

Nechť náhodná veličina θ_A značí pravděpodobnost, že zákazník je spokojen se službami prodejce A, θ_B značí pravděpodobnost, že zákazník je spokojen se službami prodejce B. Předpokládejme, že doposud neznáme rating prodejců a že pravděpodobnost zisku dobrého a špatného hodnocení je stejná. Poté mají náhodné veličiny θ_A a θ_B rovnoměrné spojité rozdělení pravděpodobnosti, a to je v našem případě beta rozdělení s parametry $\alpha_1 = \beta_1 = 1$.

Po provedení pozorování zjistíme, že prodejce A má 90 dobrých hodnocení ze sta. Počet dobrých hodnocení prodejce A označíme $s_1 = 90$, špatná hodnocení označíme $f_1 = 10$. Odhad náhodné veličiny θ_A pak má beta rozdělení pravděpodobnosti s parametry $\alpha = \alpha_1 + s_1,\ \beta = \beta_1 + f_1$, tedy $Beta(91, 11)$. Analogicky určíme odhad θ_B, který bude mít rozdělení $Beta(4, 1)$.

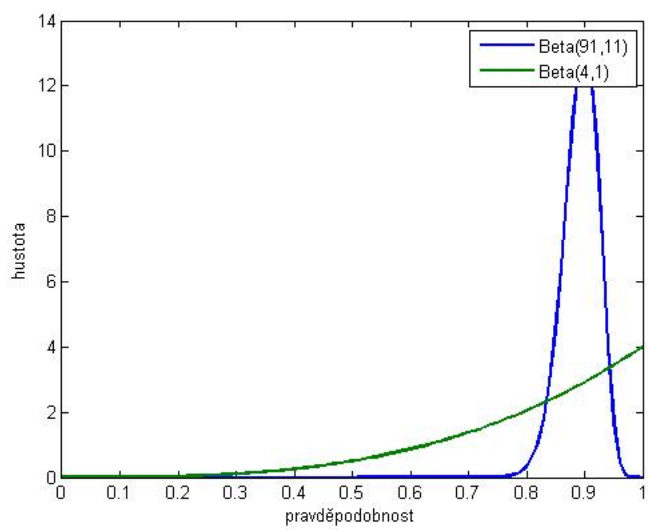
Pravděpodobnost, že vzorek z náhodné veličiny θ_A je vyšší než vzorek z náhodné veličiny θ_B je dle [24] dána vztahem

$$p = \frac{\Gamma(a+b)\cdot\Gamma(a+c)}{\Gamma(a+b+c)\Gamma(a)}, \tag{3.2}$$

kde $a,\ b$ jsou parametry rozdělení náhodné veličiny θ_A a $c,\ d$ jsou parametry rozdělení náhodné veličiny θ_B. Po dosazení hodnot parametrů do (3.2) dostaneme

$$p = \frac{\Gamma(102)\cdot\Gamma(105)}{\Gamma(106)\cdot\Gamma(91)} \approx 0,638.$$

Z výsledku plyne, že s vyšší pravděpodobností dostaneme v pořádku zboží od prodejce A, i přesto, že má nižší rating.



Obrázek 3.4: Funkce hustoty beta rozdělení $Beta(91, 11)$ a $Beta(4, 1)$.

3.2.3. Fisher-Snedecorovo rozdělení

Fischer-Snedecorovo rozdělení pravděpodobnosti je jedním z nejznámějších spojitých rozdělení pravděpodobnosti. Uplatnění nalézá především v analýze rozptylu a při testech v regresní analýze. Ve vzorci hustoty tohoto rozdělení nalezneme funkci gammma.

Definice 16. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, přičemž $X \sim \chi^2_m$, $Y \sim \chi^2_n$, $m,\ n \in \mathbb{N}$. Potom náhodná veličina

$$Z = \frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}} \tag{3.3}$$

má *Fisher-Snedecorovo rozdělení* s m a n stupni volnosti.

Poznámka 8. Fischer-Snedecorovo rozdělení s m a n stupni volnosti značíme $F_{m,n}$.

Příklad 19. Odvoďte funkci hustoty $f_Z(x)$ Fisher-Snedecorova rozdělení.

Řešení: Fischer-Snedecorovo rozdělení je definováno pomocí dvou nezávislých náhodných veličin s chí-kvadrát rozdělením, kde $X \sim \chi^2_m$ a $Y \sim \chi^2_n$. Chí-kvadrát rozdělení je speciálním případem gamma rozdělení a platí $X \sim \Gamma\left(\frac{m}{2}, 2\right)$, $Y \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, 2\right)$. Tyto náhodné veličiny mají následující funkce hustot

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot 2^{(m/2)}} \cdot x^{(m/2)-1} \cdot e^{-(x/2)},\ x > 0,$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot 2^{(n/2)}} \cdot y^{(n/2)-1} \cdot e^{-(y/2)},\ y > 0.$$

Sdružená hustota našich dvou nezávislých náhodných veličin je pro $x > 0$ a $y > 0$ následující

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot 2^{(m+n)/2}} \cdot x^{(m/2)-1} \cdot y^{(n/2)-1} \cdot e^{-(x/2)} \cdot e^{-(y/2)}.$$

Nyní si odvodíme distribuční funkci pro X/Y a z ní poté funkci hustoty, stále pro $x > 0,\ y > 0$.

$$F_{X/Y}(x) = P\{(X/Y) \leq x\} = P\{X \leq x \cdot Y\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\Big(\frac{m}{2}\Big) \cdot \Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big) \cdot 2^{(m+n)/2}} \int_0^\infty \Big(\int_0^{xy} x^{(m/2)-1} \cdot e^{-(x/2)}\, dx \Big) y^{(n/2)-1} \cdot e^{-(y/2)}\, dy.$$

Pak

$$f_{X/Y}(x) = \frac{d}{dx} F_{X/Y}(x) = \int_0^\infty f_X(xy) \cdot f_Y(y) \cdot y\, dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\Big(\frac{m}{2}\Big) \cdot \Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big) \cdot 2^{(m+n)/2}} \cdot x^{(m/2)-1} \int_0^\infty y^{((m+n)/2)-1)} \cdot e^{-y \cdot ((x+1)/2)}\, dy.$$

Integrovaná funkce

$$y^{((m+n)/2)-1)} \cdot e^{-y \cdot ((x+1)/2)}$$

se liší od funkce hustoty gamma rozdělení pravděpodobnosti $\Gamma\Big(\frac{m+n}{2}, \frac{2}{x+1}\Big)$ pouze o konstantu k

$$k = \Big(\Gamma\Big(\frac{m+n}{2}\Big) \cdot \Big(\frac{2}{x+1}\Big)^{(m+n)/2}\Big)^{-1}.$$

Pokud vztah pro hustotu $f_{X/Y}(x)$ rozšíříme zlomkem k/k, dostaneme

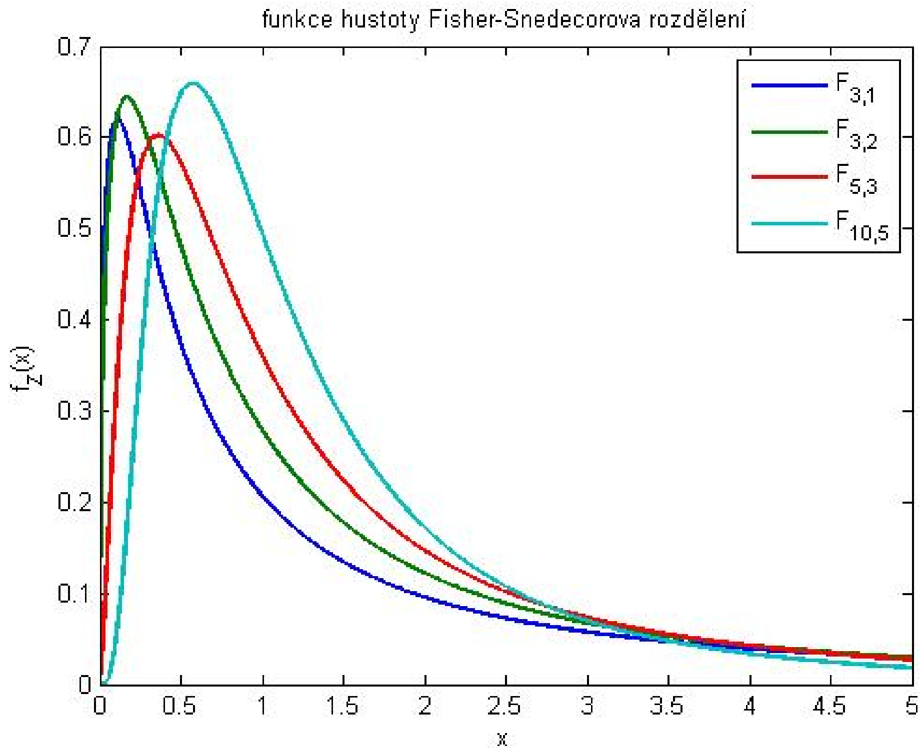
$$f_{X/Y}(x) = \frac{\Gamma\Big(\frac{m+n}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{m}{2}\Big) \cdot \Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)} \cdot \frac{x^{(m/2)-1}}{(x+1)^{(m+n)/2}},$$

kde jsme využili vlastnosti, že integrál z funkce hustoty na svém definičním oboru nabývá hodnoty jedna. Z definice 16 víme, že $Z = \frac{X}{Y} \cdot \frac{n}{m}$ a pro funkci hustoty náhodné veličiny Z platí

$$f_Z(x) = \frac{d}{dx} P\{(X/Y) \leq x \cdot (m/n)\} = \frac{m}{n} \cdot f_{X/Y}\Big(\frac{m}{n} \cdot x\Big) =$$

$$= \frac{\Gamma\Big(\frac{m+n}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{m}{2}\Big) \cdot \Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)} \cdot \Big(\frac{m}{n}\Big)^{(m/2)} \cdot x^{(m/2)-1} \cdot \Big(1 + \frac{m}{n} \cdot x\Big)^{-(m+n)/2},\ x > 0.$$

Tímto jsme odvodili funkci hustoty Fisher-Snedecorova rozdělení pravděpodobnosti.



Obrázek 3.5: Funkce hustoty Fisher-Snedecorova rozdělení s různými stupni volnosti

3.2.4. Studentovo rozdělení

Studentovo rozdělení je jedním z nejvíce užívaných spojitých rozdělení pravděpodobnosti, se kterými se lze setkat. Užívá se například k testování hypotéz o shodě středních hodnot dvou náhodných veličin se stejným rozdělením pravděpodobnosti - například k porovnání výnosnosti dvou různých druhů pšenice. Stejně jako Fisher-Snedecorovo rozdělení je Studentovo rozdělení užíváno v regresní analýze.

Definice 17. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, přičemž $X \sim N(0, 1)$,

$Y \sim \chi^2_n, \quad n \in \mathbb{N}$. Potom náhodná veličina

$$Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \tag{3.4}$$

má *Studentovo rozdělení* s n stupni volnosti.

Poznámka 9. Studentovo rozdělení s n stupni volnosti značíme t_n.

Příklad 20. Odvoďte funkci hustoty $f_Z(x)$ Studentova rozdělení.

Řešení: Nejprve se podíváme na následující pravděpodobnost

$$P\{-x \leq Z \leq x\} = P\{Z^2 \leq x^2\} = P\{(X^2/(Y/n)) \leq x^2\}.$$

Levá strana rovnice lze psát

$$P\{-x \leq Z \leq x\} = \int_{-x}^{x} f_Z(t)\, dt.$$

Nyní nás zajímá podíl $\frac{X^2}{Y/n}$. Náhodná veličina X má normované normální rozdělení. Definice χ^2-rozdělení říká, že pokud U_i je n vzájemně nezávislých náhodných veličin s rozdělením pravděpodobnosti $N(0,1)$, pak náhodná veličina X tvaru $X = \sum_{i=1}^{n} {U_i}^2$ má χ^2-rozdělení o n stupních volnosti. Odtud plyne, že náhodná veličina X^2 v našem případě má rozdělení ${\chi^2}_1$. Náhodná veličina Y má χ^2- rozdělení s n stupni volnosti. Z definice Fisher-Snedecorova rozdělení (3.3) víme, že náhodná veličina Z tvaru $Z = \frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$ má Fisher-Snedecorovo rozdělení, jestliže náhodná veličina X má χ^2-rozdělení o m stupních volnosti a náhodná veličina Y má χ^2-rozdělení o n stupních volnosti. V našem případě dostaneme $F_{1,n}$ a platí

$$P\{-x \leq Z \leq x\} = \int_{-x}^{x} f_Z(t)\, dt = \int_{0}^{x^2} f_{1,n}(t)\, dt.$$

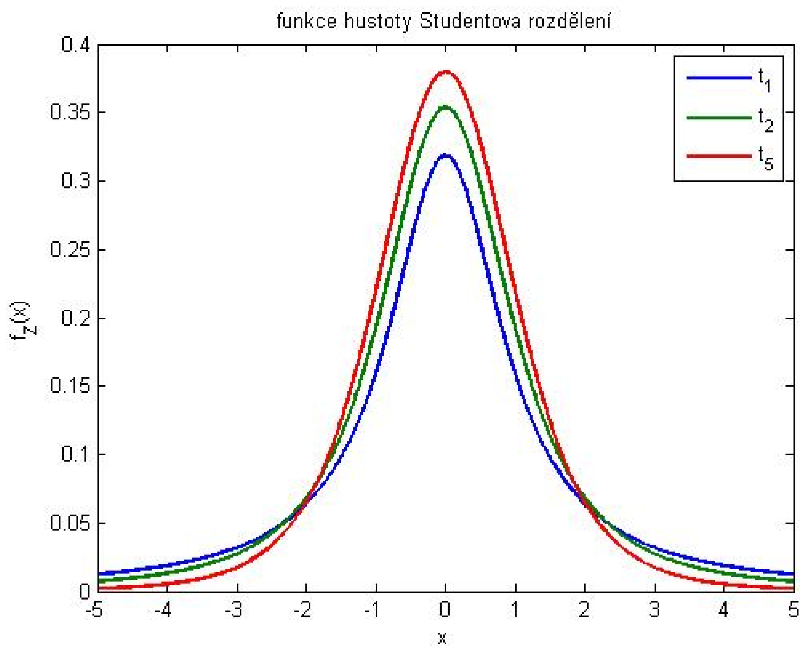
Oba integrály zderivujeme vzhledem k proměnné x

$$f_Z(x) + f_Z(-x) = f_{1,n}(x^2) \cdot 2x$$

Studentovo rozdělení je symetrické, jelikož normované normální rozdělení je symetrické, a platí

$$2 \cdot f_Z(x) = f_{1,n}(x^2) \cdot 2x$$

$$f_Z(x) = f_{1,n}(x^2)x = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$



Obrázek 3.6: Funkce hustoty Studentova rozdělení s různými stupni volnosti

3.2.5. Weibullovo rozdělení

Weibullovo rozdělení nachází využití v teorii spolehlivosti pro modelování doby života a při popisu prvků, při nichž se projevuje opotřebení materiálu, které je modelováno parametrem d. Funkce hustoty tohoto spojitého rozdělení pravděpodobnosti není definována pomocí funkce gamma, avšak funkci gamma nalezneme při výpočtu základních charakteristik Weibullova rozdělení - střední hodnoty a rozptylu. Rozdělení definoval švédský fyzik Waloddi Weibull v roce 1939.

Definice 18. Spojitá náhodná veličina X s hustotou f_X má na *Weibullovo rozdělení*, jestliže existují reálná čísla $c > 0$ a $d > 0$ tak, že f_X je tvaru

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c \cdot x^{c-1}}{d^c} \cdot e^{-(x/d)^c}, & \text{pro } x > 0 \\ 0, & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$$

Poznámka 10. Weibullovo rozdělení s parametry c a d značíme $W(c, d)$.

Věta 9. *Pro hodnotu parametru $c = 1$ dostaneme exponenciální rozdělení pravděpodobnosti.*

Důkaz. Pokud v definici Weibullova rozdělení položíme hodnotu $c = 1$, dostáváme ihned funkci hustoty exponenciálního rozdělení s parametrem $(1/d) > 0$. □

Věta 10. *Náhodná veličina X s rozdělením pravděpodobnosti $W(c, d)$ má $E(X) = d \cdot \Gamma\Big(\frac{1}{c} + 1\Big)$ a $var(X) = d^2 \cdot \Big[\Gamma\Big(\frac{2}{c} + 1\Big) - \Gamma^2\Big(\frac{1}{c} + 1\Big)\Big]$.*

Důkaz.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{c \cdot x^{c-1}}{d^c} \cdot e^{-(x/d)^c}\, dx =$$

$$= c \cdot \int_0^{\infty} (\frac{x}{d})^c \cdot e^{-(x/d)^c}\, dx.$$

Zvolíme substituci $t = \Big(\frac{x}{d}\Big)^c$, potom $dx = \frac{d}{c} \cdot t^{(1/c)-1}\, dt$. Po dosazení dostáváme

$$E(X) = d \cdot \int_0^{\infty} t^{(1/c)} \cdot e^{-t}\, dt = d \cdot \Gamma\Big(\frac{1}{c} + 1\Big).$$

Pro výpočet rozptylu opět vycházíme ze vztahu $var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. Při výpočtu $E(X^2)$ užijeme stejnou substituci tvaru $t = \Big(\frac{x}{d}\Big)^c$.

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \frac{c \cdot x^{c+1}}{d^c} \cdot e^{-(x/d)^c}\, dx =$$

$$= d^2 \cdot \int_0^{\infty} t^{(2/c)} \cdot e^{-t}\, dt = d^2 \cdot \Gamma\Big(\frac{2}{c} + 1\Big).$$

$$var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = d^2 \cdot \Big[\Gamma\Big(\frac{2}{c} + 1\Big) - \Gamma^2\Big(\frac{1}{c} + 1\Big)\Big].$$

□

Jak již bylo řečeno na začátku této podkapitoly, Weibullovo rozdělení se využívá v teorii spolehlivosti pro modelování doby života a při zjišťování míry poruchovosti u zařízení, která podléhají opotřebení. Míra poruchovosti je definována jako funkce proměnné t tvaru

$$h(t) = \frac{c}{d} \cdot \left(\frac{t}{d}\right)^{c-1},\ c > 0,\ d > 0.$$

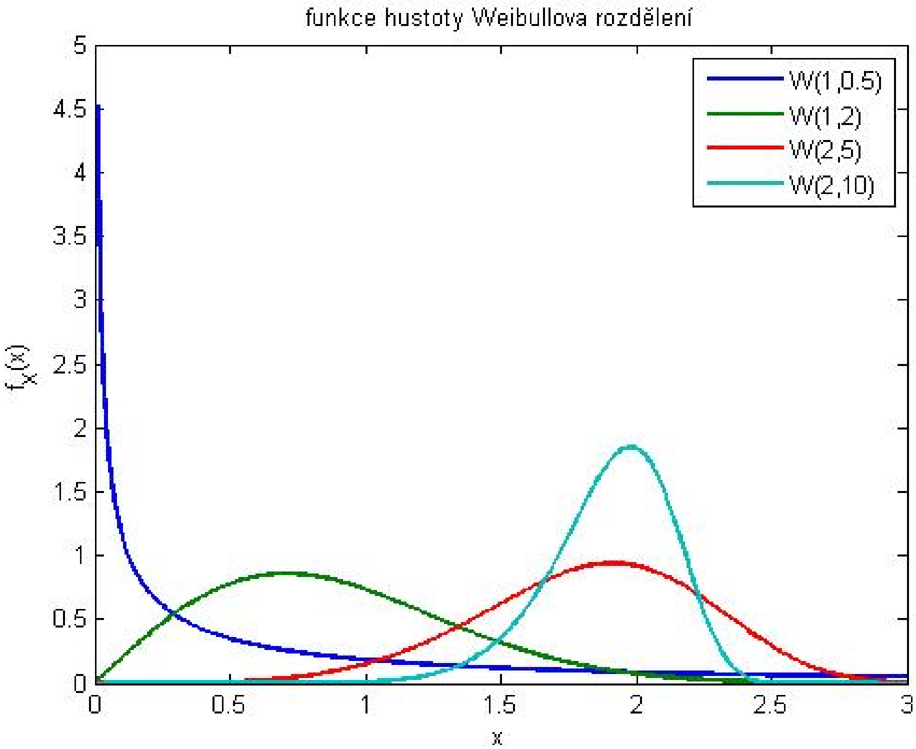
V souvislosti se zavedením míry poruchovosti je vhodné si uvést následující výčet možného užití Weibullova rozdělení.

1. $c < 1$ - s rostoucím časem t se zmenšuje míra poruchovosti, méně součástek se porouchává. Při modelování doby života se užívá pro modelování dětské a kojenecké úmrtnosti, kdy platí, že čím je dítě starší, tím menší je pravděpodobnost jeho úmrtí.

2. $c = 1$ - míra poruchovosti je konstantní. Při modelování doby života dochází k náhodným úmrtím jako je například zasažení bleskem či smrt při nehodě.

3. $c > 1$ - s rostoucím časem se zvětšuje míra poruchovosti - dochází k opotřebení více součástek například jejich korozí. Při modelování doby života umírá více lidí na stáří a nemoci s ním spojené.

Parametr d udává rozsah hodnot náhodné veličiny s Weibullovým rozdělením pravděpodobnosti.



Obrázek 3.7: Funkce hustoty Weibullova rozdělení s různými parametry

Příklad 21. Výdrž baterie je modelována náhodnou veličinou s rozdělením pravděpodobnosti $W(\frac{1}{2}, 2000)$.

- Určete průměrnou výdrž baterie.
- Určete pravděpodobnost, že baterie vydrží více než 3000 hodin.

Řešení: Průměrná výdrž baterie je dána střední hodnotou a v našem případě platí

$$E(X) = d \cdot \Gamma\Big(\frac{1}{c} + 1\Big) = 2000 \cdot \Gamma(3) = 4000.$$

Baterie vydrží v průměru 4000 hodin.

Nyní spočítejme pravděpodobnost, že baterie vydrží funkční více než 3000 hodin, tedy $P\{X > 3000\} = 1 - F(3000)$. Jako vhodné se jeví nalézt distribuční funkci a spočítat pomocí ní pravděpodobnost výdrže.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{c \cdot x^{c-1}}{d^c} \cdot e^{-(x/d)^c}\, dx$$

Zvolíme substituci $t = (\frac{x}{d})^c$, poté $dx = \frac{d}{c} \cdot t^{(1/c)-1}\, dt$. Meze integrace se nezmění. Po provedení substituce dostáváme

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = 1 - e^{-t} = 1 - e^{-(x/d)^c}.$$

Můžeme přikročit k výpočtu pravděpodobnosti.

$$P\{X > 3000\} = 1 - F(3000) = 1 - (1 - e^{-(3000/2000)^{0,5}}) = e^{-(1,5)^{0,5}} \approx 0,2938.$$

Baterie vydrží více než 3000 hodin s pravděpodobností $0,2938$.

3.2.6. Wishartovo rozdělení

Wishartovo rozdělení je vícerozměrným zobecněním χ^2-kvadrát rozdělení a také zobecnění gamma rozdělení, pokud jsou stupně volnosti neceločíselné. Využití nalézá v hledání odhadů kovariančních matic ve vícerozměrné statistice a v Bayesovské statistice. Toto rozdělení bylo popsáno Johnem Wishartem, matematikem a zemědělským statistikem pocházejícím ze Skotska.

Definice 19. Nechť máme definovány nezávislé náhodné veličiny

$$X_1 \sim N_p(\mu_1, \Sigma), \cdots, X_n \sim N_p(\mu_n, \Sigma)$$

s p-rozměrným normálním rozdělením, střední hodnotou $\underset{(p\times 1)}{\mu_i}$, $i = 1, \cdots, n$ a varianční maticí $\underset{(p\times p)}{\Sigma}$. Označme

$$\underset{(n\times p)}{M} = \begin{pmatrix} {\mu_1}^T \\ \vdots \\ {\mu_n}^T \end{pmatrix}, \underset{(n\times p)}{X} = \begin{pmatrix} {x_1}^T \\ \vdots \\ {x_n}^T \end{pmatrix}, \underset{(p\times p)}{Y} := X^T X = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_i^T.$$

Sdružené rozdělení prvků matice $Y := X^T X$ se nazývá p-rozměrné *Wishartovo rozdělení* o n stupních volnosti s parametry Σ a M.

Poznámka 11. Wishartovo p-rozměrné rozdělení o n stupních volnosti s parametry Σ a M značíme $Y \sim W_p(n, \Sigma, M)$. Jestliže $M = 0$, nazýváme rozdělení centrální a značíme jej $Y \sim W_p(n, \Sigma)$.

Na závěr této kapitoly si definujme hustotu náhodné veličiny s Wishartovým rozdělením, ve které nalezneme funkci gamma.

Definice 20. Hustota náhodné veličiny $Y \sim W_p(n, \Sigma)$ je dána vztahem

$$f_Y(y, \Sigma) = \frac{|y|^{\frac{n-p-1}{2}} exp\{-\frac{1}{2} st(y\Sigma^{-1})\}}{2^{\frac{np}{2}} \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} \prod\limits_{j=1}^{p} \Gamma(\frac{n+1-j}{2})},$$

kde $\underset{(p \times p)}{y}$ je symetrická a pozitivně definitní matice, matice $\underset{(p \times p)}{\Sigma}$ je pozitivně definitní, st značí stopu matice, $|y|$ značí determinant matice y a předpokládáme, že $n > p - 1$.

Závěr

Cílem diplomové práce bylo seznámit se s funkcí gamma, její historií, definicemi, vlastnostmi a jejím využitím.

První kapitola se věnovala historii funkce gamma, která pro mě byla natolik zajímavou, že jsem se ji alespoň ve stručné podobě rozhodla do práce zahrnout. Matematikové, kteří se interpolaci faktoriálu, z níž funkce gamma vzešla, věnovali, nestáli s tehdejšími znalostmi před jednoduchým úkolem a přesto dosáhli pozoruhodných výsledků.

Kapitola druhá obsahovala definice funkce gamma ve vícero podobách a ověření existence této funkce na kladné poloose. Zároveň jsme si ukázali nejznámější vlastnosti této funkce a problémy, se kterými se můžeme potkat, pokud chceme znát hodnoty funkce gamma na záporné poloose. Přenesli jsme se do funkce komplexní proměnné a definovali si funkci gamma v méně tradiční podobě, která byla zkoumána matematiky ve 20. století. Na závěr druhé kapitoly byl uveden graf funkce gamma a stručný výčet hodnot funkce. Zmínili jsme se také o funkci beta.

Třetí kapitola se zaměřila na nejznámější aplikace gamma funkce. V podkapitole o integrálním počtu jsme si demonstrovali několik praktických užití při výpočtu integrálu a okrajově se zmínili o eliptických integrálech a Bernoulliho lemniskátě. Podkapitola o teorii pravděpodobnosti a statistiky ukázala, jak široké využití má gamma funkce ve spojitých rozděleních pravděpodobnosti. Zjistili jsme, že se nejedná pouze o relativně známá rozdělení jako gamma či beta, ale například Weibullovo či Wishartovo. Odvodili jsme funkce hustoty Fisher-Snedecorova a Studentova rozdělení, se kterými se v hodinách statistiky studenti příliš nesetkají, neboť jsou tyto funkce hustoty poměrně komplikované.

Díky diplomové práci jsem si osvěžila a prohloubila znalosti z kurzů matematické analýzy či statistiky a zjistila, jak zajímavá může být historie matematiky. Nejvíce mne zaujalo statistické využití funkce gamma, kterému věnuju ve své práci velký prostor. Téma této práce splnilo má očekávání, když jsem si za osobní cíl stanovila lépe se seznámit s funkcí, které se v hodinách analýzy nevěnuje příliš prostoru.

Literatura

[1] Gronau, D.: Why is the gamma function so as it is? Universität Graz, 2002 [online 20.9.2014] Zdroj: http://www.uni-graz.at/~gronau/TMCS_1_2003.pdf

[2] Wikipedia.org: Gamma function, Daniel Bernoulli's letter to Goldbach, 1729-10-06 [online 20.9.2014] Zdroj: https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:DanielBernoulliLettreAGoldbach-1729-10-06.jpg

[3] Hannah, J.P.: Identities for the gamma and hypergeometric functions: an overview from Euler to present, University of the Witwatersrand, Johannesburg, 2013

[4] Nahin, P.J.: Euler: The Man and the Mathematical Physicist, Princeton, 2006 [online 20.9.2014] Zdroj: http://www.ega-math.narod.ru/Bell/Euler.htmhttp://www.ega-math.narod.ru/Bell/Euler.htm [online 20.9.2014]

[5] The Euler Archive: Euler's Correspondence with Christian Goldbach, OO0715, Euler to Goldbach, 08 January, 1730 [online 20.9.2014] Zdroj: http://eulerarchive.maa.org/correspondence/letters/OO0715.pdf

[6] Wikipedia.org: Leonhard Euler [online 20.9.2014] Zdroj: http://cs.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

[7] Davis, P.J.: Leonhard Euler's integral: A historical profile of the Gamma function, National Bureau of Standards, Washington, D.C., 2008 [online 20.9.2014] Zdroj: http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Chauvenet/Davis.pdf

[8] Artin, E.: The Gamma Function, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1964

[9] Malý, L.: Stirlingova formule, její historie a použití (Bakalářská práce), Matematický ústav Univerzity Karlovy, Praha, 2006

[10] Kolektiv autorů za redakce RNDr.Jiřího Nečase: Aplikovaná matematika I, A až L, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1977

[11] Veselý, J.: Základy matematické analýzy, Druhý díl, MFF Univerzity Karlovy v Praze, Matfyzpress, Praha, 2009

[12] Jarník, V.: Integrální počet (II), Academia, Praha, 1976

[13] Lecture 6: Gamma distribution, χ^2-distribution, Student t-distribution, Fisher F-distribution [online 10.3.2015] Zdroj: http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-443-statistics-for-applications-fall-2006/lecture-notes/lecture6.pdf

[14] Cassiniho křivka a ovál, Bernoulliho lemniskáta [online 10.3.2015] Zdroj: http://geometrie.kma.zcu.cz/work/KS/Cassini/CassiniOdk.pdf

[15] Gamma function [online 20.5.2015] Zdroj: http://www.math.ncku.edu.tw/~fjmliou/Calculus2/Gamma.pdf

[16] Conrad, K.: The Gaussian integral [online 13.9.2015] Zdroj: http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/analysis/gaussianintegral.pdf

[17] Černý, I.: Elementy teorie Lebesgueovy míry a integrálu [online 20.9.2015] Zdroj: http://matematika.cuni.cz/dl/cerny/cerny-lebesgue.pdf

[18] Biskup, R.: Základy teorie pravděpodobnosti, Náhodná veličina - Vybraná spojitá rozdělení, 2012 [online 22.11.2015] Zdroj: http://home.ef.jcu.cz/~birom/stat/prednasky/07four.pdf

[19] Schop, R.: Life Data Analysis using the Weibull distribution, 2008 [online 22.11.2015]

Zdroj: http://industrieleelektronica.fhi.nl/images/stories/pdfplot/presentatie_r_schop08.pdf

[20] Děmidovič, B.P.: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, 2003

[21] Hamhalter, J., Tišer, J.: Funkce komplexní proměnné, Skripta FEL, ČVUT, Praha, 2011

[22] Belk, J.: Convexity, Inequalities, and Norms, Bard College, 2016 [online 10.3.2016] Zdroj: http://math.bard.edu/belk/math461/Inequalities.pdf

[23] Cook, D.J.: A Bayesian view of Amazon Resellers, 2011 [online 10.4.2016]

Zdroj: http://www.johndcook.com/blog/2011/09/27/bayesian-amazon

[24] Cook, D.J.: Exact Calculation of Beta Inequalities, The University of Texas, Houston, Texas, 2005 [online 10.4.2016] Zdroj: http://www.johndcook.com/UTMDABTR-005-05.pdf