

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta strojní



DIPLOMOVÁ PRÁCE

ANALÝZA ODEZVY ROTORU NA KMITÁNÍ

ZÁKLADU

Liberec 2015

Bc. David Svoboda



TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta strojní

ANALÝZA ODEZVY ROTORU NA KMITÁNÍ ZÁKLADU

ANALYSIS OF KINEMATIC EXCITATION OF THE ROTOR

Vedoucí diplomové práce: **doc. Ing. Iva Petříková, Ph.D.**

Konzultant diplomové práce: **prof. Ing. Jaroslav Zapoměl, DrSc.**

Počet stránek: 67

Počet obrázku: 50

Počet tabulek: 8

Počet příloh: 2

Liberec 2015

Bc. David Svoboda

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta strojní

Akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. David Svoboda**
Osobní číslo: **S12000466**
Studijní program: **N2301 Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Aplikovaná mechanika**
Název tématu: **Analýza odezvy rotoru na kmitání základu**
Zadávající katedra: **Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Téma spadá do oblasti dynamiky rotorových soustav. Cílem je sestavení numerického modelu rotoru, provedení modální analýzy a analýzy odezvy rotoru. Vstupními veličinami v modelu jsou parametry experimentálního zařízení pro demonstraci jevů z rotorové dynamiky - rotoru s kluzným uložením.

Postup řešení:

1. Sestavení modelu rotoru metodou konečných prvků.
2. Provedení modální analýzy rotoru.
3. Výpočet ustálené odezvy rotoru na kinematické buzení základu.

Rozsah grafických prací: -
Rozsah pracovní zprávy: cca 70 stran
Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická
Seznam odborné literatury:


- [1] BYRTUS, M., M. HAJŽMAN a V. ZEMAN. *Dynamika rotujících soustav*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2010. ISBN 978-80-7043-953-1.
[2] FRISWELL, Michael I. et al: *Dynamics of Rotating Machines*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. ISBN 9780521850162.
[3] MUSZYNSKA, Agnieszka. *Rotordynamics*. London: CRC Press, 2005. ISBN 9780824723996.

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Iva Petříková, Ph.D.
Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

Datum zadání diplomové práce: 15. října 2014
Termín odevzdání diplomové práce: 25. května 2015


prof. Dr. Ing. Petr Lenfeld
děkan




doc. Ing. Iva Petříková, Ph.D.
vedoucí katedry

V Liberci dne 15. října 2014

PROHLÁŠENÍ

Byl jsem seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladu, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

V Liberci dne 18. května 2015

Svoboda
.....

DECLARATION

I have been notified of the fact that Copyright Act No. 121/2000 Coll. applies to my thesis in full, in particular Section 60, School Work.

I am fully aware that the Technical University of Liberec is not interfering in my copyright by using my thesis for the internal purposes of TUL.

If I use my thesis or grant a licence for its use, I am aware of the fact that I must inform TUL of this fact; in this case TUL has the right to seek that I pay the expenses invested in the creation of my thesis to the full amount.

I compiled the thesis on my own with the use of the acknowledged sources and on the basis of consultation with the head of the thesis and a consultant.

In Liberec 18 May 2015

Svoboda
.....

PODĚKOVÁNÍ

V první řadě bych chtěl poděkovat mé rodině a přátelům, kteří mě během studia podporovali a tím mi i dali potřebný prostor pro studium. Dále patří mé poděkování samotné TUL, především katedře KMP a mé vedoucí doc. Ing. Ivě Petříkové, Ph.D. Zde jsem strávil převážnou dobu studia, poznal spoustu lidí, kteří mě mnoho naučili, a všem tímto děkuji.

ABSTRAKT

Práce se zabývá problémem rotorové dynamiky. Je zkoumána dynamická odezva kinematically buzeného rotoru. Studii může reprezentovat například rotor turbodmychadla, do kterého jsou přenášeny vibrace z motoru skrz ložiska. Rotor je modelován metodou konečných prvků a výsledky jsou otestovány v softwaru MSC.Adams. Metoda konečných prvků popisuje hřídel, kotouče jsou uvažovány jako tuhé. Kompletní model rotoru včetně ložisek je podroben modální analýze a dynamické simulaci. Všechny výpočty jsou provedeny v matematickém softwaru Scilab.

Klíčová slova:

rotorová dynamika, kinematické buzení, metoda konečných prvků

ABSTRACT

The work deals with rotor dynamics problem. Dynamic response of rotor with kinematically excited support is investigated. The studied case can represent for example a turbocharger that is component of an engine. Vibration of the engine is transported to the rotor of turbocharger through bearings. The finite element method model was prepared and results were validated using MSC.Adams software. The finite element method describes the shaft, the disc is assumed to be rigid. The complete model of rotot with discs and bearings is studied, including modal analysis and simulation of motion. All computation is performed using the math software Scilab.

Keywords:

rotor dynamics, kinematic excitation, finite element method

OBSAH

Seznam použitých veličin	viii
------------------------------------	------

ÚVOD

1. Předmluva	1
2. Jevy v rotorové dynamice	2
3. Řešené problémy v dynamice rotorů	4

TEORETICKÝ POPIS

4. Tvorba modelu rotoru	5
4.1 Hřídelový konečný prvek	6
4.2 Matice externího tlumení	14
4.3 Odvození matice vnitřního tlumení	16
4.4 Sestavení globálního modelu hřídele.	19
4.5 Fyzikální model tuhého kotouče	20
4.6 Fyzikální model ložiska	22
5. Odvození modální analýzy rotoru	24
6. Odvození kinematického buzení	28
7. Numerické řešení soustavy pohybových rovnic	29

ANALÝZA ROTORU

8. Testovaný rotorový systém	31
8.1 Hřídel	32
8.2 Kotouč	33
8.3 Kluzné ložisko	34
8.4 Lamelová spojka	36
8.5 Kalibrační model rotoru	38
8.6 Odladění konzervativního modelu rotoru	40
8.7 Nekonzervativní model rotoru	42
9. Modální analýza rotoru	44
10. Dynamická odezva	53
10.1 Simulace pohybu rotoru	59
11. Otestování analýzy rotoru v softwaru MSC.Adams	62

ZÁVĚR	66
Použitá literatura	68
PŘÍLOHY	
A Rozbor vlastního vektoru	71
B Simulace pohybu rotoru	73

SEZNAM POUŽITÝCH VELIČIN

Skalární veličiny – latinské znaky

$A, A(x)$	$[m^2]$	plocha průřezu
b_I	$[Ns/m]$	koeficient vnitřního izotropního útlumu
b_{EY}, b_{EZ}	$[Ns/m]$	koeficienty vnějšího tlumení
d	$[m]$	průměr
E	$[MPa]$	Youngův modul pružnosti v tahu
E_D	$[J]$	disipační energie
E_k	$[J]$	kinetická energie
E_p	$[J]$	potenciální energie
f	$[Hz]$	frekvence buzení
F	$[N]$	síla
G	$[MPa]$	Youngův modul pružnosti ve smyku
I	$[kgm^2]$	moment setrvačnosti k příčné ose
I_0	$[kgm^2]$	moment setrvačnosti k ose symetrie
j		imaginární jednotka
J	$[m^4]$	kvadratický moment plochy
J_p	$[m^4]$	polární moment plochy
k	$[N/m]$	tuhost
l	$[m]$	délka
L	$[J]$	Lagrangeova funkce
m	$[kg]$	hmotnost
n	$[ot/s]$	otáčky rotoru
s_i	$[rad/s]$	vlastní čísla systému
t	$[s]$	čas
u	$[m]$	posuv průřezu ve směru osy x
v	$[m]$	posuv průřezu ve směru osy y
w	$[m]$	posuv průřezu ve směru osy z
x, y, z	$[m]$	souřadnicové osy pevného souřadného systému

Skalární veličiny – řecké znaky

α	[rad/s]	reálná část vlastního čísla
ε	[I]	délková poměrná deformace
γ	[I]	úhlová poměrná deformace
δ_{ij}		Kroneckerova delta
ζ	[I]	poměrný útlum
ϑ	[rad]	natočení průřezu v místě x kolem osy y
ν	[I]	Poissonova konstanta
π	[I]	Ludolfovo číslo
ρ	[kg/m ³]	hustota
φ	[rad]	torzní natočení průřezu
ψ	[rad]	natočení průřezu kolem osy z
ω	[rad/s]	úhlová rychlost
ω_0	[rad/s]	úhlová rychlost rotoru
Ω	[rad/s]	vlastní frekvence
η, ζ	[m]	souřadnicové osy rotujícího souřadného systému

Vektory – latinské znaky

c	vektor modálního prostoru
f	vektor silového působení
q	zobecněný vektor výchylek
u	vektor stavového prostoru
v	vektor rychlosti
v_j	pravostranné vlastní vektory
w_i	levostranné vlastní vektory

Vektory – řecké znaky

Φ	kubická bázová funkce
Ψ	lineární bázová funkce
ω	úhlová rychlost

Matice – latinské znaky

A	Jacobiho matice
B_E	matice vnějšího útlumu
B_I	matice vnitřního útlumu
D	matice modálního tlumení
E	jednotková matice
G	matice gyroskopických účinků
I	matice hmotových charakteristik druhého řádu
J	matice plošných charakteristik druhého řádu
K	matice tuhosti
K_I	cirkulační matice
M	matice hmotnosti
N	matice stavového prostoru
P	permutační matice, matice stavového prostoru
S_p	spektrální matice ve stavovém prostoru
T	transformační matice
V	modální matice
W	modální matice levostranných vlastních vektorů

Matice – řecké znaky

Λ	spektrální matice
----------	-------------------

ÚVOD

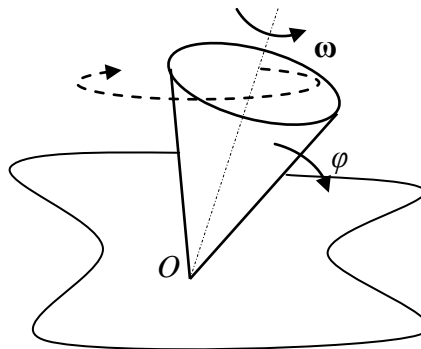
1. PŘEDMLUVA

Vibrace jsou nedílnou součástí drtivé většiny strojů a zařízení. Proto je důležité věnovat se i jejich dynamickému analyzování. Během vývoje stroje lze předejít nepříjemnostem, které by vibrace způsobily. Zároveň je ale důležité provést i měření na vlastním stroji, ať po zhotovení prototypu a tím i otestování platnosti fyzikálního modelu, tak i během provozu stroje a tím i například odhalit, kdy dochází k opotřebením ložisek, které by pak svou neúplnou funkčností způsobovali znehodnocování stroje. Vibrace jsou samozřejmě přenášeny i do základů stroje a tedy dokážeme i zjistit, jak moc stroj ovlivňuje své okolí. Obzvláště tam, kde vedle sebe susedí mnoho strojů, může být jejich chod vzájemně ovlivňován, i když samotný jedinec je zkonstruován uspokojivě z hlediska vibrací.

Převážná většina strojů má rotační jednotku, nějaké rotory (motory, předovky a jakékoliv další prvky...) u kterých je snaha o eliminaci jakýchkoliv nevyvážeností, které by způsobily rozkmitání hřídele, tím i celého zařízení. Proto byla provedena analýza tohoto vlivu vibrací na vlastní dynamiku rotoru. Jako jeden z mnoha reprezentantů tohoto problému může být turbodmychadlo upevněné na motorové jednotce, která se vyznačuje značným chvěním, které by mohlo mít vliv na vlastní chod rotoru turbodmychadla. To jsou rychloběžné lehké stroje. Ale například obrovské turbíny elektráren, které musí být vyrobeny se značnou přesností, by se při sebemenším náznaku rezonance zadřely a došlo by i dokonce k roztržení rotoru. Jelikož jde o obrovské masy hmoty, tak je to i nebezpečná záležitost. Není pochybností o tom, že provádět dynamické analýzy je opravdu nutné, ať z hlediska urychlení vývoje, tak i zvýšení bezpečnosti zařízení a v neposlední řadě ušetření spousty nákladů, ať při výrobě prototypů i nákladů na opravu poškozených zařízení. Práce ukazuje, jak numericky řešit tuto problematiku, jak sestavit vlastní fyzikální model reálného rotoru a matematicky ho popsat. Numerická analýza může velmi pomoci při vývoji strojů, nebo naopak pomoci při diagnostice problému. Ale opravdu silná stránka ukázané metodiky je možnost aplikace optimalizace na rotorový systém.

2. JEVY V ROTOROVÉ DYNAMICE

Úlohy rotorové dynamiky tvoří komplikovanější problém, než standardní dynamické systémy. Tuto komplikaci způsobují otáčky rotoru a tím vyvolaný gyroskopický efekt, který lze popsat kuželem, který je postaven na svůj vrchol a tím je v labilní poloze. Pokud kužel rotuje kolem své osy, začne vytvářet kolem vrcholu krouživý pohyb (Obr. 1).



Obr. 1: Gyroskopický efekt

Vše vysvětlí zákon o změně momentu hybnosti. Rotací získá kužel moment hybnosti a v okamžiku, kdy se začne odklánět od svislé osy vlastní tíhou, způsobí časovou změnu momentu hybnosti a dojde ke vzniku momentového působení na kužel. Tento moment způsobuje zmiňovaný krouživý pohyb. Gyroskopický moment lze vyjádřit dle obrázku 2, kde je proveden dynamický rozbor kužele. Diferenciální změna momentu hybnosti je dána vztahem:

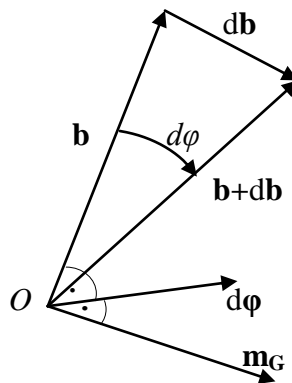
$$d\mathbf{b} = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{b} , \quad (2.1)$$

kde moment hybnosti je

$$\mathbf{b} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} . \quad (2.2)$$

Ve vztahu (2.2) je \mathbf{I} tenzor setrvačnosti tělesa a $\boldsymbol{\omega}$ je vektor úhlové rychlosti. Ze zákona o změně momentu hybnosti získáváme hledaný vztah pro moment způsobený gyroskopickými účinky \mathbf{m}_G (předpokládáme konstantní úhlovou rychlost $\boldsymbol{\omega}$).

$$\mathbf{m}_G = \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$$



Obr. 2: Gyroskopický moment

Zde už se začíná objasňovat rozdíl mezi rotujícím a nerotujícím rotorem. Rotor je tvořen hřídelem a kotouči na něm připevněných. Pokud hřídel nerotuje a zároveň se zatížením deformuje v radiálním směru, nedochází k žádnému dalšímu vybuzení silového působení. Pokud ale rotuje a začne se deformovat v radiálním směru, začne se na něm budit onen popsaný moment, ať už od hmoty kotoučů, tak od vlastní hmoty hřídele. Proto nelze tento vliv zanedbávat.

Dále je vhodné zmínit, jak rotace ovlivňuje dynamickou stabilitou rotorů, ale tento problém bude rozebrán v samostatné podkapitole této práce. A samozřejmě je známo, že rotací se budí i odstředivá síla způsobena neideálním vyvážením apod. Zatížení, lépe řečeno vlivy okrajových podmínek jsou velmi rozmarné, ať od uložení, kontakty mezi ozubenými koly a jakékoliv situace se kterými se můžeme setkat. Vše záleží na typu rotorové soustavy, kterou popisujeme.

3. ŘEŠENÉ PROBLÉMY V DYNAMICE ROTORŮ

V oblasti rotorové dynamiky již byla řešena spousta typů úloh. Ať z hlediska různých typů zatížení, tak i druhu uložení, případně soustavy rotorů. Převážná většina prací ale zkoumá dynamické účinky rotoru na své okolí, nebo vyšetřuje dynamiku rotoru uloženého v inerciální soustavě. To znamená vlastní pohyb, vliv použitých ložisek a podobných dalších modifikací. Dále například i vliv nevyváhy rotoru, efekt fázového natočení nevyvážených kotoučů [1]. Diplomová práce se zabývá typem úlohy, kdy je uvažován ideálně vyvážený rotor, tím je předcházeno vzniku dynamických sil vzniklých nevyváhou. Uvažováno je ale uložení rotoru v neinerciální soustavě. Tím je zkoumán pouze vliv kinematického buzení na dynamiku rotoru bez ovlivnění výsledků dalšími externími účinky. Práce, která se například zabývá externím buzením [2] zjistila, že buzení rotoru v hydrodynamických ložiskách ovlivňuje amplitudy vibrací, ale neovlivňuje mez stability. Zpravidla se práce na toto téma zabývají, jak potlačit vibrace rotoru externím buzením [3]. Myšleno je řízené buzení. Cílem diplomové práce nebylo zkoumat aktivní buzení, ale jak náhodné kinematické buzení ovlivní dynamické chování rotoru. Takovýto koncept práce nalezen nebyl.

TEORETICKÝ POPIS

4. TVORBA MODELU ROTORU

K popsání vlastního rotoru je možno použít mnoho fyzikálních metod. Lze zanedbat hmotu pružných členů a uvažovat pouze hmotu tuhých členů systému, nebo diskretizovat hmotu pružného členu do jednotlivých uzlů spojených nehmotným členem, nebo popisovat systém jako kontinuum. Vše záleží na typu rotoru, čímž se myslí poměr hmotových charakteristik nábojů (kotoučů), které jsou usazeny na hřídeli, vůči hmotě vlastního hřídele. Nejvíce odpovídající realitě je popisovat systém jako kontinuum. Proto i v této práci byl tento typ popisu použit. Kontinuum lze popisovat dvěma způsoby. Buď využít analytický popis, anebo je výhodnější použít univerzální metodu pro řešení diferenciálních problémů na určité řešené oblasti. Tím je myšlena metoda konečných prvků. Touto cestou se dosáhne maximální obecnosti popisu úlohy, díky které se zanedbá žádná hmota. Zároveň musí být brán zřetel na to, že je to metoda aproximační, numerická, tedy je zapotřebí připravit dostatečně kvalitní model, metody řešení a provést kvalitativní rozbor výsledků.

Vlastní rotor se skládá ze tří hlavních částí. Tyto části jsou hřídel, náboje (což mohou být ozubená kola, turbínky, větráky atd.) a uložení. Dále do popisu patří i vlastní zatížení, které spolu s uložením tvoří okrajové podmínky problému.

V drtivé většině aplikací je hřídel kruhového průřezu s délkou značně převyšující jeho průměr. Proto ho lze popsat jako jedno-dimenzionální kontinuum (využijeme osové symetrie) pomocí konečných prvků. Použité konečné prvky byly tedy typu “beam“, neboli nosníkové prvky. Na nich se hledaly posuvy a natočení. Při odvození byl předpoklad zachování kolmosti roviny průřezu vzhledem k deformované ose prvku (Bernoulliho – Navierova hypotéza). Tím se zanedbává vliv posouvajících sil v průřezu.

Jelikož nebyl k dispozici speciální software pro řešení rotorových soustav, tak byla celá úloha naprogramovaná na základě popsané teorie v této práci. Protože vlastní otáčky hřídele mají své důsledky, které nelze zanedbat a lze také popsat jakákoliv ložiska, zatížení, získat výstupy z programu jaké potřebujeme apod. Díky takto

vlastnímu vytvoření programu nám nejsou kladeny meze v analýze rotoru oproti konvenčnímu softwaru, ve kterém by toto nebylo možné.

Vlastní metoda konečných prvků umožňuje popsat jakékoliv těleso, nebo prostředí a na něm jakýkoliv fyzikální problém. Stačí k tomu jen popis zkoumaného problému. Fyzikální rovnice popisující zkoumaný děj vycházejí z rovnic kontinua a jsou to parciální diferenciální rovnice. Ty platí na určité oblasti, která má svou hranici. V tomto případě je to hřídel rotoru. Aby úloha byla řešitelná, tak oblast, na které je řešen problém, je rozdělena na konečné prvky konkrétního jednoduchého tvaru a na nich lze rovnice vyřešit. Na každém prvku je průběh zkoumané veličiny nahrazen zvolenou aproximační funkcí. Z této funkce se vytvoří funkcionál, tj. veličina, která popíše energii funkce na prvku, a následně je hledán minimum této energie (v přírodě se jakýkoliv systém snaží dostat do stavu s nejnižší energií). Proto lze říci, že jde o metodu energetickou. Po vyřešení problému jsou známy koeficienty popisující aproximační funkci a tím i získaný průběh hledané veličiny. Kvalita aproximace je závislá na kvalitě aproximační funkce a zároveň na vlastní diskretizaci zkoumané oblasti na konečné prvky. Zároveň pro úsporu výpočetního času je důležité, aby aproximační funkce nebyla příliš složitá, pokud to není vzhledem ke zkoumané veličině nutné.

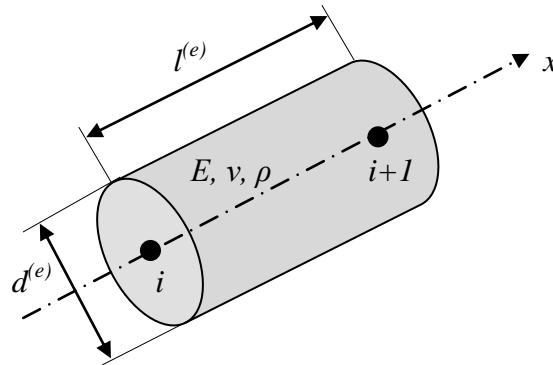
4.1 HŘÍDELOVÝ KONEČNÝ PRVEK

Pro popis posuvů uzlů hřídelového elementu byl použit Lagrangeův popis kontinua [4], kde se jako referenční konfigurace použije počáteční konfigurace uzlů. Zároveň byl rotor popisován v pevném souřadném systému, tj. spojeného se statorem. Hřídel se točí kolem osy x úhlovou rychlostí ω_0 . Použitý typ konečného prvku popisovaný v této kapitole byl odvozen v literatuře [5].

Prizmatický element kruhového průřezu (Obr.3) o délce $l^{(e)}$ a průměrem $d^{(e)}$ s počátkem v uzlu i a koncem v uzlu $i+1$ v nedeformovaném stavu má materiálové vlastnosti - Youngův modul pružnosti v tahu E , Poissonovo číslo ν a hustotu ρ . Na tomto prvku byly hledané tyto deformace:

- posuv místa x ve směru osy x , které označíme písmenem $u(x)$
- posuv místa x ve směru osy y , které označíme písmenem $v(x)$
- posuv místa x ve směru osy z , které označíme písmenem $w(x)$

- natočení průřezu v místě x kolem osy x , které označíme písmenem $\varphi(x)$.



Obr. 3: Hřídellový prvek

Průběhy těchto deformací aproximují zvolené báze funkce, pro které se hledají jejich koeficienty zapsány do vektorů \mathbf{c}_i . Radiální deformace aproximují kubické polynomy

$$v(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{c}_1, \quad (4.1)$$

$$w(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{c}_2, \quad (4.2)$$

kde ve (4.1) a (4.2) je

$$\mathbf{\Phi}(x) = [1 \ x \ x^2 \ x^3], \quad (4.3)$$

a axiální a torzní deformace aproximují lineární polynomy

$$u(x) = \mathbf{\Psi}(x)\mathbf{c}_3, \quad (4.4)$$

$$\varphi(x) = \mathbf{\Psi}(x)\mathbf{c}_4, \quad (4.5)$$

kde ve (4.4) a (4.5) je

$$\mathbf{\Psi}(x) = [1 \ x]. \quad (4.6)$$

Pro aproximaci hledaných posuvů v radiálním směru byla použita tzv. Hermitova interpolace, to znamená, že tvar křivky je dán dvěma okrajovými body a jejich tečnými vektory. Tento popis zajistí, že jednotlivé elementy budou v uzlu spojité a zároveň mají společnou tečnu v uzlu, což je nutné pro reálný popis objektů. Z tohoto důvodu je nutné zavést další dvě deformace a to natočení kolem osy y a z , neboli zavést derivace posuvů v a w a tím zjistit potřebnou tečnu v uzlu.

- natočení průřezu v místě x kolem osy y , které označíme písmenem $\vartheta(x)$
- natočení průřezu v místě x kolem osy z , které označíme písmenem $\psi(x)$

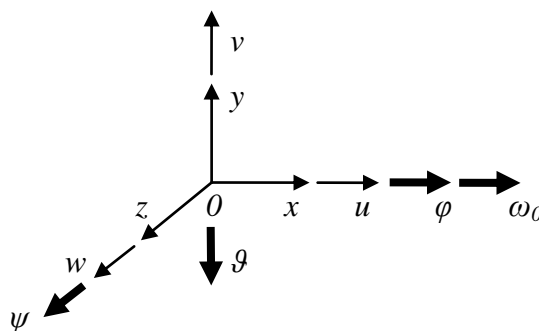
$$\psi(x) = \Phi'(x)\mathbf{c}_1, \quad (4.7)$$

$$\vartheta(x) = -\Phi'(x)\mathbf{c}_2, \quad (4.8)$$

kde byla derivovaná bázová funkce Φ podle souřadnice x

$$\Phi'(x) = [0 \ 1 \ 2x \ 3x^2]. \quad (4.9)$$

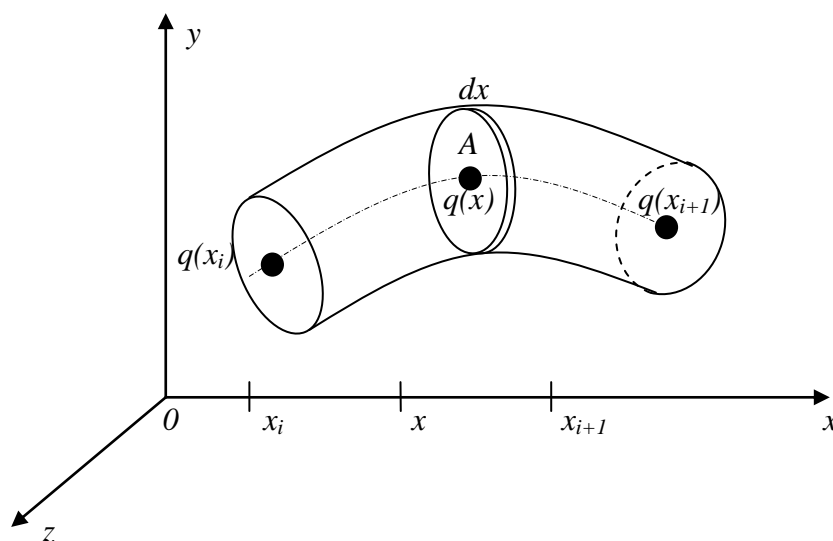
Na obrázku 4 lze vidět souřadnicový systém elementu včetně všech zavedených posuvů a úhlové rychlosti hřídele. Translační výchylky jsou symbolizovány tenkou šipkou, rotace a natočení kolem příslušné osy je symbolizované tlustou šipkou. Ze zavedených výchylek je i zřejmé, proč u natočení kolem osy y je znaménko mínus. Aby kompletní zavedená kladná výchylka byla opravdu kladná, musí být v prvním kvadrantu prostoru, to znamená, že translační posuvy jsou zavedeny ve směru os. Při pohledu do roviny x, y derivace podle souřadnice x ukazuje do prvního kvadrantu. Ale při pohledu do roviny z, x by derivace podle souřadnice x ukazovala do záporných hodnot, proto musí být zavedena se záporným znaménkem, aby byla dodržena kladná výchylka v prvním kvadrantu v referenčním prostoru.



Obr. 4: Souřadnicový systém

Nyní lze zavést zobecněný vektor všech výchylek na prvku $\mathbf{q}(x)$.

$$\mathbf{q}(x) = [u(x) \ v(x) \ \psi(x) \ w(x) \ \vartheta(x) \ \varphi(x)]^T \quad (4.10)$$



Obr. 5: Deformovaný hřidelový prvek

Na obrázku 5 je zobrazen deformovaný hřidelový prvek. Takto byly popsány jednotlivé deformace pomocí aproximačních funkcí na elementu. Nyní je ale zapotřebí zajistit matematicky spojitost a tečnost těchto funkcí pro sousední elementy a tím aproximovat hledané deformace na celém tělese. Jelikož jsou funkce na jednotlivých elementech definované pomocí uzlů, tak i vlastní koeficienty aproximačních funkcí je vhodné vyjádřit pomocí posuvů a natočení uzlů. To eliminuje hledání neznámých koeficientů báзовých funkcí \mathbf{c}_i a zároveň zajistí požadovanou spojitost nultého a prvního řádu aproximačních funkcí mezi jednotlivými elementy. Funkce posuvů pak mají tvar podle (4.11) z [5]

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbf{\Psi}(x)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_3, & \varphi(x) &= \mathbf{\Psi}(x)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_4, \\ v(x) &= \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1, & \psi(x) &= \mathbf{\Phi}'(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1, \\ w(x) &= \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2, & \vartheta(x) &= -\mathbf{\Phi}'(x)\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

kde \mathbf{q}_i jsou hodnoty posuvů na koncích elementu, tj. uzlů

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} v(0) \\ \psi(0) \\ v(l) \\ \psi(l) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} w(0) \\ \vartheta(0) \\ w(l) \\ \vartheta(l) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(l) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_4 = \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(l) \end{bmatrix}.$$

Matice \mathbf{S}_i tvoří báze funkce, kde za x je dosazena 0 (tj. počátek elementu) a délku elementu $l^{(e)}$ (tj. konec elementu)

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}.$$

Konfiguraci prvku popíše vektor zobecněných posuvů pro krajní uzly (4.12).

$$\mathbf{q}^{(e)} = [\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \mathbf{q}_3^T \quad \mathbf{q}_4^T]^T \quad (4.12)$$

$$\dot{\mathbf{q}}^{(e)} = \frac{d\mathbf{q}^{(e)}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} = \frac{d^2\mathbf{q}^{(e)}}{dt^2}$$

Tímto se celá úloha hledání neznámých koeficientů báze funkcí převedla na úlohu, kde se hledají posuvy jednotlivých uzlů. Po zjištění těchto posuvů je známá kompletní informace o průběhu všech hledaných veličin na celém hřídeli. Je tedy zapotřebí nalézt hledané posuvy jednotlivých uzlů.

Nyní je zapotřebí nástroje, který sestaví soustavu rovnic, která bude řešena. Je velmi vhodné využít Lagrangeových rovnic 2. druhu (4.13). Takto se získají potřebné matice k popisu našeho dynamického systému velmi elegantní metodou.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(e)}} \right) - \frac{\partial L^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} = \mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \omega_0 \mathbf{G}^{(e)} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)} \quad (4.13)$$

$\mathbf{M}^{(e)}$ je matice hmotnostních parametrů prvku (symetrická, regulární a pozitivně definitní)

$\mathbf{G}^{(e)}$ je matice gyroskopických účinků prvku (antisymetrická)

$\mathbf{K}^{(e)}$ je tuhostní matice prvku (symetrická, singulární, pozitivně semidefinitní)

Ačkoliv byl systém uvažován jako konzervativní, tak přesto se získala soustava rovnic s rychlostním členem. Zároveň matice u onoho členu způsobuje, že se soustava chová jako silně nekonzervativní. Matice gyroskopických účinků je násobena dále úhlovou rychlostí hřídele, to znamená, že rotující systémy mění svou povahu s otáčkami. A právě toto způsobuje svázání pohybu hřídele ve směru y a z . Pokud systém nerotuje, provázanost pohybu mizí. To je důkaz o tom, že nelze úlohy rotorové dynamiky řešit klasickým způsobem bez akceptování vlivu otáček.

Pro využití Lagrangeových rovnic je nutné znát funkcionál systému, v tomto případě Lagrangeovu funkci $L^{(e)}$

$$L^{(e)} = E_k^{(e)} - E_p^{(e)}, \quad (4.14)$$

kde kinetická energie prvku [5] je

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l [A(x) \mathbf{v}^T(x, t) \mathbf{v}(x, t) + \boldsymbol{\omega}^T(x, t) \mathbf{J}(x) \boldsymbol{\omega}(x, t)] \rho dx, \quad (4.15)$$

kde v (4.15) je

$A(x)$ plocha průřezu prvku v místě x

$\mathbf{v}(x, t)$ rychlost elementu o délce dx v místě x

$\boldsymbol{\omega}(x, t)$ úhlová rychlost elementu o délce dx v místě x

ρ hustota materiálu

$\mathbf{J}(x)$ diagonální matice ve tvaru:

$$\mathbf{J}(x) = \begin{bmatrix} J_p(x) & 0 & 0 \\ 0 & J(x) & 0 \\ 0 & 0 & J(x) \end{bmatrix} = \frac{\pi d^4}{64} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

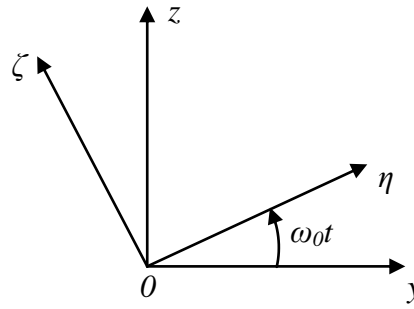
a potenciální energie prvku [5] ve (4.14) je

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{A(x)} \{ E \varepsilon_x^2(x, t) + G [\gamma_{xy}^2(x, t) + \gamma_{zx}^2(x, t)] \} dA(x) dx, \quad (4.16)$$

kde je E Youngův modul pružnosti v tahu

G Youngův modul pružnosti ve smyku.

Jelikož je popisován hřídel o kruhovém průřezu, lze vše odvozovat v pevném souřadnicovém systému y, z . Rotující souřadnicový systém rotuje spolu s hřídelem (Obr. 6) a pokud by nebyla splněna podmínka průřezu $J_\eta(x) = J_\zeta(x) = J(x)$, muselo by odvození probíhat právě v rotujícím souřadnicovém systému η, ζ .



Obr. 6: Rotující souřadnicový systém

Po specifikaci souřadných systémů lze začít popisovat kinematické veličiny prvku. Vektor rychlosti a úhlové rychlosti [6] (sférický pohyb) má tvar

$$\mathbf{v}(x, t) = \begin{bmatrix} \dot{u}(x, t) \\ \dot{v}(x, t) \\ \dot{w}(x, t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}(x, t) = \begin{bmatrix} \omega_0 + \dot{\varphi}(x, t) + \dot{\vartheta}(x, t)\psi(x, t) \\ \dot{\vartheta}(x, t) \\ \dot{\psi}(x, t) \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Dále byly definovány vztahy přetvoření [5] ze vztahu (4.16). Přetvoření definuje Lagrangeův popis, tzn., že konfigurační prostor je počáteční stav tělesa a od tohoto stavu je odměřovaná každá deformace

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (4.18)$$

Posunutí bodu tělesa o souřadnicích $[X, Y, Z]$ ve směru pevných souřadných os x, y, z vyjadřují vztahy (4.19) podle literatury [5]

$$\begin{aligned} u_x &= u(x) - y\psi(x) + zv(x), \\ u_y &= v(x) - z\varphi(x), \\ u_z &= w(x) + y\varphi(x), \end{aligned} \quad (4.19)$$

Po provedení všech zmíněných operací, dosazení aproximačních vztahů a vytvoření Lagrangeovy funkce, která je využita ve vztahu (4.13) jsou známé matice popisující element, tj. matice hmotnosti $\mathbf{M}^{(e)}$, matice gyroskopických účinků $\mathbf{G}^{(e)}$ a matice tuhosti $\mathbf{K}^{(e)}$ elementu [5]

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{(e)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{-T}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-T}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)\mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_4\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_5\mathbf{S}_3^{-1} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{G}^{(e)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 2\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_2\mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -2\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_2\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}^{(e)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_3\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_3\mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_6\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_7\mathbf{S}_3^{-1} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4.20}$$

kde ve (4.20) jsou \mathbf{I}_i pomocné integrační matice vzniklé z aproximace hledaných veličin a mají tvar podle (4.21)

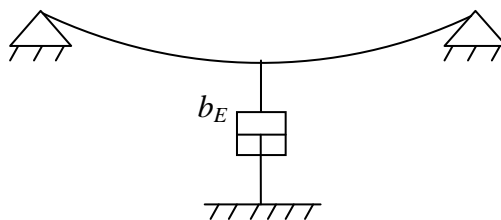
$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_1 &= \int_0^l \rho A(x) \boldsymbol{\Phi}^T(x) \boldsymbol{\Phi}(x) dx, \\
\mathbf{I}_2 &= \int_0^l \rho J(x) \boldsymbol{\Phi}'^T(x) \boldsymbol{\Phi}'(x) dx, \\
\mathbf{I}_3 &= \int_0^l EJ(x) \boldsymbol{\Phi}''^T(x) \boldsymbol{\Phi}''(x) dx, \\
\mathbf{I}_4 &= \int_0^l \rho A(x) \boldsymbol{\Psi}^T(x) \boldsymbol{\Psi}(x) dx, \\
\mathbf{I}_5 &= 2 \int_0^l \rho J(x) \boldsymbol{\Psi}^T(x) \boldsymbol{\Psi}(x) dx, \\
\mathbf{I}_6 &= \int_0^l EA(x) \boldsymbol{\Psi}'^T(x) \boldsymbol{\Psi}'(x) dx, \\
\mathbf{I}_7 &= 2 \int_0^l GJ(x) \boldsymbol{\Psi}'^T(x) \boldsymbol{\Psi}'(x) dx.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Pro použitý prvek kruhového průřezu o průměru d , který je dále prizmatický, tzn. $A(x)=A$ a $J(x)=J$, jsou po provedení integrací vztahů (4.21) známé matice potřebné pro sestavení matic popisující prvek (4.20). Finální integrační matice jsou zobrazeny ve vztazích (4.22).

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_1 &= \rho Al \begin{bmatrix} 1 & l & l^2 & l^3 \\ \frac{1}{2} & \frac{l}{3} & \frac{l^2}{4} & \frac{l^3}{5} \\ l^2 & l^3 & l^4 & l^5 \\ \frac{3}{4} & \frac{l}{5} & \frac{l^2}{6} & \frac{l^3}{7} \\ l^3 & l^4 & l^5 & l^6 \\ \frac{4}{5} & \frac{l}{6} & \frac{l^2}{7} & \frac{l^3}{8} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{I}_2 &= \rho J l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l & l^2 \\ 0 & l & \frac{4l^2}{3} & \frac{3l^3}{2} \\ 0 & l^2 & \frac{3l^3}{2} & \frac{9l^4}{5} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{I}_3 &= EJl \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6l \\ 0 & 0 & 6l & 12l^2 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{I}_4 &= \rho Al \begin{bmatrix} 1 & l \\ l & l^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{l}{3} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{I}_5 &= \rho J_p l \begin{bmatrix} 1 & l \\ l & l^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{l}{3} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{I}_6 &= EAl \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{I}_7 &= GJ_p l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

4.2 MATICE EXTERNÍHO TLUMENÍ

Vnější útlum je způsobený prostředím a zároveň útlumem v ložiskách. Vnější útlum působí proti absolutnímu pohybu prvku, což je schematicky znázorněno na Obr. 7. Pokud útlum ložisek je dominantní vůči odporu vlastního éteru, ve kterém se rotor pohybuje, lze vnější útlum prostředí zanedbat. Vnější útlum nám snižuje vlastní frekvence. Od určitého útlumu prostředí zatlumí nejvyšší vlastní frekvence. Ve vlastní modální analýze se to projeví nulovým vlastními frekvencemi.



Obr. 7: Schéma působení vnějšího tlumení

Odvození vychází z Rayleighovy disipační funkce [7] popisující ztrátovou energii při pohybu tělesa

$$R_E^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l [b_{EY} \dot{v}^2(x, t) + b_{EZ} \dot{w}^2(x, t)] dx, \quad (4.23)$$

kde b_{EY} , b_{EZ} jsou koeficienty vnějšího viskózního tlumení v laterálních výchylkách. Matici externího tlumení od prostředí získáme ze vztahu (4.23)

$$\frac{\partial R_E^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(e)}} = \mathbf{B}_E^{(e)} \dot{\mathbf{q}}^{(e)}. \quad (4.24)$$

Výsledná matice popisující vnější tlumení působiví na element [7] je

$$\mathbf{B}_E^{(e)} = \begin{bmatrix} b_{EY} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_8 \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & b_{EZ} \mathbf{S}_2^{-T} \mathbf{I}_8 \mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

kde opět ve vztahu (4.25) vystupuje pomocná integrační matice, která má vztah

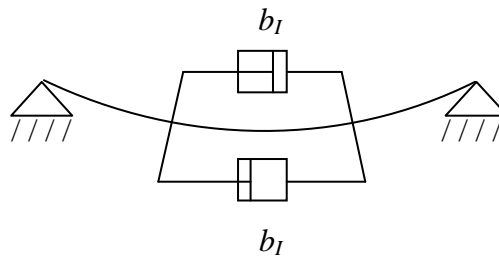
$$\mathbf{I}_8 = \int_0^l \boldsymbol{\Phi}^T(x) \boldsymbol{\Phi}(x) dx,$$

a po její integraci je známá výsledná matice (4.26) použitá ve vztahu (4.25).

$$\mathbf{I}_8 = l \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{4} \\ l & \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{4} & \frac{l^4}{5} \\ \frac{l^2}{2} & \frac{l^3}{4} & \frac{l^4}{5} & \frac{l^5}{6} \\ \frac{l^3}{3} & \frac{l^4}{5} & \frac{l^5}{6} & \frac{l^6}{7} \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

4.3 ODVOZENÍ MATICE VNITŘNÍHO TLUMENÍ

Vnitřní útlum je způsobený třením vnitřní struktury materiálu při jeho deformování (Obr. 8). Při rotaci deformovaného hřídele je tedy bráněno jeho “protáčení” kolem deformované osy rotace a vzniká okružný pohyb hřídele. To zapříčiňuje nestabilitu rotorového systému, která se musí kontrolovat. Proto nelze vnitřní útlum zanedbat. V literatuře lze najít tvary matice vnitřního útlumu, které jsou odvozené obdobným způsobem, jako matice externího útlumu. Ale obsahuje velmi problematicky zjistitelné konstanty tlumení. Proto bylo odvozeno, jak praktičtějším způsobem odhadnout matice vnitřního útlumu.



Obr. 8: Schéma působení vnitřního tlumení

Myšlenka vychází z toho, že jde o materiálový útlum, což znamená použít informaci, kterou o dynamické povaze materiálu známe. Vychází se z poměrného útlumu materiálu ζ , který lze experimentálně zjistit (a také na základě praktických zkušeností odhadnout). Ten platí ale pro jednodimenzionální oscilátor, ne systém s více stupni volnosti. Musí se využít modálního prostoru a převést prvek na jednotlivé nezávislé oscilátory [8]. Vychází se z konzervativního systému

$$\mathbf{M}^{(e)}\ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \mathbf{K}^{(e)}\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{0} . \quad (4.27)$$

Soustava (4.27) se vynásobí zleva \mathbf{V}^T a zprava \mathbf{V} , kde \mathbf{V} je modální matice normalizovaných vlastních vektorů systému

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}^{(e)}\mathbf{V}\ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \mathbf{V}^T\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{V}\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{0} , \quad (4.28)$$

kde součiny

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}^{(e)}\mathbf{V} = \mathbf{E} , \quad (4.29)$$

$$\mathbf{V}^T\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}^{(e)} , \quad (4.30)$$

jsou diagonální matice, \mathbf{E} je jednotková a $\mathbf{\Lambda}^{(e)}$ je spektrální matice (tj. matice kvadrátů vlastních frekvencí). Získá se soustava nezávislých oscilátorů a těmto oscilátorům lze přidat diagonální matici modálního tlumení $\mathbf{D}^{(e)}$, která má tvar dle (4.31), kde δ_{ij} je Kroneckerova delta [4].

$$D_{ij} = 2\zeta\Omega_i\delta_{ij} = 2\zeta\sqrt{\Lambda_i}\delta_{ij} \quad (4.31)$$

Po transformaci matice $\mathbf{D}^{(e)}$ do fyzikálního prostoru je známá matice vnitřního útlumu

$$\mathbf{B}_I^{(e)} = (\mathbf{V}^T)^{-1}\mathbf{D}^{(e)}\mathbf{V}^{-1}. \quad (4.32)$$

Na rozdíl oproti externímu tlumení, které působí proti směru absolutního pohybu, vnitřní útlum působí pouze proti směru radiální výchylky. Tedy je zapotřebí přejít do rotujícího souřadného systému, kde lze přičíst matici vnitřního tlumení proti radiální výchylce a soustava se poté transformuje zpět do pevného souřadného systému.

Mezi vektorem zobecněných posuvů, rychlostí a zrychlení v pevném a rotujícím souřadném systému platí vztahy

$$\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{T}(t)\mathbf{q}_R^{(e)}, \quad (4.33)$$

$$\dot{\mathbf{q}}^{(e)} = \dot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{q}_R^{(e)} + \mathbf{T}(t)\dot{\mathbf{q}}_R^{(e)}, \quad (4.34)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}^{(e)} = \ddot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{q}_R^{(e)} + 2\dot{\mathbf{T}}(t)\dot{\mathbf{q}}_R^{(e)} + \mathbf{T}(t)\ddot{\mathbf{q}}_R^{(e)}, \quad (4.35)$$

kde $\mathbf{T}(t)$ je transformační matice z rotujícího do pevného souřadného systému [7], pro kterou platí

$$\mathbf{T}^{-1}(t) = \mathbf{T}^T(t),$$

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{S} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega_0 t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_0 t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\omega_0 t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\sin(\omega_0 t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\omega_0 t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\omega_0 t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\omega_0 t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

pomocí (4.36) se transformuje (4.27) do rotujícího souřadného systému

$$\mathbf{T}^T(t)\mathbf{M}^{(e)}\left(\ddot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{q}_R^{(e)} + 2\dot{\mathbf{T}}(t)\dot{\mathbf{q}}_R^{(e)} + \mathbf{T}(t)\ddot{\mathbf{q}}_R^{(e)}\right) + \mathbf{T}^T(t)\mathbf{K}^{(e)}\left(\mathbf{T}(t)\mathbf{q}_R^{(e)}\right) = \mathbf{0}, \quad (4.37)$$

dále se zavede do pohybové rovnice (4.37) vliv vnitřního tlumení (4.32)

$$\mathbf{T}^T(t)\mathbf{M}^{(e)}\left(\ddot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{q}_R^{(e)} + 2\dot{\mathbf{T}}(t)\dot{\mathbf{q}}_R^{(e)} + \mathbf{T}(t)\ddot{\mathbf{q}}_R^{(e)}\right) + \mathbf{B}_I^{(e)}\dot{\mathbf{q}}_R^{(e)} + \mathbf{T}^T(t)\mathbf{K}^{(e)}\left(\mathbf{T}(t)\mathbf{q}_R^{(e)}\right) = \mathbf{0} \quad (4.38)$$

(4.38) se transformuje zpět do pevného souřadného systému

$$\mathbf{M}^{(e)}\ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \mathbf{T}(t)\mathbf{B}_I^{(e)}\left(\dot{\mathbf{T}}^T(t)\mathbf{q}^{(e)} + \mathbf{T}^T(t)\dot{\mathbf{q}}^{(e)}\right) + \mathbf{K}^{(e)}\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{0}, \quad (4.39)$$

výsledná rovnice popisující dynamiku elementu včetně gyroskopických účinků a vnějšího tlumení je

$$\mathbf{M}^{(e)}\ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \left(\mathbf{B}_E^{(e)} + \mathbf{B}_I^{(e)} + \omega_0\mathbf{G}^{(e)}\right)\dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \left(\mathbf{K}^{(e)} + \omega_0\mathbf{K}_I^{(e)}\right)\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{0}, \quad (4.40)$$

kde ve (4.40) je matice vnitřního tlumení

$$\mathbf{B}_I^{(e)} = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}_I^{(e)}\mathbf{T}^T(t), \quad (4.41)$$

a cirkulační matice způsobující nestabilitu vlivem vnitřního tlumení

$$\omega_0\mathbf{K}_I^{(e)} = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}_I^{(e)}\dot{\mathbf{T}}^T(t). \quad (4.42)$$

Tímto byl odvozen vliv vnitřního útlumu. Zjištěná matice vnitřního útlumu je ale pouze prvotní odhad, který je nutný odladit na základě měření skutečného rotoru. Výhodné je, že bylo vycházeno z poměrného útlumu, což je řádově odhadnutelná hodnota na základě zkušeností výpočtářů.

4.4 SESTAVENÍ GLOBÁLNÍHO MODELU HŘÍDELE

Reálný model hřídele se vhodně rozdělí na konečné prvky $n_e = 1, 2, \dots, n_u - 1$, kde n_u je počet uzlů na hřídeli. Je zapotřebí volit síť prvků tak, aby v místech vazeb, nebo přídatných hmot byla poloha uzlu. Konfiguraci hřídele popíše globální vektor zobecněných posuvů [5] kde i je číslo uzlu, $i = 1.. n_u$.

$$\mathbf{q} = [\dots, u_i, v_i, \psi_i, w_i, \vartheta_i, \varphi_i, \dots]^T \quad (4.43)$$

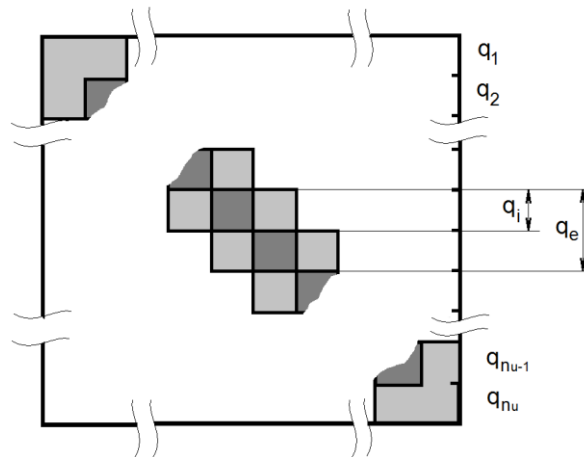
Pro sestavení globální matice je nutné převést matice prvků do konfiguračního prostoru, kde budou zobecněné posuvy popsány vektorem (4.43).

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(e)} = [u(0) \ v(0) \ \psi(0) \ w(0) \ \vartheta(0) \ \varphi(0) \ u(l) \ v(l) \ \psi(l) \ w(l) \ \vartheta(l) \ \varphi(l)]^T \quad (4.44)$$

Tuto transformaci provede permutační matice \mathbf{P} [5], která má všechny hodnoty nulové, pouze na pozicích (1,2), (2,3), (3,8), (4,9), (5,4), (6,5), (7,10), (8,11), (9,1), (10,7), (11,6), (12,12) má prvky rovné 1. Transformační vztahy pro matice jsou

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}^{(e)} &= \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{(e)} \mathbf{P}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_E^{(e)} &= \mathbf{P}^T \mathbf{B}_E^{(e)} \mathbf{P}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_I^{(e)} &= \mathbf{P}^T \mathbf{B}_I^{(e)} \mathbf{P}, \\ \tilde{\mathbf{G}}^{(e)} &= \mathbf{P}^T \mathbf{G}^{(e)} \mathbf{P}, \\ \tilde{\mathbf{K}}^{(e)} &= \mathbf{P}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{P}, \\ \tilde{\mathbf{K}}_I^{(e)} &= \mathbf{P}^T \mathbf{K}_I^{(e)} \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Schéma sestavení globálních matic je na obrázku 9. Do příslušných uzlů s okrajovými podmínkami (tj. vazby a uchycení kotoučů) jsou přičteny jejich vlivy na systém k příslušným maticím (tuhosti, tlumení ložisek, hmotové parametry a gyroskopické účinky kotoučů apod.). Globální matice je blokově sestavená z jednotlivých matic elementů. Na obrázku 9 jsou zobrazeny jednotlivé zobecněné výchylky \mathbf{q}_i pro jednotlivé uzly a každá tato část se skládá z jednotlivých posuvů uzlu podle (4.43).



Obr. 9: Schéma globální matice

4.5 FYZIKÁLNÍ MODEL TUHÉHO KOTOUČE

Většina hřídelů je osazena jedním, nebo více kotouči. Ať je to ozubené kolo, nebo jakýkoliv jiný kotouč, zpravidla je tužší jak vlastní hřídel. Pokud přitom není prováděna vysokofrekvenční analýza, lze považovat kotouče za tuhé celky. Tyto kotouče ale ovlivní svou hmotou místo hřídele, kde jsou nasazené. Proto tento vliv musí být přičten do globálních matic popisujících systém.

Pro matematický popis kotouče [5] bylo použito opět Lagrangeových rovnic druhého druhu, které sestavily matice, které budou přičteny do globálních matic hřídele, a tím budou postupně kompletovat model celkového rotoru. Fyzikální model kotouče je vidět na obrázku 10.

Kinetická energie kotouče pevně nasazeného na hřídeli o hmotnosti m je dána vztahem

$$E_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_s^T \mathbf{v}_s + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}, \quad (4.47)$$

kde je rychlost středu kotouče nasazeného na uzlu i

$$\mathbf{v}_s = \begin{bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{w}_i \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

úhlová okamžitá rychlost kotouče [6]

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_0 + \dot{\varphi} + \dot{\vartheta}\psi \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad (4.49)$$

a matice \mathbf{I} popisující hmotové parametry kotouče při rotačním pohybu

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

kde I_0 je moment setrvačnosti kotouče k ose rotace a I je moment setrvačnosti k příčné ose kotouče. Použitím Lagrangeovy rovnice 2 druhu (4.51) získáme matice, které popisují vliv nasazení kotouče v globálním modelu rotoru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}_i} = \mathbf{M}_k \ddot{\mathbf{q}}_i + \omega_0 \mathbf{G}_k \dot{\mathbf{q}}_i, \quad (4.51)$$

kde ve vztahu (4.51) je

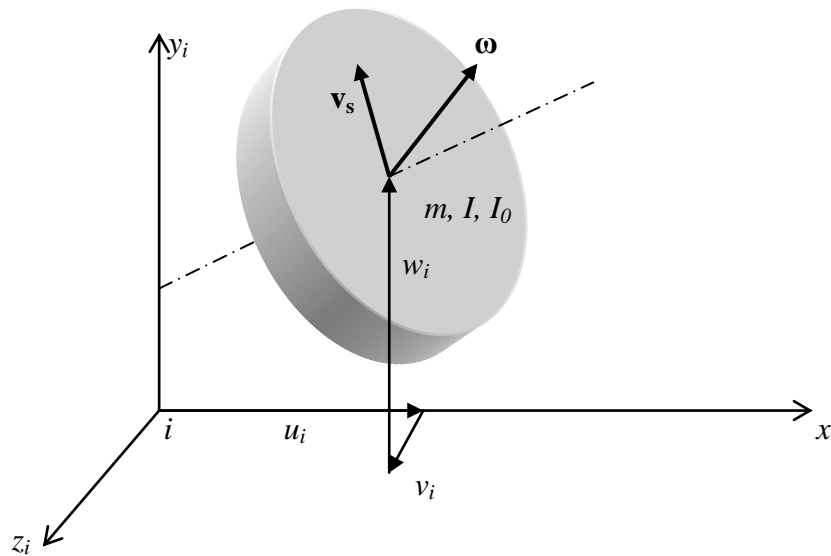
$$\mathbf{q}_i = [u_i, v_i, \psi_i, w_i, \vartheta_i, \varphi_i]^T \quad (4.52)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \frac{d\mathbf{q}_i}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{q}}_i = \frac{d^2\mathbf{q}_i}{dt^2}.$$

Takto jsou známy matice hmotnosti kotouče \mathbf{M}_k a matice gyroskopických účinků kotouče na rotor \mathbf{G}_k . Tyto matice musí být přičteny do globálních matic hřídele \mathbf{M} a \mathbf{G} na příslušnou pozici uzlu i . Jelikož je uvažován dokonale vyvážený kotouč s ideálně pevným nasazením na hřídel, nebude vybudena odstředivá síla.

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$



Obr. 10: Fyzikální model kotouče

4.6 FYZIKÁLNÍ MODEL LOŽISKA

Každý hřídel musí být uložen tak, aby mu byla umožněna rotace kolem vlastní osy. K tomuto zachování stupně volnosti slouží ložiska. Ložisek je mnoho druhů. Rozdělují se podle fyzikálního principu, na kterém pracují. Například valivá, kde je rotace umožněna pomocí valivých elementů (kuličky, válečku atd.). Dále to mohou být ložiska hydrodynamická (statická), kde rotaci zajišťuje olejový film, aerodynamická (statická), magnetická apod. V této práci bude použit další možný typ ložisek a to jsou kluzná samomazná ložiska, proto se nadále budeme zabývat pouze jimi.

Tato ložiska jsou uchycena v ložiskovém domečku, který umožňuje jejich naklápění, což znamená, že hřídel má kloubové uložení v místě ložisek.

Funkci popisující radiální tuhost samomazného ložiska je na obrázku 11., kde vidíme, že nejdříve v oblasti vůle v uložení je radiální tuhost nulová a od kontaktu čepu hřídele s ložiskem nastane lineární závislost tuhosti v ložisku s obrovskou tuhostí.

Lineární závislost je uvažovaná z důvodu, že pokud je deformace mimo lineární oblast materiálu, mohou se začít projevovat plastické deformace v ložisku, což je nežádoucí.

Tuhost v axiálním a transverzálním směru ložiska je uvažována nulová. Tlumení v ložisku má obdobné charaktery jako tuhosti. Celý model kluzného samomazného ložiska je nelineární. Pokud je prováděna modální analýza, nebo jakákoliv jiná lineární analýza, je nutné mít linearizovaný model ložiska (4.56). To v tomto případě bude kluzné ložisko, které má nulovou vůli mezi vnitřní plochou ložiska a povrchem rotoru. Takto linearizovaný model izotropního ložiska se zahrne do celkového modelu rotoru tak, že hodnoty jednotlivých tuhostí budou přičteny ke globální matici tuhosti na příslušné pozice, to znamená pro uzel obsahující okrajovou podmínku. Obdobně bude přičten vliv tlumení v ložisku do globální matice externího tlumení.

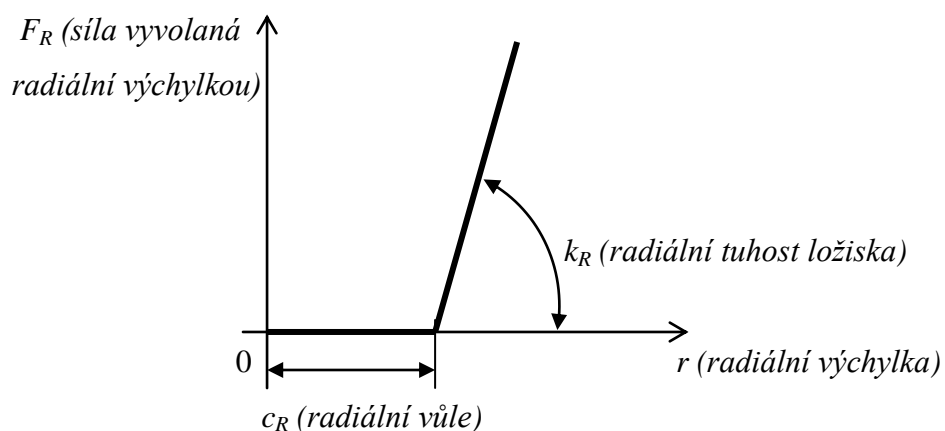
V případě uvažování nelineárního modelu ložiska (4.55) by byl tento vliv zahrnut do matematického popisu rotoru externí silou, která bude přičtena do soustavy pohybových rovnic, která bude závislá na výchylce a rychlosti vychýlování příslušného uzlu dle nelineární charakteristiky ložiska.

Nelineární model ložiska:

$$\begin{aligned} F_R &= 0 & \text{pro } r \leq c_R, & & r > 0 \\ F_R &= k_R r & \text{pro } r > c_R. & & \end{aligned} \quad (4.55)$$

Linearizovaný model ložiska:

$$F_R = k_R r. \quad (4.56)$$



Obr. 11: Průběh radiální tuhosti samomazného kluzného ložiska

5. ODVOZENÍ MODÁLNÍ ANALÝZY ROTORU

Pro vyhodnocení dynamických vlastností jakéhokoliv kmitajícího systému těles, nebo pružného tělesa se používá takzvaná modální analýza. Tou se v první řadě získá informace o vlastních frekvencích a jim příslušných vlastních tvarů kmitů. Tyto dvě informace popisují volné kmitání systému. Zároveň lze využít vlastních vektorů pro modifikaci soustavy závislých pohybových rovnic na soustavu nezávislých pohybových rovnic. To má obrovský dopad na vyřešení dynamických vlastností kmitajícího systému. Nyní je k dispozici řešení jednoduché pohybové rovnice, která je vyřešena analyticky. To ušetří mnoho výpočtového času, zároveň je známo analytické řešení, to znamená, že lze vyšetřovat jakoukoliv časovou oblast a nemusí se počítat pohyb do oné části. Další nesporná výhoda je v případě frekvenční odezvy. Ze soustavy n oscilátorů se získá n amplitudo-frekvenčních charakteristik. To odhalí dominantní vlastní frekvence a jejich příslušné amplitudy. Tím se analyzuje daleko detailněji zkoumaný systém. Celý tento převod systému popisující kmitající soustavu ve fyzikálních souřadnicích do modálního prostoru popsaného pomocí jednotlivých oscilátorů v modálních souřadnicích se nazývá modální analýza. Odvození modální analýzy je různé pro konzervativní, slabě nekonzervativní, anebo silně nekonzervativní systém. Nejjednodušší odvození je pro konzervativní systém. Naopak nejsložitější odvození je pro silně nekonzervativní. Problém spočívá v onom matematickém převodu ze soustavy svázaných pohybových rovnic na jednotlivé oscilátory, to znamená diagonalizaci matic popisující systém. Modální analýza vychází z autonomního systému, získáme vlastní čísla a vlastní vektory systému. Následně se aplikuje diagonalizaci i na neautonomní systém.

V tomto případě máme k dispozici kompletní popis rotorového systému pomocí soustavy pohybových rovnic v pevném prostoru xyz

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B}_E + \mathbf{B}_I + \omega_0 \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \omega_0 \mathbf{K}_I)\mathbf{q} = \mathbf{0} . \quad (5.1)$$

Matice gyroskopických účinků je antisymetrická, tedy u rychlostního členu rovnice vychází celková matice obecná, tak i u vektoru zobecněných výchylek vychází

matice obecná vlivem cirkulační matice (opět antisymetrická), systém se bude chovat jako silně nekonzervativní, protože není splněna podmínka pro slabě nekonzervativní soustavu, tj. podmínka proporcionálního tlumení (5.2).

$$(\mathbf{K} + \omega_0 \mathbf{K}_I) \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{B}_E + \mathbf{B}_I + \omega_0 \mathbf{G}) = (\mathbf{B}_E + \mathbf{B}_I + \omega_0 \mathbf{G}) \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{K} + \omega_0 \mathbf{K}_I) \quad (5.2)$$

Silně nekonzervativní soustavy je výhodné řešit ve stavovém prostoru, předchází se tím řešení kvadratického problému vlastních hodnot, což je numericky náročné. Do stavového prostoru se pohybová rovnice převede přidáním identity [2] (5.3).

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

Zavede se nový vektor zobecněných výchylek ve stavovém prostoru

$$\mathbf{u} = [\dot{\mathbf{q}} \ \mathbf{q}]^T, \quad (5.4)$$

respektive jeho časová derivace

$$\dot{\mathbf{u}} = [\ddot{\mathbf{q}} \ \dot{\mathbf{q}}]^T, \quad (5.5)$$

pohybová rovnice (5.1) pak bude vypadat v rozšířeném tvaru ve stavovém prostoru spolu s (5.3) takto

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_E + \mathbf{B}_I + \omega_0 \mathbf{G}) & (\mathbf{K} + \omega_0 \mathbf{K}_I) \\ -\mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Nové blokové matice označíme \mathbf{N} a \mathbf{P} a výsledná soustava připravená pro řešení je

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{P}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (5.6)$$

předpokládá se řešení této soustavy ve tvaru

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} e^{st}, \quad (5.7)$$

jeho první časová derivace je

$$\dot{\mathbf{u}} = s\hat{\mathbf{u}} e^{st}, \quad (5.8)$$

dosazením řešení (5.7) a (5.8) do (5.6) se získá

$$s\mathbf{N}\hat{\mathbf{u}} e^{st} + \mathbf{P}\hat{\mathbf{u}} e^{st} = \mathbf{0}, \quad (5.9)$$

a dalšími úpravami je znám lineární problém hledání vlastních hodnot

$$(-\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P} - s\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (5.10)$$

kde z rovnice (5.10) se získají vlastní hodnoty systému s_i

$$\det(-\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P} - s\mathbf{E}) = 0, \quad (5.11)$$

a k nim pak přísluší vlastní vektory \mathbf{v}_i opět z rovnice (5.10)

$$(-\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P} - s_i\mathbf{E})\mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \quad (5.12)$$

pro $i=1..2n$, kde n je stupeň volnosti systému.

Nyní jsou známy vlastní hodnoty a vlastní vektory systému, které popisují vlastní charakter soustavy. Jak již bylo napsáno, hlavní myšlenkou modální analýzy je soustavu svázaných pohybových rovnic separovat na soustavu pohybových rovnic o stejném počtu vzájemně nesvázaných. K této diagonalizaci je využito právě vlastních vektorů systému. Ale jelikož matice $-\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}$ není symetrická, tak to způsobí, že neexistuje ortogonální systém reálných vlastních vektorů, tedy musí se použít k diagonalizaci systému dvě vzájemné ortogonální množiny.

Diagonalizace bude provedena pomocí normalizační podmínky (5.13) v [9], kde se využijí již zjištěné pravostranné vlastní vektory a zároveň druhou ortogonální množinu tvořenou levostrannými vlastními vektory systému \mathbf{w}_i .

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{N} \mathbf{v}_j = \delta_{ij} \quad (5.13)$$

Z matice \mathbf{P} se diagonalizací stane diagonální spektrální matice s vlastními hodnotami na diagonále.

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{P} \mathbf{v}_j = -\delta_{ij} s_i \quad (5.14)$$

Zavedou se pravostranné a levostranné modální matice tvořené pravostrannými a levostrannými vlastními vektory (5.15), které jsou seřazeny podle příslušných vlastních čísel vzrůstající posloupností $\lambda_i < \lambda_{i+1}$.

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{2n}], \mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{2n}] \quad (5.15)$$

Pravostranná modální matice vytvořená je, levostrannou lze zjistit jednoduše přímo pomocí vztahu (5.16) z [9].

$$\mathbf{W}^T = (\mathbf{N}\mathbf{V})^{-1} \quad (5.16)$$

Nyní lze transformovat soustavu (5.6) do modálního prostoru vztahem (5.17).

$$\mathbf{W}^T \mathbf{N}\mathbf{V}\dot{\mathbf{c}}(t) + \mathbf{W}^T \mathbf{P}\mathbf{V}\mathbf{c}(t) = \mathbf{0} \quad (5.17)$$

Vztahem (5.17) se získá $2n$ nezávislých homogenních pohybových rovnic (5.18) pro modální souřadnice $\mathbf{c}(t)$ (5.19).

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{c}}(t) - \mathbf{S}_p\mathbf{c}(t) = \mathbf{0} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{V}\mathbf{c}(t) \quad (5.19)$$

Pokud se uvažuje nehomogenní systém, tj. buzený vnějším silovým působením, objeví se v pohybové rovnici ještě pravá strana transformovaná také do modálního prostoru.

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{c}}(t) - \mathbf{S}_p\mathbf{c}(t) = \mathbf{W}^T \tilde{\mathbf{f}}(t), \quad (5.20)$$

kde je

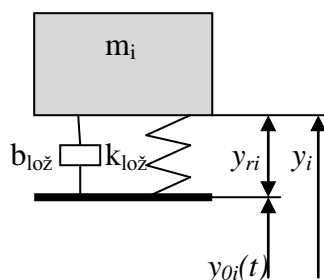
$$\tilde{\mathbf{f}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Pro zjištění ustálené odezvy lze využít vztahu (5.22) odvozeném v literatuře [9].

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{V}\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{V}(j\omega\mathbf{E} - \mathbf{S}_p)^{-1}\mathbf{W}^T\tilde{\mathbf{f}}(t) \quad (5.22)$$

6. ODVOZENÍ KINEMATICKÉHO BUZENÍ

V předchozích kapitolách byl odvozen matematický popis systému a jeho modální analýza. V pohybové rovnici (5.20) je na její pravé straně zmíněn vektor buzení $\mathbf{f}(t)$. Ten popisuje obecně jakékoliv časově proměnné zatížení působící na rotor. V tomto případě se uvažuje dokonale vyvážený rotor, aby se vystihl pouze vliv kinematického buzení. Proto toto buzení bude způsobeno pouze vlastním kmitáním uložení rotoru. Vliv kinematického buzení se může zahrnout pro jakýkoliv uzel v jakékoliv výchylce. Zde se uvažuje buzení pouze ve směru y , jelikož jde o analýzu kmitání v radiálním směru. Úloha je kompletně rotačně symetrická včetně izotropních vazeb, proto lze budít v jednom směru pro dostatečnou analýzu rotoru. Systém není buzen externím silovým působením, tedy lze zapsat pohybovou rovnici v autonomním tvaru (6.2) s relativními výchylkami podle obrázku 12. Tím se zahrne vliv neinerciálních základů fyzikálního modelu do vlastního matematického popisu rotoru. Kompletní vektor popisující pohyb základny je ve vztahu (6.1), který je nulový a pouze na pozicích okrajových podmínek, to je uzlů i (ložisek a spojky) ve směru y bude funkce popisující kinematické buzení základů $y_{oi}(t)$. Výsledný vektor zatěžující rotor vlivem kinematického buzení je ve vztahu (6.3).



Obr. 12: Schéma kinematického buzení ve směru osy y

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0(t) = [\dots y_{oi}(t) \dots]^T \quad (6.1)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B}_E + \mathbf{B}_I + \omega_0 \mathbf{G})(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0) + (\mathbf{K} + \omega_0 \mathbf{K}_I)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = \mathbf{0} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{q}_0, t) = (\mathbf{B}_E + \mathbf{B}_I(t) + \omega_0 \mathbf{G}) \frac{d\mathbf{q}_0(t)}{dt} + (\mathbf{K} + \omega_0 \mathbf{K}_I(t)) \mathbf{q}_0(t) \quad (6.3)$$

7. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAVY POHYBOVÝCH ROVNIC

Pro numerické řešení diferenciálních rovnic vzniklo mnoho metod. Od explicitních po implicitní. U numerických metod je důležité hlídat stabilitu metody a konvergenci řešení. To ovlivňují koeficienty příslušné metody a krok řešení. Vše záleží na použité metodě. Pro tuto numerickou simulaci pohybu byla použita Newmarkova- β metoda [10] pro řešení diferenciálních rovnic. Tato metoda je implicitní. To znamená, že krokem výpočtu se nezíská explicitně následující krok, ale soustava rovnic, která je nejdříve zapotřebí vyřešit a tím získat následující krok. Jelikož jde o soustavu nelineárních algebraických rovnic, je zapotřebí použít další numerickou metodu pro vyřešení této soustavy. Jelikož byla použita Newtonova metoda pro řešení nelineárních algebraických rovnic [11], přibývá další numerický problém a to je podmíněnost úlohy. Toto vše musí být ohlédáno a získáme řešení popisující pohyb rotoru. Tento systém popisuje již odvozená nehomogenní soustava pohybových rovnic s budícími účinky. Pro aplikaci na numerické řešení se musí převést do tvaru explicitně vyjadřující zrychlení (7.1).

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{q}_0, t) - (\mathbf{B}_E + \mathbf{B}_I(t) + \omega_0 \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) - (\mathbf{K} + \omega_0 \mathbf{K}_I(t))\mathbf{q}(t)] \quad (7.1)$$

Newmarkova soustava nelineárních rovnic (7.2) obsahuje konstanty β , γ . Konstantami ovlivňujeme stabilitu řešení. Nejpoužívanější varianta hodnot těchto konstant je $\gamma = 1/2$ a $\beta = 1/4$. Pro tuto kombinaci získáváme stabilní řešení. Detailněji je výběr konstant a tabulka stability popsána v literatuře [10]. Dále zde nalezneme tabulky s konvergenčními a chybami řešení. Všechny tyto hodnoty se odvíjejí od volby poměru kroku Δt ku periodě pohybu. V tomto případě vcházejí do pozorování periody dvou různých veličin. Otáčky hřídele a frekvence kinematického buzení. Pro řešení v této práci je referenční menší perioda pohybu z těchto dvou hodnot. Newmarkova- β metoda převádí diferenciální rovnice na nelineární algebraické rovnice a jejich postupným řešením se získají stavové hodnoty systému v závislosti na diskretizovaném čase t .

Do soustavy rovnic (7.2) se dosadí stavové hodnoty systému a zrychlení vyjádřené ze soustavy pohybových rovnic dle vztahu (7.1).

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{q}}_t + \Delta t((1 - \gamma)\ddot{\mathbf{q}}_t + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}) \\ \mathbf{q}_{t+\Delta t} &= \mathbf{q}_t + \Delta t\dot{\mathbf{q}}_t + \Delta t^2\left(\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{\mathbf{q}}_t + \beta\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}\right)\end{aligned}\quad (7.2)$$

Newtonova metoda vychází z linearizace získané soustavy nelineárních algebraických rovnic (7.2), která musí být převedena na anulovaný tvar, který je označen jakou soustava nelineárních rovnic \mathbf{g} (7.3). Je to metoda iterační, to znamená, že se každým krokem zpřesňuje řešení. Je zapotřebí počáteční iterace. V tomto případě je počáteční iterace kroku řešení stávající pohybový stav soustavy, to znamená, že je řešení soustavy blízko hledaného následujícího stavu a tím se i urychlujeme výpočet a může se snížit počet iterací. Lze se omezit dokonce pouze na jednu až dvě iterace pro dostatečně přesné řešení. Samozřejmě je zapotřebí tuto konvergenci otestovat, nelze ji dopředu předpokládat. Dále musí být u této metody řešení ohlídána podmíněnost Jacobiho matice \mathbf{A} (7.4), protože dochází k jejímu numerickému invertování a mohlo by zde docházet ke ztrátě konvergence řešení.

$$\mathbf{g}(\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}, \mathbf{q}_{t+\Delta t}, t + \Delta t) = 0 \quad (7.3)$$

$$\mathbf{A} = a_{ij} = \left. \frac{\partial g_i}{\partial \tilde{q}_j} \right|_{\tilde{\mathbf{q}}}, \quad \tilde{\mathbf{q}} = [\dot{\mathbf{q}}^T, \mathbf{q}^T]^T. \quad (7.4)$$

Výsledný vztah Newtonovy metody (7.5) umožňuje iteračně vyřešit soustavu nelineárních algebraických rovnic postupnými iteracemi $p = 0, 1, 2, \dots$

$$\tilde{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^{<p+1>} = \tilde{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^{<p>} - \mathbf{A}^{-1}(\tilde{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^{<p>})\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^{<p>}), \quad (7.5)$$

kde

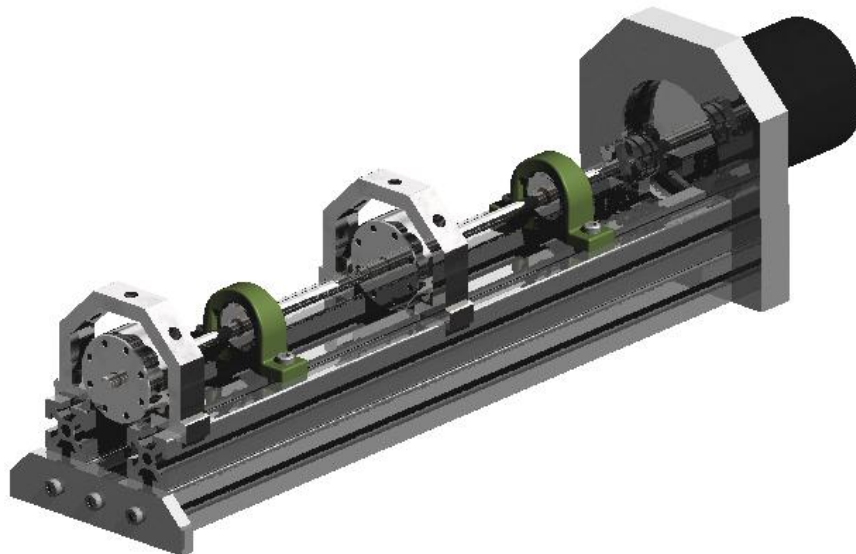
$$\tilde{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^{<0>} = \tilde{\mathbf{q}}_t.$$

Závěrem lze konstatovat, že numerické metody obecně poskytují dostatečně silný nástroj pro řešení opravdu složitých problémů, které by analytickým způsobem vyřešit nešly, ale mají slabinu ve stabilitě a konvergenci řešení. Proto je nutné tyto problémy kontrolovat a minimalizovat numerické chyby vnesené do výpočtu.

ANALÝZA ROTORU

8. TESTOVANÝ ROTOROVÝ SYSTÉM

Simulovaný rotorový systém v této práci je katedrové laboratorní zařízení pro demonstraci jevů rotorové dynamiky. Ten lze vidět na obrázku 13. Kompletní informace a technickou dokumentaci nalezneme v literatuře [12]. Rotor je navržen tak, aby byl hřídel dostatečně pružný a kotouče dostatečně tuhé, aby se vlastní frekvence hřídele a kotoučů vzájemně neovlivňovali. Uložen je v samomazných kluzných ložiskách. Poháněn je elektromotorem přes pružnou lamelovou spojku. Všechny části rotoru potřebné do výpočtu budou následně detailně rozebrány.



Obr. 13: Zkoumaný rotorový systém

Zařízení je opatřeno dostatečně tuhým rámem, aby nebyly ovlivňovány výsledky měření vlivem deformace vlastního rámu. U kotoučů jsou připevněny držáky pro uchycení čidel, které mohou zaznamenávat pohyb kotoučů. Rotorový systém má tedy takové vlastnosti, že na něj lze aplikovat fyzikální teorii pro analyzování rotorů popsanou v první části této práce. Momentálně neexistuje zařízení, které by provádělo kinematické buzení tohoto rotorového modelu, proto lze provést pouze numerickou

analýzu této problematiky. V numerické analýze je nejdůležitějším krokem ve výzkumu jakéhokoliv systému zjistit co možno nejvíce realitě odpovídající vstupní parametry. Proto se další podkapitoly věnují fyzikálním parametrům rotoru a okrajovým podmínkám této úlohy. Všechny informace jsou zjištěné na základě geometrických a materiálových informací o rotorovém systému. Během budoucího vlastního experimentu bude zapotřebí tyto parametry doladit na základě měření.

8.1 HŘÍDEL

V našem případě je hřídel po celé délce konstantního kruhového průřezu (Obr. 14). Hřídel byl diskretizován na jednotlivé konečné jednodimenzionální prvky. Je důležité, aby při diskretizaci byly uzly na místech změn okrajových podmínek úlohy, to znamená místa uložení hřídele a místa nasazení kotoučů. V ostatních částech hřídele je vhodné provést co možno nejrovnoměrnější diskretizaci, aby jednotlivé konečné prvky byly po celém hřídeli co možno nejpodobnější délky. Rozměry dostatečně splňují podmínky při odvozování hřídelových prvků, kde se předpokládá dlouhý a štíhlý hřídel. Geometrické a fyzikální parametry hřídele jsou uvedeny v tabulce 1. Jedná se o ocelový hřídel, bez tvarových změn a vrubů. Kotouče a spojka jsou k němu připevněny pomocí silové vazby vytvořené šrouby. Ložiska odebírají pouze radiální stupně volnosti hřídele, to znamená, že v axiálním směru je umožněn pohyb, proto není osazení ani kvůli těmto ložiskům.



Obr. 14: Hřídel

Parametry hřídele	
Průměr	10 mm
Délka	550 mm
Materiál	ocel 11 600, ČSN 41 1600
Youngův modul pružnosti v tahu E	210 000 MPa
Poissonovo číslo ν	0,3
Hustota ρ	7850 kg/m ³

Tabulka 1: Geometrické a materiálové parametry hřídele

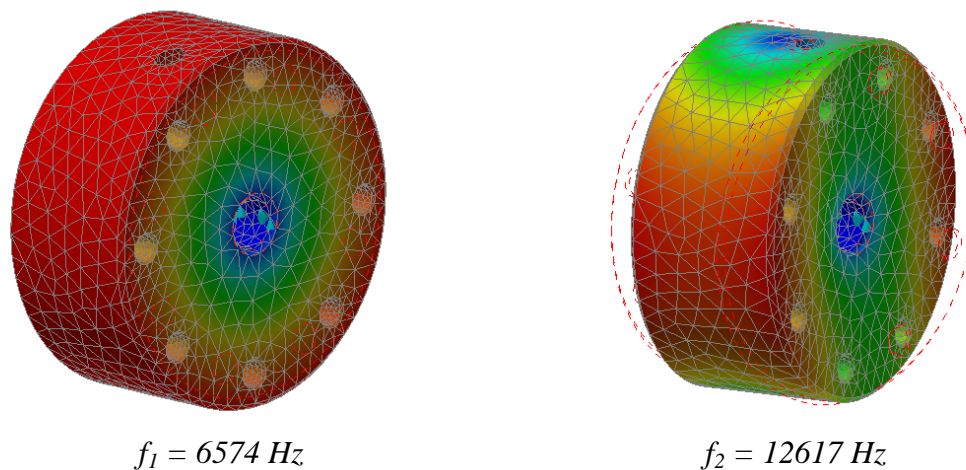
8.2 KOTOUČ

Kotouč je ocelový a je uvažován jako dokonale tuhé těleso. Pro potvrzení tohoto výroku je zapotřebí provést jeho modální analýzu. Získaná nejnižší vlastní frekvence je porovnaná s vlastními frekvencemi rotoru, a pokud nejnižší vlastní frekvence kotouče je dostatečně vysoká oproti zkoumaným vlastním frekvencím rotoru, lze kotouč uvažovat jako dokonale tuhé těleso. Parametry kotouče jsou v tabulce 2.

Parametry kotouče	
Průměr	68 mm
Délka	30 mm
Materiál	ocel 11 600, ČSN 41 1600
Youngův modul pružnosti v tahu E	210 000 MPa
Poissonovo číslo ν	0,3
Hustota ρ	7850 kg/m ³
Hmotnost	0,791 kg
Moment setrvačnosti k ose x	460 kg·mm ²
Moment setrvačnosti k ose y	290 kg·mm ²
Moment setrvačnosti k ose z	290 kg·mm ²

Tabulka 2: Geometrické a hmotové parametry kotouče

Vlastní modální analýza kotouče byla provedena pomocí softwaru NASTRAN. Dva první vlastní tvary s příslušnými vlastními frekvencemi jsou zobrazeny na obrázku 15. Lze konstatovat, že vlastní frekvence kotouče jsou dostatečně vysoké, v řádech tisíců Hertzů. To znamená, že předpoklad, kde je kotouč uvažován, jako dokonale tuhé těleso je oprávněný. Tento výsledek nezasahuje do vlastního výzkumu rotoru, pouze dovoluje uplatnit teorii matematického popisu kotouče, která byla popsána v kapitole 4.5 této práce.



Obr. 15: Modální analýza kotouče

8.3 KLUZNÉ LOŽISKO

První okrajovou podmínkou této úlohy je uložení hřídele v ložiskách. Použité ložisko je kluzné samomazné ložisko Glacier 10/14x16. Jeho materiál je spěkaný bronz. Ložisko umožňuje rotaci kolem osy x a axiální posuv hřídele ve směru osy x . Konstrukcí ložiskového domečku je ložisku umožněno naklápění kolem osy y a z . V tabulce 3 jsou shrnuty odebírané stupně volnosti hřídele způsobené ložiskem. Vidíme, že ložisko brání pohybu pouze v radiálním směru. Tedy je zapotřebí zjistit tuhost ložiska v radiálním směru. Tento výpočet byl proveden opět v softwaru NASTRAN. Na obrázku 16 je zobrazen výpočet tuhosti ložiska metodou konečných prvků. Parametry ložiska jsou zobrazeny v tabulce 4. Materiál ložiska umožňuje nejvyšší kluznou rychlost 10 [m/s]. Tato hodnota ohraničila maximální oblast použití rotoru a tím měla vliv i na rozsah analýzy rotoru.

Posuv	Odebraný stupeň volnosti
u	NE
v	ANO
ψ	NE
w	ANO
g	NE
φ	NE

Tabulka 3: Odebrané stupně volnosti ložiskem

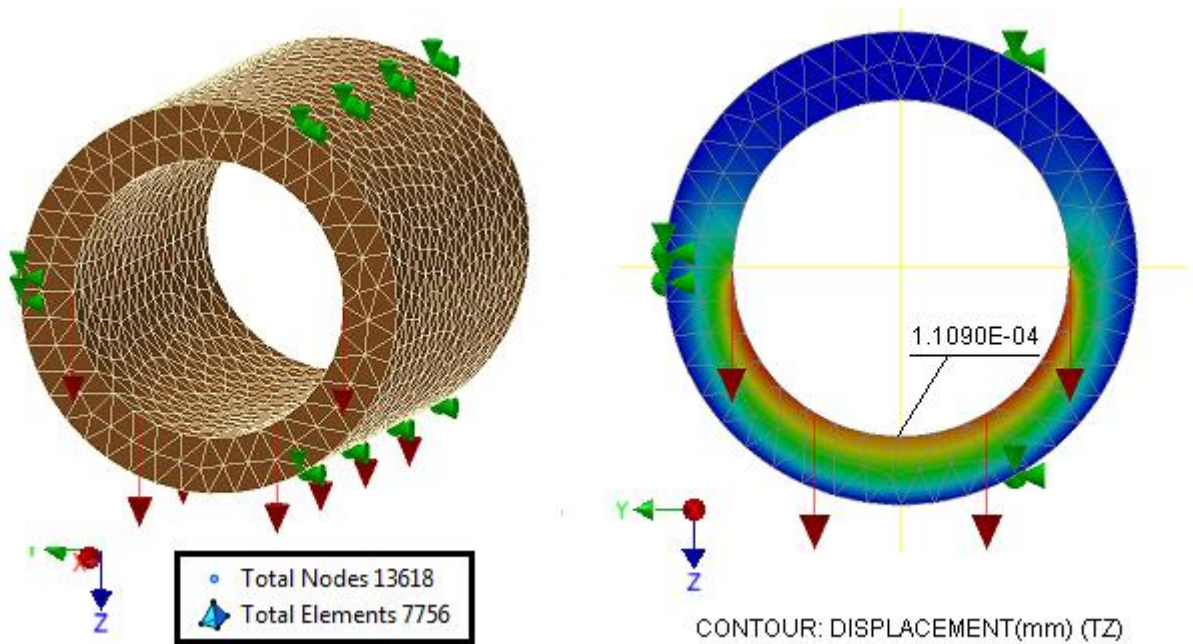
Parametry ložiska	
Vnitřní průměr	10 mm
Vnější průměr	14 mm
Délka	16 mm
Materiál	Spékaný bronz
Youngův modul pružnosti v tahu E	193 000 MPa
Poissonovo číslo ν	0,32
Hustota ρ	8874 kg/m ³

Tabulka 4: Geometrické a materiálové parametry ložiska

Materiálový model ložiska je uvažován jako lineární. Proto i výpočet tuhosti lze provést pomocí jednoduchého lineárního vztahu, kde se zatížilo ložisko referenčním zatížením (tj. libovolné zvolené zatížení, které slouží pouze pro identifikaci tuhosti ložiska) a to bylo poděleno zjištěnou maximální deformací ložiska zjištěnou z konečně prvkového modelu.

$$k_R = \frac{\text{referenční zatížení}}{\text{maximální deformace}} \doteq 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-1}$$

Radiální tuhost ložiska k_R je obrovská a má izotropní povahu. Tato tuhost bude přičtena do globálního modelu rotoru a tím dojde k jeho zafixování v prostoru ve směru y a z . Pokud se uvažuje model ložiska jako nelineární, tak se tato tuhost bude vyskytovat ve funkci popisující sílu vyvolanou ložiskem dle vztahu (4.55).



Obr. 16: Výpočet tuhosti ložiska

8.4 LAMELOVÁ SPOJKA

Spojka vytváří vazbu mezi elektromotorem a hřídelem rotoru. Pomocí ní je přenášén krouticí moment. Ve výpočtovém modelu je nutné popsat spojku z hlediska okrajových podmínek. Ložiska uložila hřídel pouze v radiálním směru. Spojka odebírá naopak všechny stupně volnosti s určitou poddajností, kterou je zapotřebí zjistit. Tím je tedy zajištěn hřídel proti pohybu v ostatních směrech, kterým ložiska nebránila. Použitá spojka je lamelová, 3D model spojky je zobrazen na obrázku 17.



Obr. 17: Lamelová spojka

Schéma lamelové spojky je na obrázku 18. Je to sériové řazení pružin, kde pružiny jsou lamely a působí svou tuhostí ve všech směrech pohybu. Všechny tyto tuhosti musely být opět zjištěny a byly zjištěny jako v případě ložiska, pomocí softwaru NASTRAN, kde se použilo referenční libovolné zatížení. Výpočty byly postupně prováděné pro zatížení ve všech směrech souřadnicových os, tj. pro silové a následně momentové působení. Nechala se spočítat deformace v příslušném směru a následně byla zjištěna tuhost pro tento směr.

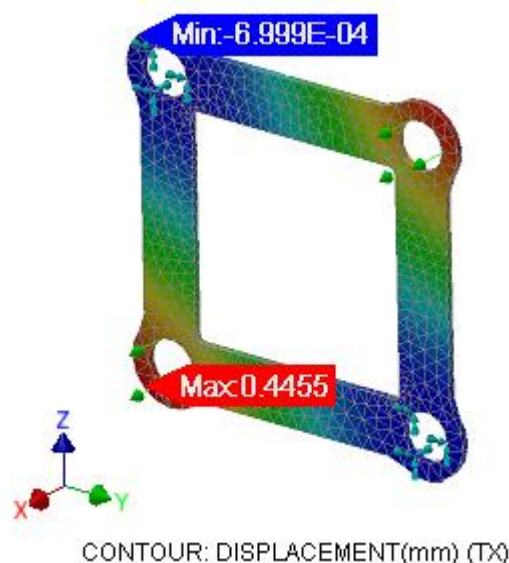


Obr. 18: Spojka - schéma

k_i je tuhost lamely pro libovolný směr. Tuhost celkové spojky lze spočítat podle vztahu pro výpočet výsledné tuhosti sériového řazení pružin (8.1).

$$k_{Si} = \left(\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_i} \right)^{-1} = \left(\frac{2}{k_i} \right)^{-1} = \frac{1}{2} k_i \quad (8.1)$$

Ukázka výpočtu deformace jednotlivé lamely je na obrázku 19. Repräsentant výpočtu je zjišťování tuhosti pro axiální směr. Tabulka výsledných vypočítaných tuhostí pro celkovou spojku je v tabulce 5. Hodnoty tuhostí byly opět přičteny do globálního modelu rotoru a tím byly okrajové podmínky úlohy kompletní.



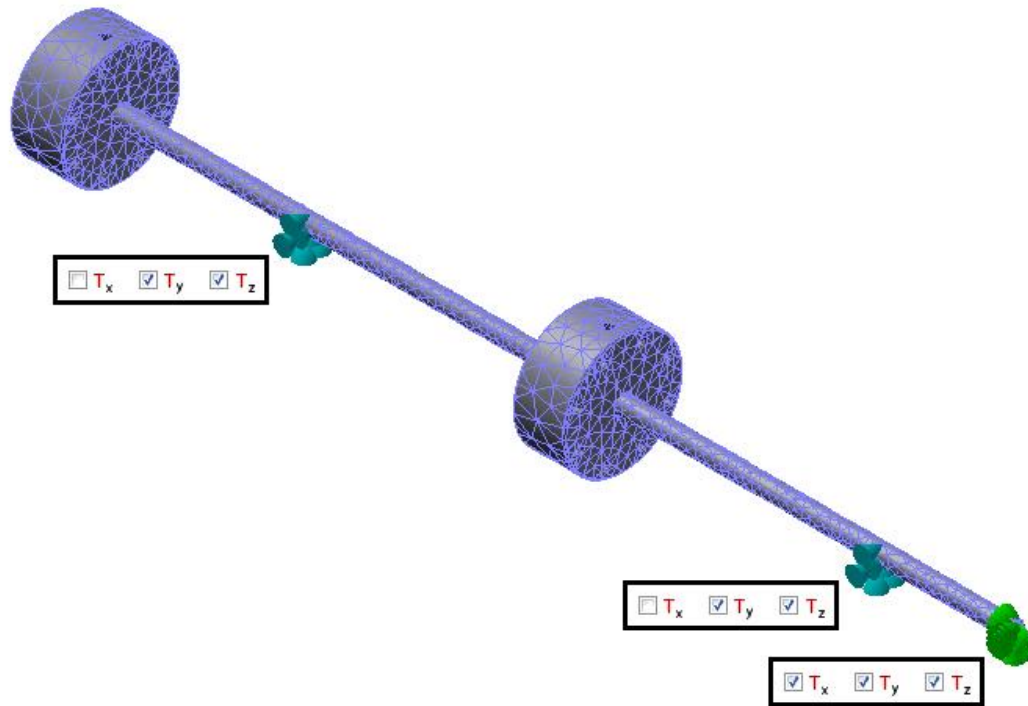
Obr. 19: Výpočet tuhosti lamely v axiálním směru

Tuhost ve směru	Hodnota tuhosti
Osy x	$11,23 \cdot 10^3$ N/m
Osy y	$12,2 \cdot 10^6$ N/m
Rotace kolem osy y	1,85 Nm/rad
Osy z	$12,2 \cdot 10^6$ N/m
Rotace kolem osy z	1,85 Nm/rad
Rotace kolem osy x	3174 Nm/rad

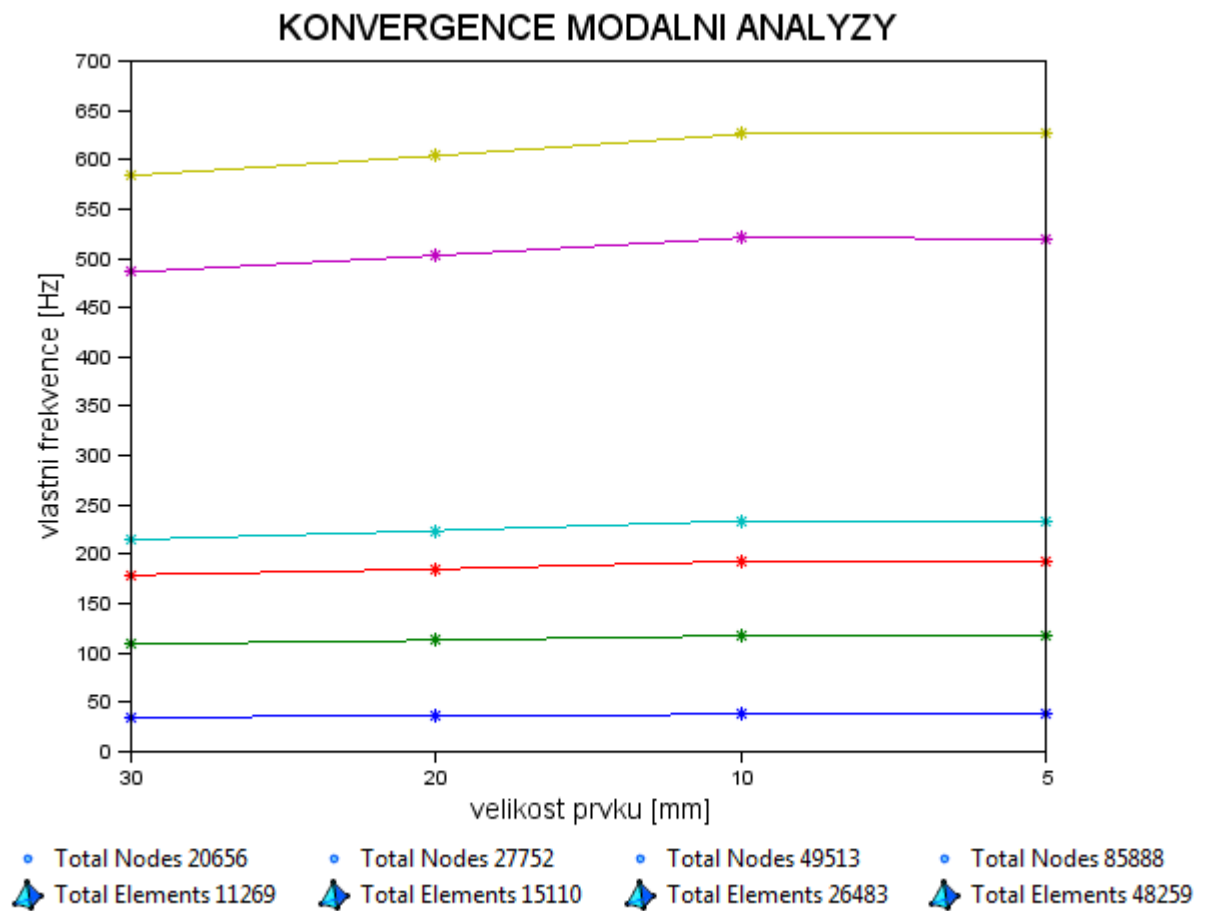
Tabulka 5: Tuhost spojky

8.5 KALIBRAČNÍ MODEL ROTORU

Použitá teorie v této práci pro popis rotoru konečnými prvky je mnohokrát ověřena experimenty [13], [14], lze konstatovat, že je dostatečně platná. Proto jí lze bez obav použít pro popis zkoumaného rotorového systému. Ale při tvorbě modelu diskretizovaného konečnými prvky je důležité vědět, že diskretizace byla provedena dostatečně, kvalitně a výsledky z výpočtů a ze simulací můžeme považovat za věrohodné. Proto se dále práce zabývala návrhem dostatečně kvalitního modelu rotoru. Pro vytvoření kalibračních hodnot byl opět zvolen software NASTRAN. Kalibrační model byl vytvořen pomocí objemových konečných prvků. Diskretizován byl celý model včetně kotoučů, jimž je hřídel osazen. Při kalibraci byly použity jiné okrajové podmínky úlohy, než skutečné popisující systém (Obr. 20). Důvodem bylo, aby uložení hřídele bylo pevné, ne poddajné, jelikož šlo o kalibraci diskretizace hřídele samotného a nikoliv celé úlohy. Tedy nebylo žádoucí, aby výsledky ovlivňovaly okrajové podmínky. Kalibrace probíhala pro nulové otáčky rotoru a pro konzervativní model. Aby byl i kalibrační model nejvěrohodnější, byla zapotřebí provést konvergence diskretizace tohoto modelu. Konvergence včetně počtu použitých elementů a uzlů je vidět na obrázku 21, kde na vodorovné ose je velikost prvku a na svislé ose vlastní frekvence rotoru. Právě vlastní frekvence rotoru jsou referenčními hodnotami, kterými byl kalibrován odvozený konečně prvkový model rotoru. Velikostí prvku se zde myslí průměrná velikost prvku (tato hodnota je definovaná automaticky softwarem).



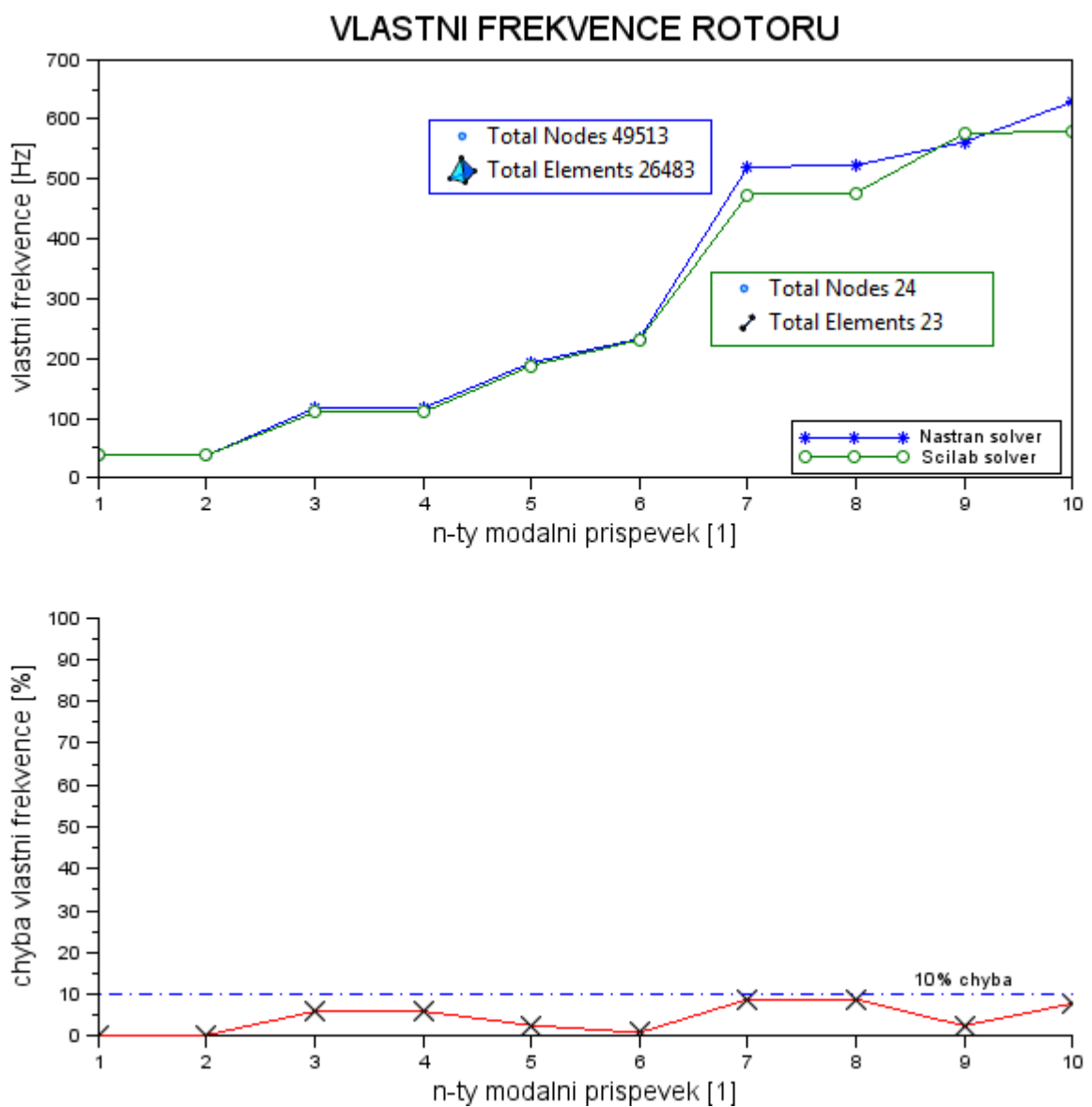
Obr. 20: Kalibrační model



Obr. 21: Konvergence diskretizace kalibračního modelu

8.6 ODLADĚNÍ KONZERVATIVNÍHO MODELU ROTORU

Nyní jsou k dispozici kalibrační hodnoty. Pro kalibraci bylo zvoleno, že prvních deset vlastních frekvencí by se mělo shodovat s chybou kolem 5% (zvolená obvyklá statistická hodnota chyby). Desátá vlastní frekvence se již blíží k 700 [Hz] a to je dostatečné pro simulace. Na obrázku 22 lze vidět, že vlastní frekvence se shodují i s požadovanou přesností. Zároveň si lze všimnout jednoho významného závěru. Tím je počet použitých prvků a tím i počet stupňů volnosti úlohy.



Obr. 22: Kalibrace modelu rotoru

Pro diskretizaci kalibračního modelu byly použity lineární prvky. To znamená, že stupeň volnosti úlohy je trojnásobek (posuvy ve směru osy x , y , z) počtu uzlů. V odvozeném modelu je stupeň volnosti dán počtem uzlů násobených šesti (posuvy ve směru x , y , z a natočení kolem os x , y , z). Tyto dvě hodnoty jsou porovnány v tabulce 6.

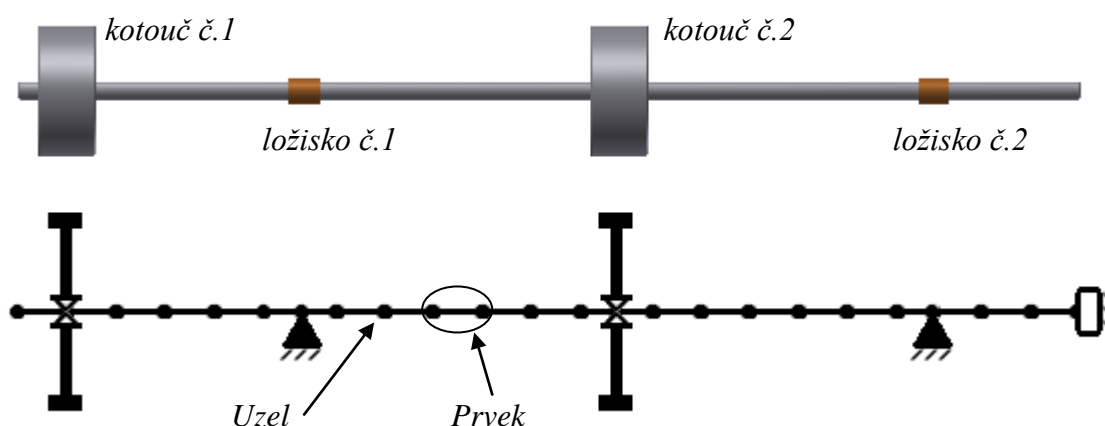
<i>3D MKP model rotoru</i>	<i>1D MKP model rotoru</i>
148539	144

Tabulka 6: Stupeň volnosti úlohy

Je zřejmé, že odvozený konečně prvkový model má víc jak tisíckrát menší stupeň volnosti při srovnatelných výsledcích. To znamená ušetření nároků na výpočetní techniku, ušetření výpočetních časů a hlavně neskutečný dopad na případné optimalizační úlohy.

Dále by šlo zmínit, že celá tato úloha byla programovaná ve volně přístupném softwaru Scilab. To znamená i veliké ušetření finančních prostředků. A přitom, pokud je zapotřebí řešit úlohy rotorové dynamiky v komerčním softwaru, tak potřebujeme speciální software, standardní softwary tuto problematiku nevyřeší.

Na obrázku 23. je zobrazen konečně prvkový model našeho zkoumaného rotoru diskretizovaný pomocí popsané metody v této práci. Na místech okrajových podmínek bylo nutné mít uzel a zbytek modelu rovnoměrně diskretizovat konečnými 1D prvky. Konečné prvky mají průměrnou délku kolem 25 [mm].



Obr. 23: 1D MKP model rotoru

Kompletní použitá výpočtová síť je zobrazena v tabulce 7, kde je vidět, že celkový konečně prvkový model hřídele je tvořen 23 prvky. Tabulka dále ukazuje geometrii jednotlivých prvků.

Číslo prvku	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Délka [mm]	25	25	25	25	25	23	19	25	25	25	25	25
Průměr [mm]	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Číslo prvku	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	-
Délka [mm]	19	19	25	25	25	25	25	19	25	25	26	-
Průměr [mm]	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	-

Tabulka 7: MKP síť hřídele

8.7 NEKONZERVATIVNÍ MODEL ROTORU

Pro finální popis rotoru je nutné ke konzervativnímu modelu přidat matici gyroskopických účinků a tlumení, tím i zavedení vlivu otáček. Matice gyroskopických účinků je již pro model známá. Tvar matice vnějšího útlumu je také znám, ale nejsou známy koeficienty externího útlumu. Jelikož jde o pohyb v atmosférickém prostředí, lze vnější éterový útlum zcela zanedbat. Zbývá tedy jen vliv vnitřního útlumu. Tvary matic vzniklé vnitřním útlumem materiálu, tj. matice vnitřního útlumu a cirkulační matice jsou známy. Vycházejí z poměrného útlumu materiálu odvozené v kapitole (4.3) této práce. Při výpočtu byl použit obecně známý poměrný útlum ocelových součástí 0,0015 [-]. Vzniká zde zásadní problém tohoto odvození. Tím je singularita matice tuhosti elementu a tím i neexistující její inverze. Proto praktický postup odvození matice vnitřního útlumu (4.32) bude odlišný. Zároveň i bez problému singularity matice tuhosti elementu by byla komplikace možnost vzniku struktury matice, kde budou obsazené

pozice, které svazují výchylky a silové účinky, které svázané být nemají. Proto se musí využít vztahu popisující matici vnitřního útlumu (8.2) dle literatury [7]. Tímto vztahem se získá matice vnitřního útlumu s jasnou strukturou, jako má i matice tuhosti elementu, kde jsou svázané správné výchylky s příslušnými silovými účinky.

$$\mathbf{B}_I^{(e)} = b_I \mathbf{K}^{(e)} \quad (8.2)$$

Nyní se problém převádí na hledání koeficientu vnitřního útlumu b_I , který bude vycházet z odvozené matice vnitřního útlumu (4.32). Pro odstranění singularity se musí matice hmotnosti a tuhosti elementu modifikovat. Modifikace proběhne zavedením pevného vetknutí elementu a tím zajistíme regulárnost problému. Získává se nosník, z kterého lze zjistit potřebnou matici, a nezanedbávají se žádné vlastnosti elementu. Tento krok umožňuje získání matice vnitřního útlumu (4.32). Aby se nyní získal koeficient vnitřního útlumu, budou se porovnávat disipační energie získané vztahy (4.32) a (8.2), které se musejí rovnat. Disipační energii vztahu (4.32) popisuje vztah (8.3) a vztahu (8.2) popisuje (8.4). Když se tyto energie dají do rovnosti (8.5), tak se získá vztah popisující výpočet koeficientu vnitřního útlumu. Je nutné podotknout, že jde o numerický odhad vlivu vnitřního útlumu materiálu. Vše je zapotřebí odladit s reálným systémem. Jelikož se tato práce zabývá numerickou analýzou rotorového systému, bude tato hodnota považována za konečnou a bude s ní počítáno v matematickém modelu.

$$E_D = \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{V}^{-1} \dot{\mathbf{q}} \quad (8.3)$$

$$\bar{E}_D = \dot{\mathbf{q}}^T b_I \mathbf{K}^{(e)} \dot{\mathbf{q}} \quad (8.4)$$

$$E_D = \bar{E}_D \quad (8.5)$$

Získaný koeficient vnitřního útlumu je:

$$b_I = \frac{\dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{V}^{-1} \dot{\mathbf{q}}}{\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}^{(e)} \dot{\mathbf{q}}} = 2.35 \cdot 10^{-13} \text{ s}$$

9. MODÁLNÍ ANALÝZA ROTORU

Pokud je znám kompletní popis dynamického systému, lze provést jeho modální analýzu. Tímto krokem se získají základní povahové vlastnosti systému. Tyto dynamické vlastnosti systému popisují vlastní čísla a k nim příslušné vlastní kmity systému (tj. vlastní vektory). Když jsou známy tyto dva základní povahové rysy soustavy, lze následně převést soustavu dynamických rovnic popisující systém na soubor nezávislých pohybových rovnic jednotlivých oscilátorů (9.1) podle kapitoly 5 této práce.

$$\dot{c}_i(t) - s_i c_i(t) = 0 \quad (9.1)$$

Nejdříve bude rozebrán význam vlastních čísel systému. V rovnici (9.1) je vidět u členu s nulovou derivací vlastní číslo, které je obecně komplexně sdružené (9.2).

$$s_i = \alpha_i \pm j\Omega_i \quad \text{kde } j = \sqrt{-1} \text{ je imaginární jednotka} \quad (9.2)$$

Pohybová rovnice (9.1) má řešení ve tvaru (9.3).

$$c_i(t) = C_{1i}c_{0i}e^{(\alpha_i+j\Omega_i)t} + C_{2i}c_{0i}e^{(\alpha_i-j\Omega_i)t} \quad (9.3)$$

(9.3) lze zapsat i ve tvaru (9.4).

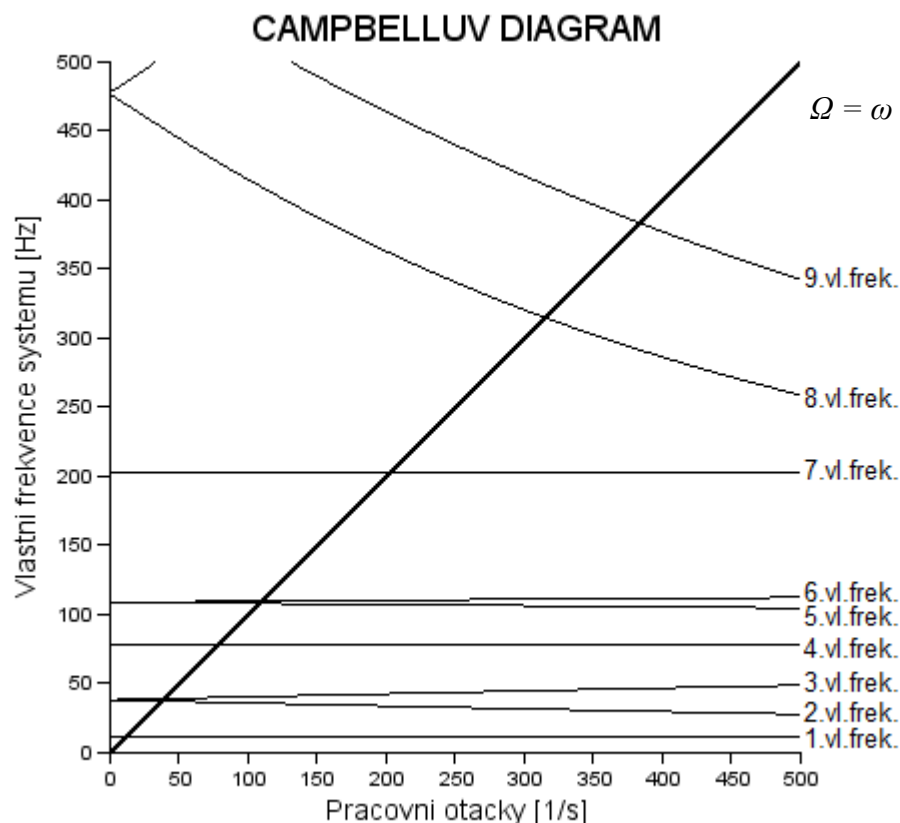
$$c_i(t) = e^{\alpha_i t} [A_i \cos(\Omega_i t) + B_i \sin(\Omega_i t)] \quad (9.4)$$

Z (9.4) lze konstatovat, že komplexní část vlastního čísla způsobuje oscilující pohyb (tj. vlastní frekvence systému) a reálná část dává informaci o chování amplitudy kmitavého pohybu (útlum systému). Z toho pohledu se posoudí stabilita systému.

- I. Pokud všechna $\alpha_i < 0$, amplituda se s časem zmenšuje a soustava je asymptoticky stabilní.
- II. Pokud alespoň jedno $\alpha_i = 0$, příslušný mód je na mezi stability.
- III. Pokud alespoň jedno $\alpha_i > 0$, amplituda se s časem zvětšuje a soustava je nestabilní.

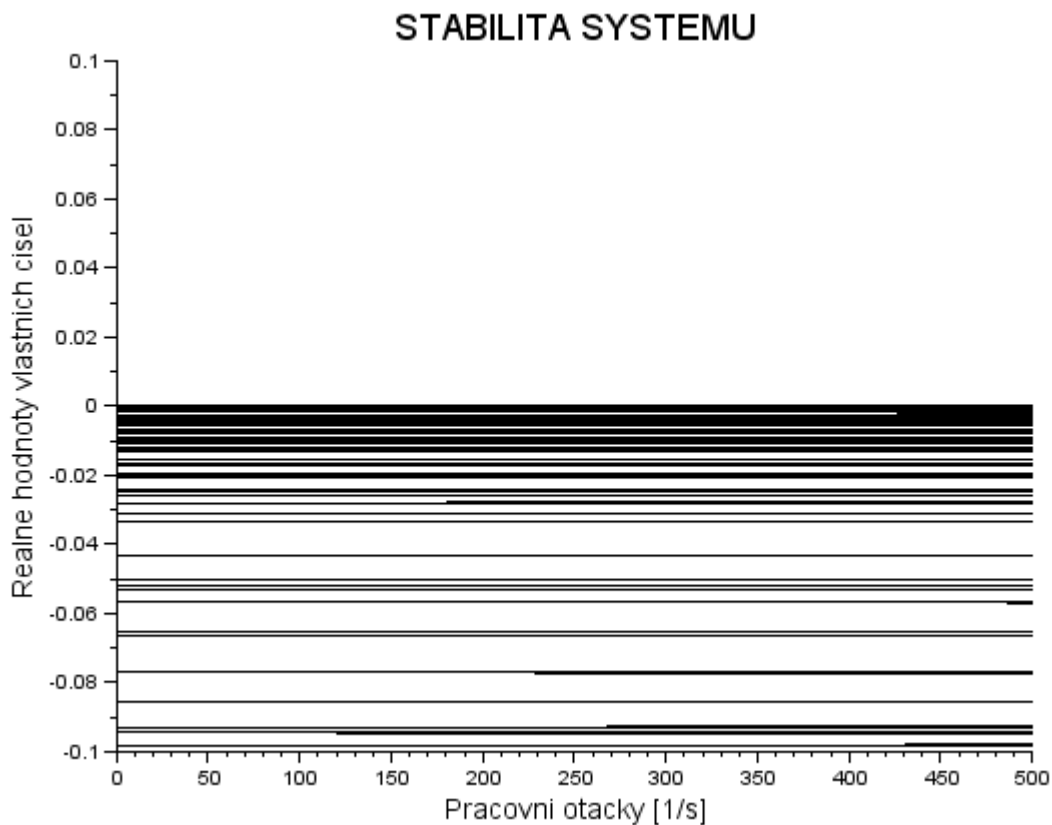
Bylo ukázáno, že pohybové rovnice v rotorové dynamice závisí na otáčkách hřídele, to znamená, že i všechny získané výsledky závisí také na vlastních otáčkách rotoru. Proto ony získané výsledky budou zakreslované do grafů, kde nezávislá proměnná bude úhlová rychlost hřídele, respektive otáčky hřídele. Rozsah zkoumaných otáček bude po celou dobu analyzování rotoru od 0 do 500ti otáček hřídele za sekundu. Tato hodnota vychází z faktu, že jsou použita samomazná kluzná ložiska, kde jak bylo zmíněno, je maximální možná kluzná rychlost 10 [m/s]. To pro průměr hřídele 10 [mm] vychází maximální otáčky cca 318 [ot/s]. Zkoumaných 500 [ot/s] dostatečně převyšuje tuto maximální oblast použití, zkoumaná oblast plnohodnotně analyzuje vlastnosti rotoru.

Po vykreslení imaginárních částí vlastních čísel Ω_i (tj. vlastní frekvence) systému v závislosti na otáčkách hřídele se získá takzvaný Campbellův diagram systému (Obr.24). Vlivem gyroskopického efektu nejsou vlastní frekvence v rotorové dynamice konstantní a dochází k jejich štěpení. To je velmi důležitá informace, která říká, jak je důležité zahrnout vliv otáček do analýzy systému, jinak se získávají nesmyslné výsledky. Pokud se vlastní hodnota neštěpí, jedná se o vlastní frekvenci příslušnou torznímu, nebo axiálnímu vlastnímu tvaru.



Obr. 24: Vlastní frekvence systému

Dále po vykreslení reálných částí vlastních čísel α_i systému v závislosti na otáčkách se získá informace o stabilitě systému (Obr.25). V grafu lze vidět, že jsou reálné hodnoty vlastních čísel opět nekonstantní a opět dochází k jejich štěpení. Toto způsobuje cirkulační matice, která vznikla zahrnutím materiálového útlumu do popisu systému. Lze konstatovat, že ve zkoumaném rozsahu otáček je analyzovaný systém stabilní.



Obr. 25: Stabilita systému

Po analýze vlastních čísel se získalo mnoho informací o systému. Bylo částečně zmíněno, jak podle charakteru průběhu vlastního čísla odhadnout, jakému druhu vlastního tvaru přísluší. Nyní bude ukázáno, jak jednotlivé vlastní hodnotě přiřadit její vlastní vektor. Každému vlastnímu číslu systému přísluší vlastní vektor a ten popisuje, jakým tvarem bude příslušná vlastní frekvence systému při volném kmitání kmitat. V úloze mohou nastat tři typy kmitů:

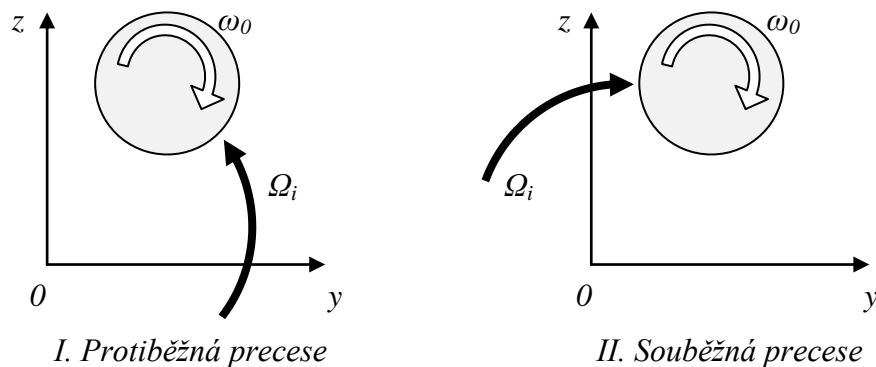
- I. *Kmitání v axiálním směru.*
- II. *Torzní kmitání.*
- III. *Kmitání v radiálním směru.*

Nejzajímavější jsou kmity v radiálním směru, jelikož analyzované buzení probíhalo v radiálním směru. Tyto vlastní vektory vycházejí opět obecně komplexní. Tím v rotorové dynamice dochází při kmitání k takzvaným orbitám při pohybu. To je způsobeno svázáním pohybu ve směru osy y a z . Znamená to, že deformovaný hřídel má při kmitání švihadlový pohyb.

Tento pohyb může být ve dvou formách:

- I. *Protiběžná precese*
- II. *Souběžná precese*

Protiběžná precese je takový tvar orbitu, při kterém vykreslovaná trajektorie deformovaného hřídele je v opačném směru, než je smysl otáčení hřídele (Obr. 26, I.). Souběžná precese je případ, kdy vykreslovaná trajektorie pohybu deformovaného hřídele je ve stejném směru, jako je smysl otáčení hřídele (Obr. 26, II.). Vysvětlení vzniku jednotlivých typů precesí nalezneme v příloze A této práce.

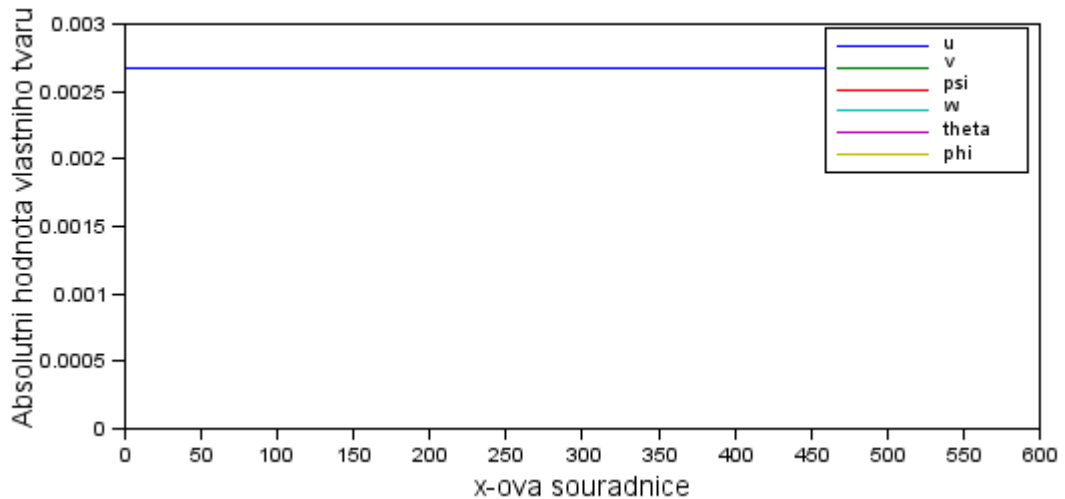


Obr. 26: Typy orbitů

Díky informacím získaným z vlastních vektorů lze detailně analyzovat jednotlivé křivky vlastních frekvencí v Campbellově diagramu a daleko více porozumět systému. Rozbor byl proveden pro prvních devět frekvencí zobrazených v Campbellově diagramu. Zde nejde o vlastní hodnotu, ale o typ vlastního tvaru. Tímto kompletně analyzujeme informace, které můžou vlastní čísla a vlastní vektory o systému prozradit.

1. VLASTNÍ FREKVENCE

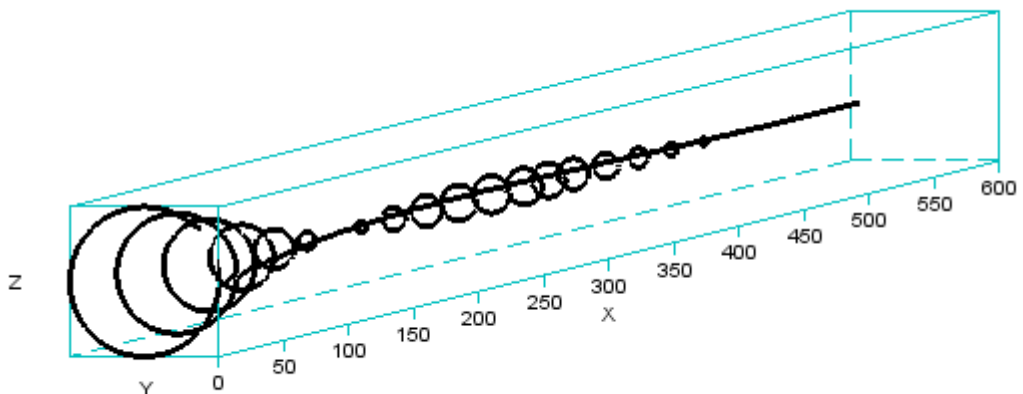
Na obrázku 27 je srovnání jednotlivých posuvů prvního vlastního tvaru. Tím se získá informace o typu vlastního kmitání pro první frekvenci. Je vidět, že se jedná o axiální kmitání celého hřídele vlivem malé tuhosti spojky v axiálním směru. Axiální směr znamená ve směru osy x , která je vynesena pro všechny tvary v [mm] a popisuje délku hřídele.



Obr. 27: První vlastní tvar

2. VLASTNÍ FREKVENCE

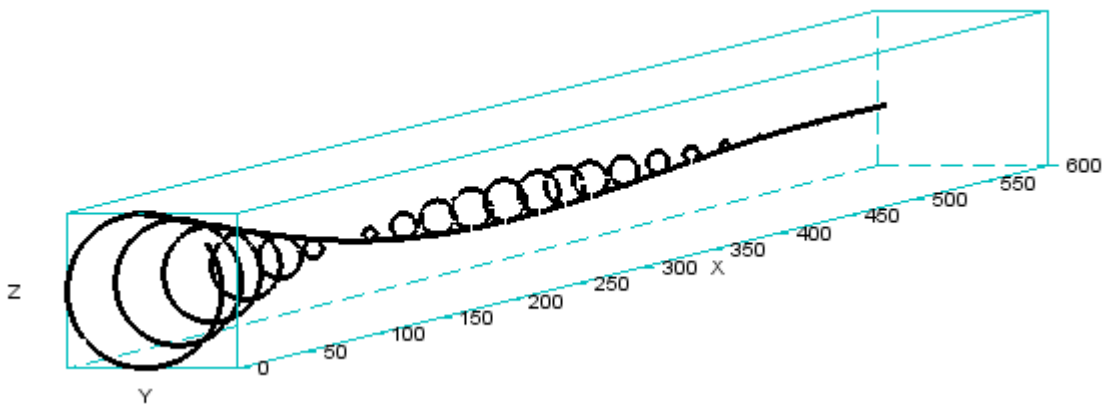
Na obrázku 28 je vidět, že se jedná o kmitání v radiálním směru. Vykreslené orbity ukazují protiběžnou precesi. Dochází k výraznému kmitání převislého konce osazeného kotoučem.



Obr. 28: Druhý vlastní tvar

3. VLASTNÍ FREKVENCE

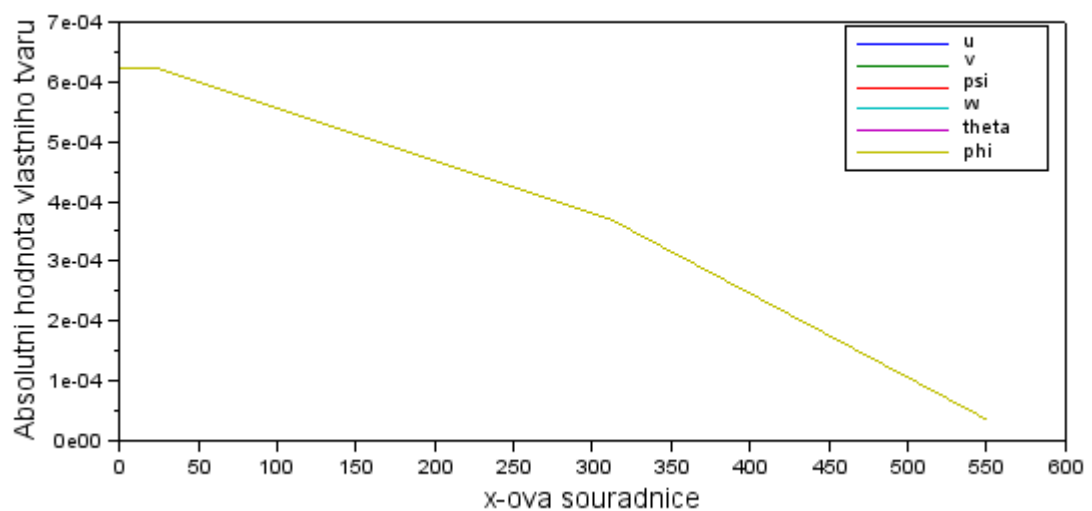
Na obrázku 29 je vidět, že se jedná o kmitání v radiálním směru. Vykreslené orbity ukazují souběžnou precesi. Dochází k výraznému kmitání převislého konce osazeného kotoučem.



Obr. 29: Třetí vlastní tvar

4. VLASTNÍ FREKVENCE

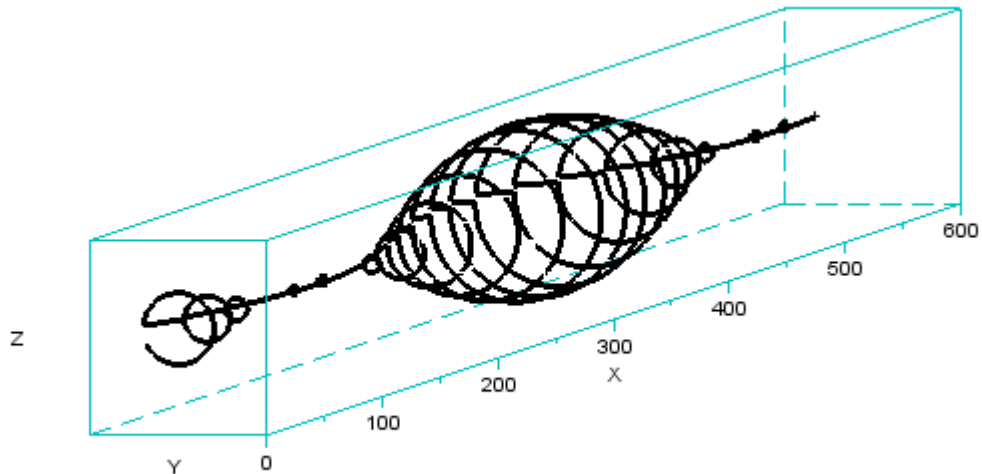
Na obrázku 30 je vidět, že se jedná o torzní kmitání hřídele. Dochází k postupnému narůstání natočení hřídele v jednom směru.



Obr. 30: Čtvrtý vlastní tvar

5. VLASTNÍ FREKVENCE

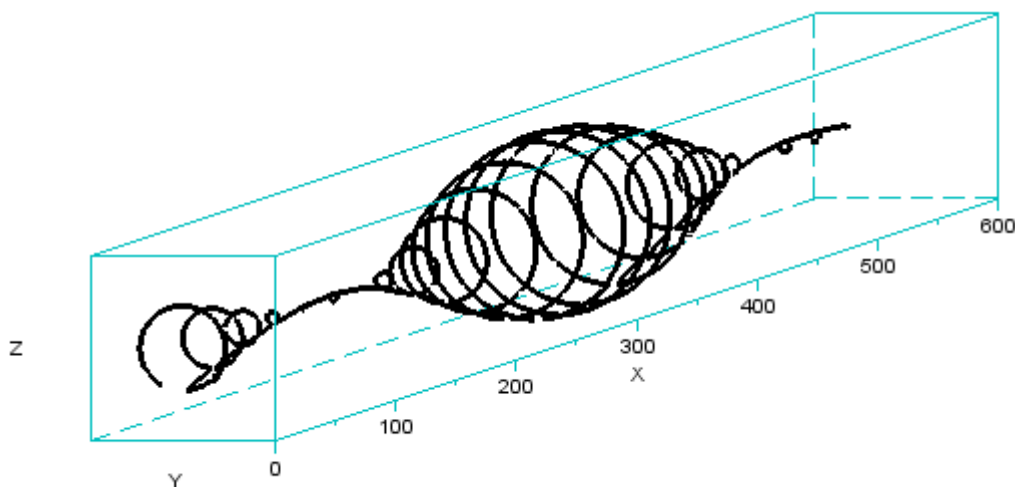
Na obrázku 31 je vidět, že se jedná o kmitání v radiálním směru. Vykreslené orbity ukazují protiběžnou precesi. Dochází k výraznému kmitání kotouče uchyceného mezi ložisky.



Obr. 31: Pátý vlastní tvar

6. VLASTNÍ FREKVENCE

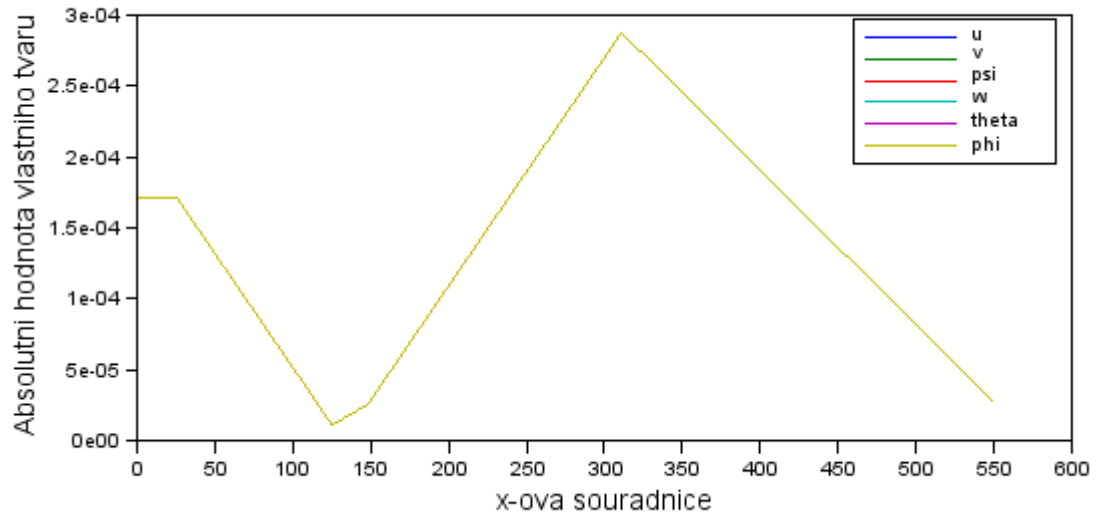
Na obrázku 32 je vidět, že se jedná o kmitání v radiálním směru. Vykreslené orbity ukazují souběžnou precesi. Dochází k výraznému kmitání kotouče uchyceného mezi ložisky. Jedná se o obdobný tvar vlastních tvarů jako v případě pátého vlastního tvaru.



Obr. 32: Šestý vlastní tvar

7. VLASTNÍ FREKVENCE

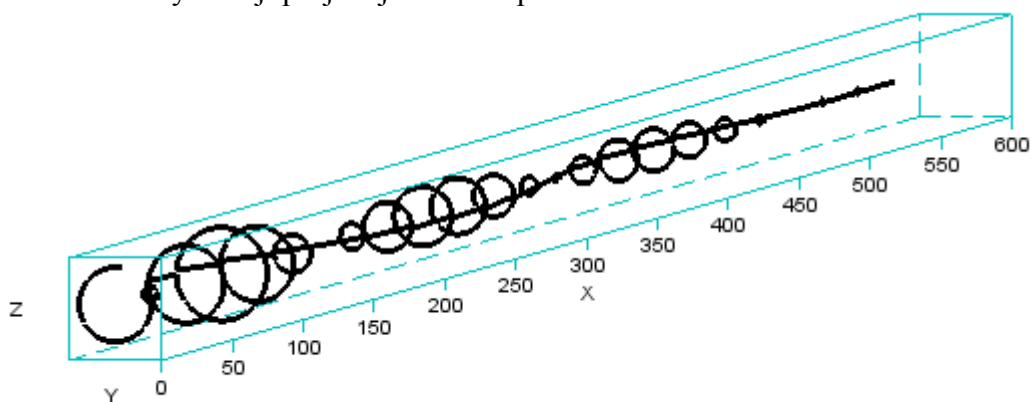
Na obrázku 33 je vidět, že se jedná o torzní kmitání hřídele. Dochází ke značnému zkroucení hřídele.



Obr. 33: Sedmý vlastní tvar

8. VLASTNÍ FREKVENCE

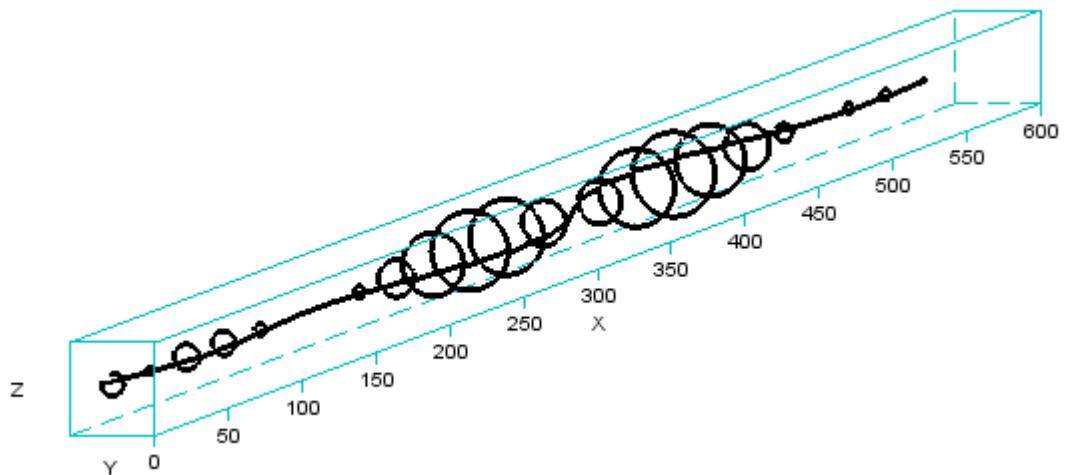
Na obrázku 34 je vidět, že se jedná o kmitání v radiálním směru. Vykreslené orbity ukazují protiběžnou precesi. Dochází ke kmitání hřídele v místech mezi kotouči a ložisky (obecně okrajovými podmínkami). Vlastní kotouče osazené na hřídeli v tomto módu prakticky nekmitají. Charakter vlastního tvaru je nyní obdobný s devátým tvarem. U osmého se ale výrazněji projevuje kmitání převislého konce.



Obr. 34: Osmý vlastní tvar

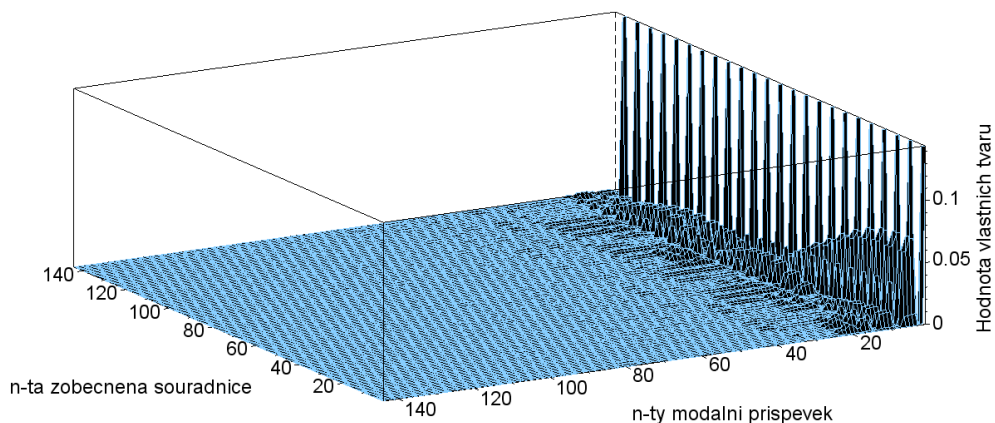
9. VLASTNÍ FREKVENCE

Na obrázku 35 je vidět, že se jedná o kmitání v radiálním směru. Vykreslené orbity ukazují souběžnou precesi. Dochází ke kmitání hřídele v místech mezi kotouči a ložisky (obecně okrajovými podmínkami). Vlastní kotouče osazené na hřídeli v tomto módu prakticky nekmitají.



Obr. 35: Devátý vlastní tvar

Tímto byly analyzovány jednotlivé první základní módy systému. Nyní se ukáže, jak velký přínos mají jednotlivé módy pro celkový popis vlastního kmitání rotoru. Vlastních vektorů je tolik, jako je stupeň volnosti systému, to je v tomto případě 144. Na obrázku 36 je zobrazen graf, který srovnává velikost jednotlivých vlastních tvarů. Lze říct, že postupně přechází kmitání hřídele (nejnižší módy) do jemného chvění (nejvyšší módy). Jelikož jde o analyzování kmitání rotoru, tak proto stačí identifikovat pouze nejnižší módy.



Obr. 36: Vykreslení vlastních tvarů kmitání

10. DYNAMICKÁ ODEZVA ROTORU

Jsou známy informace o vlastní povaze rotorového systému. Nyní lze zkoumat, jakou odezvu bude mít rotor při kinematickém buzení jeho uložení. Tuto odezvu budou popisovat přenosové charakteristiky. Tyto charakteristiky byly vytvořeny pro spektrum otáček od 0 do 500 [ot/s] a pro frekvence kinematického buzení od 0 do 500 [Hz].

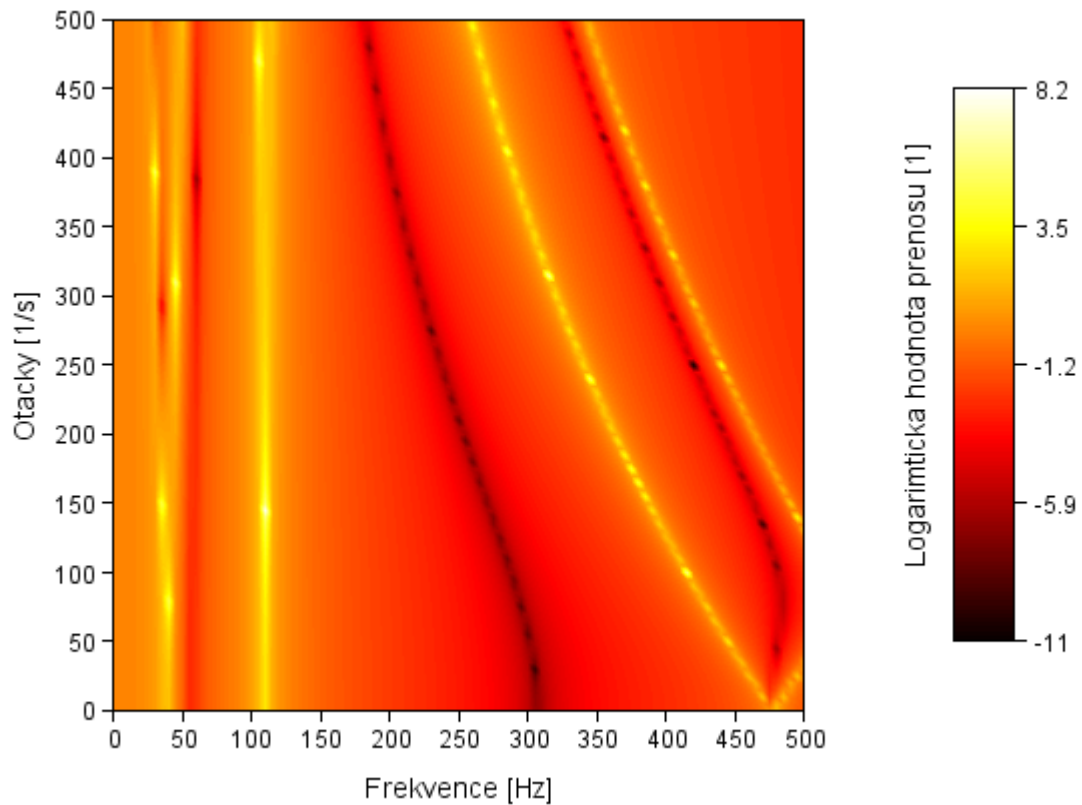
Kinematické buzení je ve směru osy y , bude se tedy zkoumat odezva pouze ve směru této osy. Přenosovou charakteristikou se získá informace o poměru výsledné amplitudy kmitání vůči vstupní amplitudě kinematického buzení pro různou hodnotu otáček a frekvence buzení. Na základě takovéto charakteristiky lze zjistit další důležité informace o systému při daném druhu buzení. Lze říci, že přenosová charakteristika je modifikovaný Campbellův diagram vlastních frekvencí, který ukazuje povahu systému a získaná přenosová charakteristika je už konkrétní projev těchto vlastností při dynamickém zatížení systému.

Nejdůležitější informací co charakteristika poskytne je informace o rezonancích systémů. Rezonance způsobuje, že se v systému budí větší a větší amplitudy kmitání až dojde k samotnému porušení, nebo destrukci zařízení. To vypovídá o důležitosti této informace. Rezonance se projeví ve formě souběžné precese, nebo protiběžné precese. To už záleží na typu vybuzení, na oblasti v přenosové charakteristice a vše má souvislost s vlastní povahou systému. Tato povaha byla analyzovaná v kapitole o modální analýze systému, kde bylo ukázáno, jak dynamiku systému popisují vlastní čísla a vlastní vektory.

Další zajímavou oblastí, která se projeví, jsou oblasti antirezonancí. To znamená, že pokud je konkrétní zkoumané místo v antirezonanci, tak ačkoliv je celý rotor buzen, tak toto zkoumané místo je vůči globálnímu souřadnému systému spojeného se zemí v klidu a vůči lokálnímu souřadnému systému spojenému s uložení rotoru kmitá budícím signálem.

Nyní záleží na použití rotoru, co se od jeho funkce požaduje, nebo co je pro použití naopak nebezpečné. Všechny potřebné informace se vyčtou z těchto charakteristik. Nejzajímavější pro analýzu je, jakou odezvu budou mít místa uložení kotoučů. Na obrázku 37 je zobrazena přenosová charakteristika kotouče č.1, tj. na převislém konci. Stupnice je z důvodu přehlednosti v logaritmickém měřítku. Vztah definující přenos amplitudy kinematického buzení a amplitudy kmitání kotouče je

napsán níže (10.1). Ve vztahu je A amplituda dynamické odezvy a A_{ref} je amplituda kinematického buzení. Pro jednodušší zjištění amplitudy odezvy je na obrázku 38 zobrazena funkce pro přepočet logaritmické hodnoty přenosu na poměrnou hodnotu přenosu, která je definovaná vztahem (10.2).



Obr. 37: Přenosová charakteristika kotouče č.1

Vztah definující přenosovou charakteristiku v logaritmickém měřítku:

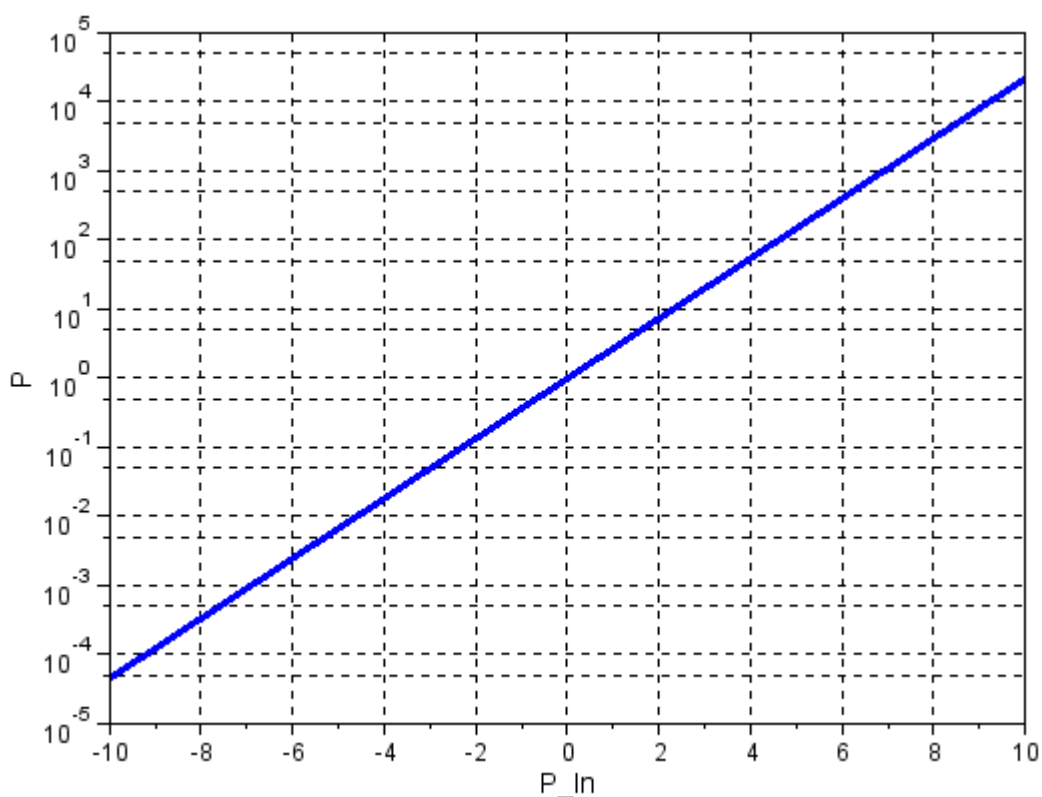
$$P_{ln} = \ln\left(\frac{A}{A_{ref}}\right). \quad (10.1)$$

Vztah definující přenos:

$$P = \frac{A}{A_{ref}}. \quad (10.2)$$

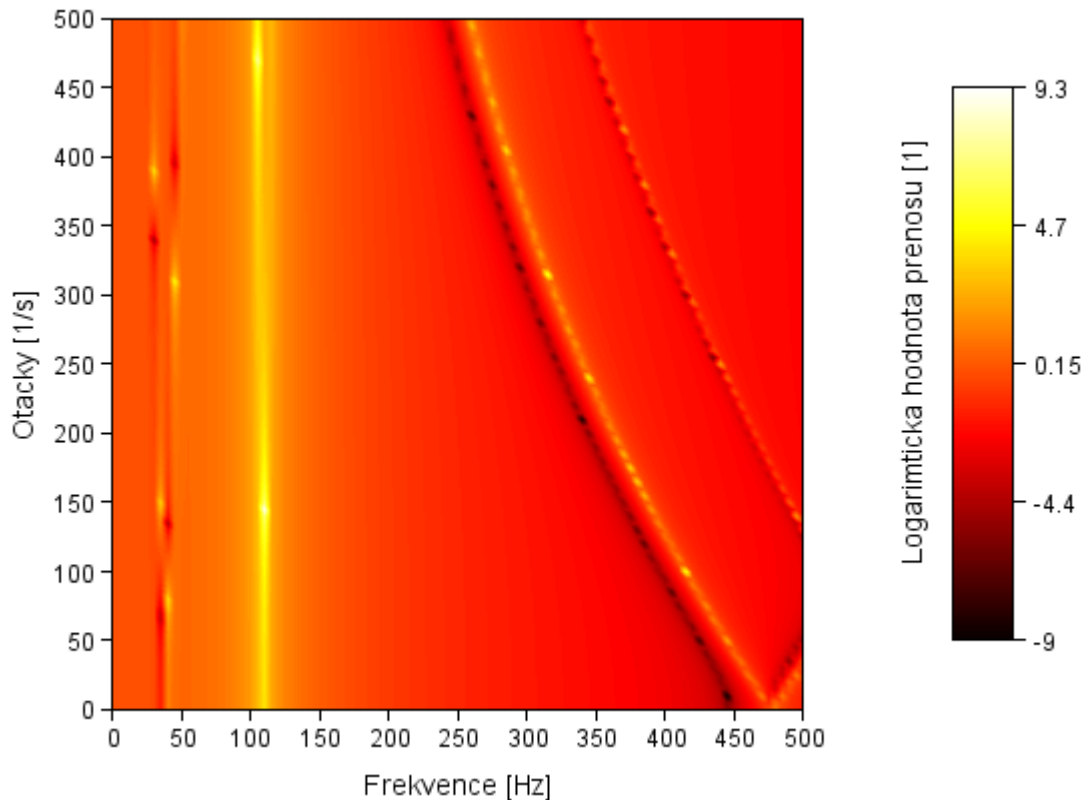
Přenosová charakteristika kotouče č.1 ukazuje místa rezonancí pro kotouč na převislém konci hřídele. První rezonance připadá na oblast kolem 40 [Hz] kinematického buzení. Tato rezonance se s narůstajícími otáčkami štěpí na rezonanci

projevenou protiběžnou precesí (levá větev) a souběžnou precesí (pravá větev). Další rezonance připadá na oblast 110 [Hz]. V této oblasti se větev protiběžné a souběžné precese slučuje a tím dochází při rezonanci k chaotickému chování kotouče. U dalších dvou rezonancí v naší zkoumané oblasti dochází ke značné proměnlivosti s narůstajícími otáčkami a obě tyto rezonance se projeví protiběžnou precesí. Mimo rezonancí se projevují i antirezonance (nejtmavší oblasti). Zajímavým poznatkem je, že průběhy rezonance a antirezonance se následují bezprostředně vedle sebe u čtvrté rezonance. Lze konstatovat, že zmíněné oblasti by byly vyhodnoceny jako nebezpečné pro použití rotoru.



Obr. 38: Transformační funkce přenosové charakteristiky z logaritmického měřítka

Na obrázku 39 je zobrazena druhá přenosová charakteristika a ta přísluší kotouči č.2, který je usazen uprostřed mezi ložisky. Charakteristika je obdobná jako u kotouče č.1, ale je vidět, že nejvýraznější rezonance je v oblasti 110 [Hz]. Dále oblasti antirezonancí jsou posunuty směrem k vyšším frekvencím. Můžeme konstatovat, že tento kotouč je méně náchylný k projevům vibrací. Ve velké oblasti je kmitání kotouče vůči základům přibližně v poměru 1:1.



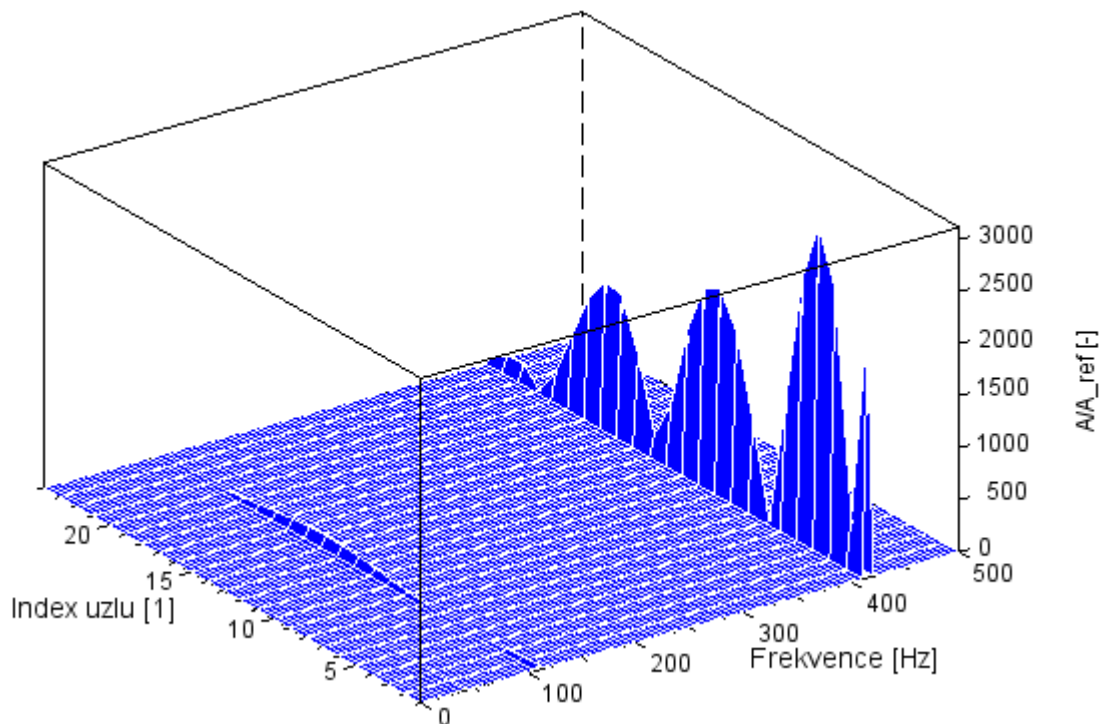
Obr. 39: Přenosová charakteristika kotouče č.2

Tyto charakteristiky ukázaly, jak se dynamická odezva vyvíjí s otáčkami pro oba kotouče. Nyní je na místě zjistit, jak se pro vybrané otáčky vyvíjí dynamická odezva v ostatních místech rotoru. Analyzovala se dynamika míst osazených kotouči, ale je zapotřebí ověřit, zda je to dostačující. Průběhy dynamických přenosů zobrazíme pro otáčky 100, 200 a 300 [ot/s]. Tyto dynamické přenosy jsou v absolutním měřítku amplitudy. Na další ose je frekvence kinematického buzení a na třetí ose index uzlu diskretizovaného modelu rotoru. Dynamické odezvy jsou opět zobrazeny pro výchylky ve směru buzení, tj. ve směru osy y .

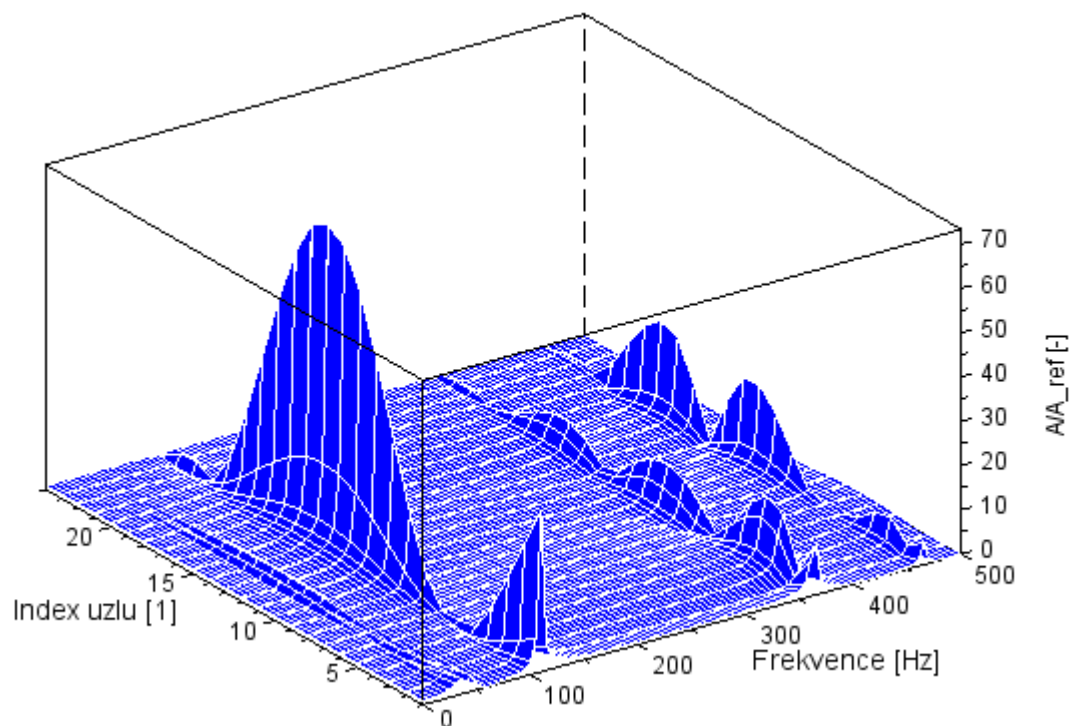
Na obrázcích 40 až 42 jsou zobrazeny odezvy rotoru při rychlostech 100, 200 a 300 otáček za sekundu (vybrané hodnoty otáček). Grafy nám zobrazují chování hřídele v závislosti na frekvenci buzení, pokud jsou známy pracovní otáčky, takováto charakteristika je pro nás dostačující pro popis dynamického chování rotoru.

Lze konstatovat, že je vhodné provést obě varianty přenosových charakteristik, abychom znali vývoj rezonancí v závislosti na otáčkách rotoru, ale zároveň je vhodné znát průběh rezonance po délce rotoru a tím i nalézt vhodné místa na hřídeli pro analyzování rezonancí. Důležité je znát, v jakých hodnotách se budou pohybovat

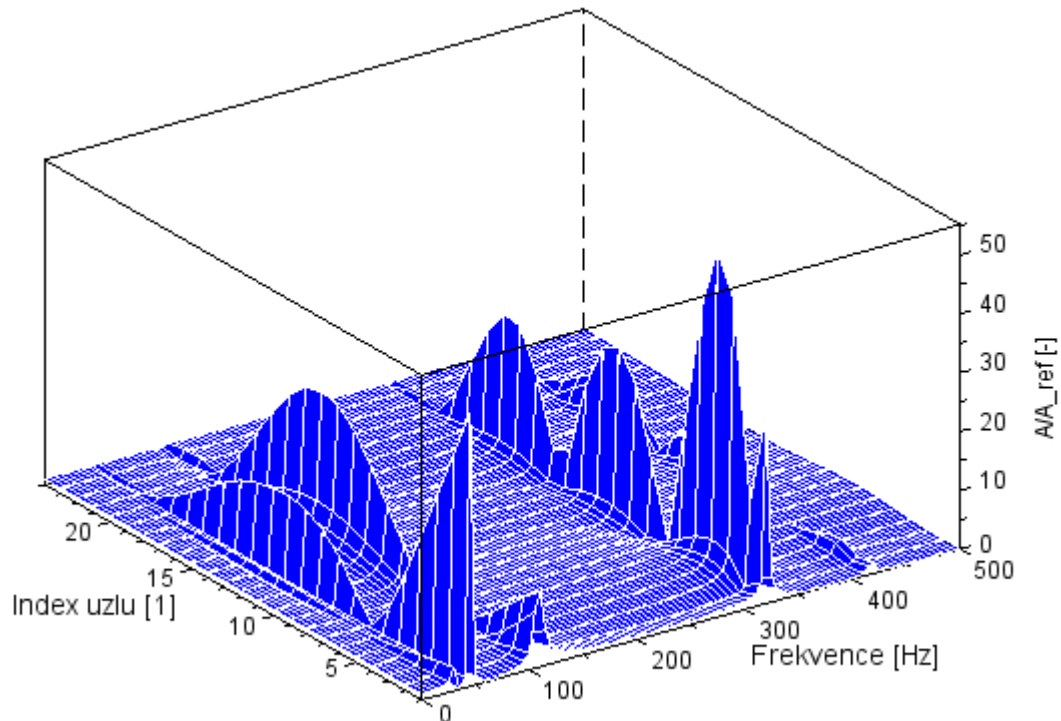
pracovní otáčky rotoru, aby se analýza zaměřila na konkrétní oblast. Také by bylo vhodné vědět, v jakých frekvencích by se mohlo i kinematické buzení pohybovat, aby se analýza ještě více specifikovala na užší oblast. Vše se ale samozřejmě odvíjí od typu úlohy, která je řešena. V případě této práce jde o obecné analyzování rotoru a vlivu vibrační na něj přenášených. Proto zde byla snaha o co možno nejobecnější zachycení jevů a problémů, které mohou vzniknout, protože nešlo o konkrétní aplikaci metodiky na reálný případ. Je zřejmé, že už samotná modální analýza poskytla mnoho užitečných informací, které pomůžou odhadem předpovědět chování. Po analyzování vlastních tvarů v souladu s vlastními čísly systému je zřejmé, jak z Campbellova diagramu vyčíst, která vlastní frekvence přísluší jakému vlastnímu tvaru a jakou precesí se bude projevovat. Tím je myšleno, že při štěpení vlastních frekvencí se nižší větve projevuje protiběžnou precesí a vyšší větve souběžnou precesí. Pokud se vlastní frekvence neštěpí, bude příslušet axiálnímu, nebo torznímu kmitání.



Obr. 40: Dynamická odezva rotoru při 100 [ot/s]



Obr. 41: Dynamická odezva rotoru při 200 [ot/s]



Obr. 42: Dynamická odezva rotoru při 300 [ot/s]

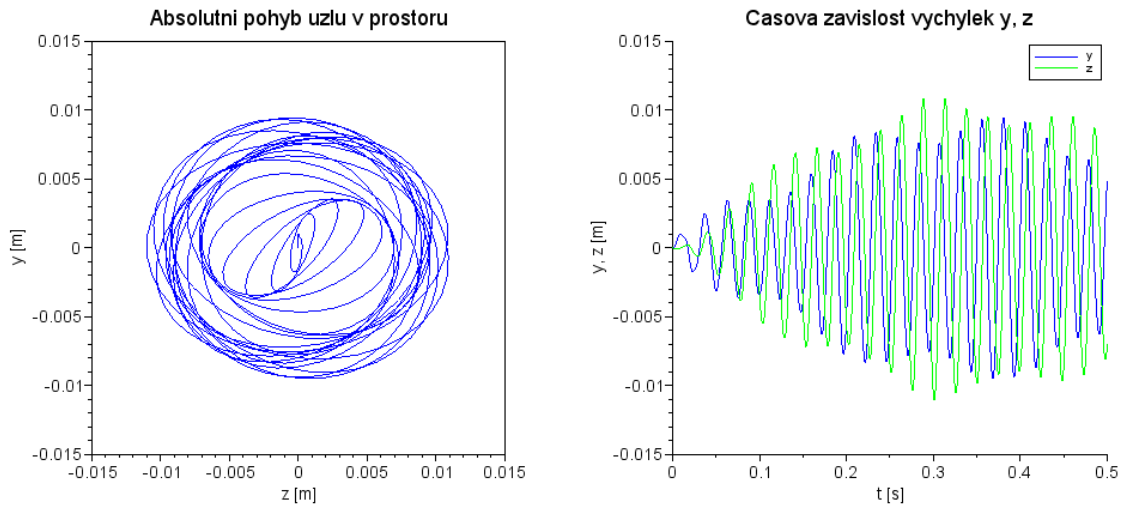
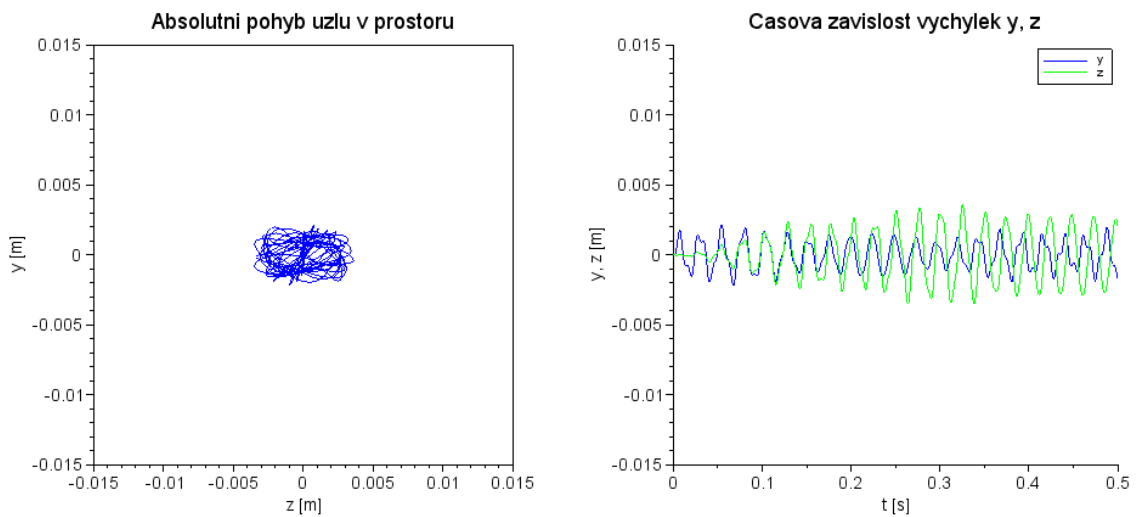
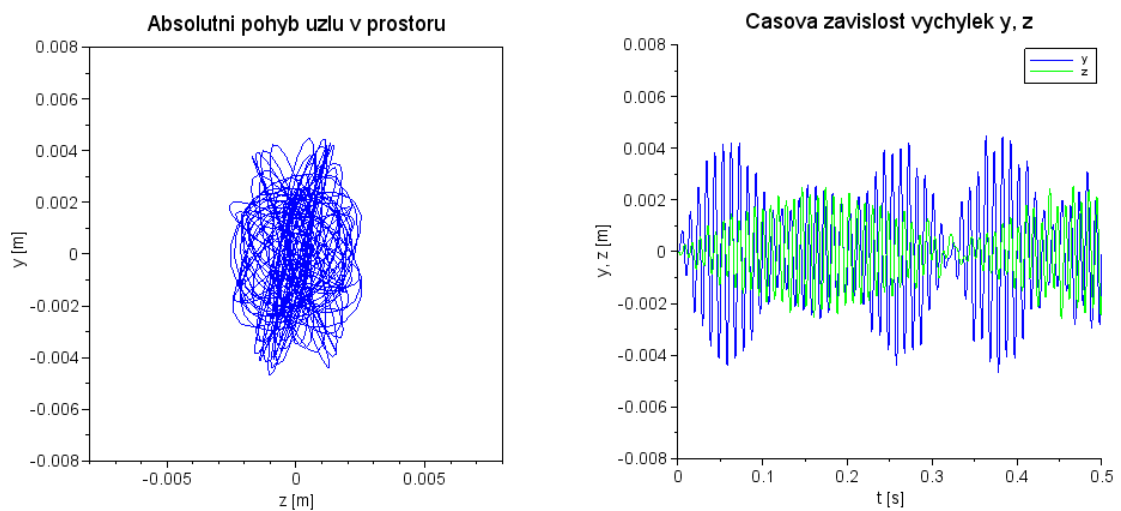
10.1 SIMULACE POHYBU ROTORU

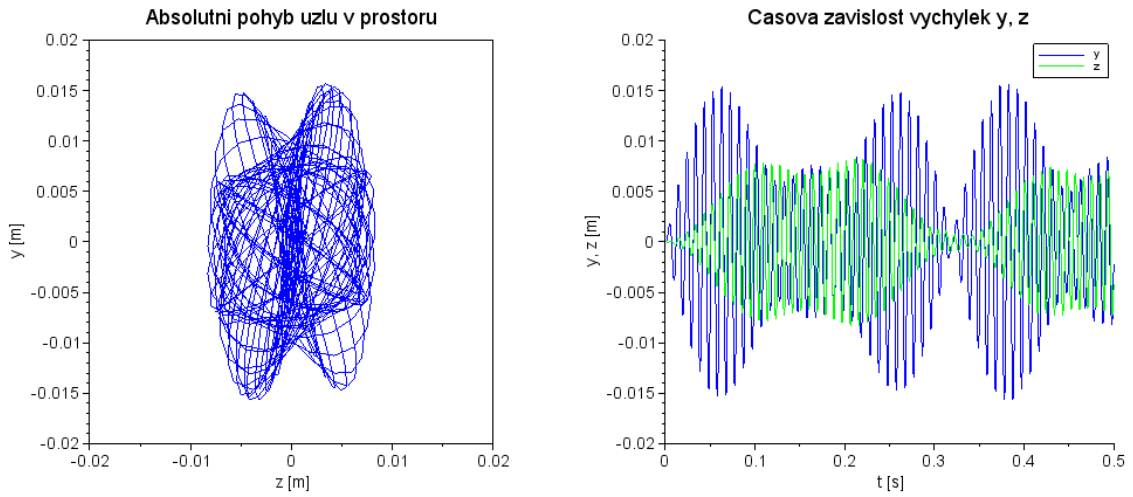
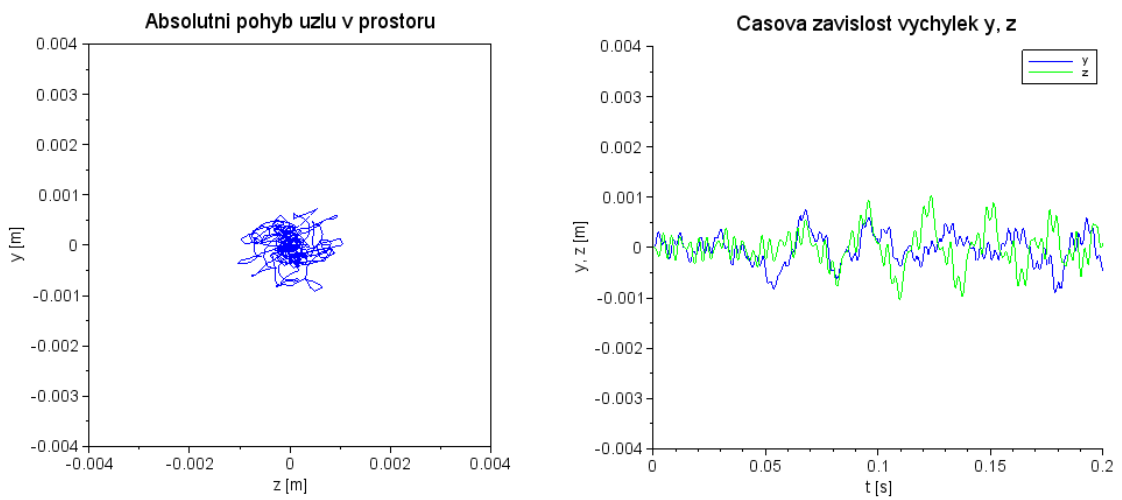
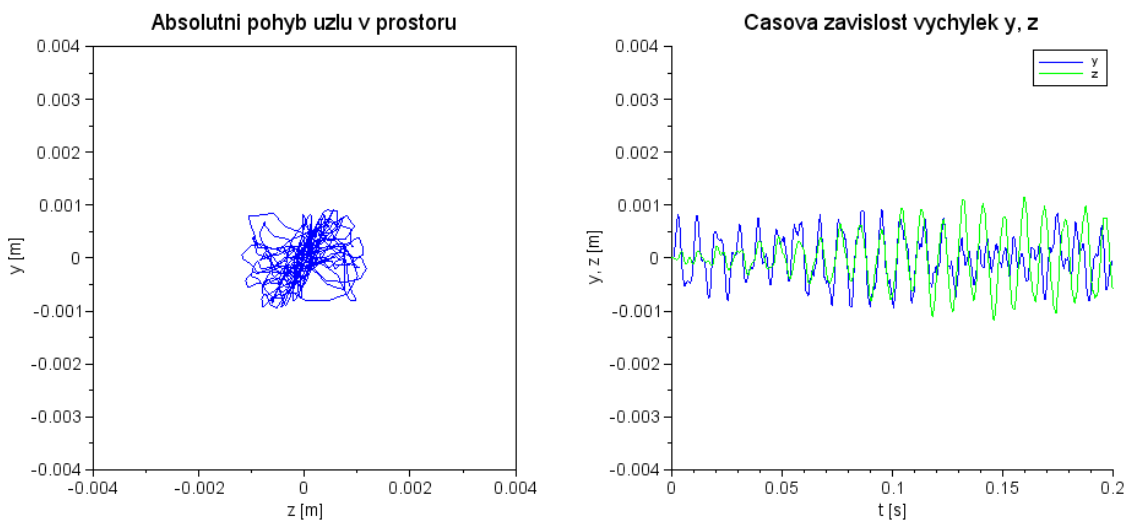
Analýza poskytla mnoho informací, grafů a map, které popisují dynamické chování rotoru. Nyní budou zobrazeny numerické simulace pohybu zkoumaného modelu rotoru sestaveného pomocí metody konečných prvků. Budící signál základny rotoru má sinusový průběh podle vztahu (10.3). Amplituda budícího signálu je I [mm]. Simulace byly provedeny pro různé hodnoty otáček rotoru a různé hodnoty frekvencí budícího signálu. Zobrazovány jsou pohyby obou kotoučů a parametry simulace, tj. otáčky a frekvence, budou vybírány podle přenosových charakteristik kotoučů (Obr. 37, Obr. 39).

$$y_0(t) = 0,001\sin(2\pi ft) \quad (10.3)$$

Řešení matematického modelu rotoru bylo provedeno Newmarkovou metodou popsané v kapitole 7. této práce. Pohybové rovnice jsou diferenciální rovnice druhého řádu. To znamená, že je zapotřebí pro jejich vyřešení znát dvě počáteční podmínky soustavy. Ty popisují počáteční pohybový stav rotoru. Počáteční podmínky jsou poloha a rychlost rotoru v nulovém čase. Obě tyto hodnoty jsou nulové, což znamená, že rotor je v absolutním klidu. Zároveň má rotor vlastní otáčky. To je ale vstupní parametr popisu systému. Zde nejde o analýzu rozbíhání rotoru, ale o simulaci konkrétních, jasně definovaných parametrů. Tedy popis počátečního stavu rotoru lze popsat větou, že plně roztočený rotor je vložený do těchto (nulových) počátečních podmínek a následně simulován. Po provedení simulací jsou zobrazeny v grafech orbity pohybů středu hřídele v místech nasazení kotoučů (tj. uzel, ke kterému je přičten vliv kotoučů) a zároveň časové průběhy těchto výchylek. V obrázcích 43 - 48 je zobrazeno pár vybraných simulací, ostatní nalezneme v příloze B této práce.

Jelikož je řešena pouze dynamika rotoru, je zobrazen pouze jeho absolutní pohyb. Pokud by se prováděl například únavový výpočet hřídele, bylo by zapotřebí zjistit vlastní kmitání hřídele, tak by se zobrazoval jeho relativní pohyb vůči uložení, tj. hřidel vůči ložiskům. Je možno získat jakýkoliv potřebný výstup, včetně poměrných deformací apod. To je obrovská výhoda vlastního naprogramování úlohy, protože lze zjistit jakékoliv potřebné informace o systému. Práce ukazuje jen vybrané výsledky, které byly považovány za podstatné.

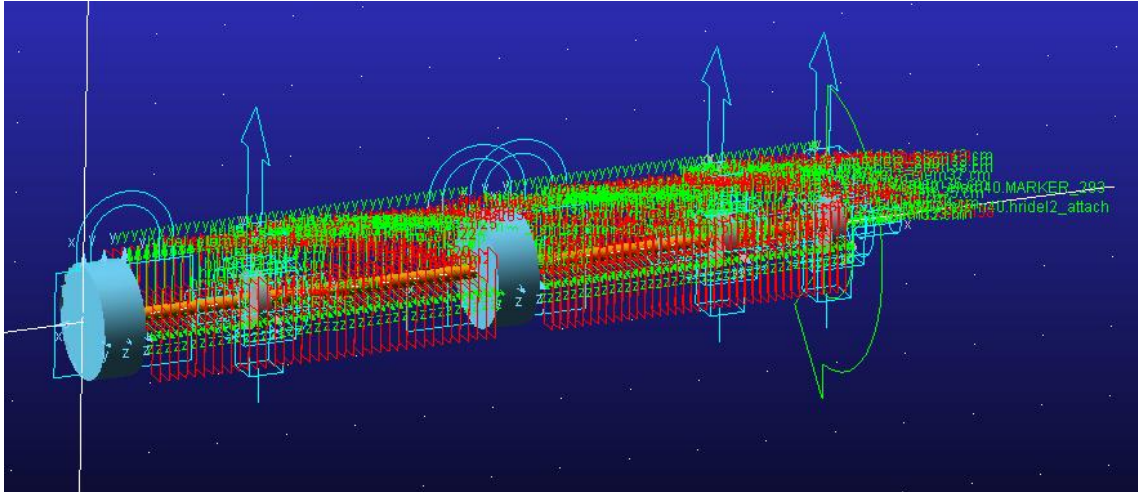
Obr. 43: Knotouč č.1; $n = 150$ [ot/s]; $f = 40$ [Hz]Obr. 44: Knotouč č.2; $n = 150$ [ot/s]; $f = 40$ [Hz]Obr. 45: Knotouč č.1; $n = 200$ [ot/s]; $f = 100$ [Hz]

Obr. 46: Kotouč č.2; $n = 200$ [ot/s]; $f = 100$ [Hz]Obr. 47: Kotouč č.1; $n = 250$ [ot/s]; $f = 250$ [Hz]Obr. 48: Kotouč č.2; $n = 250$ [ot/s]; $f = 250$ [Hz]

11. OTESTOVÁNÍ ANALÝZY ROTORU V SOFTWARE MSC.ADAMS

Byla provedena kompletní analýza rotoru, ať už z pohledu vlastní povahy systému, tak i z hlediska dynamické odezvy při externím zatížení, které je způsobené vibracemi uložení rotoru. Nyní lze potvrdit získané výsledky z analýzy dynamickou simulací pohybu v softwaru MSC.Adams. Tento velmi známý software je víceméně vrcholem v oblasti dynamických simulací. Proto byl zvolen jako prostředí, ve kterém bude proveden simulační experiment. Zde vchází ale jeden problém. Software je primárně určen pro simulace pevných těles. To je v tomto případě nevhodné, protože rotorový model musí obsahovat poddajný hřídel. Tomuto požadavku se lze v MSC.Adams pouze přiblížit, tím tedy dochází k prvotnímu zkreslení výsledků a to vlivem už vlastního sestavení modelu. Druhá otázka spočívá ve vlivu vnitřního útlumu. Analyzovaný model zahrnuje vlivy vnitřního útlumu v materiálu, který má závažné následky, tento vliv nelze totožně podchytit v této dynamické simulaci. Přitom vlastní modelový útlum by musel být také kalibrován s reálným systémem. A samozřejmě ostatní parametry modelu by musely být odladěny s reálným modelem. V obou případech, ať u simulace, tak i u předchozí analýzy byl zanedbán odpor vlastního éteru, kde se rotor pohybuje. Jelikož jde o prostředí atmosféry a pohyb je v malých amplitudách, mohlo být tak učiněno. Provedená analýza, tak i simulace vychází z lineárních modelů rotorů. Model rotoru v MSC.Adamsu byl opět sestaven pomocí dokonale tuhých kotoučů a poddajného hřídele. Ale poddajný hřídel není popsán jako kontinuum, ale jako diskretizovaný nosník s hmotnými pevnými elementy spojenými pružnou vazbou. Je to nejvíce realitu podchycující možnost tvorby pružného hřídele v MSC.Adams. Výpočtový model lze vidět na obrázku 49.

Při numerické simulaci je opravdu důležité nastavit správný krok řešení. Obzvláště to platí v případě velmi rychlých dějů, jaké v rotorové dynamice probíhají. Zde vstupují dvě veličiny, které budou řídit krok výpočtu. Jsou to otáčky rotoru a frekvence buzení základu. Vyšší z těchto hodnot bude výchozí hodnota pro volbu kroku. Výchozí krokování bylo voleno jako dvacetinásobek vyšší úhlové rychlosti na jednu sekundu výpočtu (11.1). Poté byl krok navyšován a byla sledovaná konvergence řešení.



Obr. 49: Model rotoru v MSC.Adams

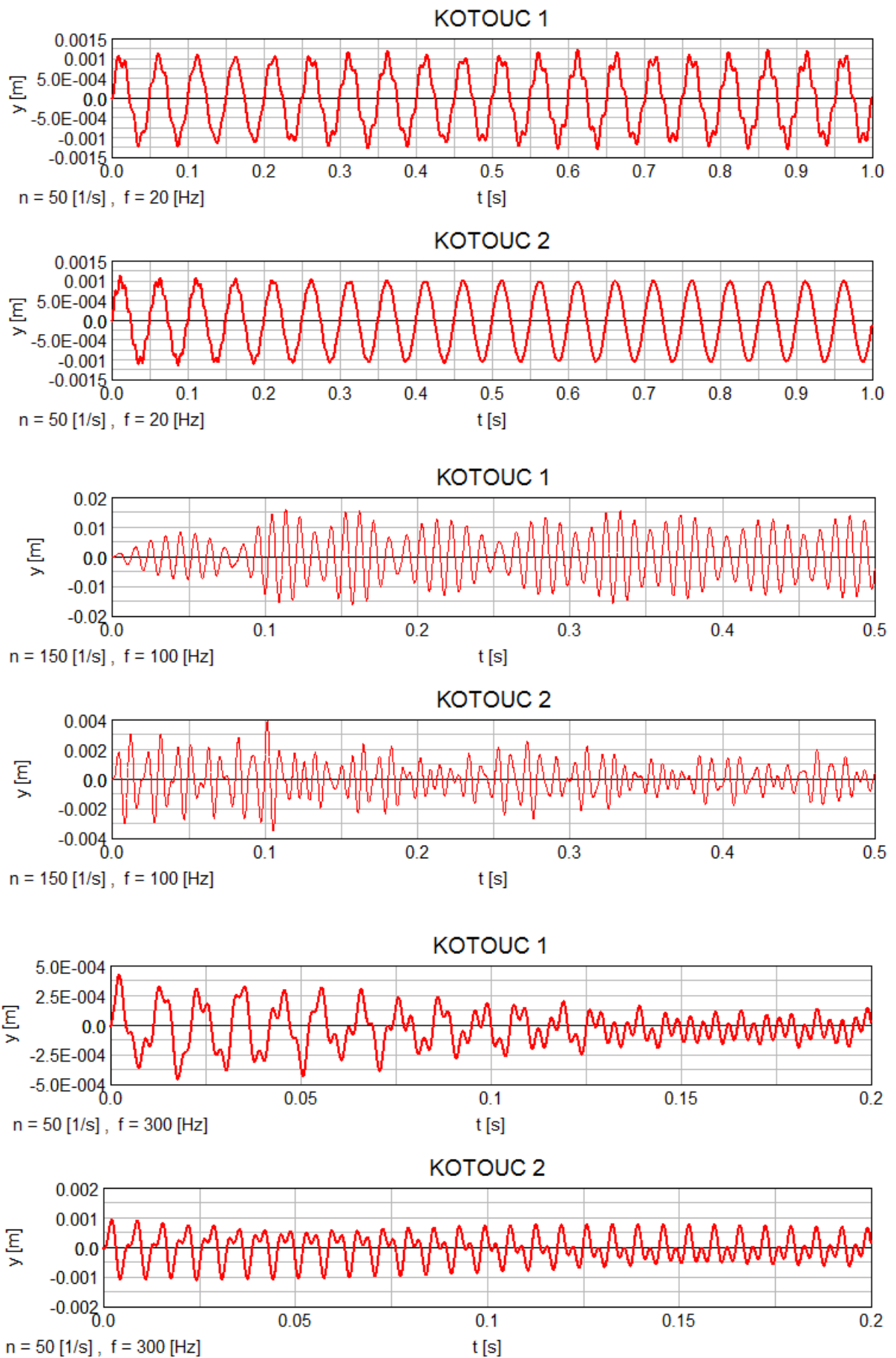
Jelikož zkoumaný rotorový systém je experimentální záležitostí, tak neexistují pracovní otáčky. Pro numerickou simulaci pohybu je nutné počítat s konkrétními otáčkami, proto bylo počítáno pro zvolené otáčky a pro tyto hodnoty byl rotor buzen postupně budícím signálem s různou frekvencí, který měl opět sinusový průběh podle vztahu (10.3). Amplituda budícího signálu byla opět l [mm].

$$krok = 20 \cdot 2\pi \cdot \max(f, n) \cdot t \quad (11.1)$$

V tabulce 8 jsou shrnuté podmínky simulací a zjištěné výsledky. Ukázkou zjištěných průběhů pohybů kotoučů ve směru y lze vidět na obrázku 50. Dynamické simulace z MSC.Adamsu a dynamická analýza provedená ve Scilabu jsou ve veliké shodě i přes použití odlišných metod popisu systému. Na základě toho lze posuzovat výsledky z analýzy jako věrohodné.

Otáčky [1/s]	Budící frekvence [Hz]	Kotouč 1	Kotouč 2
50	20	Amplituda kmitání odpovídající budící.	Amplituda kmitání odpovídající budící.
50	300	Amplituda kmitání blížíci se nule.	Amplituda kmitání poloviční než budící.
100	40	Amplituda kmitání 1,5 násobek budící.	Amplituda kmitání blížíci se budící.
100	200	Amplituda kmitání poloviční než budící.	Amplituda kmitání 3 násobek budící.
150	120	Rezonance, souběžná precese.	Rezonance, souběžná precese.
150	100	Rezonance, protiběžná precese.	Rezonance, protiběžná precese.
200	500	Amplituda kmitání blížíci se nule.	Amplituda kmitání poloviční než budící.
200	40	Amplituda kmitání odpovídající budící.	Amplituda kmitání odpovídající budící.
300	300	Amplituda kmitání poloviční než budící.	Amplituda kmitání odpovídající budící.
300	20	Amplituda kmitání odpovídající budící.	Amplituda kmitání odpovídající budící.

Tabulka 8: Podmínky a výsledky simulací



Obr. 50: Dynamické simulace v MSC.Adams

ZÁVĚR

Práce se zabývala popisem rotorového systému a jeho dynamickou odezvou na kinematické buzení. Analýza byla provedena v matematickém softwaru Scilab, který je volně dostupný, což znamená velké ušetření finančních nákladů za software. Další velkou výhodou je daleko hlubší pochopení problematiky díky jejímu velmi detailnímu rozboru. Bylo ukázáno, jak popsat hřídel jako kontinuum metodou konečných prvků. Tento popis jednodimenzionálními konečnými prvky je obecně užívaný a platný, proto mohl být použit s předpokladem správnosti výsledků. Takto byl sestaven celkový model rotoru uložený v kluzných samomazných ložiskách osazen dvěma kotouči a spojen lamelovou spojkou s motorem. Globální model byl úspěšně kalibrován s objemovým konečným prvkovým modelem rotoru při nulových otáčkách v softwaru Nastran.

Po kompletním sestavení dynamického modelu rotoru byla provedena jeho modální analýza. Ta ukázala, jak vypadají vlastní čísla a vlastní vektory rotorových systémů. Vliv gyroskopického efektu, který zapříčiní štěpení vlastních frekvencí, které jsou závislé na otáčkách. Dále vliv vnitřního útlumu, který způsobuje nestabilitu rotoru. Tyto hodnoty jsou také závislé na otáčkách a dochází k jejím štěpení s právě narůstajícími otáčkami. Po modální analýze byla provedena dynamická odezva, která byla zachycena do různých typů grafů, pro různé nezávislé proměnné a tyto charakteristiky zobrazily místa rezonancí, jejich vývoj s otáčkami a tvar kmitání rotoru při rezonanci. Bylo zjištěno, že vývoj rezonancí kotoučů v závislosti na otáčkách stopuje Campbellův diagram, pouze se projeví určité frekvence, které vybudí dané buzení. Následně tvar rezonance rotoru odpovídá tvaru vlastního vektoru příslušného jeho vlastní frekvenci. Po provedení analýzy byla provedena simulace pohybu, která byla řešena numerickou metodou řešení diferenciálních rovnic a simulované pohyby korespondovaly s přenosovými charakteristikami a informacemi o nich zjištěnými z analýzy rotoru. Tím se myslí informace o souběžných, respektive protiběžných precesích. Z přenosových charakteristik je vidět, že při kinematickém buzení jsou vybudeny oba typy precesí a tuto informaci právě ony simulace potvrdily.

Pro potvrzení celé numerické analýzy byl proveden simulační experiment v softwaru MSC.Adams. Tento software byl použit jako nejlepší možná kompenzace reálného experimentu, který nemohl být proveden. Pro konkrétní otáčky rotoru a budící funkce byly výsledky ze simulací MSC.Adamsu porovnány s přenosovými

charakteristikami. Simulace a analýza spolu korespondují, lze tedy předpokládat důvěryhodnost celé analýzy. Je ale nutné provést samozřejmě odladění parametrů celého dynamického modelu rotoru s reálným systémem.

Závěrem lze shrnout, že i když je hřídel navržen dostatečně bezpečně z hlediska zatížení a únavy materiálu, tak je to nedostačující, pokud není potvrzeno dynamickou analýzou, že rotor neohrožuje vznik rezonance. Analýza v této práci potvrdila možnost vybudování rezonance při kinematickém buzení rotoru. Pokud je tedy rotor uložen na neinerciálních základech, je nutné provést jeho dynamickou analýzu a zjistit, zda frekvence buzení nezasahuje do oblasti rezonance systému.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] HUI MA, HUI LI, XUEYAN ZHAO, HEQIANG NIU BANGCHUN: *Effects of eccentric phase difference between two discs on oil-film instability in rotor-bearing system*, Mechanical Systems and Signal Processing, p. 526-545, 2013.
- [2] ŠIMEK, J., TŮMA, J., SVOBODA, R.: *Test stand for investigation of external excitation influence on behaviour of rotor supported in sliding journal bearings*, Dynamic of machines, 2008.
- [3] ANDRÉS BLANCO ORTEGA¹, FRANCISCO BELTRÁN CARBAJAL, GERARDO SILVA NAVARRO, MARCO ANTONIO OLIVER SALAZAR: *Active vibration control of a rotor-bearing system based on dynamic stiffness*, Rev. Fac. Ing. Univ. Antioquia N.º 55 pp. 125-133. Septiembre, 2010.
- [4] BRDLIČKA M., SAMEK L., SOPKO B.: *Mechanika kontinua*, Academia 2000.
- [5] SLAVÍK J., STEJSKAL V., ZEMAN V.: *Základy dynamiky strojů*. ČVUT, Praha 1997.
- [6] FIŠER, K.: *Teoretická mechanika*, učební text 2003. Dostupné z: <http://physics.ujep.cz/~chomutov/tm1.pdf>
- [7] BYRTUS M., HAJŽMAN M., ZEMAN V.: *Dynamika rotujících soustav*. ZČU, Plzeň 2010.
- [8] BREPTA, R. – PŮST, L. – TUREK. F.: *Mechanické kmitání*. Sobotáles, Praha 1994.
- [9] SKAROLEK, A.: *Numerical Analysis of Rotor Systems with Aerostatic Journal Bearings*, *Dizertační práce*, TUL, Liberec 2012.
- [10] NEWMARK, N. M.: *A method of computation for structural dynamics*. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 85 (EM3) 67-94., 1959.
- [11] RYABEN'KII, VICTOR S., TSYNKOV, SEMYON V.: *A Theoretical Introduction to Numerical Analysis*, CRC Press, p. 243, 2006.
- [12] TECHLAB, s.r.o.: *Technická dokumentace ROTOR KIT I*.
- [13] JEAN-JACQUES SINOU, DAVID DEMAILLY, CRISTIANO VILLA, FABRICE THOUVEREZ, MICHEL MASSENZIO AND FRANCK LAURANT: *Rotordynamics Analysis: Experimental and Numerical Investigations*, ASME 2003 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Chicago, Illinois, USA, September 2–6, 2003.

- [14] X Y SHEN, J H JIA, M ZHAO, J P JING: *Numerical and experimental analysis of the rotor—bearing—seal system*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science August 1, 2008 vol. 222 no. 8 1435-1441.
- [15] DALÍK, J.: *Numerické metody II*, VUT, Brno 2013.
- [16] VÁVRA, P., LEINVEBER, J.: *Strojnické tabulky*, Praha: SNTL, 2005.

PUBLIKACE

- [A] SVOBODA, D.: *Modální analýza rotorů metodou konečných prvků*, Studentská vědecká a odborná činnost, Liberec, 2014. ISBN 978-80-7494-071-2
- [B] SVOBODA, D.: *Kinematic Excitation of the Rotor*, Engineering Mechanics 2015, Svratka, 2015. ISBN 978-80-86246-42-0
- [C] SVOBODA, D.: *Analýza odezvy rotoru na kinematické buzení základu*, Studentská vědecká a odborná činnost, Liberec, 2015.

PŘÍLOHY

PŘÍLOHA A

ROZBOR VLASTNÍHO VEKTORU

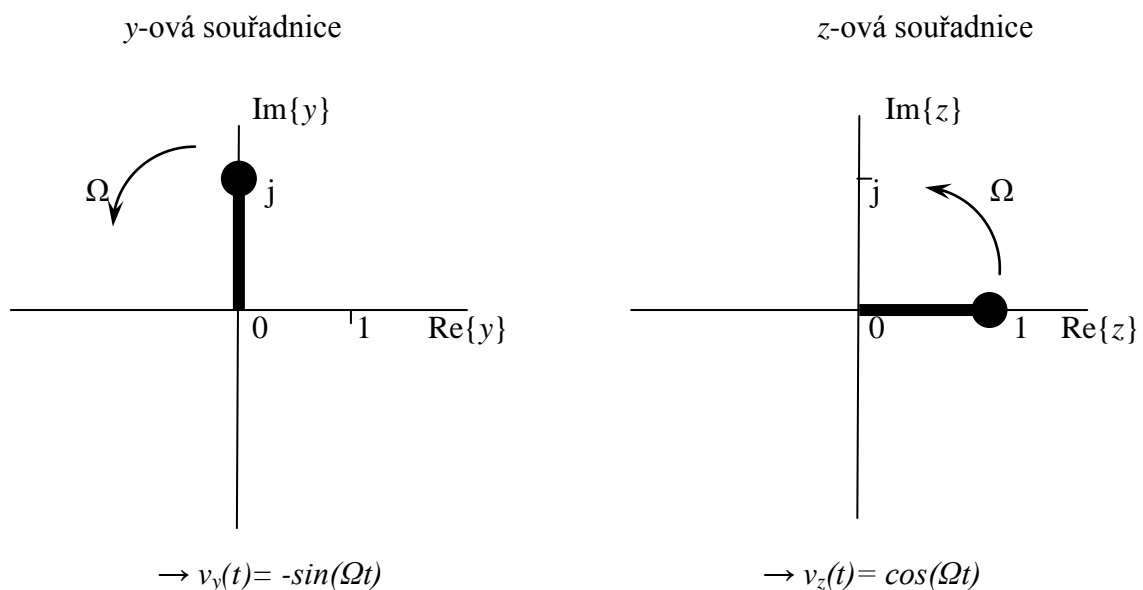
V práci bylo ukázáno, jak z komplexního tvaru vlastního čísla získat informace o vlastní frekvenci a stabilitě. Dále je nutné získat z komplexní hodnoty vlastního tvaru informaci, zda se jedná o souběžnou, nebo protiběžnou precesi. Jelikož získávání informací je u rotorových systémů komplikovanější (obzvláště u mnoha stupňů volnosti), tak je vhodné demonstrovat vše na jednoduchém příkladě.

Demonstrační příklad:

V prostoru y, z mějme vlastní vektor \mathbf{v} , ke kterému přísluší vlastní číslo s a hřídel rotuje úhlovou rychlostí ω_0 ve směru hodinových ručiček:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} \quad s = j\Omega$$

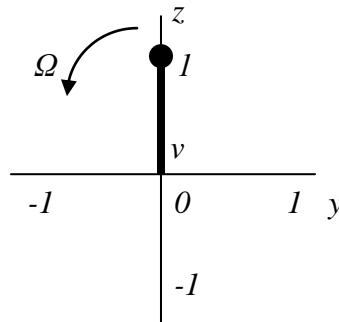
Zakreslení jednotlivých složek vlastního vektoru v komplexní rovině příslušné souřadnice, kde rotují úhlovou rychlostí Ω je zobrazeno na obrázku A.1.



Obr. A.1: Komplexní roviny výchylek

Z polohy jednotlivých složek vlastních vektorů v komplexní rovině lze určit, jakou goniometrickou funkci charakterizují (tzn. jaká funkce popisuje reálnou hodnotu jednotlivé složky).

Nyní lze zakreslit v souřadném systému y, z vlastní vektor \mathbf{v} a jeho smysl rotace. Vlastní vektor a smysl rotace vychází ze zjištěných goniometrických funkcí jednotlivých souřadnic, dle jejich průběhu.

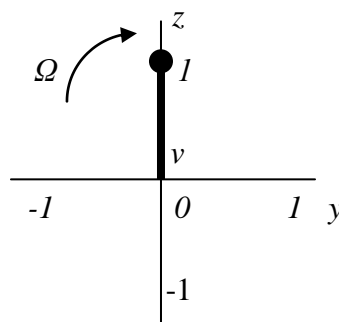


Obr. A.2: Reálná rovina výchylek – protiběžná precese

Výsledný smysl Ω v prostoru y, z odpovídá smyslu úhlové rychlosti hřídele ω_0 , tzn. vlastní vektor odpovídá souběžné precesi.

Pokud by vlastní vektor byl ve tvaru:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix} \quad s = j\Omega$$

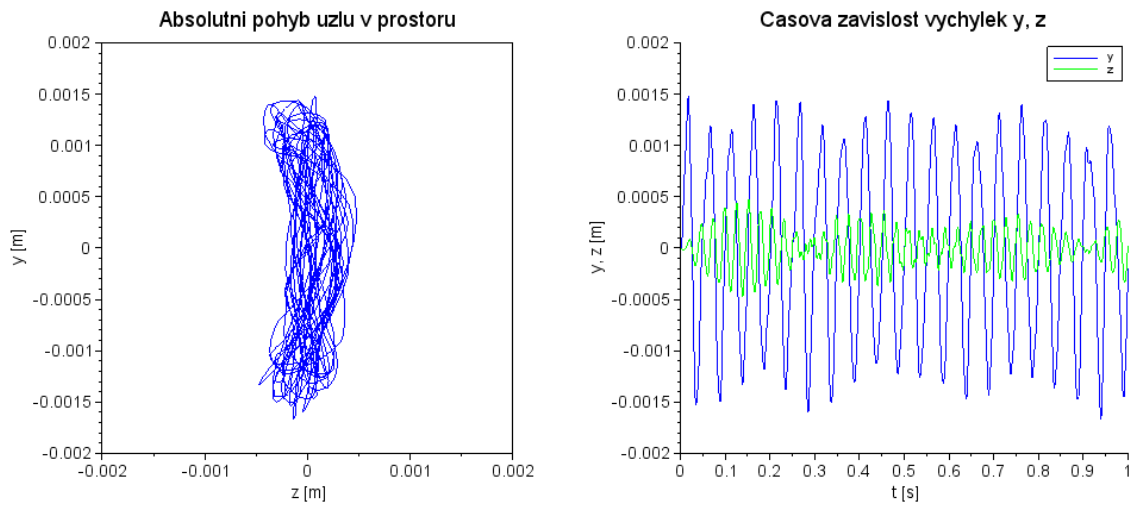


Obr. A.3: Reálná rovina výchylek – souběžná precese

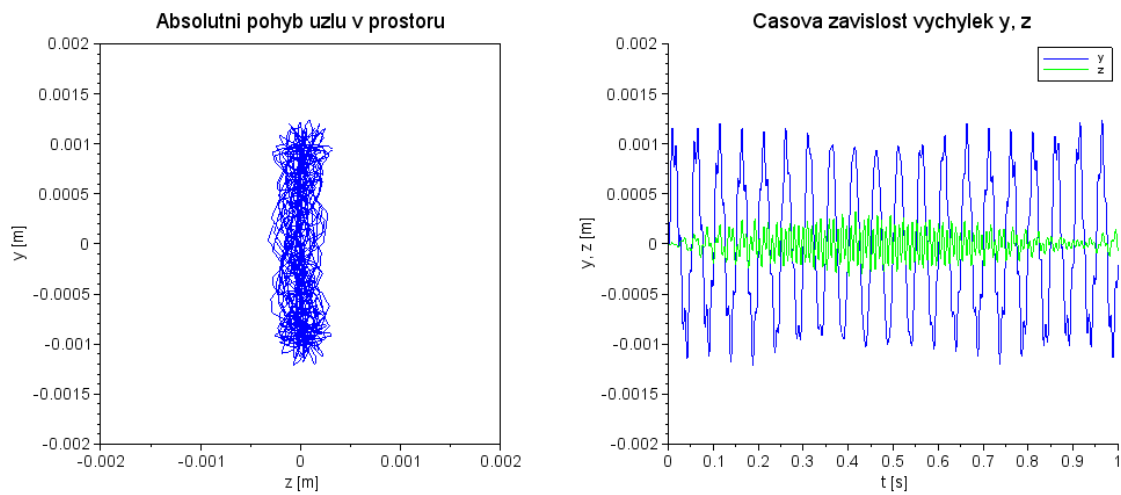
Tak výsledný smysl Ω v prostoru y, z neodpovídá smyslu úhlové rychlosti hřídele ω_0 , tzn. vlastní vektor odpovídá protiběžné precesi.

PŘÍLOHA B

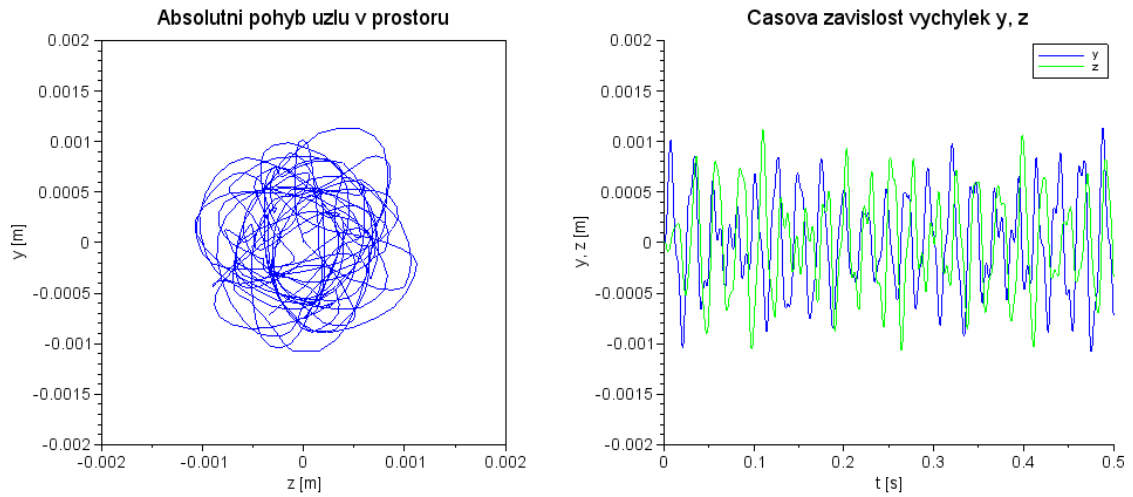
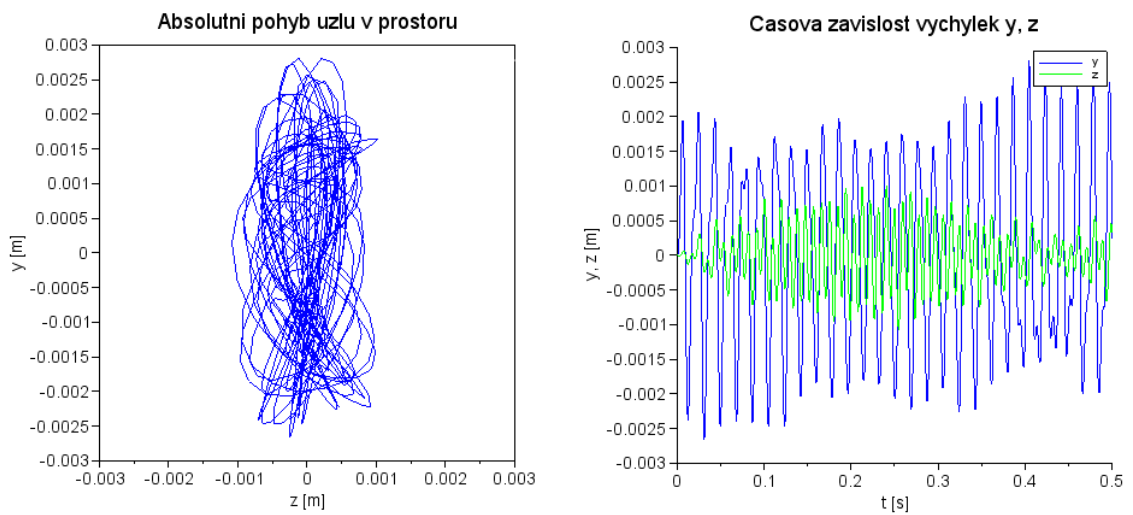
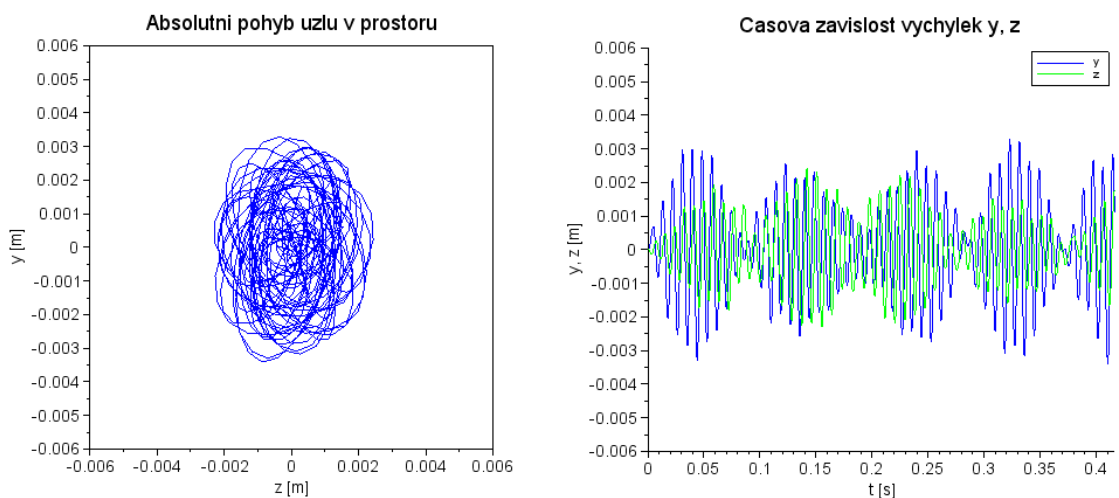
SIMULACE POHYBU ROTORU

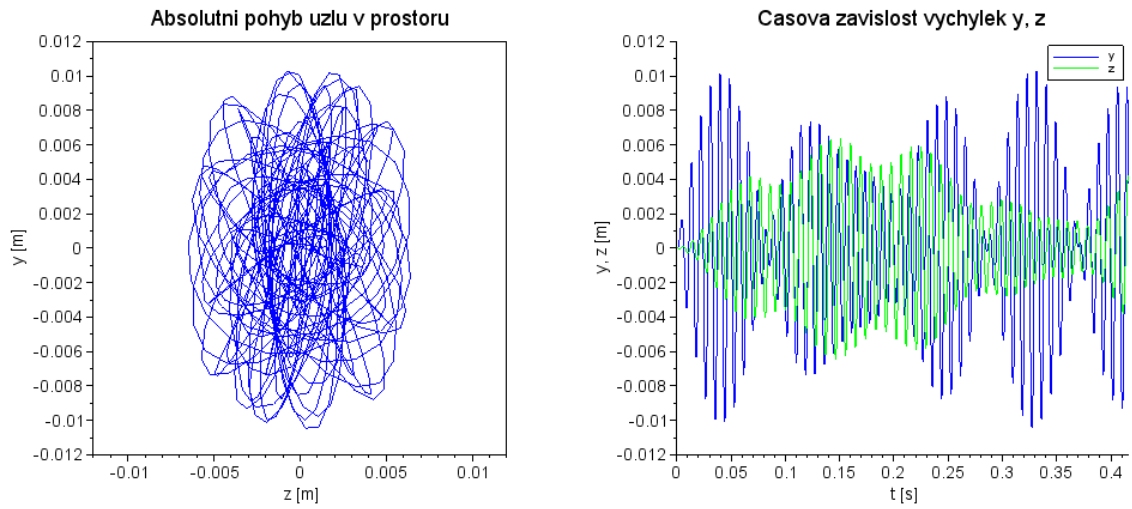
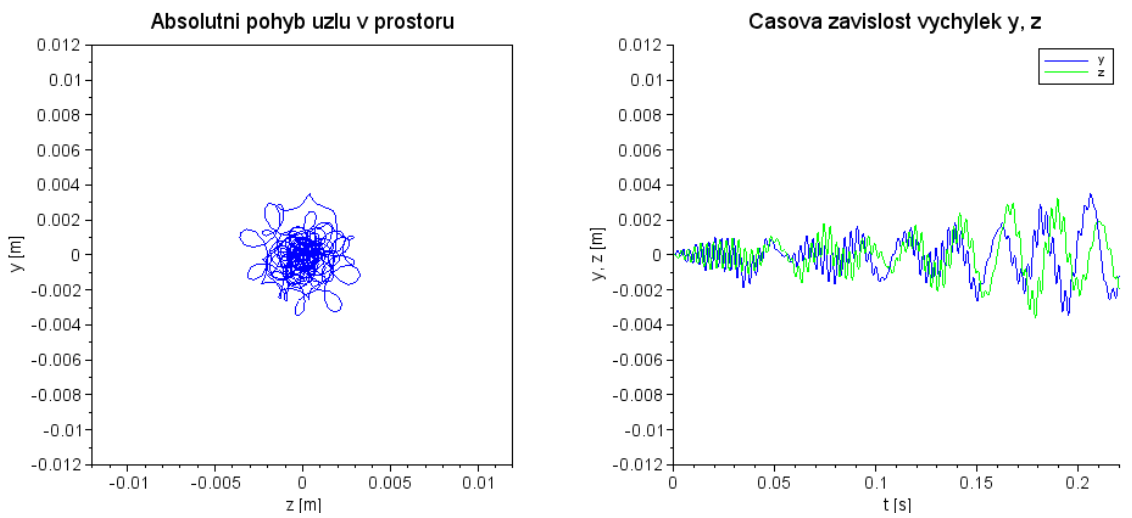
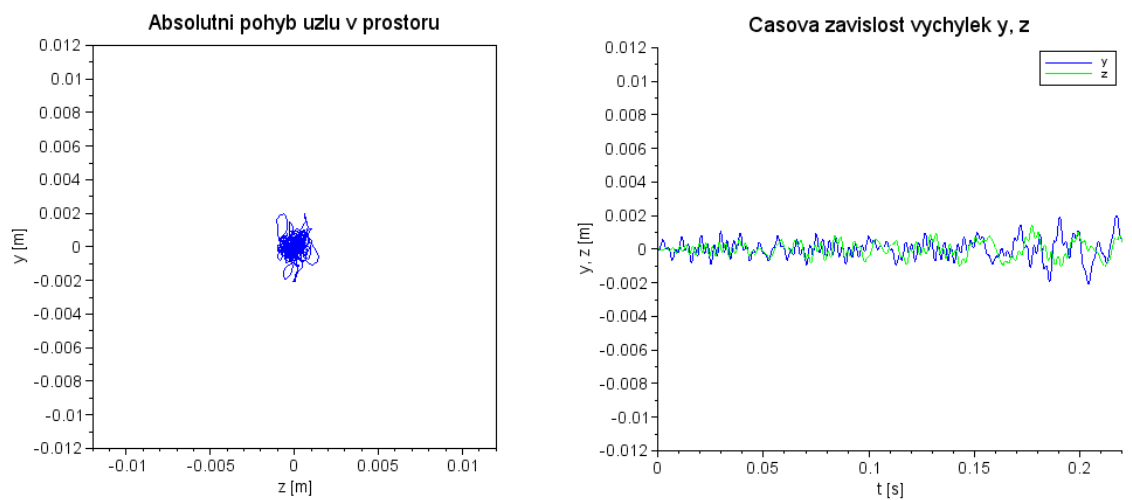


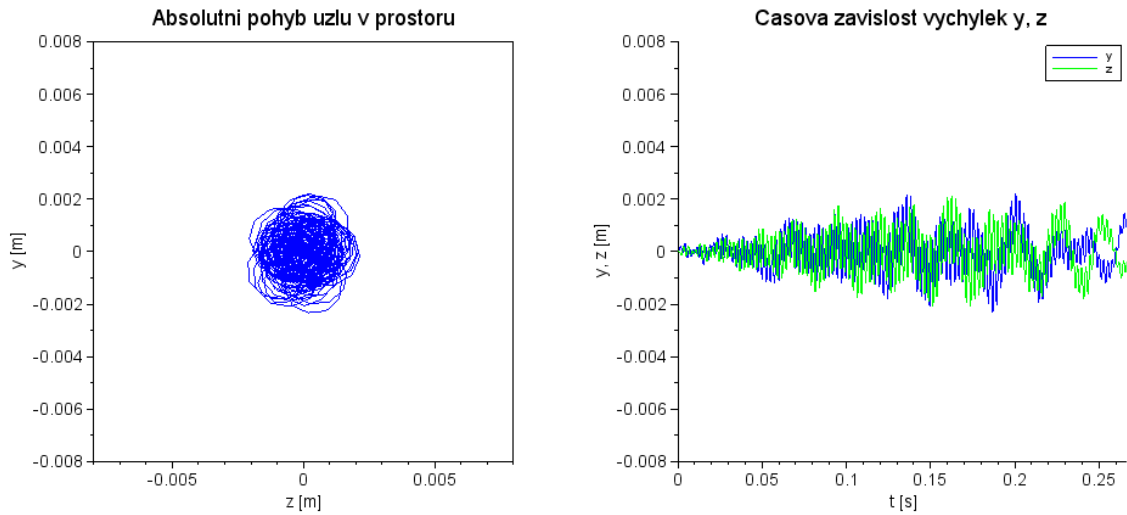
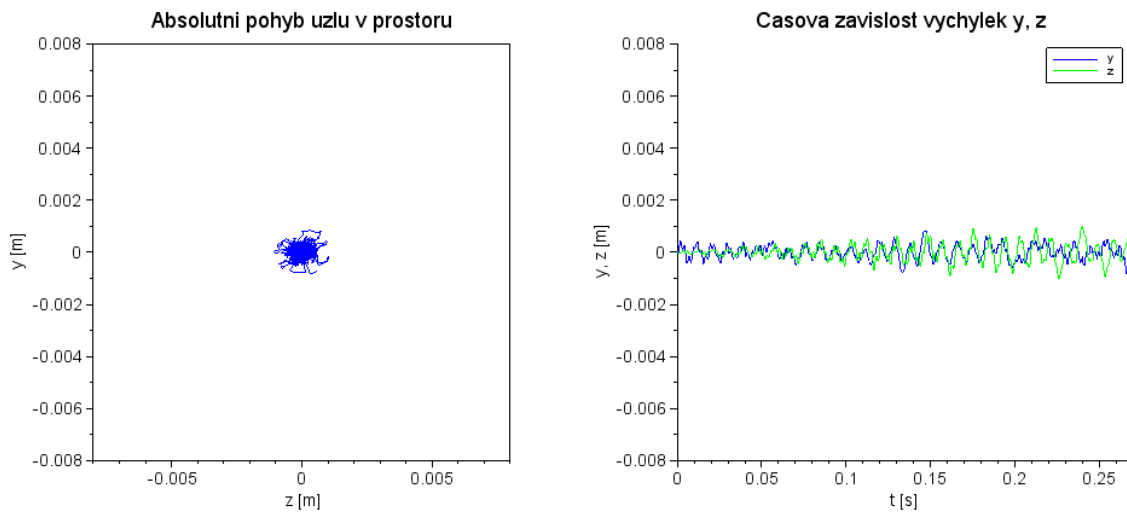
Obr. B.1: Kotouč č.1; $n = 80$ [ot/s]; $f = 20$ [Hz]



Obr. B.2: Kotouč č.2; $n = 80$ [ot/s]; $f = 20$ [Hz]

Obr. B.3: Kotouč č.1; $n = 150$ [ot/s]; $f = 55$ [Hz]Obr. B.4: Kotouč č.2; $n = 150$ [ot/s]; $f = 55$ [Hz]Obr. B.5: Kotouč č.1; $n = 200$ [ot/s]; $f = 120$ [Hz]

Obr. B.6: Kotouč č.2; $n = 200$ [ot/s]; $f = 120$ [Hz]Obr. B.7: Kotouč č.1; $n = 300$ [ot/s]; $f = 330$ [Hz]Obr. B.8: Kotouč č.2; $n = 300$ [ot/s]; $f = 330$ [Hz]

Obr. B.9: Kotouč č.1; $n = 300$ [ot/s]; $f = 400$ [Hz]Obr. B.10: Kotouč č.2; $n = 300$ [ot/s]; $f = 400$ [Hz]