Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická Fakulta
Katedra Matematiky

Diplomová práce

Základy geometrie pro studenty oboru Učitelství pro první stupeň základních škol

Vypracoval: Bc. Lukáš Filip
Vedoucí práce: doc. RNDr. Helena Binterová, Ph.D.

České Budějovice 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Základy geometrie pro studenty oboru Učitelství pro první stupeň základních škol jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ....

…………………………….

Děkuji vedoucí mé diplomové práce doc. RNDr. Heleně Binterové Ph.D. za skvělý nápad vytvoření učebních materiálů z geometrie a tím usnadnit studium pro učitele prvního stupně základních škol. Také jí děkuji za trpělivost a za odborné vedení.

Chtěl bych ještě poděkovat Mgr. Ludmile Tesařové, své učitelce matematiky na základní škole, která mě svým přístupem a nadšením dokázala zaujmout, a které vděčím za své základy matematiky.

Anotace

Název: Základy geometrie pro studenty oboru Učitelství pro první stupeň základních škol.

Vypracoval: Lukáš Filip

Vedoucí práce: doc. RNDr. Helena Binterová Ph.D.

Klíčová slova: geometrie, cvičení, úlohy, konstrukce

Cílem diplomové práce je připravit studijní materiály k předmětu Základy geometrie pro studenty oboru Učitelství pro první stupeň ZŠ. Jde o materiály, které obsahují vymezení základních pojmů geometrie základní a střední školy. Součástí připravených materiálů jsou řešené úlohy a cvičení s výsledky. Počítačové programy typu DGS jsou součástí podpory výuky a vytvořené materiály soubory tohoto typu obsahují. Na závěr každé kapitoly jsou zařazeny testové úlohy vytvořené ve shodě s Bloomovou taxonomií edukačních cílů.

Abstract

Title: Basics of geometry for students of Teacher Training for primary school.

Author: Lukáš Filip

Supervisor: doc. RNDr. Helena Binterová Ph.D.

Key words: geometry, exercise, problem, construction

The aim of the diploma thesis is to prepare study materials for a subject Basics of geometry for students of Primary school teaching. The materials should define the core concepts of secondary school geometry. Part of the materials are also problems with solutions and exercises with results. Software like DGS are an important support for teaching and will be also part of these materials. At the end af each chapter, there are quiz problems which follow Bloom's taxonomy.

OBSAH

1 ÚVOD

„*Je společensky neakceptovatelné, aby se někdo chlubil neznalostí a ignorací literatury, ale je společensky přijatelné honosit se neznalostí vědy a hrdě přiznávat neschopnost v matematiky*.“ (R. Dawkins)

Takovýto pohled na matematiku dlouhodobě sdílí společnost. Na středních školách dokonce matematika vypadla z povinných maturitních předmětů a dává se přednost například znalosti historie české literatury nebo několika světových jazyků.

„*Kdyby inteligentní pozorovatel sledoval matematiky při práci, mohl by usoudit, že jde o stoupence jakési podivné sekty hledačů ezoterických klíčů k vesmíru.*“ (P. Davis a R. Hersh)

Obecně je matematika vnímána jako vědecká disciplína, která je pro většinu lidí velice abstraktní a nesrozumitelná. Proto chci svou prací přiblížit a objasnit část matematiky studentkám a studentům předmětu Základy geometrie v oboru Učitelství pro první stupeň základní školy, kteří budou své znalosti o matematice šířit dál mezi děti. Práce nemusí sloužit jen studentům VŠ, ale i všem ostatním zájemcům o geometrii.

„*Matematika nám dává oči, kterými můžeme spatřit to, co by našemu zraku zůstalo jinak skrito. V tomto smyslu lze říct, že matematika je zúůsob, jak zviditelnit neviditelné*.“ (K. Devlin)

Slovo matematika vzniklo z řeckých slov *mathematikós = milující poznání* a *máthema = věda, vědění, poznání*. Takže matematika je věda pro všechny, kteří milují poznání.

„Vždy se směji, když někdo říká, že není chtrý na matematiku, ale že je chytrý na dějepis nebo na cokoliv jiného. Smutná pravda je, že kdo není chytrý na matematiku, není chytrý vůbec.“ (M. Čermák)

2 ZÁKLADNÍ GEOMETRICKÉ ÚTVARY

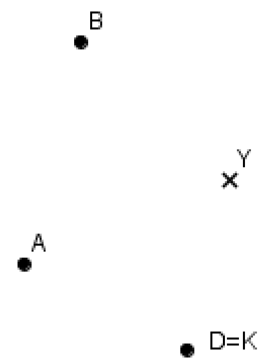
Matematika jako obor vznikla z potřeb společnosti řešit reálné problémy. Pojmy a vztahy matematiky jsou abstrakcí ze skutečnosti a jsou tak odrazem reálného světa. Podněty k rozvoji matematiky vyplývají z požadavků praktického života, ale také z nutnosti řešit některé úlohy samotnou matematikou.

Geometrie (řecky γεωμετρία, z gé – země a metria – měření) je matematická věda, která se zabývá otázkami tvarů, velikostí, proporcí a vzájemných vztahů obrazců a útvarů a vlastnostmi prostorů. Geometrie bývá považována za jeden z nejstarších vědních oborů vůbec. V Ottově slovníku naučném heslo Geometrie začíná slovy: „Geometrie, měřičství, jest nauka o veličinách a útvarech prostorových. Pojmů těchto útvarů nabýváme abstrakcí z předmětů hmotných."

Jednoduché geometrické útvary byly známy již v paleolitu a podrobněji zkoumány ve všech starověkých civilizacích. Geometrie sloužila původně pro praktické účely v zeměměřičství a stavebnictví. Na vědecké úrovni se jim poprvé věnovali staří Řekové.

2.1 Bod

Body jsou velice malé geometrické útvary. Můžeme si je znázornit tečkou nebo křížkem. Body obvykle značíme velkými písmeny *A, B, K, X*. Pomocí bodů vytváříme ostatní geometrické útvary. Pokud dva body leží na sobě, říkáme o nich, že jsou totožné $(A = B)$. Pokud se pohybujeme v rovině, tak můžeme říct, že bod je dvojice čísel, která souřadnice daného bodu v rovině.



Obrázek 1 - Body

2.2 Přímka

Definice: Přímka je nejkratší spojnice mezi dvěma body, která není těmito body ohraničena a pokračuje dále na obě strany.

Přímka může být zadána dvěma body nebo jedním bodem a směrem (vektorem).

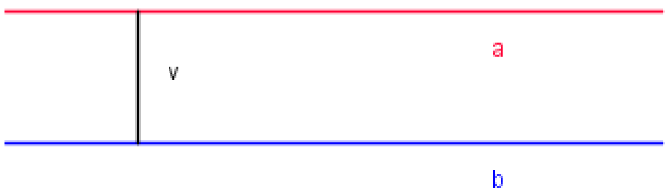
Přímku můžeme označit dvěma způsoby:

a) pomocí malých písmen — přímka *a, k, p,* …

b) pomocí dvou bodů, které náleží přímce — přímka *AB, KL,* …

Vzájemná poloha dvou přímek v rovině:

a) Rovnoběžné přímky - rovnoběžné přímky nemají žádný společný bod. Mají mezi sebou konstantní vzdálenost

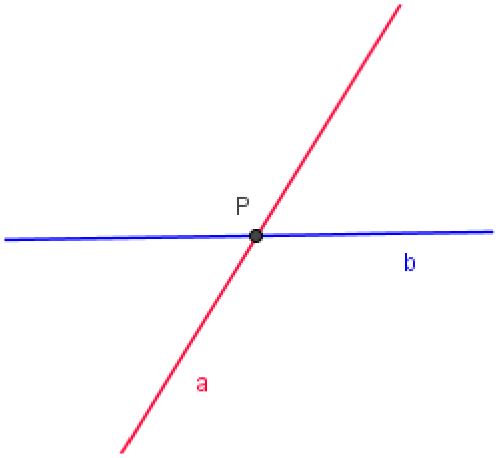


Obrázek 2 – rovnoběžné přímky

b) Totožné přímky – protínají se ve všech bodech „leží na sobě“

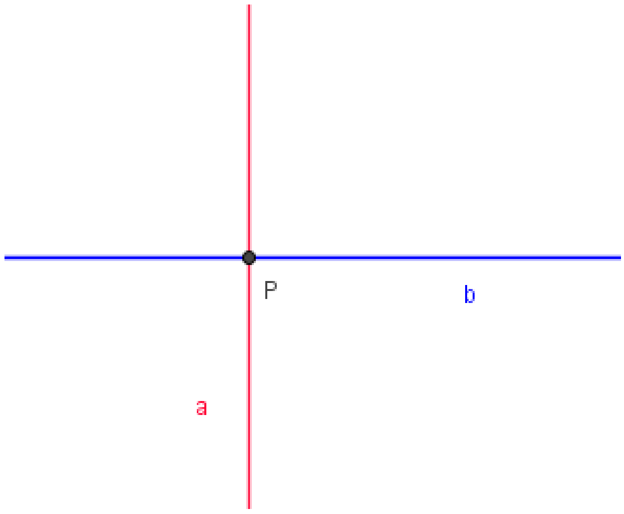
Obrázek 3 - totožné přímky

c) Různoběžné přímky – různoběžné přímky mají vždy jeden společný bod



Obrázek 4 - různoběžné přímky

d) Kolmé přímky - zvláštní případ různoběžných přímek, které svírají úhel 90°.



Obrázek 5 – kolmé přímky

Vzájemná poloha dvou přímek v prostoru:

a) Rovnoběžné přímky – rovnoběžné přímky nemají žádný společný bod. Mají mezi sebou konstantní vzdálenost.

b) Totožné přímky – protínají se ve všech bodech „leží na sobě“.

c) Různoběžné přímky – různoběžné přímky mají vždy jeden společný bod.

d) Kolmé přímky - zvláštní případ různoběžných přímek, které svírají úhel 90°.

e) Mimoběžné přímky – nemají žádný společný bod

2.3 Polopřímka

Definice: Polopřímka je nejkratší spojnice mezi dvěma body, která je ohraničena pouze jedním z bodů. Za druhým z bodů pokračuje do nekonečna. Polopřímku zapisujeme $\rightarrow AB$.

Obrázek 6 - Polopřímka

2.4 Úsečka

Úsečka je nejkratší spojnice dvou bodů. Je vyznačena dvěma krajními body. U úsečky můžeme měřit její délku, což je vzdálenost mezi krajními body.

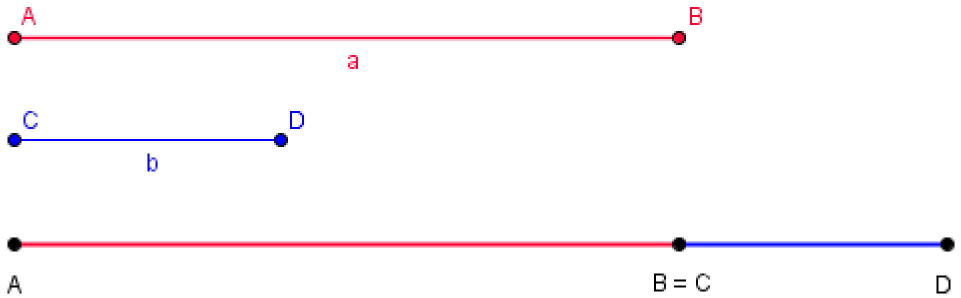
U úsečky rozeznáváme:

a) Krajní body – ohraničují úsečku a nese podle nich pojmenování

b) Vnitřní body – nacházejí se mezi krajními body, je jich nekonečně mnoho

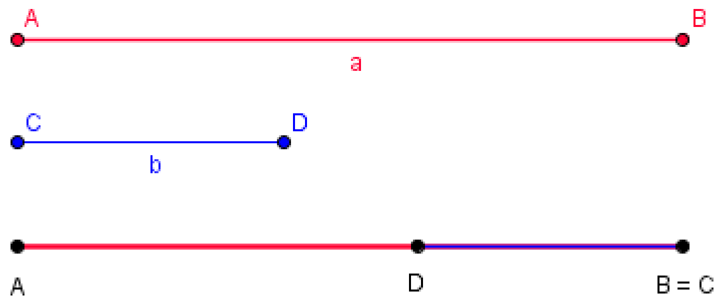
2.4.1 Sčítání a odečítání úseček

Grafické sčítání a odčítání – Zvolíme si krajní bod úsečky a tímto bodem vedeme polopřímku. Do kružítka si vezmeme velikost první úsečky, kružítko zabodneme do zvoleného krajního bodu a velikost naneseme na polopřímku. Vznikne nám průsečík, do kterého zabodneme kružítko a naneseme velikost druhé úsečky ve stejném směru jako předchozí. Výsledná úsečka je součtem dvou zadaných úseček.



Obrázek 7 – grafické sčítání úseček

Pokud bychom velikost druhé úsečky nanášeli v opačném směru, vzniklá úsečka by byla rozdílem dvou zadaných úseček.



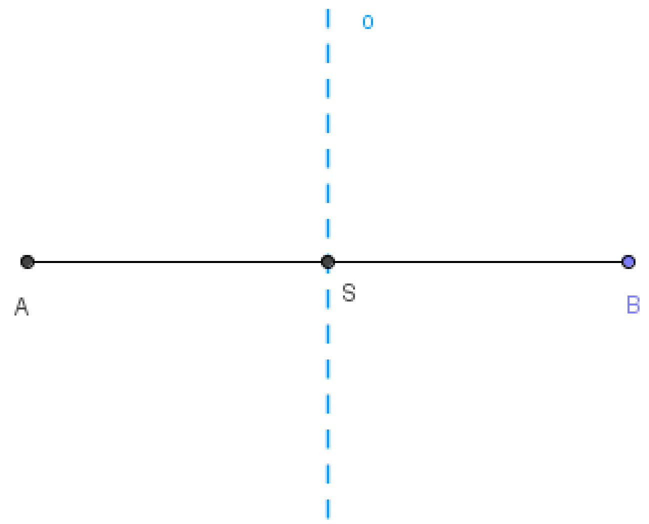
Obrázek 8 – grafické odčítání úseček

Početní sčítání a odčítání – Pokud máme zadané velikosti úseček, tak nám stačí provést numerický součet velikostí, anebo numerický rozdíl velikostí. Konečná hodnosta udává výslednou velikost úsečky.

$$|EF| = |AB| - |CD|$$

2.4.2 Osa úsečky

Osa úsečky je přímka, která je kolmá na úsečku a zároveň prochází středem úsečky. Proto ji rozděluje na dvě stejné části.



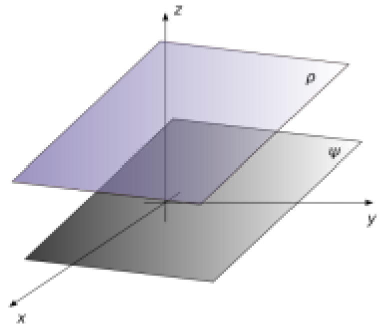
Obrázek 9 - osa úsečky

2.5 ROVINA

Rovina může být určen třemi body nebo přímkou a bodem, který leží mimo ní nebo dvěma směry.

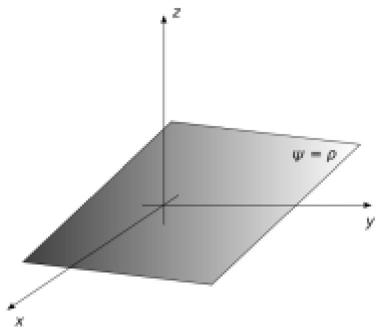
Vzájemná poloha dvou rovin:

a) Rovnoběžné roviny – roviny nemají žádný společný bod, mají od sebe stálou vzdálenost



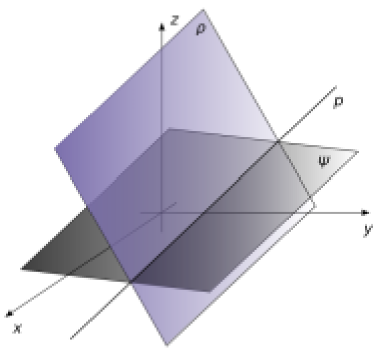
Obrázek 10 - rovnoběžné roviny

b) Identické roviny – roviny jsou rovnoběžné a leží na sobě, splývají



Obrázek 11 - Totožné roviny

c) Různoběžné roviny – jejich průsečnicí je přímka



Obrázek 12 - Různoběžné roviny

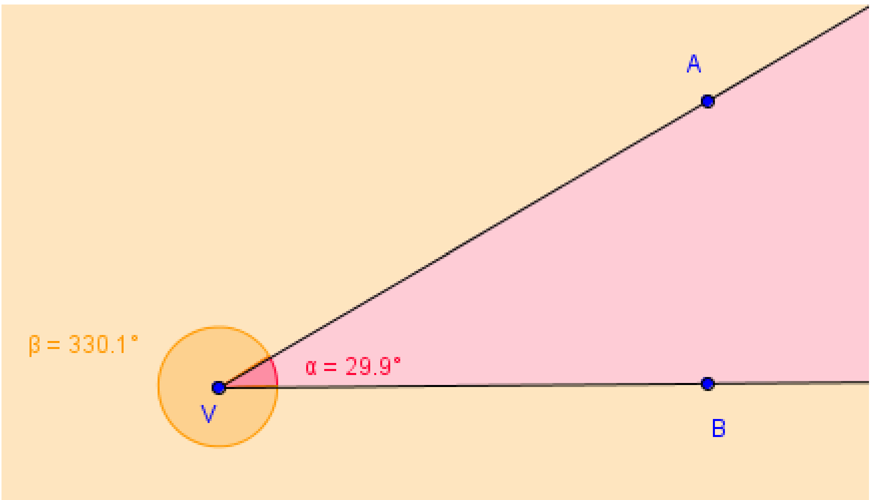
2.6 ÚHEL

Definice: Úhel je část roviny ohraničena dvěma polopřímkami se společným počátkem.

Jednotkou úhlu je jeden stupeň 1°, který můžeme dál dělit na menší části, jako jsou minuty a vteřiny. Stejně jako u jednotek času se u jednotek úhlu používá „šedesátková“ soustava.

$$1° = 60'$$
$$1' = 60''$$

Na Obrázek 13 vidíte, že polopřímky *VA* a *VB* tvoří ramena úhlu, který svírají. Úhel α se nazývá konvexní (je menší než 180°). Úhel β je vnějším úhlem a nazývá se nekonvexní (je větší než 180°).

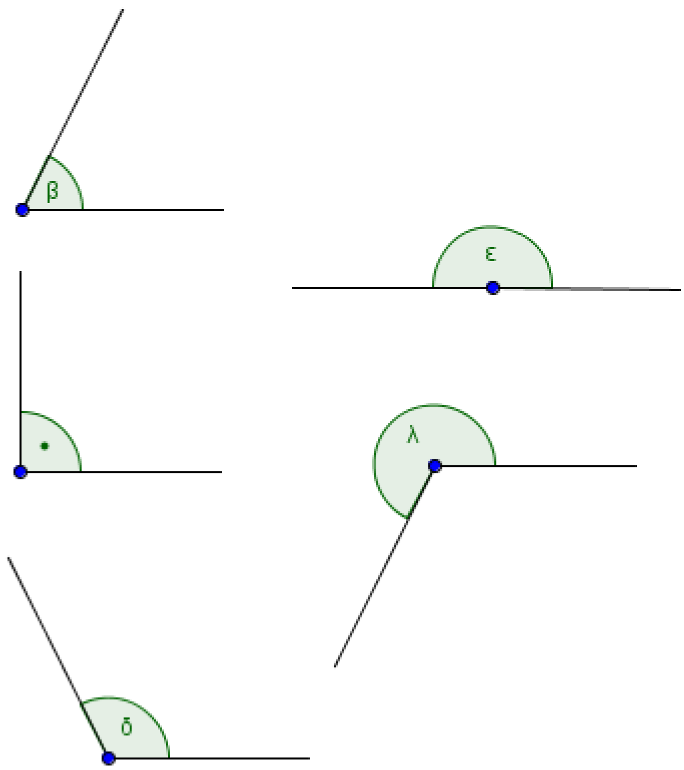


Obrázek 13 – úhel

2.6.1 Rozdělení podle velikosti

- Úhel nulový – $\alpha = 0°$
- Úhel ostrý – $0° < \beta < 90°$
- Úhel pravý – $\gamma = 90°$
- Úhel tupý – $90° < \delta < 180°$
- Úhel přímý – $\varepsilon = 180°$

- Úhel nekonvexní – $180° < \lambda < 360°$
- Úhel plný - $\varphi = 360°$



Obrázek 14 - typy úhlů

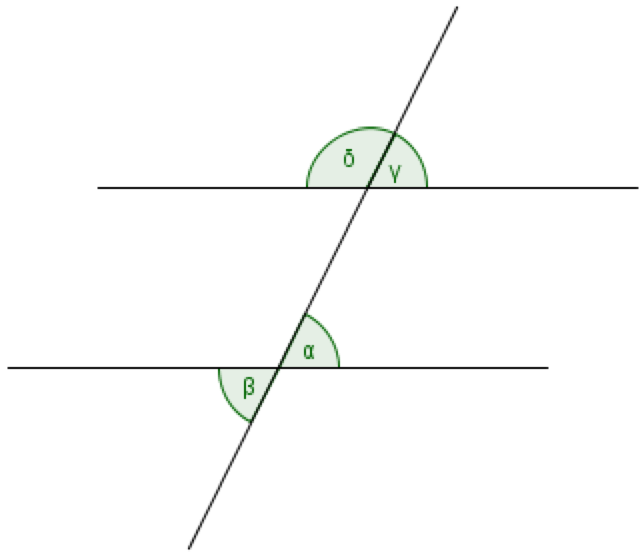
2.6.2 Rozdělení podle vzájemné polohy

Úhly můžeme dále rozdělovat podle vzájemné polohy mezi nimi. Pokud dva úhly mají společné rameno a vrchol, nazývají se **styčné úhly**. Pokud součet těchto dvou úhlů je roven 90°, pak se jedná o **doplňkové úhly**. Pokud součet těchto dvou úhlů je roven 180° (zbylá ramena tvoří přímku), pak se jedná o **úhly vedlejší**. Na Obrázek 15 jsou to úhly γ a δ.

Dva úhly, které mají společný vrchol a jejich ramena leží v opačných směrech, se nazývají **vrcholové úhly**. Jejich velikost je stejná. Na Obrázek 15 jsou to úhly α a β.

Úhly s různými vrcholy α a γ mají stejnou orientaci a nazývají se **úhly souhlasné**. Jejich velikost je stejná.

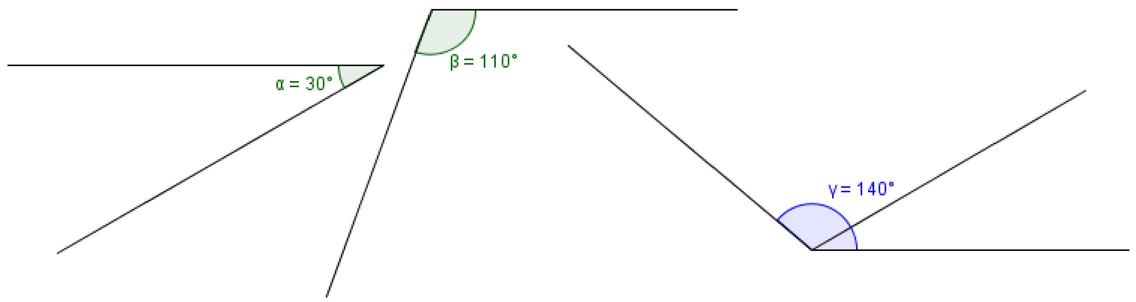
Úhly s různými vrcholy β a γ mají opačnou orientaci a nazývají se **úhly střídavé**. Jejich velikost je stejná.



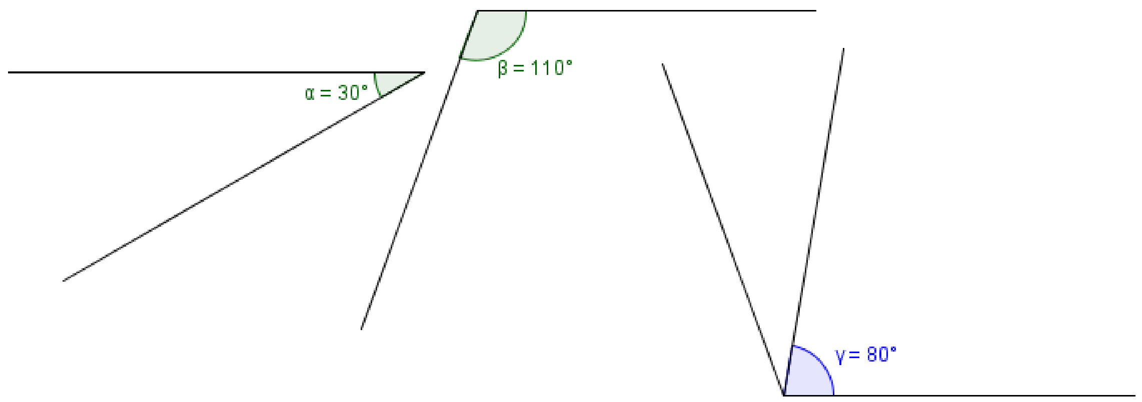
Obrázek 15 - Vzájemná poloha úhlů

2.6.3 Grafické operace s úhly

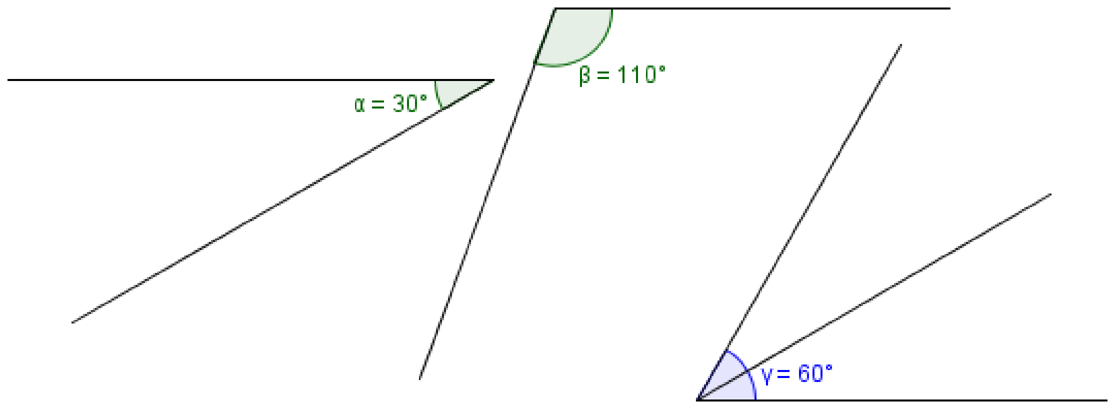
Sčítání úhlů:



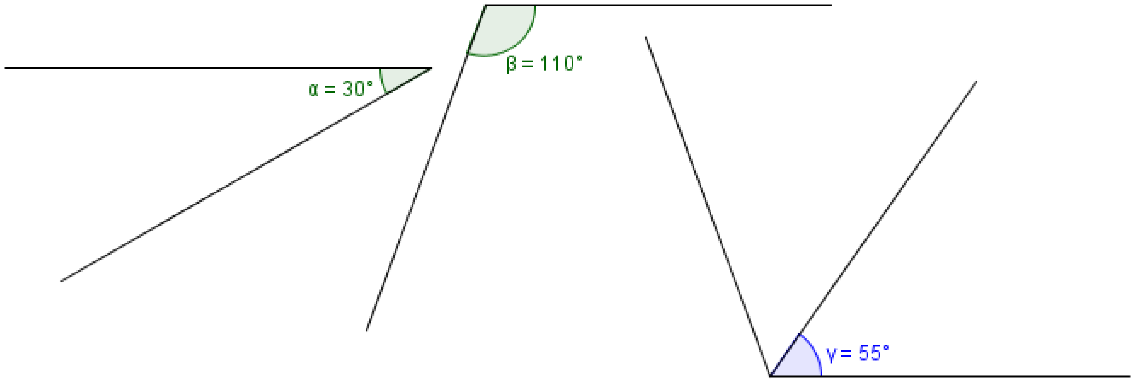
Odčítání úhlů:



Násobení úhlů:



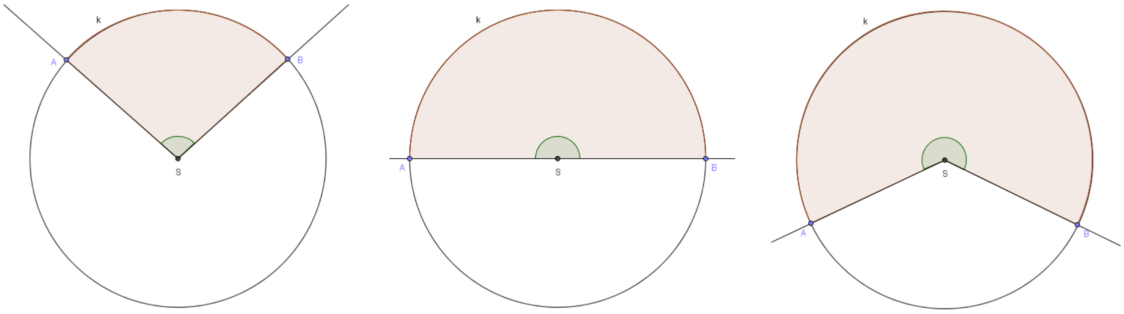
Dělení úhlů:



2.6.4 Středový a obvodový úhel

Body *A*, *B* rozdělují kružnici $k(S,r)$ na dva oblouky. Polopřímky *SA* a *SB* pak rozdělují rovinu na dva úhly. Vrcholy obou úhlů leží ve středu kružnice. Říkáme, že jde o **středové úhly** příslušné k oblouku *AB*.

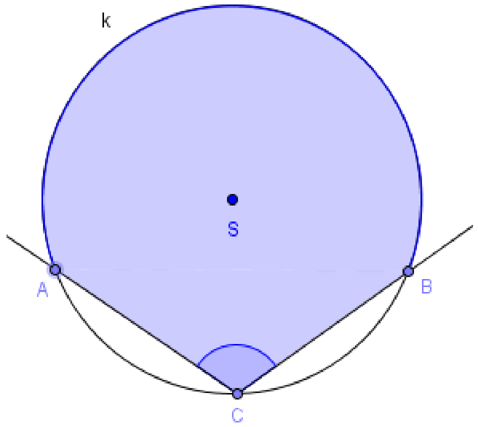
Středový úhel může být konvexní, přímý i nekonvexní.



Obrázek 16 - středový úhel a) konvexní, b) přímý, c) nekonvexní

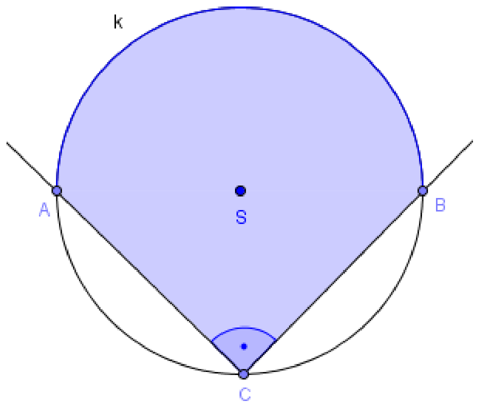
Body *A*, *B* rozdělují kružnici $k(S,r)$ na dva oblouky. Zvolíme-li bod *X* na kružnici *k*, který náleží jednomu z oblouků *AB*. Potom úhel *AXB* nazýváme **obvodovým úhlem** příslušným k oblouku *AB* ve kterém bod *X* neleží.

Pokud všechny tři body leží na stejné půlkružnici, bude obvodový úhel tupý.



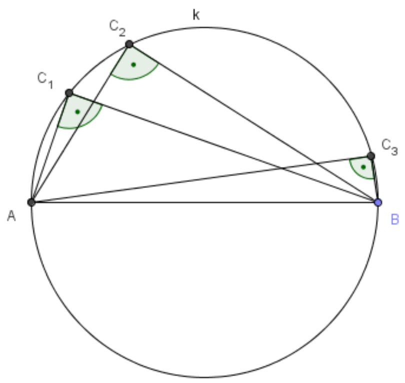
Obrázek 17 - tupý obvodový úhel

Pokud dva body tvoří průměr kružnice, potom bude obvodový úhel pravý.



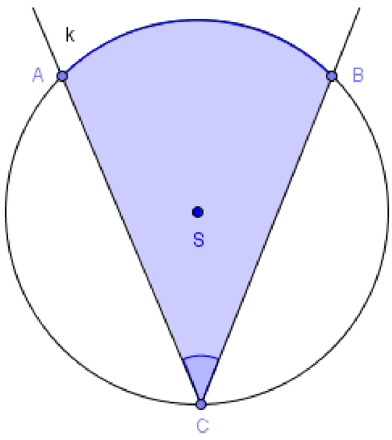
Obrázek 18 - pravý obvodový úhel

Této vlastnosti využívá Thaletova věta, která zní: „Množina všech pravých úhlů sestrojených nad úsečkou *AB*, tvoří kružnici s průměrem *AB* – **Thaletova kružnice**.“



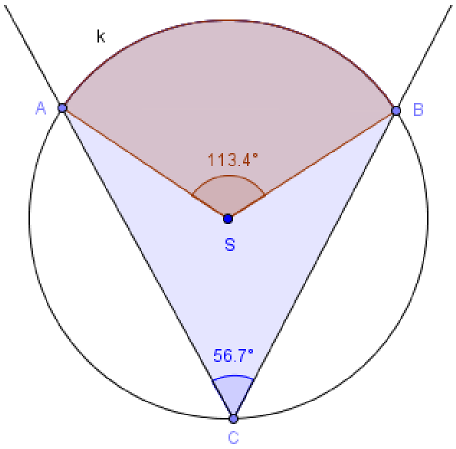
Obrázek 19 - Thaletova kružnice

Pokud dva body leží na jedné půlkružnici a třetí bod na opačné půlkružnici, potom obvodový úhel je ostrý.



Obrázek 20 - ostrý obvodový úhel

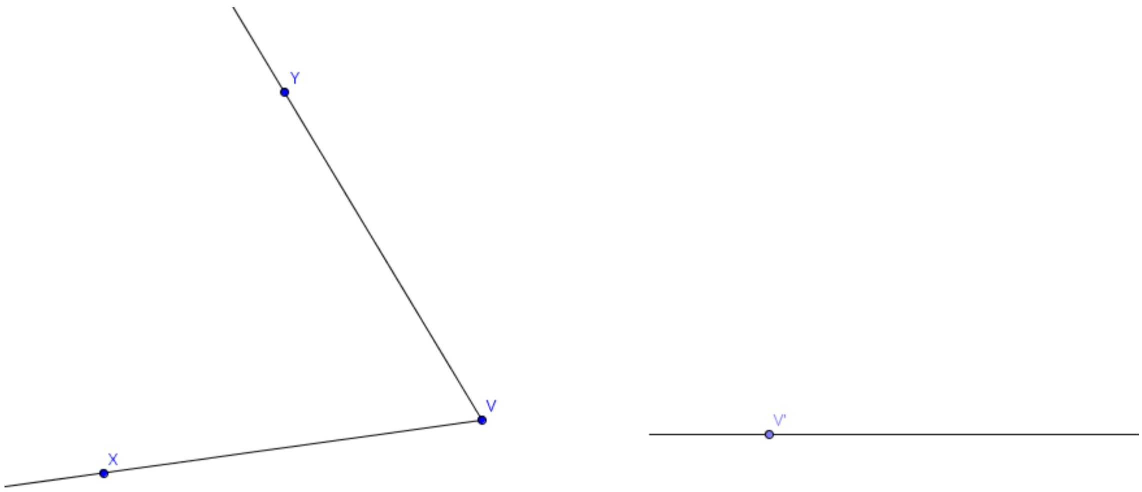
V každé kružnici je velikost středového úhlu dvojnásobkem libovolného obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.



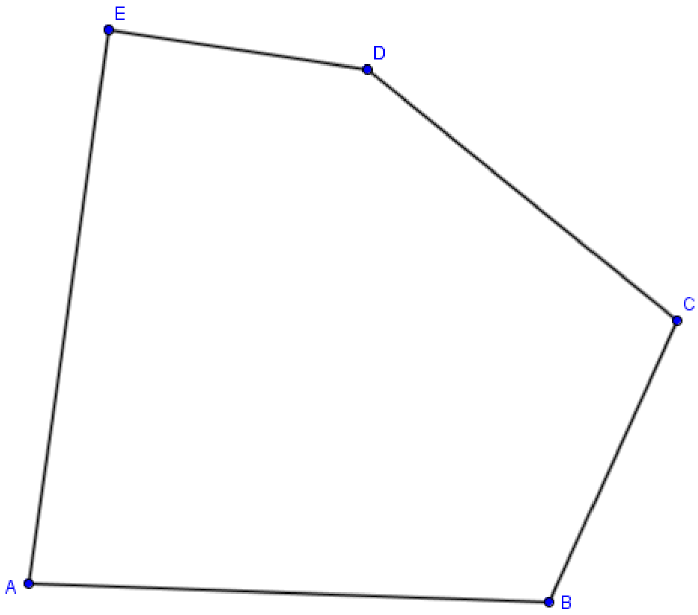
Obrázek 21 - středový a obvodový úhel

2.7 Příklady

1. Pomocí kružítka přeneste úhel $\angle XVY$ tak, aby vrchol úhlu ležel v bodě V'. Obloučkem vyznačte přenesený úhel.



2. Na obrázku je narýsován pětiúhelník, narýsujte osy všech vnitřních úhlů pětiúhelníku.

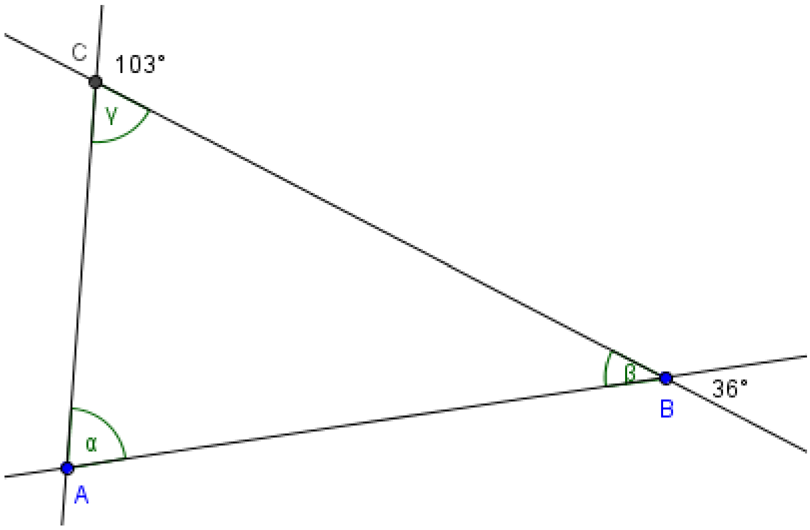


3. Bez použití úhloměru narýsujte úhly o velikosti $\alpha = 135°$, $\beta = 225°$, $\gamma = 22{,}5°$, $\delta = 90°$, $\varepsilon = 45°$.

4. Bez použití úhloměru narýsujte úhly o velikosti $\alpha = 60°$, $\beta = 105°$, $\gamma = 30°$, $\delta = 15°$.

5. Vepište do kružnice postupně ostroúhlý, tupoúhlý a pravoúhlý trojúhelník *ABC* tak, aby body *A*, *B*, *C* ležely na kružnici.

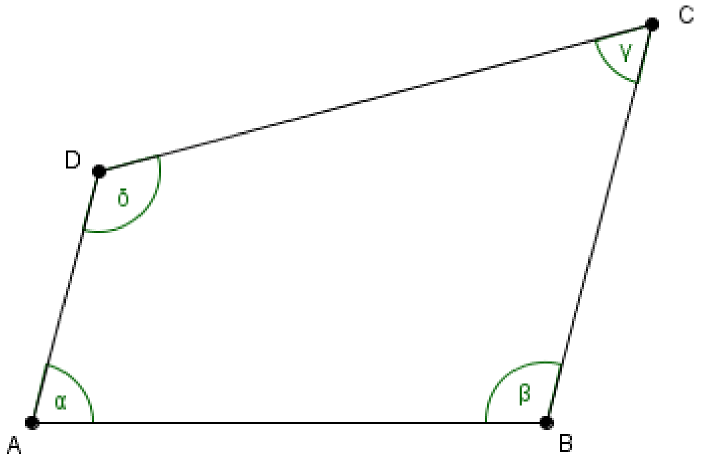
6. Vypočtěte velikosti úhlů α, β, γ v trojúhelníku *ABC*.



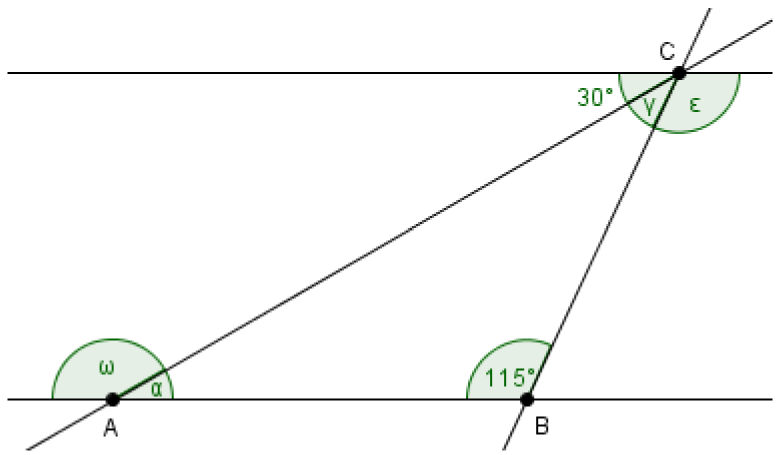
7. Rozhodněte o správnosti následujících vět:

   a. Součet dvou vedlejších úhlů je roven 360°.
   b. Vedlejší úhel k úhlu tupému je tupý úhel.
   c. Vedlejší úhel k úhlu ostrému je tupý úhel.
   d. V trojúhelníku nemohou být 3 shodné úhly.
   e. Součet ostrého a tupého úhlu je vždy 180°.
   f. V trojúhelníku nemohou být dva tupé úhly.
   g. Součet dvou ostrých úhlů je vždy úhel ostrý.
   h. Přímý úhel lze získat sečtením 3 ostrých úhlů.
   i. Vrcholový úhel k úhlu ostrému je ostrý úhel.
   j. Součet dvou ostrých úhlů je vždy tupý úhel.

8. Sestrojte úhly $\varepsilon = \alpha + \gamma$; $\omega = \delta - \beta$.



9. Vypočítejte velikosti úhlů označených řeckými písmeny.



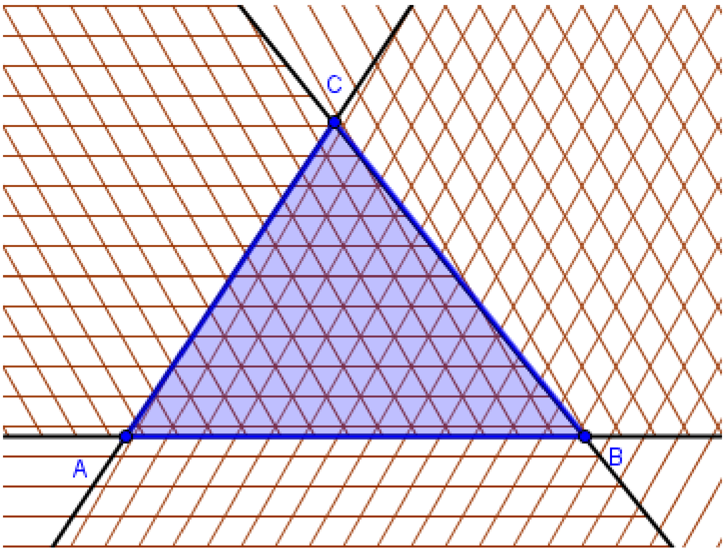
10. Narýsujte úhly α, β, γ. Úhel $\alpha = 30°$, $\beta = 70°$, $\gamma = 50°$. Graficky sestrojte úhly $\delta = 2 \cdot \alpha + \gamma$, $\varepsilon = (\beta + \gamma) : 2$.

3 MNOHOÚHELNÍKY

Mnohoúhelník je část roviny, která je ohraničena uzavřenou lomenou čarou, která sama sebe neprotíná. Skládá-li se hranice mnohoúhelníku z *n* úseček, nazývá se mnohoúhelník *n*-úhelníkem**.** Každý *n*-úhelník má *n* vrcholů, *n* stran a *n* vnitřních úhlů. Každé dva vrcholy určují stranu *n*-úhelníku, každé dvě strany *n*-úhelníku svírají vnitřní úhel.

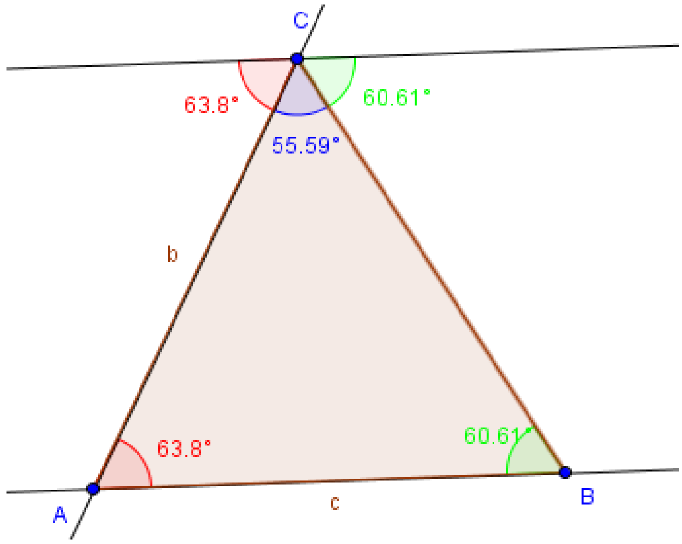
3.1 TROJÚHELNÍK

Trojúhelník je rovinný geometrický útvar určený průnikem tří polorovin. Na Obrázek 22 jsou to poloroviny *ABC, BCA, CAB*. V trojúhelník můžeme popsat tři vrcholy *A, B, C*, tři strany *AB, BC, CA* a tři vnitřní úhly *ABC, BCA, CAB*. Stranu může zapsat pomocí krajník bodů např. strana *AB* nebo pomocí malého písmene protějšího vrcholu např. *c*.



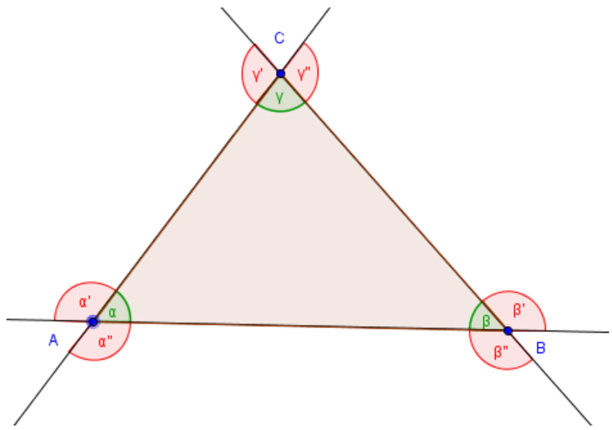
Obrázek 22 – trojúhelník

Každé dvě strany spolu svírají **vnitřní úhel** trojúhelníku. Součet všech vnitřních úhlů trojúhelníku je roven 180°. Na Obrázek 23 vedeme vrcholem *C* rovnoběžku se stranou *AB*. U vrcholu C doplníme střídavé úhly k úhlům α a β. Vidíme, že střídavé úhly spolu s úhlem γ tvoří přímý úhel, tudíž jejich součet dává 180°.



Obrázek 23 - součet vnitřních úhlů

Vnější úhly trojúhelníku, jsou vedlejší úhly k vnitřním úhlům. Jsou znázorněné na Obrázek 24 červenou barvou. Jejich velikost se vždy rovná součtu dvou vnitřních úhlů, které leží u jiných vrcholů než vnější úhel. K ověření můžeme použít Obrázek 23 a Obrázek 24.



Obrázek 24 - vnitřní a vnější úhly

3.1.1 Rozdělení trojúhelníků

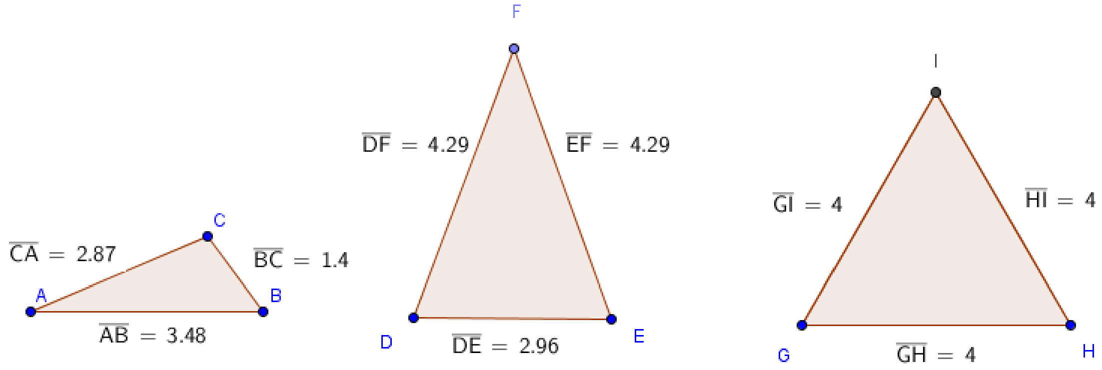
Trojúhelníky dělíme dvěma způsoby, buď podle délek jejich stran, anebo podle velikosti úhlů.

a) Rozdělení podle velikostí stran:

1. **Obecný trojúhelník** – má všechny strany nestejně dlouhé

2. **Rovnoramenný trojúhelník** – má dvě strany stejně dlouhé, které nazýváme **ramena** a jednu stranu jinak dlouhou kterou nazýváme **základna**

3. **Rovnostranný trojúhelník** – má všechny tři strany stejně dlouhé



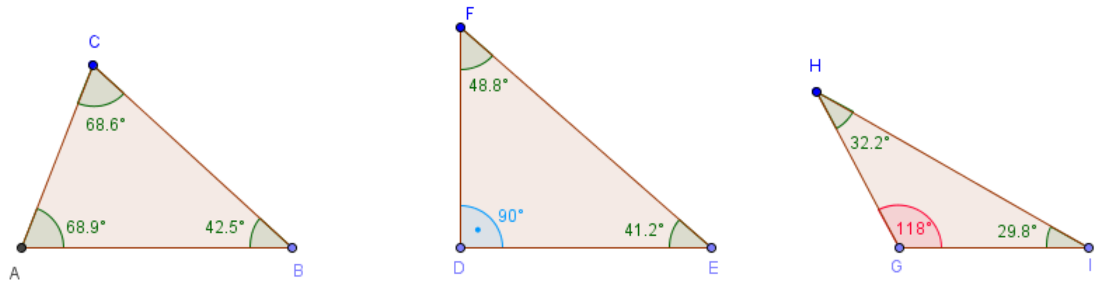
Obrázek 25 - obecný, rovnoramenný a rovnostranný

b) rozdělení podle vnitřních úhlů:

1. **Ostroúhlý trojúhelník** – má všechny vnitřní úhly ostré

2. **Tupoúhlý trojúhelník** – má jeden vnitřní úhel ostrý, zbývající dva jsou ostré

3. **Pravoúhlý trojúhelník** – má jeden vnitřní úhel pravý, zbývající dva jsou ostré
   - strana proti pravému úhlu se nazývá **přepona**, zbývající dvě se nazývají **odvěsny**

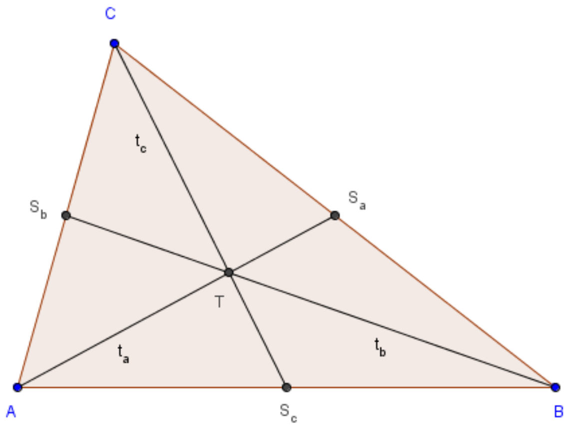


Obrázek 26 - ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý

3.1.2 Těžnice trojúhelníku

Definice: Úsečka spojující vrchol trojúhelníka se středem protější strany se nazývá **těžnice**.

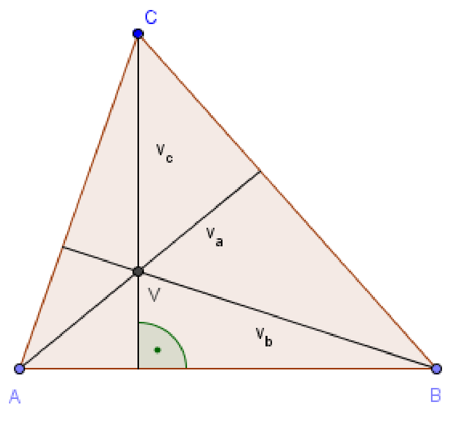
Těžnice se protínají v jednom společném bodě, který označujeme *T*. Tento bod se nazývá **těžiště** a nachází se vždy uvnitř trojúhelníku. Těžiště rozděluje každou těžnici v poměru 2:1, kde větší část těžnice se nachází mezi vrcholem a těžištěm.



Obrázek 27 - těžnice

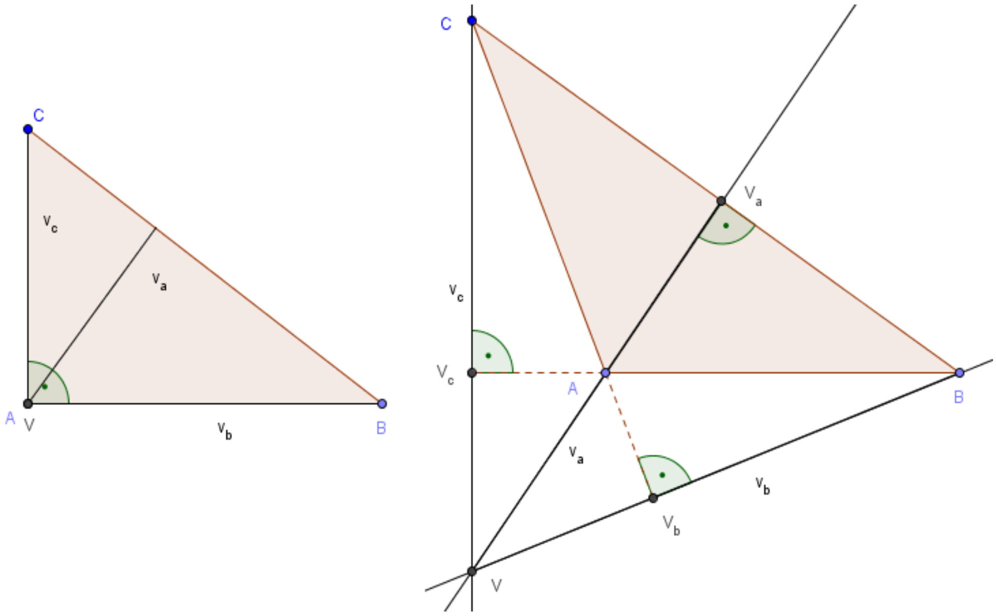
3.1.3 Výška trojúhelníku

Definice: Kolmice spuštěná z vrcholu trojúhelníku na protější stranu se nazývá **výška** trojúhelníku. Výška spuštěná z vrcholu *C*, je délka úsečky v_c.



Obrázek 28 - výška

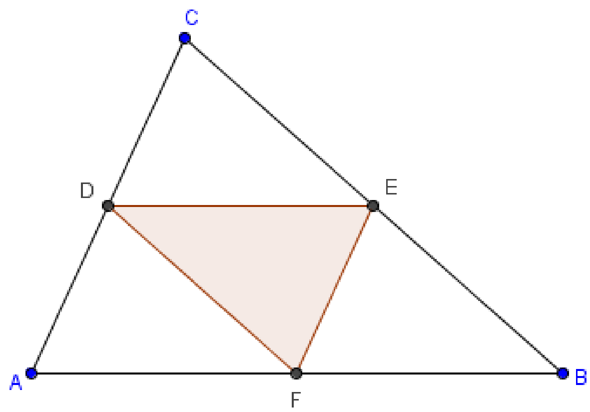
Průsečík výšek (ortocentrum) se v ostroúhlém trojúhelníku nachází uvnitř trojúhelníku. Pokud máme pravoúhlý trojúhelník, pak najdeme průsečík výšek ve vrcholu trojúhelníku, ve kterém se nachází pravý úhel. Pokud máme tupoúhlý trojúhelník, potom průsečík výšek najdeme vně trojúhelníku.



Obrázek 29 - výšky trojúhelníků

3.1.4 Střední příčky trojúhelníku

Střední příčka trojúhelníku je úsečka, která spojuje středy stran trojúhelníku a se zbylou stranou je rovnoběžná. Délka střední příčky je rovna polovině strany, s kterou je rovnoběžná. Střední příčky rozdělují trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky.



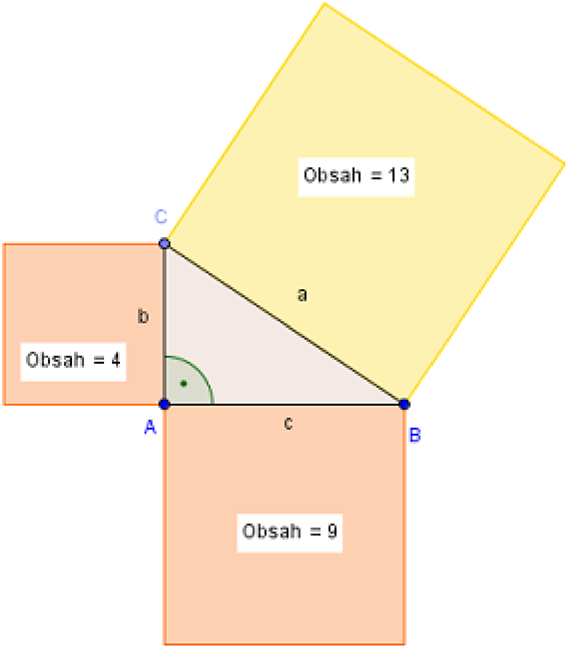
Obrázek 30 - střední příčky

3.1.5 Pythagorova věta

Pythagorova věta platí pouze v pravoúhlém trojúhelníku!

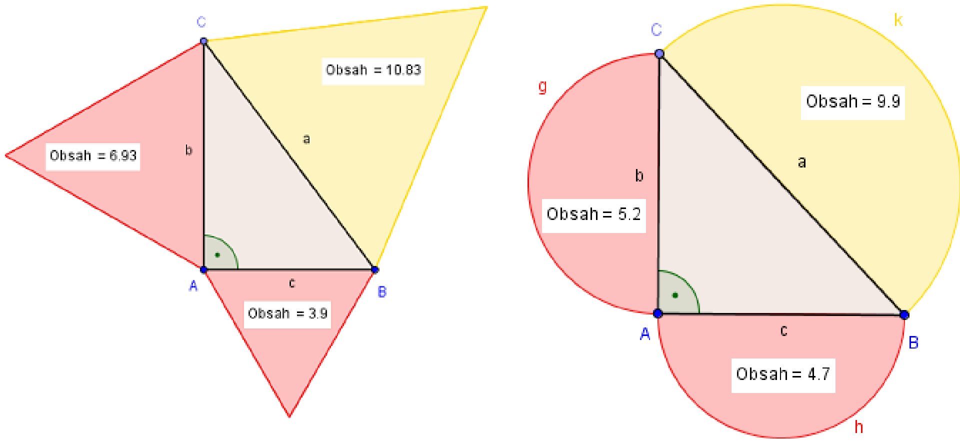
Věta: Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka se rovná součtu obsahů čtverců nad jeho přeponami.

Obvykle se věta zapisuje vzorcem $c^2 = a^2 + b^2$, ale dejte si pozor, takto zapsaný vzoreček lze použít jen u trojúhelníku s pravým úhlem ve vrcholu *C*. Pravý úhel, ovšem může být i u jiného vrcholu, proto je důležité znát znění Pythagorovy věty a dokázat jí aplikovat i na trojúhelníky, které mají pravý úhel u jiného vrcholu než je vrchol *C*.



Obrázek 31 - Pythagorova věta

Nad stranami pravoúhlého trojúhelníku můžeme sestrojit například půlkruhy nebo rovnostranné trojúhelníky.



Obrázek 32 - zobecněná Pythagorova věta

3.1.6 Sinová a Kosinová věta

Sinová věta: Poměr všech délek stran a hodnot sinů jim protilehlých úhlů je v trojúhelníku konstantní.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Využíváme, pokud chceme dopočítat zbylé strany trojúhelníku, ve kterém máme zadané dva úhly a jednu stranu nebo dopočítat zbylé úhlu a máme zadanou

Kosinová věta slouží k vypočítání úhlů v trojúhelníku, když máme zadané pouze strany nebo k vypočítání zbývající strany pokud máme zadané dvě strany a úhel jimi sevřený.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

3.1.7 Příklady

Vzorový: Maminka se stěhuje do města, ve kterém bydlí její tři dcery. Anička bydlí od Blanky *6km*. Blanka má k Cecilce o jednu třetinu větší vzdálenost než k Aničce. Vzdálenost mezi Aničkou a Cecilkou je poloviční, než vzdálenost mezi Cecilkou a Blankou. Narýsujte, kam by se měla maminka přestěhovat, tak aby měla ke každé ze svých dcer stejně daleko.

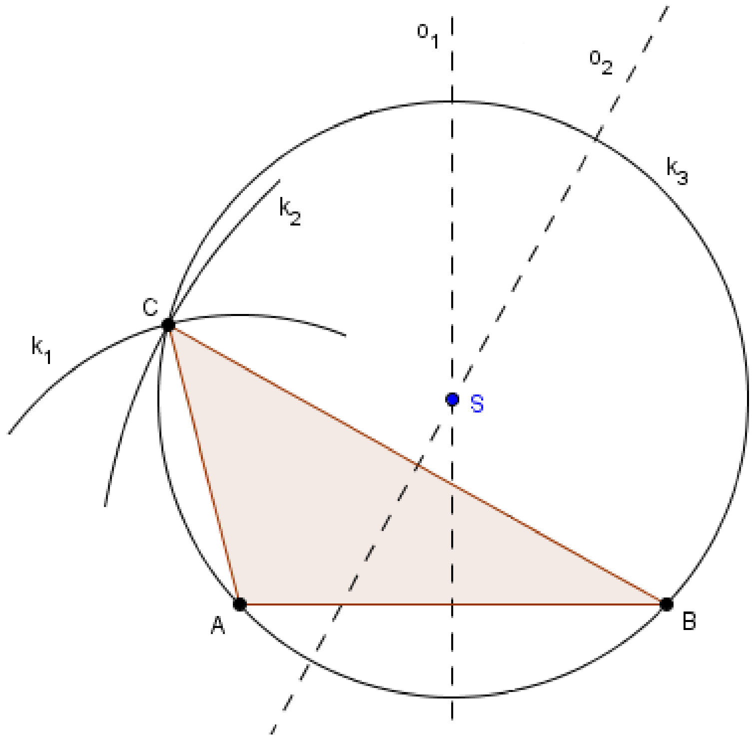
Rozbor: Bydliště Aničky, Blanky a Cecilky tvoří vrcholy trojúhelníku se stranami $a = 8km$, $b = 4km$, $c = 6km$. Maminka by se měla přestěhovat do středu kružnice opsané tomuto trojúhelníku. Tento střed nalezneme v průsečíku vnitřních os úhlů.

Postup konstrukce:

1. $AB; |AB| = 6cm$
2. $k_1; k_1(A;4cm)$
3. $k_2; k_2(B;8cm)$

4. $C; C \in k_1 \cap k_2$
5. $o_1; o_1 \perp AB \wedge |Ao_1| = |Bo_1|$
6. $o_2; o_2 \perp BC \wedge |Bo_2| = |Co_2|$
7. $S; S \in o_1 \cap o_2$
8. $k_3; k_3(S; r = |SA|)$

Grafické řešení:



Počet řešení: Úloha má jedno řešení

1. Zvolte si libovolné body A_1, B_1, C_1, které neleží v přímce. Sestrojte trojúhelník *ABC* tak, aby body A_1, B_1, C_1 byly středy jeho stran.

2. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník *ABC*, kde $|AC| = |BC|$, je-li dáno: $|AC| = 6cm$, $r = 4cm$, kde *r* je poloměr kružnice opsané trojúhelníku.

3. Sestrojte trojúhelník *ABC*, jestliže je dáno $c = 4{,}8cm$, $v_c = 4cm$, $t_c = 5{,}2cm$.

4. Sestrojte trojúhelník *CDE,* je-li dána strana *CD* délky $e = 8cm$, těžnice t_c délky $t_c = 8{,}5cm$ a úhel s vrcholem *D* o velikosti $\delta = 75°$. V trojúhelníku *CDE* sestrojte výšku v_c.

5. Sestrojte trojúhelník *ABC*, jestliže je dána strana *BC* délky $a = 10cm$, výška $v_a = 5{,}5cm$ a úhel o velikosti $\gamma = 60°$.

6. Sestrojte trojúhelník *DEF*, jestliže je dána strana *EF* délky $d = 4cm$, strana *DF* délky $e = 6cm$ a výška $v_f = 3{,}5cm$.

7. Sestrojte trojúhelník *KLM,* jestliže je dáno $k = 5{,}5cm$, $t_k = 6{,}6cm$, $t_l = 5{,}1cm$.

8. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem u vrcholu *C*, je-li dáno $v_c = 2{,}4cm$ a $t_c = 3cm$.

9. Sestrojte trojúhelník *ABC*, jestliže je dána strana $a = 4cm$, úhel $\alpha = 60°$ a rozdíl stran $b - a = 1cm$.

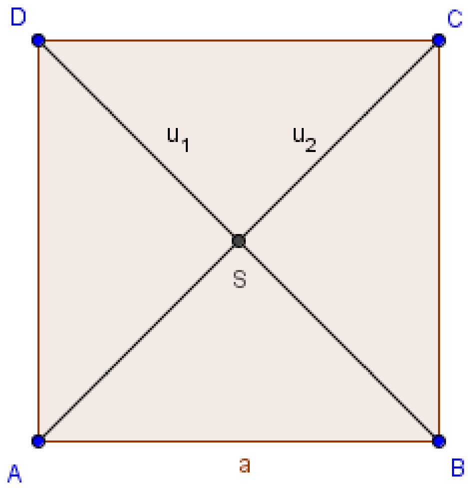
10. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže $\alpha = 80°$, $\beta = 60°$, $a + b + c = 13cm$.

3.2 Rovnoběžníky

Rovnoběžník je rovinný geometrický útvar. Je to druh čtyřúhelníku, jehož dvě protější strany jsou rovnoběžné a stejně dlouhé. Rovnoběžníky dělíme podle velikosti stran na rovnostranné a různostranné. Rovnoběžníky dále dělíme podle úhlu, který svírají dvě sousední strany na pravoúhlé a kosoúhlé.

3.2.1 Čtverec

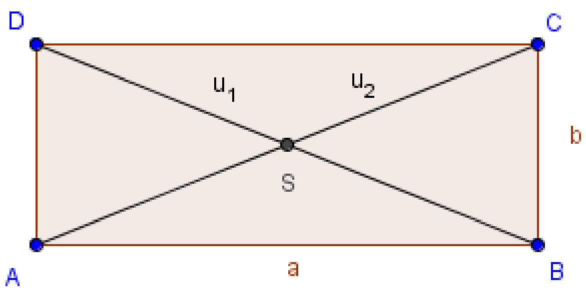
Čtverec je rovnostranný pravoúhlý čtyřúhelník. Všechny jeho strany mají stejnou velikost. Všechny jeho vnitřní úhly jsou pravé. Každý čtverec má dvě úhlopříčky, které vzniknou spojením dvou protějších vrcholů. Úhlopříčky jsou stejně velké, jsou navzájem kolmé a půlí se. Úhlopříčky také půlí vnitřní úhly čtverce. Protínají se v těžišti čtverce. Čtverci můžeme opsat i vepsat kružnici. Čtverec je osově souměrný útvar. Osy souměrnosti jsou spojnice středů protějších stran nebo přímky, v nichž leží úhlopříčky. Podle těžiště je čtverec také středově souměrný.



Obrázek 33 - čtverec

3.2.2 Obdélník

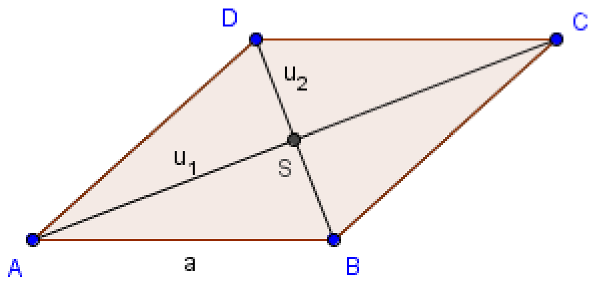
Obdélník je různostranný pravoúhlý čtyřúhelník. Dvě protější strany jsou rovnoběžné a jsou shodné. Dvě vedlejší strany jsou na sebe kolmé a nejsou shodné. Všechny jeho vnitřní úhly jsou pravé. Každý obdélník má dvě úhlopříčky, které vzniknou spojením dvou protějších vrcholů. Úhlopříčky jsou stejně velké, nejsou navzájem kolmé a půlí se. Úhlopříčky nepůlí vnitřní úhly obdélníku. Protínají se v těžišti obdélníka. Obdélník je osově souměrný podle os, které prochází středem protějších stran. Obdélník je středově souměrný se středem souměrnosti v těžišti.



Obrázek 34 - obdélník

3.2.3 Kosočtverec

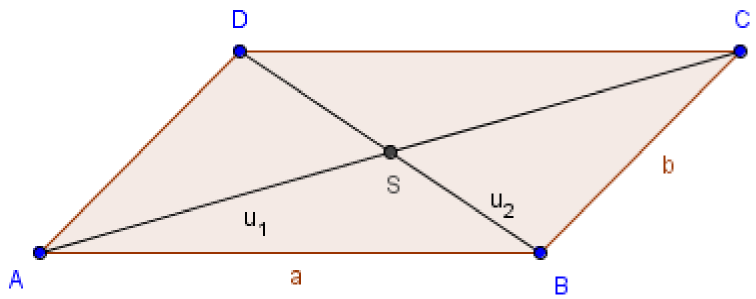
Kosočtverec je rovnostranný kosoúhlý čtyřúhelník. Všechny jeho strany mají stejnou velikost. Vnitřní úhly u protějších vrcholů jsou shodné. Kosočtverec má dvě úhlopříčky, které nejsou shodné, jsou na sebe kolmé a půlí se. Úhlopříčky také půlí vnitřní úhly kosočtverce. Protínají se v těžišti kosočtverce. Kosočtverci můžeme vepsat kružnici. Kosočtverec je osově souměrný útvar podle přímek, v nichž leží úhlopříčky kosočtverce. Kosočtverec je středově souměrný podle středu souměrnosti ležícího v těžišti kosočtverce.



Obrázek 35 - kosočtverec

3.2.4 Kosodélník

Kosodélník je různostranný kosoúhlý čtyřúhelník. Jeho protější rovnoběžné strany jsou shodné, jeho sousední strany nejsou shodné. Vnitřní úhly u protějších vrcholů jsou shodné. Kosodélník má dvě úhlopříčky, které nejsou shodné, nejsou na sebe kolmé a půlí se. Úhlopříčky nepůlí vnitřní úhly kosodélníku. Průsečík úhlopříček je zároveň jeho těžištěm. Kosodélníku nemůžeme opsat ani vepsat kružnici. Kosodélník není osově souměrný útvar, je pouze středově souměrný se středem souměrnosti v průsečíku úhlopříček.

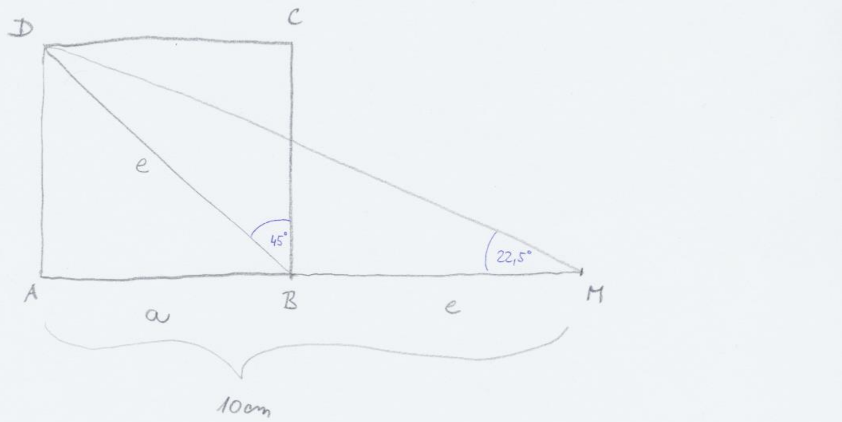


Obrázek 36 – kosodélník

3.2.5 Příklady

Vzorový: Sestrojte čtverec *ABCD*, když součet délky jeho strany a délky jeho úhlopříčky je $10cm$ $(a + e = 10cm)$.

Rozbor:



1. Protože úhlopříčka ve čtverci půlí úhel, potom $|\sphericalangle DBC| = 45°$
2. Potom úhel DBM má velikost 135°
3. Body B, M, D tvoří rovnoramenný trojúhelník s rameny MB a DB
4. Pak velikost úhlů, které svírají ramena se základnou je rovna $(180° - 135°) : 2 = 22{,}5°$
5. Po sestrojení úhlu BMD a kolmice na stranu AB bodem A, získáme bod D, pak už nebude problém sestrojit čtverec.

Postup konstrukce:

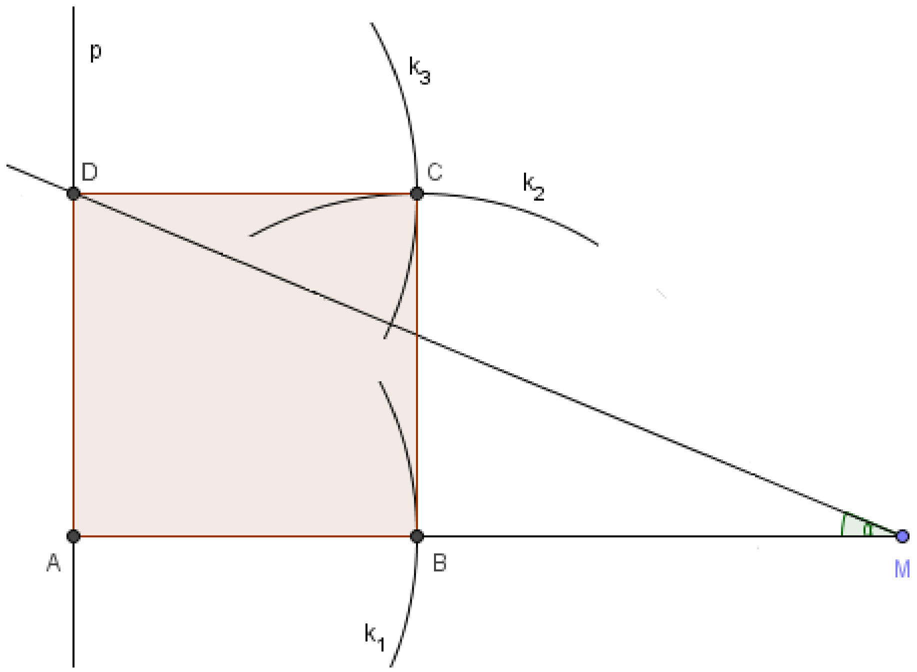
1. $AM; |AM| = 10cm$
2. $p; p \perp AM \wedge A \in p$
3. $\angle AMD'; |\angle AMD'| = 22{,}5°$
4. $D; D \in p \cap MD'$
5. $k_1; k_1(A; |AD|)$
6. $B; B \in k_1 \cap AM$
7. $k_2; k_2(B; |AD|)$

8. $k_3; k_3(D; |AD|)$

9. $C; C \in k_2 \cap k_3$

10. $ABCD$

Grafické řešení:



Počet řešení: Úloha má jedno řešení

1. Sestrojte čtverec *ABCD,* je-li dána délka jeho úhlopříčky $e = 6{,}2cm$.

2. Sestrojte čtverec, který je opsán kružnici *k* o poloměru $r = 25mm$.

3. Sestrojte obdélník *DEFG*, je-li dáno $|DE| = 67mm$, $|\angle EDF| = 28°$.

4. Sestrojte obdélník *ABCD* tak, aby velikost jedné z jeho stran byla $4cm$ a úhlopříčky svírali úhel velikosti 80°.

5. Sestrojte kosočtverec *ABCD*, je-li dána velikost úhlu $\alpha = 38°$ a délka úhlopříčky *AC*, $|AC| = 7cm$.

6. Sestrojte kosočtverec *MNOP*, je-li dáno $m = 45mm$, $v = 32mm$.

7. Sestrojte kosočtverec *ABCD*, je-li dáno $r = 2cm$, $a = 5cm$, kde r je poloměr kružnice vepsané kosočtverci. Sestrojte také kružnici vepsanou.

8. Sestrojte kosodélník *EFGH*, je-li dáno: $e = 6cm$, $v_e = 4cm$ a je-li trojúhelník *EFG* rovnoramenný se základnou *EF*.

9. Sestrojte kosodélník *ABCD*, je-li dáno: $a = 2{,}8cm$, $\delta = 103°$, $r = 3{,}5cm$, kde *r* je poloměr kružnice *k*, která prochází vrcholy *A, C* a *D*.

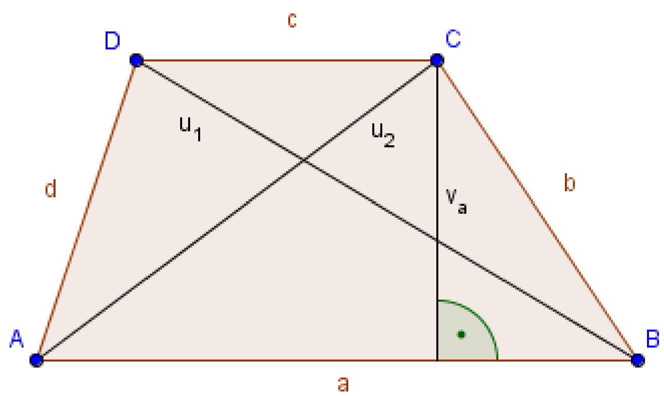
10. Sestrojte kosodélník ABCD, je-li dáno: $\alpha = 103°$, $v_a = 4{,}5cm$, $v_b = 2{,}5cm$.

3.3 *Lichoběžníky*

Lichoběžník je rovinný geometrický útvar, jehož dvě strany nazýváme základny a jsou rovnoběžné. Zbývající dvě strany nazýváme ramena a jsou různoběžné. Střední příčka lichoběžníku je úsečka, jejíž krajní body leží na středech ramen. Vzdálenost základen se nazývá výška lichoběžníku. Lichoběžníky nejsou středově souměrný. Podle velikosti vnitřních úhlů dělíme lichoběžníky na obecné, rovnoramenné a pravoúhlé.

3.3.1 Obecný lichoběžník

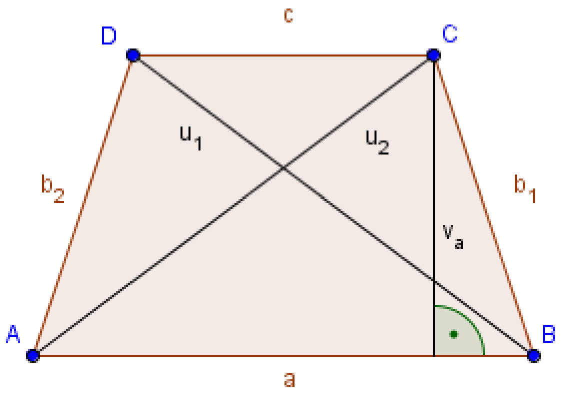
Ramena obecného lichoběžníku mají různou velikost, se základnami svírají různé úhly, které jsou zároveň různé od 90°. Úhlopříčky mají různou velikost, nesvírají stejné úhly a jejich průsečík je nerozděluje ve stejném poměru. Obecný lichoběžník není osově souměrný.



Obrázek 37 - obecný lichoběžník

3.3.2 Rovnoramenný lichoběžník

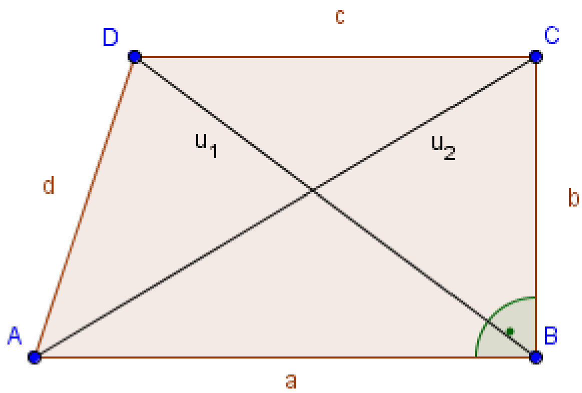
Ramena rovnoramenného lichoběžníku mají stejnou velikost. Základna svírá s rameny stejné úhly, které jsou různé od 90°. Úhlopříčky mají stejnou velikost a nesvírají stejné úhly. Průsečík úhlopříček rozděluje úhlopříčky ve stejném poměru. Rovnoramenný lichoběžník je osově souměrný podle osy, která prochází středy základen.



Obrázek 38 - rovnoramenný lichoběžník

3.3.3 Pravoúhlý lichoběžník

Ramena obecného lichoběžníku mají různou velikost. Jedno rameno svírá se základnami různé úhly, druhé rameno svírá s oběma základnami pravý úhel. Úhlopříčky mají různou velikost, nesvírají stejné úhly a jejich průsečík je nerozděluje ve stejném poměru. Pravoúhlý lichoběžník není osově souměrný geometrický útvar.

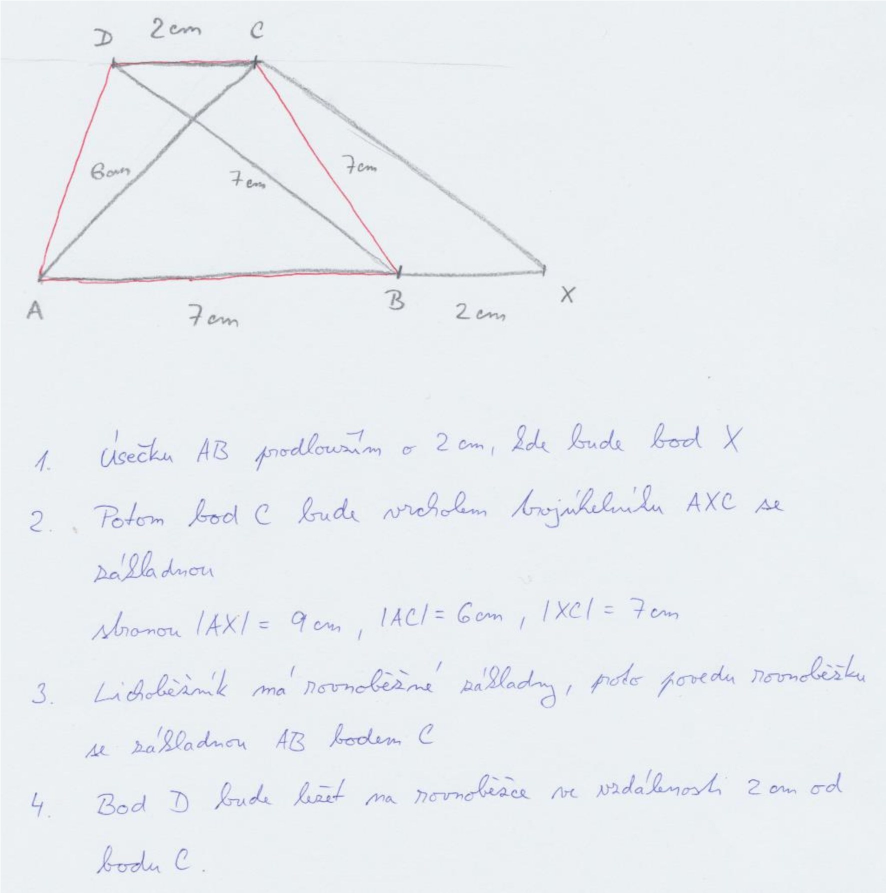


Obrázek 39 - pravoúhlý lichoběžník

3.3.4 Příklady

Vzorový: Sestrojte lichoběžník *ABCD* (*AB*||*CD*), je-li dáno $a = 7cm$, $c = 2cm$, $e = |AC| = 6cm$ a $f = |BD| = 7cm$.

Rozbor:



1. Úsečku AB prodloužím o 2 cm, kde bude bod X
2. Potom bod C bude vrcholem trojúhelníku AXC se základnou
stranou |AX| = 9 cm, |AC| = 6 cm, |XC| = 7 cm
3. Lichoběžník má rovnoběžné základny, proto povedu rovnoběžku se základnou AB bodem C
4. Bod D bude ležet na rovnoběžce ve vzdálenosti 2 cm od bodu C.

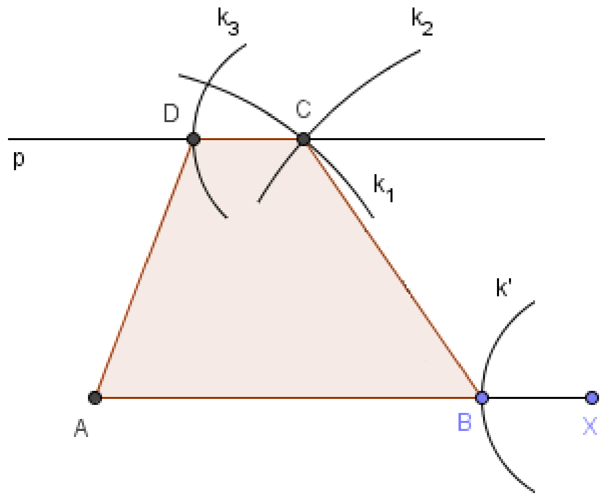
Postup konstrukce:

1. $AX; |AX| = 9cm$
2. $k'; k'(X;2cm)$
3. $B; B \in AX \cap k'$
4. $k_1; k_1(A;6cm)$
5. $k_2; k_2(X;7cm)$
6. $C; C \in k_1 \cap k_2$
7. $p; p \parallel AB \wedge C \in p$
8. $k_3; k_3(C;2cm)$

9. $D; D \in k_3 \cap p$

10. $ABCD$

Grafické řešení:



Počet řešení: Úloha má jedno řešení

1. Sestrojte pravoúhlý lichoběžník *KLMN* s pravým úhlem u vrcholu *L*, je-li dáno: $|KL| = 3{,}7cm$, $|LM| = 5{,}6cm$, $|KN| = 6cm$ a je-li $KL||MN$.

2. Sestrojte pravoúhlý lichoběžník *ABCD* s pravým úhlem u vrcholu *A*, je-li dáno: $a = 5{,}7cm$, $\beta = 120°$, $e = 8{,}2cm$ a je-li $AB||CD$.

3. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník *ABCD* s rameny *BC a AD*, je-li dáno: $a = 6{,}7cm$, $\delta = 105°$, $e = 5{,}9cm$.

4. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník *KLMN* s rameny *LM a KN*, je-li dáno: $a = e = 6cm$ a jsou-li úhlopříčky na sebe kolmé.

5. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník *RSTU* s rameny *ST a RU*, je-li dáno: $|RS| = 80mm$, $|TU| = 2{,}6cm$ a $|UR| = 6{,}4cm$.

6. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník *ABCD* s rameny *BC a AD*, je-li dáno: $a = 7{,}6cm$, $\beta = 60°$, $c = 3{,}8cm$.

7. Sestrojte lichoběžník *ABCD* (*AB*||*CD*), je-li dáno $a = 2{,}3cm$, $e = 5{,}7cm$, $v = 31mm$ a $f = 6{,}1cm$.

8. Sestrojte lichoběžník *EFGH* (*EF*||*GH*), je-li dáno $|EF| = e = 6{,}9cm$, $|FG| = f = 5cm$, $|GH| = g = 2cm$ a $|\angle FGH| = 105°$.

9. Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho stran *a, b, c, d*.

10. Sestrojte lichoběžník *ABCD* (*AB*||*CD*), je-li dáno $b = 3cm$, $c = 2{,}5cm$, $d = 2{,}6cm$, $\alpha - \beta = 20°$.

4 KRUŽNICE A KRUH

Již ve starém Egyptě kolem roku 1500 př. n. l. se lidé snažili vypočítat obsahy a obvody kruhu a kružnice, aby zjistili výměru svých pozemků.

Některé úlohy starověku týkající se kruhu jsou známé jako eukleidovsky neřešitelné. Eukleidovská konstrukce znamená konstrukce pomocí kružítka a pravítka. Takové úlohy jsou například Kvadratura kruhu nebo Rektifikace kružnice.

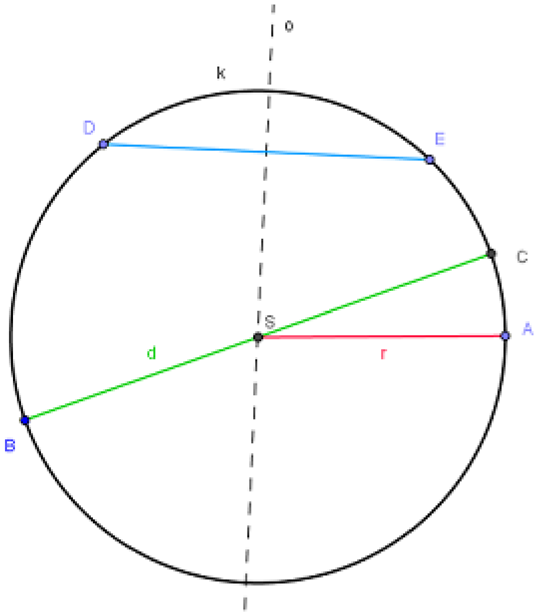
V letech 287 – 212 př. n. l. žil Archimédes ze Syrakus, který byl považován za nejvýznamnější středověkého vědce. Údajně jeho poslední věta před tím, než byl zavražděn vojáky, byla: „Nerušte mi mé kruhy."

V lidské historii se tedy často setkáváme s pojmem kružnice a kruh a ani nyní tomu není jinak. Dnes a denně se kružnicemi a kruhy setkáváme. Když se podíváte kolem sebe, téměř všude vidíte nějaké kružnice. Středový kruh na fotbalovém hřišti nebo kruhový oblouk u pokutového území, kruhové dopravní značky, kola u bicyklů nebo některé oblouky u mostních pilířů.

4.1 Kružnice

Definice: Kružnice je množina bodů, které mají od daného bodu (středu) stejnou vzdálenost (poloměr).

Poloměr kružnice je vzdálenost středu kružnice od libovolného bodu na kružnici. Poloměr značíme malým písmenem r. **Průměr** je úsečka spojující dva body na kružnici a zároveň procházející středem kružnice. Průměr značíme malým písmenem d a jeho velikost se rovná dvojnásobku velikosti poloměru. Úsečka spojující dva libovolné body na kružnici se nazývá **tětiva** kružnice. Osa každé tětivy prochází středem kružnice.



Obrázek 40 – kružnice

Délka neboli obvod kružnice je dána rovnicí $o = 2 \cdot \pi \cdot r$

4.1.1 Vzájemná poloha přímky a kružnice

Pro přehlednější zápis si označíme vzdálenost přímky od středu kružnice jako *v*.

1. **Přímka prochází vně kružnice**

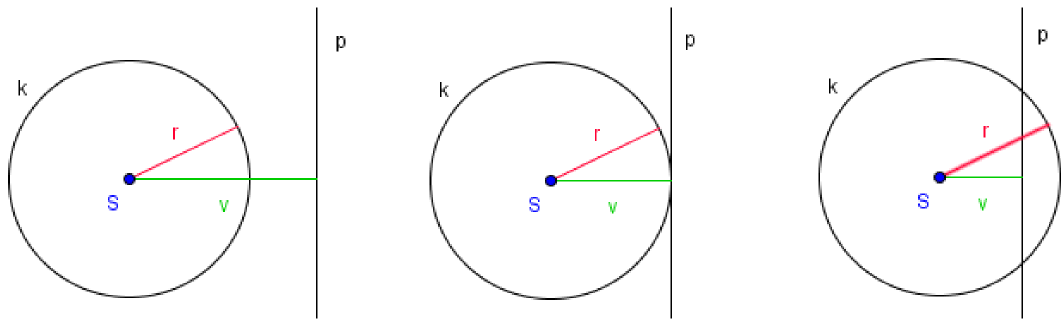
   Prochází-li přímka vně kružnice, pak její vzdálenost od středu je vždy větší než poloměr kružnice. $v > \mathrm{r}$

2. **Přímka je tečnou kružnice**

   Je-li přímka tečnou kružnice, pak její vzdálenost od středu je vždy stejná jako poloměr kružnice. $v = r$

3. **Přímka je sečna kružnice**

   Je-li přímka sečnou kružnice, pak její vzdálenost od středu je vždy menší než poloměr kružnice. $v < r$

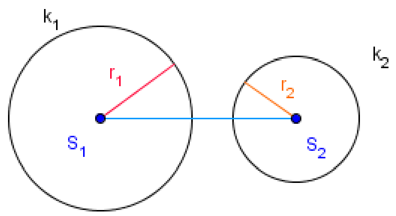


Obrázek 41 - vzájemná poloha přímky a kružnice

4.1.2 Vzájemná poloha dvou kružnic

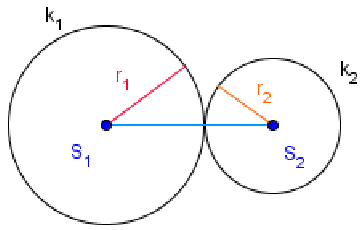
1. **Kružnice leží vně druhé**

   Vzdálenost středů je větší než součet velikostí poloměrů. $|S_1S_2| > r_1 + r_2$



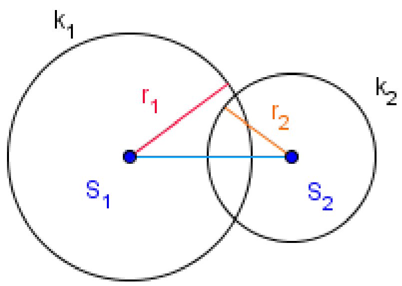
2. **Kružnice mají vnější dotyk**

   Vzdálenost středů je rovna součtu velikostí poloměrů. $|S_1S_2| = r_1 + r_2$



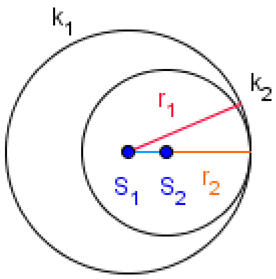
3. **Kružnice mají dva společné body**

   Vzdálenost středů je větší než rozdíl velikostí poloměrů a zároveň je menší než součet velikostí poloměrů. $r_1 - r_2 < |S_1S_2| < r_1 + r_2$



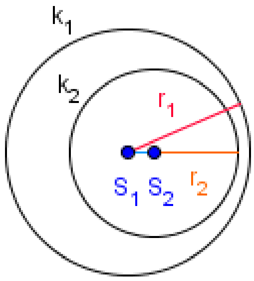
4. **Kružnice mají vnitřní dotyk**

   Vzdálenost středů je rovna rozdílu velikostí poloměrů. $|S_1S_2| = r_1 - r_2$



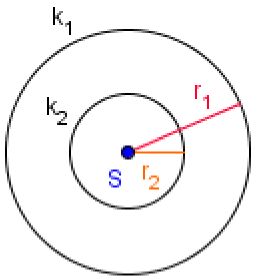
5. **Kružnice leží uvnitř druhé**

   Vzdálenost středů je menší než rozdíl velikostí poloměrů. $|S_1S_2| < r_1 - r_2$



6. **Soustředné kružnice**

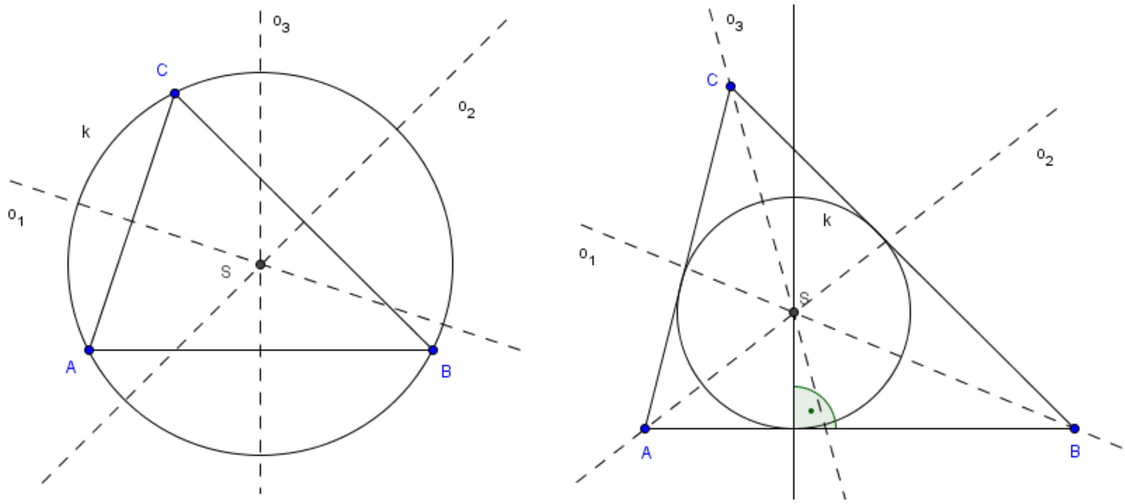
   Kružnice mají společný střed a různé poloměry.



4.1.3 Kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku

Pokud konstruujeme kružnici opsanou a kružnici vepsanou trojúhelníku, potom je pro nás nejdůležitější najít střed kružnice. Při konstrukci **kružnice opsané**, musíme nejprve narýsovat **osy stran** trojúhelníka. Jejich průsečík je středem kružnice opsané. Poloměr kružnice je vzdálenost získaného středu a vrcholu trojúhelníka. Pokud chceme zkonstruovat **kružnici vepsanou** trojúhelníku, potom musíme jako první narýsovat **osy**

vnitřních úhlů trojúhelníku. Jejich průsečík je středem kružnice vepsané. Poloměr kružnice je vzdálenost získaného středu k patě kolmice spuštěné z tohoto středu na stranu trojúhelníka.



Obrázek 42 - kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku

4.2 KRUH

Definice: Kruh je množina všech bodů, které mají od daného bodu (středu) vzdálenost rovnou poloměru, nebo menší než poloměr. Body, které jsou rovny poloměru, leží na obvodu kruhu. Body, jejichž vzdálenost od středu je menší než poloměr, leží uvnitř kruhu.

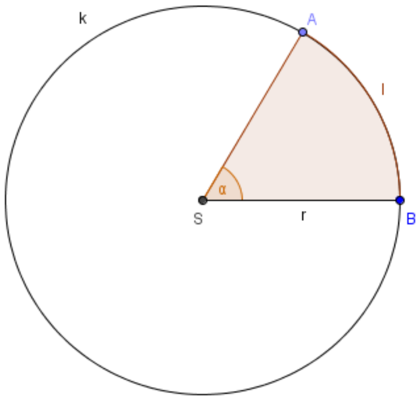
Obsah kruhu vypočteme $S = \pi \cdot r^2$

Délku kruhového oblouku vypočteme $l = (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot (\frac{\alpha}{360°})$

4.2.1 Kruhová výseč a úseč

Průnik kruhu a úhlu s vrcholem ve středu kruhu se nazývá **kruhová výseč**.

Obsah kruhové výseče spočítáme $S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360°}$



Obrázek 43 - kruhová výseč

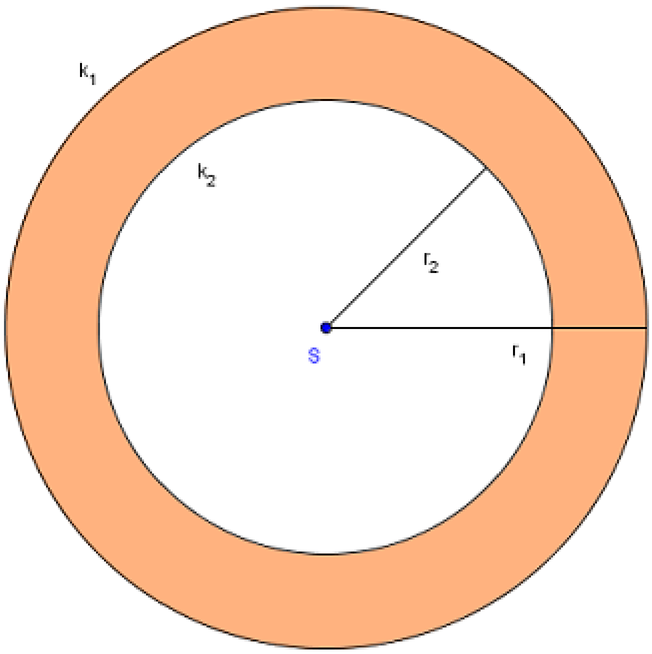
Průnik kruhu a poloroviny, jejíž hraniční přímka má od středu kruhu vzdálenost menší než jeho poloměr se nazývá **kruhová úseč**.

Obsah kruhové úseče se rovná rozdílu obsahu kruhové výseče a obsahu trojúhelníka *ABS*.

4.2.2 Mezikruží

Mezikruží je množina všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu *S* vzdálenost alespoň r_1 a nejvýše r_2 .

Obsah mezikruží vypočítáme $S = \pi \cdot (r_1^2 - r_2^2)$



Obrázek 44 – mezikruží

4.3 Příklady

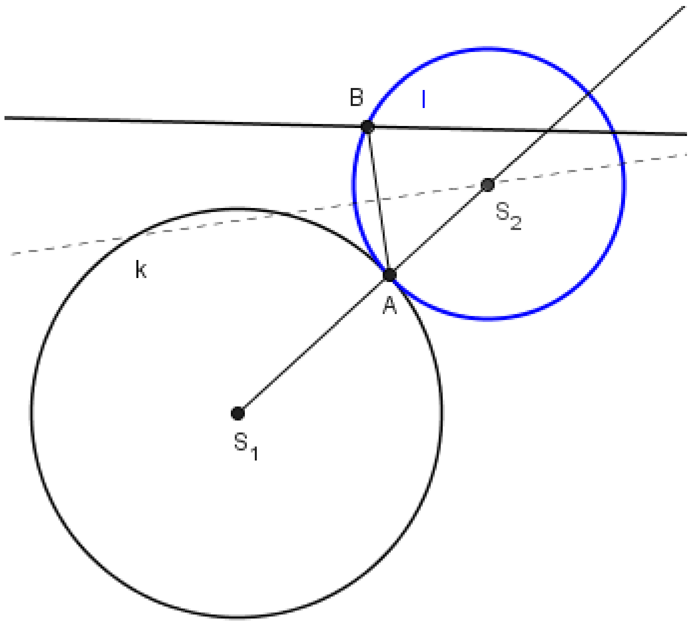
Zadání: Je dána kružnice *k*, její vnější přímka *p*, bod *A*, který leží na kružnici *k*, a bod *B*, který leží na přímce *p*. Sestrojte kružnici *l*, která se dotýká kružnice *k* v bodě *A* a prochází bodem *B*.

Rozbor: Známe kružnici *k* a bod *A* ležící na ní. Známe přímku *p* a bod *B* ležící na ní. Pokud máme sestrojit kružnici, která prochází oběma body, pak musíme nejprve najít její střed. Ten bude tvořit společně s body *A* a *B* vrcholy rovnoramenného trojúhelníku se základnou *AB*. Proto bod *S* bude ležet na ose úsečky *AB*.

Jelikož se obě kružnice budou dotýkat pouze v bodě *A*, potom budou středy obou kružnic ležet na přímce procházející bodem *A*.

Střed hledané kružnice bude na průsečíku osy úsečky a přímky procházející středem zadané kružnice a bodem *A*.

Grafické řešení:



Počet řešení: Úloha má jedno řešení.

1. Úsečka *AB* má délku 8cm. Sestrojte čtyři pravoúhlé trojúhelníky tak, aby úsečka *AB* byla jejich přeponou.

2. Je dána kružnice $k(S; r = 45mm)$ a přímka p ve vzdálenosti $3cm$ od bodu S. Sestrojte všechny kružnice o poloměru $r = 20mm$, které se dotýkají přímky p a s kružnicí k mají vnější dotyk. Proveďte rozbor, zapište postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.
3. Je dána přímka p a polopřímka AB, která má počátek A na přímce p a svírá s ní úhel o velikosti 75°. Sestrojte všechny kružnice s poloměrem $r = 2cm$, které se dotýkají přímky p i polopřímky AB.
4. Je dána kružnice $k(S; r = 5{,}5cm)$ a její sečna s, jejíž vzdálenost od středu S je 1,5cm. Sestrojte všechny kružnice o poloměru $r_1 = 2cm$, které se dotýkají sečny s a mají s kružnicí k vnitřní dotyk.
5. Sestrojte obdélník $ABCD$ se stranami délek $a = 5cm$, $b = 9cm$. Bod P je středem strany BC. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek AB, AP a strany BC obdélníku.
6. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a = 5cm$, $b = 3{,}5cm$ a poloměr kružnice opsané $r = 4cm$.
7. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC, v němž výška k přeponě dělí přeponu na dva úseky $c_1 = 3{,}2cm$ a $c_2 = 4{,}1cm$.
8. Jsou dány přímka p a dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$. Veďte přímku rovnoběžnou s přímkou p tak, aby na ní kružnice k_1, k_2 vytínaly shodné tětivy.
9. Čtverci $ABCD$ se stranou délky $10cm$ je opsána a vepsána kružnice. Tyto kružnice jsou hraniční kružnice mezikruží. Vypočítejte obsah tohoto mezikruží.
10. Narýsujte kruhovou výseč, která je jednou šestinou kruhu s poloměrem 4cm a vepište jí kružnici.

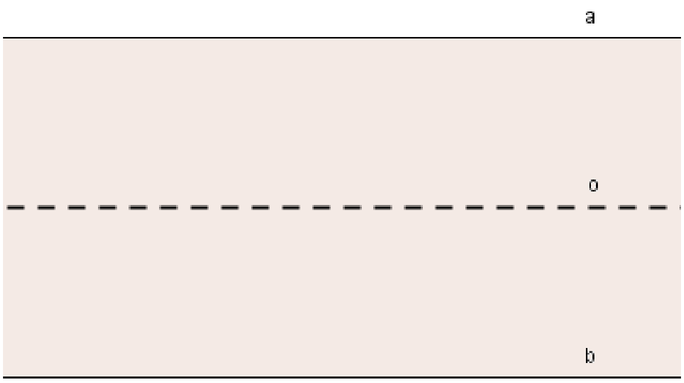
5 MNOŽINY BODŮ DANÉ VLASTNOSTI

5.1 Vybrané množiny bodů

Každý bod množiny *M* má danou vlastnost a zároveň každý bod, který má danou vlastnost, patří do množiny *M*.

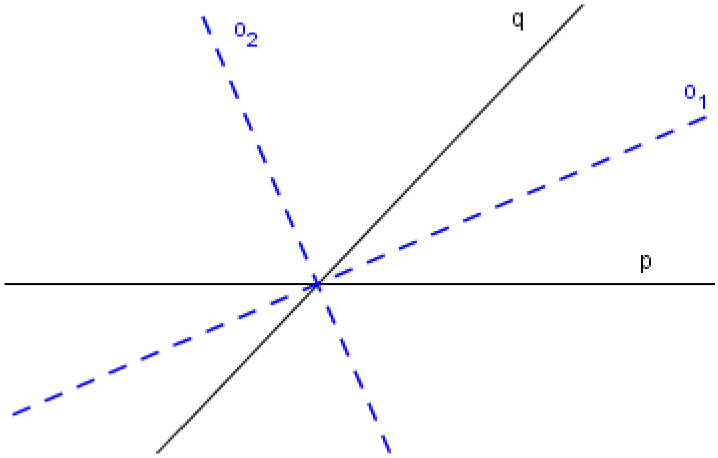
a) **Osa úsečky** – Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných navzájem různých bodů *A*, *B* se nazývá osa úsečky Obrázek 9 - osa úsečky.

b) **Osa pásu** – Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných navzájem různých rovnoběžek *p*, *q* se nazývá osa pásu.



Obrázek 45 - osa pásu

c) **Osa úhlu** – Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různoběžek *p*, *q* se nazývají osy úhlu. Jsou dvě a jsou na sebe navzájem kolmé.



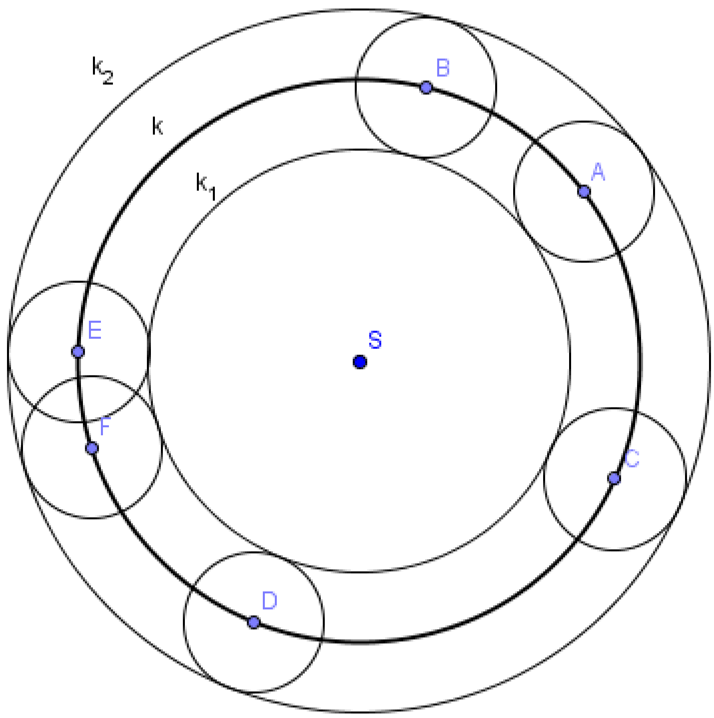
Obrázek 46 - osa úhlu

d) **Kružnice** – Množina všech bodů, které mají od daného bodu *S*, stejnou vzdálenost *r*, se nazývá kružnice Obrázek 40.

e) **Thaletova kružnice** – Množina všech vrcholů pravých úhlů sestrojených nad danou úsečkou *AB*, se nazývá Thaletova kružnice o průměru *AB* Obrázek 19**Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.**

5.2 Příklady

Vzorový: Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(S;3cm)$, $k_2(S;5cm)$. Co je množinou středů všech kružnic, které se dotýkají daných dvou kružnic?



1. Je dána kružnice $k(S;3cm)$ a bod X, který se po ní pohybuje. Co je množinou středů všech úseček SX?

2. Jsou dány body M, N, pro které platí $|MN| = 6cm$. Co je množinou bodů dotyku všech tečen vedených bodem N ke všem možným kružnicím k se středem M a poloměrem $r \leq |MN|$?

3. Je dána úsečka AB. Co je množinou všech rovnoběžníků $ABXY$, které mají stejnou výšku na stranu AB?

4. Pojízdný jeřáb má dosah $18m$ a pohybuje se po kolejích, jejichž osa tvoří polokružnici s průměrem $36m$. Co je množinou všech bodů ve vodorovném terénu, kam až může jeřáb dosáhnout?

5. Je dána kružnice $k(S;4cm)$ a přímka p procházející bodem S. Sestrojte kružnici l o poloměru $1{,}5cm$, která se dotýká dané kružnice i dané přímky.

6. Je dána kružnice $k(S;30mm)$ a vnější přímka p. Sestrojte tečny kružnice k, které svírají s přímkou p úhel 45°.

7. Je dána kružnice $k(S;4cm)$ a její tětiva $|AB| = 2{,}7cm$. Co je množinou středů všech tětiv kolmých k úsečce *AB*?
8. Narýsujte úhel $\alpha = 30°$. Sestrojte kružnici, která má poloměr 2,5*cm* a na ramenech úhlu α vytíná stejné tětivy délek 3,5*cm*.
9. Narýsujte kružnici $k(S;1{,}7cm)$ a zvolte na ní bod *T*. Opište kružnici *k* rovnostranný trojúhelník *ABC* tak, aby se strana *AB* dotýkala kružnice *k* v bodě *T*.
10. Sestrojte kružnice, které se dotýkají zároveň všech tří daných různých různoběžek *a*, *b*, *c*, které neprocházejí jedním bodem.

6 OBVODY, OBSAHY, OBJEMY

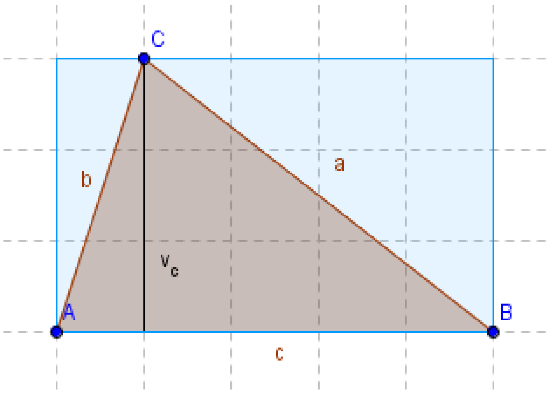
6.1 Trojúhelník

Trojúhelník se skládá ze tří stran, které můžou mít různé délky, proto obvod trojúhelníku musíme vypočítat jako součet všech tří stran.

$$o = a + b + c$$

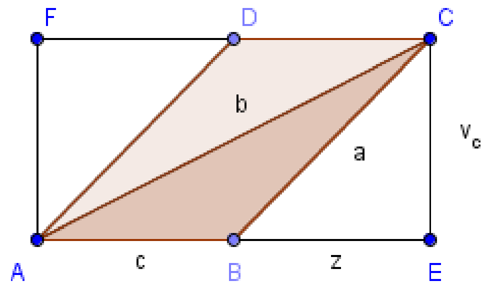
Obsah trojúhelníku vypočítáme jako polovinu ze součinu strany a její výšky.

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$$



Obrázek 47 - Obsah trojúhelníku

Odvození vzorce pro obsah trojúhelníku: Na Obrázek 48 vidíme obdélník *AECF*, který má obsah $S = (c + z) \cdot v_c$, po roznásobení dostaneme $S = c \cdot v + z \cdot v$. Pokud z obrázku vyjmeme krajní trojúhelníky *ADF* a *BEC* a spojíme je k sobě, dostaneme obdélník o stranách *z* a v_c. Obsah tohoto obdélníku proto bude $S = z \cdot v_c$. Po odečtení tohoto obsahu z původního obdélníku nám vychází, že zbylý kosodélník *ABCD* má obsah $S = c \cdot v_c$. Nyní jen stačí úhlopříčkou rozdělit kosodélník na dva shodné trojúhelníky o stejném obsahu a dostaneme, že obsah trojúhelníku je $S = \frac{c \cdot v_c}{2}$.



Obrázek 48 - odvození vzorce pro obsah

6.2 Čtverec

Čtverec se skládá ze čtyř stran, které mají stejnou délku, proto obvod čtverce vypočteme jako čtyřnásobek strany.

$$o = 4 \cdot a$$

U pravoúhlých rovnoběžníků se obsah vypočítá jako součin velikostí dvou na sebe kolmých stran. U čtverce jsou obě tyto strany stejně dlouhé, proto je obsah čtverce roven druhé mocnině velikosti strany.

$$S = a^2$$

6.3 Obdélník

Obdélník má vždy dvě protější strany stejně dlouhé a dvě sousední strany jinak dlouhé. Proto obvod vypočteme jako dvojnásobek součtu dvou sousedních stran.

$$o = 2 \cdot (a + b)$$

Obsah obdélníku se rovná součinu velikostí dvou sousedních stran, které mají různou velikost.

$$S = a \cdot b$$

6.4 Kosočtverec

Jelikož má kosočtverec všechny strany stejně dlouhé, vypočte se jeho obvod stejně jako obvod čtverce.

$$o = 4 \cdot a$$

Obsah kosočtverce je roven součinu velikosti strany a vzdálenosti od protější strany, tedy výšky kosočtverce. Odvození tohoto výpočtu bylo provedeno u obsahu trojúhelníka na Obrázek 48.

$$S = a \cdot v_a$$

6.5 Kosodélník

Obvod kosodélníku se vypočte stejně jako obvod obdélníku a to jako součet všech jeho stran.

$$o = 2 \cdot (a + b)$$

Pro obsah kosodélníku platí stejné pravidlo jako pro obsah ostatních rovnoběžníků. Obsah se vypočítá jako součin strany a příslušné výšky. Jelikož má kosodélník dvě různé délky stran, potom má i dvě různé délky výšek. Obsah však bude vycházet stále stejný.

$$S = a \cdot v_a \text{ nebo } S = b \cdot v_b$$

6.6 Lichoběžník

Obvod lichoběžníku vypočteme jako součet všech jeho stran, které můžou mít různou velikost.

$$o = a + b + c + d$$

Obsah lichoběžníku spočítáme jako polovinu ze součinu součtu velikostí základen a jejich vzdálenosti, tedy výšky.

$$S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$$

Odvození vzorce pro obsah lichoběžníku: U lichoběžníku *ABCD*, který máme na Obrázek 49, jsme si rozdělili stranu a bodem M na dvě libovolně velké úsečky o velikostech $a - m$ a m. Lichoběžník jsme si rozdělili pomocí bodu M na tři trojúhelníky.

První trojúhelník *AMD* zelené barvy má základnu dlouhou $a-m$ a výšku *v*. Proto jeho obsah bude:

$$S_1 = \frac{(a-m)\cdot v}{2}$$

Druhý trojúhelník *MCD* oranžové barvy má velikost strany *c* a k ní příslušnou výšku *v*. Proto jeho obsah bude:

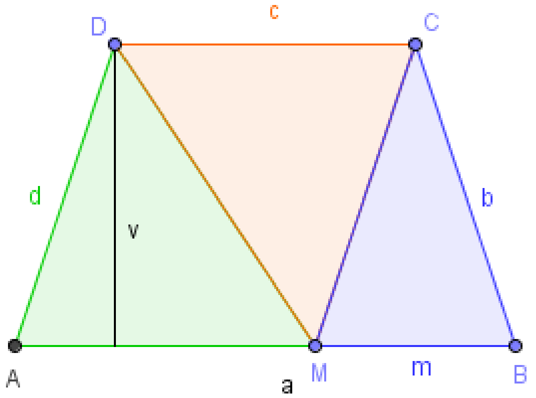
$$S_2 = \frac{c\cdot v}{2}$$

Třetí trojúhelník *MBC* modré barvy má velikost strany *m* a k ní příslušnou výšku *v*. Proto jeho obsah bude:

$$S_3 = \frac{m\cdot v}{2}$$

Obsah lichoběžníku se tedy rovná součtu obsahů trojúhelníků *AMD, MCD* a *MBC*:

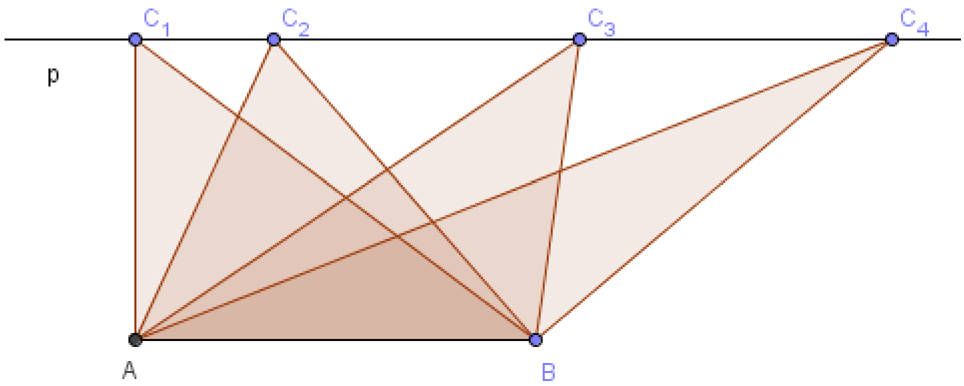
$$S = S_1 + S_2 + S_3$$
$$S = \frac{(a-m)\cdot v}{2} + \frac{c\cdot v}{2} + \frac{m\cdot v}{2}$$
$$S = \frac{a\cdot v - m\cdot v + c\cdot v + m\cdot v}{2}$$
$$S = \frac{a\cdot v + c\cdot v}{2}$$
$$S = \frac{(a+c)\cdot v}{2}$$



Obrázek 49 - obsah lichoběžníku

6.7 *Příklady*

Vzorový: Na následujícím obrázku je přímka $p||AB$. Rozhodněte, který z následujících čtyř trojúhelníků má největší obsah. Své tvrzení zdůvodněte.



Řešení: Vzoreček pro výpočet obsahu trojúhelníka je $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$. Když se podíváme na obrázek, vidíme, že každý trojúhelník má společnou základnu AB. Bod C se nachází na přímce p, která je se základnou rovnoběžná, proto má od základny stále stejnou vzdálenost. Proto i výška na základnu AB bude pořád stejně velká. Z toho vyplývá, že obsah všech trojúhelníků na obrázku je stejně velký.

1. Stěnová úhlopříčka krychle má délku $18cm$. Vypočtěte povrch krychle.
2. Obdélník má obvod $32cm$. Zvětšíme-li jeho délku o $2cm$ a šířku o $3cm$, zvětší se jeho obsah o $50cm^2$. Vypočtěte rozměry obdélníku.
3. Jedna strana obdélníku má délku $2{,}25m$. Její délka je 20% obvodu daného obdélníku. Vypočtěte obsah obdélníku.
4. Délky stran obdélníku jsou v poměru 1:3. Poloměr kružnice opsané obdélníku je $10cm$. Vypočtěte obsah obdélníku.
5. Čtverec a kosočtverec mají stejný obvod. Který z nich má větší obsah?
6. Úhlopříčky v kosočtverci mají délku $14cm$ a $48cm$. Vypočtěte výšku kosočtverce.
7. Stavební pozemek tvaru obdélníku s rozměry $40m$ a $60m$ se má z části zastavět domem se základnou tvaru čtverce, jehož strana má délku $18m$. Zbytek pozemku

se má rozdělit tak, aby jedna třetina připadla na dvůr a zbytek na zahrádku. Vypočítejte výměru zahrádky.

8. Délky základen lichoběžníku *EFGH* jsou $|EF| = 14cm$, $|GH| = 6cm$. Obsah lichoběžníku je $72cm^2$. Úhlopříčka *FH* dělí lichoběžník na dva trojúhelníky. Vypočtěte jejich obsah.

9. Pole osázené zeleninou má tvar pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku o délce odvěsny 24*m*. Ve vrcholech trojúhelníku jsou umístěny otáčecí postřikovače s dosahem 12*m*. Jak velkou část pole tyto postřikovače nezavlažují.

10. Trojúhelník *ABC* je rovnostranný. Jeho strana má délku 8*cm*. Body *D*, *E*, *F* jsou postupně středy stran *AB*, *BC*, *AC*. Vypočítejte obsah trojúhelníku *DEF*. V jakém poměru je obsah trojúhelníku *ABC* k obsahu trojúhelníku *DEF*?

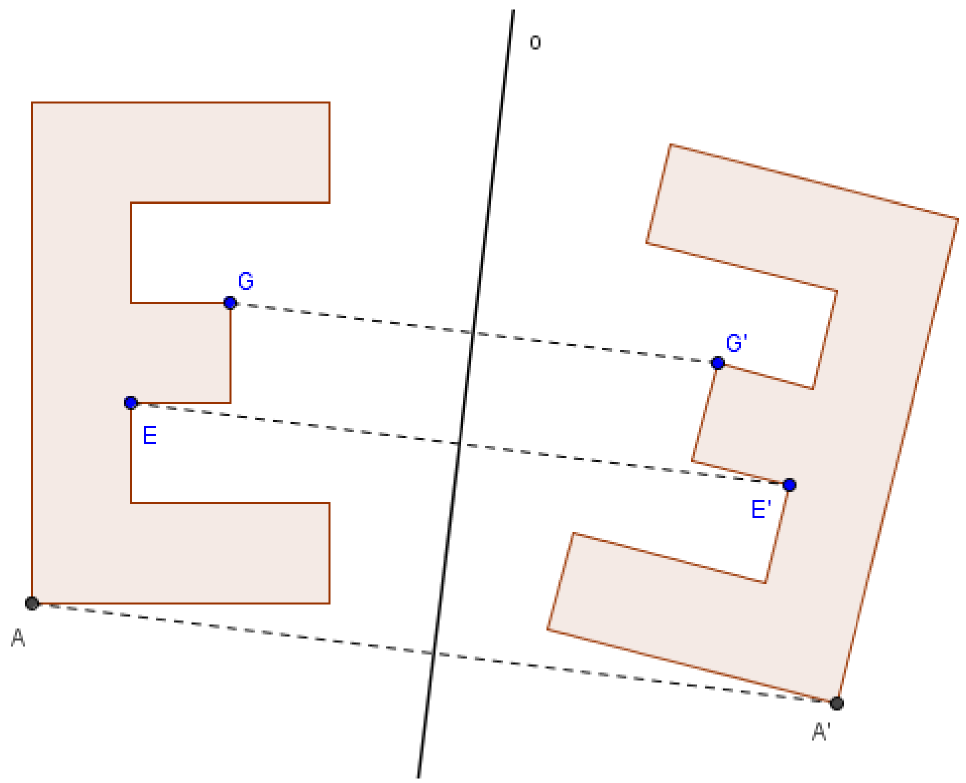
7 SHODNÁ ZOBRAZENÍ

Geometrické zobrazení v rovině nazýváme shodným zobrazením (shodností), jestliže vždy zachovává vzdálenost mezi body. Při vhodném pootočení nebo překlopení se bude obraz se vzorem překrývat.

7.1 Osová souměrnost

Při zobrazování pomocí osové souměrnosti platí tato pravidla: Vzor a obraz bodu leží v opačných polorovinách určených osou souměrnosti. Vzor a obraz bodu leží na kolmici k ose souměrnosti. Vzor a obraz bodu leží ve stejné vzdálenosti od osy souměrnosti.

Osová souměrnost nezachovává orientaci, to znamená, že pokud body ve vzoru po sobě následovali ve směru hodinových ručiček, pak v obrazu budou v protisměru hodinových ručiček. Proto se osová souměrnost nazývá **nepřímá shodnost**.

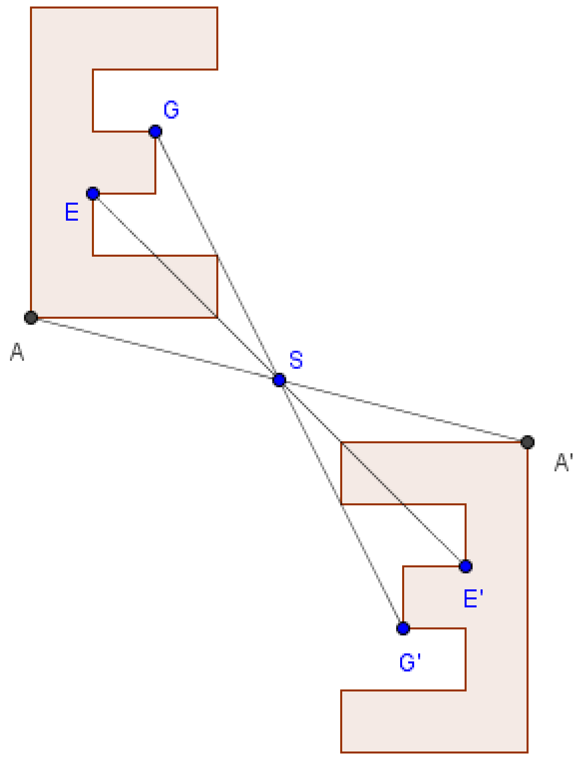


Obrázek 50 - osová souměrnost

Bod, který leží na ose souměrnosti, se nazývá samodružný bod a jeho obraz splývá se vzorem. Takových bodů je nekonečně mnoho a vyplní celou osu souměrnosti.

7.2 Středová souměrnost

Při zobrazování ve středové souměrnosti platí tato pravidla. Vzor a obraz bodu leží na stejné přímce, která zároveň prochází středem souměrnosti. Vzor a obraz bodu leží ve stejné vzdálenosti od středu souměrnosti.



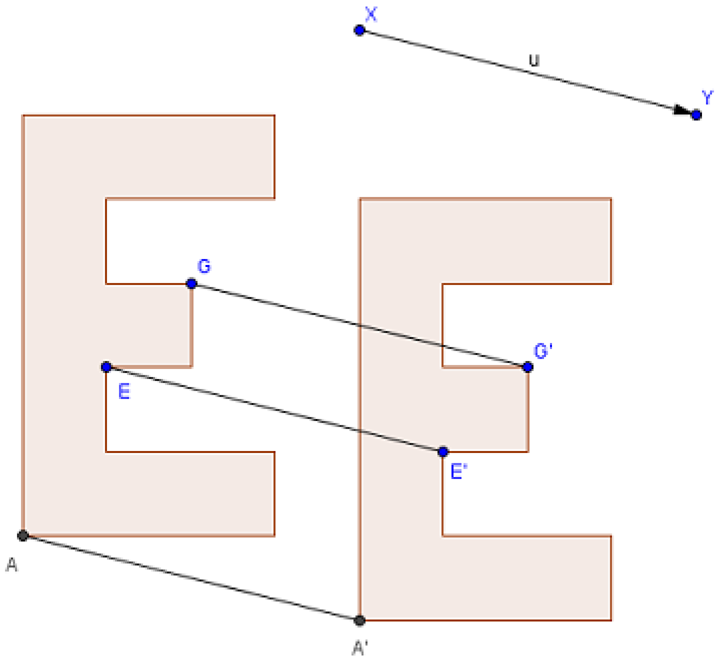
Obrázek 51 - středová souměrnost

Existuje pouze jeden samodružný bod a to právě střed souměrnosti. Středová souměrnost zachovává orientaci, proto se nazývá **přímá shodnost**.

7.3 Posunutí

Posunutí je shodné zobrazení, při kterém všechny body vzoru změní své souřadnice. Směr a délku posunutí udává vektor posunutí.

Při posunutí se přesouvají všechny body, proto neexistuje žádný samodružný bod. Pokud by byl vektor posunutí nulový, pak budou všechny body samodružné. Posunutí je přímá shodnost.

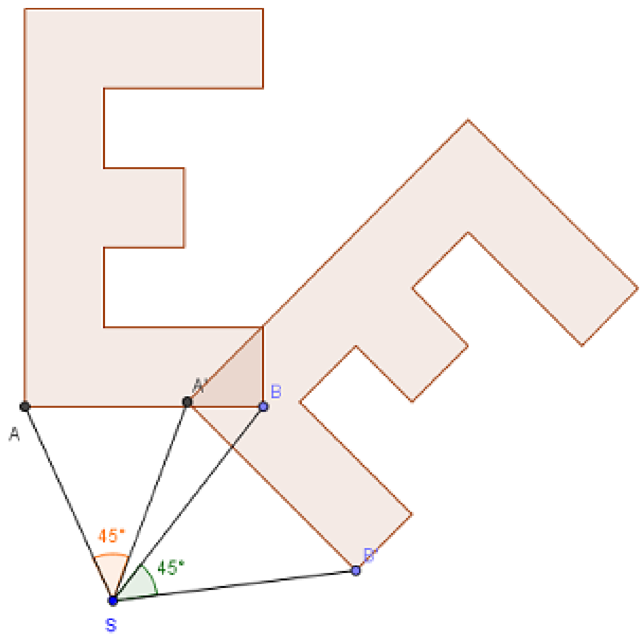


Obrázek 52 - posunutí

7.4 Otočení

Při otočení platí tato pravidla: Vzor a obraz bodu se otáčejí vždy o stejný úhel kolem středu otočení. Vzor a obraz bodu leží ve stejné vzdálenosti od středu otočení.

Existuje pouze jeden samodružný bod a to právě střed otočení. Otočení je přímá shodnost.



Obrázek 53 - otočení

7.5 Skládání shodností

Při skládání dvou osových souměrností se stejnou osou souměrnosti, dostáváme identitu. **Identita** je zobrazení samo na sebe.

Při skládání dvou osových souměrností s různými osami souměrnosti, dostáváme posunutí. Pokud jsou osy k sobě kolmé, dostáváme středovou souměrnost.

Při skládání dvou středových souměrností se stejným středem souměrnosti, dostáváme identitu.

Při skládání dvou středových souměrností s různými středy souměrnosti, dostáváme posunutí.

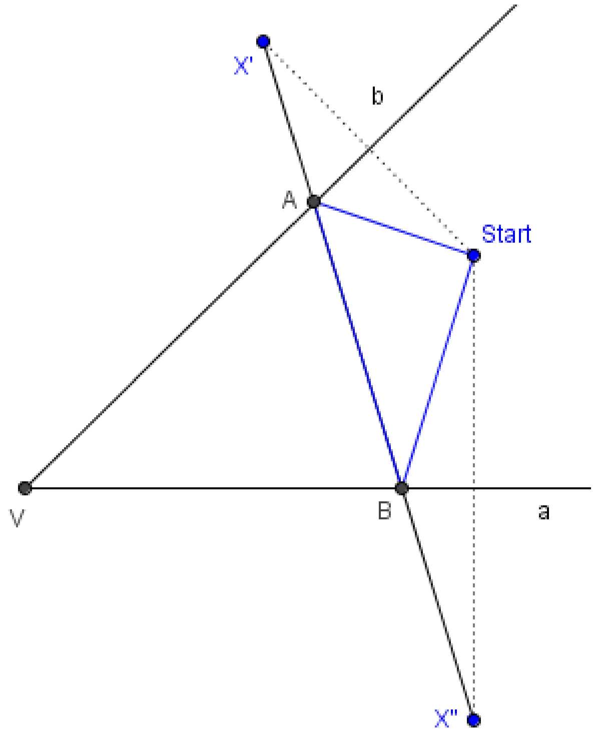
Při skládání dvou posunutí vznikne vždy posunutí, pokud druhý vektor posunutí bude opačný k prvnímu, dostaneme identitu.

Při skládání dvou otočení se stejným středem vznikne opět otočení se stejným středem. Pokud je druhý úhel opačný nebo doplňkem do 360° k prvnímu úhlu, vznikne identita.

Složením dvou přímých nebo dvou nepřímých shodností vznikne vždy přímá shodnost. Složením přímé a nepřímé shodnosti vznikne vždy shodnost nepřímá.

7.6 Příklady

Vzorový: Závodník, který se přihlásil do závodu v běhu, startuje z bodu *X*. Závod končí na stejném místě, ve kterém začínal. Podmínky úspěšného proběhnutí závodu jsou, že se závodník musí dostat na přímku *a* i na přímku *b*, které jsou mimoběžné. Narýsujte závodníkovi nejkratší možnou trať.



1. Je dán trojúhelník *ABC* s vrcholy $A[1;2], B[3;2], C[-1;5]$. Určete souřadnice jeho vrcholů v souměrnosti podle:

    - osy x
    - osy y
    - středu v počátku soustavy souřadnic

2. Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dána velikost strany $a = 3{,}5cm$, velikost strany $c = 5cm$ a úhel $\beta = 120°$. Sestrojenému trojúhelníku opište kružnici *k* a ve vrcholu *C* k ní sestrojte tečnu *t*. Dále sestrojte trojúhelník *A'B'C'* osově souměrný podle tečny *t* jako osy souměrnosti.

3. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky *a*, *b*. Dále je dán bod *C*, který nenáleží žádné z přímek. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky *ABC* tak, aby $A \in a$, $B \in b$

4. Jsou dány dvě různoběžky *p*, *q* a bod *A* mimo ně. Najděte body $B \in q$, $C \in p$ tak, aby obvod trojúhelníku *ABC* byl minimální.

5. Narýsujte konvexní úhel *AVB* a pouze pomocí kružítka sestrojte alespoň jeden další bod přímky, která prochází bodem *B* a je rovnoběžná s přímkou *VA*. Obdobně sestrojte dva body přímky, která je obrazem přímky *VA* v souměrnosti podle bodu *B*.

6. Je dána úsečka *AB* a přímka *o*, která ji protíná v jejím vnitřním bodě *M*. Sestroj na přímce *o* bod *C* tak, aby přímka *o* byla osou úhlu *ACB*.

7. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(K;r_1)$, $k_2(K;r_2)$, $r_1 > r_2$ a bod *S* ležící na menší z nich. Sestrojte rovnoběžník *ABCD* se středem *S*; jehož vrcholy leží na daných kružnicích.

8. Je dán kosodélník *ABCD* s délkami stran $a = 6cm$, $b = 5cm$ a velikostí úhlu $\alpha = 40°$. Do kosodélníku *ABCD* vepište čtverec *EFGH*.

9. Je dán bod *S* ležící uvnitř daného trojúhelníku *ABC*. Sestrojte takovou jeho příčku, která je bodem *S* půlena.

10. Je dána kružnice $k(S;r)$ a úsečka *AB,* kde $|AB| < 2.r$. Sestrojte tětivy *XY* kružnice *k* tak, aby $XY \parallel AB$ a $|XY| = |AB|$.

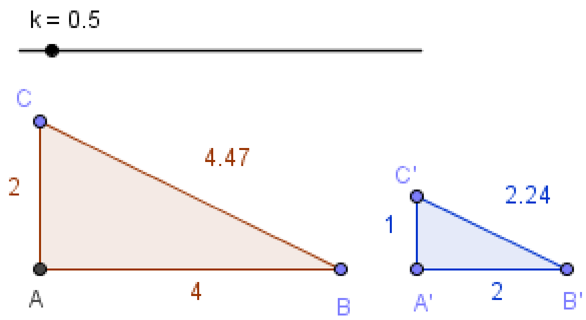
8 PODOBNÁ ZOBRAZENÍ

Každý z Vás určitě při hodinách zeměpisu pracoval s glóbusem. Z hlediska matematiky bychom řekli, že všechny globusy, které jste měli na lavici, byly shodné útvary. V porovnání se skutečnou zeměkoulí mají mnohem menší velikost, a proto se už nejedná o shodnost. Přesto však mezi Zemí a globusem existuje určitý vztah. Tento vztah nazýváme podobnost.

8.1 Podobnost

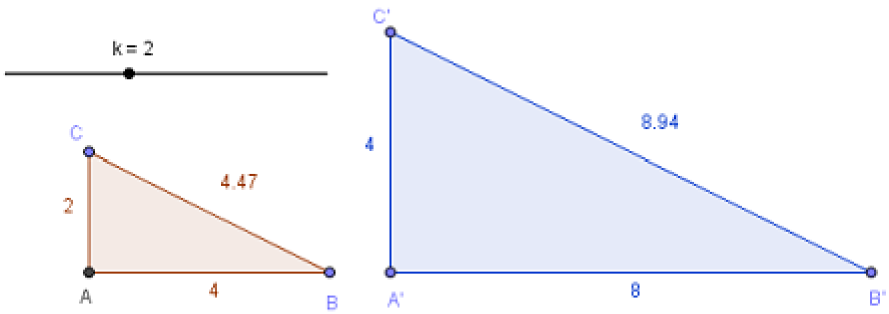
Definice: Geometrické zobrazení v rovině nazýváme podobným zobrazením (**podobností**), jestliže každé dvě uspořádané dvojice vzorů a obrazů jsou ve stejném poměru.

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = k$$



Obrázek 54 - podobnost 0<k<1

Konstanta k je koeficient podobnosti a je vždy větší než nula. Je-li $k > 1$ nazývá se podobnost **zvětšení**, pro $0 < k < 1$ se podobnost nazývá **zmenšení**. Zvláštním případem podobnosti je pro $k = 1$ **shodnost**.



Obrázek 55 - podobnost k>1

Kritéria podobnosti trojúhelníků:

a) Dva trojúhelníky jsou podobné, pokud se rovnají poměry odpovídajících stran.

b) Dva trojúhelníky jsou podobné, pokud se shodují ve dvou úhlech.

c) Dva trojúhelníky jsou podobné, pokud se rovnají poměry délek dvou stran a jsou-li shodné úhly těmito stranami sevřené.

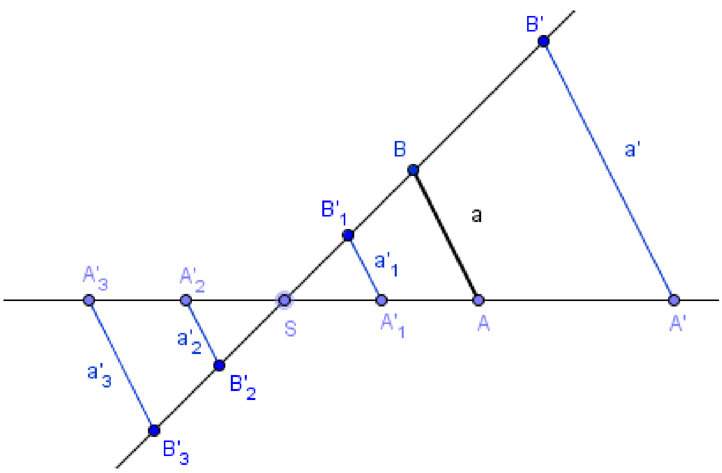
d) Dva trojúhelníky jsou podobné, pokud se rovnají poměry délek dvou stran a rovnají se velikosti úhlů proti větší z nich.

8.2 Stejnolehlost

Geometrické zobrazení v rovině, které je dáno středem S a koeficientem stejnolehlosti κ (kappa) a každému bodu roviny X přiřazuje bod X' takový, že platí $SX' = \kappa \cdot SX$ se nazývá stejnolehlost $H(S;\kappa)$.

Každá stejnolehlost s koeficient stejnolehlosti κ je podobnost s poměrem podobnosti $k = |\kappa|$. Koeficient stejnolehlosti musí být různý od nuly. Pokud je koeficient stejnolehlosti roven 1, jde o identitu a všechny body jsou samodružné. Pokud je koeficient stejnolehlosti roven -1, jedná se o středovou souměrnost.

Je-li absolutní hodnota koeficientu podobnosti **větší** než jedna, jedná se o **zvětšení**. Je-li absolutní hodnota koeficientu podobnosti **menší** než jedna, jedná se o **zmenšení**.

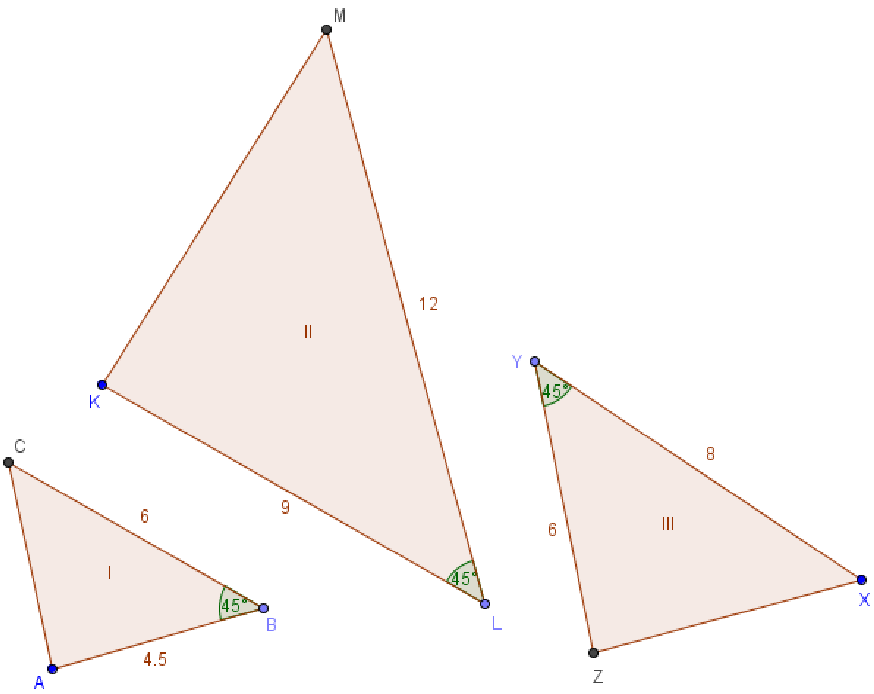


Obrázek 56 - stejnolehlost

Na Obrázek 56 vidíme úsečku AB a její obrazy zobrazené ve stejnolehlosti s různými koeficienty stejnolehlosti. Pro úsečka a' byl použit koeficient stejnolehlosti $\kappa = 2$, pro úsečku $a_1'(\kappa = 0{,}5)$, pro $a_2'(\kappa = -0{,}5)$, pro $a_3'(\kappa = -1)$.

8.3 Příklady

1. Na Obrázek 57 jsou trojúhelníky I, II a III. Zjistěte, které z nich jsou podobné a podle které věty o podobnosti. Podobnost trojúhelníků zapište.



Obrázek 57

2. Strany trojúhelníku ABC mají délku 4cm, 5cm, 7cm. Sestrojte trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC, který má obvod 12cm.

3. Panelový dům na sídlišti vrhá stín dlouhý 18m. Ve stejnou denní dobu vedlejší dům, který je vysoký 4m vrhá stín dlouhý 3m. Jak vysoký je panelový dům?

4. Úsečku KL délky 8,2cm rozdělte v poměru 5:2.

5. Je dána kružnice k o poloměru 1,5cm a bod X ležící ve vzdálenosti 3,5cm od středu kružnice. Sestrojte kružnici k' ve stejnolehlosti s kružnicí k podle bodu X a koeficientem stejnolehlosti $\kappa = -2$

6. Do půlkružnice vepište čtverec, tak aby strana čtverce ležela na průměru.

7. Je dán obdélní s délkami stran $a = 3cm$, $b = 2cm$. Sestrojte jeho obraz ve stejnolehlosti $H(D; \frac{3}{2})$.

8. Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dán úhel $\alpha = 60°$, úhel $\beta = 45°$ a velikost těžnice $t_c = 4cm$.

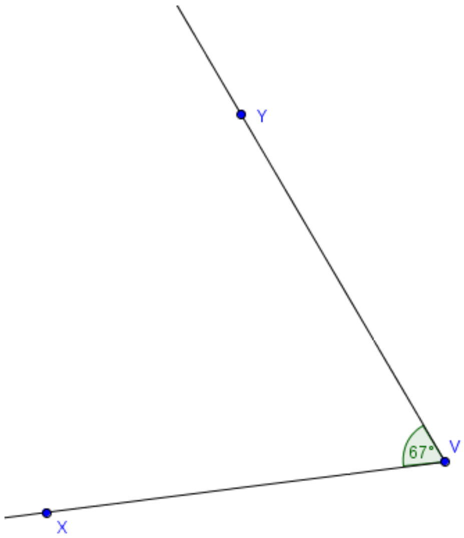
9. Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dána výška $v_a = 5cm$ a strany trojúhelníku jsou v poměru $a : b : c = 2 : 3 : 4$.

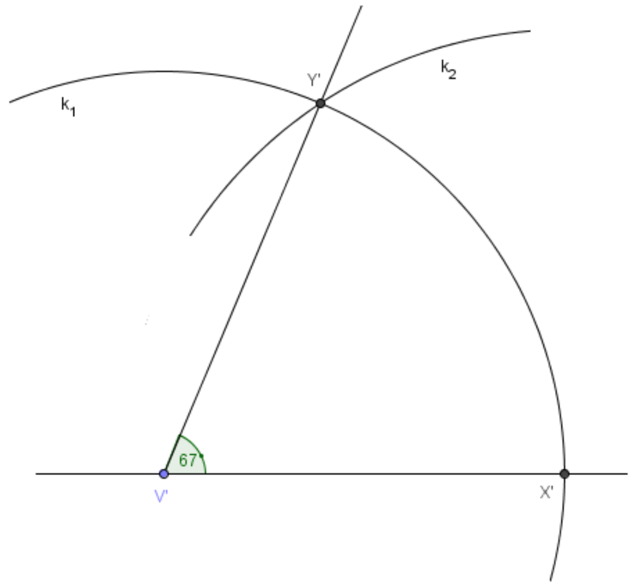
10. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice s různými poloměry. Najděte středy stejnolehlosti.

9 ŘEŠENÍ

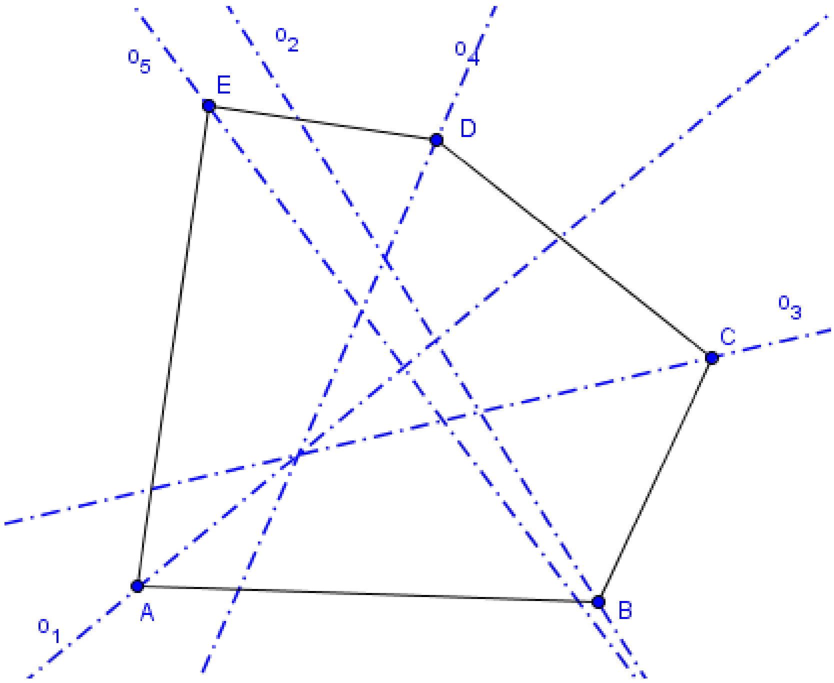
9.1 Úhel

Příklad 1:





Příklad 2:



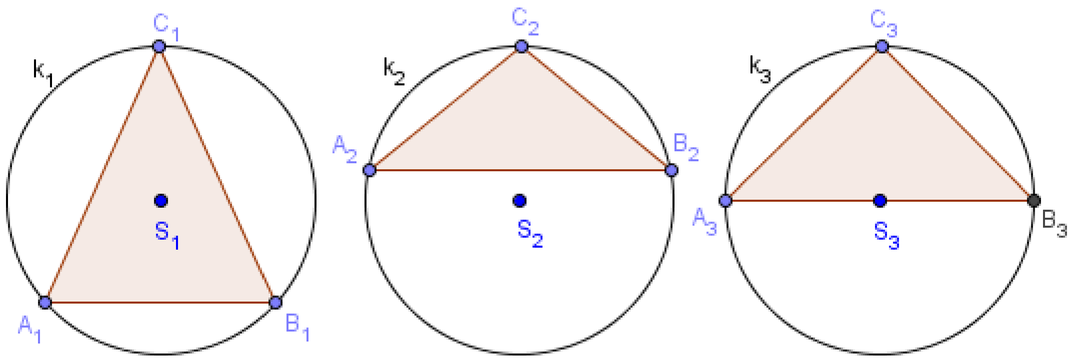
Příklad 3:

Pomocí kolmic sestrojím úhel 90°. Následně pomocí osy úhlu sestrojím jeho polovinu, kterou můžu přičítat nebo odečítat.

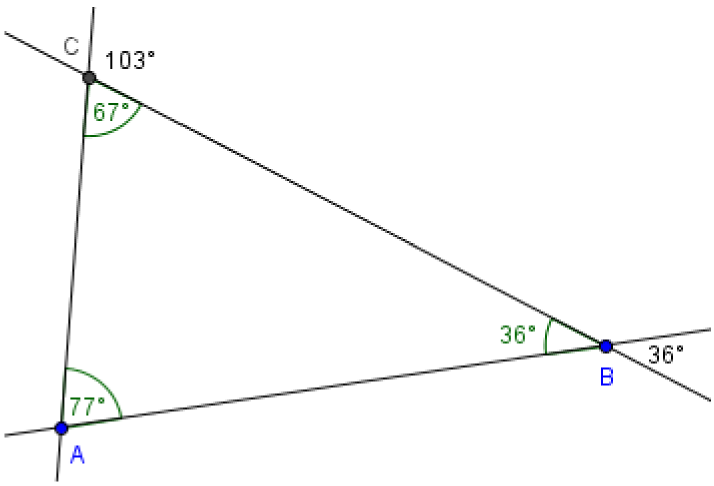
Příklad 4:

Z libovolného bodu *X* ležícího na přímce sestrojíme kružnici o libovolném poloměru. Do vzniklého průsečíku kružnice a přímky zapíchneme kružítko a opíšeme další kružnici o stejném poloměru jako u předchozí kružnice. Spojením původního bodu *X* a nově vniklého průsečíku dvou kružnic, vniklo rameno úhlu, které společně s přímkou svírá úhel o velikosti 60°. Velikosti dalších úhlů tvoříme podobně jako u předchozí úlohy.

Příklad 5:



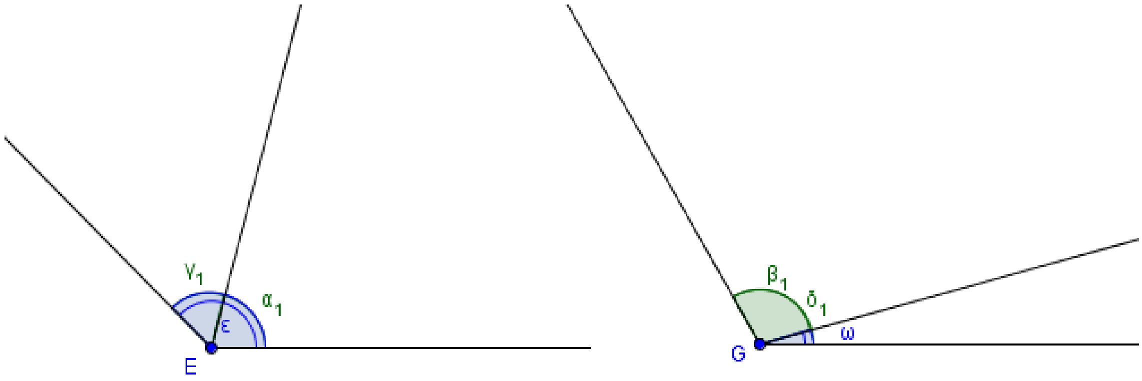
Příklad 6:



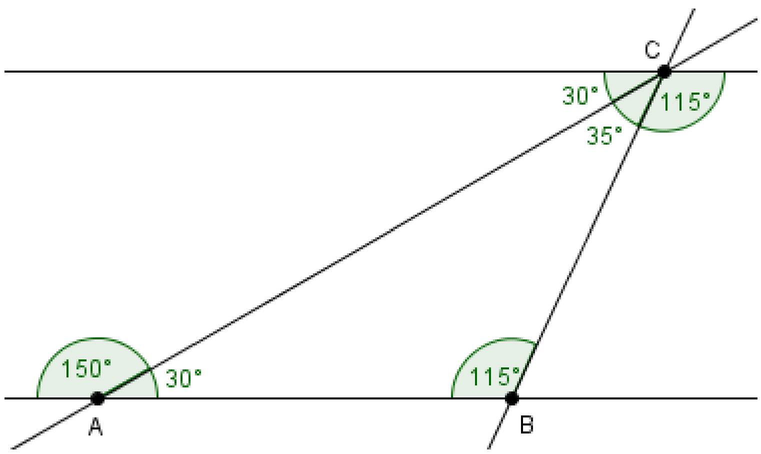
Příklad 7:

a – NE, b – NE, c – ANO, d – NE, e – NE, f – ANO, g – NE, h – ANO, i – ANO, j - NE

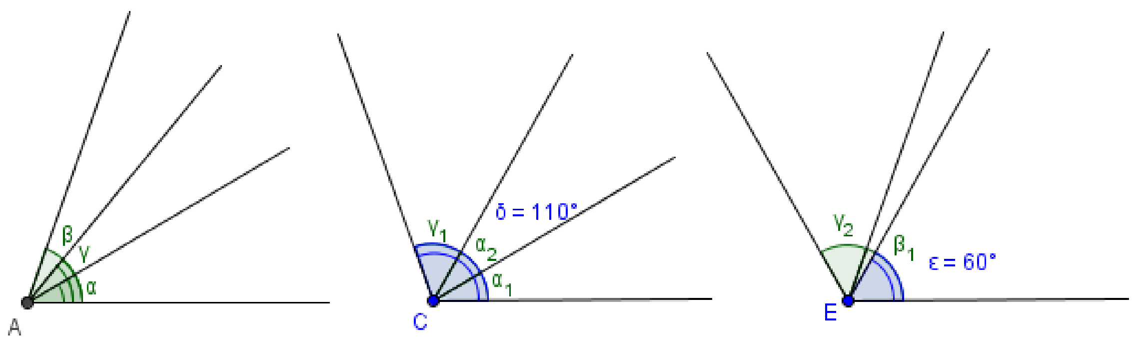
Příklad 8:



Příklad 9:



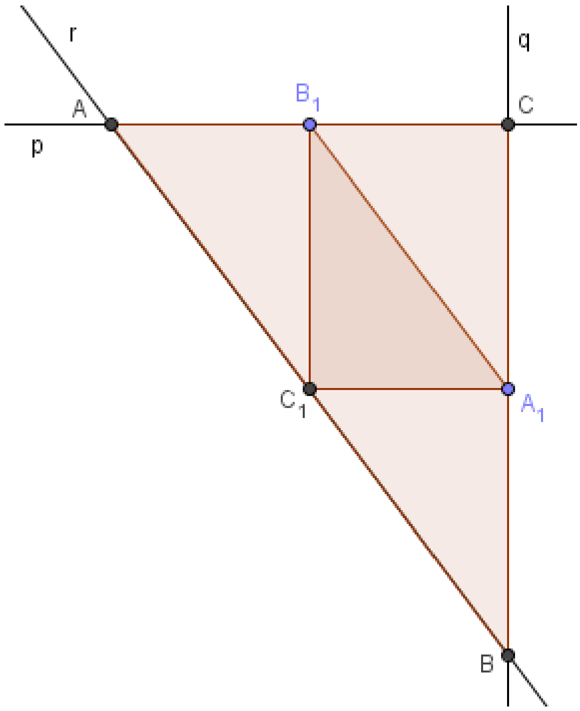
Příklad 10:



9.2 Trojúhelník

Příklad 1:

1. $\Delta A_1B_1C_1$
2. $p; p \parallel A_1C_1 \wedge B_1 \in p$
3. $q; q \parallel B_1C_1 \wedge A_1 \in q$
4. $r; r \parallel A_1B_1 \wedge C_1 \in r$
5. $A; A \in p \cap r$
6. $B; B \in q \cap r$
7. $C; C \in p \cap q$
8. ΔABC



Příklad 2:

1. $AC; |AC| = 6cm$
2. $X; X \in AC \wedge |AX| = |CX|$
3. $o; o \perp AC \wedge X \in o$
4. $k_1; k_1(C;4cm)$

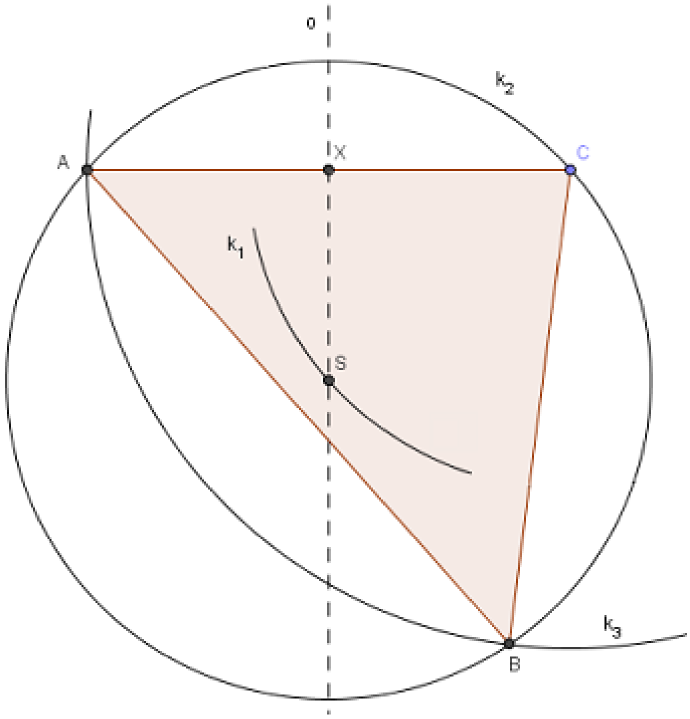
5. $S; S \in k_1 \cap o$

6. $k_2; k_2(S; 4cm)$

7. $k_3; k_3(C; |AC|)$

8. $B; B \in k_2 \cap k_3$

9. ΔABC



Příklad 3:

1. $AB; |AB| = 4{,}8cm$

2. $p; p \parallel AB \wedge |pAB| = 4cm$

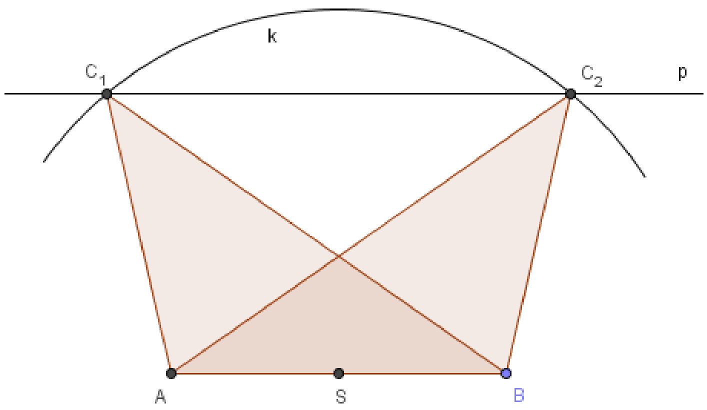
3. $S; S \in AB \wedge |AS| = |BS|$

4. $k; k(S; 5{,}2cm)$

5. $C; C \in k \cap p$

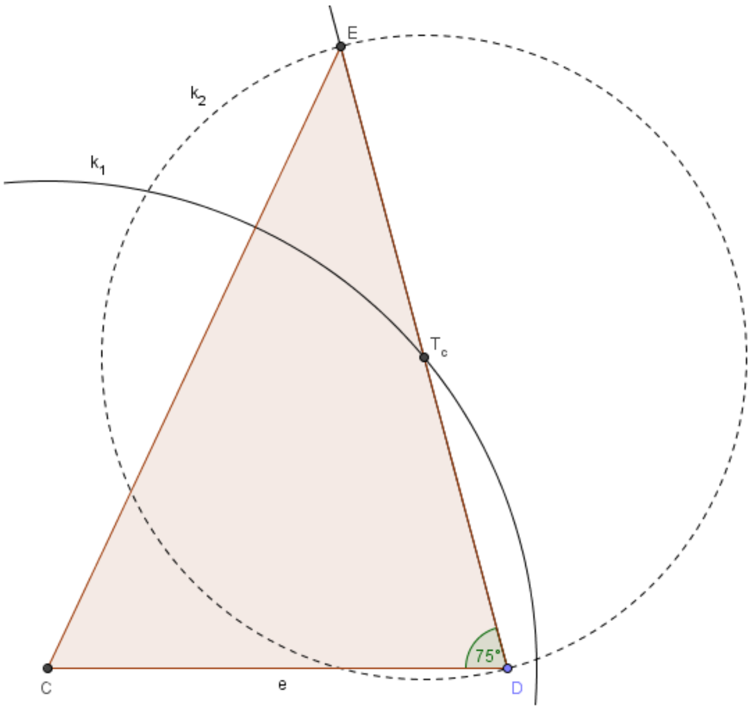
6. ΔABC

7. úloha má dvě řešení



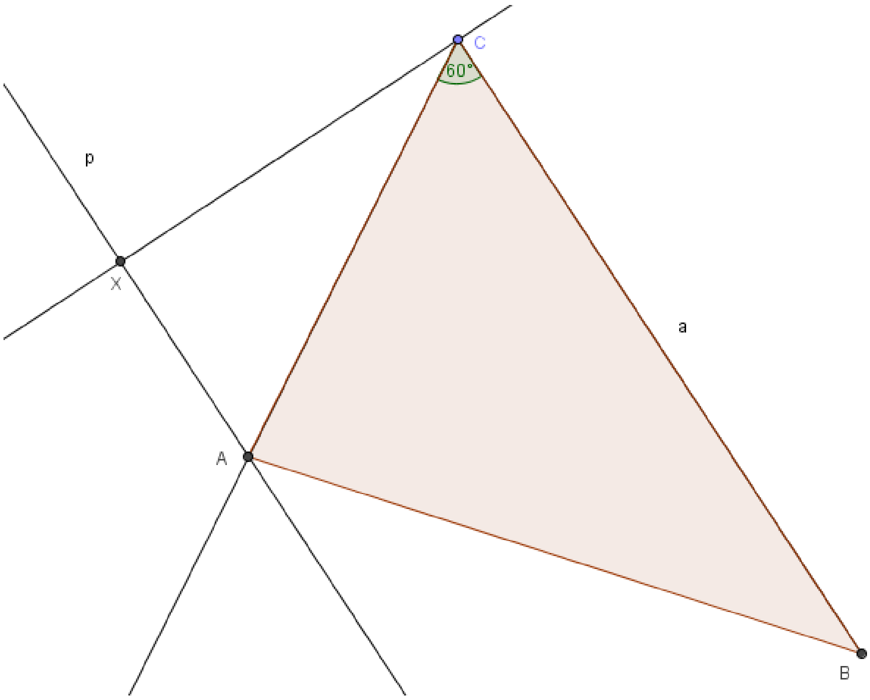
Příklad 4:

1. $CD; |CD| = 8cm$
2. $\angle CDE'; |\angle CDE'| = 75°$
3. $k_1; k_1(C; 8{,}5cm)$
4. $T_c; T_c \in k_1 \cap DE'$
5. $k_2; k_2(T_C; |T_C D|)$
6. $E; E \in k_2 \cap DE'$
7. ΔCDE



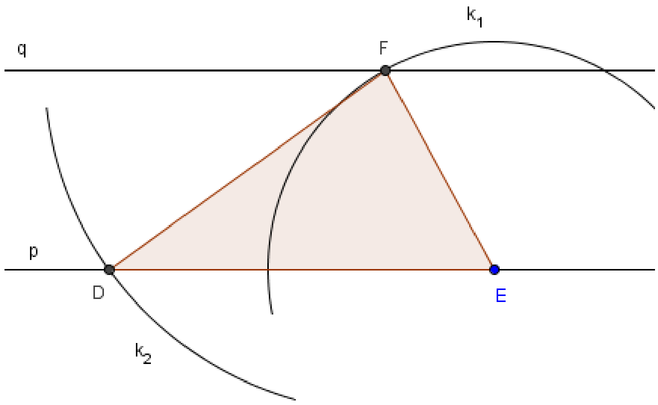
Příklad 5:

1. $BC; |BC| = 10cm$
2. $p; p \parallel BC \wedge |pBC| = 5{,}5cm$
3. $\angle BCA'; |\angle BCA'| = 60°$
4. $A; A \in p \cap CA'$
5. ΔABC



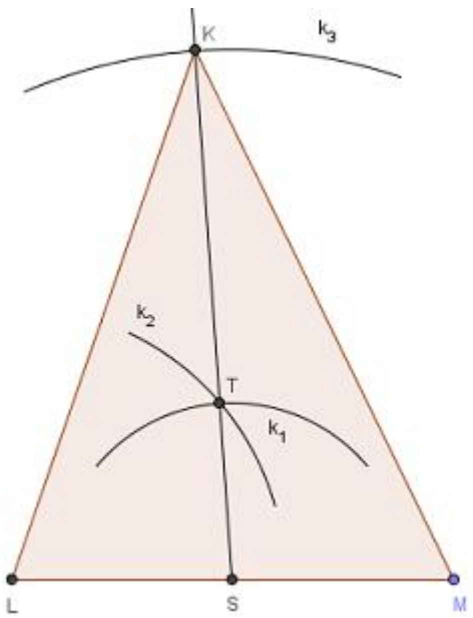
Příklad 6:

1. $\leftrightarrow p$
2. $E; E \in p$
3. $q; q \parallel p \wedge |pq| = 3{,}5cm$
4. $k_1; k_1(E; 4cm)$
5. $F; F \in q \cap k_1$
6. $k_2; k_2(F; 6cm)$
7. $D; D \in p \cap k_2$
8. ΔDEF



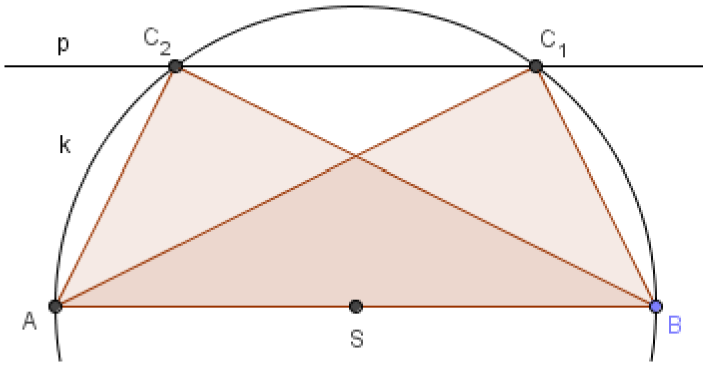
Příklad 7:

1. $LM; |LM| = 5{,}5cm$
2. $S; S \in LM \wedge |LS| = |MS|$
3. $k_1; k_1(S; 2{,}2cm)$
4. $k_2; k_2(L; 3{,}4cm)$
5. $T; T \in k_1 \cap k_2$
6. $k_3; k_3(S; 6{,}6cm)$
7. $K; K \in k_3 \cap ST$
8. ΔKLM



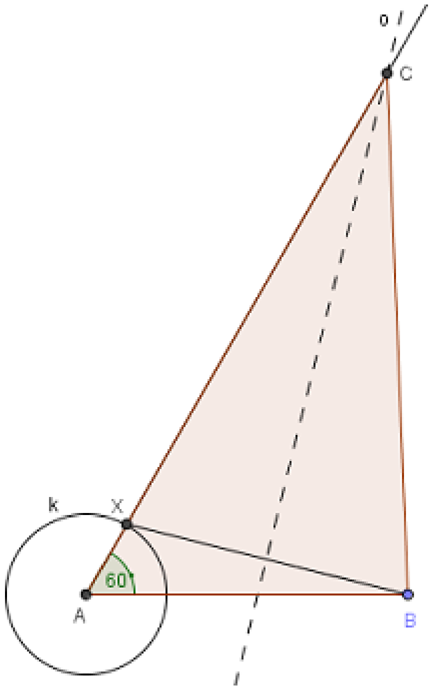
Příklad 8:

1. $AB; |AB| = 2.r$
2. $S; S \in AB \wedge |AS| = |BS|$
3. $k; k(S; 3cm)$
4. $p; p \parallel AB \wedge |pAB| = 2{,}4cm$
5. $C; C \in k \cap p$
6. ΔABC



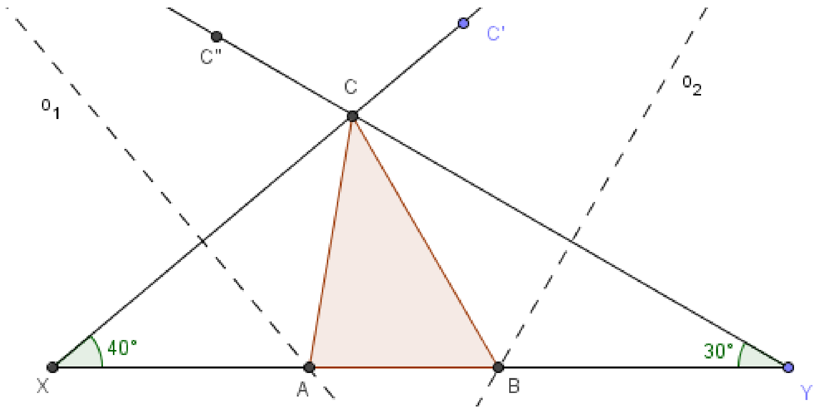
Příklad 9:

1. $AB; |AB| = 4cm$
2. $\angle BAC'; |\angle BAC'| = 60°$
3. $k; k(A; 1cm)$
4. $X; X \in AC' \cap k$
5. $S; S \in XB \wedge |XS| = |BS|$
6. $o; o \perp XB \wedge S \in o$
7. $C; C \in o \cap AC'$
8. ΔABC



Příklad 10:

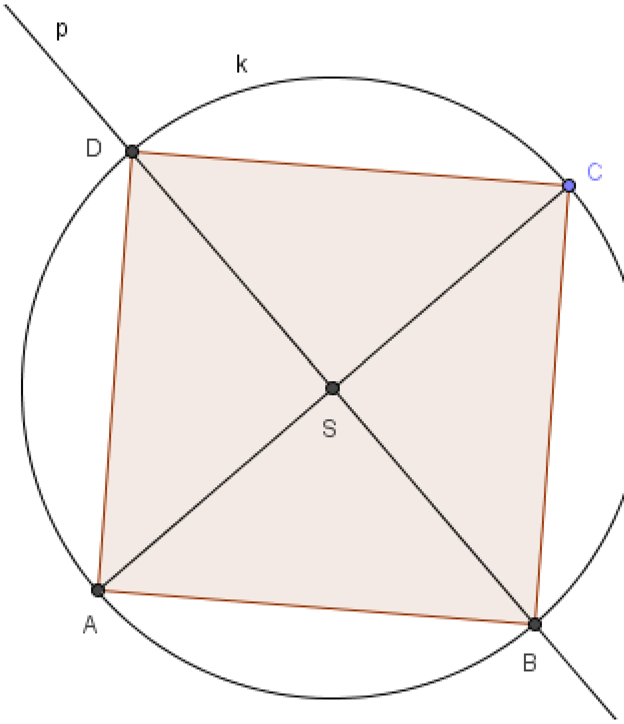
1. $XY; |XY| = 13cm$
2. $\angle YXC'; |\angle YXC'| = 40°$
3. $\angle XYC''; |\angle XYC''| = 30°$
4. $C; C \in XC' \cap YC''$
5. $o_1; o_1 \perp XC \wedge |o_1X| = |o_1C|$
6. $o_2; o_2 \perp YC \wedge |o_2Y| = |o_2C|$
7. $A; A \in o_1 \cap XY$
8. $B; B \in o_2 \cap XY$
9. ΔABC



9.3 Rovnoběžník

Příklad 1:

1. $AC; |AC| = 6{,}2cm$
2. $S; S \in AC \wedge |AS| = |CS|$
3. $p; p \perp AC \wedge S \in p$
4. $k; k(S; |AS|)$
5. $B, D; B, D \in k \cap p$
6. $ABCD$



Příklad 2:

1. $k; k(S; r = 25mm)$
2. $E; E \in k$
3. $G; G \in \leftrightarrow ES \cap k$
4. $a; a \perp ES \wedge E \in a$
5. $f; f \perp ES \wedge S \in f$
6. $c; c \perp ES \wedge G \in c$
7. $F, H; F, H \in k \cap f$

8. $b; b \perp FH \wedge F \in b$

9. $d; d \perp FH \wedge H \in d$

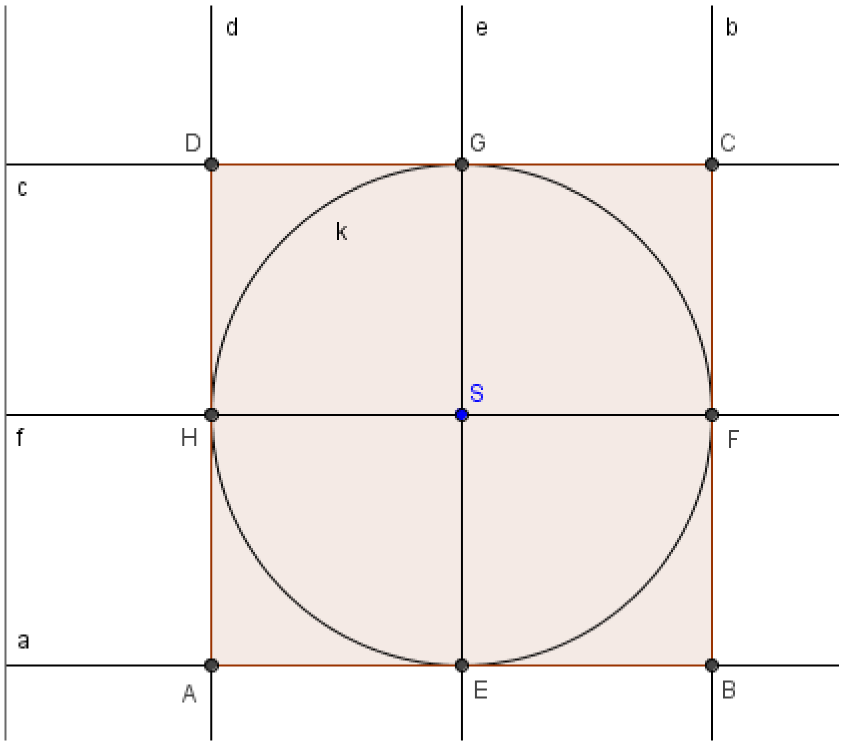
10. $A; A \in a \cap d$

11. $B; B \in a \cap b$

12. $C; C \in b \cap c$

13. $D; D \in c \cap d$

14. $ABCD$



Příklad 3:

1. $DE; |DE| = 67mm$

2. $\angle EDF'; |\angle EDF'| = 28°$

3. $e; e \perp DE \wedge E \in e$

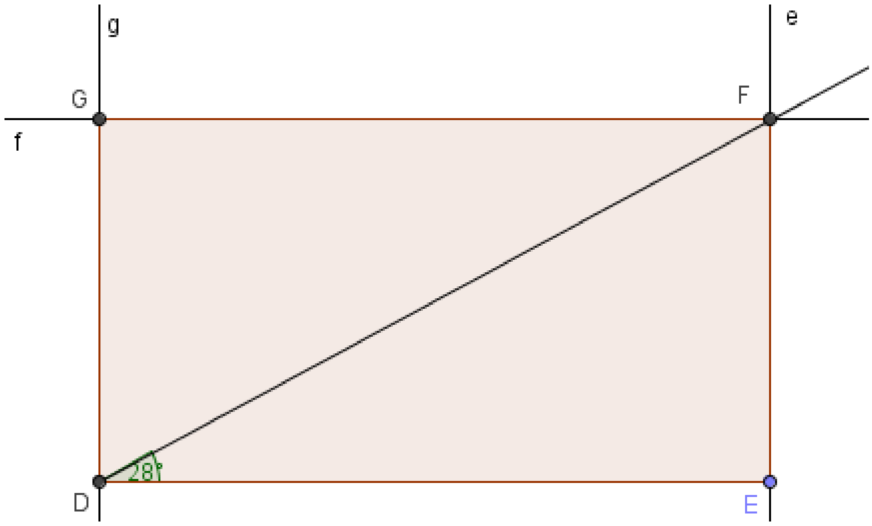
4. $F; F \in e \cap DF'$

5. $f; f \perp e \wedge F \in f$

6. $g; g \perp DE \wedge D \in g$

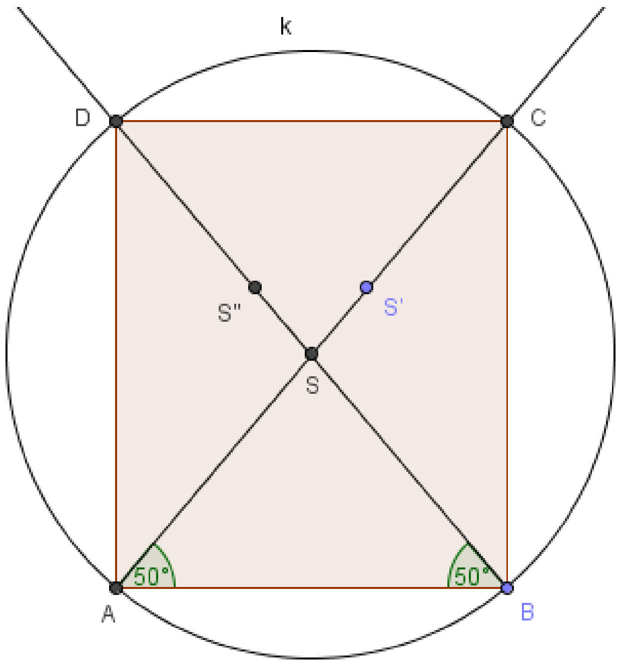
7. $G; G \in f \cap g$

8. $DEFG$



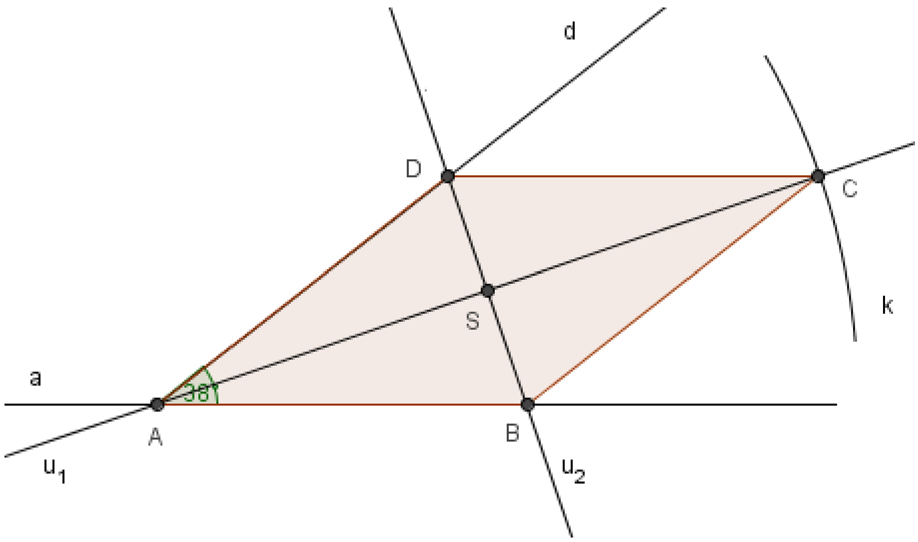
Příklad 4:

1. $AB; |AB| = 4cm$
2. $\angle BAS'; |\angle BAS'| = 50°$
3. $\angle ABS''; |\angle ABS''| = 50°$
4. $S; S \in AS' \cap BS''$
5. $k; k(S, |SA|)$
6. $C; C \in k \cap AS$
7. $D; D \in k \cap BS$
8. $ABCD$



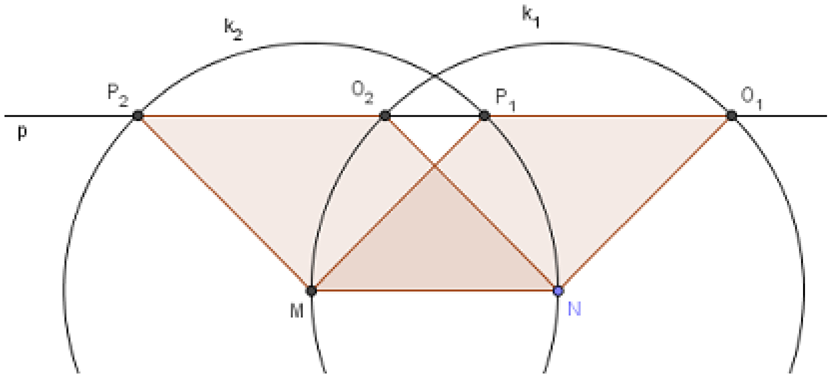
Příklad 5:

1. $A; A \in a$
2. $d; |\angle ad| = 38°$
3. $u_1; |\angle au_1| = |\angle du_1|$
4. $k; k(A, r = 7cm)$
5. $C; C \in k \cap u_1$
6. $S; S \in u_1 \wedge |AS| = |SC|$
7. $u_2; u_2 \perp u_1 \wedge S \in u_2$
8. $B; B \in a \cap u_2$
9. $D; D \in d \cap u_2$
10. $ABCD$



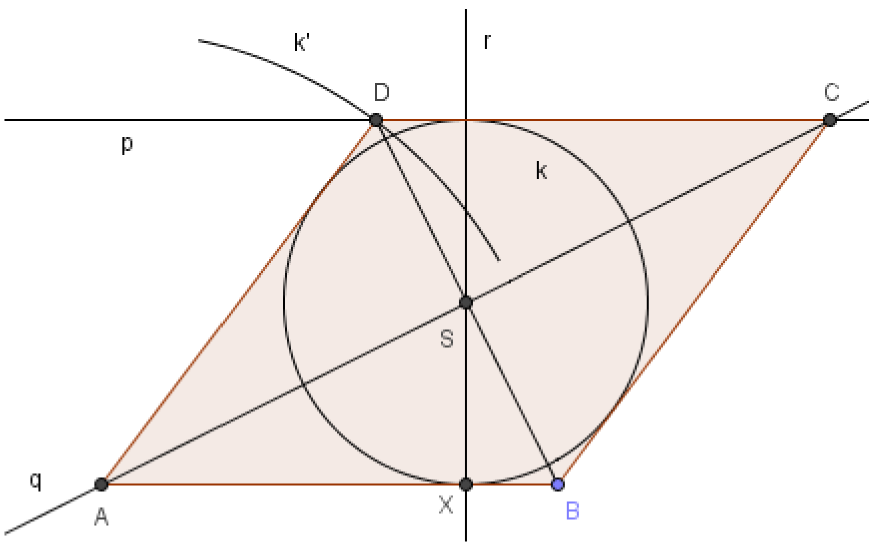
Příklad 6:

1. $MN; |MN| = 45mm$
2. $p; p \parallel MN \wedge |pMN| = 32mm$
3. $k_1; k_1(N, r = 45mm)$
4. $O; O \in k_1 \cap p$
5. $k_2; k_2(M, r = 45mm)$
6. $P; P \in k_2 \cap p$
7. $MNOP$
8. úloha má dvě řešení



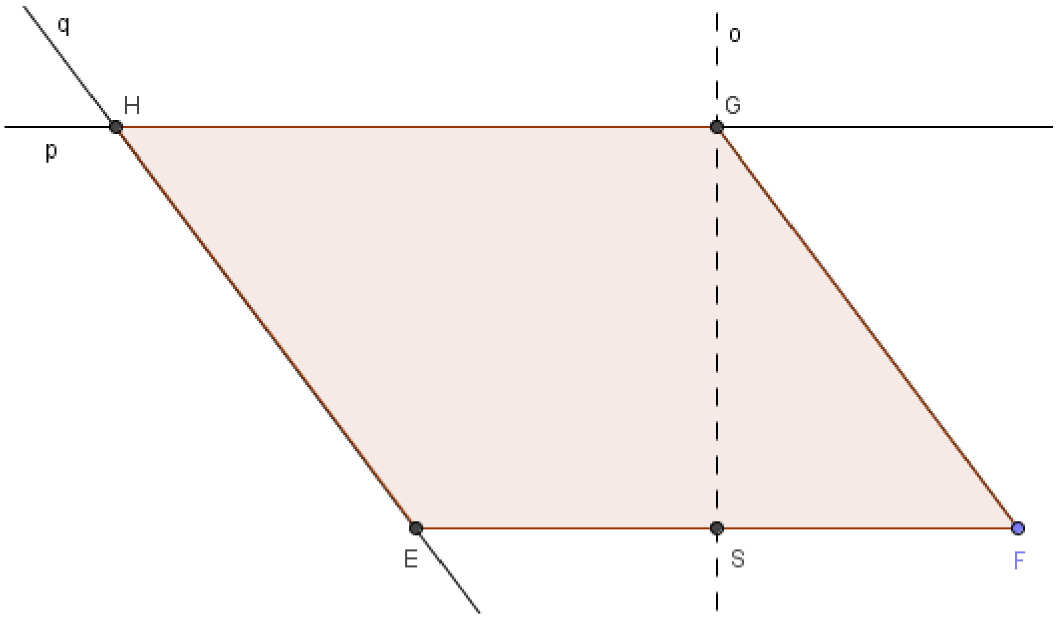
Příklad 7:

1. $AB; |AB| = 5cm$
2. $p; p \parallel AB \wedge |pAB| = 4cm$
3. $k'; k'(A; 5cm)$
4. $D; D \in k' \cap p$
5. $S; S \in BD \wedge |BS| = |DS|$
6. $q; q \perp BD \wedge S \in q$
7. $C; C \in p \cap q$
8. $ABCD$
9. $r; r \perp AB \wedge S \in r$
10. $X; X \in AB \cap r$
11. $k; k(S; |SX|)$



Příklad 8:

1. $EF; |EF| = 6cm$
2. $p; p \parallel EF \wedge |pEF| = 4cm$
3. $S; S \in EF \wedge |SE| = |SF|$
4. $o; o \perp EF \wedge S \in o$
5. $G; G \in o \cap p$
6. $q; q \parallel FG \wedge E \in q$
7. $H; H \in q \cap p$
8. $EFGH$



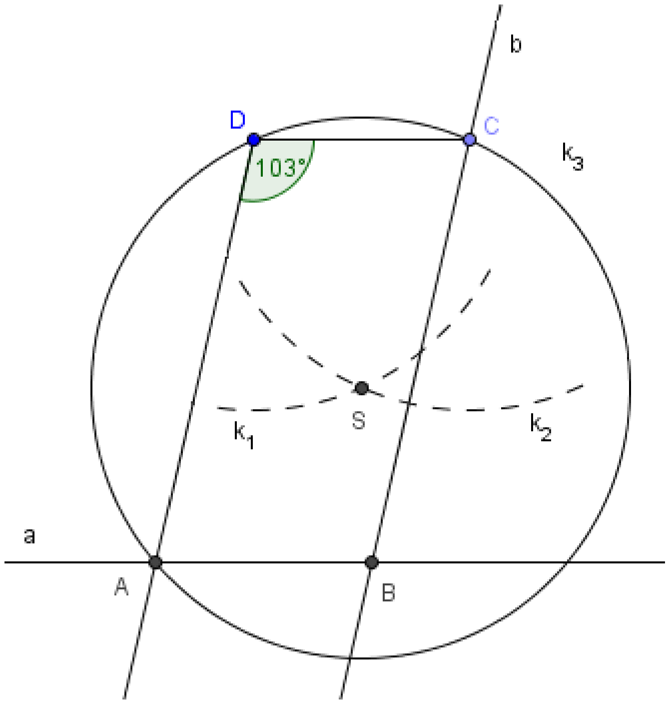
Příklad 9:

1. $CD; |CD| = 2{,}8cm$
2. $\angle CDA'; |\angle CDA'| = 103°$
3. $k_1; k_1(D; r = 3{,}5cm)$
4. $k_2; k_2(C; r = 3{,}5cm)$
5. $S; S \in k_1 \cap k_2$
6. $k_3; k_3(S; r = 3{,}5cm)$
7. $A; A \in k_3 \cap DA'$
8. $a; a \parallel CD \wedge A \in a$

9. $b; b \parallel DA \wedge C \in b$

10. $B; B \in a \cap b$

11. $ABCD$



Příklad 10:

1. $\leftrightarrow AX$

2. $\angle XAX'; |\angle XAX'| = 103°$

3. $p; p \parallel AX \wedge |pAX| = 4{,}5cm$

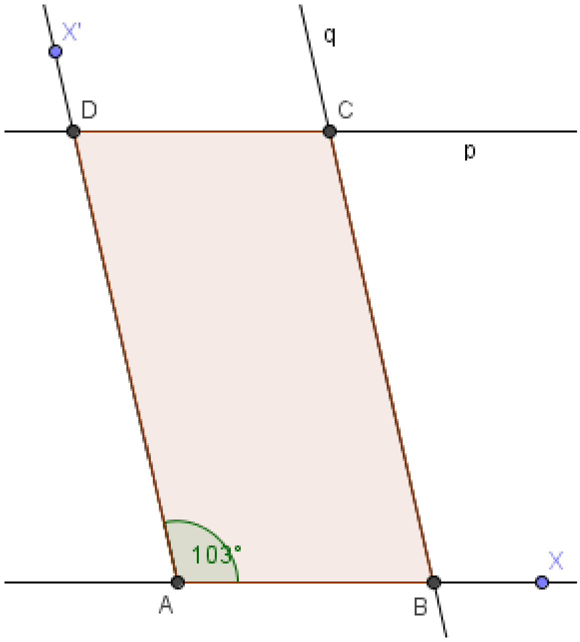
4. $D; D \in p \cap AX'$

5. $q; q \parallel AD \wedge |qAD| = 2{,}5cm$

6. $B; B \in q \cap AX$

7. $C; C \in q \cap p$

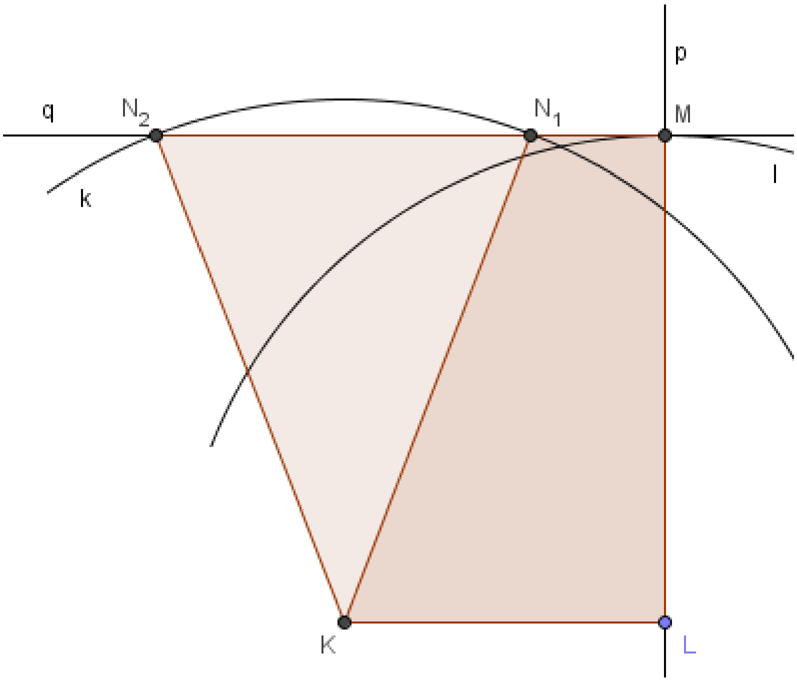
8. $ABCD$


X'
q
D
C
p
103°
X
A
B

9.4 Lichoběžník

Příklad 1:

1. $KL; |KL| = 3{,}7cm$
2. $p; p \perp KL \wedge L \in p$
3. $l; l(L; 5{,}6cm)$
4. $M; M \in p \cap l$
5. $q; q \parallel KL \wedge M \in q$
6. $k; k(K; 6cm)$
7. $N; N \in k \cap q$
8. $KLMN$
9. úloha má dvě řešení



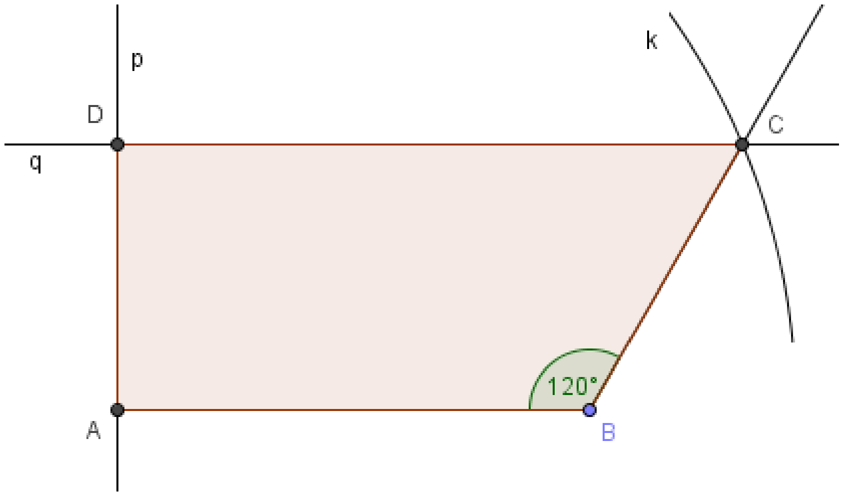
Příklad 2:

1. $AB; |AB| = 5{,}7cm$
2. $\angle ABC'; |\angle ABC'| = 120°$
3. $k; k(A; 8{,}2cm)$
4. $C; C \in k \cap BC'$
5. $p; p \perp AB \wedge A \in p$

6. $q; q \parallel AB \wedge C \in q$

7. $D; D \in p \cap q$

8. $ABCD$



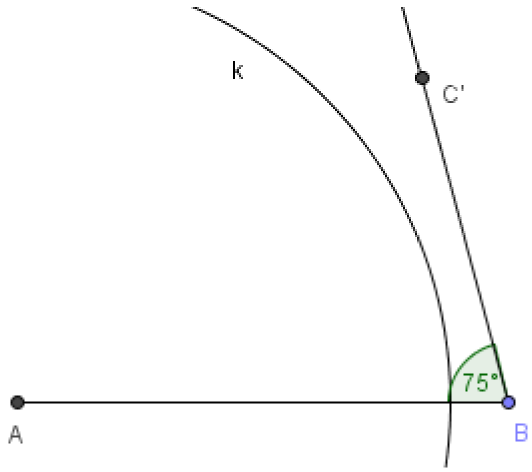
Příklad 3:

1. $AB; |AB| = 6{,}7 cm$

2. $\angle ABC'; |\angle ABC'| = 75°$

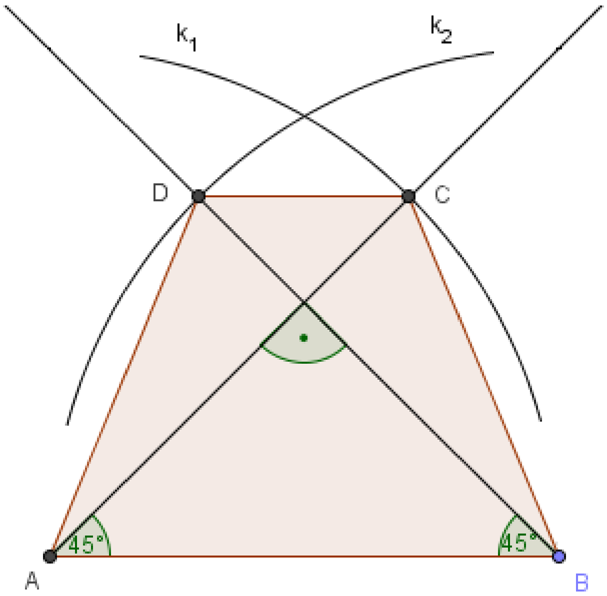
3. $k; k(A; 5{,}9 cm)$

4. úloha nemá řešení



Příklad 4:

1. $KL; |KL| = 6cm$
2. $\angle ABD'; |\angle ABD'| = 45°$
3. $\angle BAC'; |\angle BAC'| = 45°$
4. $k_1; k_1(A;6cm)$
5. $k_2; k_2(B;6cm)$
6. $C; C \in k_1 \cap AC'$
7. $D; D \in k_2 \cap BD'$
8. $ABCD$



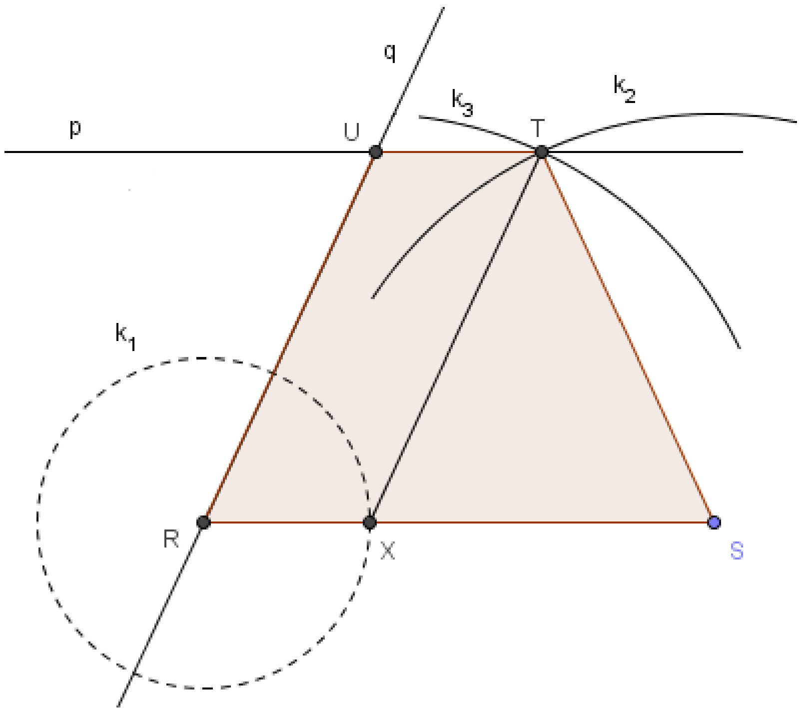
Příklad 5:

1. $RS; |RS| = 80mm$
2. $k_1; k_1(R;2,6cm)$
3. $X; X \in k_1 \cap RS$
4. $k_2; k_2(X;6,4cm)$
5. $k_3; k_3(S;6,4cm)$
6. $T; T \in k_2 \cap k_3$
7. $p; p \parallel RS \wedge T \in p$

8. $q; q \parallel XT \wedge R \in q$

9. $U; U \in p \cap q$

10. $RSTU$



Příklad 6:

1. $AB; |AB| = 7{,}6cm$

2. $\angle ABC'; |ABC'| = 60°$

3. $k; k(B; 3{,}8cm)$

4. $X; X \in k \cap AB$

5. $\angle BAD'; |\angle BAD'| = 60°$

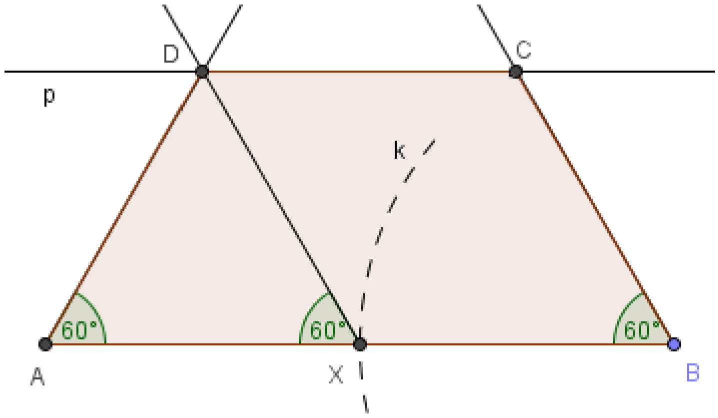
6. $\angle AXD''; |\angle AXD''| = 60°$

7. $D; D \in AD' \cap XD''$

8. $p; p \parallel AB \wedge D \in p$

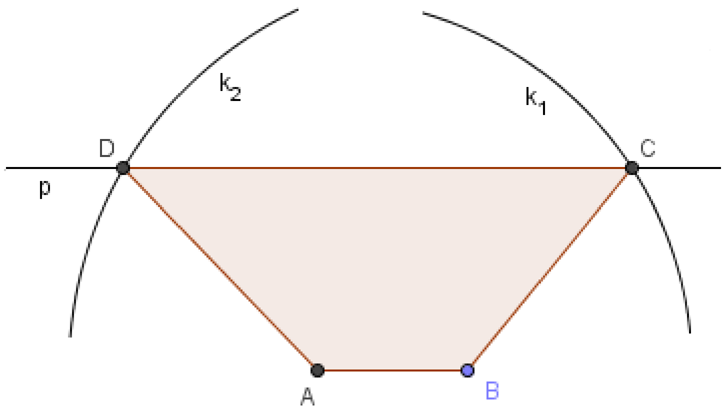
9. $C; C \in p \cap BC'$

10. $ABCD$



Příklad 7:

1. $AB; |AB| = 2{,}3cm$
2. $p; p \parallel AB \wedge |pAB| = 31mm$
3. $k_1; k_1(A; 5{,}7cm)$
4. $C; C \in k_1 \cap p$
5. $k_2; k_2(B; 6{,}1cm)$
6. $D; D \in k_2 \cap p$
7. $ABCD$



Příklad 8:

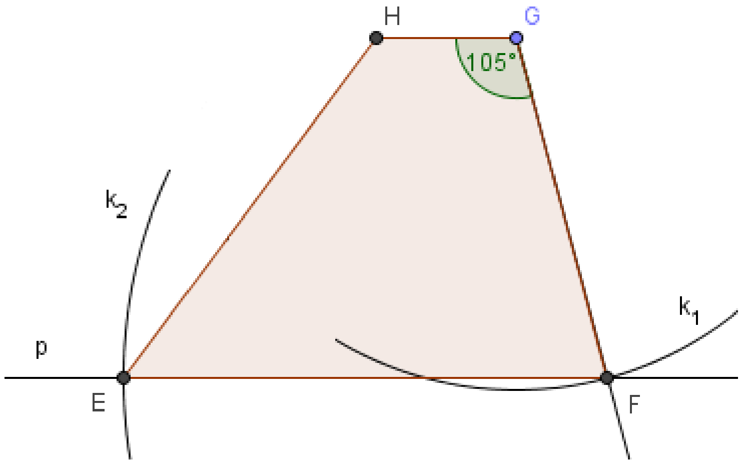
1. $GH; |GH| = 2cm$
2. $\angle HGF'; |HGF'| = 105°$
3. $k_1; k_1(G; 5cm)$
4. $F; F \in k_1 \cap GF'$

5. $p; p \parallel GH \wedge F \in p$

6. $k_2; k_2(F; 6{,}9cm)$

7. $E; E \in p \cap k_2$

8. $EFGH$



Příklad 9:

1. AB

2. $k_1; k_1(B; |CD|)$

3. $X; X \in k_1 \cap AB$

4. $k_2; k_2(X; |BC|)$

5. $k_3; k_3(A; |AD|)$

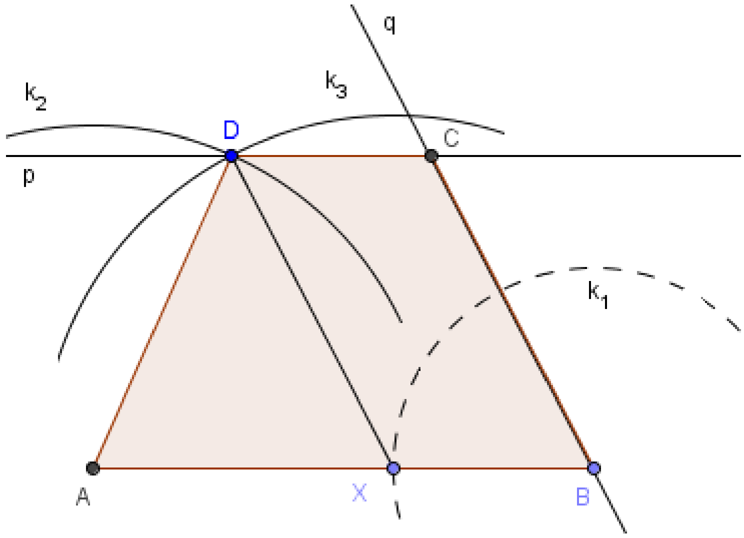
6. $D; D \in k_2 \cap k_3$

7. $p; p \parallel AB \wedge D \in p$

8. $q; q \parallel XD \wedge B \in q$

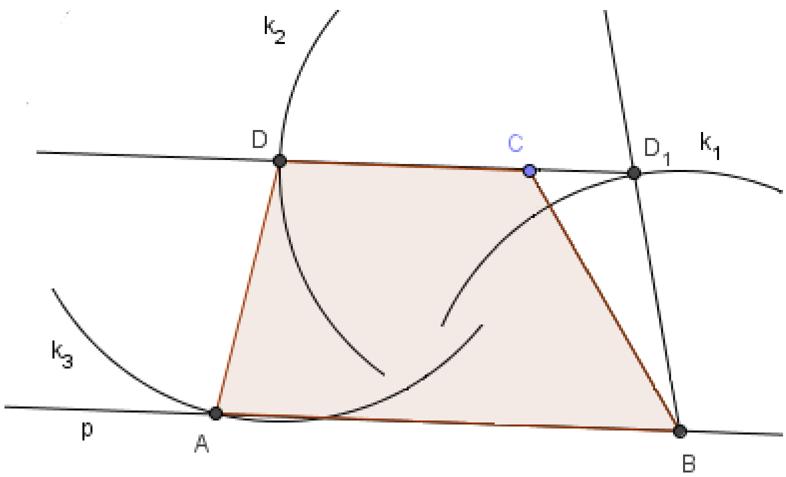
9. $C; C \in p \cap q$

10. $ABCD$



Příklad 10:

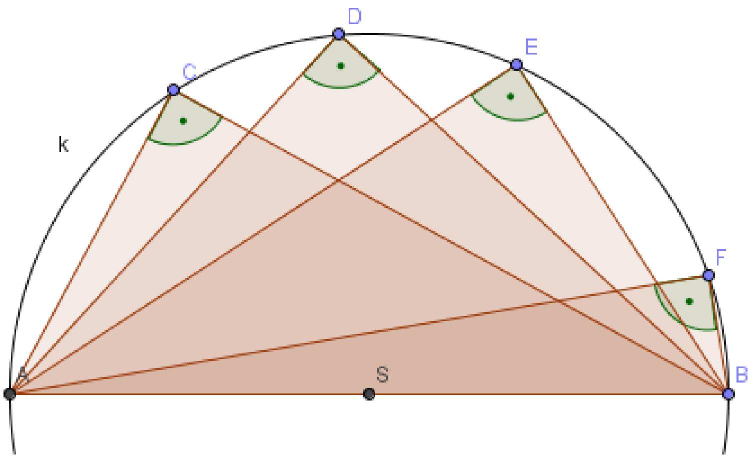
1. $BC; |BC| = 3cm$
2. $\angle CBD'; |CBD'| = 20°$
3. $k_1; k_1(B;2{,}6cm)$
4. $D_1; D_1 \in k_1 \cap BD'$
5. $k_2; k_2(C;2{,}5cm)$
6. $D; D \in k_2 \cap \rightarrow D_1C;$
7. $k_3; k_3(D;2{,}6cm)$
8. $p; p \parallel CD \wedge B \in p$
9. $A; A \in p \cap k_3$
10. $ABCD$



9.5 Kružnice

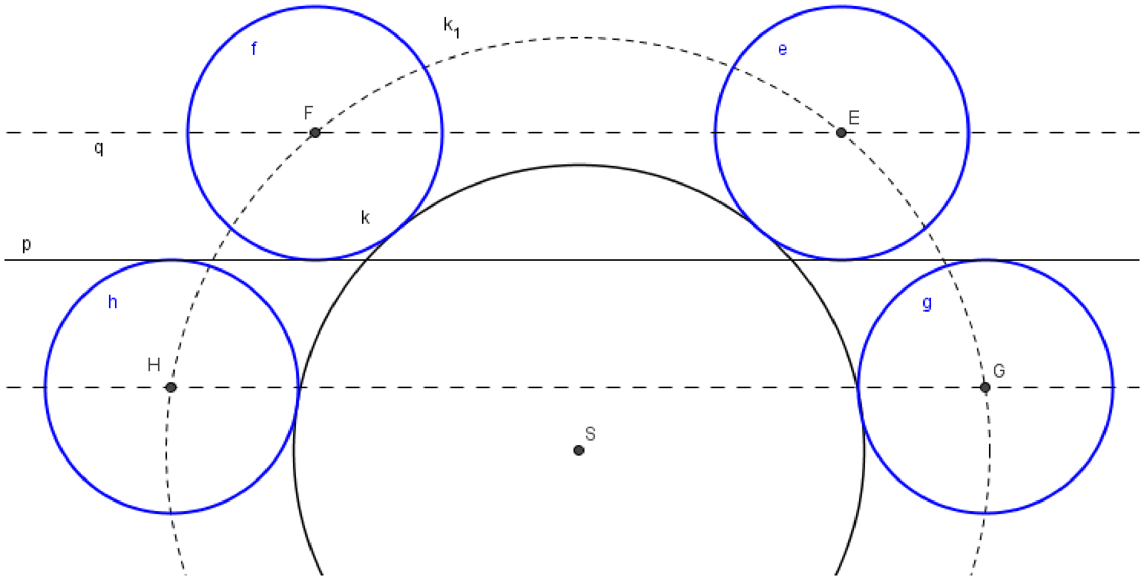
Příklad 1:

1. $AB; |AB| = 8cm$
2. $S; S \in AB \wedge |AS| = |BS|$
3. $k; k(S; |AS|)$
4. $C; C \in k \cap p$
5. ΔABC



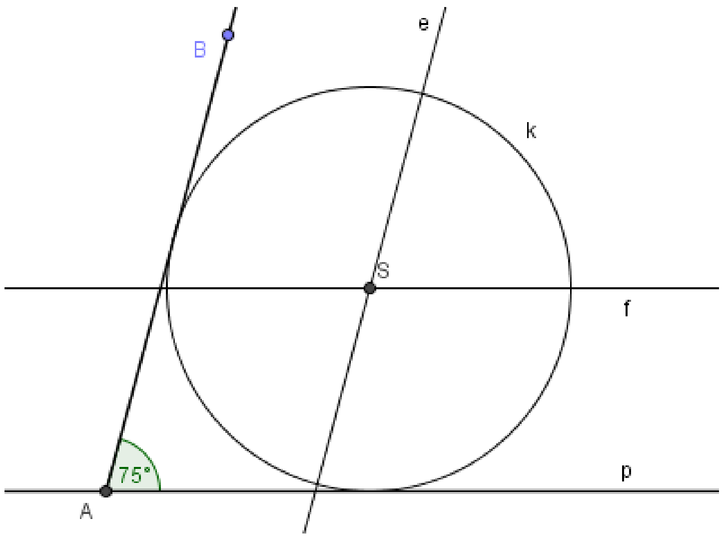
Příklad 2:

1. $q; q \parallel p \wedge |pq| = 2cm$
2. $k_1; k_1(S; 6{,}5cm)$
3. $E; E \in k_1 \cap q$
4. $e; e(E; 2cm)$
5. Úloha má 4 řešení



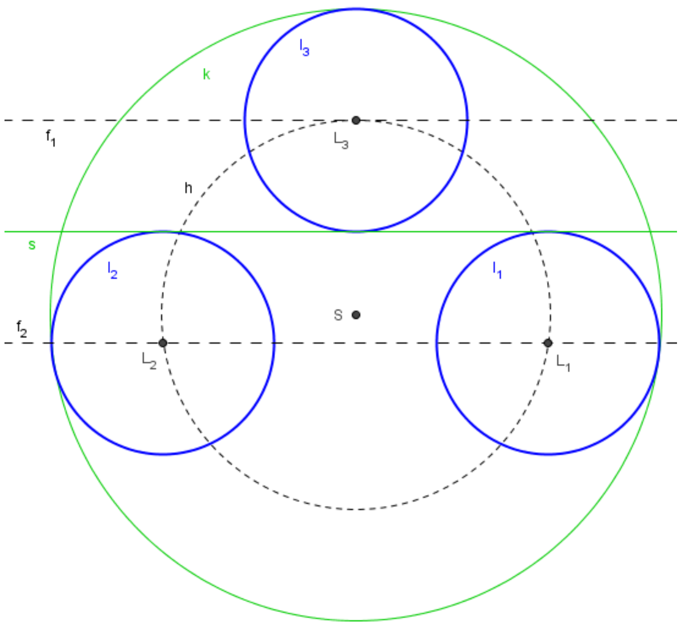
Příklad 3:

1. $A; A \in p$
2. $\angle pAB; \angle |pAB| = 75°$
3. $e; e \parallel p \wedge |eq| = 2cm$
4. $f; f \parallel AB \wedge |fAB| = 2cm$
5. $S; S \in e \cap f$
6. $k; k(S; 2cm)$
7. Úloha má 2 řešení



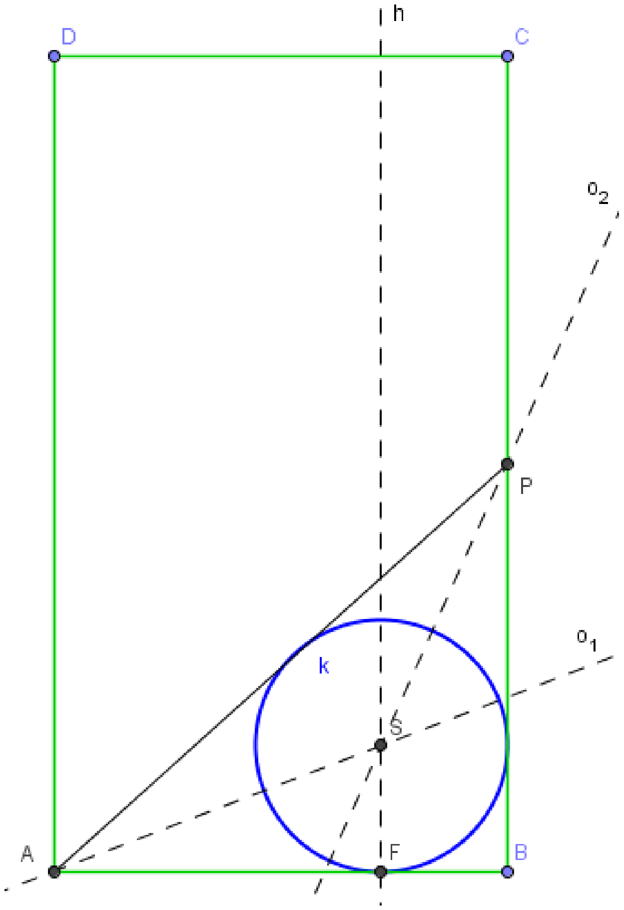
Příklad 4:

1. $k; k(S; 5{,}5cm)$
2. $s; |sS| = 1{,}5cm$
3. $h; h(S; 3{,}5cm)$
4. $f; f \parallel s \wedge |fs| = 2cm$
5. $L_1; L_1 \in h \cap f$
6. $l_1; l_1(L_1; 2cm)$
7. Úloha má 3 řešení



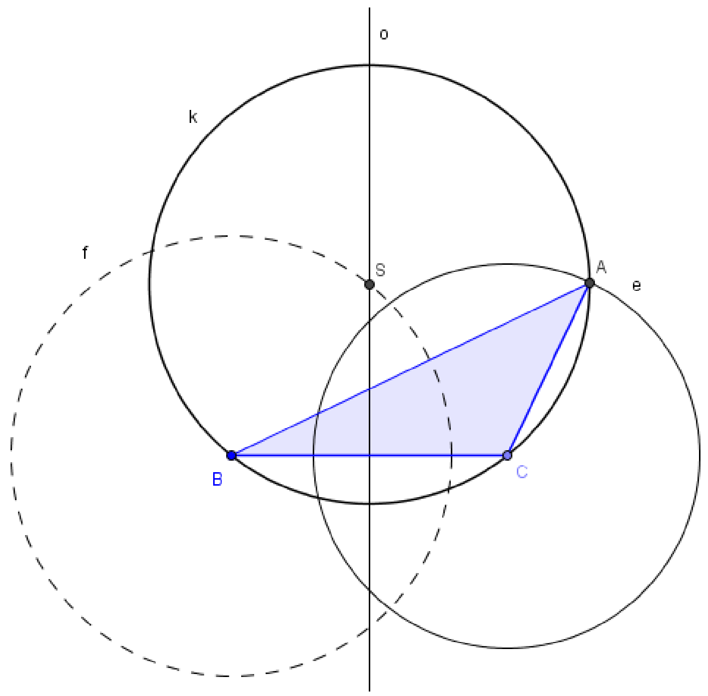
Příklad 5:

1. $ABCD$
2. $P; P \in BC \wedge |BP| = |CP|$
3. $o_1; o_1$ osa $\angle BAP$
4. $o_2; o_2$ osa $\angle APB$
5. $S; S \in o_1 \cap o_2$
6. $h; h \parallel BP \wedge S \in h$
7. $F; F \in h \cap AB$
8. $k; k(S; |SF|)$



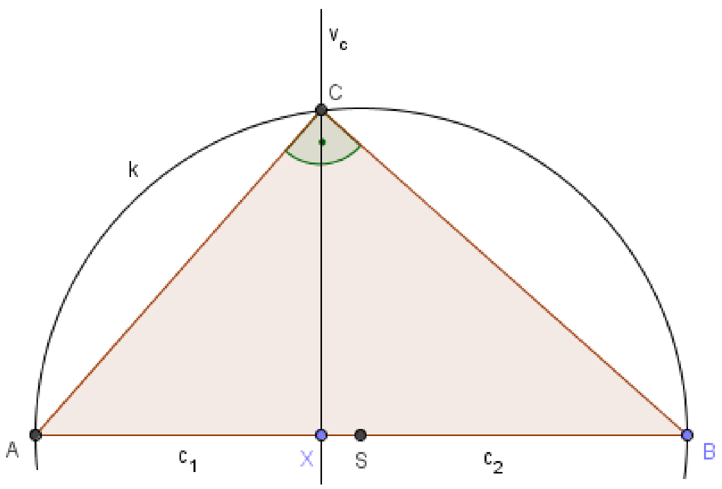
Příklad 6:

1. $BC; |BC| = 5cm$
2. $o; o \perp BC \wedge |Bo| = |Co|$
3. $f; f(B; 4cm)$
4. $S; S \in f \cap o$
5. $k; k(S; 4cm)$
6. $e; e(C; 3{,}5cm)$
7. $A; A \in k \cap e$
8. ΔABC



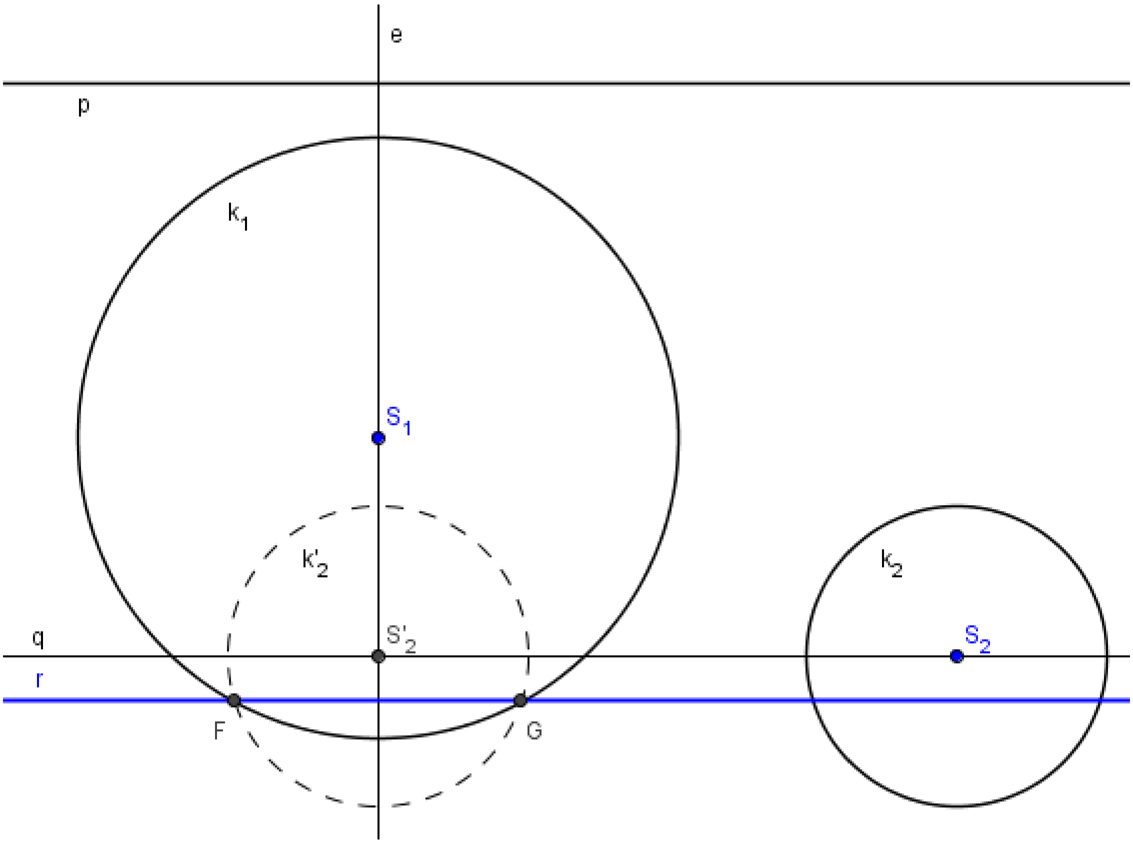
Příklad 7:

1. $AB;|AB| = 7{,}3cm$
2. $X; X \in AB \wedge |XA| = 3{,}2cm$
3. $v_c; v_c \perp AB \wedge X \in v_c$
4. $S; S \in AB \wedge |SA| = |SB|$
5. $k; k(S;|AS|)$
6. $C; C \in k \cap v_c$
7. ΔABC



Příklad 8:

1. $q; q \parallel p \wedge S_2 \in q$
2. $e; e \perp q \wedge S_1 \in e$
3. $S_2'; S_2' \in q \cap e$
4. $k_2'; k_2'(S_2'; |r_2|)$
5. $F, G; F, G \in k_1 \cap k_2'$
6. $r; r \ni FG$



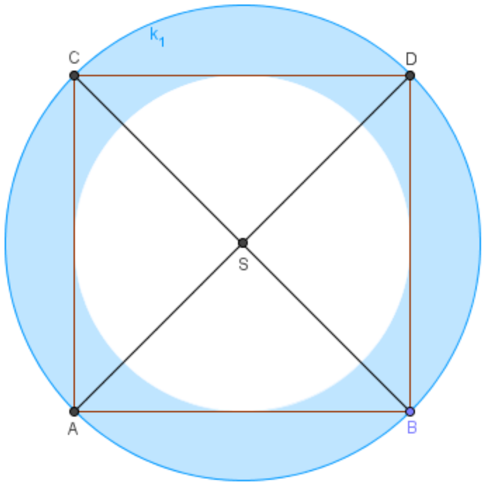
Příklad 9:

$$2.r_1^2 = a^2 + a^2$$
$$2r_1^2 = 200$$
$$2r_1 = 14{,}14$$
$$r_1 = 7{,}07cm$$

$$S_1 = \pi.r_1^2$$
$$S_1 = 3{,}14.50$$
$$S_1 = 157{,}08cm^2$$

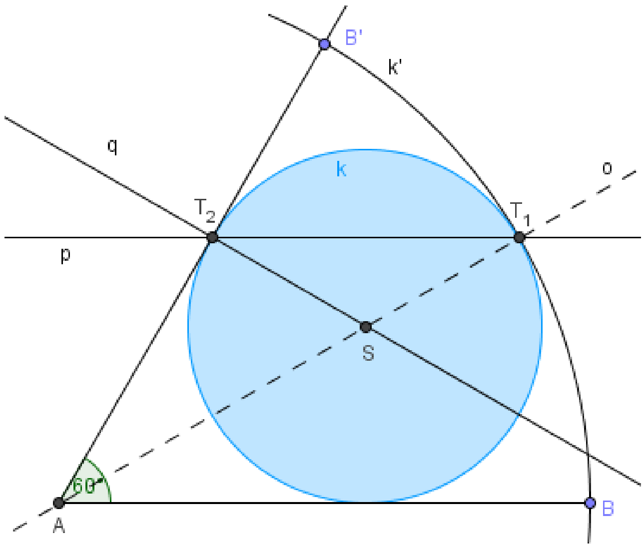
$$S_2 = \pi.r_2^2$$
$$S_2 = 3{,}14.25$$
$$S_2 = 78{,}54cm^2$$

$$S = S_1 - S_2$$
$$S = 157{,}08 - 78{,}54$$
$$S = 78{,}54cm^2$$



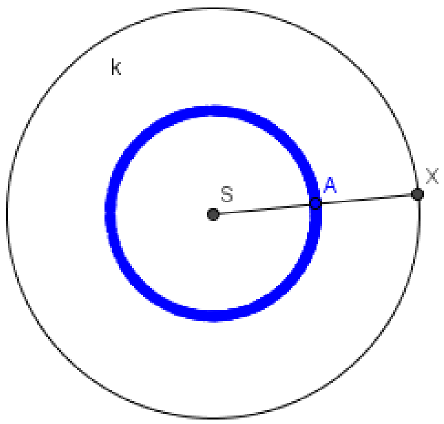
Příklad 10:

1. $AB; |AB| = 4cm$
2. $\angle BAB'; |\angle BAB'| = 60°$
3. $k'; k'(A; |AB|)$
4. $o; o$ osa $\angle BAB'$
5. $T_1; T_1 \in o \cap k'$
6. $p; p \parallel AB \wedge T_1 \in p$
7. $T_2; T_2 \in p \cap AB'$
8. $q; q \perp AB' \wedge T_2 \in q$
9. $S; S \in q \cap o$
10. $k; k(S; |ST_1|)$

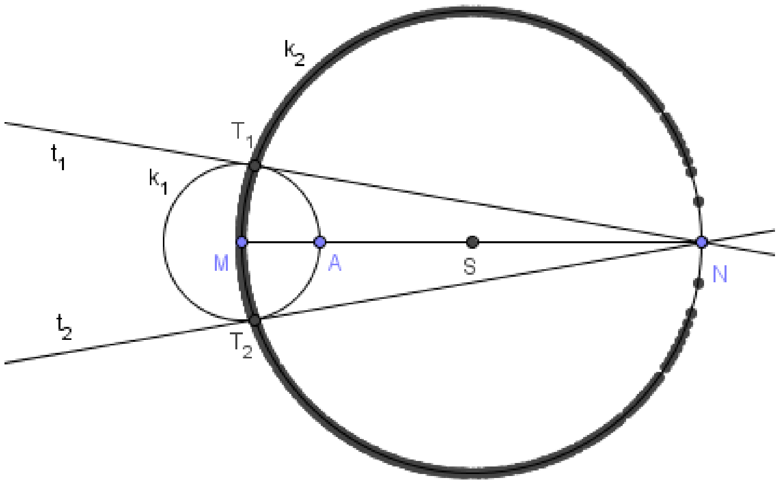


9.6 Množiny bodů dané vlastnosti

Příklad 1:

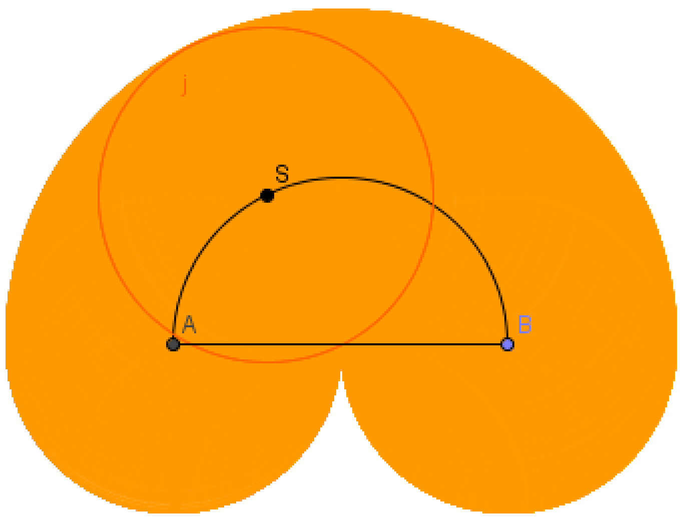


Příklad 2:

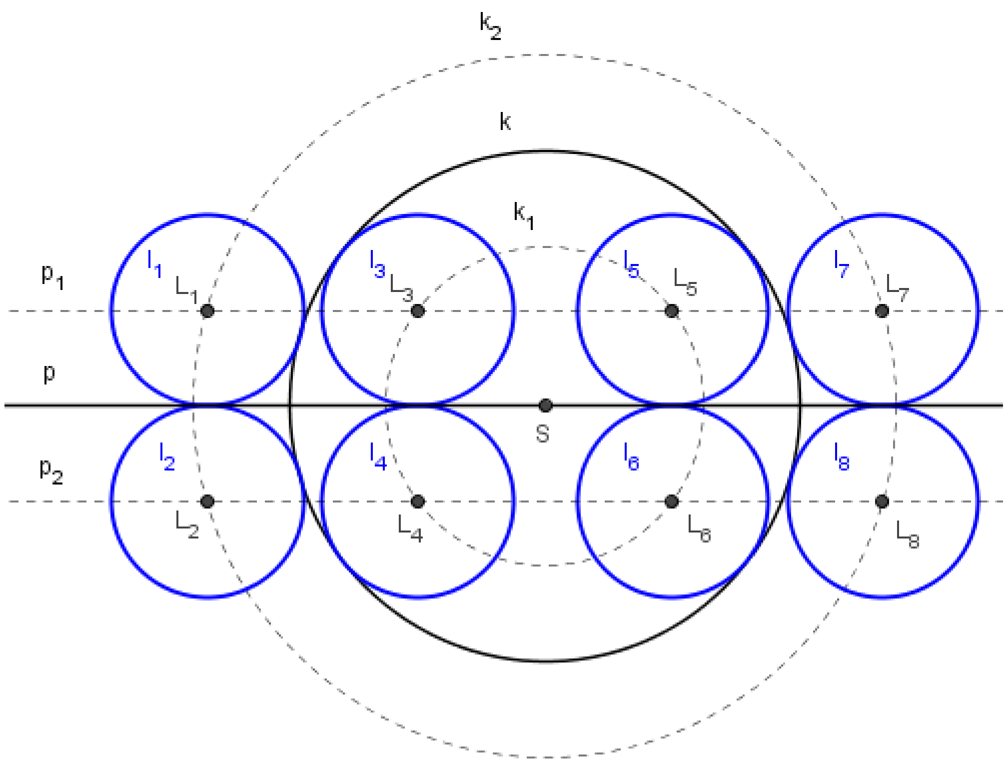


Příklad 3:

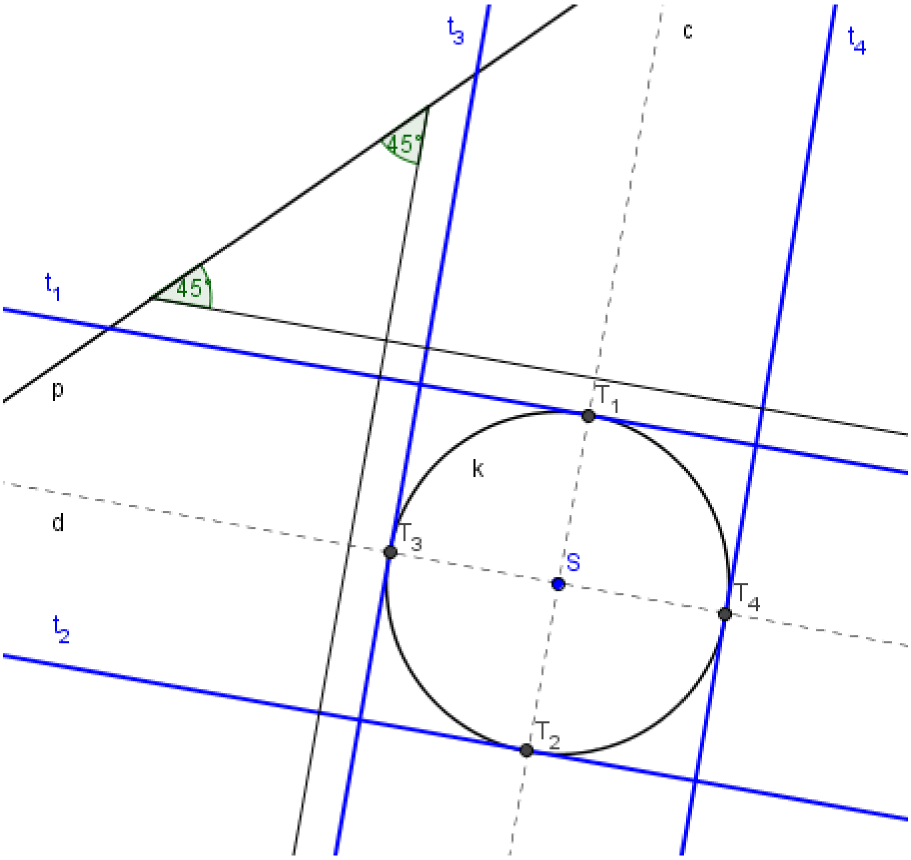
Příklad 4:



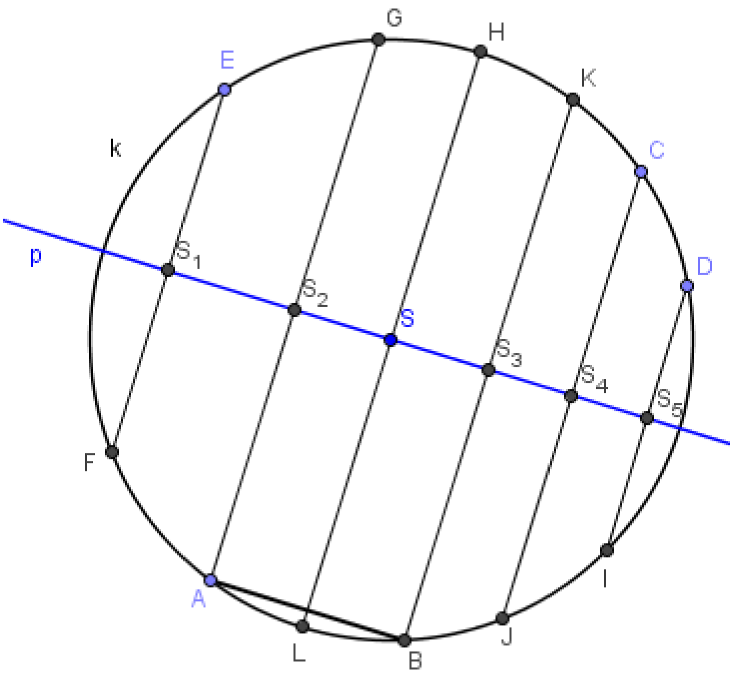
Příklad 5:



Příklad 6:

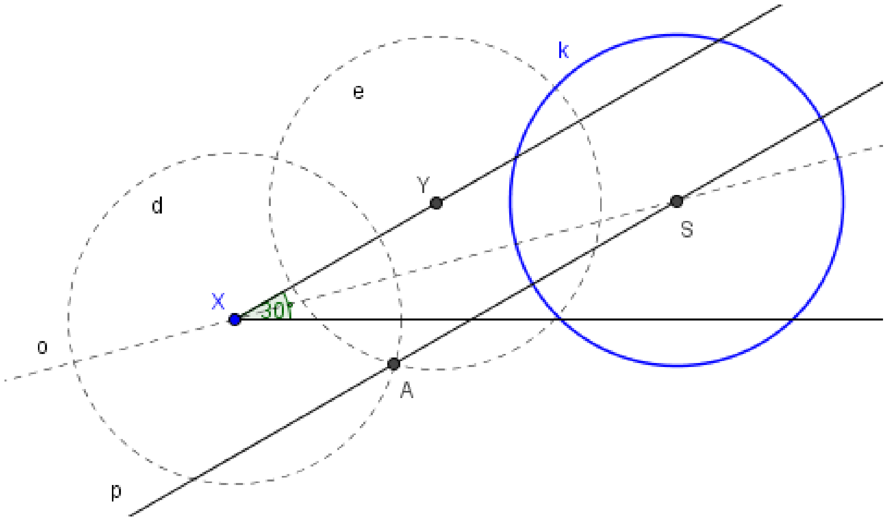


Příklad 7:



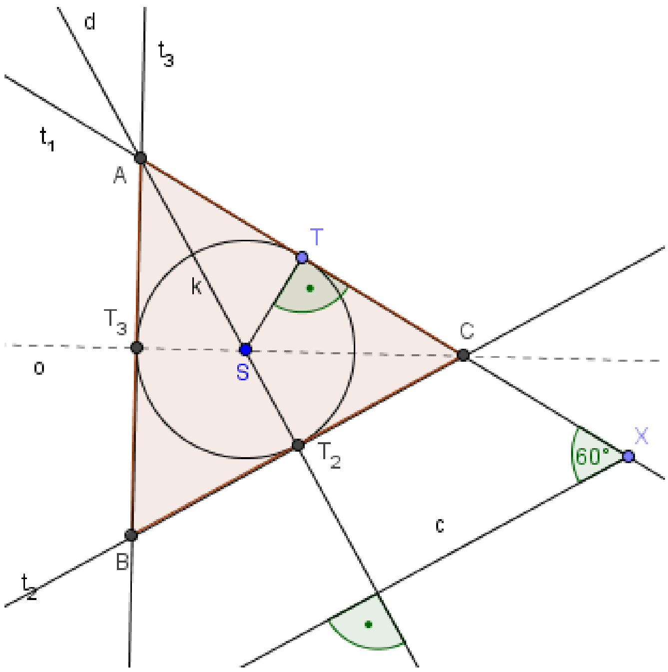
Příklad 8:

Sestrojíme osu úhlu. Ve vrcholu úhlu vytvoříme kružnici *d* o poloměru *2,5cm*. Kružnici posuneme o *3,5cm* po rameni úhlu a vznikne nám nová kružnice *e*. Průnikem kružnice *d* a *e* vznikne bod *A*, kterým vedeme rovnoběžku s ramenem úhlu. V průsečíku rovnoběžky *p* a osy úhlu se nachází střed hledané kružnice *k*.



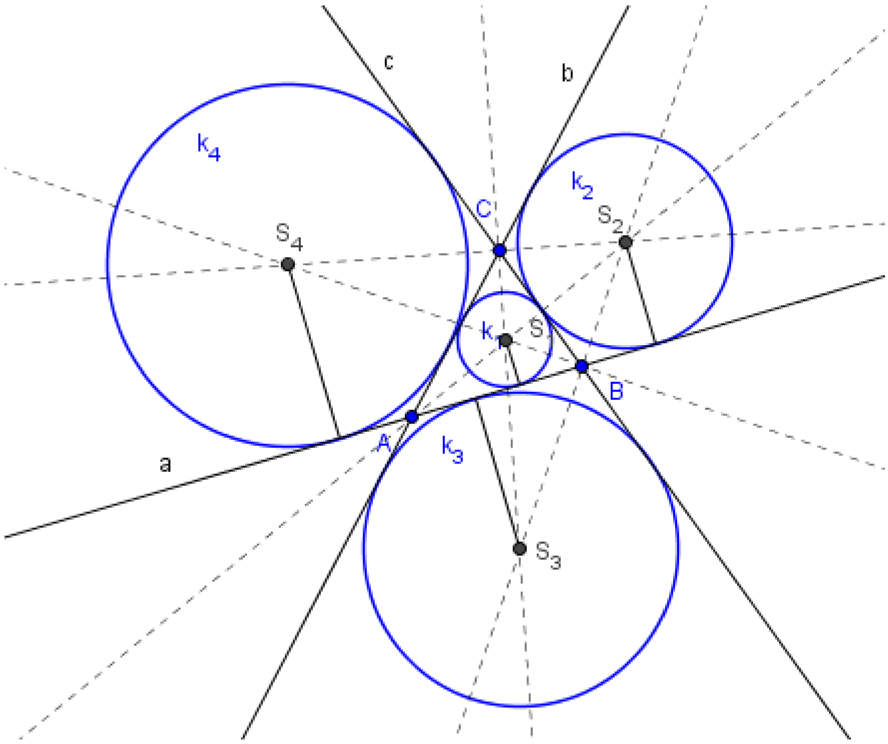
Příklad 9:

Sestrojíme tečnu t_1 ke kružnici *k* v bodě *T*. Sestrojíme přímku *c*, která svírá s tečnou t_1 úhel o velikosti 60°. Dále sestrojíme přímku *d*, která je kolmá na přímku *c* a prochází středem kružnice. Bod T_2 vznikne na průsečíku přímky *d* a kružnice *k*.



Příklad 10:

Středy všech kružnic mající dotyk s každou z různoběžek, leží na průsečíku os úhlů, které vznikly protnutím dvou různoběžek.



9.7 Obvod, obsah, objem

Příklad 1:

$$u^2 = a^2 + a^2$$
$$324 = 2 \cdot a^2$$
$$a = 12{,}73cm$$

$$S = 6 \cdot a^2$$
$$S = 6 \cdot 162$$
$$\underline{\underline{S = 972cm^2}}$$

Příklad 2:

$$a \cdot b = S$$
$$(a+2)\cdot(b+3) = S + 50$$
$$\underline{2\cdot(a+b) = 32}$$
$$3a + 2b + a\cdot b + 6 = a\cdot b + 50$$
$$\underline{2a + 2b = 32}$$
$$3a + 2b = 44$$
$$\underline{-2a - 2b = -32}$$
$$\underline{\underline{a = 12cm}}$$
$$\underline{\underline{b = 4cm}}$$

Příklad 3:

$$a = 20\% = 2{,}25m$$
$$b = 30\% = a \cdot \frac{3}{2} = 3{,}375m$$
$$S = a \cdot b = 2{,}25 \cdot 3{,}375 = \underline{\underline{7{,}59m^2}}$$

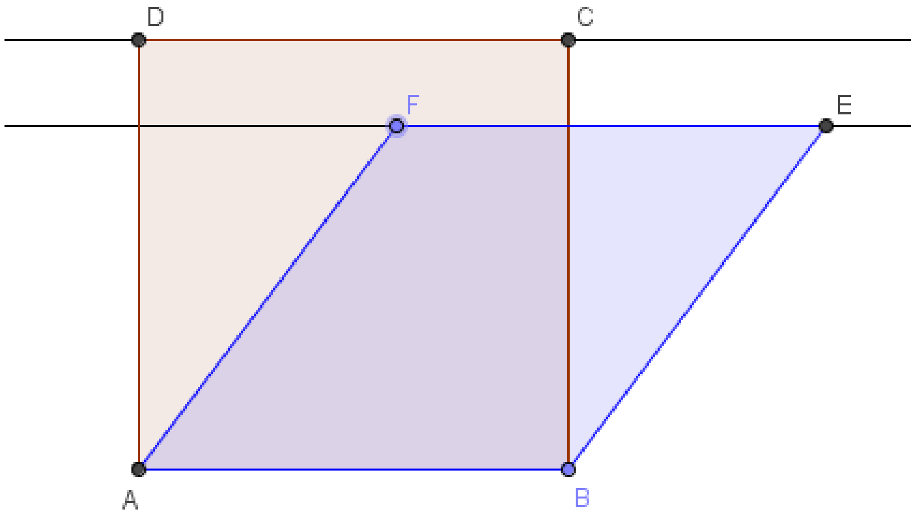
Příklad 4:

$$a$$
$$b = 3 \cdot a$$
$$r = 10cm$$
$$u = 2 \cdot r$$

$$a^2 = u^2 - b^2$$
$$a^2 = 400 - 9a^2$$
$$8a^2 = 400$$
$$a = 7{,}07cm$$
$$b = 21{,}21cm$$

$$S = a \cdot b$$
$$S = 7{,}07 \cdot 21{,}21$$
$$\underline{\underline{S = 56{,}56cm^2}}$$

Příklad 5:



$$S_1 = a \cdot a$$
$$S_2 = a \cdot v_a$$
$$a > v_a$$
$$\underline{\underline{S_1 > S_2}}$$

Příklad 6:

$$S = \frac{u_1 \cdot u_2}{2}$$
$$S = \frac{14 \cdot 48}{2}$$
$$S = 168cm$$

$$a^2 = (\frac{u_1}{2})^2 + (\frac{u_2}{2})^2$$
$$a^2 = 49 + 576$$
$$a^2 = 625$$
$$a = 25cm$$

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$$
$$v_a = \frac{2 \cdot S}{a}$$
$$v_a = \frac{336}{25}$$
$$v_a = 13{,}44cm$$

Příklad 7:

S_1 – obsah celkového pozemku
S_2 – obsah pozemku na dům
S_3 – výměra zahrádky

$$S_1 = a_1 \cdot b$$
$$S_1 = 40 \cdot 60$$
$$S_1 = 2400 m^2$$

$$S_2 = a_2^2$$
$$S_2 = 18^2$$
$$S_2 = 324 m^2$$

$$S_3 = (S_1 - S_2) \cdot \frac{2}{3}$$
$$S_3 = 2076 \cdot \frac{2}{3}$$
$$S_3 = 1384 m^2$$

Příklad 8:

$$S = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$$
$$72 = \frac{20 \cdot v}{2}$$
$$v = 7{,}2 cm$$

$$S_1 = \frac{a \cdot v}{2}$$
$$S_1 = \frac{14 \cdot 7{,}2}{2}$$
$$\underline{\underline{S_1 = 50{,}4 cm^2}}$$

$$S_2 = \frac{c \cdot v}{2}$$
$$S_2 = \frac{6 \cdot 7{,}2}{2}$$
$$\underline{\underline{S_2 = 21{,}6 cm^2}}$$

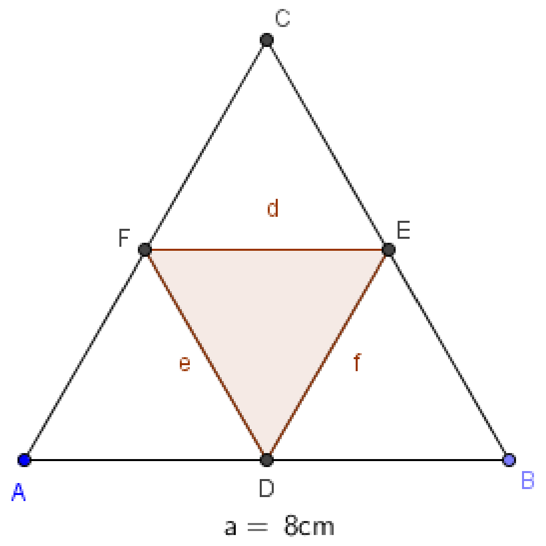
Příklad 9:

$$S_1 = \frac{a \cdot a}{2}$$
$$S_1 = \frac{24 \cdot 24}{2}$$
$$S_1 = 288 m^2$$

$$S_2 = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$$
$$S_2 = \frac{3{,}14 \cdot 144}{2}$$
$$S_2 = 226{,}2 m^2$$

$$S = S_1 - S_2$$
$$S = 288 - 226{,}2$$
$$\underline{\underline{S = 61{,}2 m^2}}$$

Příklad 10:



$$v_d^2 = f^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$v_d^2 = 16 - 4$$

$$v_d = 3{,}46cm$$

$$S = \frac{d \cdot v_d}{2}$$

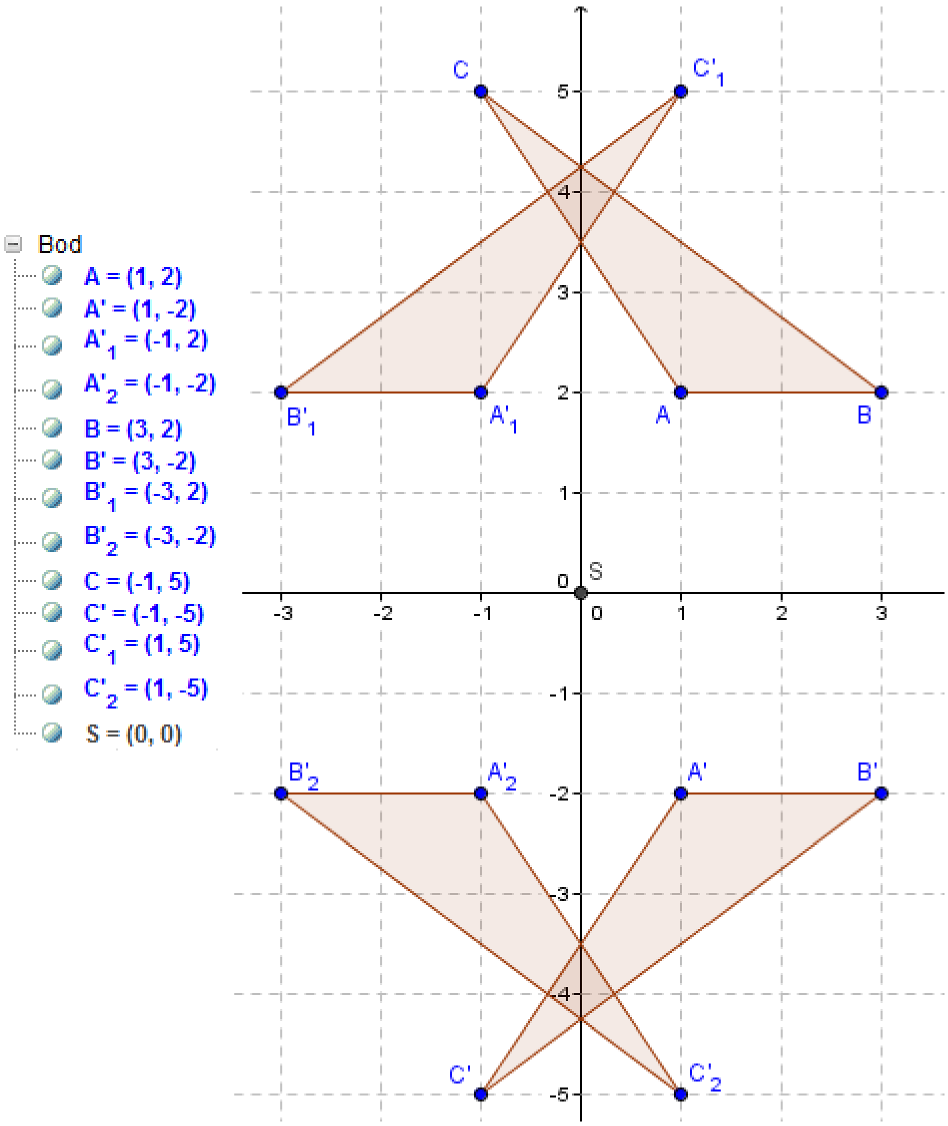
$$S = \frac{4 \cdot 3{,}46}{2}$$

$$\underline{\underline{S_2 = 6{,}92cm^2}}$$

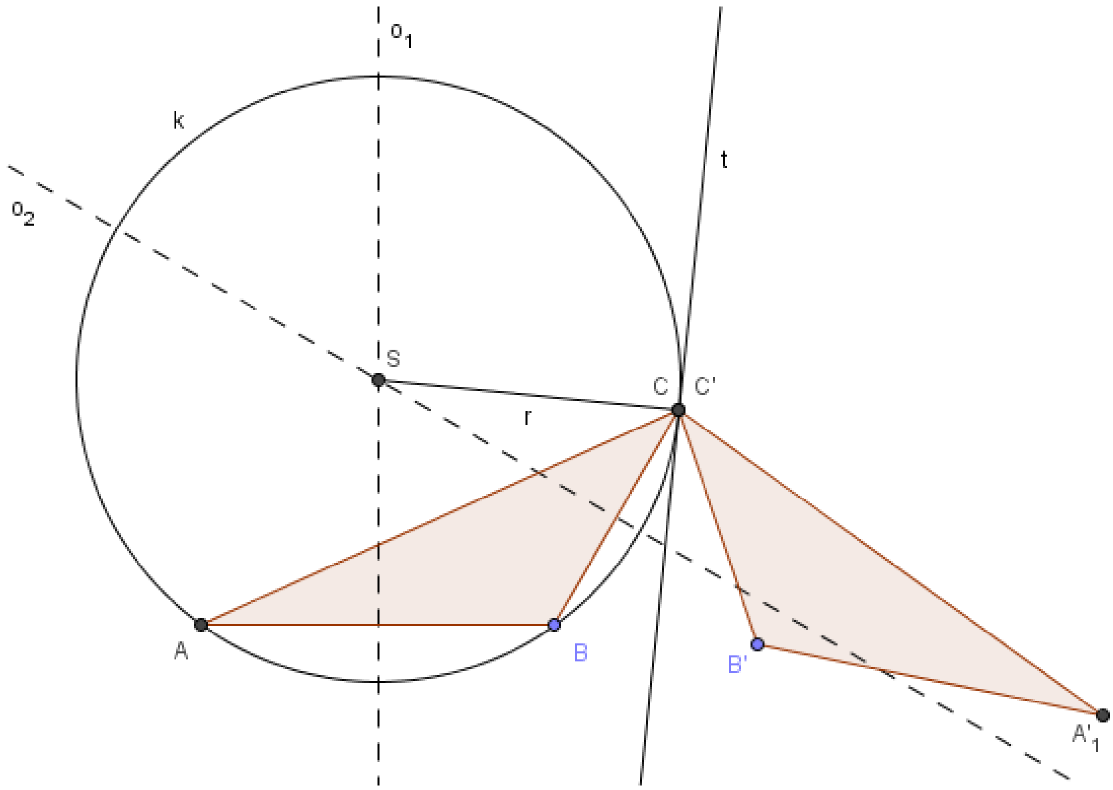
Poměr obsahů trojúhelníku *DEF* a *ABC* je 1:4.

9.8 Shodná zobrazení

Příklad 1: Osová a středová souměrnost

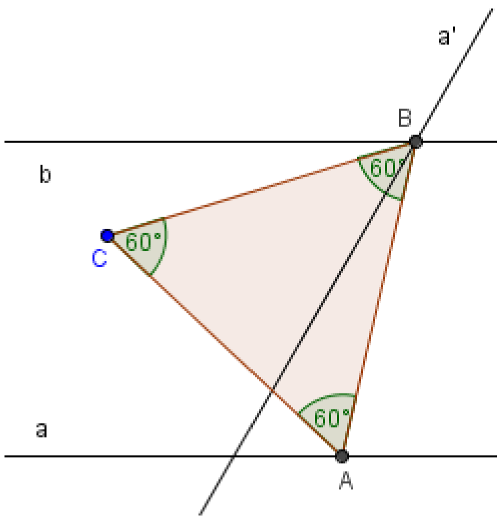


Příklad 2: Osová souměrnost

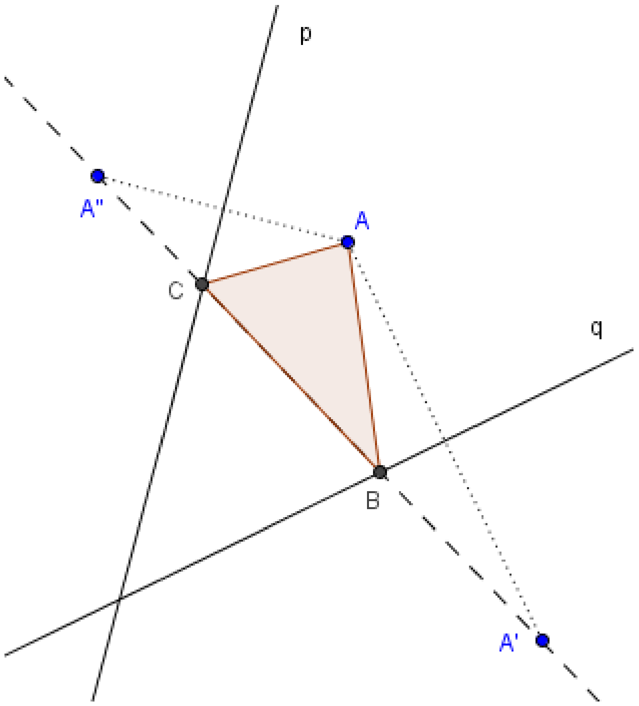


Příklad 3: Otočení

Otočení – Rovnostranný trojúhelník má vnitřní úhly velikosti 60°. Nejprve otočíme přímku a kolem bodu C o 60°. Vznikne nám bod B, $B \in a' \cap b$. Nyní vezmeme bod B a otočíme ho zpět kolem bodu C o 60°. Nově vzniklý bod je bod A.

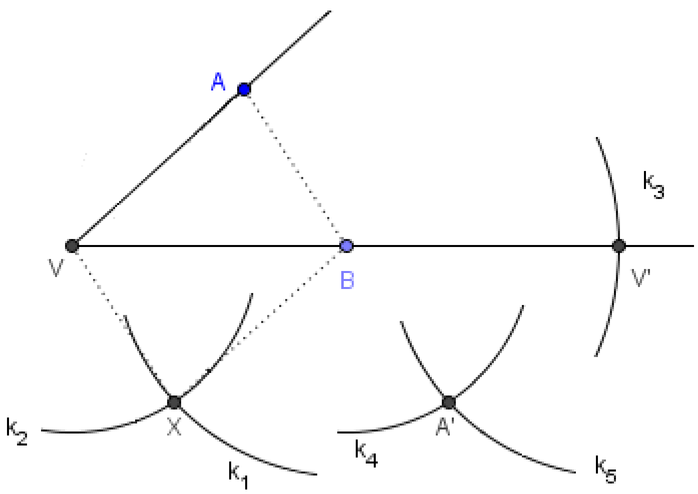


Příklad 4: Osová souměrnost

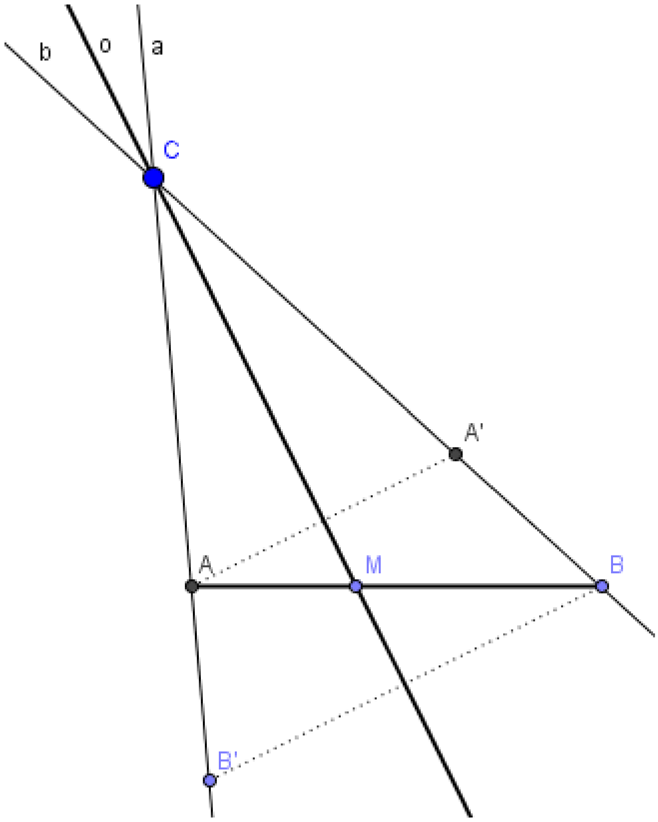


Příklad 5: doplnění kosodélníku a středová souměrnost

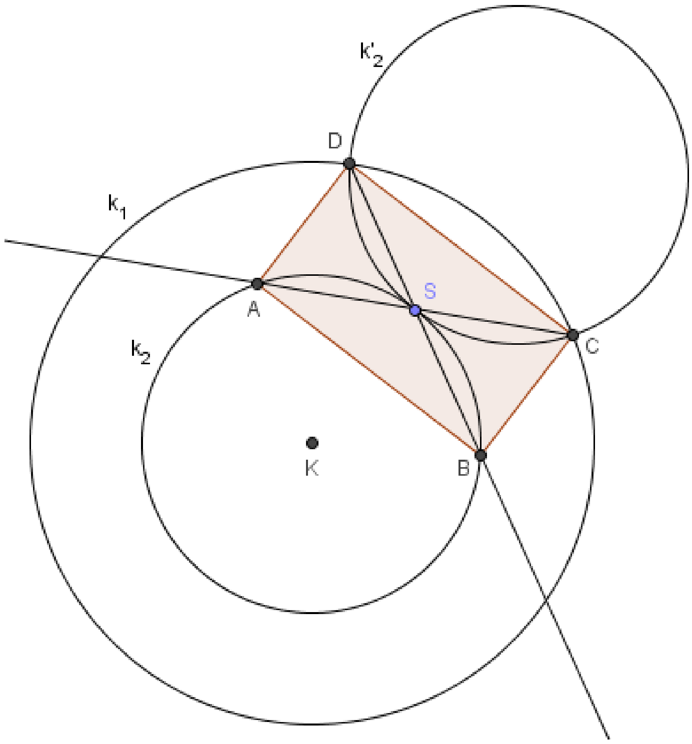
Bod X vytvoříme tak, že sestrojíme kružnice $k_1(B,|VA|)$, $k_2(V,|AB|)$. Na průsečíku těchto kružnic bude ležet bod X. Body V' a A' vytvoříme pomocí středové souměrnosti se středem v bodě B.



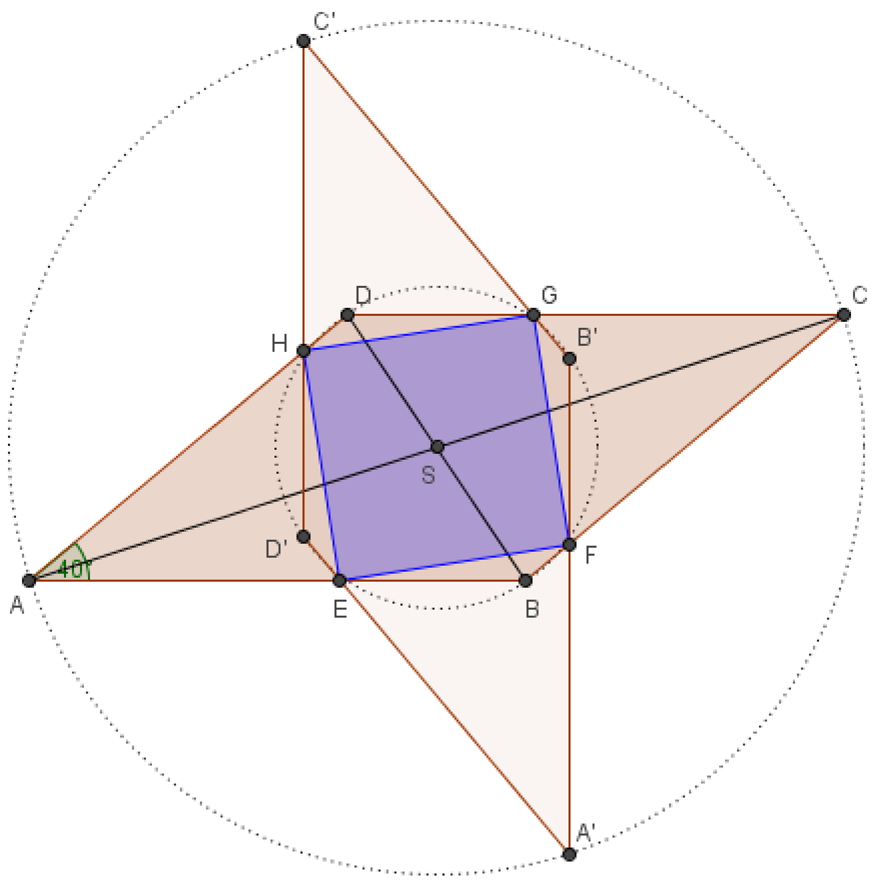
Příklad 6: Osová souměrnost



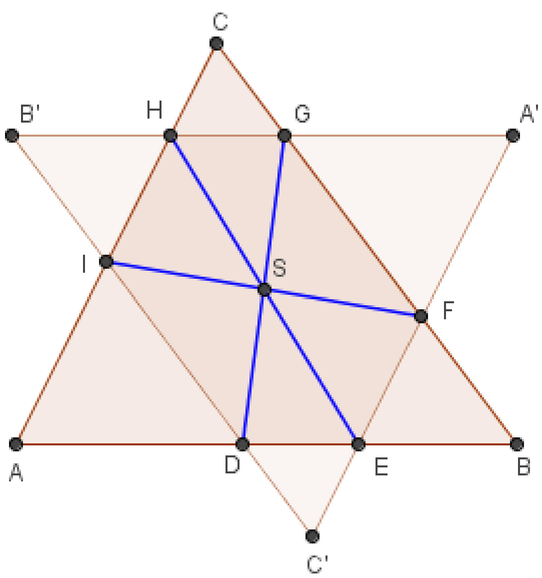
Příklad 7: Středová souměrnost



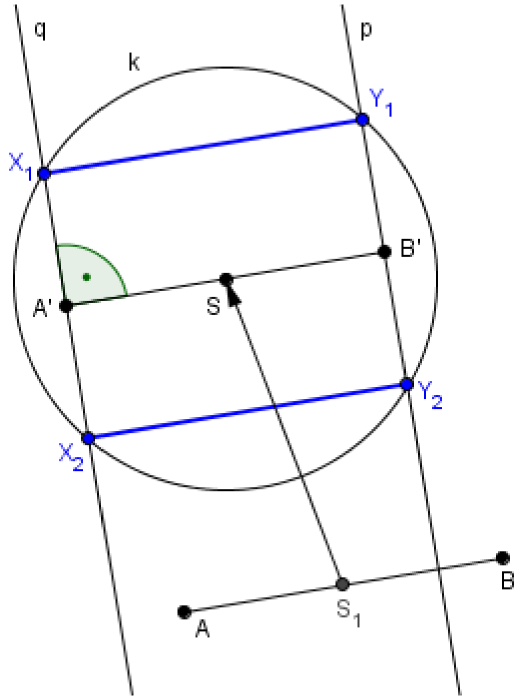
Příklad 8: Otočení



Příklad 9: Středová souměrnost



Příklad 10: Posunutí



9.9 Podobná zobrazení

Příklad 1:

$$\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|BC|}{|LM|} \qquad \frac{|AB|}{|XY|} = \frac{|BC|}{|YZ|}$$

$$\frac{4{,}5}{9} = \frac{6}{12} \qquad \frac{4{,}5}{8} \neq \frac{6}{6}$$

Trojúhelník *ABC* je podobný s trojúhelníkem *KLM* v poměru 1:2. Jsou podobné podle věty *sus*.

Příklad 2:

$$k = \frac{o}{o'} = \frac{4+5+7}{12} = \frac{4}{3}$$

$$k = \frac{a}{a'} \Rightarrow a' = \frac{4.3}{4} = 3cm$$

$$k = \frac{b}{b'} \Rightarrow b' = \frac{5.3}{4} = 3{,}75cm$$

$$k = \frac{c}{c'} \Rightarrow c' = \frac{7.3}{4} = 5{,}25cm$$

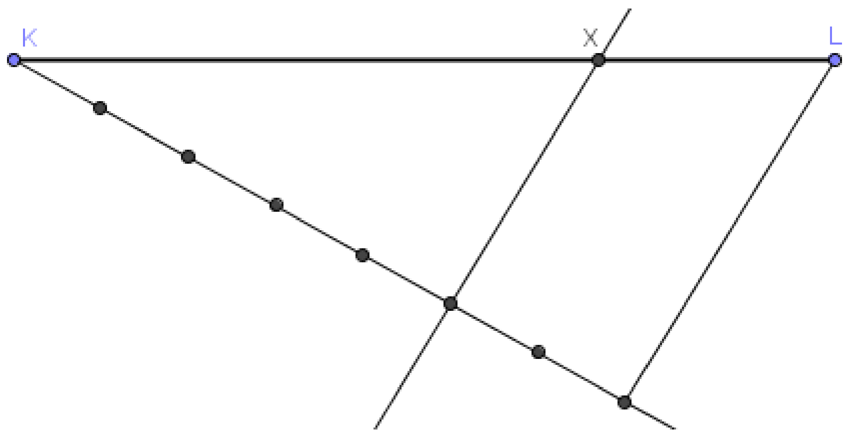
Příklad 3:

$$k = \frac{stín_1}{stín_2} = \frac{18}{3} = 6$$

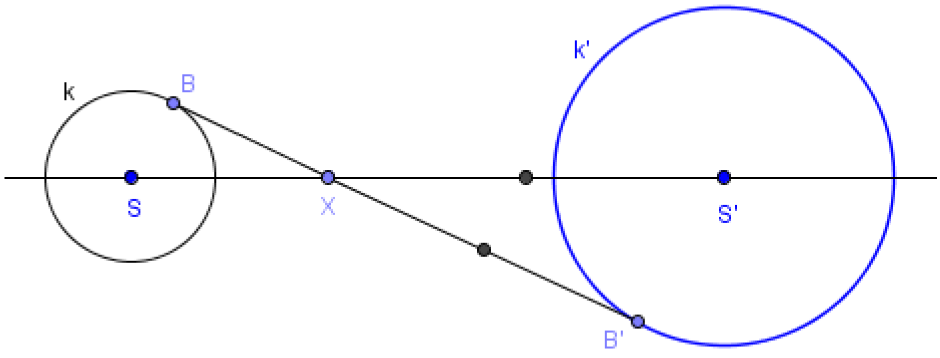
$$k = \frac{panelák}{dum} \Rightarrow panelák = dum.k = 5.6 = 30m$$

Panelový dům je vysoký 30m.

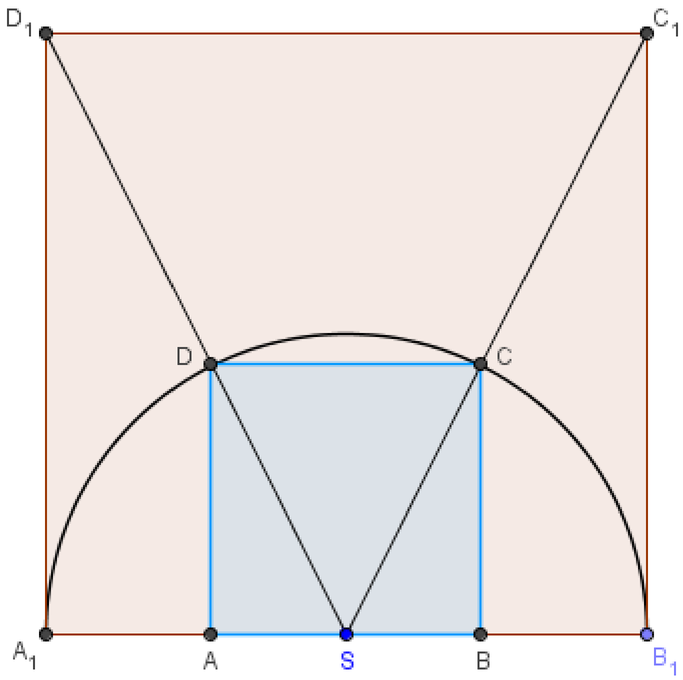
Příklad 4:



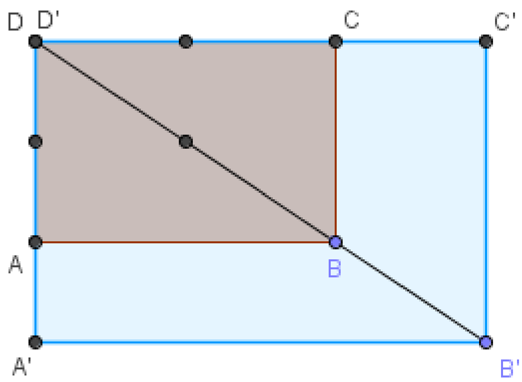
Příklad 5:



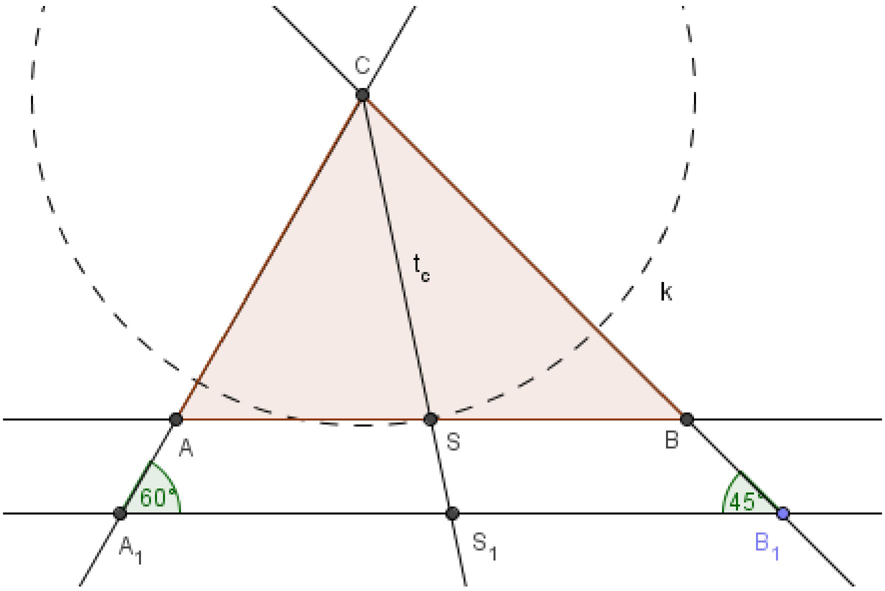
Příklad 6:



Příklad 7:

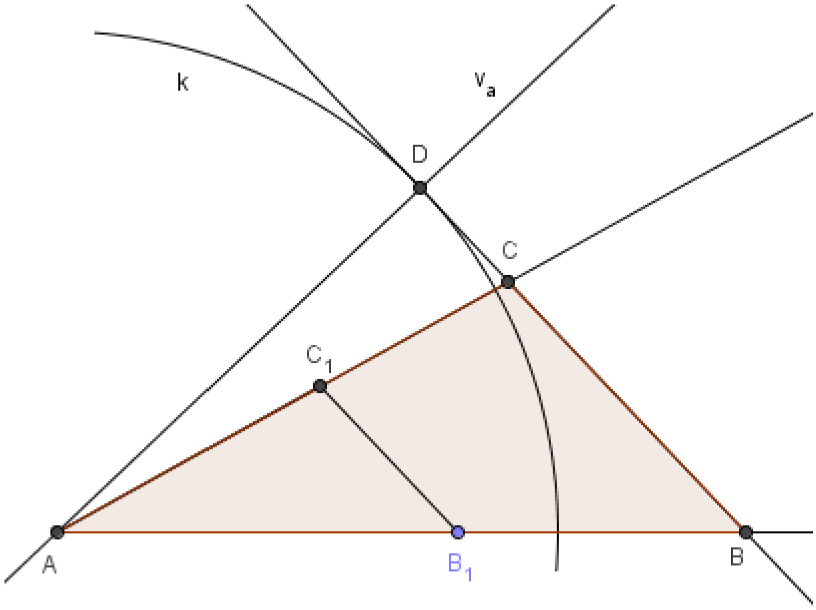


Příklad 8:

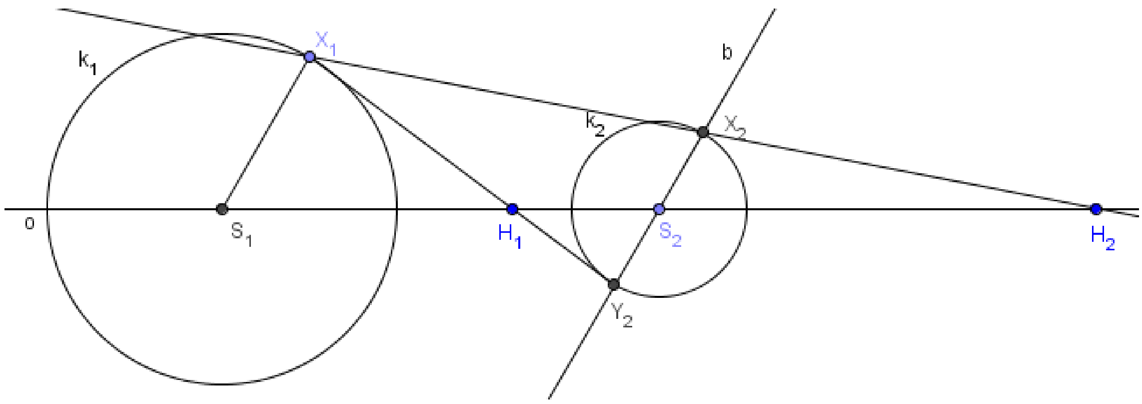


Příklad 9:

Sestrojíme trojúhelník AB_1C_1 s velikostmi stran $a = 2cm$, $b = 3cm$, $c = 4cm$. K úsečce B_1C_1 sestrojíme výšku v_a. Stranu *b*, stranu *c* a výšku v_a prodloužíme. Na přímku v_a pomocí kružítka naneseme vzdálenost $5cm$ a vznikne nám bod *D*. Bodem *D* vedeme rovnoběžku se stranou *a*, která nám vytvoří průsečíky s prodlouženými stranami. V průsečících se nacházejí zbývající vrcholy trojúhelníku ABC.



Příklad 10:



10 Utváření práce na míru

Diplomová práce je primárně určena pro studenty Pedagogické fakulty, obor Učitelství na prvním stupni základní školy. Studenti tohoto oboru mají mezi povinnými předměty také předmět Základy Geometrie. Jelikož ne všichni studenti a studentky tohoto oboru prošli stejně kvalitní středoškolskou výukou, dal jsem si za cíl, vytvoření kompletních teoretických informací a také praktických příkladů, které budou potřebovat k úspěšnému absolvování písemného zápočtu a také ústní zkoušky.

10.1 Účast na seminářích

Pro lepší představu o probíraném učivu jsem navštěvoval přednášky a cvičení předmětu Základy geometrie. Na cvičeních jsem pozoroval postupy řešení studentek, které chodili své nápady konstruovat a vysvětlovat před tabuli. Zjišťoval jsem také, jaké chyby jsou nejčastějším důvodem neúspěšného řešení jednotlivých úloh. Uvedu dva příklad a popis chyb, které nastaly při řešení u několika studentek.

Příklad 1:

Pravoúhlý trojúhelník má délky odvěsen $12cm$ a $16cm$. Vypočtěte délku výšky na přeponu.

Chyba #1: Studentky si hodně často pletou označení názvů stran v pravoúhlém trojúhelníku a **zaměňují přeponu za odvěsnu.**

Chyba #2: Studentky se mylně domnívaly, že **výška** na přeponu v pravoúhlém trojúhelníku, který není rovnoramenný, **přeponu půlí**.

Příklad 2:

Při hodinách však nastávaly i početní chyby v úpravách podle vzorečku. Například úloha: „Strom, který byl vysoký $18m$, se vlivem větru zlomil a jeho zlomená část dopadla 8 metrů od kmene. Jak velká část stromu zůstala nezlomená?“

Problém v této úloze nastal při umocňování závorky $(12-x)^2$, kde studentky nepoužily vzoreček pro rozklad $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ a nedošly proto ke správnému výsledku $144-24x+x^2$, ale pouze umocnily číslo 12 a neznámou *x*. Jejich chybný výsledek potom byl $144-x^2$.

10.2 Komunikace po síti

Vytvořené příklady jsem poskytl studentkám a studentům na sociální síti Facebook, kde byla založena společná skupina pod názvem ZGEOP 2014. U příkladů, které nebylo snadné vyřešit, jsem poskytoval pomocí skupinového chatu rady v postupu konstrukce nebo zasílal vyřešenou konstrukci v programu GeoGebra. Jednalo se o příklady z této diplomové práce nebo o příklady probírané na cvičeních. V následujících odstavcích vkládám ukázku z konverzace přes sociální síť.

Příklad 1

Studentka 25.12.2014 14:31: Prosím tě, pomůžeš mi s tímhle tvým příkladem? Asi to možná je jednoduchý, ale já nad tím sedím a nevím si rady. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána výška v_a=5cm a strany trojúhelníku jsou v poměru a:b:c=2:3:4.

Lukáš Filip 25.12.2014 14:35: To je příklad na podobnost. Narýsuješ si trojúhelník se stranami 2cm, 3cm, 4cm (takže poměr je správný). Pak si narýsuješ výšku toho trojúhelníku, kterou pak prodloužíš a naneseš těch 5 cm. Potom už jenom pomocí rovnoběžky sestrojíš stranu BC. Ještě ti můžu poslat řešení v Geogebře

Studentka 25.12.2014 14:41: Jooo, prosím.

Studentka 25.12.2014 14:42: Ježiš aha, už jsem to ale asi pochopila. Teď když to vidím, tak to je vlastně jednoduchý.

Studentka 25.12.2014 14:44: Hm, ale já bych potřebovala, aby mi to takhle vždycky někdo přetlumočil, a pak už je to ok.

Příklad 2

Lukáš Filip 6.1.2015 17:14: Poznáš, kdy jsou dva trojúhelníky podobné?

Studentka 6.1.2015 17:16: No, musí se shodovat v určitém poměru ve všech stranách a úhlech?

Lukáš Filip 6.1.2015 17:18: Existuje ještě jiná varianta?

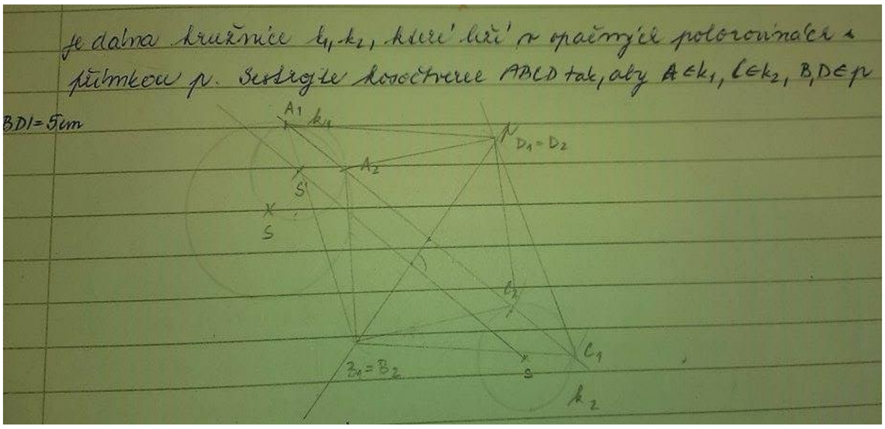
Studentka 6.1.2015 17:20: Nebo ve dvou stranách a úhlu sevřeném. Nebo dvou úhlech a straně kterou obklopují.

Lukáš Filip 6.1.2015 17:25: U toho prvního je poměr dvou stran + úhel. U toho druhého, když se ti shodují ve dvou úhlech, tak už stranu nepotřebuješ.

Studentka 6.1.2015 17:26: Joo, jasný.

10.3 Focení příkladů

Někdy studentky posílaly fotografie vypracovaných úloh v sešitě.



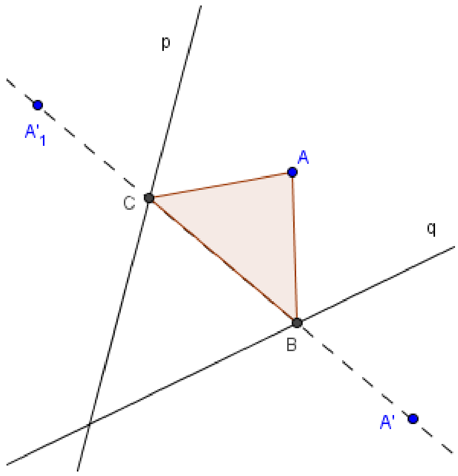
10.4 Osobní konzultace

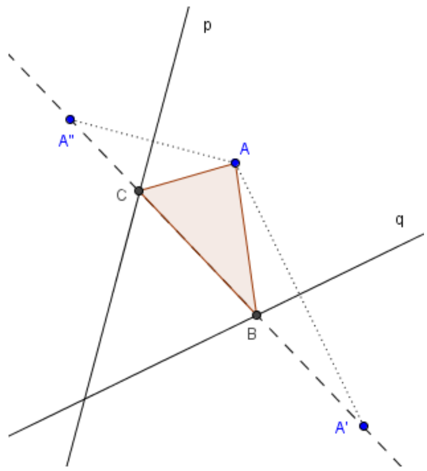
Po skončení semestru jsem se domluvil s několika dobrovolnicemi, že po absolvování všech zkoušek se sejdeme a rozebereme si všechny příklady v diplomové práci. Schůzky byly naplánované na pozdější datum z důvodu, aby studentky ještě neuměly řešení zpaměti.

Účelem těchto konzultací bylo připravení všech řešení přímo na míru studentkám a studentům tohoto předmětu, přesně tak aby všem porozuměli. Na schůzkách dostali zadání úlohy a grafické řešení. U některých příkladů obsahovalo grafické řešení i přesný postup konstrukce. Některé příklady obsahovaly pouze grafické řešení.

Pokud někomu ze studentů nebylo řešení jasné, úlohu jsem doplnil o postup konstrukce nebo o komentář k postupu. Jako například u úloh Množiny bodů dané vlastnosti a to příklady 8, 9, 10, Shodnost příklad 5, Podobnost příklad 9.

Některé grafické řešení, které nemá slovní komentář ani postup konstrukce, jsem upravil pro lepší pochopení. Úprava proběhla přidáním pomocných čar, zvýrazněním nebo obarvením výsledného řešení. Například u úloh Shodnost příklad 10, Podobnost příklad 5.





11 ZÁVĚR

Diplomová práce obsahuje vše, co bylo zadáno. Na úvod každého tématu je teoretický rozbor, který je doplněn o názorné obrázky. Následuje vzorový příklad s postupným řešením. Doplněn je také obrázkem konstrukce, provedeným v programu Geogebra. Na závěr tématu je deset příkladů sestavených podle Bloomovy taxonomie. Každá úloha je na konci diplomové práce vyřešena.

Práce byla vyzkoušena studenty Pedagogické fakulty oboru učitelství prvního stupně základní školy. Použita byla jak k přípravě na písemnou část zkoušky, tak k ústní teoretické části.

Z celkového počtu 90 řešených příkladů, jsem po konzultacích změnil, doplnil nebo předělal postup u 23 úloh, pro jejich lepší srozumitelnost pro studenty.

Doufám, že tato práce bude užitečná i dalším studentům a pomůže jim jak s vyřešením konstrukčních a početních úloh, tak s pochopením teoretické části geometrie.

Použitá literatura

BĚLOUN, František. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu*. 8. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 254 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-719-6104-3.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 6: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2007, 86 s. ISBN 9788072386567.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 7: pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2008, 104 s. ISBN 9788072386819.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 8: pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009, 127 s. ISBN 9788072386840.

HOZLOVÁ, Libuše. *Konstrukční úlohy: pro žáky a učitele ZŠ, studenty a profesory SŠ: 444 úloh*. 2. vyd. Praha: HAV, 2005. ISBN 80-903-6251-6.

KOUŘIM, Jaroslav, František KUŘINA, Ondrej ŠEDIVÝ, Jiří HEJL a Jitka KUČEROVÁ. *Základy elementární geometrie: Pro studium učitelství na 1. stupni základní školy*. 1. vyd. Plzeň, 1982. ISBN 59-066-82.

KOUŘIM, Jaroslav, Jiří HEJL, Jitka KUČEROVÁ, František KUŘINA a Ondrej ŠEDIVÝ. *Základy elementární geometrie: pro učitelství 1. stupně ZŠ*. 1. vyd. Brno: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. ISBN 14-382-85.

KUŘINA, František, Otto HORÁK, Ludmila GEHEROVÁ a Eva KREJČOVÁ. *Geometrie: pro učitele 1. stupně základní školy*. 1. vyd. Hradec Králové, 1977. ISBN 60-201-77.

KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii*. Praha: Matematický ústav AV ČR, 1996, 249 s. ISBN 80-858-2321-7.

MÜLLEROVÁ, Jana; FRÝZEK, Miloslav. *Sbírka úloh z matematiky pro bystré hlavy: Určeno žákům 5. - 9. roč. zákl. školy a nižších tříd víceletých gymnázií*. 1. vyd. Praha: Fortuna, 1992. ISBN 80-852-9851-1.

SMIDA, Jozef. *Matematika pro I. ročník gymnázií*. 2. upr. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989, 287 s. Učebnice pro střední školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-042-4433-5.

SOVÍKOVÁ, Květa a František BĚLOUN. *Soubor kontrolních prací: a námětů pro vstupní a závěrečné prověrky z matematiky v 5. - 8. ročníku ZŠ*. 1. vyd. Praha: Pedagogický ústav, 1984. ISBN 55-304-84.

Internetové odkazy:

http://www.matematika.cz/

http://www.priklady.com/cs/

http://www.e-matematika.cz/

http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/

http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jan_koncel/obrazky/prostor/vzajemnaPolohaRR.png

Použitý software:

Práce psána v textovém editoru Microsoft Word

Konstrukce provedeny v matematickém programu GeoGebra

Výsledné obrázky upraveny v Malování