UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Greenovy matice pro soustavy ODR

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **doc. RNDr. Jan Tomeček Ph.D.**
Vypracoval(a): **Miroslava Dostálová**
Studijní program: B1101 Matematika
Studijní obor Matematika a její aplikace
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2017

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Miroslava Dostálová

Název práce: Greenovy matice pro soustavy ODR

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jan Tomeček Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2017

Abstrakt: Cílem této práce je ukázat jak nalézt řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic s danými okrajovými podmínkami pomocí Greenových matic.

Klíčová slova: Greenova matice, Greenova funkce, diferenciální rovnice, soustava obyčejných diferenciálních rovnic, okrajová úloha

Počet stran: 55

Počet příloh: 1

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Miroslava Dostálová

Title: Green's matrices for systems of ODEs

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: doc. RNDr. Jan Tomeček Ph.D.

The year of presentation: 2017

Abstract: The aim of this work is to show how to find the solution of ordinary differential equations with given boundary conditions by Green's matrix.

Key words: Green's matrix, Green's function, differential equation, system of differential equations, boundary value problem

Number of pages: 55

Number of appendices: 1

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením pana doc. RNDr. Jana Tomečka Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....
podpis

Obsah

Seznam obrázků

Poděkování

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce, panu doc. RNDr. Janu Tomečkovi Ph.D., za cenné rady, připomínky a vstřícnost při konzultacích a vedení bakalářské práce. Dále bych chtěla poděkovat mé rodině za podporu a trpělivost.

Úvod

Diferenciální rovnice se vyvíjí již od druhé poloviny 17. století a jsou spojeny hlavně se jmény Gottfrieda Wilhelma Leibnize a Isaaca Newtona. Studiem těchto rovnic se dále zabývali například Bernoulli, Jacopo Riccati, Alexis Claude Clairaut, Jean le Rond d'Alembert a Leonhard Euler. Diferenciální rovnice můžeme dělit na dvě skupiny, na obyčejné diferenciální rovnice, ve kterých se vyskytují derivace funkce podle jedné proměnné, a parciální diferenciální rovnice, kde se vyskytují derivace funkcí podle více proměnných (tzv. parciální derivace). V této práci se nadále budeme věnovat právě první skupině.

Diferenciální rovnice se využívají v mnoha oborech, např. v astronomii, biologii, ekologii, ekonomice či ve fyzice. Tyto rovnice popisují změnu, vývoj nebo dynamiku jevů.

Cílem této bakalářské práce je ukázat, jak nalézt řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic s danými okrajovými podmínkami pomocí Greenových matic. Práce je rozdělena na 3 kapitoly a má jednu přílohu, která se týká Kurzweil-Stieltjesova integrálu.

Použité značení

$\mathbb{R}^{m\times n}$ ... lineární prostor všech matic typu $m \times n$ nad $\mathbb{R}$,

$\mathbb{R}^{n\times 1}$ ... množina všech n-dimenzionálních sloupcových vektorů,

$\mathbb{R}^{1\times n}$ ... množina všech n-dimenzionálních řádkových vektorů,

$\mathbb{L}^1([a,b];\mathbb{R}^{m\times n})$ ... množina všech zobrazení $x : [a,b] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ jejíž složky jsou lebesgueovsky integrovatelné funkce,

$\mathbb{C}([a,b];\mathbb{R}^{m\times n})$ ... množina všech zobrazení $x : [a,b] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ jejíž složky jsou spojité funkce,

$\mathbb{AC}([a,b];\mathbb{R}^{m\times n})$ ... množina všech zobrazení $x : [a,b] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ jejíž složky jsou absolutně spojité funkce,

$\mathbb{BV}([a,b];\mathbb{R}^{m\times n})$ ... množina všech zobrazení $x : [a,b] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ jejíž složky jsou funkce s konečnou variací na intervalu $[a,b]$,

$\mathbb{G}_L([a,b];\mathbb{R}^{m\times n})$ ... množina všech zobrazení $x : [a,b] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ jejíž složky jsou zleva spojité regulované funkce,

$g(\tau+) = \lim_{t\to\tau+} g(t)$,

$g(\tau-) = \lim_{t\to\tau-} g(t)$,

$G(\tau+,\tau) = \lim_{t\to\tau+} G(t,\tau)$,

E ... jednotková matice,

$\chi_M(t)$ ... charakteristická funkce množiny $M \subset \mathbb{R}$, tzn. je to funkce definovaná předpisem: $\chi_M(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in M, \\ 0 & \text{pro } t \notin M, \end{cases}$

Kapitola 1

Okrajové úlohy pro systémy diferenciálních rovnic 1. řádu

Uvažujme systém lineárních diferenciálních rovnic

$$x'(t) + A(t)x(t) = q(t), \tag{1.1}$$

kde $A \in \mathbb{L}^1([a,b];\mathbb{R}^{n\times n})$, $q \in \mathbb{L}^1([a,b];\mathbb{R}^{n\times 1})$ a lineární okrajové podmínky

$$\ell(x) = c_0, \tag{1.2}$$

kde $c_0 \in \mathbb{R}^n$ a $\ell : \mathbb{G}_L([a,b];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení.

Operátor ℓ nemůžeme uvažovat v $\mathbb{C}([a,b];\mathbb{R}^{m\times n})$, protože (jak se později dozvíme v Lemmatu 1.8 ve 4. odrážce) do operátoru ℓ budeme dosazovat i nespojité funkce.

Vztahují-li se podmínky (1.2) na jeden bod, nazývají se počáteční podmínky. Konkrétně je-li $\ell(x) = x(t_0)$, kde $t_0 \in \mathbb{R}$. Jestliže se vztahují k více bodům, jde o okrajové podmínky. Jako příklad okrajové úlohy popisující reálnou situaci si můžeme uvést například teplotní pole v tenké tyči, kdy si vezmeme tyč (drát) délky l a zahříváme ji. Pomocí diferenciální rovnice popíšeme proces vedení tepla v tyči. Předpokládáme, že teplota je v každém bodě řezu tyče stejná a na jejích koncích udržujeme nulovou teplotu. Teplotu na koncích tyče popíšeme pomocí dvoubodových okrajových podmínek takto $y(0) = 0$ a $y(l) = 0$.

Důležitými speciálními příklady okrajových podmínek (1.2) na intervalu $[a,b]$ jsou např.:

- dvoubodové okrajové podmínky:

$$Mx(a) + Nx(b) = c_0,$$

kde $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

- vícebodové podmínky:

$$\sum_{k=1}^{m} A_k x(t_k) = c_0,$$

kde $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a

- integrální podmínky:

$$\int_a^b A(t)x(t)\,\mathrm{d}t = c_0,$$

kde $A \in \mathbb{L}^1([a,b];\mathbb{R}^{n\times n})$.

Nyní budeme definovat řešení okrajové úlohy (1.1),(1.2).

Definice 1.1 Řekneme, že $x \in \mathbb{AC}([a,b];\mathbb{R}^{m\times n})$ je řešením okrajové úlohy (1.1), (1.2), jestliže x splňuje soustavu (1.1) pro každé $t \in (a,b)$ a okrajovou podmínku (1.2).

Když už víme, co je řešení okrajové úlohy, můžeme si zadefinovat pojem fundamentální systém a fundamentální matice systému (1.1).

Definice 1.2 Množina $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ lineárně nezávislých řešení homogenního systému (1.1) (tzn. pro $q = 0$) se nazývá fundamentální systém (báze) řešení (1.1). Je-li $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ báze řešení (1.1), pak matice typu $n \times n$ jejíž sloupce jsou tvořeny vektory $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ se nazývá fundamentální matice systému (1.1).

Fundamentální matici rovnice (1.1) budeme dále značit symbolem X.

Příklad 1.3 Nalezněte fundamentální matici systému

$$x_1' - 2x_1 + x_2 = 0,$$

$$x_2' - 4x_1 + 3x_2 = 0.$$

Řešení:

Nejdříve nalezneme vlastní čísla matice A, tzn. vyřešíme charakteristickou rovnici $\det(A - \lambda E) = 0$. Dostáváme kvadratickou rovnici $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, která má dvě řešení $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$. Ze základní teorie lineárních diferenciálních rovnic víme, že řešení systému ze zadání budou ve tvaru

$$u_1(t) = e^t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$u_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Vyřešením následující rovnice nalezneme vlastní vektor $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ matice A příslušný vlastní hodnotě $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda_1 & -1 \\ 4 & -3 - \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0.$$

Řešením této rovnice je například vektor $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Obdobně nyní nalezneme vlastní vektor $\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ matice A příslušný vlastní hodnotě $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda_2 & -1 \\ 4 & -3 - \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = 0.$$

Řešením této rovnice je například vektor $\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Získali jsme dvě řešení: $u_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ a $u_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 4e^{-2t} \end{pmatrix}$. Tato dvě řešení jsou lineárně nezávislá, protože

$$\det \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & 4e^{-2t} \end{pmatrix} = 3e^{-t} \neq 0.$$

Fundamentální matice zadaného systému je $X(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & 4e^{-2t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

Nyní budeme definovat Greenovu matici úlohy (1.1), (1.2) a vzápětí ukážeme jak lze pomocí Greenovy matice získat řešení úlohy (1.1), (1.2). Jak Greenovu matici spočítat se dozvíme později v Lemmatu 1.8.

Definice 1.4 Zobrazení $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ nazýváme Greenovou maticí úlohy (1.1), (1.2), jestliže:

1. $G(\cdot, \tau)$ je spojitá na $[a,\tau], (\tau, b]$ pro každé $\tau \in [a,b]$,
2. $G(t,\cdot) \in \mathbb{BV}([a,b], \mathbb{R}^{n\times n})$ pro každé $t \in [a,b]$,
3. pro libovolné $q \in \mathbb{L}^1([a,b];\mathbb{R}^{n\times 1})$ je funkce

$$x(t) = \int_a^b G(t,\tau)q(\tau)\,\mathrm{d}\tau, t \in [a,b] \tag{1.3}$$

jediným řešením (1.1), (1.2) pro $c_0 = 0$.

K nalezení Greenovy matice úlohy (1.1), (1.2) budeme potřebovat znát obecný tvar lineárního ohraničeného operátoru ℓ.

Lemma 1.5 *Zobrazení $\ell : \mathbb{G}_L([a,b];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ je lineárně ohraničený operátor právě tehdy, když existuje $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $V \in \mathbb{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n\times n})$ takové, že*

$$\ell(z) = Kz(a) + (KS)\int_a^b V(t)\,\mathrm{d}[z(t)], \tag{1.4}$$

kde $z \in \mathbb{G}_L([a,b];\mathbb{R}^{n\times 1})$

(KS) je označení Kurzweilova-Stieltjesova integrálu, o kterém se dozvíme více v příloze na konci této práce.
V následujícím příkladu si prakticky ukážeme, jak nalézt matice K a $V(t)$ pro konkrétní okrajovou podmínku a následně si ověříme, zda tyto matice splňují rovnost (1.4).

Příklad 1.6 Nechť $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\xi_1, \dots, \xi_m \in [a,b]$, $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m$ a $\ell(x) = \sum_{i=1}^m A_i x(\xi_i)$. Nalezněte K a $V(t)$.

Řešení:

Položme $K = \sum_{i=1}^m A_i$ a $V(t) = \sum_{i=1}^m A_i \chi_{[a,\xi_i)}(t)$ pro $t \in [a,b]$ a $\xi_i \in [a,b]$. Opravdu platí

$$\begin{aligned}
\ell(x) &= Kx(a) + (KS)\int_a^b V(t)\,\mathrm{d}[x(t)] \\
&= \left(\sum_{i=1}^m A_i\right) x(a) + \int_a^b \sum_{i=1}^m A_i \chi_{[a,\xi_i)}(t)\,\mathrm{d}[x(t)] \\
&= \sum_{i=1}^m A_i x(a) + \sum_{i=1}^m A_i (x(\xi_i) - x(a) = \sum_{i=1}^m A_i x(\xi_i).
\end{aligned}$$

Poznámka 1.7 V následujícím textu budeme označovat X jako fundamentální matici (1.1). Označením $\ell(X)$ máme na mysli matici typu $n \times n$, která má sloupce $\ell(x_1), \dots, \ell(x_n)$ jestliže $X \in \mathbb{G}_L([a,b]; \mathbb{R}^{n\times n})$ má sloupce $x_1(t), \dots, x_n(t)$.

Nyní už víme vše potřebné a v následujícím lemmatu si uvedeme konkrétní tvar Greenovy matice úlohy (1.1), (1.2) a její vlastnosti.

Lemma 1.8 *Úloha* (1.1), (1.2), *kde* $c_0 = 0$, *má právě jediné řešení právě tehdy, když* $\det \ell(X) \neq 0$. *Jestliže to platí, pak existuje Greenova matice úlohy* (1.1), (1.2), *kde* $c_0 = 0$, *která má tvar*

$$G(t,\tau) = X(t)H(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t)X(t)X^{-1}(\tau), \tag{1.5}$$

kde $t, \tau \in [a,b]$ *a*

$$H(\tau) = -[\ell(X)]^{-1}\Big(\int_a^b V(s)A(s)X(s)\,\mathrm{d}s \cdot X^{-1}(\tau) + V(\tau)\Big), \tag{1.6}$$

pro $\tau \in [a,b]$. *Greenova matice* G *má následující vlastnosti:*

1. *G je ohraničená na $[a,b] \times [a,b]$,*
2. *$G(\cdot,\tau)$ je absolutně spojitá na $[a,\tau]$ a $(\tau,b]$ pro každé $\tau \in [a,b]$ a její sloupce splňují diferenciální rovnici (1.1) na $[a,b]$,*
3. *$G(\tau+,\tau) - G(\tau,\tau) = E$ pro každé $\tau \in [a,b]$,*
4. *$G(\cdot,\tau) \in \mathbb{G}_L([a,b];\mathbb{R}^{n\times n})$ pro každé $\tau \in [a,b]$ a $\ell(G(\cdot,\tau)) = 0$ pro každé $\tau \in [a,b)$.*

V následujícím příkladu vidíme jaký tvar má Greenova matice úlohy (1.1) s dvoubodovou okrajovou podmínkou.

Příklad 1.9 Řešení soustavy (1.1) s okrajovou podmínkou

$$\ell(x) = Mx(a) + Nx(b) = 0 \tag{1.7}$$

lze napsat ve tvaru

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)q(s)\,\mathrm{d}s, \tag{1.8}$$

kde $t \in [a,b]$ a

$$G(t,s) = \begin{cases} X(t)(-D^{-1}NX(b))X^{-1}(s) & \text{pro } a \le t \le s \le b, \\ X(t)(E_n - D^{-1}NX(b))X^{-1}(s)) & \text{pro } a \le s < t \le b, \end{cases} \tag{1.9}$$

kde $D = MX(a) + NX(b)$.
Odvození tvaru Greenovy matice (1.9) čtenář nalezne v [10].

Poznámka 1.10 Smysl Greenovy matice nespočívá pouze v určení tvaru řešení lineární okrajové úlohy. Uvažujeme-li soustavu nelineárních rovnic

$$x' + A(t)x = f(t,x), \tag{1.10}$$

kde $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je obecně nelineární vektorová funkce v druhé proměnné, pojem Greenovy matice je možno použít i v tomto případě. Lze ukázat, že x je řešení okrajové úlohy (1.10), (1.2) pro $c_0 = 0$ právě tehdy, když x splňuje soustavu integrálních rovnic

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) f(s, x(s)) \, \mathrm{d}s,$$

kde G je Greenova matice úlohy (1.1), (1.2).

V této kapitole jsem definice a věty čerpala z [1], [2], [8], [9] a [10].

Kapitola 2

Okrajové úlohy pro diferenciální rovnice n-tého řádu

Poznatky z první kapitoly nadále využijeme i v této kapitole, protože každou rovnici n-tého řádu lze přepsat na soustavu rovnic 1. řádu. Jak to provést se dozvíme v Poznámce 2.3.

Uvažujme diferenciální rovnici n-tého řádu

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(t)u^{(j)}(t) = h(t) \tag{2.1}$$

a okrajové podmínky

$$\ell_j(u, u', \dots, u^{(n-1)}) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2.2}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_n(t) = a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, t \in [a, b]$ je konstantní funkce, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{L}^1([a, b]; \mathbb{R})$, $h \in \mathbb{L}^1([a, b]; \mathbb{R})$ a $\ell_j : \mathbb{G}_L([a, b]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ je lineární ohraničený funkcionál, $j = 1, \dots, n$.

Definice 2.1 Funkce $u \in \mathbb{AC}^{n-1}([a, b]; \mathbb{R})$ je řešení problému (2.1), (2.2), jestliže

– u vyhovuje diferenciální rovnici (2.1) pro skoro všechna $t \in [a, b]$,

– u vyhovuje okrajovým podmínkám (2.2).

Nyní budeme definovat pojem Greenovy funkce lineární diferenciální rovnice n-tého řádu.

Definice 2.2 Funkci $g : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ nazýváme Greenovou funkcí úlohy (2.1), (2.2), jestliže:

1. $g(\cdot, \tau), \frac{\partial g}{\partial t}(\cdot, \tau), \ldots, \frac{\partial^{n-2} g}{\partial t^{n-2}}(\cdot, \tau)$ jsou absolutně spojité $[a, b]$, $\frac{\partial^{n-1} g}{\partial t}(\cdot, \tau)$ je absolutně spojitá na $[a, \tau], (\tau, b]$,
2. $g(t, \cdot), \frac{\partial g}{\partial t}(t, \cdot), \ldots, \frac{\partial^{n-1} g}{\partial t^{n-1}}(t, \cdot) \in \mathbb{BV}([a, b]; \mathbb{R})$,
3. pro libovolné $h \in \mathbb{L}^1([a, b]; \mathbb{R})$:

$$u(t) = \int_a^b g(t, s) h(s) \, \mathrm{d}s, \quad t \in [a, b] \tag{2.3}$$

je jediným řešením (2.1), (2.2).

Jak vypočítat konkrétní tvar Greenovy funkce se dozvíme na konci kapitoly.

Poznámka 2.3 Problém (2.1), (2.2) můžeme transformovat na problém

$$z'(t) + A(t) z(t) = f(t), \tag{2.4}$$

$$\ell(z) = 0, \tag{2.5}$$

kde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_0(t)}{a_n} & \frac{a_1(t)}{a_n} & \frac{a_2(t)}{a_n} & \cdots & \frac{a_{n-1}(t)}{a_n} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$f(t) = (0, 0, \ldots, 0, \frac{h(t)}{a_n})^T, t \in [a, b]$$

a

$$\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)^T, \tag{2.7}$$

přes klasickou transformaci

$$z(t) = (u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t))^T, t \in [a, b]. \tag{2.8}$$

Poznámka 2.4 Funkce u je řešení problému (2.1), (2.2) právě tehdy, když z definováno jako (2.8) je řešením úlohy (2.4), (2.5). Pokud $z_1 = u$, tak z toho vyplývá, že řešení z je jednoznačně určeno jeho první složkou z_1.

Vezměme fundamentální systém rovnice odpovídající homogenní rovnici z (2.1), tj.

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(t) u^{(j)}(t) = 0, \tag{2.9}$$

a označme je $u_{[1]}, \dots, u_{[n]}$. Dále označme W Wronského matici rovnice (2.9)

$$W(t) = \begin{pmatrix} u_{[1]}(t) & \cdots & u_{[n]}(t) \\ u'_{[1]}(t) & \cdots & u'_{[n]}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{[1]}^{(n-1)}(t) & \cdots & u_{[n]}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, t \in [a, b]. \tag{2.10}$$

Protože W je fundamentální matice systému $z'(t) + A(t)z(t) = 0$, kde A má tvar (2.6), můžeme použít Lemma 1.8. Proto, je-li ℓ z (2.7) takové, že $\det \ell(W) \neq 0$, dostaneme Greenovu matici G problému

$$z'(t) + A(t)z(t) = 0, \tag{2.11}$$

$$\ell(z) = 0 \tag{2.12}$$

s maticí A ve tvaru (2.6). Matice G má podle Lemmatu 1.8 následující tvar

$$G(t, \tau) = W(t)H(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t)W(t)W^{-1}(\tau), \quad t, \tau \in [a, b], \tag{2.13}$$

kde

$$H(\tau) = -[\ell(W)]^{-1} \left(\int_\tau^b V(s)A(s)W(s)\,\mathrm{d}s \cdot W^{-1}(\tau) + V(\tau) \right), \tag{2.14}$$

$\tau \in [a, b]$.

Věta 2.5 *Greenovou funkcí úlohy* (2.1),(2.2) *je*

$$g(t,s) = \frac{G_{1,n}(t,s)}{a_n}, \quad (t,s) \in [a,b]^2, \tag{2.15}$$

kde G *je definováno v* (2.13), (2.14).

Důkaz: Nejdřív si označme

$G(t,\tau) = (G_{ij}(t,\tau))_{i,j=1}^n, \quad H(\tau) = (H_{ij}(\tau))_{i,j=1}^n, \quad W^{-1}(\tau) = (w_{ij}(\tau))_{i,j=1}^n,$
a $\quad W(t) = (W_{ij}(t))_{i,j=1}^n, \quad t,\tau \in [a,b].$

Vzhledem k (2.13) pro $i = 1,\dots,n$ platí

$$\begin{aligned} G_{in}(t,\tau) &= \sum_{j=1}^n W_{ij}(t)(H_{jn}(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t) w_{jn}(\tau)) \\ &= \sum_{j=1}^n u_j^{(i-1)}(t)(H_{jn}(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t) w_{jn}(\tau)) \\ &= \begin{cases} \sum_{j=1}^n u_j^{(i-1)}(t) H_{jn}(\tau) & \text{pro } t \le \tau \\ \sum_{j=1}^n u_j^{(i-1)}(t)(H_{jn}(\tau) + w_{jn}(\tau)) & \text{pro } t > \tau \end{cases} \end{aligned} \tag{2.16}$$

pro $(t,\tau) \in [a,b] \times [a,b]$.

Protože $G_{1,n}(t,\tau) = \sum_{j=1}^n u_j(t)(H_{jn}(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t) w_{jn}(\tau))$, $(t,\tau) \in [a,b]^2$, pak pro $i = 1,\dots,n-1$ platí

$$\frac{\partial^i G_{1,n}}{\partial t^i}(t,\tau) = \sum_{j=1}^n u_j^{(i)}(t)(H_{jn}(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t) w_{jn}(\tau)) = G_{i+1,n}(t,\tau)$$

pro $(t,\tau) \in [a,b]^2, t \ne \tau$. Odtud vyplývá, že $G_{i,n}(t,\tau) = \frac{\partial^{i-1} G_{1,n}}{\partial t^{i-1}}(t,\tau), t \ne \tau$.

V $t = \tau$ lze zleva spojitě dodefinovat $\frac{\partial^i G_{1,n}}{\partial t^i}(\cdot,\tau)$ takto:

$$\frac{\partial^i G_{1,n}}{\partial t^i}(t,t) := G_{i+1,n}(t,t), \quad t \in [a,b], i = 1,\dots,n-1.$$

Z vlastností 2., 3. z Lemmatu 1.8 vidíme, že $G_{1,n}(\cdot,\tau),\dots,\frac{\partial^{n-2} G_{1,n}}{\partial t^{n-2}}(\cdot,\tau)$ jsou absolutně spojité na $[a,b]$ a $\frac{\partial^{n-1} G_{1,n}}{\partial t^{n-1}}(\cdot,\tau)$ je absolutně spojité na $[a,\tau], (\tau,b]$ pro všechna $\tau \in [a,b]$. $G_{1,n}$ tedy splňuje 1. podmínku z Definice 2.2.

Z faktu, že G je Greenova matice okrajové úlohy (2.4), (2.5) plyne, že $G_{1,n}(t,\cdot),\dots,\frac{\partial^{n-1}G_{1,n}}{\partial t^{n-1}}(t,\cdot)\in\mathbb{BV}([a,b];\mathbb{R}^{n\times n})$. Je tedy splněna i 2. podmínka z Definice 2.2.

Nyní ověřme, že $G_{1,n}$ splňuje 3. podmínku z Definice 2.2. Zvolme $h\in\mathbb{L}^1([a,b];\mathbb{R})$ libovolně. Označme $q(t)=(0,0,\dots,\frac{h(t)}{a_n})^T$, pro skoro všechna $t\in[a,b]$. Pak z 3. vlastnosti Definice 1.4 vyplývá, že

$$\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}=x(t)=\int_a^b G(t,\tau)q(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_a^b G(t,\tau)\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\ \frac{h(\tau)}{a_n}\end{pmatrix}\mathrm{d}\tau$$

je jediným řešením (2.4), (2.5). Pro první složku x_1 vektoru x platí

$$x_1(t)=\int_a^b G_{1,n}(t,\tau)\frac{h(\tau)}{a_n}\,\mathrm{d}\tau=\int_a^b\frac{G_{1,n}(t,\tau)}{a_n}h(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\qquad(2.17)$$

$t\in[a,b]$. To je ekvivalentní vzhledem k poznámce (2.4) tomu, že x_1 (mající tvar (2.17)) je jediné řešení (2.1), (2.2). Označíme-li tedy $g(t,\tau)=\frac{G_{1,n}(t,\tau)}{a_n}$, kde $(t,\tau)\in[a,b]^2$, jde o Greenovu funkci úlohy (2.1), (2.2). $\square$

V této kapitole jsem definice a věty čerpala z [2], [9] a [10].

Kapitola 3

Příklady

V následujících příkladech jsou zadány okrajové úlohy pro diferenciální soustavy a rovnice. Naším úkolem bude najít Greenovy matice a funkce. Řešení následujících příkladů má stejnou strukturu, tzn.

1. Okrajovou úlohu pro rovnici 2. řádu převedeme na soustavu rovnic 1. řádu.
2. Najdeme fundamentální matici $X(t)$ a poté pomocí matic $V(t)$ a K nalezneme operátor ℓ.
3. Vypočítáme $\ell(X)$ a zjistíme, za jakých předpokladů je regulární.
4. Vypočítáme Greenovu matici $G(t,s)$.
5. Nalezneme Greenovu funkci $g(t,s)$.
6. Vykreslíme Greenovu funkci v MATLABu.

Příklad 3.1 Nalezněte Greenovu funkci okrajové úlohy pro diferenciální rovnici

$$-u'' = 0$$

na intervalu $[0,1]$ s okrajovými podmínkami

$$au(0) - bu'(0) = 0, \qquad cu(1) + du'(1) = 0,$$

kde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ a $a,b,c,d \geq 0$

Řešení:

1. Nejprve si okrajovou úlohu pro rovnici 2. řádu převedeme na okrajovou úlohu pro soustavu rovnic 1. řádu pomocí transformace $x_1 = u$ a $x_2 = u'$. Tedy máme soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= 0, \end{aligned}$$

kterou lze přepsat maticově ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Podobně převedeme i okrajové podmínky

$$\begin{aligned} ax_1(0) - bx_2(0) &= 0, \\ cx_1(1) + dx_2(1) &= 0, \end{aligned}$$

což lze opět zapsat ve tvaru

$$A_1 x(0) + A_2 x(1) = 0, \tag{3.2}$$

kde $A_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ a $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

2. Najdeme fundamentální matici řešení X rovnice (3.1) a matice K a V potřebné k nalezení operátoru $\ell(x) = Kx(0) + (\mathrm{KS}) \int_0^1 V(t)\, \mathrm{d}[x(t)]$. Snadno lze dokázat, že vektorové funkce $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ jsou řešení rovnice (3.1). Tato dvě řešení jsou lineárně nezávislá, neboť

$$\det \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Matice $X(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, jejíž sloupce tvoří lineárně nezávislá řešení rovnice (3.1), je tedy opravdu fundamentální maticí řešení rovnice (3.1). Nyní určíme matice K a V tak, aby platila rovnost

$$Kx(0) + (\mathrm{KS}) \int_0^1 V(t)\, \mathrm{d}[x(t)] = A_1 x(0) + A_2 x(1), \tag{3.3}$$

pro všechna $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Položme

$$V = A_2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$K = A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Dosazením K a V do $\ell(x)$ ověříme, že rovnost (3.3) platí.

$$\begin{aligned} \ell(x) &= Kx(0) + (\mathrm{KS})\int_0^1 V(t)\,\mathrm{d}[x(t)] \\ &= (A_1 + A_2)x(0) + (\mathrm{KS})\int_0^1 A_2\,\mathrm{d}[x(t)] \\ &= A_1x(0) + A_2x(0) + A_2x(1) - A_2x(0) = A_1x(0) + A_2x(1). \end{aligned}$$

3. Vypočítáme $\ell(X)$ a zjistíme, za jakých předpokladů je regulární.

   Platí

$$\begin{aligned} \ell(X) = A_1X(0) + A_2X(1) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -b & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c+d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ c+d & c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Tato matice je regulární právě tehdy, když

$$\det \ell(X) = -bc - ac - ad \neq 0.$$

4. Nalezneme Greenovu matici okrajové úlohy

$$G(t,s) = \begin{cases} X(t)(-D^{-1}A_2X(1))X^{-1}(s) & \text{pro } 0 \le t \le s \le 1, \\ X(t)(E - D^{-1}A_2X(1))X^{-1}(s) & \text{pro } 0 \le s \le t \le 1, \end{cases}$$

   kde $D = \ell(X) = A_1X(0) + A_2X(1) = \begin{pmatrix} -b & a \\ c+d & c \end{pmatrix}$.

   Označme $\Delta = \det D$. Vzhledem k tomu, že $\Delta \neq 0$, existuje inverzní matice D^{-1}, která je rovna

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{c}{\Delta} & -\frac{a}{\Delta} \\ \frac{-c-d}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta} \end{pmatrix} = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} c & -a \\ -c-d & -b \end{pmatrix}.$$

Pak pro $t \leq s$ platí

$$\begin{aligned} G(t,s) &= X(t)(-D^{-1}A_2X(1))X^{-1}(s) \\ &= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \\ \frac{c+d}{\Delta} & \frac{b}{\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c+d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{tac+bc}{\Delta} & \frac{(at+b)(c+d-sc)}{\Delta} \\ \frac{ac}{\Delta} & \frac{ac+ad-sac}{\Delta} \end{pmatrix} = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} (at+b)c) & (at+b)(c+d-sc) \\ ac & ac+ad-sac \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a pro $t > s$ platí

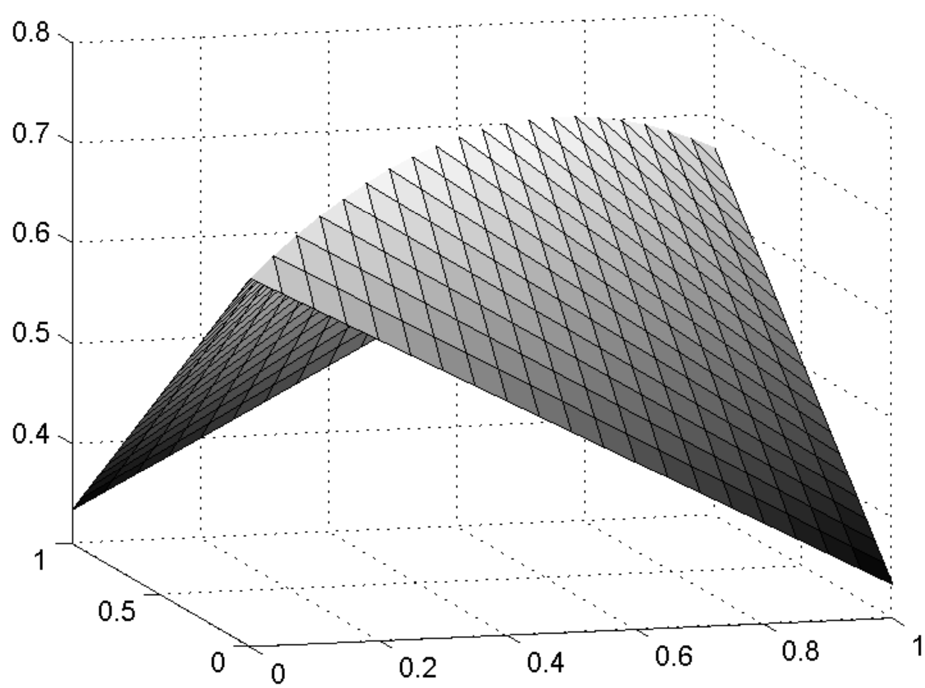
$$\begin{aligned} G(t,s) &= X(t)(E - D^{-1}A_2X(1))X^{-1}(s) \\ &= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a(c+d)}{\Delta} & \frac{ac}{\Delta} \\ \frac{bc+bd}{\Delta} & \frac{bc}{\Delta} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{tac-ac-ad}{\Delta} & \frac{(as+b)(c+d-tc)}{\Delta} \\ \frac{ac}{\Delta} & \frac{-bc-sac}{\Delta} \end{pmatrix} = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} a(tc-c-d) & (as+b)(c+d-tc) \\ ac & -bc-sac \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. Předpis Greenovy funkce dostáváme takto

$$\begin{aligned} g(t,s) &= \frac{G_{1,2}(t,s)}{a_2} = -G_{1,2}(t,s) \\ &= \begin{cases} -\Delta^{-1}(c+d-sc)(at+b) & \text{pro } 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ -\Delta^{-1}(c+d-tc)(as+b) & \text{pro } 0 \leq s \leq t \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

kde $\Delta = -bc - ac - ad$.

Greenova funkce pro $a = b = c = d = 1$ je vykreslena na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Greenova funkce příkladu 3.1 pro $a = b = c = d = 1$

Příklad 3.2 Nalezněte Greenovu funkci okrajové úlohy pro diferenciální rovnici

$$u'' = 0$$

na intervalu $[0,1]$ s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u'(0) &= 0, \\ \alpha u(\eta) &= u(1), \end{aligned}$$

kde $\alpha \in (0,1), \eta \in (0,1)$.

Řešení:

1. Nejprve si okrajovou úlohu pro rovnici 2. řádu převedeme na okrajovou úlohu pro soustavu rovnic 1. řádu pomocí transformace $x_1 = u$ a $x_2 = u'$. Obdobně jako v příkladu 3.1 dostaneme soustavu (3.1). Podobně převedeme i okrajové podmínky

   $$\begin{aligned} x_2(0) &= 0, \\ \alpha x_1(\eta) - x_1(1) &= 0, \end{aligned}$$

   které lze zapsat ve tvaru

   $$A_1 x(0) + A_2 x(\eta) + A_3 x(1) = 0, \tag{3.4}$$

   kde $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ pro $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

2. Najdeme fundamentální matici řešení $X(t)$ rovnice (3.1) a matice K a V potřebné k nalezení operátoru ℓ.

   Fundamentální matice řešení rovnice (3.1) je stejná jako v Příkladu 3.1, tedy $X(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Nyní určíme matice K a V tak, aby platila rovnost

   $$Kx(0) + (\mathrm{KS}) \int_0^1 V(t)\, \mathrm{d}[x(t)] = A_1 x(0) + A_2 x(\eta) + A_3 x(1) = 0, \tag{3.5}$$

pro $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Položme

$$K = A_1 + A_2 + A_3$$

a

$$V = A_2 + A_3 - A_2\chi_{[\eta,1)}(t).$$

Dosazením K a V do $\ell(x)$ ověříme, že rovnost (3.5) platí.

$$\begin{aligned} \ell(x) &= Kx(0) + (\mathrm{KS})\int_0^1 V(t)\,\mathrm{d}[x(t)] \\ &= (A_1 + A_2 + A_3)x(0) + (\mathrm{KS})\int_0^1 A_2 + A_3 - A_2\chi_{[\eta,1)}(t)\,\mathrm{d}[x(t)] \\ &= (A_1 + A_2 + A_3)x(0) + (A_2 + A_3 - A_2)x(1) - A_2x(0) - A_3x(0) \\ &+ A_2x(\eta) = A_1x(0) + A_2x(\eta) + A_3x(1) \end{aligned}$$

3. Vypočítáme $\ell(X)$ a zjistíme, za jakých předpokladů je regulární.

   Platí

$$\begin{aligned} \ell(X) &= A_1X(0) + A_2X(\eta) + A_3X(1) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha\eta & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha\eta - 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Vidíme, že $\det(\ell(X)) = \alpha - 1$. Vzhledem k předpokladu $\alpha \neq 1$ je zřejmě $\ell(X)$ regulární.

4. Nalezneme Greenovu matici

$$G(t,\tau) = X(t)H(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t)X(t)X^{-1}(\tau), \tag{3.6}$$

   kde

$$H(\tau) = -[\ell(X)]^{-1}\left(\int_\tau^b V(s)A(s)X(s)\,\mathrm{d}sX^{-1}(\tau) + V(\tau)\right). \tag{3.7}$$

Výpočtem zjistíme, že $[\ell(X)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-\alpha\eta}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{pmatrix}$, $[X(\tau)]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix}$ a

$$
\begin{aligned}
V(s) &= A_2 + A_3 - A_2\chi_{[\eta,1)}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \chi_{[\eta,1)}(s) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha-1 & 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [0,\eta) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [\eta,1] \end{matrix} \right\} \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha-1 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [0,\eta), \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [\eta,1]. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Nejdříve vypočítáme $H(\tau)$ pro $\tau < \eta$. Víme, že

$$
H(\tau) = -[\ell(X)]^{-1} \left(\int_\tau^b V(s)A(s)X(s)\,\mathrm{d}s X^{-1}(\tau) + V(\tau) \right).
$$

Pro přehlednost nejdříve spočítáme integrál uvnitř závorky. Získáme

$$\int_\tau^b V(s)A(s)X(s)\,\mathrm{d}s = \int_\tau^1 \left\{ \begin{array}{ll} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha-1 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s\in[\tau,\eta) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s\in[\eta,1] \end{array} \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s$$

$$= \int_\tau^1 \left\{ \begin{array}{ll} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha-1 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s\in[\tau,\eta) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s\in[\eta,1] \end{array} \right\} \mathrm{d}s$$

$$= \int_\tau^\eta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha-1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s + \int_\eta^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (\eta-\tau)(\alpha-1) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \eta-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (\eta-1)+(\eta-\tau)(\alpha-1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Integrál dosadíme a tak získáme matici $H(\tau)$ pro $\tau < \eta$

$$\begin{aligned} H(\tau) &= -[\ell(X)]^{-1} \left(\int_\tau^b V(s)A(s)X(s)\ \mathrm{d}s X^{-1}(\tau) + V(\tau) \right) \\ &= - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-\alpha\eta}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (\eta-1)+(\eta-\tau)(\alpha-1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha-1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{\alpha\eta-1}{\alpha-1} & \frac{-1}{\alpha-1} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\eta-1)+(\eta-\tau)(\alpha-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha-1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{\alpha\eta-1}{\alpha-1} & \frac{-1}{\alpha-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha-1 & (\eta-1)+(\eta-\tau)(\alpha-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \frac{-\eta+1-(\eta-\tau)(\alpha-1)}{\alpha-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dále budeme počítat matici $H(\tau)$ pro $\tau \geq \eta$:

$$
\begin{aligned}
H(\tau) &= -[\ell(X)]^{-1}\left(\int_\tau^b V(s)A(s)X(s)\ \mathrm{d}s X^{-1}(\tau) + V(\tau)\right) \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{\alpha\eta-1}{\alpha-1} & \frac{-1}{\alpha-1} \end{pmatrix}\left(\int_\tau^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ds \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix}\right. \\
&\quad \left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{\alpha\eta-1}{\alpha-1} & \frac{-1}{\alpha-1} \end{pmatrix}\left(\int_\tau^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\ ds \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \qquad (3.9) \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{\alpha\eta-1}{\alpha-1} & \frac{-1}{\alpha-1} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau-1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{\alpha\eta-1}{\alpha-1} & \frac{-1}{\alpha-1} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{\alpha\eta-1}{\alpha-1} & \frac{-1}{\alpha-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \tau-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \frac{1-\tau}{\alpha-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Nyní vypočítáme předpis Greenovy matice $G(t,\tau)$

pro $0 \le \tau < \eta < t \le 1$ nebo $0 \le \tau < t < \eta < 1$:

$$\begin{aligned} G(t,\tau) &= X(t)H(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t)X(t)X^{-1}(\tau) \\ &= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \frac{-\eta+1-(\eta-\tau)(\alpha-1)}{\alpha-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{-\eta+1-(\eta-\tau)(\alpha-1)}{\alpha-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & t-\tau+\frac{-\eta+1-(\eta-\tau)(\alpha-1)}{\alpha-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t-\eta+\frac{1-\eta}{\alpha-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pro $0 < t \le \tau < \eta < 1$:

$$\begin{aligned} G(t,\tau) &= X(t)H(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t)X(t)X^{-1}(\tau) \\ &= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \frac{-\eta+1-(\eta-\tau)(\alpha-1)}{\alpha-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{-\eta+1-(\eta-\tau)(\alpha-1)}{\alpha-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \tau-\eta+\frac{1-\eta}{\alpha-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pro $0 < \eta \le \tau < t \le 1$:

$$\begin{aligned} G(t,\tau) &= X(t)H(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t)X(t)X^{-1}(\tau) \\ &= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \frac{1-\tau}{\alpha-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha-1} & \frac{1-\tau}{\alpha-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha-1} & t-\tau+\frac{1-\tau}{\alpha-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

a pro $0 < \eta < t \le \tau < 1$ nebo $0 < t < \eta \le \tau < 1$:

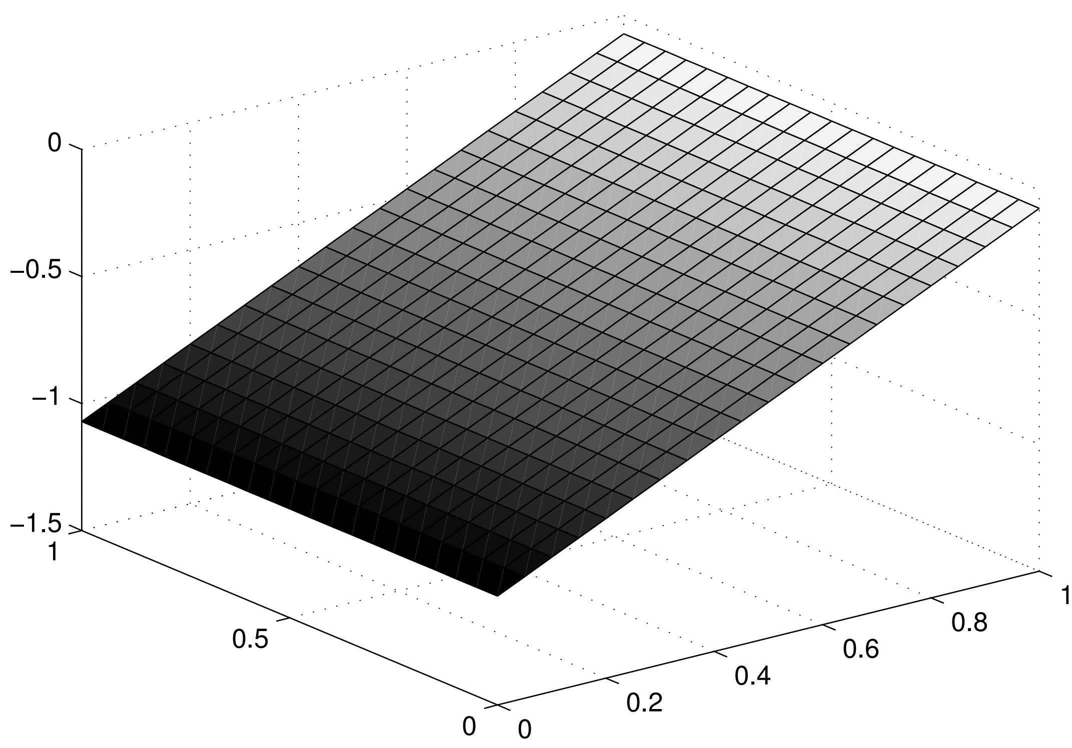
$$\begin{aligned} G(t,\tau) &= X(t)H(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t)X(t)X^{-1}(\tau) \\ &= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \frac{1-\tau}{\alpha-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha-1} & \frac{1-\tau}{\alpha-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. Předpis Greenovy funkce okrajové úlohy pro danou diferenciální rov-

nici dostáváme takto

$$g(t,\tau) = \begin{cases} t-\eta+\frac{1-\eta}{\alpha-1} & \text{pro } 0 \le \tau < \eta < t \le 1 \\ & \quad \text{nebo } 0 \le \tau < t < \eta < 1, \\ \tau-\eta+\frac{1-\eta}{\alpha-1} & \text{pro } 0 < t \le \tau < \eta < 1, \\ t-\tau+\frac{1-\tau}{\alpha-1} & \text{pro } 0 < \eta \le \tau < t \le 1, \\ \frac{1-\tau}{\alpha-1} & \text{pro } 0 < \eta < t \le \tau < 1 \\ & \quad \text{nebo } 0 < t < \eta \le \tau < 1. \end{cases}$$

Greenova funkce pro náhodně vygenerované $\eta = 0.6555$ a $\alpha = 0.1712$ je vykreslena na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Greenova funkce příkladu 3.2 pro $\eta = 0.6555$ a $\alpha = 0.1712$

Příklad 3.3 Nalezněte Greenovu funkci okrajové úlohy pro diferenciální rovnici

$$u'' = 0$$

na intervalu $[0,1]$ s okrajovými podmínkami

$$u(0) = 0,$$
$$\alpha u(\eta) = u(1),$$

kde $\eta \in (0,1), \alpha \in (0, \frac{1}{\eta})$.

Řešení:

1. Nejprve si okrajovou úlohu pro rovnici 2. řádu převedeme na okrajovou úlohu pro soustavu rovnic 1. řádu pomocí transformace $x_1 = u$ a $x_2 = u'$. Obdobně jako v příkladu 3.1 dostaneme rovnici (3.1). Podobně převedeme i okrajové podmínky

   $$x_1(0) = 0,$$
   $$\alpha x_1(\eta) - x_1(1) = 0,$$

   které lze zapsat ve tvaru

   $$A_1 x(0) + A_2 x(\eta) + A_3 x(1) = 0, \tag{3.10}$$

   kde $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ a $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

2. Najdeme fundamentální matici řešení $X(t)$ rovnice (3.1) a matice K a V potřebné k nalezení operátoru ℓ.

   Fundamentální matice řešení rovnice (3.1) je stejná jako v příkladu 3.1, tedy

   $$X(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Nyní určíme matice K a V tak, aby platila rovnost

   $$Kx(0) + (\mathrm{KS}) \int_0^1 V(t) \ \mathrm{d}[x(t)] = A_1 x(0) + A_2 x(\eta) + A_3 x(1) = 0, \tag{3.11}$$

kde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Položme

$$K = A_1 + A_2 + A_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i$$

a

$$V = A_2 + A_3 - A_2\chi_{[\eta,1)}(t) = A_2\chi_{[0,\eta)\cup\{1\}}(t) + A_3.$$

Dosazením K a V do $\ell(x)$ ověříme, že rovnost (3.11) platí.

3. Vypočítáme $\ell(X)$ a zjistíme, za jakých předpokladů je regulární.

   Platí

$$\begin{aligned}
\ell(X) &= A_1X(0) + A_2X(\eta) + A_3X(1) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha\eta & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha\eta - 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

   Vidíme, že $\det(\ell(X)) = 1 - \alpha\eta$. Vzhledem k předpokladu $\alpha \neq \frac{1}{\eta}$ je zřejmě $\ell(X)$ regulární.

4. Nalezneme Greenovu matici $G(t,\tau)$ s předpisem (3.6), kde $H(\tau)$ má předpis (3.7).

   Výpočtem zjistíme, že

$$[\ell(X)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-\alpha}{\alpha\eta-1} & \frac{1}{\alpha\eta-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, [X(\tau)]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix}$$

a

$$V(s) = A_2 + A_3 - A_2\chi_{[\eta,1)}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \chi_{[\eta,1)}(s)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha - 1 & 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [0,\eta) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [\eta,1] \end{matrix} \right\}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha - 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [0,\eta), \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [\eta,1]. \end{cases}$$

Nejdříve vypočítáme $H(\tau)$ pro $\tau < \eta$. Víme, že

$$H(\tau) = -[\ell(X)]^{-1} \left(\int_\tau^b V(s)A(s)X(s) \; \mathrm{d}s X^{-1}(\tau) + V(\tau) \right).$$

Výraz uvnitř závorky je stejný jako v příkladu 3.2 v rovnosti (3.8). Tedy

$$H(\tau) = -\begin{pmatrix} \frac{1-\alpha}{\alpha\eta-1} & \frac{1}{\alpha\eta-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha - 1 & (\eta - 1) + (\eta - \tau)(\alpha - 1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1-\alpha}{\alpha\eta-1} & \frac{-\eta+1-(\eta-\tau)(\alpha-1)}{\alpha\eta-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále budeme počítat matici $H(\tau)$ pro $\tau \geq \eta$. Výraz uvnitř závorky je stejný jako v příkladu 3.2 v rovnosti (3.9)

$$H(\tau) = -[\ell(X)]^{-1} \left(\int_\tau^b V(s)A(s)X(s) \; \mathrm{d}s X^{-1}(\tau) + V(\tau) \right)$$
$$= -\begin{pmatrix} \frac{1-\alpha}{\alpha\eta-1} & \frac{1}{\alpha\eta-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \tau - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha\eta-1} & \frac{1-\tau}{\alpha\eta-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní vypočítáme předpis Greenovy matice $G(t,\tau)$

pro $0 \le \tau < \eta < t \le 1$ nebo $0 \le \tau < t < \eta < 1$:

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau) &= X(t)H(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t)X(t)X^{-1}(\tau) \\
&= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\alpha}{\alpha\eta-1} & \frac{-\eta+1-(\eta-\tau)(\alpha-1)}{\alpha\eta-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{t(1-\alpha)}{\alpha\eta-1} & \frac{-t[\eta-1+(\eta-\tau)(\alpha-1)]}{\alpha\eta-1} \\ \frac{1-\alpha}{\alpha\eta-1} & \frac{-\eta+1-(\eta-\tau)(\alpha-1)}{\alpha\eta-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+\frac{t(1-\alpha)}{\alpha\eta-1} & t-\tau-\frac{t[\eta-1+(\eta-\tau)(\alpha-1)]}{\alpha\eta-1} \\ \frac{1-\alpha}{\alpha\eta-1} & 1+\frac{-\eta+1-(\eta-\tau)(\alpha-1)}{\alpha\eta-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+\frac{t(1-\alpha)}{\alpha\eta-1} & 2t-\tau-\frac{t\tau(\alpha-1)}{\alpha\eta-1} \\ \frac{1-\alpha}{\alpha\eta-1} & \frac{\tau(\alpha-1)}{\alpha\eta-1} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

pro $0 < t \le \tau < \eta < 1$:

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau) &= X(t)H(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t)X(t)X^{-1}(\tau) \\
&= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\alpha}{\alpha\eta-1} & \frac{-\eta+1-(\eta-\tau)(\alpha-1)}{\alpha\eta-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{t(1-\alpha)}{\alpha\eta-1} & \frac{-t[\eta-1+(\eta-\tau)(\alpha-1)]}{\alpha\eta-1} \\ \frac{1-\alpha}{\alpha\eta-1} & \frac{-\eta+1-(\eta-\tau)(\alpha-1)}{\alpha\eta-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t(1-\alpha)}{\alpha\eta-1} & -t+\frac{t\tau(\alpha-1)}{\alpha\eta-1} \\ \frac{1-\alpha}{\alpha\eta-1} & -1+\frac{\tau(\alpha-1)}{\alpha\eta-1} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

pro $0 < \eta \le \tau < t \le 1$:

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau) &= X(t)H(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t)X(t)X^{-1}(\tau) \\
&= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha\eta-1} & \frac{1-\tau}{\alpha\eta-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{t}{\alpha\eta-1} & \frac{t(1-\tau)}{\alpha\eta-1} \\ \frac{1}{\alpha\eta-1} & \frac{1-\tau}{\alpha\eta-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{t}{\alpha\eta-1} & t-\tau+\frac{t(1-\tau)}{\alpha\eta-1} \\ \frac{1}{\alpha\eta-1} & 1+\frac{1-\tau}{\alpha\eta-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+\frac{t}{\alpha\eta-1} & -\tau+\frac{t(\alpha\eta-\tau)}{\alpha\eta-1} \\ \frac{1}{\alpha\eta-1} & \frac{\alpha\eta-\tau}{\alpha\eta-1} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

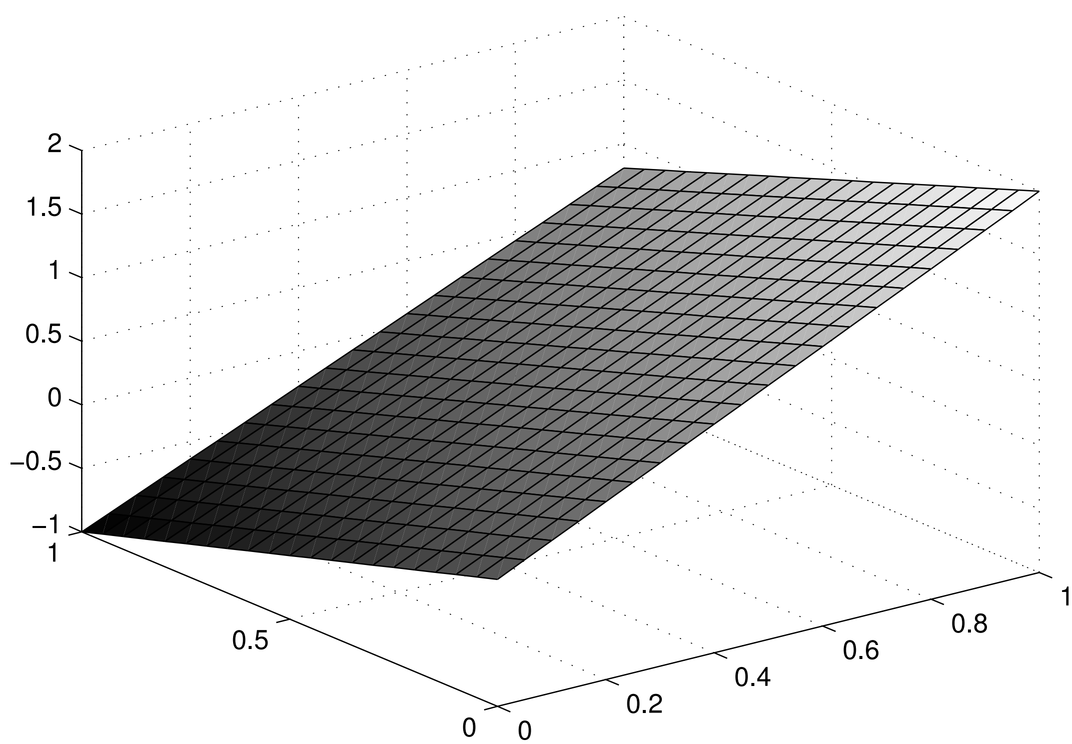
a pro $0 < \eta < t \le \tau < 1$ nebo $0 < t < \eta \le \tau < 1$:

$$G(t,\tau) = X(t)H(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t)X(t)X^{-1}(\tau)$$
$$= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha\eta-1} & \frac{1-\tau}{\alpha\eta-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{\alpha\eta-1} & \frac{t(1-\tau)}{\alpha\eta-1} \\ \frac{1}{\alpha\eta-1} & \frac{1-\tau}{\alpha\eta-1} \end{pmatrix}.$$

5. Předpis Greenovy funkce okrajové úlohy pro danou diferenciální rovnici dostáváme takto

$$g(t,\tau) = \begin{cases} 2t - \tau - \frac{t\tau(\alpha-1)}{\alpha\eta-1} & \text{pro } 0 \le \tau < \eta < t \le 1 \\ & \quad \text{nebo } 0 \le \tau < t < \eta < 1, \\ -t + \frac{t\tau(\alpha-1)}{\alpha\eta-1} & \text{pro } 0 < t \le \tau < \eta < 1, \\ -\tau + \frac{t(\alpha\eta-\tau)}{\alpha\eta-1} & \text{pro } 0 < \eta \le \tau < t \le 1, \\ \frac{t(1-\tau)}{\alpha\eta-1} & \text{pro } 0 < \eta < t \le \tau < 1, \\ & \quad \text{nebo } 0 < t < \eta \le \tau < 1. \end{cases}$$

Greenova funkce pro náhodně vygenerované $\eta = 0.0971$ a $\alpha = 0.8235$ je vykreslena na obrázku 3.3.



Obrázek 3.3: Greenova funkce příkladu 3.3 pro $\eta = 0.0971$ a $\alpha = 0.8235$

Příklad 3.4 Nalezněte Greenovu funkci okrajové úlohy pro diferenciální rovnici

$$-u'' = 0$$

na intervalu $[0, 1]$ s okrajovými podmínkami

$$u(0) = au(\xi),$$
$$u(1) = bu(\eta),$$

kde $0 < \xi < \eta < 1$ a $0 \leq a, b < 1$.

Řešení:

1. Nejprve si okrajovou úlohu pro rovnici 2. řádu převedeme na okrajovou úlohu pro soustavu rovnic 1. řádu pomocí transformace $x_1 = u$ a $x_2 = u'$. Obdobně jako v příkladu 3.1 dostaneme rovnici (3.1). Podobně převedeme i okrajové podmínky

   $$x_1(0) - ax_1(\xi) = 0,$$
   $$x_1(1) - bx_1(\eta) = 0,$$

   což lze zapsat ve tvaru

   $$A_1 x(0) + A_2 x(\xi) + A_3 x(\eta) + A_4 x(1) = 0, \tag{3.12}$$

   kde $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

2. Najdeme fundamentální matici řešení $X(t)$ rovnice (3.1) a matice K a V potřebné k nalezení operátoru ℓ.

   Fundamentální matice řešení rovnice (3.1) je $X(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Nyní určíme matice K a V tak, aby platila rovnost

   $$Kx(0) + (\mathrm{KS}) \int_0^1 V(t) \ \mathrm{d}[x(t)] = A_1 x(0) + A_2 x(\xi) + A_3 x(\eta) + A_4 x(1), \tag{3.13}$$

kde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Položme

$$K = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \sum_{i=1}^{4} A_i$$

a

$$V = A_2\chi_{[0,\xi)}(t) + A_3\chi_{[0,\eta)}(t) + A_4.$$

Dosazením K a V do $\ell(x)$ ověříme, že rovnost (3.13) platí.

3. Vypočítáme $\ell(X)$ a zjistíme, za jakých předpokladů je regulární.

   Platí

$$\begin{aligned}
\ell(X) &= A_1x(0) + A_2x(\xi) + A_3x(\eta) + A_4x(1) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\xi a & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b\eta & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -a\xi & 1-a \\ 1-b\eta & 1-b \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

   Vidíme, že $\det(\ell(X)) = -[a\xi(1-b) + (1-a)(1-b\eta)]$. Vzhledem k předpokladu, že $0 < \xi < \eta < 1$ a $0 \leq a, b < 1$ je zřejmě $a\xi(1-b) \geq 0$ a $(1-a)(1-b\eta) > 0$. Tedy $\det(\ell(X)) = -[a\xi(1-b)+(1-a)(1-b\eta)] < 0$, takže $\ell(X)$ je regulární. Označme $\Delta = \det \ell(X)$.

4. Nalezneme Greenovu matici $G(t,\tau)$ s předpisem (3.6), kde $H(\tau)$ má předpis (3.7).

   Výpočtem zjistíme, že

$$[\ell(X)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b-1}{-\Delta} & \frac{1-a}{-\Delta} \\ \frac{1-b\eta}{-\Delta} & \frac{a\xi}{-\Delta} \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b-1 & 1-a \\ 1-b\eta & a\xi \end{pmatrix},\ [X(\tau)]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} \text{ a}$$

$$\begin{aligned}
V(s) &= A_2\chi_{[0,\xi)}(s) + A_3\chi_{[0,\eta)}(s) + A_4 \\
&= \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\chi_{[0,\xi)}(s) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix}\chi_{[0,\eta)}(s) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left\{\begin{matrix} \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [0,\xi) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [\xi,1] \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [0,\eta), \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [\eta,1] \end{matrix}\right\} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [0,\xi) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [\xi,\eta) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [\eta,1] \end{cases}
\end{aligned}$$

Nejdříve vypočítáme $H(\tau)$ pro $\tau \in [0,\xi)$. Víme, že

$$H(\tau) = -[\ell(X)]^{-1}\left(\int_\tau^b V(s)A(s)X(s)\,\mathrm{d}sX^{-1}(\tau) + V(\tau)\right).$$

Pro přehlednost nejdříve spočítáme integrál uvnitř závorky. Získáme

$$\int_\tau^b V(s)A(s)X(s)\,\mathrm{d}s = \int_\tau^1 \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [0,\xi) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [\xi,\eta) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [\eta,1] \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s$$

$$= \int_\tau^1 \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [0,\xi) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [\xi,\eta) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [\eta,1] \end{matrix} \right\} \mathrm{d}s$$

$$= \int_\tau^\xi \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s + \int_\xi^\eta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s$$

$$+ \int_\eta^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s$$

$$= \begin{pmatrix} (\tau-\xi)a & 0 \\ (\xi-\tau)(1-b)+(\eta-\xi)(1-b)+(1-\eta) & 0 \end{pmatrix}.$$

Integrál dosadíme a tak získáme matici $H(\tau)$ pro $\tau \in [0,\xi)$

$$H(\tau) = -[\ell(X)]^{-1} \left(\begin{pmatrix} (\tau-\xi)a & 0 \\ (\xi-\tau)(1-b)+(\eta-\xi)(1-b)+(1-\eta) & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b-1 & 1-a \\ 1-b & a\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & (\tau-\xi)a \\ 1-b & (1-b)(\eta-\tau)+(1-\eta) \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} \frac{-a(1-b)+(1-b)(a-1)}{\Delta} & \frac{a(\tau-\xi)(1-b)+(a-1)(\xi-\tau)+(a-1)(1-b)(\eta-\xi)+(a-1)(1-\eta)}{\Delta} \\ \frac{-a(b\eta-1)-a\xi(1-b)}{\Delta} & \frac{a(\tau-\xi)(b\eta-1)-a\xi(1-b)(\xi-\tau)-a\xi(1-b)(\eta-\xi)-a\xi(1-\eta)}{\Delta} \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} \frac{b-1}{\Delta} & \frac{a(\tau-\xi)(1-b)+(a-1)(\xi-\tau)+(a-1)(1-b)(\eta-\xi)+(a-1)(1-\eta)}{\Delta} \\ \frac{-a(b\eta-1)-a\xi(1-b)}{\Delta} & \frac{a(\tau-\xi)(b\eta-1)-a\xi(1-b)(\xi-\tau)-a\xi(1-b)(\eta-\xi)-a\xi(1-\eta)}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Dále budeme počítat matici $H(\tau)$ pro $\tau \in [\xi, \eta)$. Tedy

$$
\begin{aligned}
H(\tau) &= -[\ell(X)]^{-1}\left(\int_\tau^1 V(s)A(s)X(s)\,\mathrm{d}sX^{-1}(\tau) + V(\tau)\right) \\
&= -[\ell(X)]^{-1}\left(\int_\tau^1 \left\{\begin{matrix} \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [0,\xi) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [\xi,\eta) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [\eta,1] \end{matrix}\right\} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}s \right. \\
&\qquad \left. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= -[\ell(X)]^{-1}\left(\left(\int_\tau^\eta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}s + \int_\eta^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}s\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= -[\ell(X)]^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (\eta-\tau)(1-b)+(1-\eta) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= -[\ell(X)]^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\eta-\tau)(1-b)+(1-\eta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b-1 & 1-a \\ 1-b\eta & a\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-b & (\eta-\tau)(1-b)+(1-\eta) \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} \frac{(a-1)(1-b)}{\Delta} & \frac{(a-1)(\eta-\tau)(1-b)+(a-1)(1-\eta)}{\Delta} \\ \frac{-a\xi(1-b)}{\Delta} & \frac{-a\xi(\eta-\tau)(1-b)-a\xi(1-\eta)}{\Delta} \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} \frac{(a-1)(1-b)}{\Delta} & \frac{(a-1)[(\eta-\tau)(1-b)+(1-\eta)]}{\Delta} \\ \frac{-a\xi(1-b)}{\Delta} & \frac{-a\xi[(\eta-\tau)(1-b)+(1-\eta)]}{\Delta} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Nyní spočítáme matici $H(\tau)$ pro $\tau \in [\eta, 1]$. Tedy

$$H(\tau) = -[\ell(X)]^{-1}\left(\int_\tau^1 V(s)A(s)X(s)\,\mathrm{d}s X^{-1}(\tau) + V(\tau)\right)$$

$$= -[\ell(X)]^{-1}\left(\int_\tau^1 \left\{\begin{matrix} \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [0,\xi) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-b & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [\xi,\eta) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } s \in [\eta,1] \end{matrix}\right\} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}s\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= -[\ell(X)]^{-1}\left(\int_\tau^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= -[\ell(X)]^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b-1 & 1-a \\ 1-b\eta & a\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1-\tau \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{a-1}{\Delta} & \frac{(a-1)(1-\tau)}{\Delta} \\ \frac{-a\xi}{\Delta} & \frac{-a\xi(1-\tau)}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Nyní vypočítáme předpis Greenovy matice $G(t,\tau)$

pro $0 < t < \tau < \xi < \eta < t < 1$:

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau) &= X(t)H(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t)X(t)X^{-1}(\tau)\\
&= -\begin{pmatrix} t & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{b-1}{\Delta} & \frac{a(\tau-\xi)(1-b)+(a-1)(\xi-\tau)+(a-1)(1-b)(\eta-\xi)+(a-1)(1-\eta)}{\Delta}\\ \frac{-a(b\eta-1)-a\xi(1-b)}{\Delta} & \frac{a(\tau-\xi)(b\eta-1)-a\xi(1-b)(\xi-\tau)-a\xi(1-b)(\eta-\xi)-a\xi(1-\eta)}{\Delta}\end{pmatrix}\\
&= -\begin{pmatrix} \frac{(b-1)(t+a\xi)-a(b\eta-1)}{\Delta} & \frac{t(-ab\tau-ab\eta+2ab\xi-a\xi+a+b\eta-b\xi+\tau-1)+a\tau(b(\eta-\xi)+\xi-1)}{\Delta}\\ \frac{b-1}{\Delta} & \frac{a(b(-\tau-\eta+2\xi)-\xi+1)+b(\eta-\xi)+\tau-1}{\Delta}\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

pro $0 < \xi < t < \tau < \eta < 1$ nebo $0 < t < \xi < \tau < \eta < 1$:

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau) &= X(t)H(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t)X(t)X^{-1}(\tau)\\
&= -\begin{pmatrix} t & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{(a-1)(1-b)}{\Delta} & \frac{(a-1)[(\eta-\tau)(1-b)+(1-\eta)]}{\Delta}\\ \frac{-a\xi(1-b)}{\Delta} & \frac{-a\xi[(\eta-\tau)(1-b)+(1-\eta)]}{\Delta}\end{pmatrix}\\
&= -\begin{pmatrix} \frac{(1-b)[t(a-1)-a\xi]}{\Delta} & \frac{[t(a-1)-a\xi][(\eta-\tau)(1-b)+(1-\eta)]}{\Delta}\\ \frac{(a-1)(1-b)}{\Delta} & \frac{(a-1)[(\eta-\tau)(1-b)+(1-\eta)]}{\Delta}\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

pro $0 < \xi < \eta < t < \tau < 1$ nebo $0 < \xi < t < \eta < \tau < 1$ nebo $0 < t < \xi < \eta < \tau < 1$:

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau) &= X(t)H(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t)X(t)X^{-1}(\tau)\\
&= -\begin{pmatrix} t & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a-1}{\Delta} & \frac{(a-1)(1-\tau)}{\Delta}\\ \frac{-a\xi}{\Delta} & \frac{-a\xi(1-\tau)}{\Delta}\end{pmatrix}\\
&= -\begin{pmatrix} \frac{t(a-1)-a\xi}{\Delta} & \frac{(1-\tau)[t(a-1)-a\xi]}{\Delta}\\ \frac{a-1}{\Delta} & \frac{(a-1)(1-\tau)}{\Delta}\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

pro $0 < \tau < t < \xi < \eta < 1$ nebo $0 < \tau < \xi < t < \eta < 1$ nebo

$0 < \tau < \xi < \eta < t < 1$:

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau) &= X(t)H(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t)X(t)X^{-1}(\tau) \\
&= -\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{b-1}{\Delta} & \frac{a(\tau-\xi)(1-b)+(a-1)(\xi-\tau)+(a-1)(1-b)(\eta-\xi)+(a-1)(1-\eta)}{\Delta} \\ \frac{-a(b\eta-1)-a\xi(1-b)}{\Delta} & \frac{a(\tau-\xi)(b\eta-1)-a\xi(1-b)(\xi-\tau)-a\xi(1-b)(\eta-\xi)-a\xi(1-\eta)}{\Delta} \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} \frac{(b-1)(t+a\xi)-a(b\eta-1)}{\Delta} & \frac{t(-ab\tau-ab\eta+2ab\xi-a\xi+a+b\eta-b\xi+\tau-1)+a\tau(b(\eta-\xi)+\xi-1)}{\Delta} \\ \frac{b-1}{\Delta} & \frac{a(b(-\tau-\eta+2\xi)-\xi+1)+b(\eta-\xi)+\tau-1}{\Delta} \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{t(b-1)+(1-b\eta)}{-\Delta} & \frac{t(-ab\tau-ab\eta+2ab\xi-a\xi+a+b\eta-b\xi+\tau-1)+a\tau(b(\eta-\xi)+\xi-1)}{-\Delta} + t - \tau \\ \frac{b-1}{-\Delta} & \frac{ab(\xi-\tau)-b\xi+\tau}{-\Delta} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

pro $0 < \xi < \tau < t < \eta < 1$ nebo $0 < \xi < \tau < \eta < t < 1$:

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau) &= X(t)H(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t)X(t)X^{-1}(\tau) \\
&= -\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(a-1)(1-b)}{\Delta} & \frac{(a-1)[(\eta-\tau)(1-b)+(1-\eta)]}{\Delta} \\ \frac{-a\xi(1-b)}{\Delta} & \frac{-a\xi[(\eta-\tau)(1-b)+(1-\eta)]}{\Delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} \frac{(1-b)[t(a-1)-a\xi]}{\Delta} & \frac{[t(a-1)-a\xi][(\eta-\tau)(1-b)+(1-\eta)]}{\Delta} \\ \frac{(a-1)(1-b)}{\Delta} & \frac{(a-1)[(\eta-\tau)(1-b)+(1-\eta)]}{\Delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(1-a)[t(1-b)+(1-b\eta)]}{-\Delta} & \frac{[t(a-1)-a\xi][(\eta-\tau)(1-b)+(1-\eta)]}{-\Delta} + t - \tau \\ \frac{(a-1)(1-b)}{-\Delta} & \frac{(1-b)[a\xi-\tau(a-1)]}{-\Delta} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

pro $0 < \xi < \eta < \tau < t < 1$:

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau) &= X(t)H(\tau) + \chi_{(\tau,b]}(t)X(t)X^{-1}(\tau) \\
&= -\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a-1}{\Delta} & \frac{(a-1)(1-\tau)}{\Delta} \\ \frac{-a\xi}{\Delta} & \frac{-a\xi(1-\tau)}{\Delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} \frac{t(a-1)-a\xi}{\Delta} & \frac{(1-\tau)[t(a-1)-a\xi]}{\Delta} \\ \frac{a-1}{\Delta} & \frac{(a-1)(1-\tau)}{\Delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(a-1)(t-1+b\eta)-ab\xi}{-\Delta} & \frac{(1-\tau)[t(a-1)-a\xi]}{-\Delta} + t - \tau \\ \frac{a-1}{-\Delta} & \frac{(a-1)(b\eta-\tau)+a\xi(1-b)}{-\Delta} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

5. Předpis Greenovy funkce $g(t,\tau)$ má předpis:

   - $\frac{t(-ab\tau-ab\eta+2ab\xi-a\xi+a+b\eta-b\xi+\tau-1)+a\tau(b(\eta-\xi)+\xi-1)}{-\Delta}$

     pro $0<t<\tau<\xi<\eta$,
   - $\frac{[t(a-1)-a\xi][(\eta-\tau)(1-b)+(1-\eta)]}{-\Delta}$

     pro $\xi<t<\tau<\eta$ nebo $0<t<\xi<\tau<\eta$,
   - $\frac{(1-\tau)[t(a-1)-a\xi]}{-\Delta}$

     pro $\xi<\eta<t<\tau<1$ nebo $\xi<t<\eta<\tau<1$

     nebo $0<t<\xi<\eta<\tau<1$,
   - $\frac{t(-ab\tau-ab\eta+2ab\xi-a\xi+a+b\eta-b\xi+\tau-1)+a\tau(b(\eta-\xi)+\xi-1)}{-\Delta}+t-\tau$

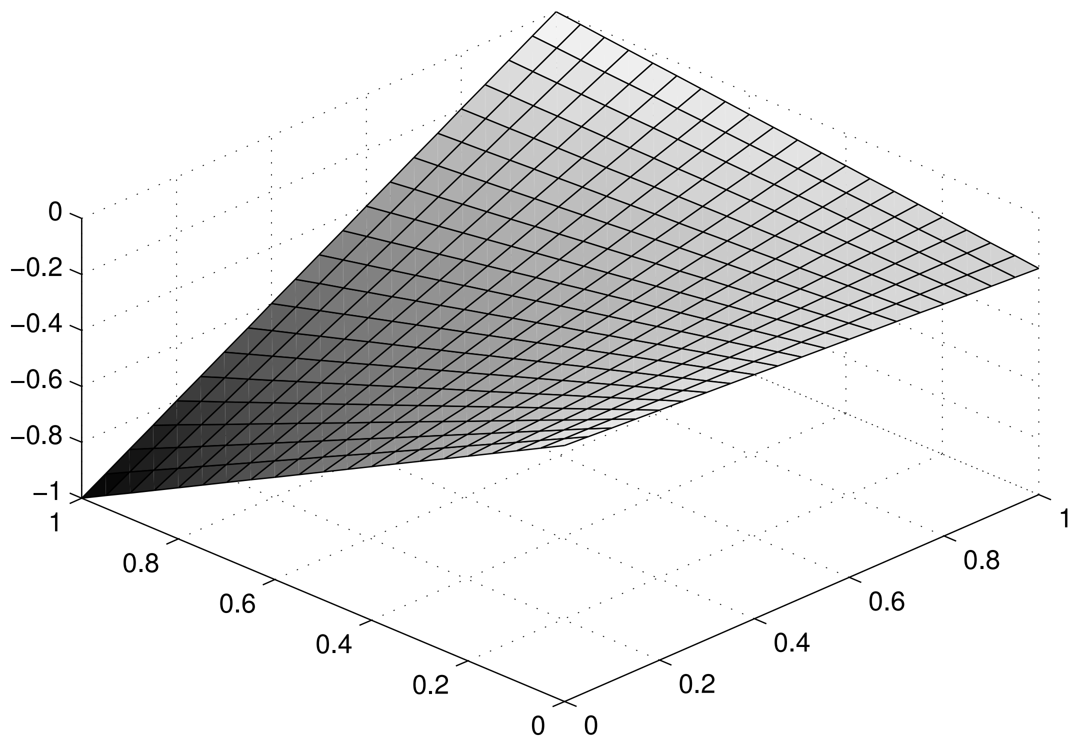
     pro $0<\tau<t<\xi<\eta$ nebo $0<\tau<\xi<t<\eta$

     nebo $0<\tau<\xi<\eta<t<1$,
   - $\frac{[t(a-1)-a\xi][(\eta-\tau)(1-b)+(1-\eta)]}{-\Delta}+t-\tau$

     pro $\xi<\tau<t<\eta$ nebo $\xi<\tau<\eta<t<1$,
   - $\frac{(1-\tau)[t(a-1)-a\xi]}{-\Delta}+t-\tau$

     pro $\xi<\eta<\tau<t<1$,

   kde $\Delta=-a\xi(1-b)-(1-b\eta)(1-a)$. Greenova funkce pro $a=0.1, b=0.3, \eta=0.5$ a $\xi=0.7$ je vykreslena na obrázku 3.4.



Obrázek 3.4: Greenova funkce příkladu 3.4 pro $a = 0.1, b = 0.3, \eta = 0.5$ a $\xi = 0.7$

Příloha:
Kurzweilův-Stieltjesův integrál

V této příloze krátce seznámíme čtenáře s Kurzweil-Stieltjesovým integrálem. Uvedeme postačující podmínky existence a uvidíme několik základních vlastností tohoto integrálu, které jsme použili v této práci.

Nejdříve si zadefinujeme pojem kalibru, δ-jemného dělení a integrálního součtu.

Definice 3.5 Každá kladná funkce $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$ se nazývá kalibr na intervalu $[a, b]$. Množinu kalibrů na $[a, b]$ značíme $\mathcal{G}[a, b]$. Je-li δ kalibr na $[a, b]$, řekneme, že značené dělení (σ, ξ) intervalu $[a, b]$ je δ-jemné, jestliže platí

$$[\sigma_{j-1}, \sigma_j] \subset (\xi_j - \delta(\xi_j), \xi_j + \delta(\xi_j))$$

pro všechna $j = 1, 2, \ldots, \nu(\sigma)$.
$\mathcal{A}(\delta; [a, b])$ značí množinu všech δ-jemných značených dělení intervalu $[a, b]$.
Nehrozí-li nedorozumění, používáme kratší značení $\mathcal{A}(\delta)$.
Mějme funkce $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a značené dělení $(\sigma, \xi) \in \mathcal{J}[a, b]$. Potom definujeme integrální součet

$$S(\sigma, \xi) = \sum_{j=1}^{\nu(\sigma)} f(\xi_j)[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})].$$

V následující definici se dozvíme jakou má Kurzweilův-Stieltjesův integrál hodnotu a jak ho budeme značit.

Definice 3.6 Nechť $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a $I \in \mathbb{R}$. Řekneme, že existuje Kurzweilův-Stieltjesův integrál (KS-integrál) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)]$ a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon \in \mathcal{G}[a, b] : ((\sigma, \xi) \in \mathcal{A}(\delta_\epsilon)) \Rightarrow |I - S(\sigma, \xi)| < \epsilon.$$

Jestliže $g(x) \equiv x$, pak místo o KS-integrálu mluvíme o Kurzweil-Henstockově integrálu a značíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Budeme využívat též zkrácené značení $\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g(x)]$.
Dále platí, že

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = -\int_b^a f\,\mathrm{d}g$$

a

$$\int_a^a f\,\mathrm{d}g = 0.$$

V následující větě zjistíme, kdy Kurzweilův-Stieltjesův integrál existuje.

Věta 3.7 *(Bolzanova-Cauchyova podmínka) Nechť $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Potom integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje právě tehdy, když platí $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon \in \mathcal{G}[a, b]$:*

$$((\sigma, \xi), (\sigma', \xi') \in \mathcal{A}(\delta_\epsilon)) \Rightarrow |S(\sigma, \xi) - S(\sigma', \xi')| < \epsilon.$$

Dále si uvedeme několik vět, v kterých uvidíme několik vlastností Kurzweil-Stieltjesova integrálu.

Věta 3.8 *Nechť $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ a nechť existují integrály $\int_a^b f_1\,\mathrm{d}g, \int_a^b f_2\,\mathrm{d}g, \int_a^b f\,\mathrm{d}g_1$ a $\int_a^b f\,\mathrm{d}g_2$. Potom pro libovolná $c_1, c_1 \in \mathbb{R}$ platí*

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2)\,\mathrm{d}g = c_1 \int_a^b f_1\,\mathrm{d}g + c_2 \int_a^b f_2\,\mathrm{d}g$$

a

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[c_1 g_1 + c_2 g_2] = c_1 \int_a^b f\,\mathrm{d}g_1 + c_2 \int_a^b f\,\mathrm{d}g_2.$$

Věta 3.9 *Nechť $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $c \in [a,b]$. Integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}g$ existuje právě tehdy, když existují oba integrály $\int_a^c f \,\mathrm{d}g$ a $\int_c^b f \,\mathrm{d}g$. V takovém případě pak platí rovnost*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}g = \int_a^c f \,\mathrm{d}g + \int_c^b f \,\mathrm{d}g.$$

V práci jsme při hledání matice K a V v příkladech 3.2, 3.3 a 3.4 dále použili vlastnost, že pro libovolnou funkci g regulovanou na $[a,b]$ platí

$$\int_a^b \chi_{(\tau,b]} \,\mathrm{d}g = g(b) - g(\tau+) \qquad \text{pro } \tau \in [a,b),$$

$$\int_a^b \chi_{[\tau,b]} \,\mathrm{d}g = g(b) - g(\tau-) \qquad \text{pro } \tau \in (a,b],$$

$$\int_a^b \chi_{[a,\tau]} \,\mathrm{d}g = g(\tau+) - g(a) \qquad \text{pro } \tau \in [a,b),$$

$$\int_a^b \chi_{[a,\tau)} \,\mathrm{d}g = g(\tau-) - g(a) \qquad \text{pro } \tau \in (a,b]$$

a

$$\int_a^b \chi_{[\tau]} \,\mathrm{d}g = g(\tau+) - g(\tau-) \qquad \text{pro } \tau \in (a,b).$$

V této příloze jsem definice a věty čerpala z [3].

Závěr

V první kapitole této práce se věnuji Greenově matici okrajové úlohy pro systém diferenciálních rovnic 1. řádu, jejím vlastnostem, za jakých podmínek existuje a jak ji vypočítat.

V druhé kapitole se věnuji především nalezení Greenovy funkce okrajové úlohy pro diferenciální rovnici n-tého řádu, jejím vlastnostem a jak ji vypočítat. Využívám i vlastností z první kapitoly, protože diferenciální rovnice n-tého řádu mohu poměrně snadno transformovat na systém diferenciálních rovnic 1. řádu.

Ve třetí kapitole je několik příkladů, ve kterých jsem hledala konkrétní Greenovu matici pro dané diferenciální rovnice druhého řádu s danou okrajovou podmínkou. Příklady mají stejnou strukturu. Nejdříve jsem si okrajovou úlohu pro rovnici 2. řádu převedla na okrajovou úlohu pro soustavu rovnic 1. řádu a nalezla fundamentální matici řešení. Nakonec jsem vypočítala Greenovu matici a Greenovu funkci, kterou jsem pak následně v programu Matlab zobrazila do grafu.

V příloze jsem se zmínila pár základních vlastností Kurzweil-Stieltjesova integrálu, které se vyskytují při výpočtech potřebných k nalezení Greenovy matice.

Literatura

[1] Kiguradze, I.: *Okrajové úlohy pro systémy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic.* MU PŘF, Brno, 1997.

[2] Rachůnková, I., Tomeček, J.: *Impulsive system of ODEs with general linear boundary conditions.* Electron. J. Qualitative Theory of Differ. Equ. 25 (2013), 1-16.

[3] Tvrdý, M.: *Stieltjesův integrál (Kurzweilova teorie).* Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2012.

[4] Kalas, J., Ráb, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU PŘF, Brno, 2001.

[5] Moučka, J., Rádl, P.: *Matematika pro studenty ekonomie.* Grada Publishing, a.s., Praha, 2010.

[6] *Diferenciální rovnice.* [online]. [cit.2016-12-12] dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Diferenciální_rovnice.

[7] *Obyčejná diferenciální rovnice.* [online]. [cit.2016-12-12] dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Obyčejná_diferenciální_rovnice.

[8] Míka, S., Kufner, A.: *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice.* SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1983.

[9] Drábek, P.: *Integrální rovnice.* SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1991

[10] Tomeček, J.: *Greenova funkce pro dvoubodové okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice.* [online]. [cit.2016-12-12] dostupné z: http://aix-slx.upol.cz/ tomecek/soubory/ruzne/greenova_funkce.pdf.