UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Aplikace vět o pevných bodech v ekonomii

Vedoucí diplomové práce:
prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc.

Vypracovala:
Veronika Burešová
AME, II. ročník

Rok odevzdání: 2012

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením prof. RNDr. dr hab. Jana Andrese, DSc. a všechny použité zdroje jsem uvedla.

V Olomouci dne 30.3 2012

Touto cestou bych ráda poděkovala vedoucímu práce prof. RNDr. dr hab. Janu Andresovi, DSc., za profesionální přístup a spoustu rad, které přispěly k napsání této diplomové práce. V neposlední řadě také za poskytnutí materiálů, ke kterým bych se pravděpodobně jinou cestou nedostala.

Obsah

Obsah 4

Úvod 6

Matematická část 8

1.1 Vybrané pojmy z matematické analýzy 8

1.1.2 Kompaktnost 9

1.1.3 Spojitost 10

1.1.4 Konvexnost a konkávnost 12

1.2 Vybrané pojmy z lineárního programování 15

1.2.1 Konvexita 15

1.2.2 Simplex 17

1.3 Věty o pevných bodech 18

1.3.1 Brouwerova věta o pevném bodě 19

1.4 Minmax teorém 21

1.5 Mnohoznačné funkce a „vyhovující“ podmínka 21

1.5.1 Kakutaniho věta o pevném bodě pro mnohoznačné funkce 22

1.5.2 Princip maxima 23

1.5.3 „Vyhovující“ podmínka 24

Ekonomická část 29

2.1 Lausannská škola 29

2.2 Marie-Ésprit Léon Walras (1834 – 1910) 30

2.2.1 Dílo a odkaz Léona Walrase 31

2.3 Ekonomická rovnováha 31

2.3.1 Fyziokraté a ekonomická rovnováha 32

2.4. Dva přístupy modelování všeobecné rovnováhy 33
2.4.1 Dílčí rovnováha Alfreda Marshalla 33
2.5 Walrasova rovnováha 34
2.5.1 Teorie mezní užitečnosti 35
2.5.2 Soustava simultánních rovnic 36
2.5.3 Odvození jednotlivých rovnic 38
2.5.4. Proces tápání 42
2.6 Walrasův zákon 43
2.7 Další ekonomické pojmy a definice 45
Matematicko-ekonomická část 49
3.1 Spotřebitelé a firmy 49
3.2 Minimální nákladová funkce 52
3.3 Walrasova ekonomika 54
3.3 Walrasova rovnováha 55
3.4 Důsledky výše uvedených předpokladů 56
3.5 Existence Walrasovy rovnováhy 60
3.6 Srovnání s předchozími důkazy Walrasovy rovnováha s ryze konvexními preferencemi 62
3.6.1 Čistá směna a ryze konvexní technologie 64
3.6.2 Produkce s CRS technologiemi 65
3.6.3 Neomezené spotřební množiny, monotónní preference a limita funkce . 67
Závěr 69
Použitá literatura a internetové zdroje: 70
Seznam obrázků a ilustrací 72

Úvod

Ekonomie, asi jako každá vědecká disciplína, se snaží přetvářet realitu do podoby zjednodušených modelů. Žádný z těchto modelů pak již není plně realistický a nezobrazuje skutečnost takovou jaká je. Lze říci, že každý takový model je zjednodušením skutečnosti. Aby bylo možné vytvořit alespoň zdánlivě realistický model, potřebujeme si někdy v ekonomii pomoct ještě další vědeckou disciplínou – matematikou.

Moje diplomová práce nese název Aplikace vět o pevných bodech v ekonomii. Toto téma jsem si vybrala zejména s ohledem na můj studijní obor (Aplikace matematiky v ekonomii – AME). Již z prvního dojmu je zřejmé, že tato problematika je velice rozsáhlá a takovýchto aplikací existuje poměrně mnoho. Teorie pevných bodů představuje jeden ze základních matematických nástrojů k řešení různých ekonomických problémů. Samotných vět o pevných bodech je velice mnoho. Protože jsme se ve této práci chtěli zaměřit na nějakou konkrétní problematiku a ne zabývat se dílčími problémy, zvolili jsem ověření Walrasovy rovnováhy pomocí Brouwerovy věty o pevném bodě.

Diplomová práce je rozdělena do tří oddílů. V první, matematické části se budeme zabývat základními pojmy z teorie matematické analýzy, lineárního programování a teorie pevných bodů, zaměřené především na Brouwerovu větu, která je stěžejní větou pro ověření Walrasovy rovnováhy. Vybrali jsme pouze takové pojmy, které jsme považovali za adekvátní uvést vzhledem k povaze a studijní úrovni práce. Okrajově se zde budeme zabývat také teorií mnohoznačných funkcí a nejznámější Kakutaniho větou o pevném bodě pro mnohoznačné funkce. Teorie mnohoznačných funkcí není předmětem této práce, ale je na těchto funkcích částečně postaven důkaz ve třetí části práce.

Teorie všeobecné rovnováhy představuje pro ekonomy navození řádu a harmonie. Léon Walras nebyl prvním ekonomem, který se pokoušel sestavit model všeobecné rovnováhy. Byl však prvním ekonomem, který sestavil takový model ekonomické rovnováhy, který ve své nejsložitější podobě byl nejblíže realitě. Ve druhé části je tedy uvedena problematika všeobecné rovnováhy z čistě ekonomického hlediska. Převážná část druhého oddílu je zaměřena na Walrasovu všeobecnou rovnováhu, ale neopomněli jsme zde uvést ani srovnání Walrasovy rovnováhy s přístupy k modelování rovnováhy fyziokratů nebo Alfreda Marshalla. Mimo jiné je zde uvedeno také pár vět ze života Léona

Walrase a o škole v Lausanne, ve které působil především jako vedoucí katedry politické ekonomie a profesor. Hlavním podkladem pro tuto část byla literatura p. Holmana ([8], [9])

V poslední, a zároveň stěžejní části práce, je uvedena Walrasova rovnováha z matematického pohledu a zejména důkaz existence Walrasovy rovnováhy pomocí Brouwerovy věty o pevném bodě. Autorem tohoto důkazu je John Geanakoplos ([4], [17]). Na rozdíl od dřívějších důkazů Walrasovy rovnováhy, které byly stavěny především na teorii mnohoznačných funkcí (zejména na Kakutaniho větě o pevném bodě pro mnohoznačné funkce), použil právě Brouwerovu větu o pevném bodě.

Doufám, že přečtení této diplomové práce bude pro čtenáře přínosem a ucelením poznatků o teorii všeobecné rovnováhy a teorii pevných bodů.

Matematická část

V první části diplomové práce se budeme věnovat čistě matematickým pojmům. Snažili jsme se vybrat pouze takové pojmy, které odpovídají úrovni diplomové práce a je důležité je znát pro pochopení 3. části této práce.

Nejprve uvedeme pár stěžejních pojmů z matematické analýzy. Velmi důležitou vlastností, kterou jsme zde uvedli a která je často zmiňovanou ve 3. oddíle, je kompaktnost. Dále se pak budeme věnovat vlastnostem funkcí – spojitosti, konkávnosti a konvexnosti.

Další podkapitola tohoto oddílu je věnována lineárnímu programování. Přesněji řečeno pouze takovým pojmům, které jsou použity ve třetím oddíle diplomové práce. Stěžejními částmi jsou podkapitoly věnované konvexnosti a simplexům – nejjednodušším konvexním množinám.

Poslední dvě podkapitoly jsou věnovány problematice pevných bodů a mnohoznačných funkcí. Oba dva obory matematiky jsou velice rozsáhlé a sami o sobě by mohli být tématem na několik diplomových prací. Snažili jsme se tedy spíš o nastínění celé problematiky. Jsou zde uvedeny jedny z nejdůležitějších vět těchto dvou teorií a to věta Brouwerova o pevném bodě a věta Kakutaniho o pevném bodě pro mnohoznačné funkce.

1.1 Vybrané pojmy z matematické analýzy

Jak je již nastíněno v úvodu kapitoly, věnovat se zde budeme vlastnostem funkcí a množin, kterými jsou například kompaktnost nebo spojitost. Tyto a mnohé další vlastnosti byly původně nadefinovány na množině reálných čísel, později byly nadefinovány i na obecnějších prostorech (např. na nejobecnějším topologickém prostoru). Lze je v podstatě definovat na libovolné množině, na které je dán metrický prostor. Pro další potřebu si však vystačíme s definicemi vlastností omezených pouze na konečném prostoru, tedy Euklidovském.

V této části jsem čerpala především z literatury [1], [2], [5], [6].

Poznámka 1.1 n-dimenzionální Euklidovský prostor budeme v následujícím textu značit symbolem $\mathbb{R}^n$.

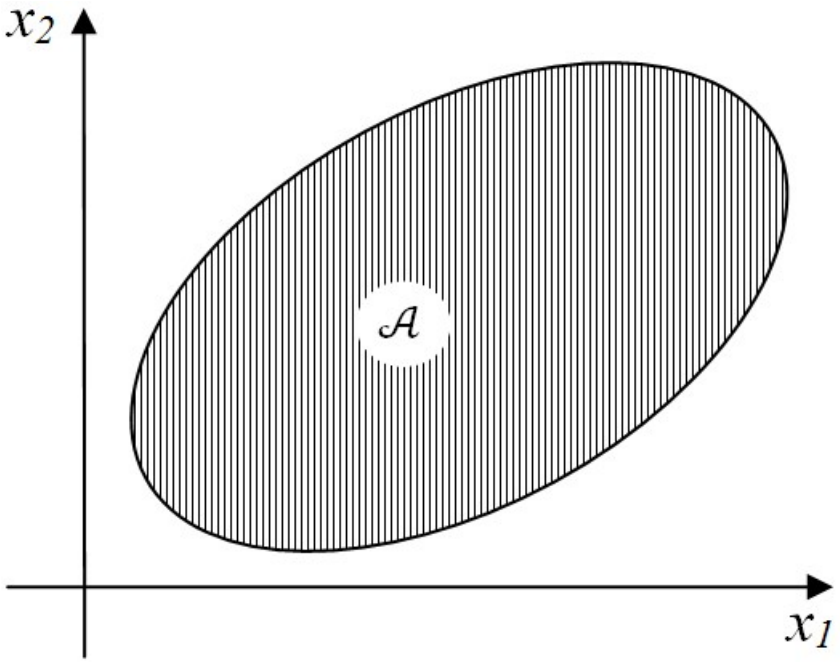
1.1.2 Kompaktnost

V Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ jsou všechny jeho uzavřené a omezené podmnožiny kompaktními množinami. Příkladem kompaktní množiny na množině reálných čísel může být prázdná množina nebo jakýkoliv uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ pro $a, b \in \mathbb{R}$, ale například polouzavřený interval $(a, b\rangle$ již není kompaktní. Množina celých čísel $\mathbb{Z}$ také není kompaktní, poněvadž není uzavřená. Prázdná množina na Euklidovském prostoru je také kompaktní.

Pro každou kompaktní podmnožinu $\mathcal{A}$ Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ musí platit následující podmínky:

- každé otevřené pokrytí $\mathcal{A}$ má konečné podpokrytí;
- z každé posloupnosti z $\mathcal{A}$ lze vybrat konvergentní podposloupnost, jejíž limita leží v $\mathcal{A}$;
- každá nekonečná podmnožina $\mathcal{A}$ má hromadný bod v $\mathcal{A}$;
- množina $\mathcal{A}$ je uzavřená a ohraničená.

Jednoduchou kompaktní množinu ukazuje následující obrázek (obr. 1.1).



Obr. 1.1: Kompaktní množina

Definice 1.1 Je-li kompaktní množina prostorem (topologickým, metrickým), pak hovoříme o *kompaktním prostoru*. Prostor se označuje *lokálně kompaktní*, právě tehdy, když existuje ke každému jeho bodu kompaktní okolí.

Každá spojitá funkce, která je definována jako zobrazení z kompaktního prostoru do prostoru reálných čísel je omezená a ještě navíc nabývá svého maxima a minima.

Poznámka 1.2 Kompaktní prostor budu dále značit písmenem *C*.

1.1.3 Spojitost

Spojitost je jednou z klíčových vlastností funkcí v topologii. Spojitostí rozumíme takovou vlastnost reálné funkce, jejíž graf neobsahuje ostré skoky a vypadá jako souvislá křivka. Jinak řečeno, malá změna na vstupu vyvolá pouze malou změnu na výstupu. V opačném případě se jedná o funkci nespojitou.

Definice 1.2 $\delta - okolím\ bodu\ a$ $(\delta > 0)$ rozumíme množinu všech bodů (na reálné ose), které mají od bodu a vzdálenost menší než δ. δ tedy leží v intervalu $(a - \delta, a + \delta)$. Analogicky lze definici vyjádřit vztahem $|x - a| < \delta$.

Definice 1.3 Řekneme, že funkce *f (x)* je *spojitá v bodě a,* jestliže k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna x z δ-okolí bodu a je:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Definice 1.4 Řekneme, že funkce $f(x)$ je *spojitá v intervalu* (a, b), je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

<u>Horní (USC) a dolní (LSC) polospojitost</u>

Jedná se také o vlastnosti reálných funkcí, nicméně jsou však slabší než spojitost. Pokud platí obě vlastnosti funkce naráz, lze říci, že je daná funkce spojitá neboli LSC a

USC implikují spojitost. Samotná spojitost je právě proto mnohdy dokazována pomocí těchto dvou vlastností.

Definice 1.5 Nechť je dán libovolný bod x_0 a reálná funkce $f: X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Řekneme, že funkce je *shora polospojitá (USC)* v bodě x_0, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje okolí U bodu x_0 tak, že $f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$ pro všechna $x \in U$.

Ekvivalentně můžeme říci, že funkce je shora polospojitá v x, pokud:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

Věta 1.1 Funkce f je shora polospojitá v X, jestliže je shora polospojitá v každém bodě $\mathbb{R}^n$.

Definice 1.6 Řekneme, že funkce f je *zdola polospojitá (LSC)* v bodě x_0, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje okolí U bodu x_0 takové, že platí nerovnost $f(x) \leq f(x_0) - \varepsilon$ pro všechna $x \in U$.

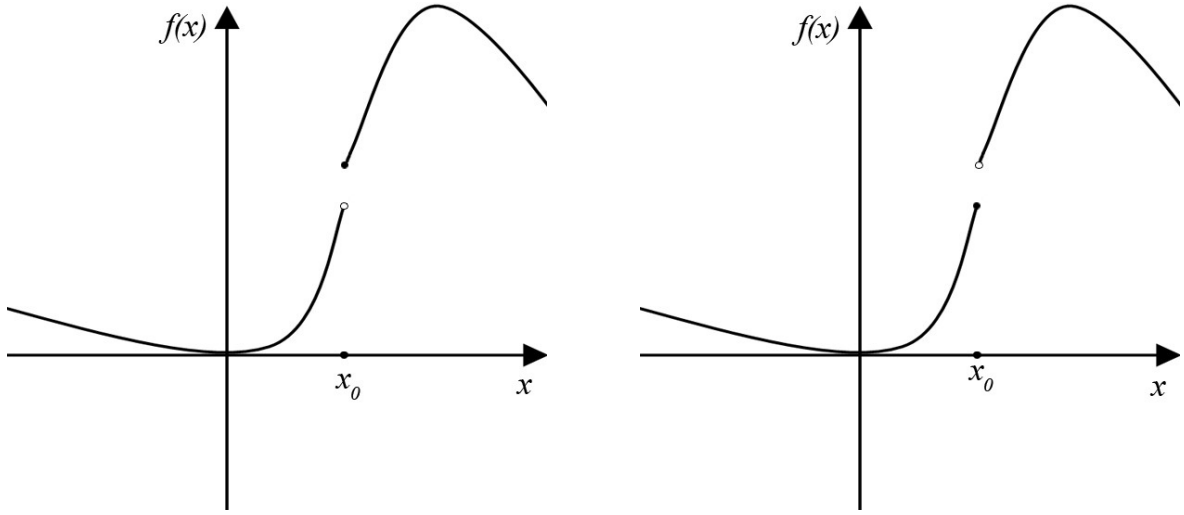
Opět platí, že dolní polospojitost funkce lze obdobně jako u USC vyjádřit jako:

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

Věta 1.2 Funkci f lze nazvat zdola polospojitou funkcí právě tehdy, je-li polospojitá v každém bodě prostoru $\mathbb{R}^n$.

Věta 1.3 Nechť je dán kompaktní prostor C a shora (zdola) polospojitá funkce $f: C \to (-\infty, +\infty)$. Potom f má maximum (minimum) v C.

Oba případy polospojitosti ukazuje následující obrázek.



Obr. 1.2: Shora (vlevo) a zdola (vpravo) polospojitá funkce

1.1.4 Konvexnost a konkávnost

Obě tyto vlastnosti nám říkají, k jak rychlé změně růstu funkce dochází. Pokud funkce svůj růst zrychluje na nějakém intervalu, označuje se jako konvexní a její graf je zakřiven směrem nahoru. Opakem je pak funkce konkávní, jejíž graf je zakřiven směrem dolů, a tedy vyjadřuje pomalejší růst. Přechod mezi jednotlivými funkcemi se nazývá inflexní bod.

Pro následující definice a věty budeme předpokládat, že funkce *f(x)* je spojitě diferencovatelná, tj. existuje její první derivace.

Definice 1.7 Leží-li graf funkce $f(x)$ v určitém okolí U bodu a pod tečnou, sestrojenou v tomto bodě, tj. platí-li v U $f(x) \leq f(a) + (x - a)f'(a)$, říkáme, že funkce je v bodě a *konkávní*. Leží-li graf funkce nad tečnou, tj. je-li v U $f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$, říkáme, že funkce je v a *konvexní*.

Věta 1.4 Řekneme, že funkce je konvexní, resp. konkávní v intervalu $I \subset D_f$, jestliže je konvexní, resp. konkávní v každém bodě tohoto intervalu.

K určení, zda je funkce konvexní nebo konkávní, nám pomáhají druhé derivace funkce $f(x)$ v bodě a:

- je-li $f''(a) \geq 0$, pak je funkce $f(x)$ v bodě *a konvexní*;
- je-li $f''(a) > 0$, pak je funkce $f(x)$ v bodě *a ryze konvexní*;
- je-li $f''(a) \leq 0$, pak je funkce $f(x)$ v bodě *a konkávní*;
- je-li $f''(a) < 0$, pak je funkce $f(x)$ v bodě *a ryze konkávní*.

<u>Konvexnost a konkávnost funkce definované na konvexní množině M:</u>

Definice 1.8 Nechť je dána konvexní množina $M \subset \mathbb{R}^n$ a funkce $f: M \to \mathbb{R}$. Dále nechť jsou dány dva body x_1, $x_2 \in M$. Mějme konvexní kombinaci $\bar{x}$ těchto dvou bodů pro libovolné $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$:

$$\bar{x} = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2.$$

Dále pro totéž λ je třeba najít příslušnou konvexní kombinaci $\bar{f}$ hodnot $f(x_1)$ a (x_2):

$$\bar{f} = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2).$$

Řekneme, že funkce *f* je *konkávní* na *M*, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in M$ a pro všechna $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$ platí:

$$f(\bar{x}) \geq \bar{f},$$

a řekneme, že funkce *f* je *ryze konkávní* na *M*, jestliže navíc:

$$f(\bar{x}) > \bar{f} \text{ pro } \lambda \neq 0, 1 \text{ a } x_1 \neq x_2.$$

Řekneme, že funkce *f* je *konvexní* na *M*, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in M$ a pro všechna $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$ platí:

$$f(\bar{x}) \leq \bar{f},$$

a řekneme, že funkce *f* je *ryze konvexní* na *M*, jestliže navíc:

$$f(\bar{x}) < \bar{f} \text{ pro } \lambda \neq 0,1 \text{ a } x_1 \neq x_2.$$

<u>Kvazikonkávnost a kvazikonvexnost na konvexní množině:</u>

Tyto dvě vlastnosti jsou spíše než v matematické analýze využívány v matematické mikroekonomii. Jsou například klíčovou vlastností pro zajištění „běžného tvaru“ indiferenční křivky. Ta vždy znázorňuje množství dvou statků, které spotřebiteli nabízejí stejný užitek. Pod pojmem „běžný tvar“ je pak myšlen klesající trend indiferenční křivky.

Definice 1.9 Nechť je opět dána konvexní množina $M \subset \mathbb{R}^n$ a zobrazení $f: M \to \mathbb{R}$. Nechť x_1 a x_2 jsou libovolné body z množiny *M*. Mějme dánu opět konvexní kombinaci bodů x_1 a x_2 tak, že:

$$\bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \text{ pro } \lambda \in \langle 0,1 \rangle.$$

Funkce *f* je *kvazikonkávní* na konvexní množině *M*, jestliže:

$$f(\bar{x}) \geq min\{f(x_1), f(x_2)\},$$

a *ryze kvazikonkávní*, jestliže pro $\lambda \neq 0,1$ a $x_1 \neq x_2$ je:

$$f(\bar{x}) > min\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Funkce *f* je *kvazikonvexní* na konvexní množině *M*, jestliže:

$$f(\bar{x}) \leq max\{f(x_1), f(x_2)\},$$

a *ryze kvazikonvexní*, jestliže pro $\lambda \neq 0,1$ a $x_1 \neq x_2$ je:

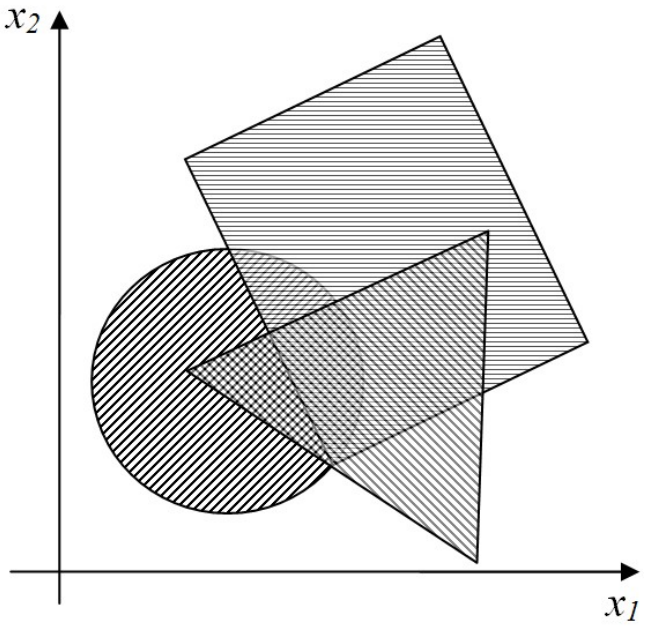
$$f(\bar{x}) < max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

1.2 Vybrané pojmy z lineárního programování

Lineární programování je odvětvím optimalizace. Cílem LP je najít maximum, resp. minimum lineární funkce n proměnných, kdy celá úloha je zapsána pomocí soustavy lineárních nerovností. V této podkapitole uvedeme pouze takové pojmy, které jsou stěžejní pro třetí část diplomové práce. Základní úlohy lineárního programování je možné najít mj. např. v literatuře [1] a [3], ze které jsme v následujícím textu čerpali. Důkazy vět, zde uvádět nebudeme. Lze je najít ve výše uvedených literaturách.

1.2.1 Konvexita

Definice 1.10 Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *konvexní*, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in M$ a $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$ platí $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in M$.



Obr. 1.3: Příklady konvexních množin

Výše uvedený obrázek ukazuje 3 konvexní množiny a zároveň podporuje tvrzení, že průnik libovolného počtu konvexních množin je opět konvexní množina.

Definice 1.11 Řekneme, že bod $x \in \mathbb{R}^n$ je *(konečnou) konvexní kombinací* bodů $x_1, \dots x_r \in \mathbb{R}^n$, jestliže:

$$x = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i,$$

kde $\lambda_i \geq 0$ pro každé $1 \leq i \leq r$ a navíc $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$.

Definice 1.12 *Konvexní obal* $A \subset \mathbb{R}^n$ (značíme *co A)* je množina všech konečných konvexních kombinací z A, tj. *co A* je množina všech vektorů x ve tvaru:

$$x = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i$$

pro nějaké r, kde každé $x_i \in A,\ \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}_+$ a $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$.

Konvexní obal množiny M je nejmenší konvexní množina, která obsahuje M.

Věta 1.5 Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní právě tehdy, když $M = co\ M$.

Věta 1.6 (Caratheodoryho) Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Jestliže $x \in co\ M$, potom lze x zapsat jako konvexní kombinaci nejvýše $n+1$ bodů v M, tj. pro $z^0, \dots, z^n \in M$ a $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ platí:

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i z^i.$$

Definice 1.13 *Nadrovina* v $\mathbb{R}^n$ je množina ve tvaru $\{x \in \mathbb{R}^n : p * x = c\}$, kde $0 \neq p \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$. Množina ve tvaru $\{x : p * x < c\}$ (resp. $\{x : p * x > c\}$) se nazývá *uzavřený (resp. otevřený) poloprostor*. Dvě množiny A a B se nazývají *striktně oddělené* nadrovinou, jestliže existuje takové nenulové $p \in \mathbb{R}^n$ a nějaké $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in A$ a $y \in B$ platí:

$$p * x < c < p * y.$$

Věta 1.7 (o oddělující nadrovině) Nechť M a K jsou disjunktní neprázdné konvexní podmnožiny z $\mathbb{R}^n$ a nechť M je uzavřená a K kompaktní. Potom M a K mohou být striktně odděleny nadrovinou.

Definice 1.14 *Jádro* je neprázdná podmnožina $\mathbb{R}^n$ uzavřená pod násobením nezáporných skalárů. Konvexní množina M se nazývá *jádrem*, jestliže pro každé $x \in M$ a $\lambda \in R_+$ platí, že $\lambda x \in M$.

Definice 1.15 Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. *Asymptotické jádro* množiny *M (AM)* je množina všech možných limit posloupností ve tvaru $\{\lambda_n x_i\}$, kde každé $x_n \in S$ a $\lambda_n \to 0$.

Tvrzení 1.1 Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je ohraničená pouze a jen tehdy, jestliže *AS={0}*.

Definice 1.16 Množina $C \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *kužel s vrcholem v počátku*, jestliže $\boldsymbol{x} \in X \Rightarrow a\boldsymbol{x} \in C$ pro libovolné $a \geq 0$. Množina *p+C*, kde $C \subset \mathbb{R}^n$ je kužel s vrcholem v počátku a $p \subset \mathbb{R}^n$, se nazývá *kužel s vrcholem p.*

Definice 1.17 Je-li kužel $C \subset \mathbb{R}^n$ (s vrcholem v p) konvexní množina, nazveme jej *konvexní kužel* (s vrcholem v p).

1.2.2 Simplex

Simplexy jsou nejjednodušší konvexní množiny. Z toho důvodu často dokazujeme věty nejprve pro případ simplexu a potom rozšiřujeme výsledky na všeobecnější konvexní množiny. Simplex je často využíván zejména pro jeho vlastnost, že všechny simplexy se stejnými hodnotami vrcholů jsou izomorfní. Existují dvě nejběžněji používané definice simplexu. Jedna z používaných definic, jejímž autorem je Kuratowski, používá simplex jako otevřenou množin. Druhá definice vychází z předpokladu, že simplex je uzavřená množina. My zde uvedeme pouze první definici.

Definice 1.18 Množina $(x^0, \dots, x^n) \subset \mathbb{R}^n$ je *afině nezávislá*, jestliže $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i = 0$, a výraz $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0$ naznačuje, že $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Definice 1.19 *n-simplex* je množina ryze kladných konvexních kombinací *n+1* prvkové afíně nezávislé množiny. *Uzavřený n-simplex* je konvexní obal afíně nezávislé množiny o *n+1* vektorech. Simplex $x^0 \dots x^n$ je množina všech ryze kladných konvexních kombinací x^i vektorů, tj.

$$x^0 \dots x^n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i : \lambda_i > 0, i = 0, \dots, n; \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Každé x^i je *vrcholem* $x^0 \dots x^n$ a každý k-simplex $x^{i_0} \dots x^{i_k}$ je *stěnou* $x^0 \dots x^n$. Dle definice je každý vrchol stěnou a $x^0 \dots x^n$ je stěnou sám o sobě. Uzávěr $x^0 \dots x^n$ je pak roven $x^0 \dots x^n = co\{x^0 \dots x^n\}$.

Poznámka 1.3 *0*-rozměrný simplex je bod, *1*-rozměrný simplex je úsečka, *2*-rozměrný simplex je trojúhelník, …

1.3 Věty o pevných bodech

Teorie pevných bodů je zajímavá sama o sobě. Poskytuje takový matematický aparát, s jehož využitím lze zjistit existenci řešení různých typů soustav rovnic. V případě teoretické ekonomie, kam teorie všeobecné rovnováhy spadá, je třeba zjistit, zda řešení soustavy rovnic vůbec existuje, nebo ještě přesněji za jakých podmínek bude řešení nutně existovat.

V následujícím textu jsme čerpali především z literatury [1] a [7].

Nejprve je třeba nadefinovat pojem pevný bod.

Poznámka 1.4 Pro následující definici budeme uvažovat libovolnou množinu *N*, která je podmnožinou $\mathbb{R}^n$.

Definice 1.20 Nechť $f: N \to N$ je zobrazení samo na sebe. Prvek $x \in M$ nazveme *pevným bodem* zobrazení *f*, jestliže $f(x) = x$, tj. když se bod x zobrazí sám na sebe.

Nechť je dána soustava rovnic ve tvaru $g(x) = 0$, ke které hledáme dané řešení. Funkci g je možné přepsat do tvaru $g(x) = f(x) - x$. Pevný bod funkce f je řešením soustavy $g(x) = 0$.

1.3.1 Brouwerova věta o pevném bodě

Jednou z nejjednodušších vět o pevných bodech je věta Brouwerova. Tato věta je také jednou z nejznámějších vět teorie pevných bodů. Vznikla již v roce 1912 a jejím autorem je Luitzen Brouwer.

Věta 1.8 (Brouwerova o pevném bodě) Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená koule a nechť $f: S \to S$ je spojitá funkce. Pak existuje alespoň jeden pevný bod funkce *f*.

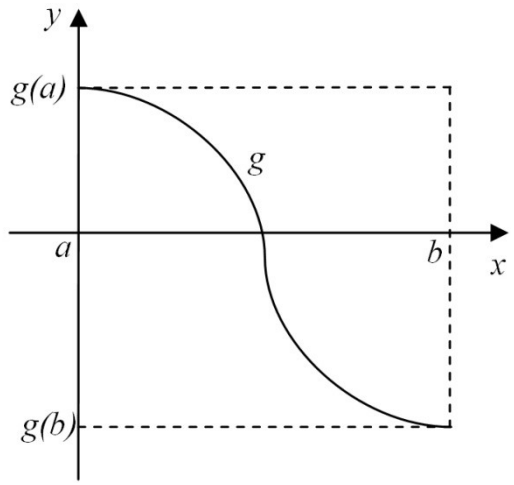
Speciálně pro $n = 1$ má každá spojitá funkce *f*, která zobrazuje uzavřený interval do sebe, v tomto intervalu alespoň jeden pevný bod.

Browerova věta nám říká, že pro každou spojitou funkci *f* s určitými vlastnostmi, existuje alespoň jeden takový bod $\bar{x}$, pro který platí, že $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Těchto bodů může však být i více. *Věta 1.8* je v podstatě nejjednodušší formou Brouwerovy věty, definovaná pro spojitou funkci *f*, která zobrazuje uzavřenou kouli *B* (spec. uzavřený interval *I)* do sebe.

Princip důkazu Brouwerovy věty pro *n=1*:

Nechť je dána spojitá funkce *f*, která zobrazuje interval $\langle a, b \rangle$ do sebe. Pokud bychom uvažovali že $f(a) = a$ nebo $f(b) = b$, pak podle definice pevného bodu je jeho existence zřejmá. Pokud však předpokládáme, že $f(a) \neq a$ a zároveň $f(b) \neq b$, je třeba využít Bolzanovu větu o střední hodnotě.

Pokud zavedeme spojitou funkci $g(x) = f(x) - x$ na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak platí, že $g(a) > 0$ a $g(b) < 0$. Podle věty o střední hodnotě tedy musí existovat bod x_0 takový, že $g(x_0) = 0$. A platí tedy, že $f(x_0) = x_0$.



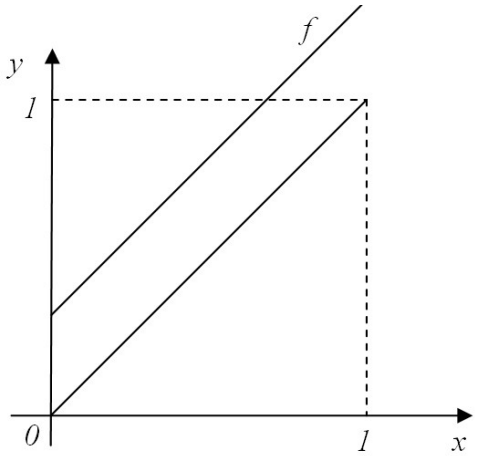
Obr. 1.4: Aplikaci Brouwerovy věty v „praxi“

Tento obrázek ukazuje aplikaci Brouwerovy věty v „praxi“ pro případ zobrazení intervalu do sebe. Pro každou spojitou funkci nutně existuje alespoň jeden pevný bod. Jedná se o místo, kde se spojitá funkce *f* střetne s diagonálou $x = y$. Z geometrického pohledu neexistuje žádný způsob, jak zakreslit spojitou funkci, která by na svislé ose začínala při $x = 0$ a končila na svislé ose v bodě $x = 1$ bez překřížení nebo dotyku s diagonálou.

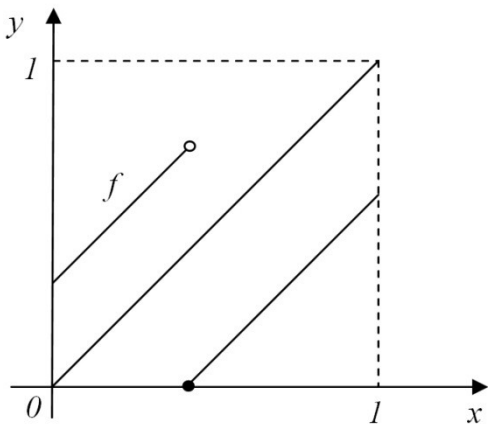
Obecnější forma je pak již definovaná pro spojité funkce $f: K \to K$ z konvexní, uzavřené podmnožiny $K \subset R^n$ do sebe.

Věta 1.9 Každé spojité zobrazení *f* z konvexní a kompaktní podmnožiny *K* Euklidovského prostoru do *K*, tj. do sebe, má pevný bod.

Příklady funkcí, které nemají pevný bod dle znění Brouwerovy funkce:



Obr. 1.5: Funkce nezobrazující interval $I \in [0,1]$ do sebe



Obr. 1.6: Nespojitá funkce

1.4 Minmax teorém

Minmax teorém je klíčovým nástrojem v úlohách, kde hraje roly jak minimalizační, tak maximalizační proces. V důkaze pro existenci Walrasovy rovnováhy se na tento teorém budume odkazovat, proto jsem ho v tomto textu uvedla.

Věta 1.10 Nechť $X \subset \mathbb{R}^m$ a $Y \subset \mathbb{R}^n$ jsou kompaktní a konvexní množiny a nechť je dána funkce $f: X \times Y \to \mathbb{R}$. Předpokládejme, že pro každé pevné $x \in X$ je funkce f zdola polospojitá a kvazikonvexní na *Y*, a pro každé pevné $y \in Y$ je funkce *f* shora polospojitá a kvazikonkávní na *X*. Potom:

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y).$$

Důkaz: Důkaz této věty je založený na mnohoznačných funkcích. Lze ho najít v literatuře [1].

1.5 Mnohoznačné funkce a „vyhovující“ podmínka

V této podkapitole jen krátce uvedeme problematiku mnohoznačných funkcí. Ty nejsou předmětem této diplomové práce, nicméně jsou často zmiňovány ve 3. oddíle.

Poznámka 1.5 Mnohoznačnou funkci budeme v dalším textu značit pomocí symbolu $\rightrightarrows$ a zároveň budeme předpokládat, že každá mnohoznačná funkce má neprázdnou množinu hodnot.

Definice 1.21 Nechť jsou dány dvě neprázdné množiny *X* a *Y*. Potom zobrazení $\gamma: X \to 2^Y$ nazýváme *mnohoznačným zobrazením* z *X* do *Y*. Pro mnohoznačnou funkci $\gamma: X \to 2^Y$ existuje graf $Gr\,\gamma$ daný vztahem:

$$Gr\,\gamma = \{(x,y) \in X \times Y : y \in \gamma(\mathrm{x})\}.$$

Poznámka 1.6 Podobně pro jednoznačnou funkci $f: E \to F$ existuje graf:

$$Gr\,f = \{(x,y) \in E \times F : y = f(x)\}.$$

Definice 1.22 Nechť je dáno $\gamma: X \rightrightarrows Y$, $E \subset Y$ a $F \subset X$. Obraz F v γ lze definovat jako:

$$\gamma(F) = \bigcup_{x \in F} \gamma(x).$$

Horní (resp. silná) inverze E v γ, označená jako $\gamma^+[E]$, je definována vztahem:

$$\gamma^+[E] = \{x \in X: \ \gamma(\mathrm{x}) \ \subset \mathrm{E}\}.$$

Dolní (resp. slabá) inverze E v γ, označená jako $\gamma^-[E]$, je definována vztahem:

$$\gamma^-[E] = \{x \in X: \ \gamma(\mathrm{x}) \ \cap \ \mathrm{E} \neq \{\emptyset\}\}.$$

Definice 1.23 Mnohoznačná funkce $\gamma: X \rightrightarrows Y$ se nazývá *shora polospojitá (USC)* v bodě x, jestliže vždycky když x je v horní inverzi otevřené množiny, tak že je okolím bodu x.

Mnohoznačná funkce $\gamma: X \rightrightarrows Y$ je USC, jestliže je USC v každém bodě $x \in X$.

Definice 1.24 Mnohoznačná funkce $\gamma: X \rightrightarrows Y$ se nazývá *zdola polospojitá (LSC)* v bodě x, jestliže kdykoliv když x je v dolní inverzi otevřené množiny, tak že je okolím bodu x.

Mnohoznačná funkce $\gamma: X \rightrightarrows Y$ je LSC, jestliže je LSC v každém bodě $x \in X$.

Věta 1.11 Mnohoznačná funkce se nazývá spojitá, je-li polospojitá shora i zdola.

1.5.1 Kakutaniho věta o pevném bodě pro mnohoznačné funkce

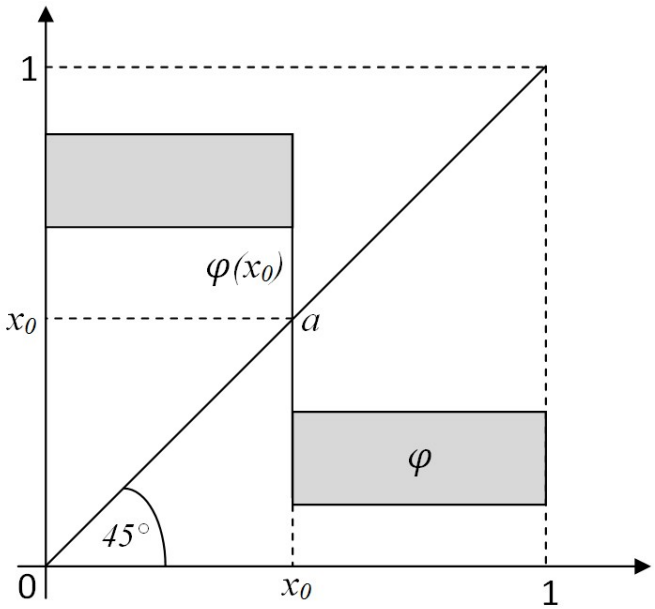
Shizuo Kakutani zobecnil a dokázal Brouwerovu větu. Jinak řečeno Brouwerova věta je speciálním případem Kakutaniho věty. Brouwer vycházel ze zobrazení bodu na sebe, Kakutani zobecnil větu tak, že zobrazuje množinu na sebe.

Věta 1.12 (Kakutaniho) Nechť M je neprázdná, kompaktní a konvexní množina v $\mathbb{R}^n$ a nechť $f: M \to 2^M$ je spojité mnohoznačné zobrazení s uzavřeným grafem a konvexními hodnotami *f(x)* pro každé $x \in M$. Potom f má pevný bod.

Kakutani vyslovil a dokázal také větu, kde f není pouze spojitá mnohoznačná funkce, ale je navíc i shora polospojitá.

Věta 1.13 Jestliže $x \to \varphi(x)$ je shora polospojité mnohoznačné zobrazení uzavřeného simplexu S^r, potom existuje $x_0 \in S$ takové, že $x_0 \in \varphi(x_0)$.

Tuto větu lze ilustrovat na následujícím obrázku, kde $S \in [0,1]$:



Obr. 1.7 : Ilustrace Kakutaniho věty

1.5.2 Princip maxima

Princip maxima je jedním z nejsilnějších a nejužitečnějších principů matematické ekonomie. Je založen na tom, že množina řešení maximalizačního problému se liší horní polospojitostí a množina omezení problému se liší ve způsobu spojitosti.

První uvedená věta principu maxima je dle Bergeho [1]. Uvažuje případ maximalizující spojité reálné funkce na kompaktní množině, která se neustále liší v nějakém parametru vektoru. Množina řešení je shora polospojitá mnohoznačná funkce s kompaktními hodnotami. Navíc hodnoty maximalizované funkce se liší nepřetržitě v parametrech.

Druhá věta principu maxima je rozšířením věty dle Bergeho na případ maximálních prvků na otevřené binární relaci. Jejím autorem je Walker. Uvedu ji zde zejména proto, že k podobnému výsledku došel i Debreu.

Značení je stejné pro obě věty. Pod symbolem G rozumíme množinu parametrů takovou, že $G = \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++}$. Množiny X a Y jsou množinami alternativ.

Věta 1.14 (Bergeho) Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^k$ a nechť $\gamma: \mathrm{G} \rightrightarrows \mathrm{Y}$ je mnohoznačná funkce s kompaktními hodnotami. Nechť $f: Y \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Definujme $\mu: \mathrm{G} \rightrightarrows \mathrm{Y}$ vztahem $\mu(x) = \{y \in \gamma(x): \text{y maximalizuje } f \text{ na } \gamma(x)\}$ a $F: G \to \mathbb{R}$ vztahem $F(x) = f(y)$ pro všechna $y \in \mu(\mathrm{x})$. Jestliže je funkce γ spojitá v x, potom μ je uzavřená a shora polospojitá v x a F je spojité v x. Navíc μ je funkce s kompaktními hodnotami. Množiny X a Y jsou množinami alternativ.

Věta 1.15 (Walkera). Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^k$ a nechť $\gamma: \mathrm{G} \rightrightarrows \mathrm{Y}$ je shora polospojitá mnohoznačná funkce s kompaktními hodnotami. Nechť $U: Y \times G \rightrightarrows Y$ má otevřený graf. Definujme $\mu: G \rightrightarrows Y$ vztahem $\mu(x) = \{\mathrm{y} \in \gamma(\mathrm{x}): \mathrm{U}(\mathrm{y},\mathrm{x}) \cap \gamma(\mathrm{x}) = \emptyset\}$. Jestliže γ je uzavřená a zdola polospojitá v x, potom μ je uzavřená v x. Jestliže navíc γ je shora polospojitá v x, potom μ je shora polospojitá v x. μ je funkce s kompaktními hodnotami.

Důkaz: Oba důkazy lze najít v literatuře [1].

Věta říká, že pokud je dána preferenční relace nějakého spotřebitele, potom poptávková mnohoznačná funkce spotřebitele je shora polospojitá. Podobně nabídkové mnohoznačné funkce jsou shora polospojité, takže mnohoznačné funkce převisu poptávky jsou shora polospojité, za předpokladu, že spotřebitelé mají ryze kladný příjem.

1.5.3 „Vyhovující“ podmínka

„Vyhovující“ podmínka je vhodným doplňujícím nástrojem pro princip maxima, protože zaručuje nejenom USC, ale i LSC. Tato podmínka by se dala nazvat v matematickém jazyce jako postačující, nicméně protože se na ní budeme odkazovat ve 3. oddíle, nazvala jsem ji jako „vyhovující“ (v orig. *satisfied*), aby nedošlo k záměně pojmů.

Podklady pro tuto podkapitolu jsem čerpala z literatury [3].

Někdy je nabýváno dojmu, že LSC není až tak důležitou podmínkou jako USC, nesmíme však zapomenout na to, že princip maxima nemůže být použit, pokud mnohoznačná funkce rozpočtu každého spotřebitele není USC i LSC zároveň.

Vyhovující podmínka předpokládá, že spotřebitel maximalizuje spojitou funkci utility $u_\alpha(x)$ nicméně bez omezení $x \in \beta(\alpha)$, přes které je funkce utility lokálně nenasycená. Předpokládáme, že spotřebitel je spokojený s výplatou $w(\alpha) < v(\alpha)$, kde $v(\alpha)$ je maximálně dosažitelná funkce utility vzhledem k exogennímu parametru α, a w je nějaká spojitá funkce. Potom mnohoznačná funkce $W(\alpha)$ všech možností, jak dosáhnout odměny alespoň výši $w(\alpha)$, je zdola polospojitá (LSC) stejně tak jako shora polospojitá (USC) v α pokud $\beta(\alpha)$ existuje. Vyhovující podmínka doplňuje princip maxima, které zaručuje, že $v(\alpha)$ je spojitá funkce a že množina možností dosahující hodnoty $v(\alpha)$ je USC, ale ne nutně LSC. Jedním z přímých použití vyhovující podmínky je to, že Walrasiánská rozpočtová mnohoznačná funkce je LSC a USC, kdy počáteční vybavení je striktně kladné. Mnohem důležitější je však použití vyhovující podmínky na mnohoznačnou funkci $D_+^h(p)$ a tím i $Z_+(p)$, aby byla zaručena USC i LSC obou funkcí, protože Walrasiánská funkce utility $w^h(p)$ je spojitá a dle nenasycenosti ryze menší než maximální užitek $v^h(p) = v$ dosažitelný bez rozpočtového omezení. Význam funkcí $D_+^h(p)$ a $Z_+(p)$ je vysvětlen ve třetím oddíle této práce.

Princip maxima (uvedený v podkapitole *1.5.2*) tvrdí, že nejlepší vlastností mnohoznačné funkce je horní polospojitost (USC). Vlastnost USC je také základním předpokladem Kakutaniho věty o pevném bodě pro mnohoznačné funkce. Tato věta se používá namísto Brouwerovy spíše proto, že nejlepší odezvou mnohoznačné funkce nemusí být dolní polospojitost (LSC). Pokud však dojde k nahrazení maximalizaci neúplnou maximalizací, jak je uvedeno níže, pak vyhovující mnohoznačná funkce bude LSC a USC.

Definice 1.25 Nechť jsou dány množiny $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^m$ a $X \subset \mathbb{R}^n$ a nechť $\varphi: \mathcal{A} \rightrightarrows X$ je mnohoznačná funkce, která je spojitá v každém bodě $\alpha \in \mathcal{A}$ množiny $\varphi(\alpha) \subset X$. Řekneme, že φ je *shora polospojitá (USC)*, jestliže:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_n \to \alpha \\ x_n \to x \\ x_n \in \varphi(\alpha_n) \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \varphi(\alpha)$$

pro každé $\{x_n, x\} \subset X, \{\alpha_n, \alpha\} \subset \mathcal{A}$.

Řekneme, že φ je *zdola polospojitá (LSC)*, jestliže:

$$\left.\begin{matrix} \alpha_n \to \alpha \\ x \in \varphi(\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \exists\, x_n \to x \\ x_n \in \varphi(\alpha_n) \end{cases}$$

pro každé $\{\alpha_n, \alpha\} \subset \mathcal{A}$ a $x \in X$.

Z toho vyplývá, že φ je USC nebo LSC v bodě $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}$, jestliže pro výše uvedené podmínky platí, že $\alpha = \bar{\alpha}$. Je tedy zřejmé, že φ je USC nebo LSC, jestliže je tato funkce USC nebo LSC v každém bodě $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}$.

Definice 1.26 Nechť je dáno zobrazení $u: \beta \to \mathbb{R}$, kde $\beta \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že u je *lokálně nenasycené* v β, jestliže pro každou dvojici $x, y \in \beta$ s nerovností $u(x) < u(y)$ existuje posloupnost $\{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \beta$ s:

- $x(n) \to x$;
- $u(x(n)) > u(x)$

pro všechna n.

Jestliže β je konvexní a u je kvazikonkávní, potom u je lokálně nenasycené v β.

Vyhovující podmínka: Nechť je dána spojitá funkce $u: X \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, kde $X \times \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Nechť je dána mnohoznačná funkce $\beta: \mathcal{A} \rightrightarrows X$, která je USC a LSC. Pro každé pevné $\alpha \in \mathcal{A}$ platí, že $u(\cdot, \alpha)$ je lokálně nenasycené v $\beta(\alpha)$. Nechť $v: \mathcal{A} \to \mathbb{R} \subset \{\infty\}$ je maximální hodnota funkce definovaná vztahem $v(\alpha) \equiv \sup_{x \in \beta(\alpha)} u(x, \alpha)$. Nakonec, nechť je dáno spojité zobrazení $w: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ splňující nerovnost $w(\alpha) < v(\alpha)$ pro všechny $\alpha \in \mathcal{A}$.

Potom mnohoznačná funkce $W: \mathcal{A} \rightrightarrows X$ definovaná vztahem:

$$W(\alpha) \equiv \{x \in \beta(\alpha): u(x, \alpha) \geq w(\alpha)\}$$

je USC a LSC a neprázdná.

Jestliže navíc $\beta(\alpha) = \beta$ pro všechna $\alpha \in \mathcal{A}$ a $u(x,\alpha) = u(x)$ pro všechna $(x,\alpha) \in X \times \mathcal{A}$, potom lze ke stejnému závěru dojít i pokud bude použita pouze slabá nerovnost $w(\alpha) \leq v(\alpha) \equiv v$ pro všechna $\alpha \in \mathcal{A}$.

Důkaz: To, že W je neprázdné, je evidentní. USC vyplývá z podmínky maxima a není závislé na ostré nerovnosti $w(\alpha) < v(\alpha)$. Je nutné poznamenat, že pokud $\{x_n \in W(\alpha_n)$ pro všechna n, a $\alpha_n \to \alpha;\ x_n \to x\}$, potom dle horní polospojitosti mnohoznačné funkce β platí, že $x \in \beta(\alpha)$. Dle podmínky uvedené výše platí nerovnost $u(x_n,\alpha_n) \geq w(\alpha_n)$. Pokud dojde k překročení limity, pak při zachování vlastnosti spojitosti u i w, platí nerovnost $u(x,\alpha) \geq w(\alpha)$, takže $x \in W(\alpha)$.

K dokázání LSC funkce W je třeba využít konvergence $\alpha_n \to \alpha$. Předpokládejme, že $\bar{x} \in W(\alpha)$ a $u(\bar{x},\alpha) > w(\alpha)$. Z vlastnosti dolní polospojitosti mnohoznačné funkce β vyplývá, že lze najít posloupnost $\bar{x}_n \in \beta(\alpha_n)$ takovou, že $\bar{x}_n$ bude konvergovat k $\bar{x}$. Ke spojitosti funkce u a w je třeba poznamenat, že platí nerovnost $u(\bar{x}_n,\alpha_n) \geq w(\alpha_n)$ pro většinu n. Tudíž $\bar{x}_n$ se blíží k $\bar{x}$ v $W(\alpha_n)$, jestliže $u(\bar{x},\alpha) > w(\alpha)$.

Teď už zbývá jen ověřit, že je možné konvergovat k jakémukoliv $\hat{x}$ za platnosti rovnosti $u(\hat{x},\alpha) = w(\alpha)$. Pokud platí nerovnost $w(\alpha) < v(\alpha)$, potom existuje nějaké $\bar{x} \in \beta(\alpha)$ s nerovností $u(\bar{x},\alpha) > w(\alpha)$. Dle vlastnosti lokální nenasycenosti je možné vzít posloupnost $\bar{x}(k) \in \beta(\alpha)$ konvergující k $\hat{x}$ s $u(\bar{x}(k),\alpha) > w(\alpha)$. Poněvadž je možné konvergovat ke každému $\bar{x}(k)$ ve $W(\alpha_n)$, je tedy možné konvergovat k jakémukoliv $\hat{x}$.

Jestliže $u(\bar{x},\alpha) = w(\alpha) = v(\alpha)$, pak je třeba přidat ještě další podmínku a to, že β a u jsou nezávislé na α. V tom případě $\hat{x} \in W(\alpha_n)$ pro všechna α_n, takže je možné k $\hat{x}$ konvergovat.

□

Věta 1.16 (o spojitosti mnohoznačných funkcí) Nechť $X \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a nechť $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^m$. Nechť zobrazení $g_i: X \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ je spojité a konvexní na X pro každé pevné $\alpha \in \mathcal{A}$ a pro každé $i = 1, \dots, k$. Potom mnohoznačná funkce $B: A \rightrightarrows X$ definovaná předpisem:

$$B(\alpha) = \{x \in X: g_i(x,\alpha) \leq 0, \text{pro každé } i = 1, \dots, k\}$$

je USC a LSC.

Důkaz. Je třeba definovat $u: X \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ tak, že $u(x,\alpha) = \min_{1 \le i \le k}[-g_i(x,\alpha)]$. Vzhledem k tomu, že u je definováno jako minimum konkávních funkcí, je i konkávní na X pro každé pevné α stejně jako spojité na $X \times \mathcal{A}$. Protože $B(\alpha)$ je konvexní, u_α je nenasycené na $B(\alpha)$. A navíc $v(\alpha) = sup\{u(x,\alpha): x \in X\} \ge u(x(\alpha)) > 0$ pro všechna $\alpha \in \mathcal{A}$. Tedy dle vyhovující podmínky je $B(\alpha) = \{x \in X: u(x, \alpha \ge 0\}$ USC i LSC.

Ekonomická část

Ekonomická část mé diplomové práce bude zaměřena na Walrasovu všeobecnou rovnováhu. Léon Walras byl významný francouzský matematik a ekonom, představitel lausannské školy. Je považován za zakladatele tradice matematického modelování v ekonomii. Jeho teorii všeobecné rovnováhy jsem si vybrala právě z toho důvodu, že lze názorně ukázat provázanost dvou přírodních věd – matematiky a ekonomie. Než uvedu hlavní pilíře všeobecné rovnováhy dle Léona Walrase, ráda bych nejprve napsala několik slov o vývoji této školy a životě jejího hlavního představitele.

2.1 Lausannská škola

Lausannská škola je školou ekonomického myšlení, která patří mezi neoklasické ekonomické školy. Její název je odvozen od švýcarské univerzity v Lausanne, kde působili její hlavní představitelé – Léon Walras a Vilfredo Pareto. Přestože je za zakladatele této školy považován Walras, jejím zakladatelem byl až zmíněný Pareto. Rozšiřováním Walrasova odkazu získával nové žáky a stoupence, zejména mezi italskými ekonomy. Největším přínosem této školy je rozpracování teorie všeobecné rovnováhy.

Lausannská škola nebyla ve své době příliš úspěšná. V Anglii byla doslova pohřbena pod tíhou Marshallových teorií a v kontinentální Evropě oponovala Německé historické škole. Za hlavní překážky šíření myšlenek jejích představitelů lze uvést jak jejich teoretické postoje nebo zaměření na komplikovanou a idealizovanou ekonomiku, tak i jazykovou bariéru. Jejich práce byly psané především ve francouzštině nebo italštině, tudíž zasáhli poměrně malou část čtenářů.

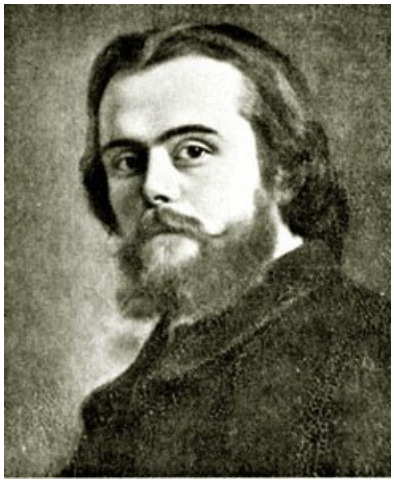
Vše se značně změnilo až v roce 1930. Po vzkříšení Walrasovy práce Gustavem Cesselem a Étiennem Antonellim se sešel Vídeňský kongres, kde se mnoho matematiků a ekonomů pokoušelo vyřešit spletitost problému všeobecné rovnováhy. Klíčovou událostí však bylo vydání článku o Paretovském systému z roku 1934, jehož autorem byl John Hicks.

Paretovská myšlenka byla podporována až do roku 1950. Poté matematická ekonomie prošla malou revolucí, kterou odstartovali Tjalling Koopmans, Kenneth Arrow a G. Gérard Debreu. To dalo vznik nové škole – Neo-Walrasiánské. Za hlavní přínos této

školy je považována rekonstrukce obecné teorie rovnováhy, založené na poznatcích Walrase a Pareta, s přidáním nových matematicko-ekonomických aparátů.

2.2 Marie-Ésprit Léon Walras (1834 – 1910)

Léon Walras, švýcarský neoklasický ekonom a profesor francouzského původu, se narodil 16. prosince 1834 v Évreux ve Francii. Byl synem francouzského ekonoma Augusta Walrase. Ten se však jako ekonom profesně neživil. Pracoval jako správce školy, nicméně jeho ekonomické myšlení mělo hluboký vliv na jeho syna. Jeho největší přínos pro ekonomii spočíval v určení hodnoty zboží tím, že stanovil jeho nedostatek ve vztahu k lidské potřebě.



Obr. 2.1: Portrét Léona Walrase

V dětství se Walrasova rodina poměrně často stěhovala. Mimo jiné žil Léon Walras postupně v Paříži, Lille a Caen, kde také nastoupil později do školy. Pro svůj enormní zájem o matematiku se rozhodl studovat na polytechnické škole, kam ho však nepřijali. Walras nakonec vystudoval Vysokou školu báňskou. U povolání důlního inženýra však dlouho nezůstal.

Vyzkoušel si mnoho různých profesí, například se pokusil stát novinářem a spisovatelem, avšak neúspěšně. Ve volném čase se neustále zabýval ekonomií. Teprve v roce 1870 dostal nabídku vést katedru politické ekonomie na právnické fakultě Laussanské univerzity, kde následujících 22 let působil i jako profesor. Současnými ekonomy byl však odmítán a ani u studentů velký zájem nevzbuzoval. V té době byla za největší ekonomické centrum považována Velká Británie, a Laussane se tak nestalo ideálním místem k rozvoji novodobých myšlenek.

V roce 1893 odešel na dočasný odpočinek a své místo přenechal Vilfredu Paretovi. Zpátky na fakultu se však už nikdy nevrátil. Zemřel 5. ledna 1910 nedaleko Montreux ve Švýcarsku ve věku 76 let.

Dle Johna Maynarda Keynese byl největším ekonomem všech dob.

2.2.1 Dílo a odkaz Léona Walrase

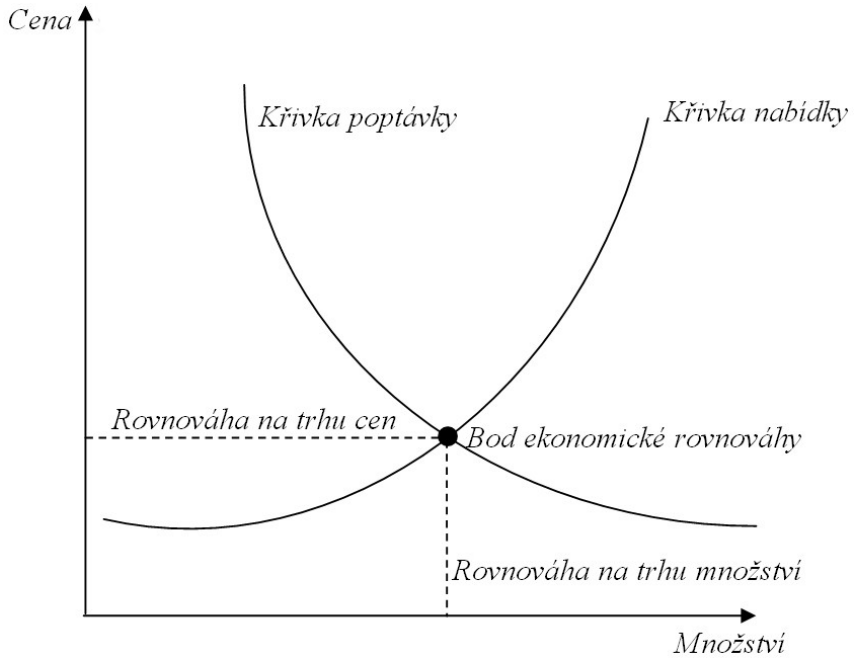
Walras napsal za svého života hodně publikací. Stěžejní dílo jeho práce vzniklo v roce 1874 a nese název „Základy čisté politické ekonomie“. Zde uvedl právě teorie všeobecné rovnováhy, kterou později J. A. Schumpeter nazval *Magnou chartou ekonomie*.

Vydal také dva sborníky esejů z oblasti aplikované a sociální ekonomie, které nesou názvy: „Studia v sociální ekonomii“ (1896) a „Studia v aplikované politické ekonomii“ (1898). Velmi významným dílem se stal esej „Teorie peněz“, který je součástí druhého ze dvou uvedených sborníků. S jedním z jeho posledních esejů se v roce 1907 ucházel o Nobelovu cenu Míru – neúspěšně.

2.3 Ekonomická rovnováha

Ekonomická rovnováha přitahovala a nestále přitahuje ekonomy i v dnešní době. Důvod je zřejmý – navozuje pocit řádu, harmonie a stability. V současné literatuře najdeme definici všeobecné rovnováhy definovanou jako rovnost:

$$agregátní\ poptávka = agregátní\ nabídka.$$



Obr. 2.2: Ekonomická rovnováha

Jinak lze také říci, že ekonomická rovnováha nastává v okamžiku, kdy je v souladu nabídka s poptávkou na individuálních i dílčích trzích. Takový bod se nazývá rovnovážným bodem. Ekonomika se snaží dostat do rovnováhy neustále, nicméně praxe je taková, že dochází k menším či větším výkyvům rovnovážného stavu, které vedou k cyklickému kolísání hospodářství. Tento jev se nazývá hospodářský cyklus.

Existují dvě základní příčiny odchylek od rovnovážného stavu:

- provázanost ekonomiky a procesů v ní probíhajících;
- nezávislé rozhodování jednotlivých subjektů ekonomiky.

Právě vzájemná souvislost a provázanost všech procesů v ekonomice byla otázka, na kterou se snažil Walras najít odpověď. Jeho teorie všeobecné rovnováhy přinesla významný metodologický přínos v tom, že se snažil potlačit kauzální závislost mezi ekonomickými veličinami a zároveň ukázal, že jsou spojeny vzájemnou závislostí.

Léon Walras nebyl prvním, kdo se pokoušel sestavit model ekonomické rovnováhy. Před ním se pokusili o definování rovnováhy fyziokraté.

2.3.1 Fyziokraté a ekonomická rovnováha

Ekonomické učení fyziokratů se v mnoha literaturách uvádí za příklad první ekonomické školy v historii ekonomie. Název fyziokraté je odvozen od slova *fyziokracie*, jehož význam je vláda přírody. Tato nevelká ekonomická skupina vznikla v druhé polovině 18. století ve Francii v čele s Françoisem Quesnayem.

Největším přínosem fyziokratů byla Ekonomická tabulka z roku 1758. Její podstatou bylo ukázat, že společnost a její ekonomika jsou v neustálém koloběhu. Ten udržuje sám sebe a tím je zajištěna i rovnováha a harmonie, kterou můžeme pozorovat v přírodě. Tato tabulka byla odrazem vazeb mezi sektory ekonomiky a mezi hlavními společensko-ekonomickými třídami lidí.

Walras, stejně jako fyziokraté, si představoval ekonomiku jako věčný a opakující se koloběh. V mnoha aspektech však Walras uvažoval rozdílně.

Rozdíl v pojetí Walrasovy rovnováhy od fyziokratů:

- na rozdíl od fyziokratů se Walras pokoušel vyhnout agregaci dílčích trhů;
- každé zboží a každý výrobní faktor měl svůj trh;
- miliony dílčích trhů byly spojeny jemnými avšak pevnými a jasně sledovanými vlákny;
- trhy jsou „vyčišťovány“ od přebytečných nabídek a poptávek *pohybem cen.*

2.4. Dva přístupy modelování všeobecné rovnováhy

V teorii všeobecné rovnováhy lze vidět dva odlišné přístupy modelování:

- prvním je přístup *všeobecné rovnováhy*, který prosazoval právě Léon Walras (viz. kapitola 2.5);
- druhým je přístup *dílčí rovnováhy*, jehož autorem je Alfred Marsall, představitel *cambridgeské školy*.

2.4.1 Dílčí rovnováha Alfreda Marshalla

Alfred Marshall byl jedním z nejvýznamnějších a nejvlivnějších ekonomů své doby. Je považován za otce a zakladatele *cambridgeské školy.* Znakem této školy byla zejména snaha uchovat tradici anglických klasiků. S *laussanskou školou* je spojoval společný zájem o ekonomickou rovnováhu a ekonomický blahobyt.

Marshall je autorem knihy *Zásady ekonomie*, která se stala po mnoho let hlavní ekonomickou učebnicí po celém světě. Je znám jako jeden ze zakladatelů neoklasické ekonomie.

K definování celkové rovnováhy na trhu používal Alfred Marshall metodu dílčí rovnováhy trhu. Na rozdíl od Walrase se Marshall domníval, že k pochopení tržních procesů a celkové rovnováhy je třeba vytvořit jednoduchý model. Princip jeho studie spočíval v předpokladu *ceteris paribus*, odvozeného od poptávky a nabídky. Tento předpoklad lze ilustrovat následovně: změna ceny a změna kupovaného a poptávaného množství daného statku nemá žádný vliv na ceny a množství ostatních statků. Tento způsob ekonomického myšlení je i pro ekonomy dnešní doby schůdnější a poskytuje snazší orientaci a pochopení elementárních tržních vztahů.

2.5 Walrasova rovnováha

Při samotné konstrukci modelu prokázal Walras velice osobitý a specifický přístup modelování, jehož výsledkem byly čtyři různé modely. Postupoval od modelu nejjednoduššího, který však byl nejvíce vzdálen realitě, k modelům složitějším a realitě bližším.

Nejabstraktnější model je dnes znám jako *model směny*. Lze ho popsat jako směnnou ekonomiku, v níž neexistuje výroba a jediným nástrojem je směna. Základní myšlenka tohoto modelu je prostá a lze ji shrnout do následujících bodů:

- Lidé vlastní určité množství statků. Preferují však různé skupiny statků a z toho důvodu chtějí směňovat své statky s ostatními, aby dosáhli maximálního uspokojení svých potřeb.
- Lidé neobchodují navzájem jeden s druhým, ale směňují na trhu.
- Je tvořena čistá nabídka a poptávka tím, že lidé berou ceny vyhlášené na trhu jako dané, neměnné a s naprostou důvěrou, že směna proběhne za tuto danou cenu.
- Aby domácnosti mohli poptávat zboží na trhu, musí nabídnout zboží odpovídající hodnoty.

Následující model byl nazván *model směny a výroby*. Jak již název napovídá, do ekonomiky byla zařazena nyní i výroba a vznikl ekonomický koloběh: domácnosti vlastní výrobní faktory, které pronajímají podnikatelům a ti s nimi vyrábějí spotřební zboží, které nabízejí a prodávají domácnostem. Zde však Walras potlačil existenci trhu kapitálových statků, což by mělo za následek, že ekonomika by nerostla, kapitálové statky by byly neopotřebovatelné a nové kapitálové statky by se nevyráběly.

Ve třetím modelu, který byl zase o něco blíž k realitě, se již kapitálové statky vyrábějí a existují zde pro ně trhy. Ekonomika již není v čase ustálená, stacionární, ale roste. Růstem ekonomiky je zaručena i existence trhu úspor. Tento model lze nazvat *modelem směny, výroby a kapitálu.*

Třetímu modelu však chybělo něco podstatného – peníze. Ty byly Walrasem zavedeny až ve čtvrtém vydání svých *Základů čisté ekonomie*. Tento čtvrtý model, který

zahrnoval vše podstatné – tedy *směnu, výrovu, kapitál i peníze,* korunoval teorii všeobecné rovnováhy.

Teorii všeobecné rovnováhy lze rozdělit tři části:

1. teorii mezní užitečnosti;
2. hledání a formulování podmínek rovnováhy;
3. snaha o vysvětlení procesu dosažení rovnováhy.

2.5.1 Teorie mezní užitečnosti

Teorie mezní užitečnosti byla pro ekonomickou vědu velkým přínosem. Pomocí mezní užitečnosti odvodil funkci poptávky a nabídky domácností v ekonomice. Protože se snažil o komplexní pojetí celého modelu, byly do teorie zahrnuty jak spotřební statky, tak služby výrobních faktorů. Walras předpokládal, že každý je vlastníkem určitého výrobního faktoru a zároveň odlišoval pojmy výrobní faktory a služby výrobních faktorů. Výrobní faktory byly vlastněny jednotlivci, kteří je mohli užívat ve svůj vlastní prospěch nebo je mohli pronajmout podnikatelům. Pronájem výrobního faktoru pak znamená prodej služby výrobního faktoru.

Podnikatelé neboli firmy zde představují pouze „výrobní agenty“, kteří si pronajímají od spotřebitelů výrobní faktory, s jejichž pomocí vyrábějí spotřební statky. Jinak řečeno podnikatelé jsou pouze zprostředkovateli.

Dále Walras vycházel z toho, že domácnosti mají své funkce mezních užitečností spotřebních statků a služeb výrobních faktorů. Pokud bychom chtěli vyjádřit mezní užitečnost *i*-tého zboží jako funkci množství *d* tohoto zboží, dostaneme:

$$MU_i = MU_i(d_i), \quad \text{pro } i=1, \ldots, m,$$

kde *m* je počet statků na trhu.

Aby bylo možné formulovat podmínku spotřebitelovi rovnováhy, bylo třeba zavést ještě druhou rovnici. Tu lze slovně popsat jako funkci mezního užitku služby *j*-tého výrobního faktoru, tedy toho jejího množství, které jeho vlastník sám využívá, tedy:

$$MU_j = MU_j(q_j - o_j), \quad \text{pro } j=1, \ldots, n,$$

kde:

- $(q_j - o_j)$ představuje množství výrobního faktoru užívané vlastníkem;
- q_j je tedy celkové množství výrobního faktoru, kterým domácnost disponuje;
- o_j je množství výrobního faktoru nabízené k prodeji;
- n je počet výrobních faktorů na trhu celkem.

Odtud už Walras mohl jednoduše zformulovat celou podmínku spotřebitelovy rovnováhy, která je dne známá jako II. Gossenův zákon. Lze ji vyjádřit jako rovnost:

$$\frac{MU_1(d_1)}{P_1} = \cdots = \frac{MU_m(d_m)}{P_m} = \frac{MU_1(q_1 - o_1)}{V_1} = \cdots = \frac{MU_n(q_n - o_n)}{V_n},$$

kde:

- P_i jsou ceny statků;
- V_i jsou ceny výrobních faktorů.

Pokud vlastník svůj výrobní faktor nepronajme, cenu tohoto výrobního faktoru pak nazýváme cenou implicitní (neboli cenou obětovaná příležitosti). Ceny v tomto modelu nemusí být peněžního charakteru a ve většině případů skutečně nejsou. Walras je nazval jako *nummèraire*. Pokud je nějaký statek nazýván *nummèraire*, pak lze tento statek chápat jako měřítko cen pro ostatní statky, jelikož jeho cena tohoto statku je stanovena a rovna jedné. Ve Walrasově modelu tedy hlavní roli hrají tzv. nummèrairové ceny.

2.5.2 Soustava simultánních rovnic

Vzájemnou závislost mezi všemi ekonomickými subjekty a mezi všemi trhy vyjádřil Léon Walras pomocí soustavy simultánních rovnic. Jednotlivé rovnice vyjadřují rovnováhy, kterých je třeba dosáhnout, aby byl celý systém v rovnováze. Řešením těchto rovnic je rovnovážná soustava cen, která je odrazem rovnovážného systému trhu.

Celá soustava je ve tvaru:

Soustava simultánních rovnic, charakterizujících všeobecnou rovnováhu:

$$(1)\quad D_i = \sum_{h=1}^{H} d_{hi} * \left(p_1 \dots p_{m,}\ v_1 \dots v_{n,} \frac{1}{r}\right)\ pro\ i = 1 \dots m$$

$$(2)\quad D_l = \sum_{h=1}^{H} d_{hl} * \left(p_1 \dots p_{m,}\ v_1 \dots v_{n,} \frac{1}{r}\right)$$

$$(3)\quad O_j = \sum_{h=1}^{H} o_{hj} * \left(p_1 \dots p_{m,}\ v_1 \dots v_{n,} \frac{1}{r}\right) \quad pro\ j = 1 \dots n$$

$$(4)\quad O_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} D_i + \sum_{k=1}^{g} b_{kj} Q_k \qquad pro\ j = 1 \dots n$$

$$(5)\quad p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \qquad pro\ 1 = 1 \dots m$$

$$(6)\quad s_k = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} v_j \qquad pro\ k = 1 \dots g$$

$$(7)\quad s_k = \frac{v_k - c * s_k}{r} \qquad pro\ k = 1 \dots g$$

$$(8)\quad s_k = \frac{v_k}{r} \qquad pro\ k = (g+1) \dots n$$

$$(9)\quad D_l * \frac{1}{r} = \sum_{j=1}^{n} Q_k s_k$$

Na Walrasově modelu je třeba si všimnout dvou významných aspektů:

- v modelu lze nalézt pouze rovnice, které jsou **nezávislé**, tj. žádná rovnice není implicitně obsažena v jiné rovnici modelu a zároveň z ní není ani vyvozena;
- model obsahuje pouze **rovnice rovnováhy**, nikoliv identity. To znamená, že daná rovnice může, ale také nemusí vůbec nastat.

2.5.3 Odvození jednotlivých rovnic

Rovnice (1) až (3) v tabulce 2.1 jsou vyjádřením funkcí poptávek a nabídek. Odrážejí preference spotřebitelů a vyjadřují jejich rovnováhu. Ostatní rovnice, tj. rovnice (4) – (9), vyjadřují podmínky rovnováhy trhů.

Rovnice 1. a 3.

Veličina D_i představuje souhrn m tržních poptávek po statcích a veličina O_j je součtem všech n tržních nabídek služeb výrobních faktorů.

Abychom došli k těmto dvěma rovnicím, je třeba zavést další podmínku. Kromě podmínky spotřebitelovy rovnováhy, kterou jsem uvedla v kapitole mezní užitečnosti, musí být také splněna podmínka rozpočtového omezení spotřebitele. Jednoduše to lze vyjádřit jako rovnost výdajů spotřebitele za zboží a výší jeho důchodu. Rovnicí to lze vyjádřit jako:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i d_i = \sum_{i=1}^{n} v_j o_j.$$

Z těchto dvou podmínek už lze formulovat individuální poptávkové a nabídkové funkce. Walras při jejich sestavování požadoval, aby funkce poptávky vyjadřovala závislost poptávaného množství na cenách všech statků i služeb výrobních faktorů. U nabídkových funkcí zase požadoval, aby vyjadřovaly závislost nabízeného množství na cenách všech statků i služeb výrobních faktorů. Individuální poptávkové a nabídkové funkce mají tedy tvar:

$$d_i = d_i(p_1 \dots p_m, v_1 \dots v_n) \quad \text{pro } i = 1 \dots m,$$

$$o_j = o_j(p_1 \dots p_m, v_m \dots v_n) \quad \text{pro } j = 1 \dots n.$$

Pokud bychom předpokládali v ekonomice H domácností, potom existuje H individuálních poptávek po každém zboží a H individuálních nabídek každé služby výrobních faktoru. Tyto agregátní nabídky a poptávky lze sečíst a získáme tak tržní nabídku a poptávku.

Tímto součtem získáme m tržních poptávek D_i a n tržních nabídek O_j služeb výrobních faktorů, neboli rovnice (1) a (3):

$$(1) \quad D_i = \sum_{h=1}^{H} d_{hi} * \left(p_1 \dots p_{m,}\ v_1 \dots v_{n,} \frac{1}{r}\right) \ pro\ i = 1 \dots m$$

$$(3) \quad O_j = \sum_{h=1}^{H} o_{hj} * \left(p_1 \dots p_{m,}\ v_1 \dots v_{n,} \frac{1}{r}\right) \quad pro\ j = 1 \dots n$$

Rovnice 2.

Druhá rovnice je zformulována jako funkce tržní poptávky po zboží e:

$$(2) \quad D_l = \sum_{h=1}^{H} d_{hl} * \left(p_1 \dots p_m, v_1 \dots v_n, \frac{1}{r}\right).$$

Lze ji získat agregací individuálních poptávek H spotřebitelů. V tomto modelu platí, že poptávka po zboží l závisí jak na ceně zboží l, tak na cenách všech ostatních zboží. Navíc jsou také ovlivňovány všemi nájemními cenami výrobních faktorů. Pokud tedy do modelu vstoupí nové „zboží“, je třeba změnit i všechny ostatní poptávky a nabídky služeb výrobních faktorů. Nabídky služeb budou rovněž závislé na ceně zboží l, tedy na $\frac{1}{r}$.

Rovnice 4.

Čtvrtá rovnice:

$$(4) \quad O_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} D_i + \sum_{k=1}^{g} b_{kj} Q_k \qquad pro\ j = 1 \dots n$$

je vyjádřením rovnováhy nájemních trhů výrobních faktorů. Produkční koeficienty a_{ij}, resp. b_{kj} udávají, kolik se při výrobě jednotky zboží i, resp. kapitálového statku k,

spotřebuje statku *j*. Pro zjednodušení je možné předpokládat, že tyto koeficienty jsou dané, fixní.

Pak lze v celém modelu najít tyto neznámé:

- *m-1* cen p_i *spotřebních statků;*
- *m* množství D_i *spotřebních statků;*
- *g* množství Q_k kapitálových statků.

Rovnice 5.

Pátá rovnice v modelu:

$$(5) \quad p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \qquad pro\ 1 = 1 \dots m$$

vyjadřuje podmínku na rovnováhy na trzích spotřebních statků. Jednoduše lze říci, že je vyjádřena jako rovnost ceny a jednotkových nákladů.

Důsledek:

- Pokud bude cena převyšovat jednotkové náklady, podnikatelé by na tomto trhu dosahovali takových zisků, že by na tento trh vstupovali nové firmy. Jejich vstup na trh by však znamenal nárůst nabídky a vedl by ke snížení cen.
- Pokud tomu bude naopak, tedy jednotkové náklady budou převyšovat cenu, podnikatelé by dosahovali vysokých ztrát a odcházeli by na jiné trhy. Důsledkem by byl pokles nabídky a nárůst ceny.
- Pouze při rovnosti ceny a jednotkových nákladů lze docílit rovnováhy na trhu.

Z výše uvedených důsledků je zřejmé, že v modelu neexistuje *zisk podnikatele.* Celý Walrasův model předpokládá pouze dokonale konkurenční trhy a na takových trzích neexistuje podnikatelské riziko a odměna ve formě zisku za podstoupení podnikatelského rizika. Rovnováha na tomto trhu zboží tedy nastává pouze a jen tehdy pokud je předpokládán dokonale konkurenční trh.

Rovnice 6. a 7.

Tyto dvě rovnice popisují podmínky rovnováhy trhů kapitálových statků. Kapitálové statky jsou vyráběné výrobní faktory, které mají dlouhou životnost. Příkladem mohou být budovy nebo stroje. Tyto statky mají svoje trhy, na kterých vystupují jak výrobci, tak kupující neboli *kapitalisté*. Kapitálové statky, vstupující na trh, mají danou kupní cenu, za kterou jsou nakupovány kapitalisty. Pro tyto ceny musí platit rovnováha:

kupní cena kapitálového statku = jednotkové náklady na jeho výrobu.

Tím dostaneme *g* rovnic, které vyjadřují rovnováhu na trzích těchto statků:

$$(6) \quad s_k = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} v_j \quad pro\ k = 1 \dots g$$

kde:

- s_k představuje kupní cenu *k*-tého kapitálového statku;
- b_{kj} jsou produkční koeficienty, které říkají, jaká je spotřeba *j*-tého výrobního faktoru na produkci jednotky *k*-tého kapitálového statku;
- v_j jsou nájemní ceny VF.

Rovnice (7) vyjadřuje další podmínku rovnováhy pro kupní cenu kapitálového statku. Protože kupní ceny těchto statků jsou běžně odvozovány od jejich čistých výnosů, musí se tyto ceny rovnat jejich diskontovaným čistým výnosům. Platí tedy, že kupní cena *k*-tého kapitálového statku s_k je rovna hrubému výnosu v_k z jednotky kapitálového statku sníženého o násobek míry opotřebení *c* a kupní ceny s_k tohoto statku, kde toho celé je podělené úrokovou mírou *r*.

$$(7) \quad s_k = \frac{v_k - c * s_k}{r} \quad pro\ k = 1 \dots g$$

Rovnice 8.

Podmínka vyjádřená rovnicí (8) je rovnováha na trzích nevyráběných výrobních faktorů. Jedná se například o pozemky nebo různé přírodní zdroje.

Pokud budeme předpokládat, že z celkového počtu *n* výrobních faktorů je prvních *g* výrobních faktorů vyráběných, zbývá vyjádřit *n* – *g* nevyráběných faktorů. Pokud tedy podmínka (7) platí pro prvních *g* výrobních faktorů, musí platit i pro *n* – *g* nevyráběných. Potom tedy platí:

$$(8) \quad s_k = \frac{v_k}{r} \quad pro\ k = (g+1) \ldots n$$

Rovnice 9.

Poslední z rovnic vyjadřuje rovnováhu trhu kapitálu jako celku.

$$(9) \quad D_l * \frac{1}{r} = \sum_{j=1}^{n} Q_k s_k$$

Podmínkou rovnováhy je zde rovnost úspor (= investic) a celkových nákladů na výrobu nových kapitálových statků. Investice se v tomto případě vždy rovnají úsporám, neboť jsou pouze jiným vyjádřením úspor. To znamená, že ve Walrasově modelu rovnost úspor a investic není podmínkou rovnováhy, nýbrž identitou.

Celkové úspory domácností jsou jejich důchodem, který vynaložili na nákup zboží *l*. Tyto úspory lze tedy vyjádřit jako násobek množství a ceny zboží *l* (viz. levá strana rovnice (9)). Pravá strana rovnice pak představuje *n* rovnic, vyjádřených jako násobek mezi množstvím vyráběných kapitálových statků Q_k a jejich kupní cenou s_k.

2.5.4. Proces tápání

Cílem Walrasovy práce bylo ukázat, že všeobecná rovnováha jako proces, kde jsou všichni lidé i všechny trhy v rovnováze, může existovat. Nechtěl za každou cenu sestavit soustavu, která by říkala sama o sobě, že musí být vyřešena. Chtěl ukázat, že trhy samy dojdou k rovnováze, stejně jako by k tomu došel, kdyby chtěl soustavu vyřešit. Tento proces nazval *procesem tápání.*

Tento *proces tápání* lze popsat tak, že účastníci trhu tápají a nevědí, které ceny jsou vlastně ty rovnovážné. Neexistuje žádné pravidlo nebo výpočet, které by stanovily tyto rovnovážné ceny. Účastníci trhu se přibližují k těmto cenám pouze metodou pokus-omyl, tzn., že některé realizované obchody se uskutečňují za nerovnovážné ceny. Na trhu vznikne nerovnováha, účastníci trhu se poučí z chyb a požadují, resp. nabízejí jinou cenu, která přiblíží trh k jeho „vyčištění". Pokud takový obchod proběhne, okamžitě se změní rozdělení důchodu mezi domácnostmi i rozdělení kapitálových statků mezi kapitalisty. Výsledkem je pak změna výchozích podmínek celého modelu. S tím se však mění i rovnice rovnováhy a jejich řešení. Mění se teda cílová rovnováha sama. *Proces tápání* tedy sám neukazuje žádnou cestu k dosažení rovnováhy, protože snaha dostat se k cíli mění ve své podstatě samotný cíl.

2.6 Walrasův zákon

Při řešení dané soustavy simultánních rovnic Walras zjistil, že počet neznámých je $2m+ 3n +g +1$ a počet rovnic je $2m+ 3n +g +2$. Walrasova soustava rovnic by se tedy mohla zdát na první pohled neřešitelná vzhledem k faktu, že počet rovnic je vyšší než počet neznámých. Při bližším zkoumání lze však dojít k závěru, že ne všechny rovnice jsou na sobě nezávislé a je-li n-1 trhů v rovnováze, pak je v rovnováze i poslední, n – *tý* trh. Lze to dokázat v následujícím textu:

Máme dáno zboží l indexováno $l \in \{1, \dots, L\}$ a H jednotlivců indexovaných $h \in \{1, \dots, H\}$. Ceny zboží jsou dány cenovým vektorem $p = (p_1, p_2, \dots p_L)$. Nechť $S_{lh}(p)$ je označení pro množství zboží l, které se spotřebitel h chystá prodat za cenový vektor p a nechť $D_{lh}(p)$ je označení pro množství zboží l, které se spotřebitel h chystá koupit za cenový vektor p.

Tvrzení 2.1 (Walrasova zákona) Jestliže se každý jednotlivec drží svého rozpočtového omezení, tak že hodnota množství prodaného se rovná hodnotě množství koupeného, potom se celková hodnota tržeb všech jednotlivců rovná celkové hodnotě nákupů všech jednotlivců.

Důkaz: Tvrzení pro každého spotřebitele h a pro každý cenový vektor p předpokládá, že celkové tržby se rovnají celkový nákupům:

$$p_1 S_{1h}(p) + p_2 S_{2h}(p) + \cdots + p_L S_{Lh}(p) = p_1 D_{1h}(p) + p_2 D_{2h}(p) + \cdots + p_L D_{Lh}(p)$$

neboli

$$\sum_{l=1}^{L} p_l S_{lh}(p) = \sum_{l=1}^{L} p_l D_{lh}(p).$$

Nyní součtem přes všechny spotřebitele H a přeskupením dostaneme:

$$\sum_{h=1}^{H} \sum_{l=1}^{L} p_l S_{lh}(p) = \sum_{h=1}^{H} \sum_{l=1}^{L} p_l D_{lh}(p)$$

$$\sum_{l=1}^{L} p_l \sum_{h=1}^{H} S_{lh}(p) = \sum_{l=1}^{L} p_l \sum_{h=1}^{H} D_{lh}(p)$$

$$\sum_{l=1}^{L} p_l S_l(p) = \sum_{l=1}^{L} p_l D_l(p).$$

S_l v poslední rovnici je celkové množství nabízeného zboží l v ceně p_l a D_l je celkové množství poptávaného zboží l v ceně p_l. Tato rovnost znamená, že pro nějaký cenový vektor $p = (p_1, p_2, \dots p_L)$ je celková hodnota plánovaných tržeb rovna celkové hodnotě plánovaných nákupů.

□

Věta 2.1 Jestliže jsou všechny trhy, s výjimkou jednoho trhu k, v rovnováze, tj. $S_l(p) = D_l(p) = Q_l^*$ pro všechna $l \neq k$ a také $p_k \neq 0$, potom musí platit také $S_k(p) = D_k(p) = Q_k^*$. Jinak řečeno, jestliže všechny trhy až na jeden jsou vyčištěny, pak i zbývající trh musí být vyčištěn.

Důkaz: Podmínka uvedená výše, že hodnota celkových plánovaných tržeb se vždy rovná hodnotě celkově plánovaných nákupů, může být psána jako:

$$\sum_{l=1}^{L} p_l S_l(p) = \sum_{l=1}^{L} p_l D_l(p)$$

$$\sum_{l \neq k} p_l S_l(p) + p_k S_k(p) = \sum_{l \neq k} p_l D_l(p) + p_k D_k(p)$$

Protože $S_l(p) = D_l(p) = Q_l^*$ pro všechna $l \neq k$, dostaneme:

$$\sum_{l \neq k} p_l Q_l^*(p) + p_k S_k(p) = \sum_{l \neq k} p_l Q_l^*(p) + p_k D_k(p)$$

$$p_k S_k(p) = p_k D_k(p)$$
$$S_k(p) = D_k(p)$$

□

Pokud bychom tedy předpokládali, že některá z uvedených rovnic není nezávislá, ale lze ji vyvodit z rovnic ostatních, počet rovnic by se tím snížil na *2m+ 3n +g +1*. Počet rovnic by se tedy rovnal počtu neznámých a soustava by pak byla řešitelná. Tím by byla zaručena existence všeobecné ekonomické rovnováhy.

2.7 Další ekonomické pojmy a definice

V této kapitole bych ještě ráda uvedla některé ekonomické pojmy a definice, které nesouvisejí s Walrasovou rovnováhou přímo, nicméně jsou často zmiňované ve třetí kapitole, kde se zabývám ověřením Walrasovy rovnováhy.

Produkční funkce a CRS produkční funkce

Produkční funkcí lze rozumět vztah mezi velikostí vstupů a velikostí výstupů. Matematicky lze tento vztah vyjádřit jako:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m, a_0, a_1, \dots, a_m),$$

kde:

- Y je objem výroby,
- $X_1, X_2, \dots, X_m$ jsou různé výrobní faktory,
- $a_0, a_1, \dots, a_m$ jsou parametry produkční funkce.

Produkční funkce může být v určitých případech funkcí libovolného stupně, vyhovuje-li podmínce homogenity.

Definice 2.1 $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m)$ je homogenní funkcí k-tého stupně, jestliže pro nějaké reálně číslo λ platí, že:

$$\lambda^k Y = f(\lambda X_1, \lambda X_2, \dots, \lambda X_m) \text{ pro } \lambda > 1.$$

Veličina k tedy určuje stupeň homogenity funkce a charakterizuje výnos z růstu rozsahu výroby. Pokud bude $k=1$, nazýváme takovou produkční funkci jako homogenní stupně 1 nebo také lineárně homogenní.

Produkční funkce se nazývá funkcí s:

- klesajícími výnosy z rozsahu, jestliže $k < 1$;
- rostoucími výnosy z rozsahu, jestliže $k > 1$;
- konstantními výnosy z rozsahu (CRS), jestliže $k = 1$.

Kladem produkční funkce CRS je to, že lze zjistit náklady na jednotku produkce.

Převis poptávky a funkce převisu poptávky

Pro definování převisu poptávky budu uvažovat ekonomiku, kde neexistuje výroba a spotřebitelé jednoduše směňují zboží mezi sebou. Označme zápisem $x_l^h(p, I)$ poptávku spotřebitele h pro zboží l, kde p je cenový vektor a I je jeho příjem. V čistě směnné ekonomice je peněžní příjem tvořen prodejem zboží. Přitom platí, že prodání zboží a následné koupení jej zpět nestojí nic navíc, protože ceny, za které je dané zboží prodáváno a nakupováno, jsou stejné. Navíc, je vhodné (ale ne nutné) zabývat se poptávkou nákupu spíše než poptávkou po spotřebě.

To vede k definování individuálních převisů poptávky:

$$z_l^h(p, \bar{x}^h) \equiv x_l^h\left(p, \sum_{l=1}^{L} p_l * \bar{x}_l^h\right) - \bar{x}_l^h,$$

kde:

- $z_l^h(p, \bar{x}^h)$ je převis poptávky spotřebitele *h*;
- p_l je cena zboží *l;*
- *p* je cenový vektor;
- celý výraz $x_l^h\left(p, \sum_{l=1}^{L} p_l * \bar{x}_l^h\right)$ označuje poptávku spotřebitele *h* po zboží *l*, kde $L \equiv \sum_{l=1}^{L} p_l * \bar{x}_l^h \equiv I$;
- $\bar{x}_l^h$ představuje počáteční vybavení spotřebitele h zbožím *l.*

Celkový převis poptávky lze pak jednoduše definovat jako součet individuálních převisů poptávky:

$$z_l(p) \equiv \sum_{h=1}^{H} z_l^h(p).$$

Převis poptávky reprezentuje spotřebitelovu optimalizaci. V rovnovážných cenách musí být možné pro všechny zákazníky optimalizovat ve stejný čas. To znamená, že na trhu pro každé zboží nesmí poptávka ke koupi překročit nulu, protože na trhu není uvažována jak výroba, tak ani firma existující mimo trh, která by podpořila nabídku.

Abychom mohli správně využít převis poptávky ke studiu rovnováhy, je třeba se nejdříve seznámit s jeho vlastnostmi.

Individuální poptávka má dvě klíčové vlastnosti: je homogenní stupně nula a splňuje rozpočtové omezení (Walrasův zákon). Tyto vlastnosti lze vyjádřit vztahy pro každé jednotlivé *i*:

$$z_l^h(\lambda * p) = z_l^h(p) \text{ (homogenní stupně nula)},$$

$$\sum_{l=1}^{L} p_l * z_l^h(p) = 0 \text{ (Walrasův zákon)},$$

kde:

- z_l^h je převis poptávky spotřebitele *h* po zboží *l;*
- λ je konstanta.

Protože celkový převis poptávky je jednoduše dán součtem individuálních převisů poptávky, celkový převis poptávky musí taky mít tyto dvě vlastnosti:

$$z_l(\lambda * p) = z_l(p) \text{ (homogenní stupně nula)},$$

$$\sum_{l=1}^{L} p_l * z_l(p) = 0 \text{ (Walrasův zákon)}.$$

Lokální nenasycenost

Vlastnost lokání nenasycenost spotřebitelových preferencí znamená, že pro nějaké množství zboží existuje vždy nějaké větší množství zboží tak, že je před ním preferováno.

Formálně, jestliže X^h je spotřební množina, potom pro nějaké $x_1 \in X^h$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $x_2 \in X$ tak, že $\|x_2 - x_1\| \leq \varepsilon$ a x_2 je preferováno před x_1.

Vlastnosti lokální nenasycenosti:

- Lokální nenasycenost lze odvodit pomocí monotónnosti preferencí. Obrácená věta však neplatí. Jedná se tedy o slabší podmínku.
- Spotřební množina musí být buď neomezená, nebo otevřená. Jinými slovy nemůže být kompaktní. Kdyby byla kompaktní, musela by obsahovat tzv. bod nasycení, který lokální nenasycenost vylučuje.
- Tím je vyloučen případ, kdy by všechno zboží bylo špatné, poněvadž potom by bod $x = 0$ byl bodem nasycení.

Matematicko-ekonomická část

Tento 3. oddíl je stěžejní částí diplomové práce. V následujícím textu se pokusíme dokázat Walrasovu všeobecnou rovnováhu pomocí Brouwerovy věty o pevném bodě. Potřebné matematické definice pojmů používaných v následujícím textu, včetně teorie k Brouwerově větě, byly uvedeny na začátku diplomové práce. Walrasově rovnováze pak byl věnován druhý oddíl diplomové práce.

Standardní důkazy pro existenci Walrasovy rovnováhy jsou založeny na Kakutaniho větě o pevném bodě pro mnohoznačné funkce. Pomocí malé úpravy standardních argumentů lze zcela výhradně pracovat pouze s Brouwerovou větou o pevném bodě pro spojité funkce. Touto větou jsme se také zabývali v matematické části diplomové práce.

Brouwerova věta má široké spektrum využití. Dokonce i Nash sám použil tuto větu o pevném bodě pro důkaz Nashovy rovnováhy pro speciální případ maticových her. Jedna z výhod využití Brouwerovy věty k ověření Walrasovy rovnováhy je ta, že vede k cíli jednodušší cestou. Díky ní není potřeba zvětšit oblast obsahující převis poptávky, jako to provedli Gale a Debreu ve svých důkazech, nebo zvětšit poptávku každého spotřebitele, jako tomu bylo v důkazu pro zobecněnou hru Debreua a Arrowa, nebo přidáním pomocných komodit, jak to ilustroval McKenzie.

Podkladem pro tuto část je literatura [4],[17], jejímž autorem je v obou případech John Geanakoplos.

3.1 Spotřebitelé a firmy

Každý trh vyžaduje existenci dvou činitelů: spotřebitelů a firem. V následující podkapitole jsou uvedeny předpoklady a podmínky na tyto dva činitele, které byly sestaveny pro důkaz všeobecné rovnováhy v díle Debreua a Arrowa. Toho lze však přímo využít i pro důkaz Walrasovy rovnováhy pomocí Brouwerovy věty.

Spotřebitelé. Pojmem spotřebitel rozumíme jednotlivce, který vlastní určité zásoby komodit (počáteční vybavení) a který tyto komodity spotřebovává. Příkladem takového počátečního vybavení může být například volný čas. Pod pojmem komodita je možné si

představit jak zboží, tak služby. V teorii všeobecné rovnováhy se spotřebitelé nerozhodují mezi individuálním zbožím nebo komoditou, ale vybírají si z kompletních spotřebních plánů. Jeden druh zboží má pro spotřebitele význam uvažovat pouze tehdy, pokud je ve vztahu s jinými komoditami určenými ke spotřebě, nebo pokud je zahrnut ve spotřebním plánu.

Pro teorii všeobecné rovnováhy budu v následujícím textu uvažovat H spotřebitelů, $h = 1, \dots, H$ (1). Pro každého spotřebitele h je možné uvažovat spotřební plány $x \in \mathbb{R}^L$ ležící v nějaké spotřební množině X^h. Tato množina je uzavřenou podmnožinou v $\mathbb{R}^L$ a je zdola ohraničená (2).

Každý spotřebitel h má předen přesně definované pořadí preferencí $\succcurlyeq_h$ pro každou dvojici $(x_1, x_2) \in X^h \times X^h$. Výraz $x_1 \succcurlyeq x_2$ pak lze interpretovat takto: spotřební plán x_1 je přinejmenším alespoň tak žádoucí jako spotřební plán x_2. Výraz „$\succcurlyeq$“ označuje úplné, tranzitivní a spojité pořadí preferencí (3). Každé pořadí preferencí $\succcurlyeq_h$, definované na kartézském součinu $X^h \times X^h$, splňuje podmínky (1)-(3) právě tehdy, když je dána funkce utility $u^h: X^h \to \mathbb{R}$ taková, že $x \succcurlyeq_h y$. Jinak řečeno, funkci utility lze sestavit, pokud známe pořadí preferencí.

Každý spotřebitel h je charakterizován pomocí vektoru počátečního vybavení $e^h \in X^h \subset \mathbb{R}^L$ pro všechna $h = 1, \dots, H$. Vektor počátečního vybavení představuje nároky spotřebitele na všechno možné dostupné zboží na trhu, ne tedy pouze na zboží, jež má ve fyzickém vlastnictví. Jinými slovy vektor e^h umožňuje spotřebiteli pokrýt poptávku po každé komoditě i ve chvíli, kdy na trhu není žádná obchodní příležitost.

Každý jednotlivec h vlastní podíl v každé z firem $f = 1, \dots, F$. Pro všechna $h = 1, \dots H$, $f = 1, \dots, F$ platí nerovnost $\theta_f^h \geq 0$, a pro všechna $f = 1, \dots, F$ platí, že $\sum_{h=1}^{H} \theta_f^h = 1$. Symbol θ_f^h je vyjádřením konkrétního vlastnického podílu spotřebitele h ve firmě f.

Firmy. Pod pojmem firma rozumíme individuálního rozhodovatele, který vyrábí komodity pomocí kombinace vstupů v technologických procesech.

Nechť na trhu existuje F firem, $f = 1, \dots, F$. Firma je charakterizována svým počátečním rozdělením vlastnických podílů, a výrobními technologiemi $Y_f \subset \mathbb{R}^L$, jimiž disponuje a využívá je k výrobě komodit. Pod pojmem výrobní technologie si lze představit množství vstupů, které jsou zapotřebí k výrobě jednotky výstupu. Vstupy mohou

být výrobní faktory nebo vyrobené statky. Výstupy pak tvoří výrobní množinu neboli množinu produkčních plánů. Jakýkoliv produkční plán $y \in \mathbb{R}^L$, kde záporné složky označují vstupy a kladné složky znamenají výstupy, je realizovatelný pro firmu *f,* jestliže $y \in Y_f$.

Obvyklým předpokladem pro ověření všeobecné rovnováhy je tzv. bezplatná likvidace: jestliže $l = 1, \dots, L$ je jakékoliv zboží a v_l je jednotkový vektor v $\mathbb{R}^L$ s jedničkou na *l*-té pozici a nulou jinde, potom pro všechna $l = 1, \dots, L$ a $k > 0$ platí, že $-kv_l \in Y_f$ pro všechna $f = 1, \dots, f$. S veškerým zbožím může tedy být disponováno bez vynaložení nákladů, tj, bez použití jakýchkoliv jiných vstupů, což je v běžném světě nereálné. Tento předpoklad může být oslaben, a to tak, že dojde k zavedení záporných cen.

Další, a zároveň nejcitlivější předpoklad fungování modelu je ten, že pro všechna *f* je Y_f uzavřená, konvexní množina zahrnující 0. Tento předpoklad je stěžejním předpokladem podtrhujícím logiku celého modelu a zároveň konvexita v tomto požadavku vylučuje nedělitelnost ve výrobě, rostoucích výnosů z rozsahu, zisk ze specializací,… Konvexita je v souladu s důležitými předpoklady na klesající nebo konstantní výnosy z rozsahu ve výrobě.

Další předpoklady modelu:

- nechť $e = \sum_{h=1}^{H} e^h$;
- nechť $J = \{y \in \mathbb{R}^L | y = \sum_{f=1}^{F} y_f,\ y_f \in Y_f,\ f = 1, \dots, F\}$;
- nechť $\bar{J} = \{y \in J | y + e \geq 0\}$;
- nechť $K = \left\{\left(y_1, \dots, y_f\right) \in Y_1 \times \dots \times Y_f | \equiv y \sum_{f=1}^{F} y_f \in \bar{J}\right\}$.

Potom $\bar{J} \cap \mathbb{R}_{++}^L \neq \emptyset$ a *K* je kompaktní. Aby tyto předpoklady platily, vyžadují, aby úroveň výrobní činnosti, které je možné dosáhnout i v případě, že výrobní sektor osvojí všechny zdroje ze spotřebního sektoru, byla ohraničená. Tato podmínka je v souladu jak s firmami vlastnícími počáteční zdroje, tak s jednotlivci.

Nezbytnou podmínkou modelu je předpoklad, že ekonomika je neredukovatelná. Jinými slovy lze podmínku vysvětlit tak, že pro jakékoliv dva spotřebitele h a h' existuje počáteční vybavení e^h spotřebitele h obsahující výlučně nějakou komoditě *l*, kterou potom spotřebitel h' může užívat za účelem zbohatnutí.

Poslední předpoklad tvrdí, že komodity nejsou rozlišovány podle toho, kdo tyto komodity vyrábí nebo kdo je spotřebovává. To znamená, že neexistují externality ve výrobě ani veřejné statky.

3.2 Minimální nákladová funkce

Ještě než přejdu k definici Walrasovy ekonomiky a rovnováhy, je třeba nadefinovat minimální nákladovou funkci. Studiu této funkce a jejím vlastnostem se velmi úzce zabýval britský ekonom John Hicks.

Nechť $M^h(p,\bar{p})$ jsou minimální čisté náklady domácnosti h. Tyto náklady v cenách p za Walrasiánský příjem $I^h(p)$ musí být rovny cenám $\bar{p}$ a příjmu $I^h(\bar{p})$, aby bylo dosaženo stejné funkce užitku. Příjem $I^h(p)$ je pak definován vzorcem:

$$I^h(p) = p * e^h + \sum_{f \in F} \theta_f^h \max_{y_f \in Y^f} p * y_f.$$

M^h je spojité v bodě $(p,\bar{p})$ a konkávní v p pro každé pevné $\bar{p}$. Nechť $M(p,\bar{p})$ je součet všech $M^h(p,\bar{p})$ přes všechny domácnosti h. Pokud chceme dokázat existenci Walrasovy rovnováhy, je vhodné si funkcí M pomoci.

Pro pochopení vzniku funkce M je dobré uvažovat alespoň dočasně následující předpoklady:

- nechť je dána Walrasova poptávková mnohoznačná funkce $D^h(\bar{p})$;

- nechť je dána Walrasova nabídková mnohoznačná funkce:

$$Y_f(\bar{p}) = \underset{y_f \in Y_f}{argmax}\, \bar{p} * y_f;$$

- pak existuje Walrasova celková mnohoznačná funkce převisu poptávky:

$$Z(\bar{p}) = \sum_{h \in H} (D^h(\bar{p}) - e^h) - \sum_{f \in F} Y_f(\bar{p});$$

- dále předpokládáme, že všechny výše uvedené funkce jsou jednoprvkové a označíme je $d^h(\bar{p})$, $y_f(\bar{p})$, $z(\bar{p})$.

Pokud bude uvažován případ ekonomiky s ryze konkávní funkcí užitku a ryze konvexní produkční množinou, pro kterou je uveden důkaz v sekci 3.5 (Existence Walrasovy rovnováhy), bude ekonomika náležet kompaktnímu prostoru. V tomto případě je možné definovat spojitou funkci $\varphi: S \to S$ vztahem:

$$\varphi(\bar{p}) = \underset{p \in S}{argmax}\left[\underset{z \in Z_+(\bar{p})}{min}\ p * z - \|p - \bar{p}\|^2\right]$$

$$= \underset{p \in S}{argmax}[M(p, \bar{p}) - \|p - \bar{p}\|^2],$$

jejíž pevné body jsou Walrasovy rovnovážné ceny, jak bude dále ukázáno v podkapitole 3.6. Písmenem $S = \{p \in \mathbb{R}_+^L : \sum_{i=1}^L p_i = 1\}$ budeme značit simplex cen. V podkapitole 3.4 je ukázáno, že funkce $\varphi: S \to S$ definovaná pro všechna $\bar{p}$ v S rovnicí uvedenou výše, je spojitá a Walrasova rovnováha je rovna jejímu pevnému bodu.

Zobrazení φ přirozeně vzniklo z potenciální Lyapunovy funkce $L: S \to \mathbb{R}$ definované vztahem:

$$L(\bar{p}) = \underset{p \in S}{max}[M(p, \bar{p}) - \|p - \bar{p}\|^2].$$

Funkce $\varphi(\bar{p})$ vyjadřuje dualitu mezi maximalizací užitku a minimalizací nákladů. Tato dualita pak zaručuje (což vychází z minmax teorému uvedenému v podkapitole 1.4), že pevný bod funkce φ je Walrasova rovnováha.

Na první pohled se nezdá, že by mnohoznačná funkce $Z(\bar{p})$ byla obdobou funkce φ. Nicméně nadefinujme $D_+^h(\bar{p})$ jako množinu všech spotřebních plánů (z hlediska rozpočtu proveditelných či nikoliv), které charakterizují spotřebitele h přinejmenším stejně tak dobře jako jeho Walrasiánské poptávky $D^h(\bar{p})$. Je třeba nadefinovat mnohoznačnou funkci Z_+ vzorcem:

$$Z_+(\bar{p}) = \sum_{h \in H} (D_+^h(\bar{p}) - e^h) - \sum_{f \in F} Y_f,$$

která lépe vyjadřuje převis poptávkové funkce a kde firmy volí jakýkoliv produkční plán, který je realizovatelný. Stěžejní výhoda funkce Z_+ před funkcí Z tkví v tom, že je zdola polospojitá (LSC) stejně jako shora polospojitá (USC).

Ve standardním Kakutaniho existenčním důkazu zveřejněným Debreuem, si spotřebitel vybírá p tak, aby maximalizoval hodnotu konkrétního převisu poptávky z. Vektor z je nezávisle proměnná v zobrazení pevných bodů. V tomto důkazu dle Geanakoplose spotřebitel vybírá cenu p tak, aby maximalizoval náklady na dosažení určitého sociálního blahobytu $(v^h)_{h\in H}$, kde v^h je úroveň užitku spotřebitele h. $(v^h)_{h\in H}$ jsou utility odvozené zase z cen $\bar{p}$, takže $v^h = v^h(\bar{p})$. Jedná se tedy o nepřímé funkce utility Walrasových cen $\bar{p}$, kdy ceny jsou samostatné nezávislé proměnné.

3.3 Walrasova ekonomika

V následujícím textu je Walrasova ekonomika uvažována ve tvaru:

$$E = \left\{H, (X^h, e^h, u^h)_{h\in H}, F, \left(Y_f\right)_{f\in F}, \left(\theta_f^h\right)_{f\in F}^{h\in H}\right\},$$

kde:

- H je konečná množina domácností, resp. spotřebitelů;
- $X^h \subset \mathbb{R}^L$ je spotřební množina domácnosti h;
- e^h je vektor počátečního vybavení spotřebitele h;
- u^h je funkce užitku spotřebitele $h \in H$;
- F je konečná množina firem;
- Y_f je technologie firmy $f \in F$;
- $\theta_f^h \in \mathbb{R}_+$ je vlastnický podíl spotřebitele h ve firmě f;
- $\sum_{h\in H} \theta_f^h = 1$ pro všechna $f \in F$.

Shrnutí předpokladů pro ekonomiku *E* dle Debraua – Arrowa:

1) X^h je uzavřená, konvexní množina omezená zdola tak, že $\exists\ \underline{d}^h$ takové, že $\underline{d}^h \leq x$ pro všechna x$\in X^h$;

2) pro $e^h \in X^h\ \exists d^h \in X^h$ takové, že platí $d^h \ll e^h$;

3) a) $u^h : X^h \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce;

b) u^h je kvazikonkávní, např. $[u^h(x_1) > u^h(x_2)\ a\ 0 < \lambda < 1] \Rightarrow [u^h(\lambda x_1 + (1 - \lambda x_2) > u^h(x_2)]$ pro všechna $x_1, x_2 \in X^h$;

c) u^h je nenasycená, tj. pro $\forall x_2 \in X^h\ \exists\ x_1 \in X^h$ za podmínky, že $u^h(x_1) > u^h(x_2)$ pro všechna $f \in F$;

4) Y_f je uzavřená konvexní podmnožina $\mathbb{R}^L$ a $0 \in Y_f$;

5) navíc jestliže Y$\equiv\sum_{f\in F} Y_f$, potom $Y \cap \mathbb{R}^L_+ = \{0\}$;

6) irreverzibilita: $Y \cap -Y = \{0\}$.

3.3 Walrasova rovnováha

Walrasovo ekvilibrium pro ekonomiku *E* je *n*-tice $\left(\bar{p}, (\bar{x}^h)_{h\in H}, (\bar{y}_f)_{f\in F}\right) \in \mathbb{R}^L_+ \times X_{h\in H} X^h \times X_{f\in F} Y_f$ splňující následující předpoklady:

a) $\sum_{h\in H} \bar{x}^h \leq \sum_{h\in H} e^h + \sum_{f\in F} \bar{y}_f$;

b) $\bar{y}_f \in arg\,max\left\{\sum_{l=1}^L \bar{p}_l y_l | (y = y_1, \dots, y_L) \in Y_f\right\}$pro $\forall f \in F$;

c) $\bar{x}^h \in B^h(\bar{p}) = \left\{x \in X^h : \sum_{l=1}^L \bar{p}_l x_l \leq \sum_{l=1}^L \bar{p}_l e_l^h + \sum_{f=1}^F \theta_f^h \sum_{l=1}^L \bar{p}_l y_l^f \equiv I^h(\bar{p})\right\}$ pro $\forall h \in H$;

d) jestliže $x \in B^h(\bar{p})$, potom není $x \succcurlyeq_h \bar{x}^h$;

e) $\bar{x}^h \in arg\ max_{x\in B^h(\bar{p})}\, u^h(x)$.

Nenasycenost a kvazikonkávnost zaručuje, že ve Walrasově rovnováze každý spotřebitel utratí všechen svůj příjem, takže rozpočtová nerovnost v *c)* redukuje rovnost podmínky *a)*, a můžeme proto usoudit, že ve Walrasově rovnováze platí:

$$\sum_{h\in H} x_i^h < \sum_{h\in Y} e_i^h + \sum_{f\in F} \bar{y}_{fi} \Rightarrow \bar{p}_i = 0.$$

3.4 Důsledky výše uvedených předpokladů

V této podkapitole navážu na předchozí rovnici, která je ekvivalentní definicí rovnováhy a byla získána tak, že došlo k zpřísnění definice rovnováhy požadující rovnost nabídky a poptávky v podmínce *a)*. To je možné pouze za předpokladu, že dojde k rozšíření výroby svolením k její bezplatné likvidaci, tedy je třeba nahradit Y za $\hat{Y} = Y - \mathbb{R}_+^L$. Takže bez ztráty na obecnosti je požadována rovnost v předpokladu *a)*, ale je také nutné předpokládat:

7) bezplatná likvidace: $Y - \mathbb{R}_+^L = Y$.

Předpoklady *1) – 6)* mají za důsledek, že množina, kterou lze nadefinovat pomocí předchozí rovnice vztahem:

$$\mathcal{A} \equiv \{(x^1, \dots, x^H, y_1 \dots y_F) \in X_{h \in H} X^h \times X_{f \in F} Y_f : \sum_{h \in H} (x^h - e^h) - \sum_{f \in F} y_f \leq 0\}$$

je kompaktní množinou. Kvazikonkávnost funkce užitku omezuje spotřební množinu z X^h na $X^h \cap \hat{X}^h$a výrobní technologie z Y_f na $Y_f \cap \hat{Y}_f$, kde X^h a Y_f jsou konvexní a kompaktní a to tak, že množina $\mathcal{A}$ je zahrnuje kartézský součin $X_{h \in H} X^h \times X_{f \in F} Y_f$. Tím je dán růst ekonomiky $\hat{E}$ s úplně stejným Walrasovým ekvilibriem jako *E*. A tak opět bez ztráty na obecnosti je možné přidat předpoklad *8)* a oslabit předpoklad *3c):*

8) X^h *a* Y_f jsou kompaktní pro všechna $h \in H$ *a* $f \in F$.

Po zeslabení bude podmínka *3c)* ve tvaru:

3c) $[(x^1, \dots, x^H, y_1 \dots y_F) \in \mathcal{A}] \Rightarrow [\forall h \in H, \exists\, \hat{x}^h \in X^h, u^h(\hat{x}_h) > u^h(x)]$.

Důsledek konvexnosti X^h z předpokladu 1) a kvazikonkávnosti u^h z předpokladu *3b)* dává vzniknout dalšímu předpokladu:

3d) u^h je lokálně nenasycená funkce užitku v $X^h : \forall y \in X^h$, jestliže $\exists x \in X^h$ s $u^h(x) > u^h(y)$, potom $\exists \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset X^h, x(n) \to y$ s $u^h(x(n)) > u^h(y)$ pro $\forall n$.

V následujícím textu uvedu dalších šest vět. Každá z nich je založena na předpokladech *1) – 8)*. Věty 1. a 2. jsou založeny na definicích USC a LSC a na vyhovující podmínce, která je uvedena v podkapitole 1.5.3.

Věta 3.1 Mnohoznačná funkce rozpočtu $B^h(p)$ je USC, LSC, neprázdná a kompaktní funkce na množině $S = \{p \in \mathbb{R}_+^L : \sum p_l = 1\}$.

Důkaz: Tuto větu lze považovat za standardní a triviální důsledek výše uvedených předpokladů. Místo přímého dokazování je možné si také všimnout, že to je důsledek vycházející z vyhovující podmínky uvedené v podkapitole 1.5.3.

Mnohoznačná funkce rozpočtu je definovaná jako:

$$B^h(p) = \{x \in X^h : p * x \leq I^h(p)\} = \{x \in X^h : -p * x \geq -I^h(p)\}.$$

Nechť $w(p) \equiv -I^h(p)$ je vyhovující limita. Nechť $v(p) \equiv max_{x \in X^h}(-p * x)$ je maximální možná hodnota limity. Poněvadž platí, že $e^h \gg \theta_f^h$ pro $\forall p \in S$ pak $w(x) = -I^h(p) \leq -p * e^h < -p * d^h \leq max_{x \in X^h} -p * x = v(p)$. Věta tedy vyplývá z kompaktnosti X^h, spojitosti $-I^h(p)$ a z vyhovující podmínky.

□

Nechť $v^h(p) \equiv max_{x \in B^h(p)} u^h(x)$ je takzvaně nepřímá funkce utility spotřebitele *h*. Tato funkce udává maximální užitek spotřebitele *h*, která je v tomto případě závislá pouze na cenovém vektoru *p*. (Pozn. všeobecně je nepřímá funkce užitku závislá na cenovém vektoru *p* a výši příjmu spotřebitele *w*). Funkce užitku se nazývá nepřímá z toho důvodu, že spotřebitel spotřebovává zboží bez ohledu na cenu tohoto spotřebovávaného zboží.

Poněvadž $B^h(p)$ je USC a LSC, neprázdná a kompaktní množina splňující princip maxima, funkce $v^h(p)$ musí být spojitá na *S*. Kromě toho nechť:

$$D^h(p) \equiv arg \max_{x \in B^h(p)} u^h(x)$$

je poptávková mnohoznačná funkce spotřebitele h. Opět dle principu maxima je $D^h(p)$ USC. Bohužel $D^h(p)$ nemusí být LSC.

Ústředním prvkem důkazu existence uváděného v sekci 3.5 je nahrazení poptávkové mnohoznačné funkce $D^h(p)$, která může selhat právě při požadavku na LSC, za lepší poptávkovou mnohoznačnou funkcí $D_+^h(p)$, která je vždy LSC.

Věta 3.2 Vylepšená poptávková mnohoznačná funkce $D_+^h(p) = \{x \in X^h : u^h(x) \geq v^h(p)\}$ je USC, LSC a neprázdná množina pro $p \in S$. Z toho důvodu je lepší než funkce pro převis poptávky $Z_+(p) = \sum_{h \in H} D_+^h(p) - \sum_{h \in H} e^h - \sum_{f \in F} Y_f$.

Důkaz: USC a neprázdnost poptávkové mnohoznačné funkce D_+^h vychází bezprostředně ze souvislosti s funkcí užitku u^h.

Nyní je třeba ověřit i platnost LSC. Nechť $p(n) \to p$ a nechť $x \in D_+^h$. Dále nechť $y(0) \in argmax\{u^h(y) : y \in X^h\}$. Jestliže $u^h(x) = u^h(y(0))$, potom $u^h(x) \geq v^h(p(n))$ pro $\forall n$. Pokud by platila rovnost $x(n) = x$ pro $n \geq 1$, dokazovala by dolní polospojitost funkce D_+^h v bodě p. Jestliže $u^h(x) < u^h(y(0))$, potom dle podmínky lokální nenasycenosti v podmínce *3d)* $\exists\, y(m) \to x$ s $u^h(y(m)) > u^h(x)$ pro $\forall m \geq 1$. Protože nepřímá funkce utility v^h je spojitá, $v^h(p(n)) \to v^h(p)$. V důsledku tomu je možné definovat pro $n \geq 1$ funkci $x(n) = y(m(n))$, kde $m(n) \equiv max_{0 \leq m \leq n}\{u^h(y(m)) \geq v^h(p(n))\}$. Potom $x(n) \in D_+^h(p(n))$ a $x(n) \to x$, což dokazuje existenci požadované vlastnosti LSC pro D_+^h. Suma mnohoznačných shora polospojitých funkcí (resp. zdola polospojitých), jejíž meze jsou kompaktní, je také USC (LSC).

Věta 3.2. může být také odvozena z vyhovující podmínky. Nechť $w(p) \equiv v^h(p)$ je vyhovující limita a nechť $v^*(p) = v^* = max_{x \in X^h} u^h(x)$ je maximální možná limita. Potom je možné aplikovat vyhovující podmínku s tím, že X^h a u^h jsou nezávislé na p, a $v^h(p)$ je spojité. Právě z toho důvodu je velice jednoduché aplikovat vyhovující podmínky na Walrasovu zlepšenou poptávkovou funkci $D_+(p) = \{x \in X^h : u^h(x) \geq w(p)\}$, kde $w(p) \equiv max\{u^h(x) : x \in X^h, p * x \leq I^h(p)\}$.

□

Věta 3.3 Minimální nákladová funkce:

$$M(p,\bar{p}) \equiv \min_{z \in Z_+(\bar{p})} p * z$$

je spojitá na $(p,\bar{p}) \in S \times S$ a konkávní v p pro každé pevné $\bar{p} \in S$.

Důkaz: *Věta 3.2.* a princip maxima zaručují spojitost $M(p,\bar{p})$. Pro každé pevné $\bar{p}$ je $M(p,\bar{p})$ nejmenší z rodiny lineárních funkcí v bodě *p,* musí tedy být konkávní.

□

Věta 3.4 Pro všechna $\bar{p} \in S$ platí, že $Z(\bar{p}) \subset Z_+(\bar{p})$. Tedy $M(\bar{p},\bar{p}) \leq 0$.

Důkaz: Zřejmý.

□

Následující *věty 3.5. a 3.6.* ukazují, jakou roli hraje tzv. duální princip. Tento princip říká, že maximalizace užitku a minimalizace nákladů jsou si rovny v bodech, ve kterých je dodržena nenasycenost funkce.

Věta 3.5 Jestliže pro nějaké $\bar{p} \in S$ existuje $\bar{z} \in Z_+(\bar{p})$ s $\bar{z} \leq 0$, potom $\exists\ \bar{x}^h \in X^h$ pro $\forall h$ a $\bar{y}_f \in Y_f$ pro $\forall f$ tak, že *n*-tice $(\bar{p}, (\bar{x}^h)_{h \in H}, (\bar{y}_f)_{f \in F})$ je Walrasovou rovnováhou.

Důkaz: Jestliže $\bar{z} \in Z_+(\bar{p})$, potom je dle definice $\bar{x}^h \in D_+^h(\bar{p})$ pro $\forall h \in H$, a $\bar{y}_f \in Y_f$ pro $\forall f \in F$ s $\bar{z} = \sum_{h \in H} \bar{x}^h - \sum_{h \in H} e^h - \sum_{f \in F} \bar{y}_f$. Protože $\bar{z} \leq 0$, z vlastnosti nenasycenosti uvedené v podmínce *3c)* a z vlastnosti lokální nenasycenosti v podmínce *3d)* vyplývá, že $\bar{p} * \bar{x}^h \geq I^h(\bar{p})$ pro $\forall h \in H$. Ale z nerovnosti $\bar{z} \leq 0$ a $\bar{p} \in S$ plyne, že $0 \geq \bar{p} * \bar{z} = \bar{p} \sum_{h \in H} \bar{x}^h - p\left[\sum_{h \in H} e^h + \sum_{f \in F} \bar{y}_f\right] \geq \sum_{h \in H} I^h(\bar{p}) - \sum_{h \in H} I^h(\bar{p}) = 0$. Z toho důvodu $\bar{p} * \bar{x}^h = I^h(\bar{p})$ pro $\forall h \in H$ a $\bar{y}_f \in \operatorname{argmax}_{y_f \in Y_f} \bar{p} * y_f,\ \forall f \in F$.

□

Stojí za zmínku, že (za předpokladu lokální nenasycenosti) při dokazování *Věty 3.1.-3.5.* nehraje žádnou roli jak kvazikonkávnost u^h, tak ani konvexnost Y_f.

Věta 3.6 Jestliže pro nějaké $\bar{p} \in S$ existuje $max_{\bar{p}\in S}\, M(p,\bar{p}) = M(\bar{p},\bar{p})$, potom $\exists\ \bar{x}^h \in X^h$ pro $\forall h$ a $\bar{y}_f \in Y^f$ pro $\forall f$ tak, že n-tice $(\bar{p}, (\bar{x}^h)_{h\in H}, (\bar{y}_f)_{f\in F})$ je Walrasova rovnováha.

Důkaz: Nyní je třeba se odvolat na konvexnost X^h a Y_f a kvazikonkávnost u^h zaručující konvexnost $Z_+(\bar{p})$. Zásada minimaxu potom zaručuje, že $\exists \bar{z} \in Z_+(\bar{p})$ s $M(p,\bar{p}) = max_{\bar{p}\in S}\ p * \bar{z} = \bar{p} * \bar{z} = min_{z\in Z_+(\bar{p})}\ \bar{p} * z$. Protože z *Věty 3.4* vyplývá nerovnost $M(\bar{p},\bar{p}) \leq 0$, musí platit, že $\bar{z} \leq 0$ (jestliže je nějaké $\bar{z}_i > 0$, vezme se $p_i = 1$). Tedy $\bar{p}$ ve *Větě 3.5* je cenovým vektorem Walrasovy rovnováhy.

□

3.5 Existence Walrasovy rovnováhy

Nyní ukážeme, jak zkonstruovat důkaz existence Walrasovy rovnováhy pro všeobecné kvazikonkávní preference a konvexní výrobní množiny, který využívá výhradně oblast cen S a Brouwerovu větu o pevném bodě.

Tvrzení 3.1 Nechť

$$E = \left\{H, (X^h, e^h, u^h)_{h\in H}, F, \left(Y_f\right)_{f\in F}, \left(\theta_f^h\right)_{f\in F}^{h\in H}\right\}$$

je Walrasova ekonomika splňující předpoklady *1) - 6)*. Potom Walrasova rovnováha pro ekonomiku E nastává v bodě $(\bar{p}, (\bar{x}^h)_{h\in H}, (\bar{y}_f)_{f\in F})$.

Důkaz: Při důkazu daného tvrzení lze využít vzorec:

$$Z_+(\bar{p}) = \sum\nolimits_{h\in H} D_+^h(\bar{p}) - \sum\nolimits_{h\in H} e^h - \sum\nolimits_{f\in F} Y_f(\bar{p}),$$

který jsme uvedli již v textu výše a jehož výpočtem lze dostat přinejmenším stejně tak dobrý výsledek jako vzorcem pro výpočet převisu poptávky $Z(\bar{p})$. Dále použijeme vzorec $M(p,\bar{p}) = min_{z\in Z_+(\bar{p})}\ p * z$, pomocí něhož je definována funkce $\varphi: S \to S$ jako:

$$\varphi(\bar{p}) = \underset{p \in S}{argmax}[M(p,\bar{p}) - \|p - \bar{p}\|^2] =$$

$$= \underset{p \in S}{argmax}\left[\underset{z \in Z_+(\bar{p})}{min}\ p * z - \|p - \bar{p}\|^2\right].$$

Protože (dle *Věty 3.3*) je funkce M konkávní v p pro nějaké pevné $\bar{p}$, a $\|p - \bar{p}\|^2$ je kvadratická norma, maximand je ryze konkávní, takže má jedinečné maximum a $\varphi(\bar{p})$ je tedy jednoznačná funkce. Pod pojmem maximand si lze představit funkci, jejímž smyslem v metodách optimalizace je maximalizovat. Tento problém lze přiblížit jako operaci, kdy je třeba vybrat parametry nebo výběry tak, aby byla vybrána co nejvyšší možná hodnota maximandu.

Protože dle té samé věty je funkce M spojitá, potom φ je spojitá funkce. Z toho vyplývá, že dle Brouwerovy větě o pevném bodě má φ pevný bod $\bar{p}$. V pevném bodě $\bar{p}$ platí:

$$M(\bar{p},\bar{p}) = \underset{p \in S}{max}[M(p,\bar{p}) - \|p - \bar{p}\|^2] = \underset{p \in S}{max}\, M(p,\bar{p}),$$

kde poslední rovnost vyplývá z konkávnosti funkce M v bodě p. Dle *Věty 3.6* je pak $\bar{p}$ Walrasův rovnovážný vektor cen.

□

Opět platí, že kvazikonkávnost u^h ani konvexnost Y_f nehrají žádnou roly až do posledního kroku, kde je zaručena konvexnost $Z_+(\bar{p})$ v jediném bodě $p = \bar{p}$. V původních důkazech Walrasovy rovnováhy totiž bylo třeba se ujistit, že mnohoznačná funkce převisu poptávky je konvexní v každém bodě p (jinak nemusí být pevným bodem).

Právě ukázaným důkazem existence Walrasovy rovnováhy je pokrytý právě jen předpoklad konvexních technologií Y_f, ale bez kvazikonkávní funkce užitku u^h. Až do této chvíle je možné si spotřebitele h představit pouze jako kontinuum shodných kopií. V posledním kroku za použití *Věty 3.6* je třeba nahradit funkci $Z_+(\bar{p})$ jejím konvexním obalem $co\{Z_+(\bar{p})\}$. Potom je třeba aplikovat minmax teorém, díky němuž je možné získat $\bar{z} \in co\{Z_+(\bar{p})\}$ stejně, jako ve *Větě 3.6*. Dle Caratheodoryho věty platí, že $\bar{z} = \sum_{i=1}^{L+1} \lambda_i \bar{z}^i$, kde:

- $\bar{z}^i = \sum_{h\in H} \bar{x}^{hi} - \sum_{h\in H} e^h - \sum_{f\in F} y_f^i \in Z_+(\bar{p})$
- a λ_i jsou kladné váhy, pro něž platí $\sum_{i=1}^{L+1} \lambda_i = 1$.

Vhodnou volbou $\bar{x}^{hi}$ a vah λ_i spotřebitele h, a $y_f = \sum_{i=1}^{L+1} \lambda_i y_f^i \in Y_f$ jako výběrem firmy f, dostaneme rovnováhu kontinuální kompaktizované ekonomiky. Nicméně bez požadavku na kvazikonkávnost neexistuje jistota, že optimální spotřební výběr uvnitř kompaktizované spotřební množiny je optimální i pro původní spotřební množinu. Takže je třeba spočítat různá ekvilibria pro každou kompaktifikaci k tak, aby byl vytvořen kompaktní topologický prostor. Potom nechť $k \to \infty$. Potom je třeba vzít konvergující podposloupnost vah. Pro všechny tyto váhy, které nekonvergují k nule, vezmeme konvergující podposloupnosti z $\bar{x}^{hi}(k)$ a z $y_f(k)$. Tyto limita jsou pak rovnováhou ekonomiky.

3.6 Srovnání s předchozími důkazy Walrasovy rovnováha s ryze konvexními preferencemi

Hlavní rozdíl mezi standardní důkazy existence Walrasovy rovnováhy a důkazem uvedeným výše je především použití Brouwerovy věty o pevném bodě. Ve dřívějších důkazech bylo využito Kakutaniho věty o pevném bodě pro mnohoznačné funkce. Dalším rozdílem je, že v tomto důkazu je použito přirozené Lyapunovy funkce $L: S \to \mathbb{R}$:

$$L(\bar{p}) = \max_{p\in S}[M(p,\bar{p}) - \|p - \bar{p}\|^2].$$

V následujících třech podkapitolách je uvedeno několik speciálních ekonomik, pro které také existují standardní důkazy Walrasovy rovnováhy založené na Brouwerově větě. Každá z nich naznačuje spojení mezi výše uvedeným důkazem a standardními důkazy, kde převis poptávky je vždy jednoznačná funkce. Všechny případy speciálních ekonomik jsou založeny na ryze kvazikonkávní funkci utility u^h.

V prvním speciálním případě je požadováno, aby Y_f bylo ryze konvexní, takže převis poptávky $Z(\bar{p})$ bude odpovídat jednoprvkové funkci $z(\bar{p})$ zavedené pro minimální

nákladovou funkci. Pokud bychom nahradili M za funkci $N \equiv min_{z \in Z(\bar{p})} p * z$, danou vztahem

$$N(p,\bar{p}) = \min_{z \in Z(\bar{p})} p * z = p * z(\bar{p}),$$

získáme funkci $\psi: S \to S$ definovanou vztahem:

$$\psi(\bar{p}) = \underset{p \in S}{argmax}[p * z(\bar{p}) - \|p - \bar{p}\|^2].$$

Pevné body funkce $\psi(\bar{p})$ jsou Walrasovy rovnovážné ceny. Pro každou dvojici $(p, \bar{p})$ platí, že $M(p,\bar{p}) \leq N(p,\bar{p})$. Ovšem pokud bude převis poptávky Z mnohoznačná funkce jako obvykle bez dalších předpokladů, funkce $N(p,\bar{p})$ nebude spojitá funkce. I když $Z(\bar{p})$ bude jednoznačná funkce a N bude spojité, potom $M(p,\bar{p}) \neq N(p,\bar{p})$. I přesto se funkce N často používá k dokázání Walrasovy rovnováhy.

Zobrazení ψ je však naprosto rozdílné od standardního Brouwerova zobrazení odvozeného od Nashova maticového zobrazení her. Nakonec se však ukazuje, že $\psi(p)$ zjednodušuje jiné standardní Brouwerovo zobrazení, a to $h(p) = Proj_S(p + \frac{1}{2}z(p))$. Ale vzhledem k tomu, že k ověření tvrzení, že pevný bod funkce h je Walrasova rovnováha, je vyžadováno Kuhn-Tuckerovo tvrzení, je okamžitě jasné, že pevný bod z ψ je ekvilibrium. Podobných zobrazení bude využito i v dalších speciálních případech, například při CRS výrobě. V tomto případě ψ je velmi úzce spjato se zobrazením, které se používá pro výpočet rovnováhy ekonomiky s pevně daným koeficientem technologií.

Pro následující kapitoly bude společné to, že bude třeba upravit všeobecnou Walrasovu ekonomiku (uvedenou v podkapitole 3.3) na případy, kdy je možné využít funkce převisu poptávky. Pro tyto případy je už předem známo, že k dokázání Walrasovy rovnováhy postačí Brouwerova věta. Pomocí odchylky $-\|p - \bar{p}\|^2$ lze tyto případy ještě zjednodušit.

3.6.1 Čistá směna a ryze konvexní technologie

Nechť $S = \{p \in \mathbb{R}_+^L : \sum_{i=1}^L p_i = 1\}$ je simplex cen. Nechť z je funkcí převisu poptávky právě tehdy, když $z: S \to \mathbb{R}^L$ je spojitá funkce splňující Walrasův zákon $p * z(p) = 0$ pro všechna $p \in S$. Nyní je třeba definovat Walrasovu rovnováhu pro funkci převisu poptávky z jako cenový vektor $\bar{p} \in S$ splňující podmínku: $z(\bar{p}) \leq 0$.

Dle Walrasova zákona platí rovnost $z_i(\bar{p}) = 0$ pokud $\bar{p}_i \neq 0$, jinak dostaneme nerovnost $z_i(\bar{p}) < 0$.

Tvrzení 3.2 Každá funkce převisu poptávky má Walrasovo ekvilibrium.

Důkaz: Nechť je dáno zobrazení $\psi: S \to S$ vztahem:

$$\psi(\bar{p}) \equiv \underset{p \in S}{argmax}[p * z(\bar{p}) - \|p - \bar{p}\|^2].$$

Maximand je součet lineární a kvadratické funkce v bodě *p,* tedy je ryze konkávní a spojitý v *p*. Protože *S* je kompaktní a konvexní, $\psi(\bar{p})$ je jediný bod, a tudíž φ je funkce. Dle principu maxima je ψ spojitá funkce a to z toho důvodu, že parametry $z(\bar{p})$ a $\bar{p}$ se pohybují spojitě v závislosti na změně $\bar{p}$.

Tudíž dle Brouwerově větě o pevném bodě má ψ pevný bod $\bar{p}$. Dle konkávní věty o odchylce platí: $p \in S \Rightarrow p * z(\bar{p}) \leq \bar{p} * z(\bar{p})$. Dle Walrasova zákona je $\bar{p} * z(\bar{p}) = 0$, což znamená, že $z(\bar{p}) \leq 0$.

□

V Debreuově důkazu Walrasovy všeobecné rovnováhy je využito mnohoznačné funkce $\delta(z) = argmax_{p \in S}\, p * z$. Tato funkce δ využívá pravidla, že pokud je dán převis poptávky v nějaké komoditě, tj. $z_i > 0$, ceny by měly jít nahoru přinejmenším do té výše, kde je největší převis poptávky. Jediný nedostatek Debreuovy důkazu je ten, že funkce $\delta(z)$ může být mnohoznačná, a tak je nutné použit Kakutaniho větu o pevném bodě. Funkce $\psi(p)$ je pak získaná lehkou odchylkou Debreuovy mnohoznačné funkce.

Funkce $\psi(p)$ je identická se zobrazením $h(p) = \Pi_S(p + \frac{1}{2}z(p))$, kde $\Pi_S(x)$ je bod nejbližší *S* dle *x*. Dle Kuhn-Tuckerovy věty je mnohoznačná funkce $\psi(\bar{p})$ ekvivalentní ze

zápisem $(\psi(\bar{p}) - \bar{p}) = \frac{1}{2}z(\bar{p}) - \lambda e + \Lambda$, kde $\Lambda \geq 0$ je diagonální matice s prvky $\Lambda_{jj} > 0$ pokud $\psi_j(\bar{p}) = 0$. Podobně dle té samé věty vyhovuje zobrazení $h(\bar{p}) = \underset{p \in S}{argmin} \left\| p - \left[\bar{p} + \frac{1}{2}z\bar{p}\right]\right\|^2$ té samé rovnosti. Odvozením ψ může být jasné, že pevný bod této funkce je Walrasova rovnováha. Na druhou stranu dokázát, že pevný bod funkce h je limitou S, tzn. je Walrasova rovnováha, vyžaduje Kuhn-Tuckerovo větu.

3.6.2 Produkce s CRS technologiemi

Nyní budu uvažovat výrobu s konstantními výnosy z rozsahu (CRS). CRS technologiemi rozumíme množinu $Y \subset \mathbb{R}^L$ takovou, že množina Y je uzavřený, konvexní kužel ($y \in Y$ zahrnuje $ty \in Y$ pro všechna $t \geq 0$; obzvláště $0 \in Y$). Navíc je možné předpokládat, že Y umožňuje bezplatnou likvidaci; $z \leq y$ a $y \in Y$ zahrnuje $z \in Y$. Posledním předpokladem je to, že existuje nějaké $p^* \in S$ s podmínkou $p^* * Y \leq 0$, tj. $p^* * y \leq 0$ pro všechny $y \in Y$.

Walrasovou rovnováhou s produkcí pro funkci převisu poptávky, tj. pro CRS technologickou dvojici (z, Y), je cena $\bar{p} \in S$ taková, že $z(\bar{p}) \in Y$ a $\bar{p}Y \leq 0$. Dle Walrasova zákona vygeneruje výrobní plán $z(\bar{p})$ nulový zisk, zatímco alternativy výrobního plánu jsou buď ztrátové, nebo nejsou o moc lepší.

Ústřední příklad činností CRS-technologie je analýzy výrobních technologií daná maticí $B = [-I \quad A]$, kde I je $L \times L$ matice identity a A je vektor činností o rozměru $L \times n$. Každý sloupec matice B reprezentuje činnost. Kladné prvky odpovídají výstupům, záporné prvky odpovídají vstupům. První L sloupec matice B reprezentuje čisté uspořádání. Matice činností B určuje CRS-technologii:

$$Y = \{Bx | x \in \mathbb{R}_+^{L+n}\}.$$

Přesněji řečeno je Y konvexní a uzavřený kužel umožňující bezplatnou likvidaci. Jestliže pro nějaký vektor $W \gg 0$ je množina $\{x \in \mathbb{R}_+^{L+n} : Bx + W \geq 0\}$ ohraničená, potom musí být $p^* \in S$ s nerovností $p^* * Y \leq 0$.

Věta 3.7 (o technologiích) Jestliže Y je CRS-technologie a pro nějaký vektor $z \in \mathbb{R}^L$ platí: $[p \in S \text{ a } pY \leq 0] \Rightarrow pz \leq 0$, potom $z \in Y$.

Důkaz: Předpokládejme, že $z \notin Y$. Protože Y je uzavřený a konvexní kužel, dle věty o oddělující nadrovině můžeme striktně oddělit Y a z, pokud existuje nějaké $\bar{p} \in \mathbb{R}^L$ takové, že $\bar{p} * Y < \bar{p} * z$. Ale protože Y je konvexní kužel, takže $\bar{p} * Y$ ohraničené shora nepřímo říká, že $\bar{p} * Y \leq 0$; také $0 \in Y$, takže dostáváme $\bar{p} * Y \leq 0 < \bar{p} * z$. Dle bezplatné likvidace pak nerovnost $\bar{p} * Y \leq 0$ naznačuje, že $\bar{p} \geq 0$. Tím dostaneme, že $p \in S$ a $pY \leq 0 < p * z$, což odporuje předpokladu.

□

Tvrzení 3.3 Každá funkce převisu poptávky pro danou CRS-technologickou dvojici (z, Y) má Walrasovo ekvilibrium.

Důkaz: Hledáme $\bar{p} \in S_Y \equiv \{p \in S: p * Y \leq 0\}$ s $z(\bar{p}) \in Y$. Dle věty o technologiích stačí najít $\bar{p} \in S_Y$ takové, že $p \in S_Y \Rightarrow p * z(\bar{p}) \leq 0 = \bar{p} * z(\bar{p})$. Dle hypotézy je S_Y neprázdné. Ještě navíc je $S_Y \equiv \bigcap_{y \in Y} \{p \in S: p * y \leq 0\}$ průsečík uzavřených a konvexních množin, a tak je i uzavřený a konvexní.

Definujme $\psi: S_Y \to S_Y$ dle rovnice:

$$\psi(\bar{p}) \equiv \underset{p \in S_Y}{argmax}[p * z(\bar{p}) - \|p - \bar{p}\|^2].$$

Již dříve bylo dokázáno, že ψ je spojitá funkce. Protože S_Y je kompaktní a konvexní, Brouwerova věta zaručuje, že ψ má pevný bod $\bar{p}$.

V pevném bodě $\bar{p}$ platí, že $p \in S_Y \Rightarrow p * z(\bar{p}) \leq \bar{p} * z(\bar{p}) = 0$.

□

Myšlenku použití samotné Brouwerovy věty k dokázání existence Walrasovy rovnováhy s produkcí použil McKenzi ve své práci s využitím množiny S_Y. Jeho zobrazení je mnohem komplikovanější než ψ, ale to je dáno tím, že převis poptávky je mnohoznačná funkce. McKenzie ukazuje, že je možné vždy zmenšit konvexní technologie na CRS-technologie přidáním F pomocných komodit představujících podíly vlastníků v každé

firmě. Zobrazení pevného bodu musí potom být realizováno v simplexu dimenze *L+F-1* oproti důkazu výše, kde oblast je původní $L-1$ dimenzionální simplex.

3.6.3 Neomezené spotřební množiny, monotónní preference a limita funkce

V sekci 3.6.1 a 3.6.2 bylo požadováno, aby funkce převisu poptávky z byla spojitá na celé množině S, včetně podmínky, že $p \in S$ s tím, že nějaké ceny p_i mohou být nulové. To bude platit vždy, když utility u^h budou ryze konkávní a spotřební množiny budou kompaktní. Metoda použitá pro zjištění ekvilibria v 3.6.2 bude užitečná i zde.

Nechť S^0 je vnitřek množiny S a ∂S je jeho limita. Nechť $S^\varepsilon \equiv \{p \in S: p \geq \varepsilon 1\}$ je zredukovaný simplex pro všechna $\varepsilon > 0$ a ∂S^ε je jeho limita, kde $1 = (1, \ldots, 1)$.

Řekneme, že (z, Y) je funkce převisu poptávky neboli CRS-technologická dvojice s vlastní limitou funkce vždy, když $z: S^0 \to \mathbb{R}^L$ bude spojitá funkce splňující Walrasův zákon pro všechna $p \in S^0$. A navíc pokud $\exists \varepsilon > 0$ a $\exists p^* \in S^\varepsilon$, pak:

$$p^* * Y \leq 0 \quad (3.6.1);$$
$$p \in \partial S^\varepsilon \Rightarrow p^* * z(p) > 0 \quad (3.6.2).$$

Pokud budou preference ryze monotónní, potom $p \to \partial S \Rightarrow$ nějaké $z_i(p) \to \infty$. Protože převis poptávky je ohraničen zdola celkovým počátečním rozdělením zboží, z ryzí monotónnosti vyplývá, že pro nějaké $p^* \gg 0$ je $p^* * z(p) > 0$, jestliže p je dostatečně blízko limitě. A tak funkce převisu poptávky odvozená z ryze monotónních preferencí automaticky vyhovuje příslušné limitě funkce za předpokladu, že lze najít ryze kladné p^*, pro které platí: $p^* * Y \leq 0$. Tuto druhou podmínku lze ověřit tak, že například existuje nějaký nezbytný vstup jako pracovní síla, který nebyl nikdy vyroben.

Tvrzení 3.4 Každá monotónní funkce převisu poptávky neboli CRS-technologická dvojice s vlastní limitou funkce má Walrasovu rovnováhu.

Důkaz: S^ε je kompaktní a konvexní. Tedy $S_Y^\varepsilon \equiv S^\varepsilon \cap S_Y$ je také kompaktní a konvexní. Definujme $\psi: S_Y^\varepsilon \to S_Y^\varepsilon$ jako:

$$\psi(\bar{p}) \equiv \underset{p \in S_Y^\varepsilon}{argmax}[p * z(\bar{p}) - \|p - \bar{p}\|^2].$$

Stejně jako předtím je ψ spojitá funkce, má tedy pevný bod $\bar{p}$. Znovu dle známých argumentů platí, že $p \in S_Y^{\varepsilon} \Rightarrow p * z(\bar{p}) \leq \bar{p} * z(\bar{p}) = 0$.

Jestliže nějaké $\bar{p}_i = \varepsilon$, potom dle vlastní limity funkce platí nerovnost $p^* * z(\bar{p}) > 0$, což je rozpor, protože $p^* \in S_Y^{\varepsilon}$. Tedy $\bar{p} \gg \varepsilon 1$. Ale potom podle konkávnosti maximandu je $p \in S_Y \Rightarrow p * z(\bar{p}) \leq 0$. Dle věty o technologiích je $z(\bar{p}) \in Y$, takže $\bar{p}$ je Walrasova rovnováha.

□

Závěr

Cílem této práce bylo užití některých vět o pevných bodech v ekonomických modelech. Pro diplomovou práci byly vybrány dvě stěžejní věty – věta Brouwerova a věta Kakutaniho. Za daný ekonomický model byla vybrána Walrasova rovnováha.

Při psaní této práce jsme se setkali se dvěma hlavními problémy. Prvním z nich je nedostatek zdrojů. V českém jazyce pravděpodobně neexistuje žádný zdroj na téma aplikace Brouwerovy věty v modelu všeobecné rovnováhy Léona Walrase. V anglickém jazyce to také o moc lepší není. Dostatek zdrojů lze najít ve francouzském jazyce (vzhledem k národnosti L. Walrase). Protože nedisponuji znalostí tohoto jazyka, využívali jsme především anglicky psaných zdrojů a článků.

Když už se podařilo najít vhodný zdroj, tak bylo obtížné předložit adekvátně pojmy do českého jazyka, aby jim čtenář správně porozuměl. V některých případech (viz. „vyhovující podmínka“) jsme využili uvozovek, v jiných případech jsme uvedli překlad i s původním výrazem v anglickém jazyce.

Původním záměrem práce bylo použít tuto aplikaci v praxi. Jak se však ukázalo, model všeobecné rovnováhy je opravdu jen „všeobecný“ a pro praxi neaplikovatelný. I ve své nesložitější podobě, která se nejblíže přibližuje realitě, je tento model od dnešní reality poměrně hodně vzdálen.

Za přínos této práce tedy považuji zejména shrnutí této problematiky do jednoho uceleného textu, který obsahuje všechny potřebné pojmy a definice, jak z oblasti ekonomie, tak z oblasti matematických disciplín.

Použitá literatura a internetové zdroje:

Matematická část:

[1] Border, Kim C., *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[2] Rektorys, Karel, *Přehled užité matematiky I. a II.*, 7. vydání. Prometheus, Praha, 2000.

[3] Plesník, J., Dupačová, J., Vlach, M., *Lineárne programovanie*. Alfa, Bratislava, 1990.

[4] Geanakoplos, John, *Nash and Walras equilibrium via Brouwer*. New Haven, 2003. (dostupný z: http://cowles.econ.yale.edu/~gean/art/p1058.pdf)

[5] http://samba.fsv.cuni.cz/~koubek/IES-FSV%20UK/UCEBNI%20TEXTY/02-OPTIMALIZACE.pdf

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Metric_space

[7] http://www.sjsu.edu/faculty/watkins/fixed.htm

Ekonomická část:

[8] Holman, R. a kol., Dějiny ekonomického myšlení, 2. vydani. C.H. Beck, Praha, 2001.

[9] Holman, R., Makroekonomie, 2. vydani. C.H. Beck, Praha, 2010.

[10] http://bss.sfsu.edu/mbar/ECON605/Walras%20Law.pdf

[11] http://www.dklevine.com/econ101/excess.pdf

[12] http://www1.doshisha.ac.jp/~sshinoha/report/regular_report/shinohara_report/Shinohara_Note_CRS_ProductFunction.pdf

[13] http://en.wikipedia.org/wiki/Local_nonsatiation

Matematicko-ekonomická část:

[1] Border, Kim C., *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[3] Geanakoplos, John, *Nash and Walras equilibrium via Brouwer*. New Haven, 2003. (dostupný z: http://cowles.econ.yale.edu/~gean/art/p1058.pdf)

[17] Geanakoplos, John, *The Arrow-Derbeu Model of General Equilibrium*, *The New Palgrave Dictionary of Money and Finance*, Vol. 1. London: Macmillan Press, 1987, pp. 116-124.
(dostupný z: http://cowles.econ.yale.edu/~gean/art/1987-newpalgrave1.pdf)

Seznam obrázků a ilustrací

Obr. 1.1: *Kompaktní množina* (str. 9)

Obr. 1.2: *Shora (vlevo) a zdola (vpravo) polospojitá funkce* (str. 12)

Obr. 1.3: *Příklady konvexních množin* (str.15)

Obr. 1.4: *Aplikaci Brouwerovy věty v „praxi“* (str. 20)

Obr. 1.5: *Funkce nezobrazující interval* $I \in [0,1]$ *do sebe* (str.20)

Obr. 1.6: *Nespojitá funkce* (str. 20)

Obr. 1.7: *Ilustrace Kakutaniho věty* (str. 23)

Obr. 2.1: *Portrét Léona Walrase* (str. 30)

Obr. 2.2: *Ekonomická rovnováha* (str. 31)