UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Normování intervalových vah a fuzzy vah

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Bc. Jiří Mohl**
Studijní program: N1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Aplikace matematiky v ekonomii
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2015

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Bc. Jiří Mohl

Název práce: Normování intervalových vah a fuzzy vah

Typ práce: Diplomová práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2015

Abstrakt: Normování intervalových vah a fuzzy vah je důležitou součástí vícekriteriálního rozhodování. Práce se zabývá různými metodami normování intervalových vah a fuzzy vah, hodnotí je a porovnává. K porovnávání užívá i vytvořené skripty v programu Matlab.

Klíčová slova: intervalové váhy, fuzzy váhy, princip rozšíření, inverzní proces k normování, numerické příklady

Počet stran: 80

Počet příloh: 1

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Bc. Jiří Mohl

Title: Normalization of interval weights and fuzzy weights

Type of thesis: Diploma thesis

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.

The year of presentation: 2015

Abstract: Normalization of interval weights and fuzzy weights is an important part of multi-criteria decision making. This thesis deals with several different approaches of normalization of interval weights and fuzzy weights, reviews them and compares them. To comparison among others uses scripts in Matlab.

Key words: interval weights, fuzzy weights, extension principle, inverse process to normalization, numerical examples

Number of pages: 80

Number of appendices: 1

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně pod vedením pana RNDr. Ondřeje Pavlačky, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Úvod **7**

1 Užité pojmy z teorie fuzzy množin **8**

2 Přístupy k normování intervalových vah a fuzzy vah **11**
2.1 Normování podle Xu a Changa a Leeho 13
2.1.1 Normování intervalových vah podle Xu 13
2.1.2 Normování fuzzy vah podle Changa a Leeho 13
2.2 Normování navrhované Jimenézem a spol. 16
2.3 Přístup navrhovaný Wangem a Elhagem 20
2.3.1 Metoda normování intervalových vah porušujících podmínku (1) 20
2.3.2 Metoda normování intervalových vah porušujících pouze podmínku (2) 28
2.3.3 Nezávislé fuzzy váhy 28
2.3.4 Závislé fuzzy váhy 29
2.4 Normování podle Sevastjanova a spol. 29
2.5 Normování fuzzy vektorů vah dle principu rozšíření 50

3 Numerické příklady **58**
3.1 Intervalové váhy 58
3.2 Fuzzy váhy 60
3.3 Sevastjanovy míry 64

4 Inverzní proces k normování **69**

Závěr **77**

Literatura **79**

Přílohy **80**
Příloha 1: CD s m-fily pro MATLAB 80

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu diplomové práce RNDr. Ondřeji Pavlačkovi, PhD. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnoval při podnětných a užitečných konzultacích. Dále si zaslouží poděkování má rodina, která mě podporovala a popoháněla, a přátelé, kteří mě povzbuzovali a inspirovali. Zapomenout nemohu ani na můj počítač, bez kterého bych práci nikdy nezvládl napsat, a typografický systém TEX, kterým je práce vysázena.

Úvod

Ve své diplomové práci se zabývám normováním intervalových vah a fuzzy vah, tematikou důležitou zejména ve vícekriteriálním rozhodování za neurčitosti. Během let bylo různými matematiky, popřípadě skupinami matematiků vytvořeno mnoho metod, které se snaží proceduru normování vah zobecnit i pro případy vah neurčitých, které jsou obvykle modelovány intervaly nebo fuzzy čísly.

V práci se postupně zabývám metodami, které navrhl Xu, Chang a Lee, Jiménéz a spol., Wang a Elhag a Sevastjanov a spol. Poslední metodou, která je v práci obsažena, je normování fuzzy vektorů vah dle principu rozšíření. Hlavním cílem práce je tyto metody popsat, zhodnotit je z hlediska jejich správnosti, použitelnosti a vlastností a porovnat je, a to jednak za použití dostupné literatury, druhak na základě vlastních numerických příkladů a postřehů.

Poslední část diplomové práce se zabývá porovnáním normování ostrých vah a normování intervalových vah. Kromě jiného se zde pokusím zjistit, na základě jakých informací o normovaných a nenormovaných intervalových vahách lze dopočítat zbývající hodnoty.

Kapitola 1

Užité pojmy z teorie fuzzy množin

Definice 1. Nechť je dána neprázdná množina U zvaná univerzum. Pak fuzzy množina A na univerzu U je definována zobrazením $\mu_A : U \to \langle 0, 1 \rangle$.
Funkci μ_A nazýváme funkcí příslušnosti fuzzy množiny A. Pro každé $x \in U$ nazveme hodnotu $\mu_A(x)$ stupněm příslušnosti prvku x k fuzzy množině A.

Poznámka 1. Stupeň příslušnosti prvku x k fuzzy množině A někdy značíme jako $A(x)$.

Definice 2. Nosičem fuzzy množiny A na univerzu U nazýváme (ostrou) množinu

$$\text{Supp } A = \{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

Definice 3. Jádrem fuzzy množiny A na univerzu U nazýváme (ostrou) množinu

$$\text{Ker } A = \{x \in U \mid \mu_A(x) = 1\}.$$

Definice 4. Nechť je dána fuzzy množina A na univerzu U a reálné číslo $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$. Pak α-řezem fuzzy množiny A nazýváme ostrou množinu

$$A_\alpha = \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Poznámka 2. Z předchozí definice plyne následující důležitá vlastnost:

$$\forall \alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle, \alpha \leq \beta : A_\beta \subseteq A_\alpha$$

Definice 5. Fuzzy množina A na univerzu U se nazývá normální, pokud

$$\text{Ker } A \neq \emptyset.$$

Jinak se nazývá subnormální.

Definice 6. Fuzzy množina C definovaná na množině reálných čísel $\mathbb{R}$, která má následující vlastnosti:

i) $\exists x_0 \in \mathbb{R} : \mu_C(x_0) = 1$ (C je normální),

ii) pro všechna $\alpha \in (0, 1\rangle$ jsou C_α uzavřené intervaly,

iii) nosič Supp C je omezený,

se nazývá fuzzy číslem.

Poznámka 3. Systém všech fuzzy množin na U značíme $\mathcal{F}(U)$.

Definice 7. Fuzzy množina $V \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$, která má následující vlastnosti:

a) $\exists x_0 \in \mathbb{R}^m : \mu_V(x_0) = 1$,

b) $\forall \alpha \in \langle 0, 1\rangle$ je $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m$ konvexní a uzavřené,

c) Supp V je omezený,

se nazývá m-rozměrný fuzzy vektor. Množinu všech m-rozměrných fuzzy vektorů budeme značit symbolem $\mathcal{F}_V(\mathbb{R}^m)$.

Definice 8. M-ticí vah (jinak též m-prvkovým váhovým vektorem) rozumíme libovolnou uspořádanou m-tici W_m z $\left(\mathbb{R}_0^+\right)^m \setminus \{\mathbf{o}\}$, kde $\mathbf{o}$ značí nulový vektor.

Definice 9. Množinou všech m-prvkových váhových vektorů rozumíme množinu

$$\mathcal{W}_m = \left(\mathbb{R}_0^+\right)^m \setminus \{\mathbf{o}\},$$

kde $\mathbf{o}$ značí nulový vektor.

Definice 10. Pravděpodobnostním simplexem v $\mathbb{R}^n$ nazýváme množinu

$$S_n = \Big\{ (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n \ \mid \ p_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \Big\}.$$

Definice 11. Množinou všech m-tic normovaných vah rozumíme množinu všech pravděpodobnostních simplexů v $\mathbb{R}^n$.

Poznámka 4. Normováním vah rozumíme vektorovou funkci $n : \mathcal{W}_n \to S_n$ definovanou pro všechny $(w_1, \ldots w_n) \in \mathcal{W}_n$ předpisem:

$$n\,(w_1, \ldots, w_n) = \left(\frac{w_1}{\sum_{i=1}^{n} w_i}, \ldots, \frac{w_n}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \right). \tag{1.1}$$

Definice 12. Mějme dva kladné intervaly $a = \langle a_1, a_2 \rangle$ a $b = \langle b_1, b_2 \rangle$. Intervalovou aritmetikou rozumíme následující:

1. Sčítání: $a + b = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$
2. Odčítání: $a - b = \langle a_1 - b_2, a_2 - b_1 \rangle$
3. Násobení: $a \cdot b = \langle a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2 \rangle$
4. Dělení: $a \div b = \langle \frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_1} \rangle$

Kapitola 2

Přístupy k normování intervalových vah a fuzzy vah

Normování je mimo jiné velice důležitou součástí vícekriteriálního rozhodování, vážený průměr si bez něj neumíme představit. Poznámka 4 nám dává návod, jak normovat ostré váhy. V praxi se ale obvykle stává, že nejsme schopni jednotlivým kritériím přiřadit přesné váhy, naopak často dochází k případům, kdy si nejsme jisti, jakou důležitost kterému kritériu přiřadit. Proto se uchylujeme k tomu, že jednotlivým kritériím přiřazujeme váhy intervalové nebo fuzzy (což znamená, že místo konkrétních hodnot pracujeme s intervaly nebo fuzzy čísly), čímž právě onu nejistotu či neurčitost vyjadřujeme. Jak ale takové váhy (například za účelem výpočtu váženého průměru) normovat?

Během let matematici vyvinuli hned několik způsobů normalizace intervalových a fuzzy vah, některé z nich si v této kapitole přiblížíme.

Nejprve si ale uvedeme několik vět a definic a zároveň si i zavedené některé pojmy, se kterými budeme následně pracovat.

Definice 13. Mějme vektor intervalových vah $V = (\langle \underline{v}_1, \overline{v}_1 \rangle, \ldots, \langle \underline{v}_n, \overline{v}_n \rangle), 0 \leq \underline{v}_i \leq \overline{v}_i, i = 1, \ldots, n$ a $N_V = \{X = (x_1, \ldots, x_n) \mid \underline{v}_i \leq x_i \leq \overline{v}_i, i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ nechť je množina vektorů normovaných vah. Pak je vektor intervalových vah normovaný právě tehdy, když platí následující dvě podmínky:

(1) Množina N_V je neprázdná,

(2) $\underline{v}_i$ i $\overline{v}_i, i = 1, \ldots, n$ jsou dosažitelné v N_V.

Poznámka 5. Podmínka (1) je splněna právě tehdy, když

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{v}_i \leq 1 \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i \geq 1. \tag{2.1}$$

Podmínka (2) je splněna právě tehdy, když

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{v}_j + \max_{i=1,\ldots,n} (\overline{v}_i - \underline{v}_i) \leq 1 \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{n} \overline{v}_j - \max_{i=1,\ldots,n} (\overline{v}_i - \underline{v}_i) \geq 1. \tag{2.2}$$

Podmínka (2) nám říká, že $\underline{v}_i$ i $\overline{v}_i, i = 1, \ldots, n$ jsou složkami alespoň jednoho vektoru z N_V.

Věta 1. *Vektor intervalových vah je normovaný právě tehdy, když splňuje následující podmínky:*

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{w}_i + \max_j \left(\overline{w}_j - \underline{w}_j\right) \leq 1, \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i - \max_j \left(\overline{w}_j - \underline{w}_j\right) \geq 1. \tag{2.4}$$

V opačném případě normovaný není.

Wang a Elhag v [3] dokazují ještě jednu postačující podmínku pro normované intervalové váhy:

Věta 2. *Jestliže vektor intervalových vah* $W = (\langle \underline{w}_1, \overline{w}_1 \rangle, \ldots, \langle \underline{w}_n, \overline{w}_n \rangle)$ *splňuje*

$$\underline{w}_i = \max \left\{ \underline{w}_i, 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \overline{w}_j \right\}, i = 1, \ldots, n \tag{2.5}$$

a

$$\overline{w}_i = \min \left\{ \overline{w}_i, 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \underline{w}_j \right\}, i = 1, \ldots, n, \tag{2.6}$$

pak je normovaný.

2.1. Normování podle Xu a Changa a Leeho

2.1.1. Normování intervalových vah podle Xu

První z možností, jak přistupovat k normování intervalových/fuzzy vah, navrhuje v [8] Xu. Jeho přístup vychází ze standardní intervalové aritmetiky (viz definici 12). Touto metodou jsou původní intervalové váhy znormovány na normované intervalové váhy $\langle \underline{v}_i^A, \overline{v}_i^A \rangle, i = 1, \ldots, n$ následujícím způsobem:

$$\langle \underline{v}_i^A, \overline{v}_i^A \rangle = \frac{\langle \underline{w}_i, \overline{w}_i \rangle}{\sum_{j=1}^{n} \langle \underline{w}_j, \overline{w}_j \rangle} = \left\langle \frac{\underline{w}_i}{\sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j}, \frac{\overline{w}_i}{\sum_{i=1}^{n} \underline{w}_j} \right\rangle, i = 1, \ldots, n. \tag{2.7}$$

Je zřejmé, že získaný vektor intervalových vah splňuje následující podmínku:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \underline{v}_i^A \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i^A \right) \equiv 1. \tag{2.8}$$

Poznamenejme, že intervaly získané pomocí (2.7) a tedy i splňující podmínku (2.8) nemusejí být nutně podmnožinou jednotkového intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, který reprezentuje přirozený rozsah pro hodnoty konkrétních normovaných vah. Takový případ uvede následující příklad:

Příklad 1. *Znormujme podle metody Xu následující dvojici intervalových vah:* $W_1 = \langle 1, 20 \rangle, W_2 = \langle 1, 20 \rangle$.

Řešení:

$$\langle \underline{v}_i^A, \overline{v}_i^A \rangle = \left\langle \frac{1}{20 + 20}, \frac{20}{1 + 1} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{40}, 10 \right\rangle, i \in \{1, 2\}$$

Další nevýhodou tohoto přístupu je fakt, že pokud jsou počáteční intervalové váhy ve tvaru $w_i = \langle 0, \overline{w}_i \rangle, i = 1, \ldots, n$, pak nelze normování provést, neboť nelze spočítat hodnotu $\overline{v}_i^A = \overline{w}_i / \left(\sum_{i=1}^{n} 0 \right)$.

2.1.2. Normování fuzzy vah podle Changa a Leeho

Podmínku (2.8) určitým způsobem splňuje i způsob normování fuzzy vah navržený dvojicí Chang a Lee [1]. Ti vyvinuli pro fuzzy váhy takzvanou metodu geometrického fuzzy normování. Ta pracuje s předpokladem, že fuzzy váhy jsou reprezentovány lichoběžníkovými nebo trojúhelníkovými fuzzy čísly $\left[w_i^L, w_i^M, w_i^N, w_i^U \right]$,

$i = 1, \ldots, n$ (pokud by šlo o trojúhelníkové fuzzy číslo, pak by platilo $w_i^M = w_i^N$). Normované fuzzy váhy získáme následovně:

$$v_i^L = \frac{w_i^L}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^n w_j^L\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n w_j^U\right)}}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.9}$$

$$v_i^M = \frac{w_i^M}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^n w_j^M\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n w_j^N\right)}}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.10}$$

$$v_i^N = \frac{w_i^N}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^n w_j^N\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n w_j^M\right)}}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.11}$$

$$v_i^U = \frac{w_i^U}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^n w_j^U\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n w_j^L\right)}}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.12}$$

Pokud bychom navíc všechny váhy reprezentovaly trojúhelníkovými fuzzy čísly, pak bychom místo (2.10) a (2.11) mohli psát

$$v_i^M = \frac{w_i^M}{\sum_{j=1}^n w_j^M}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.13}$$

Je zřejmé, že platí

$$\left(\sum_{i=1}^n v_i^L\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n v_i^U\right) \equiv 1, \tag{2.14}$$

stejně tak

$$\left(\sum_{i=1}^n v_i^M\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n v_i^N\right) \equiv 1, \tag{2.15}$$

což ovšem znamená, že pokud jsou všechny váhy reprezentovány trojúhelníkovými fuzzy čísly, pak

$$\sum_{i=1}^n v_i^M \equiv 1. \tag{2.16}$$

Obdobně jako v předchozím případě zde může dojít k tomu, že uzávěry nosičů normovaných fuzzy vah nebudou podmnožinami jednotkového intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, což nám ilustruje následující příklad:

Příklad 2. *Znormujme metodou Changa a Leeho následující dvojici trojúhelníkových fuzzy vah:* $W_1 = [1, 2, 3]\,, W_2 = [1, 3, 5]$.

Řešení:

$$v_1^L = \frac{w_1^L}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^2 w_j^L\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^2 w_j^U\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 8}} = 0{,}25$$

Obdobně bychom získali i ostatní hodnoty. Normované fuzzy váhy pak mají tvar $V_1 = [0{,}25; 0{,}4; 0{,}75]\,, V_2 = [0{,}25; 0{,}6; 1{,}25]$.

To samo o sobě není dobrou vizitkou této metody, mnohem horší věcí, kvůli které je opravdu nepoužitelná, je, že pro některé případy získané normované váhy nemají vlastnosti fuzzy množin. To opět ilustrujeme na příkladu:

Příklad 3. *Znormujme metodou Changa a Leeho následující dvojici trojúhelníkových fuzzy vah:* $W_1 = [1; 1{,}1; 2]\,, W_2 = [1; 1{,}1; 30]$.

Řešení:

$$v_1^L = \frac{w_1^L}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^2 w_j^L\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^2 w_j^U\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 32}} = 0{,}125,$$

$$v_2^L = \frac{w_2^L}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^2 w_j^L\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^2 w_j^U\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 32}} = 0{,}125,$$

$$v_1^U = \frac{w_1^U}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^2 w_j^U\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^2 w_j^L\right)}} = \frac{2}{\sqrt{32 \cdot 2}} = 0{,}25,$$

$$v_2^U = \frac{w_2^U}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^2 w_j^U\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^2 w_j^L\right)}} = \frac{30}{\sqrt{32 \cdot 2}} = 3{,}75,$$

$$v_1^M = \frac{w_1^M}{\sum_{j=1}^n w_j^M} = \frac{1{,}1}{2{,}2} = 0{,}5,$$

a konečně

$$v_2^M = \frac{w_2^M}{\sum_{j=1}^n w_j^M} = \frac{1{,}1}{2{,}2} = 0{,}5.$$

Z toho plyne, že $V_1 = [0{,}125; 0{,}5; 0{,}25]$ a $V_2 = [0{,}125; 0{,}5; 3{,}75]$, což je v rozporu s vlastnostmi fuzzy množin (a tedy samozřejmě i fuzzy čísel).

2.2. Normování navrhované Jimenézem a spol.

Dalším z přístupů, kterým se budeme v této sekci zabývat, je metoda navrhovaná Jimenézem a spol. v [2]. Ta je navržena pro normování intervalových vah a autoři zřejmě nepočítají s tím, že by se pomocí ní normovaly i fuzzy váhy (jakožto jednotlivé α-řezy). V závěru této sekce si ukážeme, proč by to nešlo.

Normované intervalové váhy $\langle \underline{v}_i^J, \overline{v}_i^J \rangle, i = 1, \ldots, n$ jsou počítány pomocí následujících vzorců:

$$\underline{v}_i^J = \frac{k_i \cdot \underline{w}_i}{\frac{(\underline{w}_i + \overline{w}_i)}{2}}, i = 1, \ldots, n, \tag{2.17}$$

$$\overline{v}_i^J = \frac{k_i \cdot \overline{w}_i}{\frac{(\underline{w}_i + \overline{w}_i)}{2}}, i = 1, \ldots, n, \tag{2.18}$$

kde

$$k_i = \frac{\underline{w}_i + \overline{w}_i}{\sum_{j=1}^n \left(\underline{w}_j + \overline{w}_j\right)}, i = 1, \ldots, n.$$

Wang a Elhag (viz [3]) ukazují, že tato metoda je založena na průměrech intervalových vah, neboť vzorce (2.17) a (2.18) lze přepsat následujícím způsobem:

$$\underline{v}_i^J = \frac{\underline{w}_i}{\sum_{j=1}^n \left(\underline{w}_j + \overline{w}_j\right)/2}, i = 1, \ldots, n, \tag{2.19}$$

$$\overline{v}_i^J = \frac{\overline{w}_i}{\sum_{j=1}^n \left(\underline{w}_j + \overline{w}_j\right)/2}, i = 1, \ldots, n. \tag{2.20}$$

Je zřejmé, že

$$\sum_{j=1}^n \left(\underline{v}_j + \overline{v}_j\right) \equiv 2. \tag{2.21}$$

Jak poznamenává Pavlačka v [5], z rovnic (2.19) a (2.20) lze snadno vidět, že $\langle \underline{v}_i^J, \overline{v}_i^J \rangle, i = 1, \ldots, n$ vždy splňují slabší podmínku (2.1). Silnější podmínku (2.2) splňují pouze za určitých podmínek:

Věta 3. *Intervalové váhy získané z nenormovaných intervalových vah vzorci (2.19) a (2.20) splňují podmínku (2.2) právě tehdy, když*

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \underline{w}_j + \overline{w}_i \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \overline{w}_j + \underline{w}_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.22}$$

Důkaz. Dosaďme intervalové váhy získané vzorci (2.19) a (2.20) do vztahů (2.2):

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\underline{w}_j}{\sum_{k=1}^{n} \left(\underline{w}_k + \overline{w}_k\right)/2} + \max_{i=1,\ldots,n} \left(\frac{\overline{w}_i}{\sum_{k=1}^{n} \left(\underline{w}_k + \overline{w}_k\right)/2} - \frac{\underline{w}_i}{\sum_{k=1}^{n} \left(\underline{w}_k + \overline{w}_k\right)/2} \right) \leq 1 \tag{2.23}$$

a tedy

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{w}_j + \max_{i=1,\ldots,n} \left(\overline{w}_i - \underline{w}_i\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\underline{w}_k + \overline{w}_k\right)/2. \tag{2.24}$$

Stejně tak

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{w}_j}{\sum_{k=1}^{n} \left(\underline{w}_k + \overline{w}_k\right)/2} - \max_{i=1,\ldots,n} \left(\frac{\overline{w}_i}{\sum_{k=1}^{n} \left(\underline{w}_k + \overline{w}_k\right)/2} - \frac{\underline{w}_i}{\sum_{k=1}^{n} \left(\underline{w}_k + \overline{w}_k\right)/2} \right) \geq 1 \tag{2.25}$$

a tedy

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j - \max_{i=1,\ldots,n} \left(\overline{w}_i - \underline{w}_i\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \left(\underline{w}_k + \overline{w}_k\right)/2. \tag{2.26}$$

Z (2.24) a (2.26) ale plyne, že

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{w}_j + \max_{i=1,\ldots,n} \left(\overline{w}_i - \underline{w}_i\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j - \max_{i=1,\ldots,n} \left(\overline{w}_i - \underline{w}_i\right) \tag{2.27}$$

Z toho již zřejmě plyne (2.22). $\square$

Jak si ale ukážeme na následujícím příkladě, podmínka (2.22) nemusí být vždy splněna:

Příklad 4. *Mějme trojici intervalových vah* $W_1 = \langle 1; 1{,}1\rangle, W_2 = \langle 1; 1{,}1\rangle$ *a* $W_3 = \langle 1; 20\rangle$. *Ukažme, že podmínka* (2.22) *není splněna:*

Řešení: Vezměme $i = 3$ a dosaďme do vzorce (2.22):

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \underline{w}_j + \overline{w}_i = \sum_{j=1, j\neq 3}^{3} \underline{w}_j + \overline{w}_3 = \underline{w}_1 + \underline{w}_2 + \overline{w}_3 = 1 + 1 + 20 = 22$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \overline{w}_j + \underline{w}_i = \sum_{j=1, j\neq 3}^{3} \overline{w}_j + \underline{w}_3 = \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \underline{w}_3 = 1{,}1 + 1{,}1 + 1 = 3{,}2 < 22,$$

a tedy podmínka (2.22) není splněna.

Jak jsem v úvodu nastínil, tuto metodu nelze použít na normování fuzzy vah pomocí α-řezů. Následující příklad nám osvětlí, proč tomu tak je:

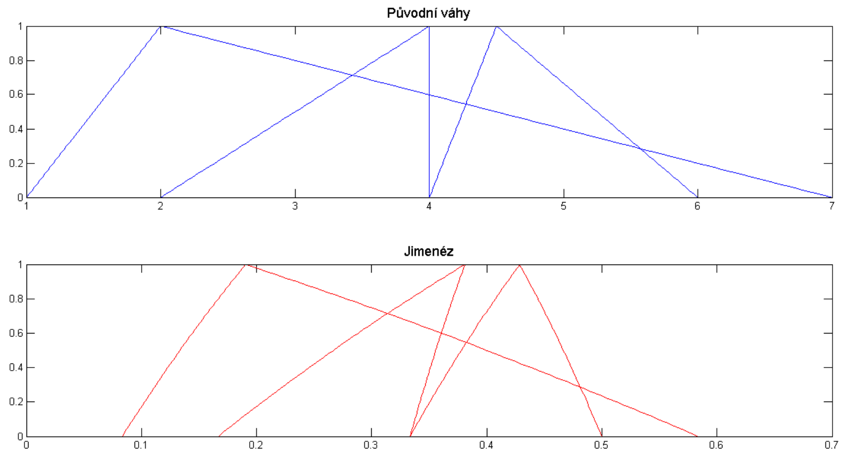
Příklad 5. *Pomocí metody Jimenéze a spol. znormujme trojici neurčitých vah reprezentovaných trojúhelníkovými fuzzy čísly* $W_1 = [1, 2, 7], W_2 = [2; 4; 4{,}001]$, $W_3 = [4; 4{,}5; 6]$. *Normování proveďme tak, že znormujeme uzávěr nosiče a jednotlivé* α*-řezy.*

Řešení: Nejprve tedy znormujeme užitím vzorců (2.19) a (2.20) intervalové váhy $w_1(0) = \langle 1, 7\rangle, w_2(0) = \langle 2; 4{,}001\rangle, w_3(0) = \langle 4, 6\rangle$, čímž získáme normované váhy $v_1^J(0) = \langle 0{,}0833; 0{,}5833\rangle, v_2^J(0) = \langle 0{,}1666; 0{,}3334\rangle, v_3^J(0) = \langle 0{,}3333; 0{,}5\rangle$.

Pro $\alpha = 0{,}5$ nyní opět užitím vzorců (2.19) a (2.20) znormujeme intervalové váhy $w_1(0{,}5) = \langle 1{,}5; 4{,}5\rangle, w_2(0{,}5) = \langle 3; 4{,}0005\rangle, w_3(0{,}5) = \langle 4{,}25; 5{,}25\rangle$, čímž získáme normované váhy $v_1^J(0{,}5) = \langle 0{,}1333; 0{,}4\rangle, v_2^J(0{,}5) = \langle 0{,}2667; 0{,}3556\rangle, v_3^J(0{,}5) = \langle 0{,}3778; 0{,}4667\rangle$.

Obdobným způsobem bychom normovali i ostatní α-řezy. Jelikož ale $v_2^J(0) = \langle 0{,}1666; 0{,}3334\rangle$ a $v_2^J(0{,}5) = \langle 0{,}2667; 0{,}3556\rangle$, pak nutně $v_2^J(0{,}5) \not\subseteq v_2^J(0)$ a a tudíž v_2^J nemůže být fuzzy číslo.

Grafické znázornění porovnání původních vah a vah znormovaných metodou navrženou Jimenézem a spol. užitou na jednotlivé α-řezy nám ukazuje následující obrázek:



Tomuto problému se lze určitým způsobem vyhnout, když pomocí Jimenézovy metody znormujeme pouze uzávěry nosičů a jednotlivé α-řezy dodefinujeme tak, aby platilo

$$\frac{\underline{w}_i(\alpha)-\underline{w}_i(0)}{\overline{w}_i(0)-\underline{w}_i(0)}=\frac{\underline{v}_i^J(\alpha)-\underline{v}_i^J(0)}{\overline{v}_i^J(0)-\underline{v}_i^J(0)}, i=1,\ldots,n,$$

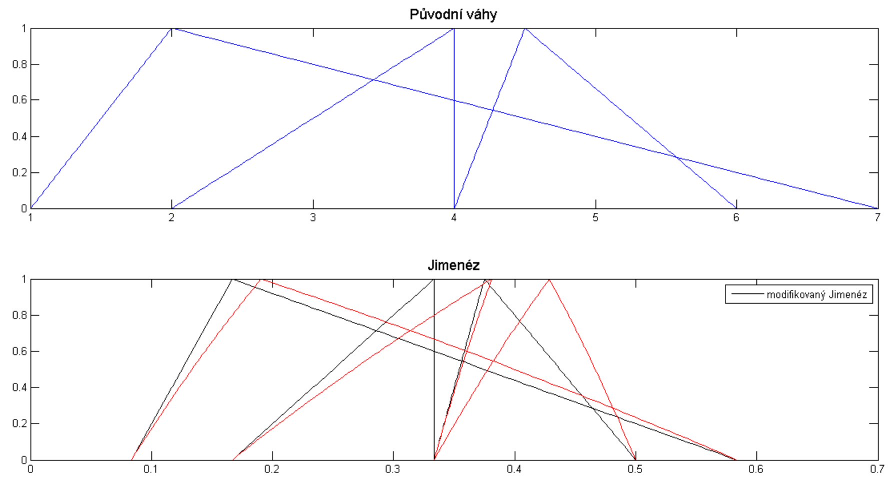
$$\frac{\overline{w}_i(\alpha)-\underline{w}_i(0)}{\overline{w}_i(0)-\underline{w}_i(0)}=\frac{\overline{v}_i^J(\alpha)-\underline{v}_i^J(0)}{\overline{v}_i^J(0)-\underline{v}_i^J(0)}, i=1,\ldots,n,$$

tedy

$$\underline{v}_i^J(\alpha)=\underline{v}_i^J(0)+\frac{\underline{w}_i(\alpha)-\underline{w}_i(0)}{\overline{w}_i(0)-\underline{w}_i(0)}\cdot\left(\overline{v}_i^J(0)-\underline{v}_i^J(0)\right), i=1,\ldots,n,$$

$$\overline{v}_i^J(\alpha)=\underline{v}_i^J(0)+\frac{\overline{w}_i(\alpha)-\underline{w}_i(0)}{\overline{w}_i(0)-\underline{w}_i(0)}\cdot\left(\overline{v}_i^J(0)-\underline{v}_i^J(0)\right), i=1,\ldots,n.$$

To neznamená nic jiného, než že jednotlivé α-řezy znormujeme tak, aby fuzzy váhy po znormování vizuálně odpovídaly těm původním, jak ukazuje následující obrázek:



2.3. Přístup navrhovaný Wangem a Elhagem

Jiný přístup navrhuje dvojice Wang a Elhag v [3]. Ti vycházejí z definice 13. Pokud intervalové váhy dané definici odpovídají, pak jsou normované. Pokud ovšem nesplňují podmínku (1) (a tedy i podmínku (2)), nebo jenom podmínku (2), pak normované nejsou. Wang a Elhag proto rozdělili přístup normování na dvě části - normování intervalových vah, které porušují podmínku (1), a těch, které porušují pouze podmínku (2).

2.3.1. Metoda normování intervalových vah porušujících podmínku (1)

Předpokládejme, že vektor intervalových vah $W = (\langle \underline{w}_1, \overline{w}_1 \rangle, \ldots, \langle \underline{w}_n, \overline{w}_n \rangle)$ nesplňuje podmínku (1). Pak se snažíme najít normované intervalové váhy v následujícím tvaru:

$$\underline{v}_i = \min_{\underline{w}_j \leq z_j \overline{w}_j, j=1,\ldots,n} \left\{ \frac{z_i}{\sum_{j=1}^{n} z_j} \right\}, i = 1, \ldots, n \tag{2.28}$$

a

$$\overline{v}_i = \max_{\underline{w}_j \leq z_j \overline{w}_j, j=1,\ldots,n} \left\{ \frac{z_i}{\sum_{j=1}^{n} z_j} \right\}, i = 1, \ldots, n. \tag{2.29}$$

Parciálním derivováním bychom zjistili (jak ukazují Wang a Elhag v [3]), že výraz $\frac{z_i}{\sum_{j=1}^{n} z_j}$ je rostoucí v proměnné z_i a klesající v proměnných $z_j, j = 1, \dots, n, j \neq i$. Z toho plyne, že

$$\underline{v}_i = \min_{\underline{w}_j \leq z_j \overline{w}_j, j=1,\dots,n} \left\{ \frac{z_i}{\sum_{j=1}^{n} z_j} \right\} = \frac{\underline{w}_i}{\underline{w}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \overline{w}_j}, i = 1, \dots, n \tag{2.30}$$

a

$$\overline{v}_i = \max_{\underline{w}_j \leq z_j \overline{w}_j, j=1,\dots,n} \left\{ \frac{z_i}{\sum_{j=1}^{n} z_j} \right\} = \frac{\overline{w}_i}{\overline{w}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \underline{w}_j}, i = 1, \dots, n. \tag{2.31}$$

Dále Wang a Elhag v [3] dokazují následující větu:

Věta 4. *Nechť* $V = (\langle \underline{v}_2, \overline{v}_1 \rangle, \dots, \langle \underline{v}_n, \overline{v}_n \rangle)$ *je vektor intervalových vah získaných* (2.30) *a* (2.31)*.Pak*

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{v}_i + \max_{j=1,\dots,n} \left(\overline{v}_j - \underline{v}_j \right) \leq 1 \tag{2.32}$$

a

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i - \max_{j=1,\dots,n} \left(\overline{v}_j - \underline{v}_j \right) \geq 1. \tag{2.33}$$

Z toho ale vzhledem k větě 1 plyne, že tento vektor intervalových vah je normovaný.

Za zmínku jistě stojí i následující věta dokázaná v [3]

Věta 5. *Pokud jsou* $v_i = \langle \underline{v}_i, \overline{v}_i \rangle, i = 1, \dots, n$ *získané z původních vah pomocí* (2.30) *a* (2.31)*, pak*

$$\underline{v}_i = \max \left\{ \underline{v}_i, 1 - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \overline{v}_j \right\}, i = 1, \dots, n \tag{2.34}$$

a

$$\overline{v}_i = \min \left\{ \overline{v}_i, 1 - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \underline{v}_j \right\}, i = 1, \dots, n, \tag{2.35}$$

Jak ale ukazuje Pavlačka v [5] s odkazem na [6], tento model není úplně korektní. To ostatně plyne i z následujícího příkladu:

Příklad 6. Předpokládejme trojici nezávislých intervalových vah $W_1 = \langle 0{,}4; 0{,}6\rangle$, $W_2 = \langle 0{,}3; 0{,}6\rangle$ a $W_3 = \langle 0{,}2; 0{,}8\rangle$. Pak tato trojice generuje množinu vektorů nenormovaných vah

$$W = \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{W}_3 \mid 0{,}4 \le w_1 \le 0{,}6; 0{,}3 \le w_2 \le 0{,}6; 0{,}2 \le w_3 \le 0{,}8\}.$$

Užitím vzorců (2.30) a (2.31) získáme trojici normovaných intervalových vah $V_1 = \langle 0{,}222; 0{,}545\rangle$, $V_2 = \langle 0{,}176; 0{,}533\rangle$ a $V_3 = \langle 0{,}143; 0{,}533\rangle$, která generuje následující množinu vektorů normovaných vah:

$$N_V = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{S}_3 \mid 0{,}222 \le v_1 \le 0{,}545; 0{,}176 \le v_2 \le 0{,}5; 0{,}143 \le v_3 \le 0{,}533\}$$

Takováto množina ale obsahuje i vektor $v = (0{,}545; 0{,}176; 0{,}279)$, který ovšem nemohl být získán normováním nějakého vektoru z W.

Pojďme se nyní podívat na tuto problematiku podrobněji (viz [6]):

Definice 14. Váženým průměrem hodnot $(x_1, \ldots, x_n)$ s příslušným vektorem vah $(w_1, \ldots, w_n)$, kde $w_i \ge 0$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ rozumíme

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}. \tag{2.36}$$

Definice 15. Konvexní kombinací hodnot $(x_1, \ldots, x_n)$ s koeficienty $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ rozumíme výraz

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i \tag{2.37}$$

právě tehdy, když $\alpha_i \ge 0$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ a zároveň $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Poznámka 6. Pokud označíme $p_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j}, i \in \{1, \ldots, n\}$, pak lze výraz (2.36) psát také jako

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i. \tag{2.38}$$

Je zřejmé, že $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ a že $p_i \geq 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. To ale znamená, že vážený průměr hodnot $(x_1, \dots, x_n)$ s příslušným vektorem vah $(w_1, \dots, w_n)$, $w_i \geq 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je to samé jako konvexní kombinace hodnot $(x_1, \dots, x_n)$ s koeficienty $(p_1, \dots, p_n)$, kde $(p_1, \dots, p_n)$ je vektor normovaných vah příslušící vektoru nenormovaných vah $(w_1, \dots, w_n)$.

Pokud bychom ostré váhy nahradili intervalovými vahami, pak bychom získali vážený průměr mohli psát jako

$$\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} | w_i \in \langle \underline{w}_i, \overline{w}_i \rangle, i = 1, \dots, n \right\}, \tag{2.39}$$

což lze upravit na

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i | p_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j}, w_i \in \langle \underline{w}_i, \overline{w}_i \rangle, i = 1, \dots, n \right\}. \tag{2.40}$$

Jak ukazuje Pavlačka v [6], následující množina

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i | p_i \in \left\langle \frac{\underline{w}_i}{\underline{w}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \overline{w}_j}, \frac{\overline{w}_i}{\overline{w}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \underline{w}_j} \right\rangle, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\} \tag{2.41}$$

se obecně množině (2.40) nerovná. Pokud by to tak bylo, muselo by platit, že pro každý vektor $(x_1, \dots, x_n)$ jsou množiny

$$W := \left\{ (p_1, \dots, p_n) | p_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j}, w_i \in \langle \underline{w}_i, \overline{w}_i \rangle, i = 1, \dots, n \right\} \tag{2.42}$$

a

$$\begin{aligned} W^N = \Bigg\{ & (p_1, \dots, p_n) | p_i \in \left\langle \frac{\underline{w}_i}{\underline{w}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \overline{w}_j}, \frac{\overline{w}_i}{\overline{w}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \underline{w}_j} \right\rangle, \\ & i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \Bigg\} \end{aligned} \tag{2.43}$$

shodné.

Jelikož pro každé i platí, že

$$\min\left\{\frac{w_i}{\sum_{j=1}^n w_j}|w_j \in \langle \underline{w}_j, \overline{w}_j\rangle, j = 1,\dots,n\right\} = \frac{\underline{w}_i}{\underline{w}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^n \overline{w}_j} \tag{2.44}$$

a

$$\max\left\{\frac{w_i}{\sum_{j=1}^n w_j}|w_j \in \langle \underline{w}_j, \overline{w}_j\rangle, j = 1,\dots,n\right\} = \frac{\overline{w}_i}{\overline{w}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^n \underline{w}_j}, \tag{2.45}$$

jsou projekce množin W i W^N na příslušné osy shodné.

Předpokládejme nyní, že pro $n \geq 3$ existuje alespoň jedno $k \in \{1,\dots,n\}$ takové, že $\underline{w}_k > 0$ a ukažme si, že $W \subset W^N$. Nechť $i \in \{1,\dots,n\}$ a nechť $\underline{w}_k > 0$ alespoň pro jedno $k \neq n$. Vytvořme nyní množiny

$$W_{\bar{i}} := \left\{(p_1,\dots,p_n) \in W|p_i = \frac{\overline{w}_i}{\overline{w}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^n \underline{w}_j}\right\} \tag{2.46}$$

a

$$W_{\bar{i}}^N := \left\{(p_1,\dots,p_n) \in W^N|p_i = \frac{\overline{w}_i}{\overline{w}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^n \underline{w}_j}\right\}. \tag{2.47}$$

Je zřejmé, že tyto množiny jsou takovými podmnožinami množin W, respektive W^N, kde p_i nabývá svého maxima.

Zaměřme se nyní na množinu $W_{\bar{i}}$. Očividně obsahuje vektor $p_{\bar{i}}$, který vznikl normováním vektoru $(w_1,\dots,w_n)$, kde $w_i = \overline{w}_i$ a $w_j = \underline{w}_j, j \in \{1,\dots,n\}, j \neq i$. Jelikož je funkce $\frac{w_i}{\sum_{j=1}^n w_j}$ na definičním oboru $\langle 0, +\infty) \setminus \{o\}$, kde o značí nulový vektor, rostoucí v proměnné w_i (z předpokladu, že existuje $k \neq i$ takové, že $w_k > 0$) a klesající v ostatních proměnných (pokud $w_i > 0$), je vektor $p_{\bar{i}}$ jediným prvkem množiny $W_{\bar{i}}$. Pokud bychom totiž $\overline{w}_i$ nahradili $w_i^{'} < \overline{w}_i$, museli bychom také nahradit nějaké (popřípadě i více) $\underline{w}_j, j \neq i$ $w_j^{'} < \underline{w}_j$, jinak by se změnila hodnota p_i. Takový vektor p by ale nepatřil do množiny W. Obdobně, pokud bychom pro nějaké j $\underline{w}_j$ nahradili $w_j^{'} > \underline{w}_j$, pak bychom museli $\overline{w}_i$ nahradit $w_i^{'} > \overline{w}_i$, což je opět nemožné.

Naopak množinu $W_{\bar{i}}^N$ lze vyjádřit jako konvexní kombinaci vektorů normovaných vah $(p_1, \ldots, p_n)$, kde p_i je maximální, pro jedno $j \neq i$ je p_j minimální a všechny ostatní (až na jednu) složky jsou buďto maximální, nebo minimální. Zbývající složku pak dopočítáme tak, aby $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Pokud je $\underline{w}_k > 0$ alespoň pro jedno $k \neq i$, nutně musí být $p_i < 1$. Pak je ale počet takových vektorů větší než jedna. Pro $n = 3$ jsou takové vektory dva, pro $n > 3$ je pak počet takových vektorů minimálně $n - 1$. Jelikož množina $W_{\bar{i}}^N$ obsahuje normovaný vektor $p_{\bar{i}}$, pak nutně $W_{\bar{i}} \subset W_{\bar{i}}^N$ a tedy i $W \subset W^N$. Rozdíl mezi oběma množinami ilustruje Pavlačka v [6] následujícím příkladem:

Příklad 7. Mějme trojici intervalových vah $W_1 = \langle 2, 4\rangle, W_2 = \langle 4, 6\rangle, W_3 = \langle 5, 8\rangle$. Nechť W a W^N jsou množiny normovaných vah získaných z w_1, w_2 a w_3 pomocí (2.42), respektive (2.43). Projekce W a W^N na příslušné osy dané pomocí (2.44) a (2.45) jsou následující: $W_1^N = \langle 0{,}125; 0{,}3077\rangle, W_2^N = \langle 0{,}25; 0{,}4615\rangle, W_3^N = \langle 0{,}3333; 0{,}5714\rangle$. Ukažme si nyní, že $W \subset W^N$. Označme nyní například

$$W_{\bar{2}} := \{(p_1, p_2, p_3) \in W \mid p_2 = 0{,}4615\},$$

$$W_{\bar{2}}^N := \{(p_1, p_2, p_3) \in W^N \mid p_2 = 0{,}4615\}.$$

Množina $W_{\bar{2}}$ obsahuje pouze vektor vzniklý normováním vektoru $(2, 6, 5)$, tedy

$$W_{\bar{2}} = \{(0{,}1539; 0{,}4615; 0{,}3846)\}.$$

Naopak, množina $W_{\bar{2}}^N$ obsahuje konvexní kombinaci vektorů $\mathbf{p}_1 = (0{,}125; 0{,}4615; 0{,}4135)$ a $\mathbf{p}_2 = (0{,}2052; 0{,}4615; 0{,}3333)$, tedy

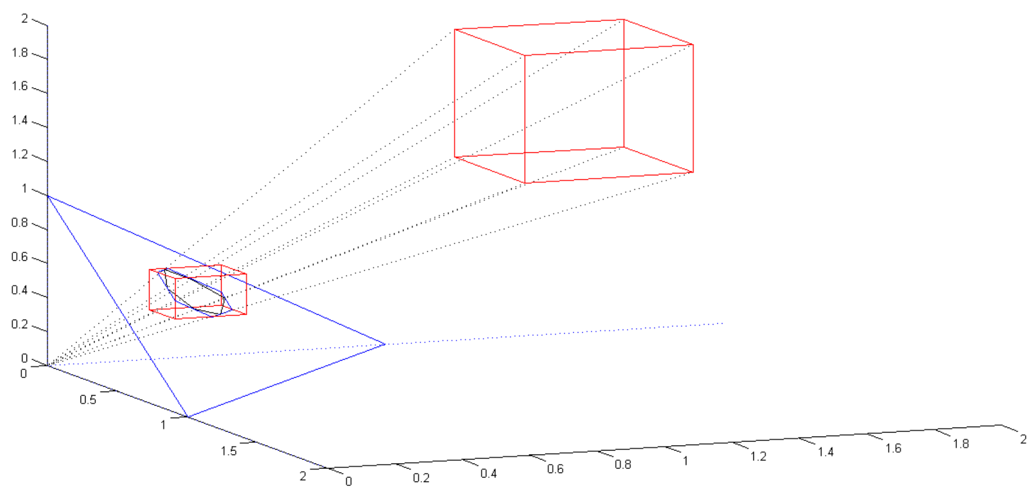
$$W_{\bar{2}}^N = \{\lambda \cdot \mathbf{p}_1 + (1 - \lambda) \cdot \mathbf{p}_2 \mid \lambda \in \langle 0, 1\rangle\}.$$

Z toho plyne, že $W_{\bar{2}} \subset W_{\bar{2}}^N$ a tedy i $W \subset W^N$. Poznamenejme, že při volbě $\lambda = 0{,}64$ dostaneme právě jediný prvek množiny $W_{\bar{2}}$.

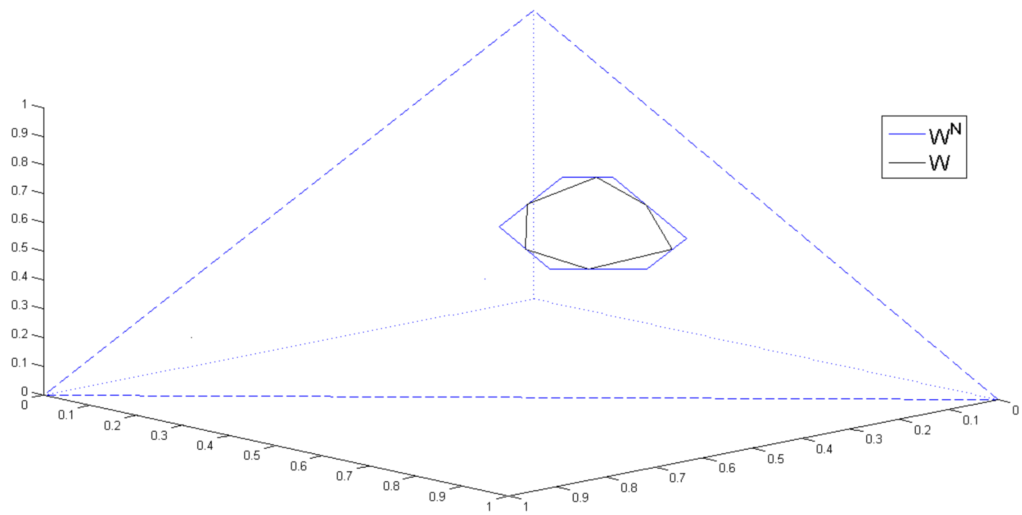
Jak ukazuje Dubois v [7], množina W je projekcí se středem v počátku kartézského součinu $\times_{i=1,\ldots,n} \langle \underline{w}_i, \overline{w}_i\rangle$ na pravděpodobnostní simplex $\mathcal{S}_n$. Oproti tomu množina W^N je průnikem pravděpodobnostního simplexu $\mathcal{S}_n$ a kartézského součinu

$$\times_{i=1,\ldots,n}\langle \underline{v}_i, \overline{v}_i\rangle = \times_{i=1,\ldots,n}\langle \frac{\underline{w}_i}{\underline{w}_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \overline{w}_j}, \frac{\overline{w}_i}{\overline{w}_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \underline{w}_j}\rangle.$$

To ostatně znázorňuje i následující obrázek, kde červené kvádry značí kartézské součiny $\times_{i=1,\ldots,n}\langle \underline{w}_i, \overline{w}_i\rangle$, respektive $\times_{i=1,\ldots,n}\langle \underline{v}_i, \overline{v}_i\rangle$, modrý šestiúhelník je pak množina $\mathcal{S}_n \cap \times_{i=1,\ldots,n}\langle \underline{v}_i, \overline{v}_i\rangle$, zatímco černý šestiúhelník je projekce se středem v počátku množiny $\times_{i=1,\ldots,n}\langle \underline{w}_i, \overline{w}_i\rangle$ na pravděpodobnostní simplex $\mathcal{S}_n$.

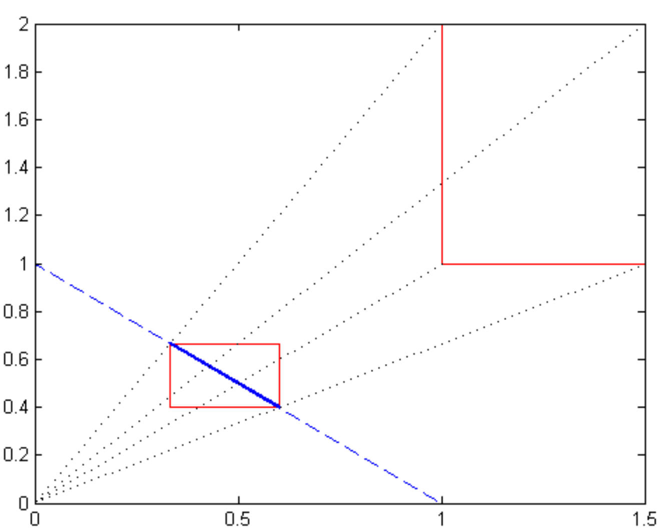


Pro lepší přehlednost pak vztah množin W a W^N a jejich umístění v pravděpodobnostním simplexu vypadá následovně:



Poznámka 7. V tomto případě se jednalo o normování vah $W_1 = \langle 0{,}5; 1\rangle, W_2 = \langle 1; 1{,}5\rangle, W_3 = \langle 1{,}25; 2\rangle$. To ovšem samozřejmě dává stejný výsledek jako normování vah $W_1 = \langle 2, 4\rangle, W_2 = \langle 4, 6\rangle, W_3 = \langle 5, 8\rangle$.

Jak ale píše Pavlačka v [6], pro případ pouhých dvou intervalových vah platí rovnost $W = W^N$. To ostatně ilustruje i následující obrázek (jde o normování intervalových vah $W_1 = \langle 1; 1{,}5\rangle, W_2 = \langle 1, 2\rangle$):



2.3.2. Metoda normování intervalových vah porušujících pouze podmínku (2)

Pro intervalové váhy, které splňují podmínku (1), ale porušují podmínku (2), hledají Wang a Elhag normované intervalové váhy jako řešení následujících úloh:

$$\underline{v}_i = \min_{\substack{\underline{w}_j \leq z_j \leq \overline{w}_j \\ \sum_{j=1}^{n} z_j = 1}} z_i, i = 1, \ldots, n, \tag{2.48}$$

$$\overline{v}_i = \max_{\substack{\underline{w}_j \leq z_j \leq \overline{w}_j \\ \sum_{j=1}^{n} z_j = 1}} z_i, i = 1, \ldots, n, \tag{2.49}$$

které, jak dále dokazují, mají řešení:

$$\underline{v}_i = \max \left\{ \underline{w}_i, 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \overline{w}_j \right\}, i = 1, \ldots, n, \tag{2.50}$$

$$\overline{v}_i = \min \left\{ \overline{w}_i, 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \underline{w}_j \right\}, i = 1, \ldots, n. \tag{2.51}$$

Opět platí (viz [3]), že pokud jsou $v_i = \langle \underline{v}_i, \overline{v}_i \rangle, i = 1, \ldots, n$ získané z původních vah pomocí (2.50) a (2.51), pak

$$\underline{v}_i = \max \left\{ \underline{v}_i, 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \overline{v}_j \right\}, i = 1, \ldots, n \tag{2.52}$$

a

$$\overline{v}_i = \min \left\{ \overline{v}_i, 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \underline{v}_j \right\}, i = 1, \ldots, n, \tag{2.53}$$

2.3.3. Nezávislé fuzzy váhy

Pokud jsou fuzzy váhy nezávislé, vychází Wang a Elhag z metody na normování intervalových vah porušujících podmínku (1). Normované fuzzy váhy pak vycházejí ze vztahů (2.30) a (2.31) a mají následující tvar:

$$\underline{v}_i(\alpha) = \frac{\underline{w}_i(\alpha)}{\underline{w}_i(\alpha) + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \overline{w}_j(\alpha)} \tag{2.54}$$

$$\overline{v}_i(\alpha) = \frac{\overline{w}_i(\alpha)}{\overline{w}_i(\alpha) + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \underline{w}_j(\alpha)} \tag{2.55}$$

Z věty 4 zřejmě plyne, že v případě, kdy by byly původní váhy reprezentovány trojúhelníkovými fuzzy čísly $\left[w_i^L, w_i^M, w_i^U\right], i = 1, \ldots, n$, by platilo

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^L = 1. \tag{2.56}$$

2.3.4. Závislé fuzzy váhy

V případě závislých fuzzy vah pak Wang a Elhag vycházejí ze vztahů (2.50) a (2.51). Normované fuzzy váhy tedy mají tvar:

$$\underline{v}_i(\alpha) = \max\left\{\underline{w}_i(\alpha), 1 - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \overline{w}_j(\alpha)\right\}, \tag{2.57}$$

$$\overline{v}_i(\alpha) = \max\left\{\overline{w}_i(\alpha), 1 - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \underline{w}_j(\alpha)\right\}. \tag{2.58}$$

2.4. Normování podle Sevastjanova a spol.

Úplně jiný přístup k normování byl představen Sevastjanovem a spol. v [4]. Je založen na tom, že se normované intervalové a fuzzy váhy chovají jako intervalové nebo fuzzy objekty (nebo je s nimi tak nakládáno). Jak autoři tvrdí, metoda je založena na moderních metodách intervalové analýzy. Zároveň v textu upozorňují, že získané normované váhy ne vždy splňují přísnější podmínku (2), kterou ostatně považují za příliš omezující. Jak poukazují na následujícím příkladě, výsledky normování dané (2.50) a (2.51) mohou být často pro rozhodovatele neintuitivní:

Příklad 8. Uvažujme 3 intervalové váhy $W_1 = \langle 0{,}4; 0{,}6\rangle, W_2 = \langle 0{,}3; 0{,}6\rangle, W_3 = \langle 0{,}2; 0{,}8\rangle$, které splňují (1), ale porušují (2). Z vzorců (2.50) a (2.51) dostaneme normované intervalové váhy $V_1 = \langle 0{,}4; 0{,}5\rangle, V_2 = \langle 0{,}3; 0{,}4\rangle, V_3 = \langle 0{,}2; 0{,}3\rangle$.

Sevastjanovovi a spol. tento přístup vadí hned ze dvou důvodů: za prvé - tak drastické zúžení nejširšího intervalu v_3 nemusí být rozhodovatelem akceptováno; za druhé - w_3 je dle Sevastjanova největší vahou v intervalovém smyslu, ale po normování je v_3 nejmenší. Jak ale zdůvodňuje Pavlačka v [5], tyto připomínky nejsou tak úplně opodstatněné. Jak je popsáno výše, vzorce (2.50) a (2.51) jsou navrhovány pro použití pouze ve speciálním případě - když počáteční intervalové váhy popisují rozsah hodnot, jejichž suma má být rovna jedné. To znamená, že počáteční intervalové váhy $\langle \underline{w}_1, \overline{w}_1\rangle, \langle \underline{w}_2, \overline{w}_2\rangle, \langle \underline{w}_3, \overline{w}_3\rangle$ generují množinu normovaných váhových vektorů $N(w_1, w_2, w_3) = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_i \in \langle \underline{w}_i, \overline{w}_i\rangle, i = 1, 2, 3, \sum_{i=1}^{3} v_1 = 1\}$.

Získané normované váhy V_1, V_2, V_3 vyjadřují projekce $N(w_1, w_2, w_3)$. Lze lehce vidět (to vychází z (2.51)), že hodnoty třetí složky normovaného váhového vektoru z $N(w_1, w_2, w_3)$ nemohou být větší než 0.3, takže drastické zúžení nejširšího intervalu W_3 je v tomto příkladu nutné a správné.

K tomu druhému důvodu - W_3 není nejmenší váha z intervalového hlediska, neboť její dolní hranice 0,2 je menší než jsou dolní hranice W_1 a W_2. Ve skutečnosti je W_3 s W_1 a W_2 neporovnatelný. Tudíž nelze ani říct, že by uspořádání vah bylo po normování nějak otočené.

Poznamenejme, že pokud považujeme počáteční intervalové váhy za nezávislé a znormujeme je podle vzorců (2.30) a (2.31), získáme normované intervalové váhy $V_1 = \langle 0{,}222; 0{,}545\rangle, V_2 = \langle 0{,}176; 0{,}5\rangle, V_3 = \langle 0{,}143; 0{,}533\rangle$ a třetí normovaná intervalová váha bude nejširší.

Pokud je s intervalovými a fuzzy vahami zacházeno jako s intervalovými a fuzzy objekty, uvažuje Sevastjanov místo podmínky (2.2) následující 3 vlastnosti, které zároveň považuje za žádoucí a přirozené:

1. Jako je součet normovaných reálných vah vždy 1, součet normovaných intervalových a fuzzy vah by měl být "blízko 1", což znamená, že by měl být vyjádřen buďto jako interval se středem v 1, nebo jako trojúhelníkové fuzzy číslo $[1 - a, 1, 1 + a]$, kde $0 < a < 1$.

2. Druhá vlastnost je odvozena z faktu, že v přesném případě zachovává nor-

mování poměry původních nenulových vah, tzn.: $\forall (w_1, \ldots, w_n) \in \mathcal{W}_n$ takové, že pokud $w_i > 0, w_j > 0$, pak $\frac{w_i}{w_j} = \frac{v_i}{v_j}$. Sevastjanov a spol. vyžadují, aby poměry průměrů normovaných intervalových nebo fuzzy vah byly co nejblíže poměrům průměrů původních intervalových nebo fuzzy vah.

3. Třetí vlastnost spočívá v tom, aby poměry délek intervalů získaných normováním byly "dost blízko"(co nejblíže) těm před normováním. Podle Sevastjanova a spol. je tato vlastnost intuitivně zřejmá. Nicméně podle Pavlačky ([5]) se nezdá být opodstatněná. Pokud původní intervalové váhy jsou vzájemně nezávislé, pak je jasné, že pořadí délek získaných normovaných intervalových vah by nemělo být přehozené. Není ale důvod, aby normování obecně zachovávalo poměry délek intervalových vah. Poměr délek dvou původních intervalových vah totiž není ovlivněn délkou ostatních, zatímco v případě normovaných intervalových vah tomu tak je. To vychází z faktu, že i-tá složka normované váhy v přesném případě je $v_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j}$, což implikuje, že v případě intervalových vah je délka i-té normované intervalové váhy také ovlivněna délkou všech ostatních původních intervalových vah.

Nechť $m_i = (\overline{w}_i + \underline{w}_i)/2, l_i = \overline{w}_i - \underline{w}_i, i = 1, \ldots, n$ jsou průměry a délky nenormovaných intervalových vah a $\hat{m}_i$ a $\hat{l}_i$ průměry a délky příslušných normovaných intervalových vah. Sevastjanov a spol. navrhují následující agregované míry přesnosti poměru průměrů a délek nenormovaných intervalových vah k poměru průměrů a délek normovaných intervalových vah:

$$\sigma_m = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \left(\frac{m_i}{m_j} - \frac{\hat{m}_i}{\hat{m}_j} \right)^2}, \tag{2.59}$$

$$\sigma_l = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \left(\frac{l_i}{l_j} - \frac{\hat{l}_i}{\hat{l}_j} \right)^2}. \tag{2.60}$$

Jak poukazuje Pavlačka v [5], v ilustrativních příkladech v [4] byly aplikovány následující mírně odlišné vzorce:

$$\sigma_m = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j>i}^{n} \left(\frac{m_i}{m_j} - \frac{\hat{m}_i}{\hat{m}_j} \right)^2}, \tag{2.61}$$

$$\sigma_l = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j>i}^{n} \left(\frac{l_i}{l_j} - \frac{\hat{l}_i}{\hat{l}_j} \right)^2}. \tag{2.62}$$

První zmíněná vlastnost slouží jako základ definice vektoru normovaných intervalových vah podle Sevastjanova a spol.:

Definice 16. *Řekneme, že vektor intervalových vah* $\langle \underline{v}_i, \overline{v}_i \rangle, i = 1, \ldots, n$ *je normovaný, jestliže*

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \underline{w}_i, \overline{w}_i \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \underline{w}_i, \sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i \rangle = \langle 1-\epsilon, 1+\epsilon \rangle, \epsilon \leq 1 \tag{2.63}$$

a

$$\textit{jestliže } \underline{w}_i \to \overline{w}_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \textit{pak } \epsilon \to 0, \textit{tzn. } \sum_{i=1}^{n} \langle \underline{v}_i, \overline{v}_i \rangle \to 1. \tag{2.64}$$

Poznamenejme, že v kontrastu se dvěma předchozími definicemi normovaných intervalových vah, které se soustředily na způsob vyjádření nejistých normovaných vah pomocí intervalů, tato definice je spíše definicí korektnosti normovací procedury, jelikož podmínka (2.2) je zaměřená na výpočet normovaných intervalových vah z původních nenormovaných.
Pro normování intervalových vah $\langle \underline{w}_i, \overline{w}_i \rangle, i = 1, \ldots, n$ Sevastjanov a spol. navrhují najít intervalový normovací faktor $\langle \underline{x}, \overline{x} \rangle$ takový, že intervalové váhy

$$\langle \underline{v}_i^S, \overline{v}_i^S \rangle = \langle \underline{w}_i, \overline{w}_i \rangle \cdot \langle \underline{x}, \overline{x} \rangle = \langle \underline{w}_i \cdot \underline{x}, \overline{w}_i \cdot \overline{x} \rangle, i = 1, \ldots, n \tag{2.65}$$

splňují podmínky (2.63) a (2.64). Na základě takzvané metody "intervalového rozšíření nuly", která byla vyvinuta k řešení intervalových a fuzzy rovnic, ustanovili následující intervalový normovací faktor:

$$\underline{x} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \underline{w}_j} - \frac{y_{max} + y_{min}}{2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \underline{w}_j},$$

$$\overline{x} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j} + \frac{y_{max} + y_{min}}{2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j}, \text{ kde}$$

$$y_{min} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j - \sum_{j=1}^{n} \underline{w}_j}{\sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j + \sum_{j=1}^{n} \underline{w}_j},$$

$$y_{max} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} \underline{w}_j}{\sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j}.$$

Jak k tomuto faktoru přišli?

Kdybychom hledali normovací faktor v případě ostrých vah $(w_1, \dots, w_n)$, řešili bychom problém

$$a \cdot x = b, \tag{2.66}$$

kde $a = \sum_{i=1}^{n} w_i$ a $b = 1$. Evidentně platí, že $x = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$. Je zřejmé, že pokud takovýmto normovacím faktorem vynásobíme jednotlivé nenormované váhy, získáme váhy normované. V případě intervalových vah samozřejmě a nebude číslo. Rozšiřme tedy všechny členy rovnice (2.66) na intervaly:

$$\langle \underline{a}, \overline{a} \rangle \cdot \langle \underline{x}, \overline{x} \rangle = \langle \underline{b}, \overline{b} \rangle. \tag{2.67}$$

Po převedení všech členů na levou stranu získáme rovnici

$$\langle \underline{a}, \overline{a} \rangle \cdot \langle \underline{x}, \overline{x} \rangle - \langle \underline{b}, \overline{b} \rangle = 0. \tag{2.68}$$

Jelikož ale požadujeme, aby všechny intervaly byly nedegerované, a předpokládáme, že existuje $i \in \{1, \dots, n\} : \underline{w}_i \neq \overline{w}_i$, musíme nutně 0 rozšířit, aby tato rovnice měla řešení. 0 tedy nahradíme intervalem centrovaným okolo 0:

$$\langle \underline{a}, \overline{a} \rangle \cdot \langle \underline{x}, \overline{x} \rangle - \langle \underline{b}, \overline{b} \rangle = \langle -y, y \rangle. \tag{2.69}$$

Na základě intervalové aritmetiky rozložíme rovnici (2.69) na následující dvě rovnice

$$\underline{a} \cdot \underline{x} - \overline{b} = -y \tag{2.70}$$

a

$$\overline{a} \cdot \overline{x} - \underline{b} = y, \tag{2.71}$$

po jejichž sečtení získáme

$$\underline{a} \cdot \underline{x} + \overline{a} \cdot \overline{x} - \overline{b} - \underline{b} = 0. \tag{2.72}$$

Získali jsme tak jednu rovnici pro dvě neznámé. Pokusme se nyní zjistit, jakých hodnot mohou $\underline{x}$ a $\overline{x}$ nabývat. Předpokládejme, že $\underline{x} = \overline{x}$, označme $x := \underline{x} = \overline{x}$ a dosaďme jej do (2.72). Dostaneme tak rovnici

$$(\underline{a} + \overline{a}) \cdot x - \overline{b} - \underline{b} = 0, \tag{2.73}$$

jejímž řešením je

$$x_m = \frac{\underline{b} + \overline{b}}{\underline{a} + \overline{a}}. \tag{2.74}$$

Z rovnice (2.72) zřejmě plyne, že pokud normovací faktor $\underline{x} \leq \overline{x}$, pak také nutně $\underline{x} \leq \frac{\underline{b}+\overline{b}}{\underline{a}+\overline{a}} \leq \overline{x}$. Pokusme se nyní najít nejmenší hodnotu, kterou může $\underline{x}$ nabývat, a největší hodnotu, které může dosáhnout $\overline{x}$. Úpravou rovnice (2.67) získáme tvar

$$\langle \underline{x}, \overline{x} \rangle = \frac{\langle \underline{b}, \overline{b} \rangle}{\langle \underline{a}, \overline{a} \rangle}, \tag{2.75}$$

ze kterého užitím intervalové aritmetiky plyne, že

$$\underline{x} = \frac{\underline{b}}{\overline{a}} \quad \text{a} \quad \overline{x} = \frac{\overline{b}}{\underline{a}}.$$

V tuto chvíli tedy víme, že

$$\underline{x} \in \left\langle \frac{\underline{b}}{\overline{a}}, \frac{\underline{b} + \overline{b}}{\underline{a} + \overline{a}} \right\rangle \quad \text{a} \quad \overline{x} \in \left\langle \frac{\underline{b} + \overline{b}}{\underline{a} + \overline{a}}, \frac{\overline{b}}{\underline{a}} \right\rangle. \tag{2.76}$$

Z rovnice (2.72) navíc plyne, že musí platit následující dva vztahy:

$$\underline{x} = \frac{\underline{b} + \overline{b} - \overline{a} \cdot \overline{x}}{\underline{a}} \tag{2.77}$$

a

$$\overline{x} = \frac{\underline{b} + \overline{b} - \underline{a} \cdot \underline{x}}{\overline{a}}. \tag{2.78}$$

Pokusme se nyní najít hodnoty $\underline{x}$ a $\overline{x}$ takové, aby interval $\langle -y, y\rangle$ v rovnici (2.69) byl co nejširší. Evidentně nejvyšší hodnoty $|y|$ a tudíž i nejširšího intervalu dosáhneme v jednom z následujících případů

- $\underline{x} = \frac{\underline{b}}{\overline{a}}$, kde $\overline{x}$ dopočítáme ze vztahu (2.78)
- $\overline{x} = \frac{\overline{b}}{\underline{a}}$, kde $\underline{x}$ dopočítáme ze vztahu (2.77).

Zaměřme se na první případ - nejprve vypočítáme $\overline{x}$ jako

$$\overline{x} = \frac{\underline{b} + \overline{b} - \underline{a} \cdot \underline{x}}{\overline{a}} = \frac{\underline{b} + \overline{b} - \underline{a} \cdot \frac{\underline{b}}{\overline{a}}}{\overline{a}} = \frac{\underline{b} + \overline{b}}{\overline{a}} - \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\overline{a}^2} \tag{2.79}$$

a následně dosadíme $\langle \underline{x}, \overline{x}\rangle$ do vzorce (2.69):

$$\begin{aligned} \langle \underline{a}, \overline{a}\rangle \cdot \left\langle \frac{\underline{b}}{\overline{a}}, \frac{\underline{b} + \overline{b}}{\overline{a}} - \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\overline{a}^2} \right\rangle - \langle \underline{b}, \overline{b}\rangle &= \left\langle \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\overline{a}}, \underline{b} + \overline{b} - \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\overline{a}} \right\rangle - \langle \underline{b}, \overline{b}\rangle \\ &= \left\langle \frac{\underline{a} \cdot \underline{b} - \overline{a} \cdot \overline{b}}{\overline{a}}, \frac{\overline{a} \cdot \overline{b} - \underline{a} \cdot \underline{b}}{\overline{a}} \right\rangle. \end{aligned} \tag{2.80}$$

Podobně v druhém případě - nejprve vypočítáme $\underline{x}$ jako

$$\underline{x} = \frac{\underline{b} + \overline{b} - \overline{a} \cdot \overline{x}}{\underline{a}} = \frac{\underline{b} + \overline{b} - \overline{a} \cdot \frac{\overline{b}}{\underline{a}}}{\underline{a}} = \frac{\underline{b} + \overline{b}}{\underline{a}} - \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\underline{a}^2} \tag{2.81}$$

a následně dosadíme $\langle \underline{x}, \overline{x}\rangle$ do vzorce (2.69):

$$\begin{aligned} \langle \underline{a}, \overline{a}\rangle \cdot \left\langle \frac{\underline{b} + \overline{b}}{\underline{a}} - \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\underline{a}^2}, \frac{\overline{b}}{\underline{a}} \right\rangle - \langle \underline{b}, \overline{b}\rangle &= \left\langle \underline{b} + \overline{b} - \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\underline{a}}, \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\underline{a}} \right\rangle - \langle \underline{b}, \overline{b}\rangle \\ &= \left\langle \frac{\underline{a} \cdot \underline{b} - \overline{a} \cdot \overline{b}}{\underline{a}}, \frac{\overline{a} \cdot \overline{b} - \underline{a} \cdot \underline{b}}{\underline{a}} \right\rangle. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Je zřejmé, že

$$\frac{\overline{a} \cdot \overline{b} - \underline{a} \cdot \underline{b}}{\overline{a}} < \frac{\overline{a} \cdot \overline{b} - \underline{a} \cdot \underline{b}}{\underline{a}}$$

a tedy

$$\langle \underline{x}, \overline{x}\rangle = \left\langle \frac{\underline{b} + \overline{b}}{\underline{a}} - \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\underline{a}^2}, \frac{\overline{b}}{\underline{a}} \right\rangle \tag{2.83}$$

Označme si nyní tyto hodnoty pro zachování stejného značení jako užívají autoři článku

$$\underline{x}_{max} = \frac{\underline{b} + \overline{b}}{\underline{a}} - \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\underline{a}^2}$$

a

$$\overline{x}_{min} = \frac{\overline{b}}{\underline{a}}.$$

Nicméně Sevastjanov a spol. ve svém textu uvádějí, že

$$\langle \underline{x}, \overline{x} \rangle = \left\langle \frac{\underline{b}}{\overline{a}}, \frac{\underline{b} + \overline{b}}{\overline{a}} - \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\overline{a}^2} \right\rangle, \tag{2.84}$$

přestože tvrdí, že tyto hodnoty tvoří nejširší intervalovou nulu po dosazení do (2.69).

Jelikož ale autoři dále v textu občas vycházejí z prvního řešení, občas z druhého, budeme raději pracovat s oběma hodnotami.

Sevastjanov a spol. dále uvádějí, že při dosazení největší hodnoty $\overline{x}$, respektive nejmenší hodnoty $\underline{x}$ do (2.69) získají největší šířku intervalu $\langle -y, y \rangle$. To je pravda, nicméně uvedená hodnota

$$y_{max} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\underline{a}} - \underline{b} \tag{2.85}$$

odpovídá hodnotám (2.83), nikoli (2.84). To je ostatně zřejmé z (2.82) a (2.80).

Pokud bychom dopočítali hodnotu y_{max} odpovídající hodnotám (2.84), získali bychom

$$y_{max} = \overline{b} - \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\overline{a}}. \tag{2.86}$$

Zřejmě platí, že nejmenší šířky intervalu $\langle -y, y \rangle$ dosáhneme v případě, kdy za $\underline{x}$, respektive $\overline{x}$ zvolíme hodnotu $\underline{x} = \overline{x} = \frac{\underline{b}+\overline{b}}{\underline{b}+\overline{b}}$. Po dosazení do (2.69) získáme hodnotu

$$y = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b} - \underline{a} \cdot \underline{b}}{\underline{a} + \overline{a}}. \tag{2.87}$$

Tuto hodnotu autoři dále značí jako y_{min}.

Je zřejmé, že pro všechna $\underline{x}^{''}, \underline{x}^{'}$ taková, že x_m(2.74) $> \underline{x}^{''} > \underline{x}^{'} > \underline{x}_{max}$, existují i příslušná $\overline{x}^{''}, \overline{x}^{'}, x_m < \overline{x}^{''} < \overline{x}^{'} < \overline{x}_{min}$ taková, že pro příslušná $y^{''}, y^{'}$ platí

$$y_{min} < y^{''} < y^{'} < y_{max}.$$

Navíc jsou tato y evidentně lineárně závislá na $\underline{x}$, respektive $\overline{x}$. Jelikož tedy pro x_m je $y = y_{min}$ a pro $\underline{x}_{max}$, respektive $\overline{x}_{min}$ je $y = y_{max}$, lze hodnotu y považovat za jakési vyjádření neurčitosti rovnice (2.69). Pokud chceme intervalový faktor x reprezentovat jako trojúhelníkové fuzzy číslo, kde

$$x(0) = \langle \underline{x}_{max}, \overline{x}_{min} \rangle \quad \text{a} \quad x(1) = \frac{\underline{b} + \overline{b}}{\underline{a} + \overline{a}}, \tag{2.88}$$

lze parametr α označující α-řezy vyjádřit jako

$$\alpha = 1 - \frac{y - y_{min}}{y_{max} - y_{min}}. \tag{2.89}$$

V případě, že bychom chtěli počítat pouze s intervalovými vahami, hodí se trojúhelníkové fuzzy číslo defuzzifikovat. Sevastjanov a spol. používají jako defuzzifikační metodu metodu středního intervalu:

Definice 17. Nechť je dáno fuzzy číslo $A = \{\langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha) \rangle \mid \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$. Potom střední interval fuzzy čísla A je interval $E(A) = \langle \underline{E}(A), \overline{E}(A) \rangle$, kde

$$\underline{E}(A) = \int_0^1 \underline{a}(\alpha)\, d\alpha \quad \text{a} \quad \overline{E}(A) = \int_0^1 \overline{a}(\alpha), d\alpha. \tag{2.90}$$

Vyjádříme-li z (2.89) y, dostaneme

$$y = y_{max} \cdot (1 - \alpha) + \alpha \cdot y_{min}. \tag{2.91}$$

Dosadíme-li poté do výrazů (2.70) a (2.71), dostaneme po úpravě

$$\underline{x}(\alpha) = \frac{\overline{b}}{\underline{a}} - \frac{y_{max} \cdot (1-\alpha) + \alpha \cdot y_{min}}{\underline{a}} \text{ a } \overline{x}(\alpha) = \frac{\underline{b}}{\overline{a}} + \frac{y_{max} \cdot (1-\alpha) + \alpha \cdot y_{min}}{\overline{a}}. \tag{2.92}$$

Defuzzifikujme nyní fuzzy číslo x:

$$\begin{aligned} \underline{x}_{def} &= \int_0^1 \frac{\overline{b}}{\underline{a}} - \frac{y_{max} \cdot (1-\alpha) + \alpha \cdot y_{min}}{\underline{a}} d\alpha \\ &= \left[\frac{\overline{b}}{\underline{a}} \cdot \alpha - \frac{y_{max} \cdot (2 \cdot \alpha - \alpha^2) + \alpha^2 \cdot y_{min}}{2 \cdot \underline{a}} \right]_0^1 = \frac{\overline{b}}{\underline{a}} - \frac{y_{max} + y_{min}}{2 \cdot \underline{a}} \end{aligned} \tag{2.93}$$

$$\begin{aligned} \overline{x}_{def} &= \int_0^1 \frac{\underline{b}}{\overline{a}} + \frac{y_{max} \cdot (1-\alpha) + \alpha \cdot y_{min}}{\overline{a}} d\alpha \\ &= \left[\frac{\underline{b}}{\overline{a}} \cdot \alpha + \frac{y_{max} \cdot (2 \cdot \alpha - \alpha^2) + \alpha^2 \cdot y_{min}}{2 \cdot \overline{a}} \right]_0^1 = \frac{\underline{b}}{\overline{a}} + \frac{y_{max} + y_{min}}{2 \cdot \overline{a}}. \end{aligned} \tag{2.94}$$

Ukázali jsme si tedy, jak nalézt normovací faktor pro obecný případ (2.69). Nyní si toto obecné řešení zkonkretizujeme pro případ normování intervalových vah. Za předpokladu, že máme vektor intervalových vah $(W_1, \ldots, W_n), W_i = \langle \underline{w}_i, \overline{w}_i \rangle, i \in 1, \ldots, n$, dosadíme do vztahu (2.69) za $\langle \underline{a}, \overline{a} \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \underline{w}_i, \sum_{i=1}^n \overline{w}_i \rangle$ a za $\langle \underline{b}, \overline{b} \rangle$ číslo 1. Dosadíme-li do vztahů (2.94) a (2.93), získáme

$$\langle \underline{x}_{def}, \overline{x}_{def} \rangle = \left\langle \frac{1}{\sum_{i=1}^n \underline{w}_i} - \frac{y_{max} + y_{min}}{2 \cdot \sum_{i=1}^n \underline{w}_i}, \frac{1}{\sum_{i=1}^n \overline{w}_i} + \frac{y_{max} + y_{min}}{2 \cdot \sum_{i=1}^n \overline{w}_i} \right\rangle. \tag{2.95}$$

Normované intervalové váhy poté spočítáme jako

$$\langle \underline{v}_i^S, \overline{v}_i^S \rangle = \langle \underline{x}_{def}, \overline{x}_{def} \rangle \cdot \langle \underline{w}_i, \overline{w}_i \rangle, i = 1, \ldots, n. \tag{2.96}$$

Příklad 9. *Znormujme s využitím normovacího faktoru (2.95) následující trojici intervalových vah:* $W_1 = \langle 0{,}4; 0{,}6 \rangle, W_2 = \langle 0{,}3; 0{,}6 \rangle, W_3 = \langle 0{,}2; 0{,}8 \rangle$.

Příklad rozdělíme na dvě části - jednak část, kde y_{max} počítáme pomocí vztahu (2.85), druhak část, kde y_{max} počítáme pomocí vztahu (2.86).

- $y_{max} = \frac{\sum_{i=1}^n \overline{w}_i}{\sum_{i=1}^n \underline{w}_i} - 1$

Nejprve vypočítáme hodnoty y_{max} a y_{min}, které dosadíme do vztahu (2.95).

$$y_{max} = \frac{2}{0{,}9} - 1 = 1{,}2222, \quad y_{min} = \frac{2 - 0{,}9}{2 + 0{,}9} = 0{,}3793,$$

$$\underline{x}_{def} = \frac{1}{0{,}9} - \frac{1{,}2222 + 0{,}3793}{2 \cdot 0{,}9} = 0{,}2214,$$

$$\overline{x}_{def} = \frac{1}{2} + \frac{1{,}2222 + 0{,}3793}{2 \cdot 2} = 0{,}9004.$$

Nyní intervalovým normovacím faktorem $\langle \underline{x}_{def}, \overline{x}_{def} \rangle$ vynásobíme jednotlivé intervalové váhy:

$$\langle \underline{v}_1, \overline{v}_1 \rangle = \langle \underline{w}_1, \overline{w}_1 \rangle \cdot \langle \underline{x}_{def}, \overline{x}_{def} \rangle = \langle 0{,}4; 0{,}6 \rangle \cdot \langle 0{,}2214; 0{,}9004 \rangle = \langle 0{,}0886; 0{,}5402 \rangle.$$

Obdobným způsobem získáme $V_2 = \langle 0{,}0664; 0{,}5402 \rangle$ a $V_3 = \langle 0{,}0443; 0{,}7203 \rangle$. Zároveň platí, že $\langle \sum_{i=1}^{3} \underline{v}_i, \sum_{i=1}^{3} \overline{v}_i \rangle = \langle 0{,}1993; 1{,}8007 \rangle$, což je interval se středem v 1.

- $y_{max} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{w}_i}{\sum_{i=1}^{n} \overline{w}_1}$

Nejprve vypočítáme hodnoty y_{max} a y_{min}, které dosadíme do vztahu (2.95).

$$y_{max} = 1 - \frac{0{,}9}{2} = 0{,}55, \quad y_{min} = \frac{2 - 0{,}9}{2 + 0{,}9} = 0{,}3793,$$

$$\underline{x}_{def} = \frac{1}{0{,}9} - \frac{0{,}55 + 0{,}3793}{2 \cdot 0{,}9} = 0{,}5948, \tag{2.97}$$

$$\overline{x}_{def} = \frac{1}{2} + \frac{0{,}55 + 0{,}3793}{2 \cdot 2} = 0{,}7323. \tag{2.98}$$

Nyní intervalovým normovacím faktorem $\langle \underline{x}_{def}, \overline{x}_{def} \rangle$ vynásobíme jednotlivé intervalové váhy:

$$\langle \underline{v}_1, \overline{v}_1 \rangle = \langle \underline{w}_1, \overline{w}_1 \rangle \cdot \langle \underline{x}_{def}, \overline{x}_{def} \rangle = \langle 0{,}4; 0{,}6 \rangle \cdot \langle 0{,}5948; 0{,}7323 \rangle = \langle 0{,}2379; 0{,}4394 \rangle.$$

Obdobným způsobem získáme $V_2 = \langle 0{,}1784; 0{,}4394 \rangle$ a $V_3 = \langle 0{,}1190; 0{,}5858 \rangle$. Zároveň platí, že $\langle \sum_{i=1}^{3} \underline{v}_i, \sum_{i=1}^{3} \overline{v}_i \rangle = \langle 0{,}5353; 1{,}4646 \rangle$, což je interval se středem v 1 (pokud bychom nezaokrouhlovali na 4 desetinná místa).

Podívejme se ještě na jeden příklad, který nám osvětlí, proč je vhodnější pracovat s (2.84), i když nesplňuje podmínku nejširší intervalové nuly (respektive proč nelze užít (2.83)):

Příklad 10. *Znormujme trojici intervalových vah* $W_1 = \langle 1, 5\rangle, W_2 = \langle 2, 5\rangle, W_3 = \langle 2, 10\rangle$.
Spočítejme nejprve y_{max}, y_{min}.

$$y_{max} = \frac{20}{5} - 1 = 3, \quad y_{min} = \frac{20-5}{20+5} = 0{,}6,$$

$$\underline{x}_{def} = \frac{1}{5} - \frac{3+0{,}6}{2 \cdot 5} = -1{,}6.$$

Odsud je již zřejmé, že tento způsob užít nemůžeme, neboť bychom po vynásobení nenormovaných intervalových vah intervalem $\langle \underline{x}_{def}, \overline{x}_{def}\rangle$ získali intervaly $\langle \underline{v}_i, \overline{v}_i\rangle, \forall i = 1, \ldots, n$, kde $\underline{v}_i < 0$ pro každé $i = 1, \ldots, n$.

Podívejme se nyní na případ s fuzzy vahami. Nejprve si ukážeme, proč nemůžeme pro fuzzy váhy použít defuzzifikovaný normovací faktor a následně odvodíme normovací faktor pro fuzzy váhy.

Defuzzifikovaný normovací faktor $\langle \underline{x}_{def}, \overline{x}_{def}\rangle$ bychom mohli použít k normování fuzzy vah dvěma způsoby - první možností je spočítat defuzzifikovaný normovací faktor pro uzávěry nosičů nenormovaných fuzzy vah a následně jím násobit nenormované fuzzy váhy, druhou možností pak je spočítat defuzzifikovaný normovací faktor jak pro uzávěry nosičů nenormovaných fuzzy vah, tak i pro každý α-řez.

Nejprve se podíváme na případ, kdy spočítáme defuzzifikovaný normovací faktor pro uzávěry nosičů nenormovaných fuzzy vah a následně jej použijeme i na všechny α-řezy.

Příklad 11. Mějme nenormované fuzzy váhy dané trojúhelníkovými fuzzy čísly $W_1 = [0{,}4; 0{,}5; 0{,}6], W_2 = [0{,}3; 0{,}5; 0{,}6], W_3 = [0{,}2; 0{,}5; 0{,}8]$. Uzávěry jejich nosičů označme $W_1(0) = \langle 0{,}4; 0{,}6\rangle, W_2(0) = \langle 0{,}3; 0{,}6\rangle, W_3(0) = \langle 0{,}2; 0{,}8\rangle$. Uzávěry nosičů tvoří intervaly a proto s nimi můžeme nakládat jako s intervalovými vahami.

Pro tyto intervalové váhy jsme ale defuzzifikovaný normovací faktor spočítali v (2.97) a (2.98). Máme tedy

$$\langle \underline{x}_{def}, \overline{x}_{def} \rangle = \langle 0{,}5948; 0{,}7323 \rangle.$$

Očividně, pokud bychom tímto normovacím faktorem vynásobili jednotlivé α-řezy, tak bychom pro $\alpha = 1$ dostali také intervaly, což by mělo za následek, že by normované fuzzy váhy byly narozdíl od nenormovaných fuzzy vah, které jsou ve tvaru trojúhelníkových fuzzy čísel, ve tvaru lichoběžníkových fuzzy čísel.

Druhou možností je počítat defuzzikovaný normovací faktor jak pro uzávěry nosičů, tak i pro každý α-řez. V takovém případě bychom normované fuzzy váhy počítali následujícím způsobem:

$$\langle \underline{v}_i(\alpha), \overline{v}_i(\alpha) \rangle = \langle \underline{w}_i(\alpha), \overline{w}_i(\alpha) \rangle \cdot \langle \underline{x}_{def_\alpha}, \overline{x}_{def_\alpha} \rangle, \tag{2.99}$$

kde $\langle \underline{x}_{def_\alpha}, \overline{x}_{def_\alpha} \rangle, \alpha \in (0,1\rangle$ bychom spočítali jako defuzzifikovaný normovací faktor pro vektor intervalových vah $(\langle \underline{w}_1(\alpha), \overline{w}_1(\alpha) \rangle, \ldots, \langle \underline{w}_n(\alpha), \overline{w}_n(\alpha) \rangle), \alpha \in (0,1\rangle$. Pro uzávěry nosičů bychom defuzzifikovaný normovací faktor spočítali stejně jako v předchozích případech. Ukažme si nyní na příkladě, proč tento postup není možný:

Příklad 12. *Znormujme nenormované fuzzy váhy dané trojúhelníkovými fuzzy čísly* $W_1 = [1; 1{,}2; 20], W_2 = [1; 19{,}8; 20]$.

Nejprve znormujeme uzávěry nosičů jednotlivých vah. To provedeme tak, že znormujeme intervalové váhy $W_1(0) = \langle 1, 20 \rangle, W_2(0) = \langle 1, 20 \rangle$. Tyto intervalové váhy se znormují na normované intervalové váhy $V_1(0) = \langle 0{,}0363; 0{,}9637 \rangle, V_2(0) = \langle 0{,}0363; 0{,}9637 \rangle$. Zkusme nyní znormovat α-řezy jednotlivých vah pro $\alpha = 0{,}1$: takovéto α-řezy mají tvar $W_1(0{,}1) = \langle 1{,}02; 18{,}12 \rangle, W_2(0{,}1) = \langle 2{,}88; 19{,}98 \rangle$. Pokud bychom tyto nenormované intervalové váhy znormovali, získali bychom normované intervalové váhy $V_1(0,1) = \langle 0{,}0377; 0{,}8827 \rangle, V_2(0{,}1) = \langle 0{,}1064; 0{,}9733 \rangle$. Z toho ale plyne, že $V_2(0{,}1) \nsubseteq V_2(0)$, což je spor s vlastností fuzzy množin.

Proto Sevastjanov a spol. pracují s fuzzy vahami odlišně. Pokud vyjdeme z (2.83) a pak trojúhelníkové fuzzy číslo (2.88) můžeme vyjádřit jako

$$\tilde{x} = \left[\frac{\underline{b}+\overline{b}}{\underline{a}} - \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\underline{a}^2};\ \frac{\underline{b}+\overline{b}}{\underline{a}+\overline{a}};\ \frac{\overline{b}}{\underline{a}}\right] \tag{2.100}$$

Pokud nyní opět za $\underline{a}$, $\overline{a}$, $\underline{b}$ a $\overline{b}$ dosadíme, získáme tvar

$$\tilde{x} = \left[\frac{2}{\sum_{i=1}^{n}\underline{w}_i} - \frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}\underline{w}_i\right)^2};\ \frac{2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{w}_i+\overline{w}_i\right)};\ \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\underline{w}_i}\right]. \tag{2.101}$$

Sevastjanov a spol. navíc pro každý α-řez počítají trojúhelníkové fuzzy číslo $\tilde{x}$ zvlášť. Označme tedy takové trojúhelníkové fuzzy číslo ${}_{\alpha}\tilde{x}$ (poznámka: Sevastjanov a spol. ho značí v [4] $\tilde{x}_{\alpha}$, což ovšem způsobuje problémy ve značení, neboť tento symbol používají pro dvě naprosto odlišné věci):

$${}_{\alpha}\tilde{x} = \left[\frac{2}{\sum_{i=1}^{n}\underline{w}_{i_\alpha}} - \frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_{i_\alpha}}{\left(\sum_{i=1}^{n}\underline{w}_{i_\alpha}\right)^2};\ \frac{2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{w}_{i_\alpha}+\overline{w}_{i_\alpha}\right)};\ \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\underline{w}_{i_\alpha}}\right]. \tag{2.102}$$

Pokud bychom vycházeli z (2.84), normovací faktor $\tilde{x}$ by měl tvar

$$\tilde{x} = \left[\frac{\underline{b}}{\overline{a}};\ \frac{\underline{b}+\overline{b}}{\underline{a}+\overline{a}};\ \frac{\underline{b}+\overline{b}}{\overline{a}} - \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{\overline{a}^2}\right]. \tag{2.103}$$

Pokud nyní opět za $\underline{a}$, $\overline{a}$, $\underline{b}$ a $\overline{b}$ dosadíme, získáme tvar

$$\tilde{x} = \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i};\ \frac{2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{w}_i+\overline{w}_i\right)};\ \frac{2}{\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i} - \frac{\sum_{i=1}^{n}\underline{w}_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i\right)^2}\right] \tag{2.104}$$

a pro každý α-řez poté

$${}_{\alpha}\tilde{x} = \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_{i_\alpha}};\ \frac{2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{w}_{i_\alpha}+\overline{w}_{i_\alpha}\right)};\ \frac{2}{\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i i_\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^{n}\underline{w}_{i_\alpha}}{\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_{i_\alpha}\right)^2}\right] \tag{2.105}$$

Výsledný normovací faktor poté získají sjednocením trojúhelníkových fuzzy čísel ${}_{\alpha}\tilde{x}$ přes všechna α:

$$\tilde{x} = \bigcup_{\alpha} {}_{\alpha}\tilde{x}. \tag{2.106}$$

Konečně, normované fuzzy váhy získáme tak, že původní fuzzy váhy vynásobíme právě normovacím faktorem $\tilde{x}$. Autoři toto vyjadřují následovně:

$$\tilde{w}_i = \bigcup_{\alpha} w_{i_\alpha} \cdot \tilde{x}_\alpha, \tag{2.107}$$

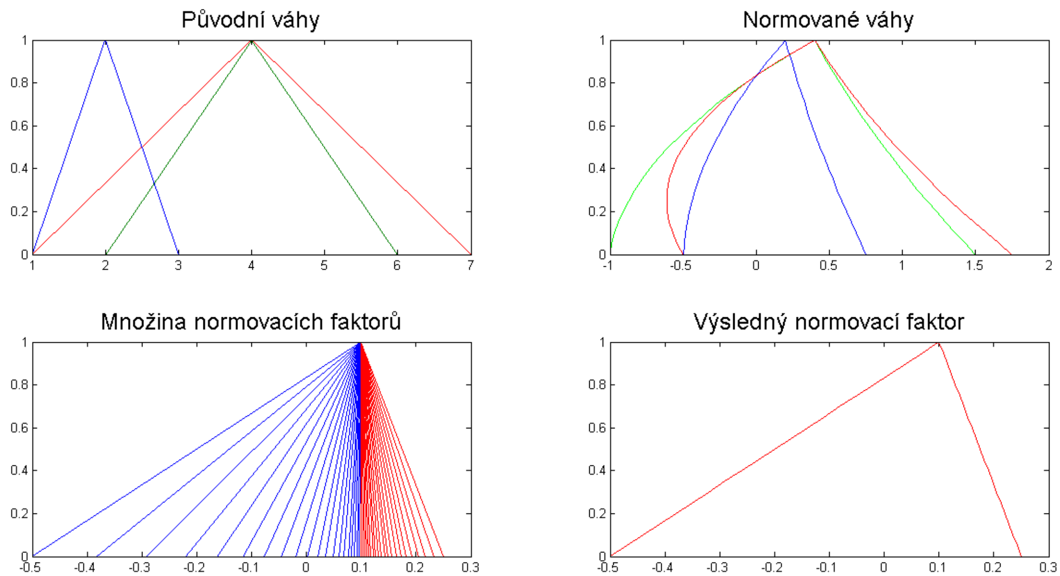
kde $\tilde{w}_i$ značí normované fuzzy váhy a $\tilde{x}_\alpha$ tentokrát vyjadřuje α-řez normovacího faktoru $\tilde{x}$.

Pro větší přehlednost normované fuzzy váhy raději vyjádříme takto:

$$\langle \underline{v}_i(\alpha), \overline{v}_i(\alpha) \rangle = \langle \underline{w}_i(\alpha) \cdot \underline{\tilde{x}}(\alpha), \overline{w}_i(\alpha) \cdot \overline{\tilde{x}}(\alpha) \rangle. \tag{2.108}$$

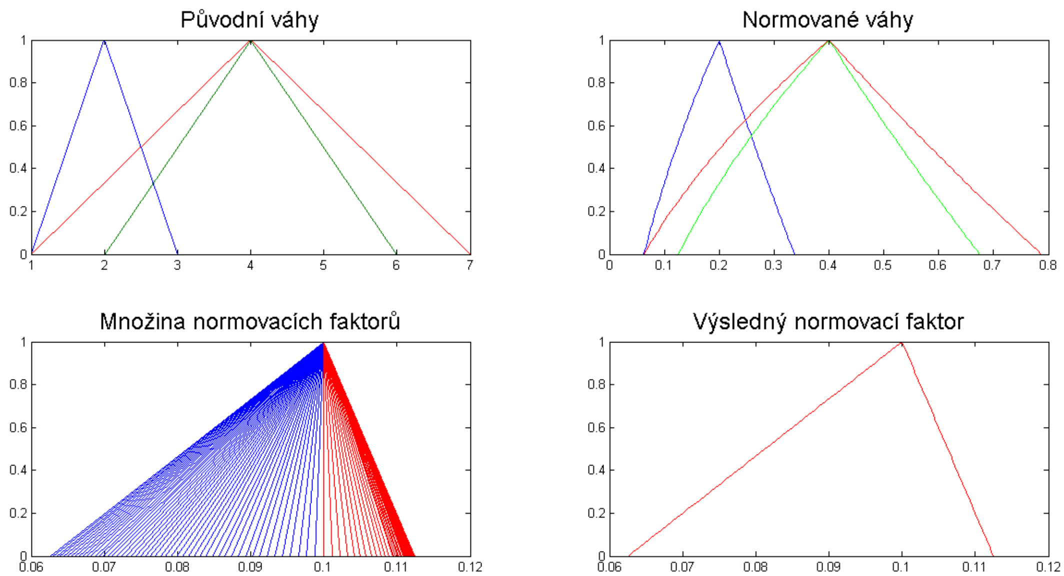
Sevastjanov a spol. na následujícím příkladě porovnávají svůj přístup s přístupem Wanga a Elhaga. My se nejprve zaměříme pouze na jejich přístup, kde si mimojiné ukážeme, proč bychom nemohli vycházet z (2.83):

Příklad 13. *Znormujme fuzzy váhy reprezentované trojúhelníkovými fuzzy čísly* $W_1 = [1, 2, 3], W_2 = [2, 4, 6], W_3 = [1, 4, 7]$.
Nejprve vyjděme z (2.83). V takovém případě ale ${}_{\alpha}\tilde{x}$ má tvar (2.102). Následující čtveřice grafů ukazuje, jak by v takovém případě vypadal výsledný normovací faktor $\tilde{x}$ a jaký vliv by to mělo na normované váhy:



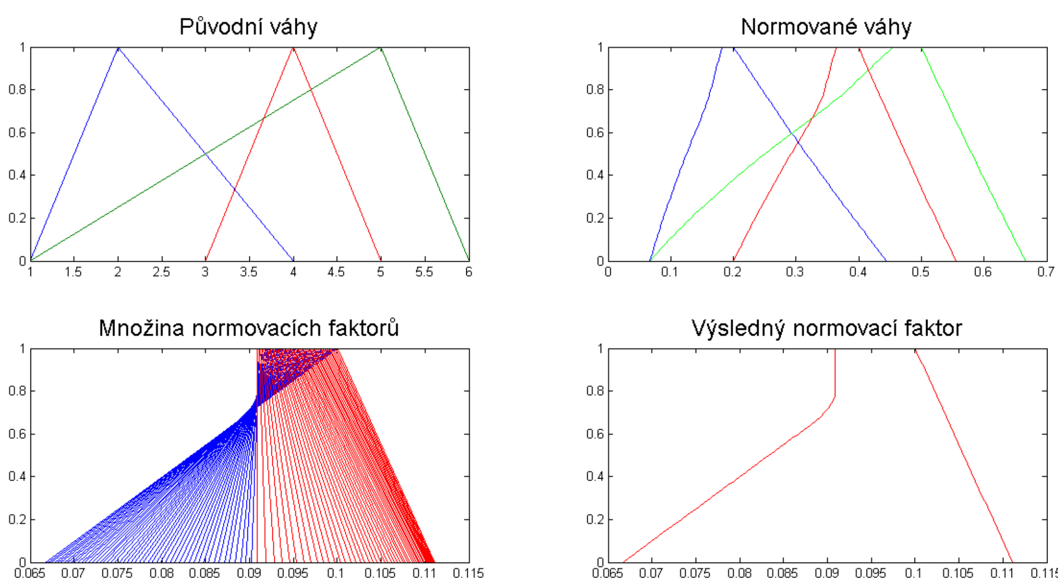
Je zřejmé, že výsledný normovací faktor je ve tvaru trojúhelníkového fuzzy čísla. Problém však je, že značná část uzávěru nosiče tohoto fuzzy čísla leží na záporné části univerza. To ostatně plyne už z tvaru (2.102), kde $\frac{2}{\sum_{i=1}^{n} \underline{w}_{i_\alpha}} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{w}_{i_\alpha}}{\left(\sum_{i=1}^{n} \underline{w}_{i_\alpha}\right)^2} < 0$ platí právě tehdy, když $2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \underline{w}_{i_\alpha} < \sum_{i=1}^{n} \overline{w}_{i_\alpha}$. To je případ i našeho příkladu.

Podívejme se nyní na tento příklad znovu, tentokrát ale vyjdeme z (2.84). V takovém případě má ${}_\alpha\tilde{x}$ tvar (2.105). Následující čtveřice grafů opět ukazuje, jak by v takovém případě vypadal výsledný normovací faktor $\tilde{x}$ a jaký vliv by měl na normované váhy:



Příklad 14. *Znormujme fuzzy váhy vyjádřené trojúhelníkovými fuzzy čísly* $W_1 = [1,2,4]\,, W_2 = [1,5,6]\,, W_3 = [3,4,5]$

Jak jsme si ukázali u předchozího příkladu, při výpočtu ${}_\alpha\tilde{x}$ využijeme vztah (2.105). Výsledný normovací faktor i normované váhy můžeme vidět na následujících grafech:



Je zřejmé, že výsledný normovací faktor není (narozdíl od předchozího příkladu) trojúhelníkovým fuzzy číslem. To je dáno tím, že zadané váhy nejsou symetrickými fuzzy čísly, a proto výraz

$$\frac{2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{w}_{i_\alpha}+\overline{w}_{i_\alpha}\right)} \tag{2.109}$$

z (2.105) obecně nenabývá pro všechna α stejných hodnot.

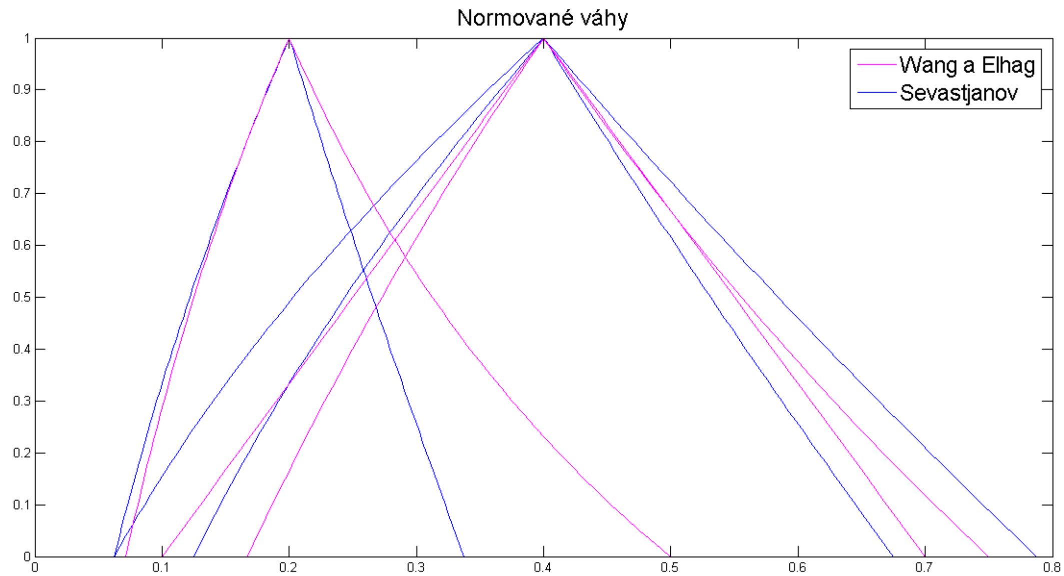
Z toho ovšem plyne, že pokud byly původní fuzzy váhy reprezentovány trojúhelníkovými fuzzy čísly, příslušné normované fuzzy váhy již tuto vlastnost mít nebudou.

Vraťme se zpět k porovnání metod, které navrhují Sevastjanov a spol., respektive Wang a Elhag.

Příklad 15. *Znormujme fuzzy váhy reprezentované trojúhelníkovými fuzzy čísly* $W_1 = [1,2,3], W_2 = [2,4,6], W_3 = [1,4,7]$, *respektive* $W_1 = [1,2,4], W_2 = [1,5,6], W_3 = [3,4,5]$.

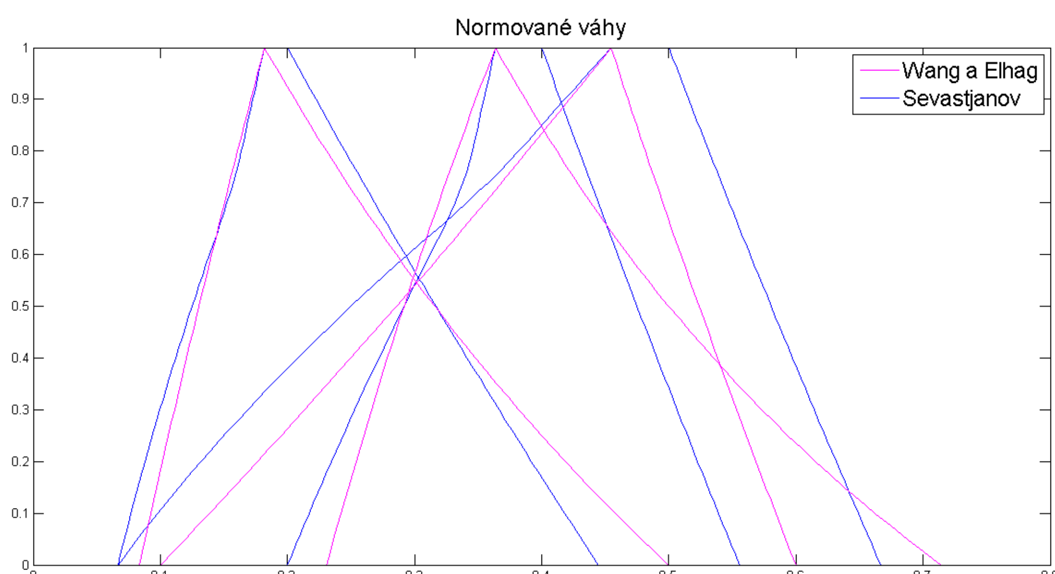
- $W_1 = [1,2,3], W_2 = [2,4,6], W_3 = [1,4,7]$

Tyto váhy uvádějí Sevastjanov a spol. ve svém textu jako příklad, proč je jejich přístup intuitivně lepší než metoda navrhovaná Wangem a Elhagem. Jak vidíme z následujícího grafického srovnání,



normované váhy získané metodou navrhnutou Sevastjanovem a spol. jsou původním vahám opravdu podobnější než ty, které jsou získané metodou navrhnutou Wangem a Leem, a tedy z pohledu Sevastjanova a spol. jsou i "lepší", neboť jsou i jejich míry σ_m a σ_l lepší. To ale může být dáno specifickým výběrem nenormovaných vah, jak ostatně uvidíme na druhé trojici:

- $W_1 = [1, 2, 4]\,, W_2 = [1, 5, 6]\,, W_3 = [3, 4, 5]$



Zatímco váhy, které jsme získali normovací metodou Wanga a Elhaga, si zachovávají přibližně trojúhelníkovou strukturu, v případě vah získaných normovací metodou navrženou Sevastjanovem a spol. o tom nemůže být ani řeč.

Vraťme se nyní zpět k normování intervalových vah. Užijeme-li normovací faktor $\langle \underline{x}_{def}, \overline{x}_{def} \rangle$ daný (2.95), kde y_{min} a y_{max} jsou dány (2.87), respektive (2.86), pak lze dokázat následující tvrzení:

Věta 6.

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \underline{v}_i^S, \overline{v}_i^S \rangle = \langle 1 - \epsilon^S, 1 + \epsilon^S \rangle, \; kde \; \epsilon^S = \frac{y_{min} + y_{max}}{2} \tag{2.110}$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \langle \underline{v}_i^S, \overline{v}_i^S \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \underline{w}_i \cdot \underline{x}_{def}, \overline{w}_i \cdot \overline{x}_{def} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \underline{w}_i \cdot \underline{x}_{def}, \sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i \cdot \overline{x}_{def} \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \underline{w}_i \cdot \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \underline{w}_i} - \frac{y_{max} + y_{min}}{2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \underline{w}_i} \right), \sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i \cdot \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i} + \frac{y_{max} + y_{min}}{2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i} \right) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{w}_i}{\sum_{i=1}^{n} \underline{w}_i} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{w}_i \cdot (y_{max} + y_{min})}{2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \underline{w}_i}, \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i}{\sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i \cdot (y_{max} + y_{min})}{2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i} \right\rangle \\
&= \left\langle 1 - \frac{y_{max} + y_{min}}{2}, 1 + \frac{y_{max} + y_{min}}{2} \right\rangle
\end{aligned} \tag{2.111}$$

□

Pavlačka v [5] nicméně ukazuje, že ještě lepšího výsledku dosahuje metoda navržená Jimenézem a spol., neboť platí že

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \underline{v}_i^J, \overline{v}_i^J \rangle = \langle \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{w}_i}{\sum_{j=1}^{n} \left(\underline{w}_j + \overline{w}_j \right) / 2}, \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i}{\sum_{j=1}^{n} \left(\underline{w}_j + \overline{w}_j \right) / 2} \rangle = \langle 1 - \epsilon^J, 1 + \epsilon^J \rangle, \tag{2.112}$$

kde

$$\epsilon^J = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i - \sum_{i=1}^{n} \underline{w}_i}{\sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i + \sum_{i=1}^{n} \underline{w}_i} = y_{min}. \tag{2.113}$$

Z (2.113) lze snadno vidět, že když se $\underline{w}_i$ limitně blíží $\overline{w}_i$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$, pak jde ϵ^J k 0. Z tohoto důvodu normovací procedura počítaná pomocí (2.17) a (2.18) splňuje podmínky (2.63) a (2.64). Navíc, jelikož $y_{min} \leq y_{max}$, plyne z (2.110), že $\epsilon^J \leq \epsilon^S$, tedy $\sum_{j=1}^{n} \langle \underline{v}_j^J, \overline{v}_j^J \rangle$ není nikdy širší než $\sum_{j=1}^{n} \langle \underline{v}_j^S, \overline{v}_j^S \rangle$. Dále nechť jsou $\hat{m_i}^J$ a $\hat{l_i}^J$ průměry a délky $\langle \underline{v}_i^J, \overline{v}_i^J \rangle, i = 1, \ldots, n$. Pak pro každé i z množiny $\{1, \ldots, n\}$ plynou z (2.19) a (2.20) následující rovnice:

$$\frac{\hat{m_i}^J}{\hat{m_j}^J} = \frac{\frac{\underline{w}_i + \overline{w}_i}{\sum_{k=1}^{n} (\underline{w}_k + \overline{w}_k)/2} / 2}{\frac{\underline{w}_j + \overline{w}_j}{\sum_{k=1}^{n} (\underline{w}_k + \overline{w}_k)/2} / 2} = \frac{(\underline{w}_i + \overline{w}_i)/2}{(\underline{w}_j + \overline{w}_j)/2} = \frac{m_i}{m_j}$$

a

$$\frac{\hat{l_i}^J}{\hat{l_j}^J} = \frac{\frac{\overline{w}_i - \underline{w}_i}{\sum_{k=1}^{n} (\underline{w}_k + \overline{w}_k)/2} / 2}{\frac{\overline{w}_j - \underline{w}_j}{\sum_{k=1}^{n} (\underline{w}_k + \overline{w}_k)/2} / 2} = \frac{(\overline{w}_i - \underline{w}_i)/2}{(\overline{w}_j - \underline{w}_j)/2} = \frac{l_i}{l_j}.$$

Tedy agregované míry přesnosti σ_m a σ_l počítané pomocí (2.59) a (2.60) jsou v případě $\langle \underline{v}_i^J \overline{v}_i^J \rangle, i = 1, \ldots, n$ vždy rovny 0. Jak Pavlačka konstatuje v [5], plyne z toho, že z pohledu žádoucích vlastností normování intervalových vah navrhovaných Sevastjanovem a spol. můžeme říct, že intervalový normovací faktor $\langle x, x \rangle$, kde $x = \left[\sum_{i=1}^{n} (\underline{w}_i + \overline{w}_i)/2\right]^{-1}$ poskytuje podstatně lepší výsledky než normovací faktor daný (2.95). Problém je v [5] ilustrován na následujícím příkladě:

Příklad 16. *Opět uvažujme tři počáteční intervalové váhy* $W_1 = \langle 0{,}4; 0{,}6 \rangle, W_2 = \langle 0{,}3; 0{,}6 \rangle, W_3 = \langle 0{,}2; 0{,}8 \rangle$. *Porovnejme nyní výsledky dosažené normovacími metodami navrhovanými Sevastjanovem a spol. a Jimenézem a spol.*

Podle (2.65) $\langle \underline{v}_1^S, \overline{v}_1^S \rangle = \langle 0{,}238; 0{,}439 \rangle, \langle \underline{v}_2^S, \overline{v}_2^S \rangle = \langle 0{,}178; 0{,}439 \rangle, \langle \underline{v}_3^S, \overline{v}_3^S \rangle = \langle 0{,}119; 0{,}586 \rangle$. Z (2.17) a (2.18) získáme $\langle \underline{v}_1^J, \overline{v}_1^J \rangle = \langle 0{,}276; 0{,}414 \rangle, \langle \underline{v}_2^J, \overline{v}_2^J \rangle = \langle 0{,}207; 0{,}414 \rangle, \langle \underline{v}_3^J, \overline{v}_3^J \rangle = \langle 0{,}138; 0{,}552 \rangle$. Nejprve porovnejme součty dosažených normovaných intervalových vah: $\sum_{i=1}^{3} \langle \underline{v}_i^S, \overline{v}_i^S \rangle = \langle 0{,}535; 1{,}465 \rangle$ a $\sum_{i=1}^{3} \langle \underline{v}_i^J, \overline{v}_i^J \rangle = \langle 0{,}621; 1{,}379 \rangle$. Můžeme tedy vidět, že oba součty jsou centrovány okolo 1, ale ten druhý je užší, $\epsilon^S = 0{,}465, \epsilon^J = 0{,}379$. Co se dalších dvou vlastností týče, hodnoty agregovaných měr přesnosti jsou v prvním případě následující: $\sigma_m = 0{,}012, \sigma_l = 0{,}127$, zatímco v druhém případě jsou jejich hodnoty rovny 0, neboť poměry průměrů a délek původních nenormovaných intervalových vah jsou zachovány.

2.5. Normování fuzzy vektorů vah dle principu rozšíření

V této sekci budeme studovat rozšíření normovací procedury na případ, kdy n-tice nejasných/nepřesných počátečních nenormovaných vah je modelována fuzzy vektorem vah $W \in \mathcal{F}_V(\mathcal{W}_n)$.

Rozšíření z funkcí s ostrým argumentem na funkce, jejichž argument je fuzzy množina, standardně probíhá pomocí principu rozšíření:

Definice 18. Nechť U a V jsou neprázdné množiny a nechť $f : U \to V$ je zobrazení. Pak fuzzy rozšíření f je zobrazení $f_F : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ takové, že pro každé $A \in \mathcal{F}(U)$ je funkce příslušnosti $f_F(A)$ definovaná pro každé $v \in V$ následujícím způsobem:

$$f_F(A)(v) = \begin{cases} \sup_{u \in U: f(u)=v} A(u), & \text{pokud } \{u \in U | f(u) = v\} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases} \tag{2.114}$$

Normovací procedura je v ostrém případě popsána jako vektorová funkce n s vektory reálných hodnot daná (4). Tedy, dle principu rozšíření by měl být výsledek normování původního fuzzy vektoru vah $W \in \mathcal{F}_V(\mathcal{W}_n)$ dán funkcí $n_F(W)$, kde $n_F : \mathcal{F}(\mathcal{W}_n) \to \mathcal{F}(\mathcal{S}_n)$ je fuzzy rozšíření funkce n dané (2.114). Jak poukazuje Pavlačka v [5], jelikož je n spojitá funkce a jelikož je funkce příslušnosti fuzzy vektoru vah $W \in \mathcal{F}_V(\mathcal{W}_n)$ polospojitá shora, α-řezy $n_F(W)$ jsou pro každé $\alpha \in (0, 1]$ dány následujícím způsobem:

$$n_F(W)_\alpha = \Bigg\{ (v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{S}_n \big| (v_1, \ldots, v_n) = \left(\frac{w_1}{\sum_{i=1}^n w_i}, \ldots, \frac{w_n}{\sum_{i=1}^n w_i} \right), \\ (w_1, \ldots, w_n) \in W_\alpha \Bigg\}. \tag{2.115}$$

Následující věta, kterou dokazuje Pavlačka v [5], ukazuje, že fuzzy rozšíření n_F má vlastnost, že obraz $n_F(W)$ jakéhokoli fuzzy vektoru vah $W \in \mathcal{F}_V(\mathcal{W}_n)$ je fuzzy vektor normovaných vah.

Věta 7. *Nechť* $n : \mathcal{W}_n \to \mathcal{S}_n$ *je reálná vektorová funkce definovaná pro všechna* $w \in \mathcal{W}_n$ *(4) a nechť* n_F *je její fuzzy rozšíření. Jestliže* $W \in \mathcal{F}_V(\mathcal{W}_n)$*, pak* $n_F(W) \in \mathcal{F}_V(\mathcal{S}_n)$.

Poznámka 8. Z (2.115) lze snadno vidět, že $n_F(V) = V$ pro každé $V \in \mathcal{F}_V(\mathcal{S}_n)$. To ale znamená, že se každý fuzzy vektor normovaných vah znormuje sám na sebe (analogicky jako případě ostrých vah, kdy se normované váhy znormují samy na sebe).

V MCDM modelech je často praktické počítat projekce fuzzy vektoru normovaných vah na příslušné osy, jelikož vyjadřují pravděpodobnostní rozdělení příslušných normovaných vah. Můžeme postupovat následovně:

Způsob jakým lze obecně získat projekce výstupu fuzzy rozšíření vektorové funkce s vektorem reálných hodnot, je v [5] popsán následující větou:

Věta 8. *Nechť* $D \subseteq \mathbb{R}^m, m \geq 1$. *Nechť* $f : D \to \mathbb{R}^n, n \geq 2$ *je vektorová funkce s vektorem reálných hodnot se složkami* $f_i : D \to \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}$*, tedy* $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ *pro každé* $x \in D$*. Nechť* $f_{iF}, i = 1, \dots, n$ *značí fuzzy rozšíření funkce* f_i*. Pak pro každé* $X \in \mathcal{F}(D)$ *platí následující rovnosti:*

$$[f_F(X)]_i = f_{iF}(X), i = 1, \dots, n. \tag{2.116}$$

Aplikujme větu výše na funkci n. Můžeme psát $n = (n_1, \dots, n_n)$, kde $n_i : \mathcal{W}_n \to \langle 0, 1 \rangle, i = 1 \dots, n$ jsou definovány pro všechna $(w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{W}_n$ následovně:

$$n_i(w_1, \dots, w_n) := \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j}. \tag{2.117}$$

Tedy, dle (2.116), pro každý fuzzy vektor vah $W \in \mathcal{F}_V(\mathcal{W}_n)$ platí, že

$$[n_F(W)]_i = n_{iF}(W), \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.118}$$

tedy pravděpodobnostní rozdělení vlastních normovaných vah lze získat fuzzy rozšířením funkcí s reálnými argumenty $n_1, \dots, n_n$ daných (2.117). Jak ukazuje Pavlačka v [5], jelikož jsou tyto funkce spojité na $\mathcal{W}_n$, můžeme použít následující dobře známý obecný výsledek týkající se počítání s fuzzy vektory:

Věta 9. *Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^m, m \geq 1$, nechť $f : D \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a nechť $X \in \mathcal{F}_V(D)$. Nechť f_F je fuzzy rozšíření f. Pak $f_F(X)$ je fuzzy číslo, jehož funkce příslušnosti je dána následujícím způsobem:*

$$f_F(X)(y) = \begin{cases} \max_{x \in D: f(x)=y} X(x), & \textit{pokud } \{\mathrm{x} \in \mathrm{D} | \mathrm{f(x)} = \mathrm{y}\} \neq \emptyset, \\ 0 & \textit{jindy.} \end{cases} \tag{2.119}$$

Navíc

$$f_F(X)_\alpha = f(X_\alpha) = \{y \in \mathbb{R} | y = f(x), x \in X_\alpha\}, \quad \textit{pro všechna } \alpha \in (0, 1\rangle. \tag{2.120}$$

Poznámka 9. Při použití značení $f_F(X) = \{\langle \underline{f}_X(\alpha), \overline{f}_X(\alpha)\rangle\}_{\alpha \in \langle 0,1\rangle}$, vyplývá z (2.120), že pro každé $\alpha \in (0, 1\rangle$ lze získat hodnoty $\underline{f}_X(\alpha)$ a $\overline{f}_X(\alpha)$ vyřešením následujících dvou problémů lineárního programování:

$$\underline{f}_X(\alpha) = \min_{x \in X_\alpha} f(x) \quad \text{a} \quad \overline{f}_X(\alpha) = \max_{x \in X_\alpha} f(x). \tag{2.121}$$

Navíc, jelikož jsou funkce $\underline{f}_X(\alpha)$ a $\overline{f}_X(\alpha)$ spojité zprava v 0, hodnoty $\underline{f}_X(0)$ a $\overline{f}_X(0)$ jsou dány následujícím způsobem:

$$\underline{f}_X(0) = \lim_{\alpha \to 0+} \underline{f}_X(\alpha) \quad \text{a} \quad \overline{f}_X(0) = \lim_{\alpha \to 0+} \overline{f}_X(\alpha). \tag{2.122}$$

Podle věty (9), pokud $W \in \mathcal{F}_V(\mathcal{W}_n)$, pak $n_{iF}(W) \in \mathcal{F}_N(\langle 0, 1\rangle)$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$. Navíc označme $n_{iF}(W) = \{\langle \underline{n}_{iw}(\alpha), \overline{n}_{iW}(\alpha)\rangle\}_{\alpha \in \langle 0,1\rangle}, i = 1, \ldots, n$. Pak jsou dle (2.121) α-řezy projekcí fuzzy vektoru normovaných vah $n_F(W)$ na příslušné osy pro všechna $\alpha \in (0, 1\rangle$ dány následujícím způsobem:

$$\underline{n}_{iW}(\alpha) = \min_{(w_1, \ldots, w_n) \in W_\alpha} \frac{w_i}{\sum_{j=1}^n w_j} \tag{2.123}$$

$$\overline{n}_{iW}(\alpha) = \max_{(w_1, \ldots, w_n) \in W_\alpha} \frac{w_i}{\sum_{j=1}^n w_j}. \tag{2.124}$$

Následující věta (dokázána opět v [5]) ukazuje, že pro každý fuzzy vektor vah $W \in \mathcal{F}_V(\mathcal{W}_n)$ fuzzy čísla $n_{1F}(W), \ldots, n_{nF}(W)$, která reprezentují projekce $n_F(W)$ na příslušné osy, tvoří n-tici normovaných fuzzy vah.

Věta 10. *Nechť $n_1, \dots, n_n$ jsou funkce dané (2.117) a $n_{1F}, \dots, n_{nF}$ jsou jejich fuzzy rozšíření. Pak pro každý fuzzy vektor vah $W \in \mathcal{F}_V(\mathcal{W}_n)$, fuzzy čísla $n_{1F}(W), \dots, n_{nF}(W)$ tvoří n-tici normovaných fuzzy vah.*

Definice 19. Fuzzy vektor normovaných vah $n_F(W)$ je separabilní na $\mathcal{S}_n$, jestliže pro každé $\alpha \in (0,1\rangle$ platí:

$$n_F(W)_\alpha = \left(n_{1F}(W)_\alpha \times \dots \times n_{nF}(W)_\alpha\right) \cap \mathcal{S}_n. \tag{2.125}$$

Jak uvádí Pavlačka v [5], klíčovou roli ve výpočtech s fuzzy vektory normovaných vah hraje jejich případná separabilita na $\mathcal{S}_n$. Je ukázáno, že pokud je fuzzy vektor normovaných vah separabilní na $\mathcal{S}_n$, výpočet fuzzy váženého průměru je jednoznačně jednodušší.

Pro $n = 2$ je ukázáno, že každý dvoudimenzionální fuzzy vektor normovaných vah je separabilní na $\mathcal{S}_2$. Tedy pro každé $W \in \mathcal{F}_V(\mathcal{W}_2)$

$$n_F(W)_\alpha = \left(n_{1F}(W)_\alpha \times n_{2F}(W)_\alpha\right) \cap \mathcal{S}_2, \quad \forall \alpha \in (0,1]. \tag{2.126}$$

Nicméně, pro $n \geq 3$ nelze výsledek normování počátečního fuzzy vektoru vah $W \in \mathcal{F}_V(\mathcal{W}_n)$ podle principu rozšíření obecně vyjádřit pouze n-ticí normovaných fuzzy vah $n_{1F}(W), \dots, n_{nF}(W)$ a relací $\mathcal{S}_n$. Podle obecného vztahu mezi fuzzy vektorem a jeho projekcemi platí pro α-řezy $n_F(W)$ pouze následující vztah

$$n_F(W)_\alpha \subseteq \left(n_{1F}(W)_\alpha \times \dots \times n_{nF}(W)_\alpha\right) \cap \mathcal{S}_n, \quad \forall \alpha \in (0,1]. \tag{2.127}$$

Z (2.115) plyne, že možná separabilita $n_F(W)$ na $\mathcal{S}_n$ záleží na počátečním fuzzy vektoru vah W. Problém ilustruje Pavlačka v [5] na následujícím příkladu:

Příklad 17. Pro každé $c \in \mathbb{R}^+$ nechť

$$Q_c := \left\{ (w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{W}_n \middle| \sum_{i=1}^{n} w_i = c \right\}. \tag{2.128}$$

Nechť $W_{Q_c} \in \mathcal{F}_V(Q_c)$ je fuzzy vektor vah takový, že

$$W_{Q_c\alpha} = \left([W_{Q_c}]_{1\alpha} \times \dots \times [W_{Q_c}]_{n\alpha}\right) \cap Q_c. \tag{2.129}$$

Ukažme nyní, že fuzzy vektor normovaných vah $n_F\left(W_{Q_c}\right)$ je separabilní na $\mathcal{S}_n$. Označme

$$\left[W_{Q_c}\right]_i = \left\{\left\langle \underline{w}_{Q_c i}\left(\alpha\right), \overline{w}_{Q_c i}\left(\alpha\right)\right\rangle\right\}_{\alpha\in\langle 0,1\rangle}, \quad i = 1,\ldots,n,$$

a

$$\left[n_F\left(W_{Q_c}\right)\right]_i = \left\{\left\langle \underline{n}_{iW_{Q_c}}\left(\alpha\right), \overline{n}_{iW_{Q_c}}\left(\alpha\right)\right\rangle\right\}_{\alpha\in\langle 0,1\rangle}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Poté dle (2.123) a (2.124) pro každé $i \in \{1,\ldots,n\}$ a pro každé $\alpha \in (0,1\rangle$

$$\underline{n}_{iW_{Q_c}}\left(\alpha\right) = \min_{\substack{w_j\in\langle \underline{w}_{Q_c j}(\alpha),\overline{w}_{Q_c j}(\alpha)\rangle \\ j=1,\ldots,n \\ \sum_{j=1}^n w_j = c}} \frac{w_i}{\sum_{j=1}^n w_j} = \min_{w_i\in\langle \underline{w}_{Q_c i}(\alpha),\overline{w}_{Q_c i}(\alpha)\rangle} \frac{w_i}{c} = \frac{\underline{w}_{Q_c i}\left(\alpha\right)}{c},$$

a

$$\overline{n}_{iW_{Q_c}}\left(\alpha\right) = \max_{\substack{w_j\in\langle \underline{w}_{Q_c j}(\alpha),\overline{w}_{Q_c j}(\alpha)\rangle \\ j=1,\ldots,n \\ \sum_{j=1}^n w_j = c}} \frac{w_i}{\sum_{j=1}^n w_j} = \max_{w_i\in\langle \underline{w}_{Q_c i}(\alpha),\overline{w}_{Q_c i}(\alpha)\rangle} \frac{w_i}{c} = \frac{\overline{w}_{Q_c i}\left(\alpha\right)}{c}.$$

Navíc α-řezy $n_F\left(W_{Q_c}\right)$ jsou pro všechna $\alpha \in (0,1\rangle$ dány následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
n_F\left(W_{Q_c}\right)_\alpha &= \left\{n\left(w\right) \in \mathcal{S}_n | w \in W_{Q_c \alpha}\right\} \\
&= \left\{ \left(\frac{w_1}{\sum_{i=1}^n w_n}, \ldots, \frac{w_n}{\sum_{i=1}^n w_n}\right) \in \mathcal{S}_n | \right. \\
&\quad \left. w_i \in \left\langle \underline{w}_{Q_c i}\left(\alpha\right), \overline{w}_{Q_c i}\left(\alpha\right)\right\rangle, i = 1,\ldots,n, \sum_{i=1}^n w_i = c\right\} \\
&= \left\{ \left(v_1,\ldots,v_n\right) \in \mathcal{S}_n | v_i \in \left\langle \frac{\underline{w}_{Q_c i}\left(\alpha\right)}{c}, \frac{\overline{w}_{Q_c i}\left(\alpha\right)}{c}\right\rangle, i = 1,\ldots,n\right\} \\
&= \left(\left[n_F\left(W_{Q_c}\right)\right]_1 \times \cdots \times \left[n_F\left(W_{Q_c}\right)\right]_n\right) \cap \mathcal{S}_n.
\end{aligned} \tag{2.130}$$

Tedy $n_F\left(W_{Q_c}\right)$ je fuzzy vektor normovaných vah separabilní na $\mathcal{S}_n$.

Vlastnostmi normování fuzzy vektoru vah podle principu rozšíření se zabývá Pavlačka v [5]:

První důležitá vlastnost říká, že každý α-řez výsledného fuzzy vektoru normovaných vah $n_F\left(W\right)$ reprezentuje množinu všech normovaných váhových vektorů, které byly získány normováním váhových vektorů z W_α. To znamená, že $n_F(W)$ nejen že splňuje podmínku, že součet normovaných vah je roven jedné, ale také bere v úvahu všechny vztahy výslednými normovanými vahami, které plynou z původního fuzzy vektoru vah $W \in \mathcal{F}_V(\mathcal{W}_n)$.

Vzhledem k tomu, že by případné porovnávání průměrů jednotlivých fuzzy čísel vyjadřujících původní váhy a normované váhy nemělo i kvůli možným vztahům mezi jednotlivými vahami smysl, soustředí se na zachování pravděpodobnostních rozdělení poměrů jednotlivých původních vah. Ty lze dle [5] získat následujícím způsobem:

Pro všechna $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ označme množinu všech n-rozměrných vektorů vah s kladnou i-tou a j-tou složkou $\mathcal{W}_n^{i,j+}$, tedy

$$\mathcal{W}_n^{i,j+} := \big\{(w_1, \ldots, w_n) \in \mathcal{W}_n \mid w_i > 0, w_j > 0\big\}. \tag{2.131}$$

Poměr váhy w_i ku váze w_j pak vyjádříme fukcí reálných proměnných $r_{ij} : \mathcal{W}_n^{i,j+} \to \mathbb{R}^+$, která je pro všechna $w \in \mathcal{W}_n^{i,j+}, w = (w_1, \ldots, w_n)$ definována následovně:

$$r_{ij}(w) := \frac{w_i}{w_j}. \tag{2.132}$$

Jelikož je množina všech n-rozměrných vektorů normovaných vah s kladnou i-tou a j-tou složkou podmnožinou množiny $\mathcal{W}_n^{i,j+}$, pak samozřejmě funkce r_{ij} vyjadřuje takoé poměry i-té normované váhy ku j-té normované váze.

Označme r_{ijF} fuzzy rozšíření funkce r_ij a nechť je $W \in \mathcal{F}_V(\mathcal{W}_n^{i,j+})$ fuzzy vektor vah s kladnou i-tou a j-tou složkou. Jelikož je r_{ij} spojitá funkce na $\mathcal{W}_n^{i,j+}$, pak je dle věty (9) $r_{ijF}(W)$ fuzzy číslo na $\mathbb{R}^+$. Pro všechna $\alpha \in (0, 1\rangle$ jsou α-řezy $r_{ijF}(W)$ dány následovně:

$$\begin{split} r_{ijF}(W)_\alpha = \Big\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid r = \frac{w_i}{w_j}, w_i \text{ a } w_j \text{ vyjadřují i-tou a j-tou složku} \\ \text{alespoň jednoho vektoru vah } w \in W_\alpha \Big\} \end{split} \tag{2.133}$$

Jak píše Pavlačka, z toho plyne, že fuzzy číslo $r_{ijF}(W)$ vyjadřuje pravděpodobnostní rozdělení poměru mezi i-tou a j-tou váhou, jelikož bere v úvahu všechny interakce mezi těmito vahami.

Následující věta, která je dokázaná v [5], ukazuje, že fuzzy rozšíření n_F zachovává pravděpodobnostní rozdělení poměrů příslušných původních vah:

Věta 11. *Nechť je n_F fuzzy rozšíření funkce n dané (4). Nechť je pro všechna $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ r_{ijF} fuzzy rozšíření funkce r_{ij} dané (2.132). Pak*

$$r_{ijF}(W) = r_{ijF}(n_F(W)), \quad \textit{pro všechna } W \in \mathcal{F}_V(\mathcal{W}_n^{i,j+}). \tag{2.134}$$

Jak píše Pavlačka v [5], váhy jsou nejčastěji v MCDM modelech užívány při výpočtu váženého průměru. Operace váženého průměru je spojitá funkce $a_W : \mathcal{W}_n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná pro všechny $w \in \mathcal{W}_n, w = (w_1, \ldots, w_n)$ a pro všechna $x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, \ldots, x_n)$ následovně:

$$a^W(w, x) := \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}. \tag{2.135}$$

Restrikci a_W na $\mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^n$ následně označíme jako a^N. Pro vektor normovaných vah $v \in \mathcal{S}_n, v = (v_1, \ldots, v_n)$ lze a^N zapsat jako

$$a^N(v, x) := \sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i. \tag{2.136}$$

Z toho dle Pavlačky plyne, že normováním daným (4) vlastně transformujeme každý vektor počátečních vah $w \in \mathcal{W}_n$ na příslušný vektor normovaných vah $n(w) \in \mathcal{S}_n$ takový, že platí

$$a^W(w, x) = a^N(n(w), x), \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.137}$$

Jelikož rovnost (2.137) hraje klíčovou roli v mnoha aplikacích (a zejména v MCMD), bylo by dobré, kdyby platila i v případě neostrých vah a vážených hodnot.

Následující věta (opět dokázaná v [5]) ukazuje, že fuzzy rozšíření n_F splňuje rozšíření rovnosti (2.137) na případ, kdy jsou váhy i vážené hodnoty modelovány fuzzy čísly:

Věta 12. *Nechť je n_F fuzzy rozšíření funkce n definované (4). Nechť a_F^W a a_F^N jsou fuzzy rozšíření funkcí a^W a a^N daných (2.135), respektive (2.136). Pak pro každé $W \in \mathcal{F}_V(\mathcal{W}_n)$ a pro každé $X \in \mathcal{F}_V(\mathbb{R}^N)$ platí následující rovnost:*

$$a_F^W(W, X) = a_F^N(n_F(W), X). \tag{2.138}$$

Kapitola 3

Numerické příklady

V této části si porovnáme jak jednotlivé metody na normování intervalových vah, tak na normování fuzzy vah, a podíváme se i na srovnání metod na normování intervalových vah z hlediska Sevastjanovem navrhovaných měr (2.60) a (2.59).

3.1. Intervalové váhy

Normováním ryze intervalových vah se zabývali Xu ((2.7)), Wang a Elhag ((2.30) a (2.31), respektive (2.50) a (2.51)), Jimenéz a spol. ((2.19) a (2.20)) a Sevastjanov a spol. ((2.95) a (2.96)). Pojďme se podívat, jak jednotlivé metody normují konkrétní vektory intervalových vah:

Původní váhy	$\langle 0{,}4; 0{,}6\rangle$	$\langle 0{,}3; 0{,}7\rangle$	$\langle 0{,}5; 0{,}5\rangle$
Xu	$\langle 0{,}2222; 0{,}5\rangle$	$\langle 0{,}1667; 0{,}5833\rangle$	$\langle 0{,}2778; 0{,}4167\rangle$
Wang a Elhag	$\langle 0{,}25; 0{,}4286\rangle$	$\langle 0{,}2143; 0{,}4375\rangle$	$\langle 0{,}2778; 0{,}4167\rangle$
Sevastjanov	$\langle 0{,}2444; 0{,}4222\rangle$	$\langle 0{,}1833; 0{,}4926\rangle$	$\langle 0{,}3056; 0{,}3519\rangle$
Jimenéz	$\langle 0{,}2667; 0{,}4\rangle$	$\langle 0{,}2; 0{,}4667\rangle$	$\langle 0{,}3333; 0{,}3333\rangle$

Z tabulky je zřejmé, že pouze metoda navrhnutá Jimenézem a spol. v případě, kde mezi intervalovými vahami máme i váhu konkrétní (případně i více takovýchto vah), znormuje tuto opět na váhu konkrétní. Proč tomu tak je, plyne ze vzorců, pomocí kterých jednotlivé metody intervalové váhy normují.

Původní váhy	$\langle 1{,}5; 1{,}6\rangle$	$\langle 1{,}5; 15\rangle$	$\langle 1{,}5; 150\rangle$
Xu	$\langle 0{,}009; 0{,}3556\rangle$	$\langle 0{,}009; 3{,}3333\rangle$	$\langle 0{,}009; 33{,}3333\rangle$
Wang a Elhag	$\langle 0{,}009; 0{,}3478\rangle$	$\langle 0{,}0098; 0{,}8333\rangle$	$\langle 0{,}0829; 0{,}9804\rangle$
Sevastjanov	$\langle 0{,}0133; 0{,}0188\rangle$	$\langle 0{,}0133; 0{,}1765\rangle$	$\langle 0{,}0133; 1{,}7649\rangle$
Jimenéz	$\langle 0{,}0175; 0{,}0187\rangle$	$\langle 0{,}0175; 0{,}1753\rangle$	$\langle 0{,}0175; 1{,}7534\rangle$

Jak můžeme vidět, nejen u metody navržené Xu dochází k tomu, že u nějaké normované intervalové váhy její horní hranice překročí hodnotu 1, v případě kdy některá z původních intervalových má horní hranici mnohem větší než jsou ostatní hodnoty, dochází k tomuto jevu i u metod navržených týmy okolo Jimenéze, respektive Sevastjanova.

Původní váhy	$\langle 2; 3\rangle$	$\langle 3; 4\rangle$	$\langle 1; 5\rangle$
Xu	$\langle 0{,}1667; 0{,}5\rangle$	$\langle 0{,}25; 0{,}6667\rangle$	$\langle 0{,}0833; 0{,}8333\rangle$
Wang a Elhag	$\langle 0{,}1818; 0{,}4286\rangle$	$\langle 0{,}2727; 0{,}5714\rangle$	$\langle 0{,}1250; 0{,}5\rangle$
Sevastjanov	$\langle 0{,}1944; 0{,}3542\rangle$	$\langle 0{,}2917; 0{,}4722\rangle$	$\langle 0{,}0972; 0{,}5903\rangle$
Jimenéz	$\langle 0{,}2222; 0{,}3333\rangle$	$\langle 0{,}3333; 0{,}4444\rangle$	$\langle 0{,}1111; 0{,}5556\rangle$

Zkusme nyní znormovat intervalové váhy, které jsme získali normovací metodou navrženou Sevastjanovem a spol.:

Původní váhy	$\langle 0{,}1944; 0{,}3542\rangle$	$\langle 0{,}2917; 0{,}4722\rangle$	$\langle 0{,}0972; 0{,}5903\rangle$
Xu	$\langle 0{,}1373; 0{,}6071\rangle$	$\langle 0{,}2059; 0{,}8095\rangle$	$\langle 0{,}0686; 1{,}0119\rangle$
Wang a Elhag	$\langle 0{,}1547; 0{,}4766\rangle$	$\langle 0{,}2360; 0{,}6182\rangle$	$\langle 0{,}1053; 0{,}5484\rangle$
Sevastjanov	$\langle 0{,}1658; 0{,}3756\rangle$	$\langle 0{,}2488; 0{,}5008\rangle$	$\langle 0{,}0829; 0{,}6260\rangle$
Jimenéz	$\langle 0{,}1944; 0{,}3542\rangle$	$\langle 0{,}2917; 0{,}4722\rangle$	$\langle 0{,}0972; 0{,}5903\rangle$

Jak můžeme vidět, váhy, které byly původně Sevastjanovem a spol. považovány za normované, se znormovaly na jiné váhy. Pokud bychom tento postup navíc opakovali, zkonvergovaly by původní váhy k hodnotám $V_1 = \langle 0; 0{,}5\rangle, V_2 = \langle 0; 0{,}6667\rangle, V_3 = \langle 0; 0{,}8333\rangle$, což lze vyjádřit i jako $V_1 = \langle 0; 2 \cdot \frac{\overline{w}_1}{\sum_{i=1}^{3} \overline{w}_1}\rangle, V_2 = \langle 0; 2 \cdot \frac{\overline{w}_2}{\sum_{i=1}^{3} \overline{w}_i}\rangle, V_3 = \langle 0; 2 \cdot \frac{\overline{w}_3}{\sum_{i=1}^{3} \overline{w}_i}\rangle$.

Podívejme se nyní na to, jakých výsledků dosáhneme, pokud znormujeme intervalové váhy $W_1 = \langle 0{,}1373; 0{,}6071\rangle, W_2 = \langle 0{,}236; 0{,}6182\rangle, W_3 = \langle 0{,}0686; 1{,}0119\rangle$, tedy váhy, které jsme získali normováním vah $W_1 = \langle 0{,}1944; 0{,}3542\rangle, W_2 = \langle 0{,}2059;\ 0{,}8095\rangle, W_3 = \langle 0{,}0972; 1{,}5903\rangle$ metodou navrženou Xu:

Původní váhy	$\langle 0{,}1373; 0{,}6071\rangle$	$\langle 0{,}2059; 0{,}8095\rangle$	$\langle 0{,}0686; 1{,}0119\rangle$
Xu	$\langle 0{,}0565; 1{,}4745\rangle$	$\langle 0{,}0848; 1{,}9660\rangle$	$\langle 0{,}0283; 2{,}4575\rangle$
Wang a Elhag	$\langle 0{,}0701; 0{,}6886\rangle$	$\langle 0{,}1128; 0{,}7972\rangle$	$\langle 0{,}0462; 0{,}7468\rangle$
Sevastjanov	$\langle 0{,}0766; 0{,}4426\rangle$	$\langle 0{,}1149; 0{,}5901\rangle$	$\langle 0{,}0383; 1{,}7376\rangle$
Jimenéz	$\langle 0{,}0966; 0{,}4275\rangle$	$\langle 0{,}1450; 0{,}5700\rangle$	$\langle 0{,}0483; 0{,}7125\rangle$

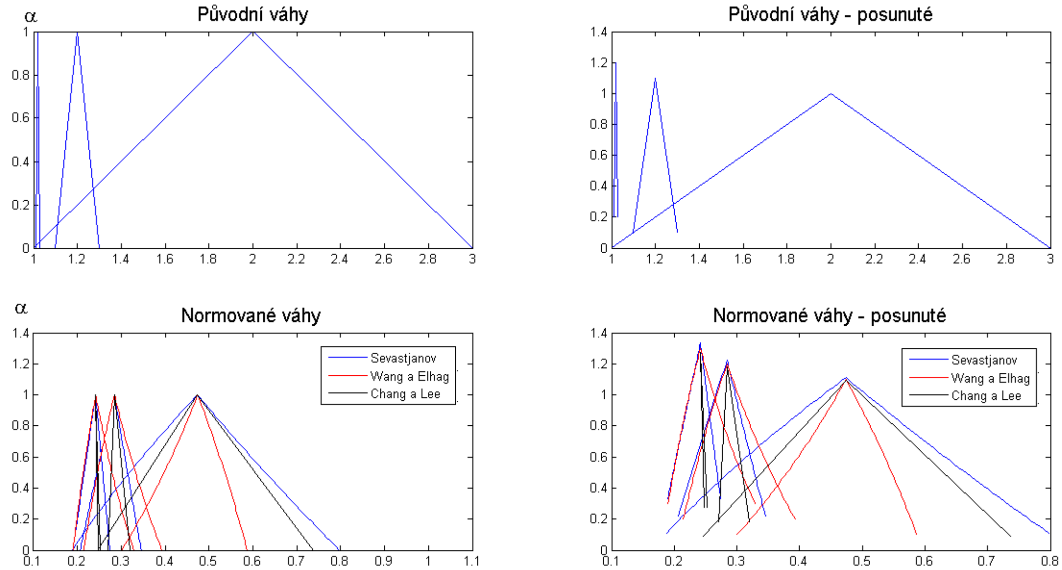
I v tomto případě dojde u vah, které jsou dle dané metody považovány za normované, po užití této metody na dané váhy k jejich změně. K tomuto jevu nedochází pouze u metody navržené Jimenézem a spol. (což plyne z (2.19), (2.20) a (2.21)) a u přístupu navrženého Wangem a Elhagem. Zde je ale nutno poznamenat, že kdybychom na normované váhy použili vzorce (2.30) a (2.31) místo (2.50) a (2.51), pak by ke změnám došlo.

3.2. Fuzzy váhy

Normováním fuzzy vah se zabývali Chang a Lee ((2.9), (2.10), (2.11) a (2.12)), Wang a Elhag ((2.54) a (2.55), respektive (2.57) a (2.58)) a Sevastjanov a spol. ((2.107)). Na několika následujících příkladech si graficky porovnáme, jak jednotlivé metody fuzzy váhy normují:

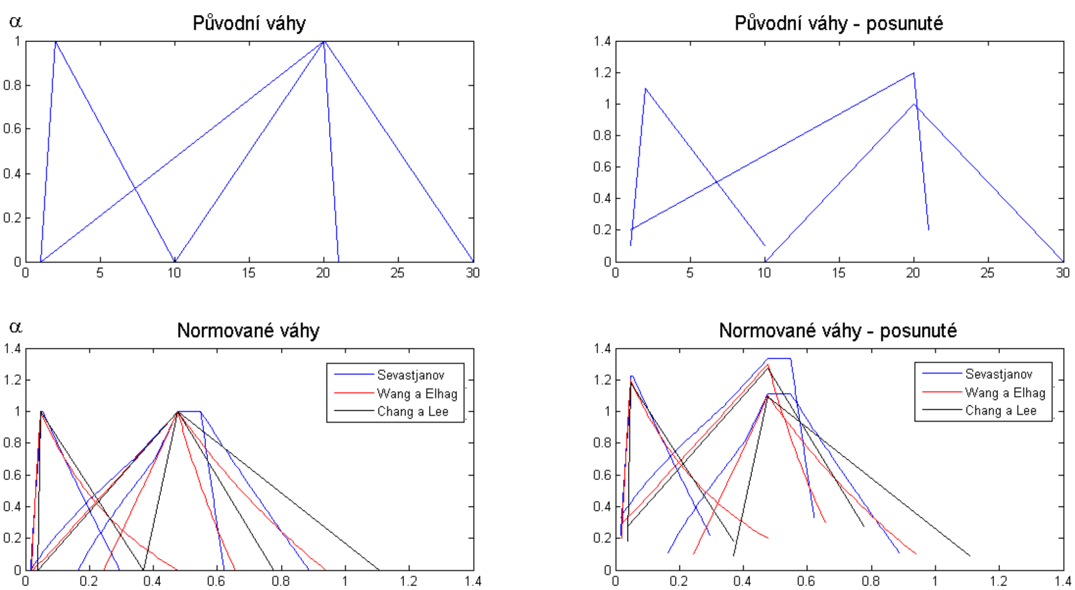
Poznámka 10. Pro lepší přehlednost jsou jednotlivé původní i normované fuzzy váhy kromě standardního zobrazení i posunuty, aby bylo lépe vidět, co k čemu patří (například v situacích, kdy se u dvou vah (částečně) překrývá $V_1(1)$ s $V_2(1)$)

Příklad 18. *Znormujme fuzzy váhy* $W_1 = [1; 2; 3]\,, W_2 = [1{,}1; 1{,}2; 1{,}3]\,,\; W_3 = [1{,}01; 1{,}02; 1{,}03]$



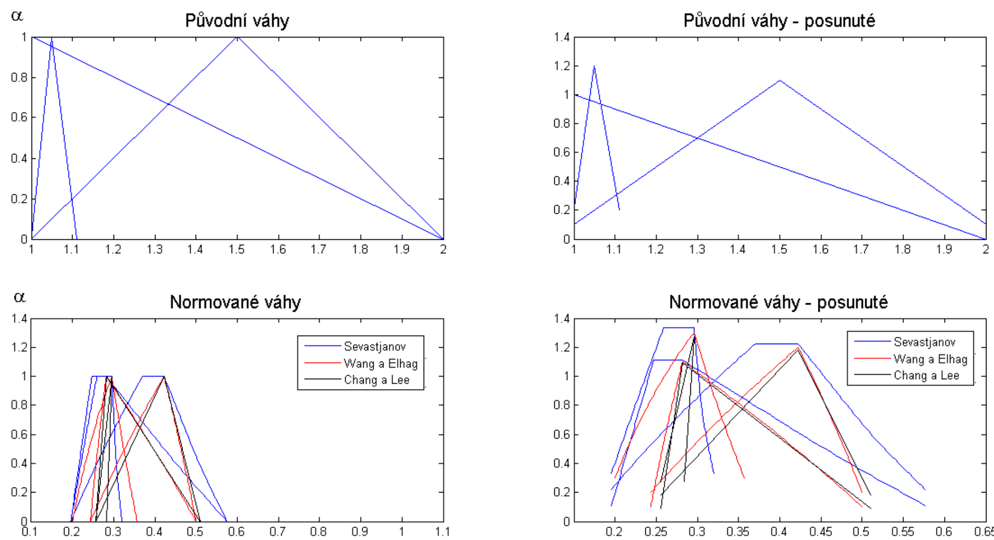
Jak můžeme vidět, v tomto případě jedna z normovaných vah normovaná podle metody Changa a Leeho není fuzzy množinou.

Příklad 19. *Znormujme fuzzy váhy* $W_1 = [10; 20; 30], W_2 = [1; 2; 10], W_3 = [1; 20; 21]$

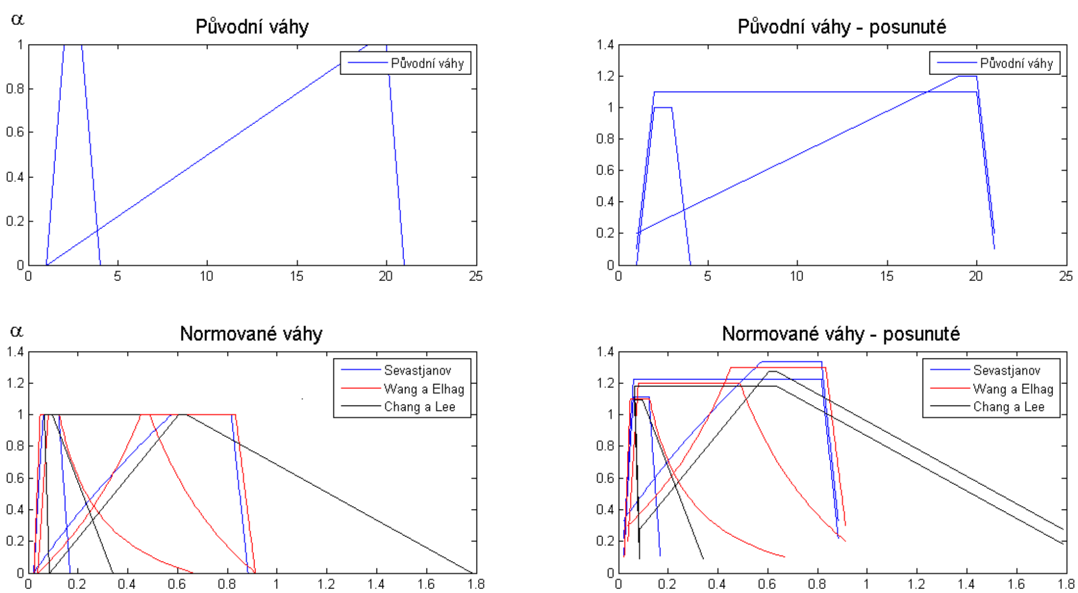


V tomto případě se trojúhelníkové fuzzy váhy znormovaly metodou Sevastjanova a spol. na lichoběžníkové fuzzy váhy. K tomu došlo i u následujícího případu, kde navíc opět jedna z fuzzy vah po normování metodou Changa a Leeho není fuzzy množinou.

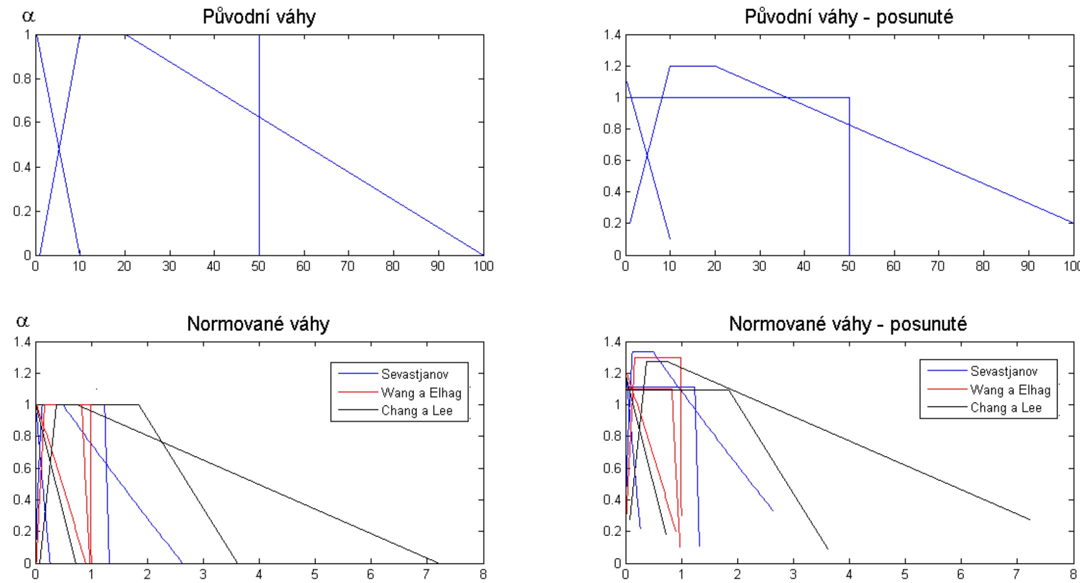
Příklad 20. *Znormujme fuzzy váhy* $W_1 = [1; 1{,}001; 2]\,, W_2 = [1; 1{,}5; 2]\,,\ W_3 = [1; 1{,}05; 1{,}11]$



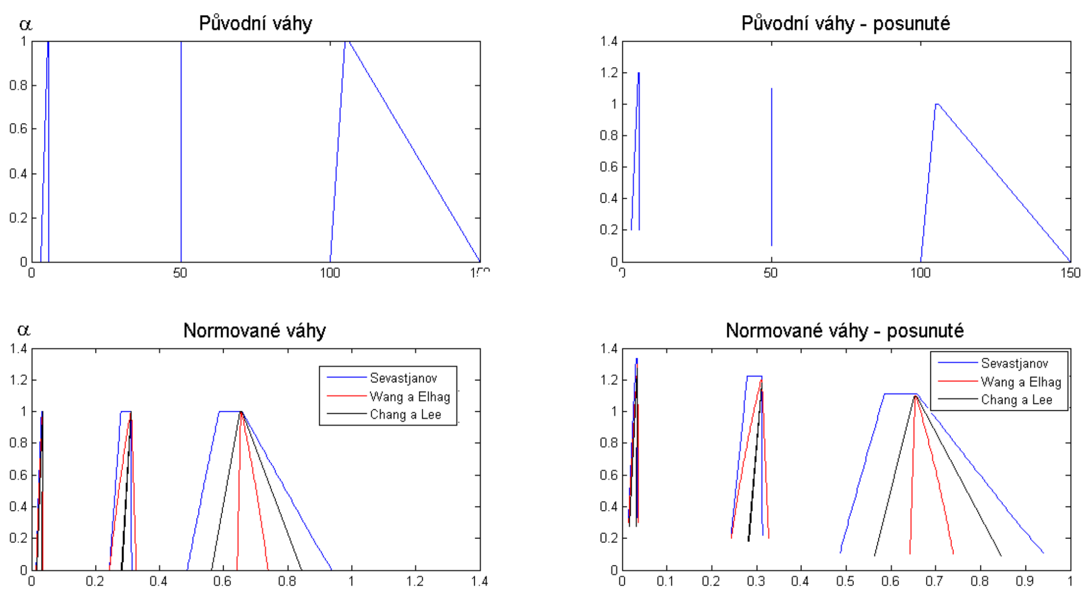
Příklad 21. *Znormujme lichoběžníkové fuzzy váhy* $W_1 = [1; 2; 3; 4]\,, W_2 = [1; 2; 20; 21]$, $W_3 = [1; 19; 20; 21]$



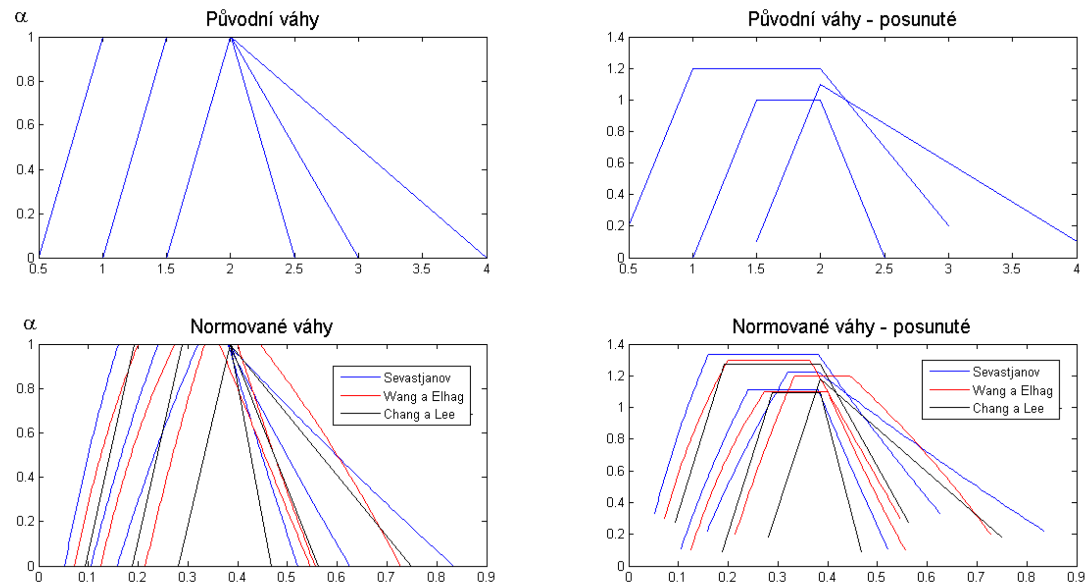
Příklad 22. *Znormujme lichoběžníkové fuzzy váhy* $W_1 = [0{,}1; 0{,}2; 50; 50{,}1]$, $W_2 = [0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 10]$, $W_3 = [1; 10; 20; 100]$



Příklad 23. *Znormujme lichoběžníkové fuzzy váhy* $W_1 = [100; 105; 106; 150]$, $W_2 = [50; 50{,}1; 50{,}11; 50{,}12]$, $W_3 = [3; 5{,}57; 5{,}58; 5{,}59]$



Příklad 24. *Znormujme fuzzy váhy* $W_1 = [1; 1{,}5; 2; 2{,}5]$, $W_2 = [1{,}5; 2; 4]$, $W_3 = 0{,}5; 1; 2; 3$



Jak můžeme vidět, v případě, kdy se mezi trojúhelníkovými fuzzy vahami objeví alespoň jedna lichoběžníková, dochází u vah normovaných metodou Wanga a Elhaga k tomu, že jsou všechny modelovány (přibližně) lichoběžníkovým fuzzy číslem, tedy i váha, která jejíž nenormovaný obraz byl modelován trojúhelníkovým fuzzy číslem.

3.3. Sevastjanovy míry

V této části se budeme zabývat mírami σ_m (2.59) a σ_l (2.60) navrženými Sevastjanovem a spol. v [4]. Jak autoři v [4] tvrdí, metoda Sevastjanova a spol. s ohledem na tyto míry dosahuje nejlepších výsledků. Je třeba však důrazně poznamenat, že mezi porovnávanými metodami úplně ignorují metodu navrženou Jimenézem a spol., která je v tomto ohledu absolutně nejlepší. Pojďme se nyní na tyto míry podívat trošku do hloubky:

Příklad 25. *Znormujme intervalové váhy* $W_1 = \langle 0{,}3; 0{,}5\rangle, W_2 = \langle 0{,}2; 0{,}6\rangle, W_3 = \langle 0{,}8; 0{,}9\rangle$ *a* $W_4 = \langle 0{,}1; 0{,}8\rangle$ *a spočítejte pro jednotlivé metody míry* σ_l *a* σ_m*:*

Původní váhy	⟨0,3; 0,5⟩	⟨0,2; 0,6⟩	⟨0,8; 0,9⟩	⟨0,1; 0,8⟩
Xu	⟨0,107; 0,357⟩	⟨0,071; 0,429⟩	⟨0,286; 0,643⟩	⟨0,036; 0,571⟩
Wang a Elhag	⟨0,114; 0,313⟩	⟨0,083; 0,333⟩	⟨0,296; 0,6⟩	⟨0,048; 0,381⟩
Sevastjanov	⟨0,125; 0,253⟩	⟨0,083; 0,304⟩	⟨0,333; 0,455⟩	⟨0,042; 0,405⟩
Jimenéz	⟨0,143; 0,238⟩	⟨0,095; 0,286⟩	⟨0,381; 0,429⟩	⟨0,048; 0,381⟩

Míry σ_l a σ_m získáme tak, že na jednotlivé normované a nenormované intervalové váhy aplikujeme vzorce (2.60) a (2.59). Výsledné hodnoty pro jednotlivé metody udává následující tabulka:

Sevasjanovy míry	σ_m	σ_l
Xu	0,046	0,559
Wang a Elhag	0,025	0,61
Sevastjanov	0,015	0,398
Jimenéz	0	0

Jak můžeme vidět, normovací metoda navržená Sevastjanovem a spol. skutečně dosahuje u tohoto příkladu druhých nejlepších výsledků.

Přestože se z jednoho příkladu už dá o jednotlivých metodách mnohé vyčíst, lepší informace zejména o agregovaných mírách přesnosti a jejich chování získáme vygenerováním většího množství vektorů intervalových vah, čímž omezíme možnost, že námi vybrané intervalové váhy byly speciálním případem, který se chová značně netypicky. Zároveň nám tento přístup může pomoci právě takovéto případy identifikovat.

Nejprve uvažujme případ, kdy generujeme vektory intervalových vah ve tvaru $W_i = \langle \underline{w}_i = r_i \cdot h, \overline{w}_i = \underline{w}_i + r_i \cdot (h - \underline{w}_i) \rangle, i = 1, \dots, n$, kde h je maximum, kterého může $\overline{w}_i$ nabývat a $r = (r_1, \dots, r_n)$ je vektor náhodně generovaných čísel z intervalu $(0, 1)$. Z tohoto zápisu je zřejmé, že vylučujeme možnost vygenerování intervalové váhy nulové délky.

V případě, že vygenerujeme 10000 čtveřic intervalových vah, vyjde nám pro všechny metody kromě Jimenézovy průměrná míra σ_l přibližně rovna hodnotě 62. To se sice může při novém generování hodně lišit, důležité však je, že je tato hodnota řádově velmi odlišná od hodnoty, která nám vyšla v předchozím příkladě (kde šlo o hodnoty v řádu desetin). Z toho lze usuzovat, že buďto váhy, kterými se zabýval předchozí příklad, jsou značně netypické a běžné hodnoty σ_l jsou mnohem větší, nebo naopak při vygenerování 10000 čtveřic intervalových vah došlo i k vygenerování čtveřice (nebo i více čtveřic), u které je míra σ_l tak obrovská, že to značně ovlivní i průměrnou hodnotu této míry na ploše 10000 generovaných čtveřic (tudíž se jedná o průměr z 10000 hodnot). Tato možnost samozřejmě ale nevylučuje případ, že hodnota σ_l je u předchozího příkladu poněkud nižší, než je obvyklé.

Lepší porozumění získáme, pokud seřadíme čtveřice podle toho, jakou nabývají hodnotu σ_l. Zjistíme, že největší hodnoty se pohybují v řádu 10^5, což už opravdu značně ovlivňuje průměrnou hodnotu z 10000 hodnot. Takovéto hodnoty nabývá například čtveřice intervalových vah (hodnoty jsou zaokrouhleny na čtyři desetinná místa) $W_1 = \langle 1{,}1408; 1{,}9335 \rangle, W_2 = \langle 0{,}7574; 1{,}2648 \rangle, W_3 = \langle 0{,}1567; 0{,}1567 \rangle, W_4 = \langle 0{,}8413; 1{,}8389 \rangle$.

Předpokládejme, že k zaokrouhlování došlo pouze u $\underline{w}_3$ a předpokládejme, že skutečná hodnota $\underline{w}_3 = 0{,}156699$. Pokud bychom takovouto čtveřici intervalových vah znormovali například podle metody Changa a Leeho, dostaneme čtveřici normovaných intervalových vah $V_1 = \langle 0{,}2196; 0{,}6676 \rangle, V_2 = \langle 0{,}1458; 0{,}4367 \rangle, V_3 = \langle 0{,}0302; 0{,}0541 \rangle, V_4 = \langle 0{,}1620; 0{,}6349 \rangle$. Je zřejmé, že právě váha W_3 způsobuje extrémně vysokou hodnotu míry σ_l. Pokud bychom navíc připustili, že nějaká váha může mít nulovou délku, pak by samozřejmě výpočet míry σ_l neměl smysl (plyne ze vzorce).

Pokud nás tedy zajímá chování agregovaných měr přesnosti (například v závislosti na počtu složek vektoru intervalových vah) u jednotlivých metod, je zapotřebí se vyvarovat právě takovýchto extrémních hodnot. Toho můžeme dosáhnout například tím, že určité procento nejnižších a nejvyšších hodnot zanedbáme.

Podívejme se nyní, jakých průměrných hodnot nabývají míry σ_m a σ_l v případě, kdy generujeme 10000 vektorů intervalových vah za předpokladu, že jednotlivé váhy w_i jsou ve tvaru $\langle rand_{i1}(0,1) \cdot (h - \epsilon), rand_{i1}(0,1) \cdot (h - \epsilon) + \epsilon + rand_{i2}(0,1) \cdot (h - \epsilon - rand_{i1}(0,1) \cdot (h - \epsilon)) \rangle$. Tento zápis ve skutečnosti neříká nic jiného, než že $w_i = \langle \underline{w}_i, \overline{w}_i \rangle$, kde $\underline{w}_i$ je náhodně generovaná hodnota z intervalu

$(0, h-\epsilon)$ a hodnota $\overline{w}_i$ je náhodně generovaná z intervalu $(0, h)$ a zároveň pro ni platí, že $\overline{w}_i > \underline{w}_i + \epsilon$, tedy $\langle \underline{w}_i, \overline{w}_i \rangle \subset \langle 0, h \rangle$, pro které platí, že $\overline{w}_i > \underline{w}_i + \epsilon$. Tím zajistíme vyřazení intervalových vah extrémně malého rozpětí.

V následujícím případě jsme vyřadili 5 % vektorů intervalových vah, u kterých měly jednotlivé metody nejvyšší hodnoty měr σ_m, respektive σ_l a 5 % vektorů intervalových vah, u kterých měly jednotlivé metody nejvyšší hodnoty měr σ_m, respektive σ_l. Hodnota ϵ byla nastavena na 0, $h = 2$.

	σ_m				σ_l			
n	100	50	10	4	100	50	10	4
Xu	0,0015	0,0028	0,0125	0,0291	0,9142	1,1701	1,9880	2,6209
W&E	0,0014	0,0026	0,0069	0,0166	0,9142	1,1704	1,9992	2,7013
Sev.	0,0006	0,0011	0,0046	0,0104	0,9094	1,1588	1,9076	2,4011
Jim.	0	0	0	0	0	0	0	0

Jak můžeme z tabulky vidět, s rostoucí velikostí vektoru intervalových vah (n) obecně klesají hodnoty σ_m i σ_l. Navíc platí, že nejlepších hodnot σ_m dosahuje metoda navržená Jimenézem a spol., na druhém místě je metoda Sevastjanova a spol., po které následuje metoda Wanga a Elhaga a na posledním místě je metoda navržená Xu. Z toho tedy plyne, že Jimenézova metoda nejlépe zachovává poměry středů intervalových před normováním a po normování. Naopak metoda Xu je z tohoto hlediska nejhorší. Obdobných výsledků dosáhneme i v případě, kdy nás zajímá, jak která metoda zachovává poměry délek intervalových vah před normováním a po normování. Zde je akorát na posledním místě metoda Wanga a Elhaga, před kterou se dostala metoda Xu.

Zajímavých výsledků dosáhneme, pokud porovnáme, jak se průměry jednotlivých měr chovají v závislosti na tom, jaké procento nejvyšších a nejnižších dosažených hodnot vynecháme. Následující tabulka ukazuje vliv množství vynechaných nejvyšších a nejnižších hodnot jednotlivých měr na jejich průměr za předpokladu, že generujeme opět 10000 vektorů intervalových vah, tentokrát velikosti 100, hodnota $h = 2$ a $\epsilon = 0$ - tedy váhy leží v intervalu $(0, 2)$ a mohou mít i nulovou délku:

	σ_m			σ_l		
%	5	10	49,5	5	10	49,5
Xu	0,0015	0,0014	0,0014	0,9142	0,7602	0,4698
W&E	0,0014	0,0014	0,0013	0,9142	0,7602	0,4698
Sev.	0,0006	0,0005	0,0005	0,9094	0,7555	0,4650
Jim.	0	0	0	0	0	0

Zatímco průměrná hodnota σ_m zůstává přibližně stejná (minimální odchylka může být dána statistickou chybou), průměrná hodnota σ_l klesá s rostoucím množstvím minimálních a maximálních hodnot σ_l, které jsme vynechali. U metody navržené Jimenézem a spol. jsou hodnoty σ_m a σ_l samozřejmě vždy nulové.

Nakonec se podívejme, jak se hodnoty průměrů jednotlivých měr mění v závislosti na minimální šířce jednotlivých nenormovaných vah (parametr ϵ). Opět budeme uvažovat $h = 2$, vektor intervalových vah bude mít velikost 10 a generovat budeme 10000 takových vektorů:

	σ_m				σ_l			
ϵ	0	10^{-5}	10^{-3}	10^{-1}	0	10^{-5}	10^{-3}	10^{-1}
Xu	0,0143	0,0141	0,0141	0,0142	9,1653	6,2337	2,2500	0,1917
W&E	0,0092	0,0090	0,0090	0,0093	9,1716	6,2447	2,2610	0,1988
Sev.	0,0053	0,0052	0,0052	0,0051	9,0871	6,1548	2,1716	0,1411
Jim.	0	0	0	0	0	0	0	0

I tentokrát platí, že zatímco se průměrná hodnota σ_m nijak výrazně nemění (změny jsou dány spíše statistickou chybou), průměrná hodnota σ_l se s rostoucí minimální šířkou jednotlivých nenormovaných vah snižuje. Je to ostatně logické, protože právě u vah s nejmenší šířkou dojde po normování k největší změně šířky (váhy téměř ostré se změní na interval). U metody Jimenéze a spol. jsou opět všechny hodnoty nulové.

Kapitola 4

Inverzní proces k normování

Jednou z nejdůležitějších vlastností normování ostrých vah je fakt, že poměry mezi dvěma nenormovanými vahami jsou stejné jako poměry mezi příslušnou dvojicí normovaných vah, z čehož mimo jiné vyplývá, že pokud známe vektor normovaných vah a jednu nenulovou nenormovanou váhu, pak jsme schopni určit celý vektor nenormovaných vah. V této kapitole se na obě tyto vlastnosti zaměříme a pokusíme se zjistit, jestli něco podobného můžeme říct i o intervalových vahách. V závěrečné části kapitoly se poté pokusíme zjistit, jestli jsme při znalosti normovaných vah schopni zjisti, jaké váhy na ně byly znormované, a pokud ne, jakou minimální informaci o nenormovaných vahách musíme mít, abychom byly schopni je dopočítat.

Definice 20. Pro každou uspořádanou dvojici ostrých vah $\{w_i, w_j\}$, kde $w_j \neq 0$, definujme poměr vah jako

$$\rho\left(w_i, w_j\right) = \frac{w_i}{w_j}. \tag{4.1}$$

Věta 13. *Mějme n-tici ostrých vah $(w_1, \ldots, w_n)$ a k ní příslušnou n-tici normovaných ostrých vah $(v_1, \ldots, v_n)$, kde pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí, že $v_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j}$. Pak platí, že*

$$\rho\left(w_i, w_j\right) = \rho\left(v_i, v_j\right), \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \text{ kde } w_j \neq 0.$$

Důkaz.

$$\frac{v_i}{v_j} = \frac{\frac{w_i}{\sum_{k=1}^{n} w_k}}{\frac{w_j}{\sum_{k=1}^{n} w_k}} = \frac{w_i}{w_k}$$

$\square$

Podívejme se nyní, jestli tato vlastnost platí i v případě intervalových vah. Vyjděme z přístupu Wanga s Elhagem a předpokládejme, že se jedná o nezávislé intervalové váhy ((2.30) a (2.31)).

Mějme tedy vektor nenormovaných intervalových vah $W = (W_1, \dots, W_n)$, kde pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $W_i = \langle \underline{w}_i, \overline{w}_i \rangle$. Vezměme libovolnou uspořádanou dvojici nenormovaných intervalových vah $\{W_i, W_j\}$ a k ní příslušnou dvojici normovaných intervalových vah $\{V_i, V_j\}$. Zadefinujme si nyní poměr intervalových vah:

Definice 21. Pro každou uspořádanou dvojici intervalových vah $\{W_i, W_j\}$, kde $\underline{w}_j > 0$, definujme poměr vah jako

$$\rho^i (W_i, W_j) = \langle \frac{\underline{w}_i}{\overline{w}_j}, \frac{\overline{w}_i}{\underline{w}_j} \rangle. \tag{4.2}$$

Podívejme se nyní na případ, kdy máme pouze dvě intervalové váhy - $W_1 = \langle \underline{w}_1, \overline{w}_1 \rangle$ a $W_2 = \langle \underline{w}_2, \overline{w}_2 \rangle$. V takovémto případě platí následující:

Věta 14. *Mějme dvojici nenormovaných intervalových vah vah $W_1 = \langle \underline{w}_1, \overline{w}_1 \rangle$, $W_2 = \langle \underline{w}_2, \overline{w}_2 \rangle$ a k ní příslušící dvojici normovaných intervalových vah $V_1 = \langle \underline{v}_1, \overline{v}_1 \rangle, V_2 = \langle \underline{v}_2, \overline{v}_2 \rangle$. Pak*

$$\rho^i (V_1, V_2) = \rho^i (W_1, W_2) \tag{4.3}$$

Důkaz.

$$\rho^i (V_1, V_2) = \frac{V_1}{V_2} = \langle \frac{\underline{v}_1}{\overline{v}_2}, \frac{\overline{v}_1}{\underline{v}_2} \rangle = \langle \frac{\frac{\underline{w}_1}{\underline{w}_1 + \overline{w}_2}}{\frac{\overline{w}_2}{\underline{w}_1 + \overline{w}_2}}, \frac{\frac{\overline{w}_1}{\overline{w}_1 + \underline{w}_2}}{\frac{\underline{w}_2}{\overline{w}_1 + \underline{w}_2}} \rangle = \langle \frac{\underline{w}_1}{\overline{w}_2}, \frac{\overline{w}_1}{\underline{w}_2} \rangle = \rho^i (W_1, W_2)$$

$\square$

Pokud bychom ale uvažovali 3 nebo více intervalových vah, tento vztah už platit nebude.

Věta 15. *Pro každé $n \geq 3$ existuje n-tice nenormovaných kladných intervalových vah $(W_1, \ldots, W_n)$ a k ní příslušící n-tice normovaných intervalových vah $(v_1, \ldots, v_n)$, že existují i a j z množiny $\{1, \ldots, n\}$ taková, že neplatí*

$$\rho^i (V_i, V_j) = \rho^i (W_i, W_j) \tag{4.4}$$

Důkaz. Uvažujme n-tici ($n \geq 3$) nenormovaných intervalových vah $(W_1, \ldots, W_n)$, kde pro každé i z množiny $\{1, \ldots, n\}$ platí $0 < \underline{w}_i < \overline{w}_i = \underline{w}_i + k$, kde $k > 0$ je nějaká konstanta. Pak ale

$$\underline{w}_i + \sum_{l=1, k \neq i}^{n} \overline{w}_l = \sum_{l=1}^{n} \underline{w}_l + k \cdot (n-1)$$

a

$$\overline{w}_j + \sum_{l=1, k \neq j}^{n} \underline{w}_l = \sum_{l=1}^{n} \underline{w}_l + k,$$

stejně tak

$$\overline{w}_i + \sum_{l=1, k \neq i}^{n} \underline{w}_l = \sum_{l=1}^{n} \underline{w}_l + k$$

a

$$\underline{w}_j + \sum_{l=1, k \neq j}^{n} \overline{w}_l = \sum_{l=1}^{n} \underline{w}_l + k \cdot (n-1) .$$

Z toho ovšem plyne, že

$$\frac{V_i}{V_j} = \left\langle \frac{\underline{v}_i}{\overline{v}_j}, \frac{\overline{v}_i}{\underline{v}_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\frac{\underline{w}_i}{\sum_{l=1}^{n} \underline{w}_l + k \cdot (n-1)}}{\frac{\overline{w}_j}{\sum_{l=1}^{n} \underline{w}_l + k}}, \frac{\frac{\overline{w}_i}{\sum_{l=1}^{n} \underline{w}_l + k}}{\frac{\underline{w}_j}{\sum_{l=1}^{n} \underline{w}_l + k \cdot (n-1)}} \right\rangle \neq \left\langle \frac{\underline{w}_i}{\overline{w}_j}, \frac{\overline{w}_i}{\underline{w}_j} \right\rangle$$

□

Poznámka 11. Z (13) lze odvodit jednu důležitou vlastnost: pokud v případě ostrých vah známe vektor vah normovaných $(v_1, \ldots, v_n)$ a jednu nenulovou váhu nenormovanou (např. $w_j > 0$), pak jsme schopni zpětně získat vektor nenormovaných vah jako $w_i = v_i \cdot \frac{w_j}{v_j}, i = 1, \ldots, n$.

Zkusme nyní zjistit, jestli něco podobného platí i v případě intervalových vah. Zaměřme se opět nejprve na případ, kdy máme pouze dvě intervalové váhy: Máme-li dvojici nenormovaných intervalových vah $W_1 = \langle \underline{w}_1, \overline{w}_1 \rangle$ a $W_2 = \langle \underline{w}_2, \overline{w}_2 \rangle$, pak získáme normované intervalové váhy jako

$$V_1 = \langle \frac{\underline{w}_1}{\underline{w}_1 + \overline{w}_2}, \frac{\overline{w}_1}{\overline{w}_1 + \underline{w}_2} \rangle$$

a

$$V_2 = \langle \frac{\underline{w}_2}{\overline{w}_1 + \underline{w}_2}, \frac{\overline{w}_2}{\underline{w}_1 + \overline{w}_2} \rangle.$$

Z toho ovšem plyne, že nenormované váhy jsme při znalosti vah normovných schopni získat jako řešení následující soustavy rovnic:

$$\begin{pmatrix} \underline{v}_1 - 1 & 0 & 0 & \underline{v}_1 \\ 0 & \overline{v}_1 - 1 & \overline{v}_1 & 0 \\ 0 & \underline{v}_2 & \underline{v}_2 - 1 & 0 \\ \overline{v}_2 & 0 & 0 & \overline{v}_2 - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{w}_1 \\ \overline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \\ \overline{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

kde $\underline{v}_1, \overline{v}_1, \underline{v}_2$ a $\overline{v}_2$ jsou známé konstanty. Pokud má tato soustava řešení, pak jsme evidentně schopni při znalosti $\underline{w}_1$ schopni dopočítat $\overline{w}_2$ (a obráceně), stejně tak při znalosti $\overline{w}_1$ jsme schopni dopočítat $\underline{w}_2$ (a obráceně). Z toho plyne, že při znalosti normovaných vah a dvojice nenormovaných vah (kromě dvojic $\{\underline{w}_i, \overline{w}_j\}, i \neq j$) umíme dopočítat zbývající nenormované váhy.

Příklad 26. Mějme zadané normované intervalové váhy $V_1 = \langle 0,4; 0{,}75 \rangle$ a $V_2 = \langle 0{,}25; 0{,}6 \rangle$. Navíc víme, že intervalové váhy, které na ně byly znormovány, měly tvar $W_1 = \langle \underline{w}_1, 3 \rangle$ a $W_2 = \langle \underline{w}_2, 3 \rangle$. Dopočítejme hodnoty $\underline{w}_1$ a $\underline{w}_2$

Řešení: Dosaďme za $\underline{v}_1, \overline{v}_1, \underline{v}_2, \overline{v}_2, \overline{w}_1$ a $\overline{w}_2$ do soustavy (4.5):

$$\begin{pmatrix} -0,6 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & -0,25 & 0{,}75 & 0 \\ 0 & 0,25 & -0{,}75 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & -0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{w}_1 \\ 3 \\ \underline{w}_2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Z první (a čtvrté) rovnosti plyne, že $\underline{w}_1 = 2$, z druhé (a třetí) pak plyne, že $\underline{w}_2 = 1$.

Pokud bychom ale znali například hodnoty $\underline{w}_1$ a $\overline{w}_2$, pak bychom (jak je vidět z (4.5)) nebyli schopni hodnoty $\overline{w}_1$ a $\underline{w}_2$ dopočítat.

Předpokládejme nyní, že máme n intervalových vah. Pokusme se nyní zjistit, jaké znalosti o nich musíme mít, abychom byli schopni dopočítat všechny jejich zbývající hodnoty (za předpokladu, že známe váhy normované).

Je zřejmé, že pokud známe pro každé i množiny $\{1,\dots,n\}$ hodnoty $\underline{w}_i$, pak jsme schopni dopočítat hodnoty $\overline{w}_i$ jako

$$\overline{w}_i = \frac{\overline{v}_i \cdot \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \underline{w}_j}{1-\overline{v}_i}, \quad i = 1,\dots,n. \tag{4.6}$$

Obdobně bych vypočítali i hodnoty $\underline{w}_i$. Ve skutečnosti to ale není jediná možnost.

Věta 16. *Mějme nenormované intervalové váhy $(\langle \underline{w}_1, \overline{w}_1\rangle, \dots, \langle \underline{w}_n, \overline{w}_n\rangle)$ a normované intervalové váhy $(\langle \underline{v}_1, \overline{v}_1\rangle, \dots, \langle \underline{v}_n, \overline{v}_n\rangle)$. Předpokládejme, že známe hodnoty normovaných intervalových vah. Poté jsme schopni dopočítat hodnoty nenormovaných intervalových vah, pokud platí jedna z následujících možností:*

1. *pro každé i z množiny $\{1,\dots,n\}$ známe hodnoty $\underline{w}_i$*

2. *pro každé i z množiny $\{1,\dots,n\}$ známe hodnoty $\overline{w}_i$*

3. *existuje právě jedno i z množiny $\{1,\dots,n\}$ takové, že známe hodnoty $\underline{w}_i, \overline{w}_i$, existuje právě jedno $k \neq i$ z množiny $\{1,\dots,n\}$ takové, že pro něj neznáme ani jednu z hodnot $\underline{w}_k, \overline{w}_k$, a pro všechna j z množiny $\{1,\dots,n\} \setminus \{i,k\}$ známe hodnoty $\underline{w}_j$*

4. *existuje právě jedno i z množiny $\{1,\dots,n\}$ takové, že známe hodnoty $\underline{w}_i, \overline{w}_i$, existuje právě jedno $k \neq i$ z množiny $\{1,\dots,n\}$ takové, že pro něj neznáme ani jednu z hodnot $\underline{w}_k, \overline{w}_k$, a pro všechna j z množiny $\{1,\dots,n\} \setminus \{i,k\}$ známe hodnoty $\overline{w}_j$*

5. *existují i a k, $i \neq k$ z množiny $\{1,\dots,n\}$ taková, že známe hodnoty $\underline{w}_i, \underline{w}_k$, a pro všechna j z množiny $\{1,\dots,n\} \setminus \{i,k\}$ známe hodnoty $\overline{w}_j$*

6. *existují i a k, $i \neq k$ z množiny $\{1, \ldots, n\}$ taková, že známe hodnoty $\overline{w}_i, \overline{w}_k$, a pro všechna j z množiny $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i, k\}$ známe hodnoty $\underline{w}_j$*

Důkaz. 1. Jelikož platí

$$\overline{v}_i = \frac{\overline{w}_i}{\overline{w}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \underline{w}_j},$$

pak nutně

$$\overline{v}_i \cdot (\overline{w}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \underline{w}_j) = \overline{w}_i,$$

a tedy

$$\overline{w}_i = \frac{\overline{v}_i \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \underline{w}_j}{1 - \overline{v}_i}.$$

2. Obdobně.

3. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že známe hodnoty $\underline{w}_1, \overline{w}_1$ a hodnoty $\underline{w}_j$ pro každé j z množiny $\{3, \ldots, n\}$. Jelikož ale platí, že

$$\overline{v}_2 = \frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_2 + \sum_{j=1, j \neq 2}^{n} \underline{w}_j},$$

pak

$$\overline{w}_2 = \frac{\overline{v}_2 \cdot \sum_{j=1, j \neq 2}^{n} \underline{w}_j}{1 - \overline{v}_2}.$$

V tuto chvíli pro každé i z množiny $\{1, \ldots, n\}$ známe hodnoty $\underline{w}_i$, ostatní hodnoty tedy dopočítáme dle ad (1).

4. Obdobně.

5. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že známe hodnoty $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ a $\overline{w}_j$ pro každé j z množiny $\{3, \ldots, n\}$. Jelikož ale platí, že

$$\underline{v}_2 = \frac{\underline{w}_2}{\underline{w}_2 + \sum_{j=1, j \neq 2}^{n} \overline{w}_j} = \frac{\underline{w}_2}{\underline{w}_2 + \overline{w}_1 + \sum_{j=3}^{n} \overline{w}_j},$$

pak

$$\underline{v}_2 \cdot (\underline{w}_2 + \overline{w}_1 + \sum_{j=3}^{n} \overline{w}_j) = \underline{w}_2,$$

a tedy i

$$\overline{w}_1 = \frac{\underline{w}_2 + \underline{v}_2 \cdot (\underline{w}_2 + \sum_{j=3}^{n} \overline{w}_j)}{\underline{v}_2}.$$

Stejným způsobem bychom vypočítali hodnotu $\overline{w}_2$. V tuto chvíli pro každé i z množiny $\{1, \ldots, n\}$ známe hodnoty $\overline{w}_i$, ostatní hodnoty tedy dopočítáme dle ad (2).

6. Obdobně.

□

Poznámka 12. Věta platí pouze za předpokladu, že zadané normované váhy skutečně vznikly normováním nějakých nenormovaných vah užitím vzorců (2.30) a (2.31) a že hodnoty nenormovaných vah, které jsou zadané, těmto nenormovaným vahám odpovídají.

Příklad 27. Mějme normované intervalové váhy $V_1 = \langle \frac{2}{13}, \frac{3}{7} \rangle, V_2 = \langle \frac{1}{11}, \frac{4}{9} \rangle, V_3 = \langle \frac{2}{12}, \frac{4}{8} \rangle, V_4 = \langle \frac{1}{12}, \frac{3}{8} \rangle$. Dopočítejme hodnoty u nenormovaných intervalových vah, pokud

1. $W_1 = \langle 2, \overline{w}_1 \rangle, W_2 = \langle 1, \overline{w}_2 \rangle, W_3 = \langle 1, \overline{w}_3 \rangle, W_4 = \langle 1, \overline{w}_4 \rangle$,
2. $W_1 = \langle 2, \overline{w}_1 \rangle, W_2 = \langle 1, \overline{w}_2 \rangle, W_3 = \langle \underline{w}_3, 4 \rangle, W_4 = \langle \underline{w}_4, 3 \rangle$,
3. $W_1 = \langle 2, \overline{w}_1 \rangle, W_2 = \langle 1; 4 \rangle, W_3 = \langle \underline{w}_3, \overline{w}_3 \rangle, W_4 = \langle 1, \overline{w}_4 \rangle$.

Řešení:

1. Užitím vzorce (4.6) dopočítáme hodnoty $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3$ a $\overline{w}_4$:

$$\overline{w}_1 = \frac{\overline{v}_1 \cdot \sum_{j=2}^{4} \underline{w}_j}{1 - \overline{v}_1} = \frac{\frac{3}{7} \cdot (1 + 2 + 1)}{\frac{4}{7}} = 3.$$

$$\overline{w}_2 = \frac{\overline{v}_2 \cdot \sum_{j=1, j\neq 2}^{4} \underline{w}_j}{1 - \overline{v}_2} = \frac{\frac{4}{9} \cdot (2+2+1)}{\frac{5}{9}} = 4.$$

$$\overline{w}_3 = \frac{\overline{v}_3 \cdot \sum_{j=1, j\neq 3}^{4} \underline{w}_j}{1 - \overline{v}_3} = \frac{\frac{4}{8} \cdot (2+1+1)}{\frac{4}{8}} = 4.$$

$$\overline{w}_4 = \frac{\overline{v}_4 \cdot \sum_{j=1}^{3} \underline{w}_j}{1 - \overline{v}_4} = \frac{\frac{3}{8} \cdot (2+1+2)}{\frac{5}{8}} = 3.$$

2. Jelikož platí

$$\overline{v}_4 = \frac{\overline{w}_4}{\underline{w}_1 + \underline{w}_2 + \underline{w}_3 + \overline{w}_4},$$

tak

$$\underline{w}_3 = \frac{\overline{w}_4 - \overline{v}_4 \cdot (\underline{w}_1 + \underline{w}_2 + \overline{w}_4)}{\overline{v}_4} = \frac{3 - \frac{3}{8} \cdot (2+1+3)}{\frac{3}{8}} = 2.$$

Obdobně

$$\overline{v}_3 = \frac{\overline{w}_3}{\underline{w}_1 + \underline{w}_2 + \overline{w}_3 + \underline{w}_4},$$

a tedy

$$\underline{w}_4 = \frac{\overline{w}_3 - \overline{v}_3 \cdot (\underline{w}_1 + \underline{w}_2 + \overline{w}_3)}{\overline{v}_3} = \frac{4 - \frac{4}{8} \cdot (2+1+4)}{\frac{4}{8}} = 1.$$

Zbývající hodnoty bychom dopočítali stejně jako v předchozím případě.

3. Opět, jelikož platí

$$\overline{v}_2 = \frac{\overline{w}_2}{\underline{w}_1 + \overline{w}_2 + \underline{w}_3 + \underline{w}_4},$$

tak

$$\underline{w}_3 = \frac{\overline{w}_2 - \overline{v}_2 \cdot (\underline{w}_1 + \overline{w}_2 + \underline{w}_4)}{\overline{v}_2} = \frac{4 - \frac{4}{9} \cdot (2+4+1)}{\frac{4}{9}} = 2.$$

Zbývající hodnoty bychom dopočítali stejně jako v prvním případě.

Závěr

Cílem diplomové práce bylo seznámit se blíže s problematikou normování intervalových vah a fuzzy vah a různými metodami, které byly za tímto účelem v průběhu let vytvořeny.

První kapitola zabývající se hlavně základy teorie fuzzy množin představuje teoretický základ, který je poté používán v dalších částech.

Druhá kapitola je přehledem metod normování intervalových vah a fuzzy vah. Metody jsou zde nejprve představeny a poté i hodnoceny. Poukazuji na důvody, proč která metoda není vyhovující (pokud není), což poté obvykle demonstruji na numerických příkladech. U některých metod se jedná spíše o drobnější prohřešky proti požadovaným vlastnostem, jindy ale jde o tak závažné problémy, že činí metodu naprosto nepoužitelnou, jako například v případě metody Changa a Leeho, kdy struktura po normování porušuje vlastnosti fuzzy množin.

Třetí kapitola demonstruje, jak se jednotlivé metody numericky chovají. V některých případech příklad funguje i jako podpora skutečností a výtek uvedených v předchozí kapitole. Kromě číselného (v případě intervalových vah) a grafického (v případě fuzzy vah) znázornění tato část obsahuje i porovnání jednotlivých metod z hlediska Sevastjanovem navrhnutých měr přesnosti normování. Tato část také zkoumá, jak se tyto míry u jednotlivých metod chovají v závislosti na různých parametrech.

Poslední kapitola je pak věnována porovnání normování ostrých vah a normování intervalových vah. Snaží se najít odpověď na otázku, jestli si intervalové váhy zachovávají své poměry před normováním a po normování. Tato kapitola dále zkoumá, jestli i v případě intervalových vah jsme schopni ze znalosti normovaných vah a jedné nenulové nenormované váhy zjistit ostatní nenormované váhy, tak, jak je tomu v případě ostrých vah. Jelikož tomu tak ale není, snažím se zjistit, jakou minimální znalost o nenormovaných intervalových vahách musím mít, abych byl schopen nenormované váhy dopočítat. K tomuto problému jsem sestavil větu, kterou jsem následně i dokázal. Důkaz zároveň slouží i jako výpočetní algoritmus.

K číselnému a grafickému porovnání jednotlivých metod jsem vytvořil několik m-filů v programu Matlab. Další m-fily poté slouží ke znázornění a porovnání různých množin a faktorů.

Díky diplomové práci jsem si rozšířil znalosti z teorie fuzzy množin a vah. Naučil jsem se kritickému přijímaní předložených textů a samostatnému uvažování. Kromě jiného jsem si připomněl práci s programem Matlab. Do budoucnosti bych chtěl lépe a hlouběji porozumět normování fuzzy vektorů dle principu rozšíření, které by si nejspíš zasloužilo větší pozornost.

Literatura

[1] Chang, P.T., Lee, E.S.: *The estimation of normalized fuzzy weights.* Comput. Math. Appl. 5 (1995), s. 21–42.

[2] Jimenéz A., Ríos–Insua, S., Mateos, A.: *A decision support system for multiatribute utility evaluation based on imprecise assignments.* Decision Support Systems 36 (2005), s. 65–79.

[3] Wang, Y.M., Elhag, T.M.S.: *On the normalization of interval and fuzzy weights.* Fuzzy Sets and Systems 157 (2006), s. 2456–2471.

[4] Sevastjanov, P., Dymova, L., Bartosiewicz, P.: *A new approach to normalization of interval and fuzzy weights.*, Fuzzy Sets and Systems 198 (2012), s. 34–45.

[5] Pavlačka, O.: *On various approaches to normalization of interval and fuzzy weights.* Fuzzy Sets and Systems 243 (2014), s. 110–130.

[6] Pavlačka, O.: *Note to the lack of equality between fuzzy weighted average and fuzzy convex sum.* Fuzzy Sets and Systems 213 (2013), s. 102–105.

[7] Dubois, D.: *Fuzzy weighted averages and fuzzy convex sums: Author's response.* Fuzzy Sets and Systems 213 (2013), s. 106–108.

[8] Xu, R.: *Fuzzy least–squares priority method in the analytic hierarchy process.* Fuzzy Sets and Systems 112 (2000), s. 359–404.

Přílohy

Příloha 1: CD s m-fily pro MATLAB

CD s m-fily pro MATLAB je přiloženo na zadní straně desek.