UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Konjunktní a disjunktní agregační operátory

Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Ondřej Pavlačka Ph.D.
Rok odevzdání: 2011

Vypracovala:
Miroslava Slezáková
AME, II.ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto diplomovou práci samostatně pod vedením RNDr. Ondřeje Pavlačky Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování.

V Olomouci dne 31. března 2011

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala především svému vedoucímu diplomové práce RNDr. Ondřeji Pavlačkovi Ph.D. za obětavou práci a čas, který mi věnoval při konzultacích.
Poděkování patří také mé rodině a přátelům, kteří mě při studiu podporují, bez nich bych se do navazujícího studia nepřihlásila.

Obsah

1 Úvod **6**

2 Agregační operátory **7**
2.1 Definice a vlastnosti agregačních operátorů 7
2.2 Členění agregačních operátorů 11

3 Konjunktní a disjunktní agregační operátory **12**
3.1 Definice a vlastnosti t-norem a t-konorem 12
3.2 Vlastnosti t-norem a t-konorem 27
3.3 Parametrické třídy t-norem a t-konorem 31
3.4 Fuzzy negace a duální t-normy a t-konormy 36

4 Využití konjunktních a disjunktních agregačních operátorů **39**
4.1 Modelování průniku a sjednocení fuzzy množin 39
4.2 Fuzzy logika 57

5 Závěr **63**

Přílohy **66**

Použité značení

$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\langle a, b\rangle$	uzavřený interval s mezemi a a b
(a, b)	otevřený interval s mezemi a a b
a	anihilátor
e	neutrální element
$T(a, b)$	t-norma
$T_{MIN}(a, b)$	standardní t-norma
$T_L(a, b)$	Łukasiewiczova t-norma
$T_P(a, b)$	součinová t-norma
$T_D(a, b)$	drastická t-norma
$S(a, b)$	t-konorma
$S_{MAX}(a, b)$	standardní t-konorma
$S_L(a, b)$	Łukasiewiczova t-konorma
$S_P(a, b)$	součinová t-konorma
$S_D(a, b)$	drastická t-konorma
log_p	logaritmus o základu p
$N(x)$	standardní negace
$N_I(x)$	intuitionistická negace
$N_W(x)$	slabá negace
$N_\lambda(x)$	silná negace
μ_A	funkce příslušnosti fuzzy množiny A
U	univerzum
$\mathcal{F}(U)$	systém všech fuzzy množin definovaných na univerzu U
$A \cup B$	sjednocení množin
$A \cap B$	průnik množin
A^C	doplněk množiny
$(\mathcal{V},\ \mathcal{T}(\mathcal{V}),\ X,\ G,\ M)$	jazyková proměnná
(ν, X)	bazická proměnná
A_α	α-řez fuzzy množiny A
$Ker\ A$	jádro fuzzy množiny A
$Supp\ A$	nosič fuzzy množiny A
$hgt\ A$	nosič fuzzy množiny A

$\Rightarrow$	implikace
$\Leftrightarrow$	ekvivalence
$\wedge$	konjunkce
$\vee$	disjunkce
$\underset{\bullet}{\Rightarrow}^{R}$	R-implikace
$\underset{\bullet}{\Rightarrow}^{S}$	S-implikace
$\underset{\bullet}{\Rightarrow}^{Q}$	Q-implikace

1 Úvod

Cílem této práce je seznámit čtenáře s třídou konjunktních a třídou disjunktních agregačních operátorů, s jejich matematickými vlastnostmi a s jejich možným využitím v praxi. Pod pojmem agregační operátor rozumíme posloupnost agregačních zobrazení, která dané n-tici prvků z určité množiny přiřazují prvek opět z této množiny. Charakteristickou vlastností konjunktních agregačních operátorů je, že výsledek agregace není větší než nejmenší prvek vstupující do agregace. Naopak pro disjunktní agregační operátory je charakteristickým rysem, že výsledek agregace není menší než největší prvek vstupující do agregace.

K tématu této práce mě přivedla má bakalářská práce [7], kdy jsem si při jejím zpracování nastudovala základní vlastnosti a členění agregačních operátorů.

Text práce je tematicky rozdělen do tří částí. V první části je definován agregační operátor a je zde uveden výčet matematických vlastností agregačního operátoru. V teoretickém zpracování pokračuji i v podkapitole věnované členění agregačních operátorů. Hlavní teoretická kapitola je věnována konjunktním a disjunktním agregačním operátorům. Jsou zde uvedeny základní definice těchto operátorů, nejznámější typy, výčet jejich matematických vlastností a grafické zobrazení jednotlivých typů. Kapitola je rozšířena o text zaměřený na parametrické třídy t-norem.

Třetí část je věnovaná popisu nejčastějšího využití konjunktních a disjunktních agregačních operátorů, které se nejčastěji používají k modelování průniku a sjednocení fuzzy množin a k modelování logických spojek konjunkce a disjunkce ve fuzzy logice.

2 Agregační operátory

Obsahem této kapitoly je definice agregačního operátoru a jeho matematických vlastností. Agregační operátor je posloupnost agregačních zobrazení, která dané n-tici prvků z určité množiny přiřazují prvek opět z této množiny. Ke zpracování této kapitoly jsem využila poznatků ze své bakalářské práce [7] a publikace [1].

2.1 Definice a vlastnosti agregačních operátorů

Definice 2.1. *Agregační operátor A na intervalu I, kde $I \subseteq (-\infty, \infty)$, je posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ agregačních zobrazení*

$$A_n : I^n \to I,$$

která splňují následující podmínky:

1. $A_1(x) = x$, *pro každé* $x \in I$;
2. $A_n(x_1, \ldots, x_n) \leq A_n(y_1, \ldots, y_n)$, *jestliže* $x_i \leq y_i$, *pro* $i = 1, 2, \ldots, n$ *a* $n = 2, 3, \ldots$;
3. *označíme-li* $x^- = \inf I$ *a* $x^+ = \sup I$, *pak platí*

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(x^-,\ldots,x^-)} A_n(x_1, \ldots, x_n) = x^-, \tag{1}$$

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(x^+,\ldots,x^+)} A_n(x_1, \ldots, x_n) = x^+. \tag{2}$$

Často jsou z hlediska praktických aplikací žádoucí další matematické vlastnosti agregačních operátorů, nyní si představíme nejdůležitější z nich.

Definice 2.2. *Agregační operátor $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ na I se nazývá symetrický, jestliže pro každý vektor $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ a pro všechny permutace $\sigma\{1, 2, \ldots, n\}$, platí*

$$A_n(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = A_n(x_1, \ldots, x_n). \tag{3}$$

Vlastnost symetrie je také známa pod pojmem komutativita. Znamená, že pořadí argumentů nemá žádný vliv na celkový výsledek.

Definice 2.3. *Agregační operátor $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ na I se nazývá spojitý, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, jsou agregační zobrazení A_n spojité.*

Vlastnost spojitost garantuje určitou robustnost a konzistenci daného agregačního operátoru.

Podle následující věty je v případě symetrických agregačních operátorů pro ověření jejich spojitosti postačující, ověří-li se spojitost pouze v jedné proměnné.

Věta 2.1. *Nechť $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je symetrický agregační operátor na I. Operátor A je spojitý právě tehdy, když pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zobrazení A_n spojité v první své proměnné, tj. jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x_2, \ldots, x_n \in I$ je funkce jedné proměnné $A(\cdot, x_2, \ldots, x_n)$ spojitá na intervalu I.*

Důkaz: Viz [4].

Definice 2.4. *Agregační operátor $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ na I se nazývá ryze monotónní, pokud jsou jednotlivé agregační zobrazení A_n ryze monotónní.*

Vlastnost ryzí monotónnost znamená, že jakékoli zvýšení hodnoty kterékoli proměnné zvýší hodnotu celkové agregace.

Definice 2.5. *Agregační operátor $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ na I se nazývá ryzí, jestliže A_n je ryze monotónní a spojitý pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.*

Definice 2.6. *Agregační operátor $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ na I se nazývá asociativní, jestliže pro každé $m, n \subseteq \mathbb{N}, m, n \geq 2$ a pro každou m-tici $(x_1, \ldots, x_m) \in I^m$ a n-tici $(y_1, \ldots, y_n) \in I^n$, platí*

$$A_{m+n}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = A_2(A_m(x_1, \ldots, x_m), A_n(y_1, \ldots, y_n)). \qquad (4)$$

Tato vlastnost znamená, že můžeme provádět agregaci po částech, přičemž volba jednotlivých částí nám neovlivní výsledek celkové agregace. Užitečná je i z toho titulu, že nám umožňuje definovat agregační operátor pouze zadáním předpisu agregačního zobrazení A_2. Agregační zobrazení A_n pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, jsou pak určena následovně

$$A_n(x_1, \ldots, x_n) = A_2(A_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n). \tag{5}$$

Definice 2.7. *Agregační operátor $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ na I se nazývá rozložitelný, jestliže pro každé m, n=2,3,... a pro každou n-tici $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ a m-tici $(y_1, \ldots, y_n) \in I^m$ platí*

$$A_{n+m}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) =$$

$$A_{n+m}(\underbrace{A_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots, A_n(x_1, \ldots, x_n)}_{n-krát}, y_1, \ldots, y_m). \tag{6}$$

Definice 2.8. *Řekneme, že agregační operátor $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ na I má anihilátor $a \in I$, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, a pro každé $x_1, \ldots, x_{n-1} \in I$ platí*

$$A_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, a) = a. \tag{7}$$

Anihilátor neboli též absorpční element a může být interpretován jako stav eliminace nebo veto, může být také považován jako stav kvalifikační.

Definice 2.9. *Řekneme, že agregační operátor $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ na I má neutrální element $e \in I$, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, a pro každé $x_1, \ldots, x_{n-1} \in I$ platí*

$$A_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, e) = A_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{8}$$

Pokud má agregační operátor neutrální element e, nebude mít tento neutrální element žádný vliv na agregaci.

Definice 2.10. *Agregační operátor $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ na I se nazývá bisymetrický, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nn} \in I$ platí*

$$A_n(A_n(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, A_n(x_{n1}, \ldots, x_{nn})) =$$

$$= A_n(A_n(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}), \ldots, A_n(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn})). \tag{9}$$

Bisymetrie je vlastnost spojená s agregací n^2 vstupů pro n-té operátory. Pokud napíšeme tyto vstupy do čtvercové matice, pak bisymetrie znamená, že nezáleží na tom, jestli první agregujeme sloupcové vektory a potom výstupy nebo naopak, prvně agregujeme řádkové vektory a potom příslušné výstupy.

Poznámka 2.1. *Pokud je agregační operátor symetrický a asociativní, potom je nutně bisymetrický. Naopak, bisymetrie neimplikuje komutativnost nebo asociativitu.*

Definice 2.11. *Agregační operátor $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ na I se nazývá idempotentní, jestliže pro každé $x \in I$ platí*

$$A_n(x, x, \ldots, x) = x. \tag{10}$$

Idempotentnost znamená, že pokud agregujeme n-krát stejnou hodnotu, pak výsledkem bude ta samá hodnota.

Definice 2.12. *Řekneme, že agregační operátor $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ na I se nazývá vyvážitelný, jestliže pro každé $t \in I$ a pro každé $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, existují $y_1, \ldots, y_m \in I^m$ takové, že*

$$A_{n+m}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = t. \tag{11}$$

Vyvážitelnost (z angl. counterbalancement) operátoru znamená, že ať už do agregace vstoupí jakékoli hodnoty, přidáním vhodných prvků z I lze dosáhnout toho, že výsledkem celkové agregace bude libovolná hodnota z I.

Poznámka 2.2. *Agregační operátory, které mají anihilátor, nejsou vyvážitelné.*

V následují větě je ukázáno, že transformací libovolného agregačního operátoru pomocí ryze monotónní bijekce z I do I získáme opět agregační operátor.

Věta 2.2. *Nechť $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ na I je agregační operátor a nechť $\psi : I \to I$ je rostoucí nebo klesající bijekce. Potom $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definován pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každou n-tici $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$, vztahem*

$$A_n^{\psi}(x_1, \ldots, x_n) = \psi^{-1} A_n(\psi(x_1), \ldots, \psi(x_n)) \tag{12}$$

je agregačním operátorem.

2.2 Členění agregačních operátorů

Z praktického hlediska můžeme agregační operátory rozdělit podle jejich výstupních hodnot do čtyř tříd: na konjunktní, disjunktní, průměrující a smíšené operátory.
Charakteristickou vlastností *konjunktních* agregačních operátorů je, že výsledek agregace není větší než nejmenší agregovaný prvek, tj. pro každé $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ platí

$$A_n(x_1, \ldots, x_n) \leq \min\{x_1, \ldots, x_n\}. \tag{13}$$

Naopak pro *disjunktní* agregační operátory platí, že výsledek agregace není menší než největší agregovaný prvek, tj. pro každé $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ platí

$$A_n(x_1, \ldots, x_n) \geq \max\{x_1, \ldots, x_n\}. \tag{14}$$

Důležitou vlastností pro *průměrující* agregační operátory je tzv. Paretova vlastnost neboli vlastnost kompenzace. Zde očekáváme, že výsledek agregace leží mezi agregovanými prvky, tj. pro každé$(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ platí

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq A_n(x_1, \ldots, x_n) \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\}. \tag{15}$$

Třída *smíšených* agregačních operátorů je tvořena agregačními operátory, pro které neplatí ani jedna z uvedených podmínek (13), (14), (15).
Speciálními případy, které patří do více tříd, jsou agregační operátory minimum, jež udává nejmenší hodnotu ze souboru, maximum, které udává naopak největší. Jako agregační operátory vyhovují základním axiomům první definice. Tyto agregační operátory jsou monotónní, symetrické, asociativní a idempotentní. Jestliže pracujeme na omezeném intervalu $I = \langle a, b \rangle$, minimum má anihilátor v bodě a, neutrální element v bodě b. Naopak pro maximum je bod a neutrální element a bod b je anihilátor. Naopak na otevřeném intervalu I minimum resp. maximum nemá anihilátor ani neutrální element.

3 Konjunktní a disjunktní agregační operátory

V této kapitole se seznámíme s konkrétními konjunktními a disjunktními agregačními operátory a uvedeme si jejich charakteristické vlastnosti. Nejčastěji se využívají pro modelování logických spojek konjunkce a disjunkce ve vícehodnotové logice a pro modelování průniku a sjednocení fuzzy množin. Jelikož v obou případech je definičním oborem agregačních operátorů uzavřený interval $\langle 0,1\rangle$, budeme dále předpokládat, že $I = \langle 0,1\rangle$.

3.1 Definice a vlastnosti t-norem a t-konorem

Tato kapitola je věnována speciálním konjunktním a disjunktním operátorům, tzv. trojúhelníkovým normám a konormám (v angl. literatuře triangular norms, triangular conorms). S těmito agregačními operátory se můžeme setkat např. v teorii rozhodování, v technických a technologických oborech apod., kde tyto funkce hrají podstatnou roli.

Definice 3.1. *T-norma je binární operace $T : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$, splňující následující axiomy pro každé $a, b, c, d \in \langle 0,1\rangle$:*

$$T(a,b) = T(b,a), \tag{16}$$

$$T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c)), \tag{17}$$

$$T(a,b) \le T(c,d),\ \forall a \le c, b \le d, \tag{18}$$

$$T(a,1) = a. \tag{19}$$

Definice 3.2. *T-konorma je binární operace $S : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$, splňující následující axiomy pro každé $a, b, c, d \in \langle 0,1\rangle$:*

$$S(a,b) = S(b,a), \tag{20}$$

$$S(S(a,b),c) = S(a,S(b,c)), \tag{21}$$

$$S(a,b) \le S(c,d),\ \forall a \le c, b \le d, \tag{22}$$

$$S(a,0) = a. \tag{23}$$

Podmínky v uvedených definicích představují komutativitu, asociativitu a monotonii. Ze čtvrté podmínky vidíme, že neutrálním elementem pro t-normy je 1 a pro t-konormy 0.

Poznámka 3.1. *Definiční vlastnosti t-norem (resp. t-konorem) reprezentují přirozené minimální požadavky, které na takovou operaci můžeme mít. Jelikož operaci konjunkce (resp. disjunkce) běžně užíváme pro agregaci více prvků, kdy nám nezáleží na pořadí agregovaných prvků, využíváme vlastnost komutativitu a asociativitu. Monotonie je rovněž přirozený požadavek, neboť průnik (resp. sjednocení) menších množin je vždy menší nežli průnik množin větších.*

Vlastnosti komutativita a asociativita umožňují rozšířit t-normy a t-konormy (představeny jako binární operace) na n-ární operace.

Definice 3.3. *Nechť T je t-norma. Její rozšíření na více než dva argumenty je definované vztahem*

$$T^{i+1}(a_1, a_2, \dots, a_{i+2}) = T(T^i(a_1, a_2, \dots, a_{i+1}), a_{i+2}), \tag{24}$$

pro každé i=1,2,... n, kde $T^1(a_1, a_2) = T(a_1, a_2)$.

Definice 3.4. *Nechť S je t-konorma. Její rozšíření na více než dva argumenty je definované vztahem*

$$S^{i+1}(a_1, a_2, \dots, a_{i+2}) = S(S^i(a_1, a_2, \dots, a_{i+1}), a_{i+2}), \tag{25}$$

pro každé i=1,2,... n, kde $S^1(a_1, a_2) = S(a_1, a_2)$.

Poznámka 3.2. *Posloupnost zobrazení $T = \{T^i\}_{i=1}^{\infty}$ (resp. $S = \{S^i\}_{i=1}^{\infty}$) tvoří agregační operátor. Označením T (resp. S) v práci označujeme jak operaci t-normy (resp. t-konormy) tak agregační operátor. Z obsahu textu bude vždy zřejmé o co se jedná, případně na to upozorníme.*

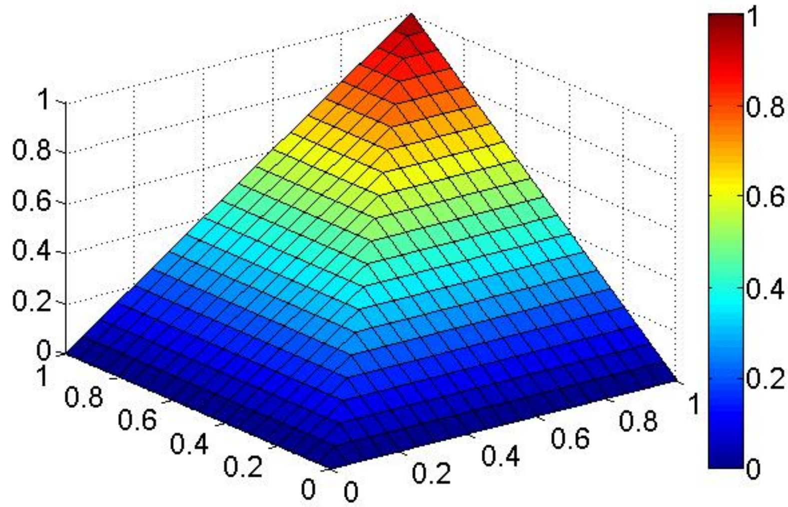
V následujícím textu uvedeme několik příkladů nejčastěji používaných t-norem a t-konorem a jejich charakteristických vlastností. Výčet charakteristických vlastností je doplněn o důkazy v případě, že nebyly uvedeny v námi dostupné literatuře. Souhrnná tabulka jednotlivých t-norem a t-konorem a jejich vlastností je uvedena v příloze.

Definice 3.5. *T-normu*

$$T_{MIN}(a,b) = \min\{a,b\} \tag{26}$$

nazveme t-norma standardní.

V literatuře se můžeme setkat s ekvivalentními názvy pro standardní t-normu jako např: minimální, Zadehova a také Gödelova t-norma.



Obr. 1 Standardní t-norma

Definice 3.6. *Nechť T_{MIN} je standardní t-norma. Její rozšíření na více než dva argumenty je definované vztahem*

$$T_{MIN}^{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}. \tag{27}$$

Věta 3.1. *Standardní t-norma T_{MIN} je symetrický, asociativní, rozložitelný a bisymetrický agregační operátor.*

Důkaz: Pro T_{MIN} platí, že na výsledek operace nemá žádný vliv pořadí agregovaných prvků, tedy se jedná o symetrický operátor.
Mějme $x_i, y_j \in \langle 0,1 \rangle,\ i = 1,\ldots,n$ a $j = 1,\ldots,m;\ n,m \in \mathbb{N},\ m,n \geq 2$. Vlastnost asociativitu, si můžeme ověřit následovně:

$$T_{MIN}(T_{MIN}(x_1,\ldots,x_n), T_{MIN}(y_1,\ldots,y_m)) =$$

$$= T_{MIN}(\min\{x_1, \ldots, x_n\}, \min\{y_1, \ldots, y_m\}) = \min\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\} =$$

$$= T_{MIN}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

Vlastnost rozložitelnost ověříme následovně:

$$T_{MIN}(T_{MIN}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, T_{MIN}(x_1, \ldots, x_n), y_1, \ldots, y_m) =$$

$$= \min\{\min\{x_1, \ldots, x_n\}, \ldots, \min\{x_1, \ldots, x_n\}, y_1, \ldots, y_m\} =$$

$$= \min\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\} = T_{MIN}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

Z *Pozn. 2.1.* plyne, že T_{MIN} je bisymetrický operátor.

□

Věta 3.2. *Standardní t-norma T_{MIN} je jediná idempotentní t-norma, tedy pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$ platí*

$$T_{MIN}(x, x) = x.$$

Důkaz: Viz [4].

Příklad 3.1. *Ukážeme si, že standardní t-norma není ryze monotónní agregační operátor. K ověření ryzí monotónnosti nám postačí ověřit, zda při zvýšení některé z agregovaných hodnot se výsledek agregace zvýší.*
Mějme $x_1 = 0,5;\ x_2 = 0,8$

$$T_{MIN}(x_1, x_2) = T_{MIN}(0,5; 0,8) = \min\{0,5; 0,8\} = 0,5.$$

Pro hodnotu zvýšenou hodnotu $x_2 = 0,9$ *dostaneme*

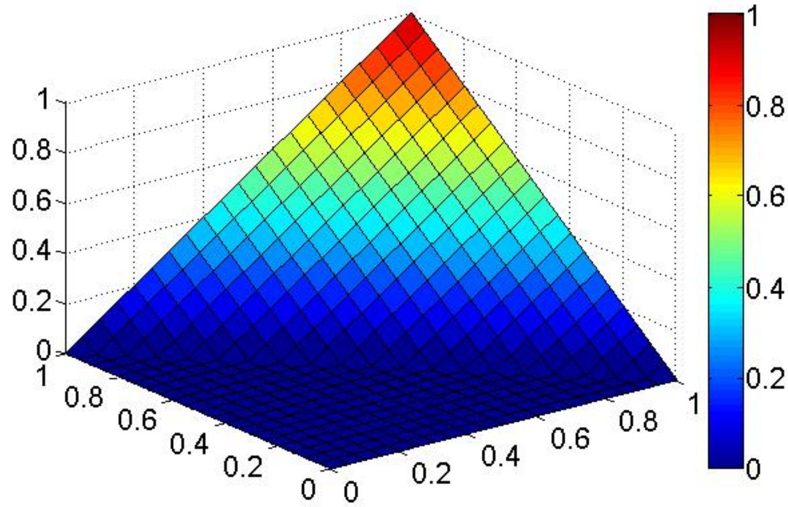
$$T_{MIN}(x_1, x_2) = T_{MIN}(0,5; 0,9) = \min\{0,5; 0,9\} = 0,5.$$

Odtud T_{MIN} *není ryze monotónní operátor.* □

Definice 3.7. *T-normu*

$$T_L(a, b) = \max\{0, a + b - 1\} \tag{28}$$

nazveme Łukasiewiczova t-norma.



Obr. 2 Łukasiewiczova t-norma

Definice 3.8. *Nechť T_L je Łukasiewiczova t-norma. Její rozšíření na více než dva argumenty je definované vztahem*

$$T_L^{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \max\{0, \sum_{i=1}^{m} a_i - (m-1)\}. \tag{29}$$

Věta 3.3. *Łukasiewiczova t-norma T_L je symetrický, asociativní a bisymetrický agregační operátor.*

Důkaz: Pro T_L platí, že na výsledek operace nemá vliv pořadí agregavaných prvků, tedy se jedná o symetrický operátor.
Vlastnost asociativitu si můžeme dokázat následovně.
Mějme $x_i \in \langle 0, 1\rangle,\ i = 1, ..., n$, pak platí

$$T_L(T_L(x_1, \ldots, x_k), T_L(x_{k+1}, \ldots, x_n)) =$$

$$= T_L(\max\{0, \sum_{j=1}^{k} x_j - (k-1)\}, \max\ \{0, \sum_{l=k+1}^{n} x_l - (n-k-1)\}) =$$

$$= \max\{0, \sum_{j=1}^{k} x_j - (k-1) + \sum_{l=k+1}^{n} x_l - (n-k-1) - 1\} =$$

$$= \max\{0, \sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{l=k+1}^{n} x_l - k + 1 - n + k + 1 - 1\} = \max\{0, \sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1)\}.$$

Z *Pozn. 2.1.* plyne, že T_L je bisymetrický operátor. □

Příklad 3.2. *Ukážeme si, že Łukasiewiczova t-norma není rozložitelný agregační operátor. Mějme* $x_1 = 0,9;\ x_2 = 0,8;\ x_3 = 0,7$ *a* $y_1 = 0,8$.

$$T_L(x_1, x_2, x_3, y_1) = T_L(0,9; 0,8; 0,7; 0,8) = \max\{0; 0,9+0,8+0,7+0,8-3\} = 0,2.$$

$$T_L(T_L(x_1, x_2, x_3),\ T_L(x_1, x_2, x_3),\ T_L(x_1, x_2, x_3),\ y_1) =$$

$$= T_L(0,4; 0,4; 0,4; 0,8) = \max\{0; 0,4 + 0,4 + 0,4 + 0,8 - 3\} = 0.$$

$$T_L(x_1, x_2, x_3, y_1) \neq T_L(T_L(x_1, x_2, x_3), T_L(x_1, x_2, x_3), T_L(x_1, x_2, x_3), y_1).$$

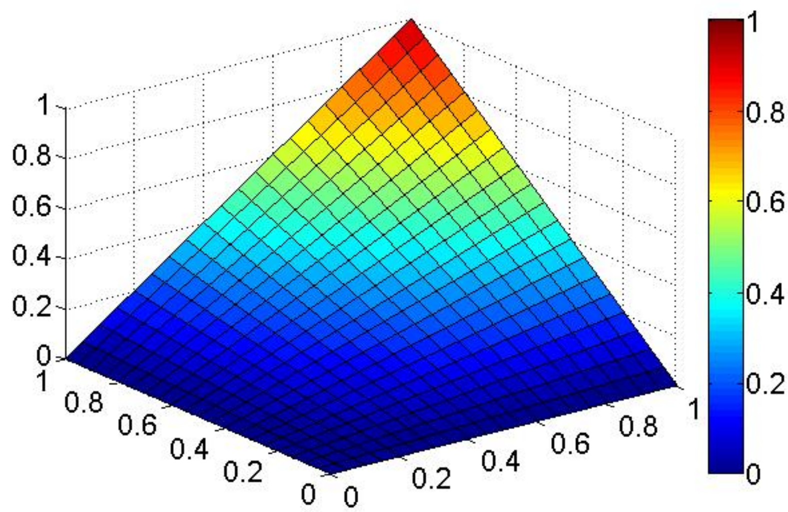
□

Definice 3.9. *T-normu*

$$T_P(a, b) = a \cdot b \tag{30}$$

nazveme součinová t-norma.

V literatuře se setkáváme s různými synonymy jako např: produktová, pravděpodobností t-norma (ang. product t-norm).



Obr. 3 Součinová t-norma

Definice 3.10. *Nechť T_P je součinová t-norma. Její rozšíření na více než dva argumenty je definované vztahem*

$$T_P^{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \prod_{i=1}^{m} a_i. \tag{31}$$

Věta 3.4. *Součinová t-norma T_P je symetrický, asociativní, bisymetrický a ryze monotónní agregační operátor.*

Důkaz: Pro T_P platí, že na výsledek operace nemá žádný vliv pořadí agregovaných prvků, tedy se jedná o symetrický operátor.
Vidíme, že pro $x_i, y_j \in \langle 0,1\rangle,\ i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,m;\ n,m \in \mathbb{N},\ m,n \geq 2$ platí

$$T_P(T_P(x_1,\ldots,x_n), T_P(y_1,\ldots,y_m)) = T_P(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n, y_1 \cdot \ldots \cdot y_m) =$$

$$= x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot y_m = T_P(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m).$$

Z *Pozn. 2.1.* plyne, že T_P je bisymetrický operátor.
Je zřejmé, že při zvýšení kterékoli hodnoty vstupující do operace, se nám zvýší i celkový výsledek operace, tedy T_P je ryze monotónní operátor. □

Příklad 3.3. *Ukážeme si, že součinová t-norma T_P není rozložitelný agregační operátor. Vidíme, že pro každé $x_1,\ x_2,\ y \in \langle 0,1\rangle$ platí*

$$T_P(x_1, x_2, y) = x_1 \cdot x_2 \cdot y.$$

$$T_P(T_P(x_1,x_2), T_P(x_1,x_2), y) = T_P(x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2, y) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot y.$$

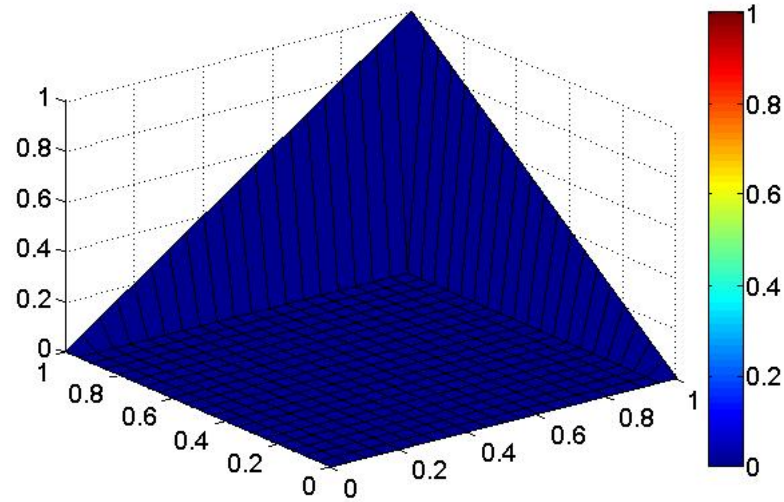
$$T_P(x_1,x_2,y) \neq T_P(T_P(x_1,x_2), T_P(x_1,x_2), y).$$

□

Definice 3.11. *T-normu*

$$T_D(a,b) = \begin{cases} \min\{a,b\}, & \textit{jestliže max}\{a,b\}\textit{=1} \\ 0, & \textit{jinak} \end{cases} \tag{32}$$

nazveme t-norma drastická.



Obr. 4 Drastická t-norma

Definice 3.12. *Nechť T_D je drastická t-norma. Její rozšíření na více než dva argumenty je definované vztahem*

$$T_D^{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \begin{cases} a_i, \text{ jestliže } a_j = 1 \text{ pro každé } j \neq i, \\ 0, \text{ jinak.} \end{cases} \tag{33}$$

Věta 3.5. *Drastická t-norma T_D je symetrický, asociativní a bisymetrický agregační operátor.*

Důkaz: Pro T_D platí, že na výsledek operace nemá žádný vliv pořadí agregovaných prvků, tedy se jedná o symetrický operátor. Asociativitu si můžeme ověřit následovně, pro $x_i, y_j \in \langle 0, 1\rangle,\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m;\ n, m \in \mathbb{N},\ m, n \geq 2$ platí

$$T_D(T_D(x_1, \ldots, x_i), T_D(x_{i+1}, \ldots, x_n)) = T_D(T_{D1}, T_{D2}).$$

$$T_{D1} = T_D(x_1, \ldots, x_i) = \begin{cases} x_j,\ x_k = 1 \text{ pro } k = 1, \ldots, i;\ k \neq j, \\ 0, \text{ jinak.} \end{cases}$$

$$T_{D2} = T_D(x_{i+1}, \ldots, x_n) \begin{cases} x_j,\ x_k = 1 \text{ pro } k = i+1, \ldots, n;\ k \neq j, \\ 0, \text{ jinak.} \end{cases}$$

$$\text{Můžou nám nastat čtyři případy} \begin{cases} T_{D1} \neq 1 \wedge T_{D2} \neq 1, \text{ pak } T_D(T_{D1}, T_{D2}) = 0, \\ T_{D1} = 1 \wedge T_{D2} \neq 1, \text{ pak } T_D(T_{D1}, T_{D2}) = T_{D2}, \\ T_{D1} \neq 1 \wedge T_{D2} = 1, \text{ pak } T_D(T_{D1}, T_{D2}) = T_{D1}, \\ T_{D1} = T_{D2} = 1, \qquad \text{ pak } T_D(T_{D1}, T_{D2}) = 1. \end{cases}$$

První případ znamená, že v n-tici $x_1, \ldots, x_n$ jsou minimálně 2 hodnoty různé od 1, pak $T_D(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
V druhých dvou případech existuje právě jedna hodnota $x_j \neq 1$, výsledkem je pak x_j.
V posledním případě jsou výsledky dílčích t-norem rovny 1, pak i výsledek celkové t-normy je roven 1.
Ověřili jsme tedy T_D je asociativní agregační operátor.
Z *Pozn. 2.1.* plyne, že T_D je bisymetrický operátor.

□

Příklad 3.4. *Ukážeme si, že drastická t-norma T_D není rozložitelný operátor. Mějme $x_1 = 0,5;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1;\ x_4 = 1;\ x_5 = 1$.*

$$T_D(x_1, \ldots, x_5) = T_D(0,5;\ 1,\ 1,\ 1,\ 1) = 0,5.$$

$$T_D(\underbrace{T_D(x_1, \ldots, x_4), \ldots,\ T_D(x_1, \ldots, x_4)}_{4-krát},\ x_5) = T_D(0,5;\ 0,5;\ 0,5;\ 0,5;\ 1) = 0.$$

$$T_D(x_1, \ldots, x_5) \neq T_D(\underbrace{T_D(x_1, \ldots, x_4), \ldots,\ T_D(x_1, \ldots, x_4)}_{4-krát},\ x_5).$$

Obdobně jako v Příkladě 3.1. lze ukázat, že drastická t-norma není ryze monotónní operátor.

□

Poznámka 3.3. *Z uvedených typů t-norem je jen drastická t-norma nespojitá (viz [4]).*

Věta 3.6. *Jediná t-norma T, která splňuje pro každé $x \in \langle 0, 1)$ vztah*

$$T(x, x) = 0,$$

je drastická t-norma T_D .

Důkaz: Viz [1].

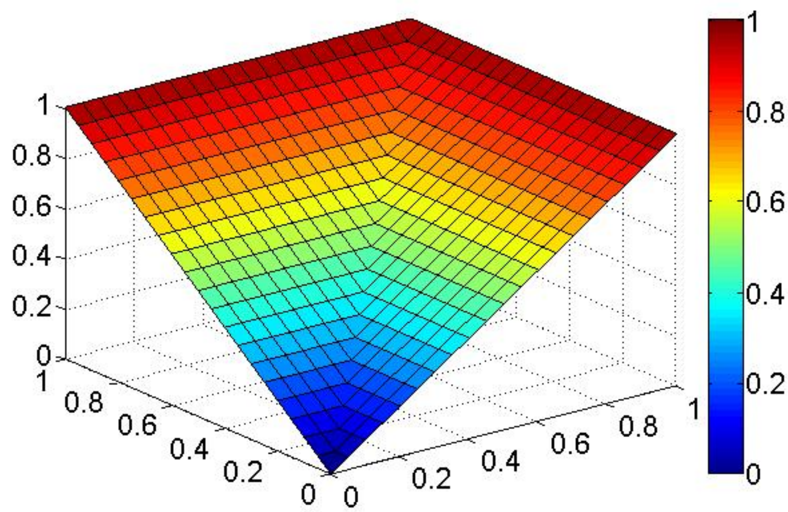
Nyní zaměříme naši pozornost na t-konormy.

Definice 3.13. *T-konormu*

$$S_{MAX}(a, b) = \max\{a, b\} \tag{34}$$

nazveme t-konorma standardní.

V literatuře se můžeme setkat s ekvivalentními názvy pro standardní t-konormu jako např: maximální, Zadehova a také Gödelova t-konorma.



Obr. 5 Standardní t-konorma

Definice 3.14. *Nechť S_{MAX} je standardní t-konorma. Její rozšíření na více než dva argumenty je definované vztahem*

$$S_{MAX}^{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}. \tag{35}$$

Věta 3.7. *Standardní t-konorma S_{MAX} je symetrický, asociativní, rozložitelný a bisymetrický agregační operátor.*

Důkaz: Důkaz se provádí analogicky jako ve *Větě 3.1.*

□

Příklad 3.5. *Ukážeme si, že standardní t-konorma není ryze monotónní agregační operátor.*
Mějme $x_1 = 0,5$ a $x_2 = 0,7$

$$S_{MAX}(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\} = \max\{0,5; 0,7\} = 0,7.$$

Pro hodnoty $x_1 = 0,6$ a $x_2 = 0,7$ dostaneme

$$S_{MAX}(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\} = \max\{0,6; 0,7\} = 0,7.$$

Porovnáme-li výsledky agregace, vidíme, že zvýšením hodnoty vstupující do agregace se nám výsledek nezvýšil. Odtud standardní t-konorma není ryze monotónní operátor.

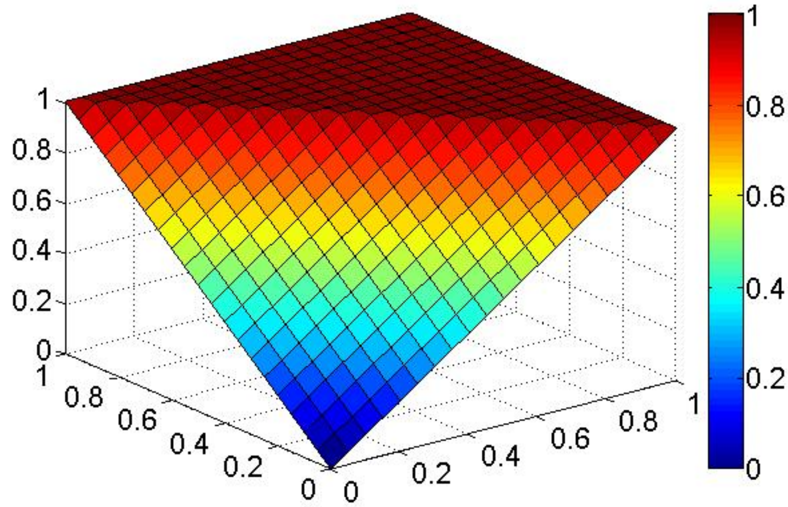
□

Definice 3.15. *T-konormu*

$$S_L(a, b) = \min\{1, a + b\} \tag{36}$$

nazveme Łukasiewiczova t-konorma.

V anglické literatuře se setkáváme s Łukasiewiczovou t-konormou pod pojmy bold, bounded sum.



Obr. 6 Łukasiewiczova t-konorma

Definice 3.16. *Nechť S_L je Łukasiewiczova t-konorma. Její rozšíření na více než dva argumenty je definované vztahem*

$$S_L^{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \min\{1, \sum_{i=1}^{m} a_i\}. \tag{37}$$

Věta 3.8. *Łukasiewiczova t-konorma S_L je symetrický, asociativní a bisymetrický agregační operátor.*

Důkaz: Důkaz se provádí analogicky jako ve *Větě 3.3.*

□

Příklad 3.6. *Ukážeme si, že Łukasiewiczova t-konorma S_L není rozložitelný agregační operátor. Mějme $x_1 = 0,1$; $x_2 = 0,1$; $x_3 = 0,1$ a $y_1 = 0,2$; $y_2 = 0,1$; $y_3 = 0,2$.*

$$S_L(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = S_L(0,1; 0,1; 0,1; 0,2; 0,1; 0,2) =$$

$$= \min\{1; 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,2\} = 0,8.$$

$$S_L(S_L(x_1, x_2, x_3), S_L(x_1, x_2, x_3), S_L(x_1, x_2, x_3), y_1, y_2, y_3) =$$

$$= S_L(\min\{1; 0,1+0,1+0,1\}, \min\{1; 0,1+0,1+0,1\}, \min\{1; 0,1+0,1+0,1\},$$
$$0,2; 0,1; 0,1) = S_L(0,3; 0,3; 0,3; 0,2; 0,1; 0,2) =$$
$$= \min\{1; 0,3+0,3+0,3+0,2+0,1+0,3\} = 1.$$

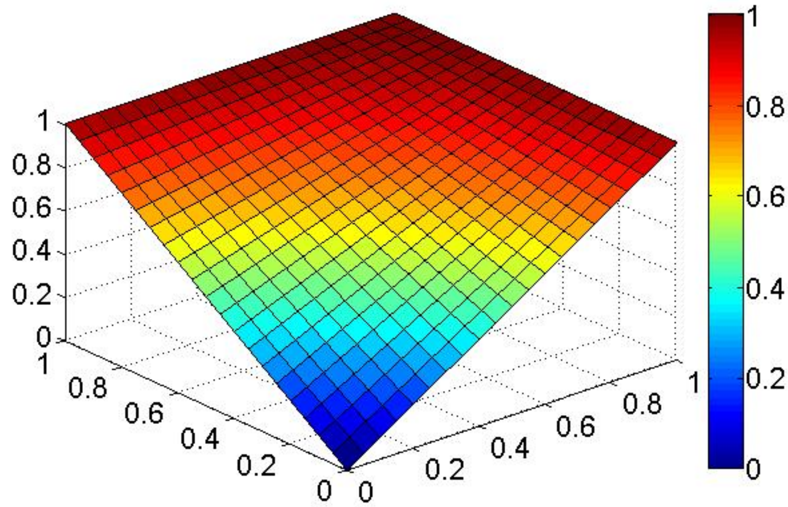
$S_L(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \neq S_L(S_L(x_1, x_2, x_3), S_L(x_1, x_2, x_3), S_L(x_1, x_2, x_3), y_1, y_2, y_3)$. *Obdobně jako v Příkladě 3.5. lze ukázat, že Łukasiewiczova t-konorma není ryze monotónní operátor.*

□

Definice 3.17. *T-konormu*

$$S_P(a, b) = a + b - a \cdot b \tag{38}$$

nazveme t-konorma součinová.



Obr. 7 Součinová t-konorma

Definice 3.18. *Nechť S_P je součinová t-konorma. Její rozšíření na více než dva argumenty je definované vztahem*

$$S_P^{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - a_i). \tag{39}$$

Věta 3.9. *Součinová t-konorma S_P je symetrický, ryze monotónní a bisymetrický operátor.*

Důkaz: Pro S_P platí, že na výsledek operace nemá žádný vliv pořadí agregovaných prvků, tedy se jedná o symetrický operátor.
Je zřejmé, že při zvýšení kterékoli hodnoty vstupující do operace, se nám zvýší i celkový výsledek operace, tedy S_P je ryze monotónní operátor.
Bisymetrii si dokážeme následovně:

$$S_P(S_p(x_{11},\ldots,x_{1n}),\ldots,S_p(x_{n1},\ldots,x_{nn})) =$$

$$= Sp(1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_{1i}),\ldots,1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_{ni})) = 1-\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n}(1-x_{ji}) =$$

$$= Sp(1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_{j1}),\ldots,1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_{jn}) = 1-\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(1-x_{ij}).$$

□

Příklad 3.7. *Ukážeme si, že součinová t-konorma S_P není asociativní operátor. Mějme $x_1 = 0,2;\ x_2 = 0,3;\ x_3 = 0,5;\ x_4 = 0,6$.*

$S_P(x_1,x_2,x_3,x_4) = 1-(1-0,2)\cdot(1-0,3)\cdot(1-0,5)\cdot(1-0,6) = 1-0,112 = 0,888.$

$S_P(S_P(x_1,x_2),S_P(x_3,x_4)) = S_P(0,2+0,3-0,2\cdot 0,3; 0,5+0,6-0,5\cdot 0,6) = = 0,2+0,3-0,2\cdot 0,3+0,5+0,6-0,5\cdot 0,6-(0,2+0,3-0,2\cdot 0,3)\cdot(0,5+0,6-0,5\cdot 0,6) = 1,24-0,32 = 0,92.$

$$S_P(x_1,x_2,x_3,x_4) \neq S_P(S_P(x_1,x_2),S_P(x_3,x_4)).$$

□

Příklad 3.8. *Ukážeme si, že součinová t-konorma S_P není rozložitelný operátor. Mějme $x_1 = 0,1;\ x_2 = 0,4;\ y = 0,6$.*

$$S_P(x_1,x_2,y) = 1-(1-0,1)\cdot(1-0,4)\cdot(1-0,6) = 1-0,216 = 0,784.$$

$S_P(S_P(x_1,x_2),S_P(x_1,x_2),y) = S_P(0,1{+}0,4{-}0,1{\cdot}0,4;\ 0,1{+}0,4{-}0,1{\cdot}0,4;0,6) =$
$S_P(0,46;\ 0,46;\ 0,6) = 1 - 0,54 \cdot 0,54 \cdot 0,4 = 0,88336.$

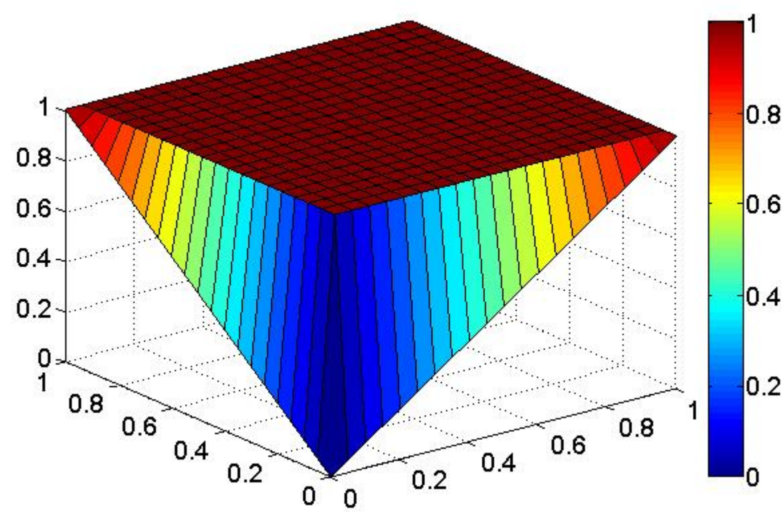
$$S_P(x_1,x_2,y) \neq S_P(S_P(x_1,x_2),S_P(x_1,x_2),y).$$

$\square$

Definice 3.19. *T-konormu*

$$S_D(a,b) = \begin{cases} \max\{a,b\}, & \textit{jestliže min } \{a,b\}=0, \\ 1, & \textit{jinak.} \end{cases} \tag{40}$$

nazveme t-konorma drastická.



Obr. 8 Drastická t-konorma

Definice 3.20. *Nechť S_D je drastická t-konorma. Její rozšíření na více než dva argumenty je definované vztahem*

$$S_D^{m-1}(a_1,a_2,\ldots,a_m) = \begin{cases} a_i, & \textit{jestliže } a_j = 0 \textit{ pro každé } j \neq i, \\ 1, & \textit{jinak.} \end{cases} \tag{41}$$

Věta 3.10. *Drastická t-konorma S_D je symetrický, asociativní a bisymetrický operátor.*

Důkaz: Důkaz se provádí analogicky jako ve *Větě 3.5.*

□

Příklad 3.9. *Ukážeme si, že drastická t-konorma S_D není rozložitelný operátor. Mějme $x_1 = 0,5;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 0$.*

$$S_D(x_1, \ldots, x_5) = S_D(0,5;\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) = 0,5.$$

$$S_D(\underbrace{S_D(x_1, \ldots, x_4), \ldots,\ S_D(x_1, \ldots, x_4)}_{4-krát},\ x_5) = S_D(0,5;\ 0,5;\ 0,5;\ 0,5;\ 0) = 1.$$

$$S_D(x_1, \ldots, x_5) \neq S_D(\underbrace{S_D(x_1, \ldots, x_4), \ldots,\ S_D(x_1, \ldots, x_4)}_{4-krát},\ x_5).$$

Obdobně jako v Příkladě 3.5. lze ukázat, že drastická t-konorma není ryze monotónní operátor.

□

Poznámka 3.4. *Z uvedených typů t-konorem je jen drastická nespojitá (viz [4]).*

Věta 3.11. *Jediná t-konorma S, která splňuje pro každé $x \in \langle 0, 1)$ vztah*

$$S(x, x) = 0$$

je drastická t-konorma S_D .

Důkaz: Viz [1].

3.2 Vlastnosti t-norem a t-konorem

Následující kapitola obsahuje věty týkající se vlastností t-norem a t-konorem se specifickými požadavky na agregované prvky. Ke zpracování jsem využila znalostí získaných z literatury [1] a zejména literatury [4].

Věta 3.12. *Pro každou t-normu T platí*

$$T(a,0) = 0,$$

kde $a \in \langle 0,1 \rangle$.

Důkaz: Viz [4].

Poznámka 3.5. *Z předchozí věty plyne, že každá t-norma má anihilátor $a = 0$. Odtud plyne, že neexistuje vyvážitelná t-norma, viz Poznámka 2.2.*

Věta 3.13. *Pro každou t-konormu S a $a \in \langle 0,1 \rangle$ platí*

$$S(a,1) = 1. \tag{42}$$

Důkaz: Viz [4].

Poznámka 3.6. *Z předchozí věty plyne, že každá t-konorma má anihilátor $a = 1$. Odtud víme, že neexistuje vyvážitelná t-konorma, viz Poznámka 2.2.*

Mezi t-normami a t-konormami můžeme uvažovat stejné uspořádání, jako známe u funkcí.

Definice 3.21. *Mějme dány t-normy T_1 a T_2. Řekneme, že t-norma T_1 je menší nebo rovna než t-norma T_2 (značíme $T_1 \leq T_2$), jestliže platí*

$$\forall a, b \in \langle 0,1 \rangle : T_1(a,b) \leq T_2(a,b). \tag{43}$$

Definice 3.22. *Mějme dány t-konormy S_1 a S_2. Řekneme, že t-konorma S_1 je menší nebo rovna než t-konorma S_2 (značíme $S_1 \leq S_2$), jestliže platí*

$$\forall a, b \in \langle 0,1 \rangle : S_1(a,b) \leq S_2(a,b). \tag{44}$$

Věta 3.14. *Mezi všemi t-normami je standardní největší a drastická nejmenší, tj. pro libovolnou t-normu T platí*

$$\forall a, b \in \langle 0,1 \rangle : T_D(a,b) \leq T(a,b) \leq T_{MIN}(a,b). \tag{45}$$

Důkaz: Viz [4].

Analogicky můžeme sestavit pořadí t-konorem.

Věta 3.15. *Mezi všemi t-konormami je standardní nejmenší a drastická největší, tj. pro libovolnou t-konormu S platí*

$$\forall a, b \in \langle 0, 1\rangle : S_{MAX}(a, b) \leq S(a, b) \leq S_D(a, b). \tag{46}$$

Důkaz: Viz [4].

Definice 3.23. *Nechť T je spojitá t-norma. Řekneme, že T je archimedovská (ang. archimedean), jestliže*

$$\forall a \in (0, 1): \quad T(a, a) < a. \tag{47}$$

Nechť S je spojitá t-konorma. Řekneme, že S je archimedovská (ang. archimedean), jestliže

$$\forall a \in (0, 1): \quad S(a, a) > a. \tag{48}$$

Poznámka 3.7. *Standardní t-norma není archimedovská t-norma. Vidíme, že nesplňuje definiční podmínku*

$$T_{MIN}(a, a) = \min\{a, a\} = a.$$

Łukasiewiczova t-norma je archimedovská t-norma. Pro $a \in (0; 0,5\rangle$ platí

$$T_L(a, a) = \max\{0, a + a - 1\} = 0 < a,$$

pro $a \in (0,5; 1)$ platí

$$T_L(a, a) = \max\{0, a + a - 1\} = 2a - 1 < a.$$

Součinová t-norma je archimedovská t-norma. Pro $a \in (0, 1)$ platí

$$T_P(a, a) = a \cdot a < a.$$

Drastická t-norma není archimedovská t-norma, nejedná se o spojitou t-normu.
Standardní t-konorma není archimedovská t-konorma. Nesplňuje podmínku

$$S_{MAX}(a, a) = \max\{a, a\} = a.$$

Łukasiewiczova t-konorma je archimedovská t-konorma. Pro $a \in (0; 0,5)$ *platí*

$$S_L(a, a) = \min\{1, a + a\} = a + a,$$

pro $a \in \langle 0,5; 1)$ *platí*

$$S_L(a, a) = \min\{1, a + a\} = 1.$$

Součinová t-konorma je archimedovská t-konorma. Pro $a \in (0, 1)$ *platí*

$$S_P(a, a) = a + a - a \cdot a = a(2 - a) > a.$$

Drastická t-konorma není archimedovská t-konorma, nejedná se o spojitou t-konormu.

Definice 3.24. *Nechť T je spojitá t-norma. Řekneme, že T je nilpotentní (ang. nilpotent), jestliže je archimedovská a není ryze monotónní.*
Nechť S je spojitá t-norma. Řekneme, že S je nilpotentní (ang. nilpotent), jestliže je archimedovská a není ryze monotónní.

Poznámka 3.8. *Standardní t-norma T_{MIN} není nilpotentní t-norma, nejedná se o archimedovskou t-normu.*
Łukasiewiczova t-norma T_L je nilpotentní t-norma.
Součinová t-norma T_P není nilpotentní t-norma, jedná se o striktní t-normu.
Drastická t-norma T_D není nilpotentní t-norma, nejedná se o archimedovskou t-normu.
Standardní t-konorma S_{MIN} není nilpotentní t-konorma, nejedná se o archimedovskou t-konormu.
Łukasiewiczova t-konorma S_L je nilpotentní t-konorma.
Součinová t-konorma S_P není nilpotentní t-konorma, jedná se o striktní t-konormu.
Drastická t-konorma S_D není nilpotentní t-konorma, nejedná se o archimedovskou t-konormu.

Obecně mají archimedovské t-normy a t-konormy následující vlastnost.

Věta 3.16. *Nechť T je archimedovská t-norma. Pak pro každé $a \in (0,1)$ a $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že*

$$T \underbrace{(a, a, \ldots, a)}_{n-krát} < \varepsilon. \tag{49}$$

Nechť S je archimedovská t-konorma. Pak pro každé $a \in (0,1)$ a $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$S \underbrace{(a, a, \ldots, a)}_{n-krát} > 1 - \varepsilon. \tag{50}$$

Důkaz: Viz [4].

Pokud však jde o nilpotentní t-normy a t-konormy, pak platí silnější verze této vlastnosti.

Věta 3.17. *Nechť T je nilpotentní t-norma. Pak pro každé $a \in (0,1)$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že*

$$T \underbrace{(a, a, \ldots, a)}_{n-krát} = 0. \tag{51}$$

Nechť S je nilpotentní t-konorma. Pak pro každé $a \in (0,1)$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$S \underbrace{(a, a, \ldots, a)}_{n-krát} = 1. \tag{52}$$

Důkaz: Viz [4].

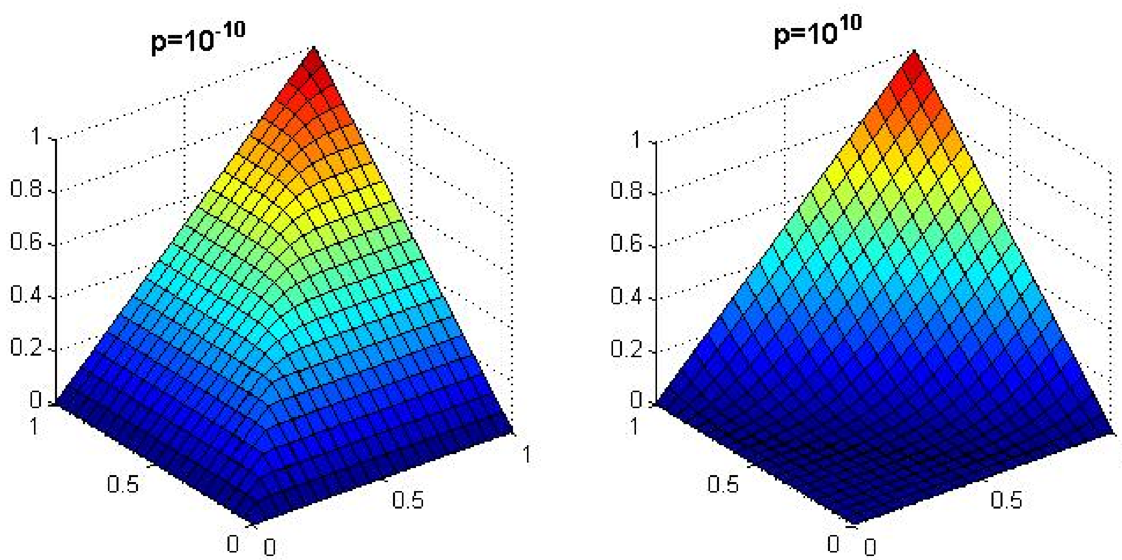
3.3 Parametrické třídy t-norem a t-konorem

Tato podkapitola je věnována parametrickým třídám t-norem a t-konorem. Kapitola zahrnuje vybrané nejznámější parametrické třídy. Těchto parametrických tříd existuje velké množství (viz literatura [1] a [5]). Častým rysem jednotlivých tříd je skutečnost, že s tím, jak parametr těchto tříd inklinuje k hranici jeho rozsahu, dostaneme t-normy T_{MIN} a T_D (resp. t-konormy S_{MAX} a S_D) jako krajní členy těchto tříd.

Definice 3.25. *Frankova třída je parametrická třída spojitých archimedovských t-norem definovaná pro $0 \leq p \leq \infty$ následujícími vztahy*

$$T_p^F(x,y) = \begin{cases} T_{MIN}(x,y), & \textit{jestliže } p=0, \\ T_P(x,y), & \textit{jestliže } p=1, \\ T_L(x,y), & \textit{jestliže } p=\infty, \\ log_p\left(1+\frac{(p^x-1)(p^y-1)}{(p-1)}\right), & \textit{jinak.} \end{cases} \tag{53}$$

Poznámka 3.9. *Můžeme si všimnout, že T_p^F je pro $p < \infty$ ryze monotónní.*

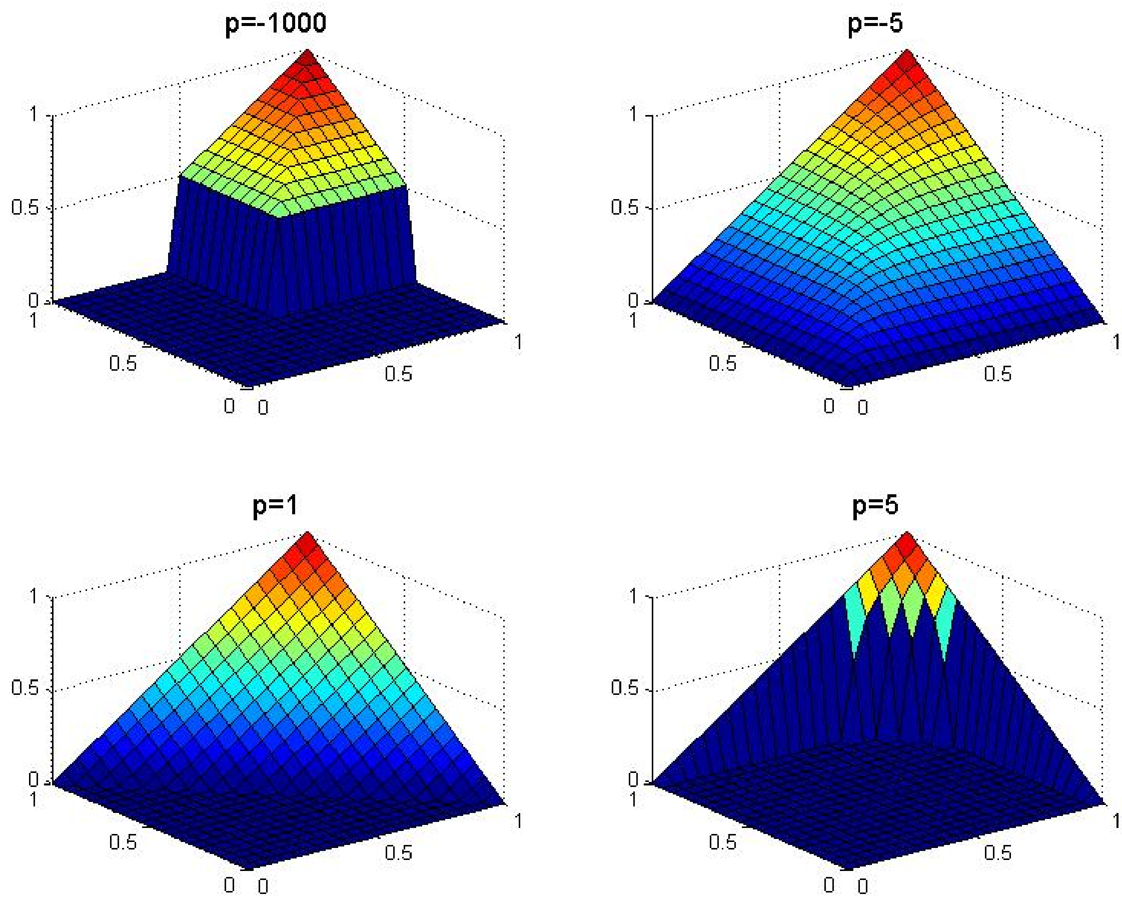


Obr. 9 Frankova třída pro různé hodnoty parametru

Definice 3.26. *Schweizer-Sklarova třída je parametrická třída rostoucích t-norem parametru p, kde $-\infty \leq p \leq \infty$, $x,y \in \langle 0,1\rangle$ definována vztahem*

$$T_p^{SS}(x,y) = \begin{cases} T_{MIN}(x,y), & \textit{jestliže } p=-\infty, \\ (x^p+y^p-1)^{\frac{1}{p}}, & \textit{jestliže } -\infty < p < 0, \\ T_P(x,y), & \textit{jestliže } p=0, \\ \max\{x^p+y^p-1,0\}^{\frac{1}{p}}, & \textit{jestliže } 0 < p < \infty, \\ T_D(x,y), & \textit{jestliže } p=\infty. \end{cases} \tag{54}$$

Poznámka 3.10. *V případech, kdy* $x = 0$ *nebo* $y = 0$ *je* $T_p^{SS} = 0$.
Můžeme si všimnout, že T_p^{SS} *je pro* $p > -\infty$ *archimedovká, pro* $p \in (-\infty, 0\rangle$ *ryze monotónní a pro* $p \in (0, \infty)$ *nilpotentní.*

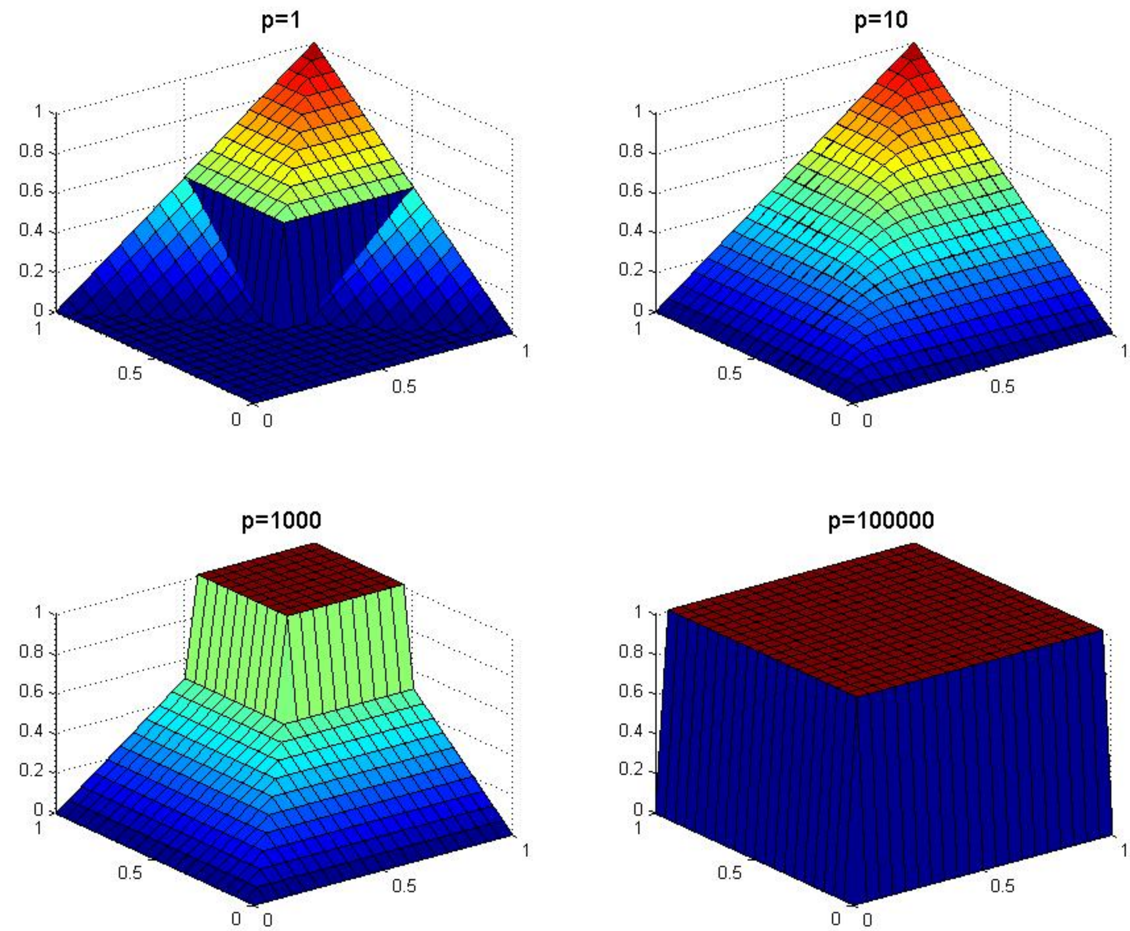


Obr. 10 Schweizer-Sklarova třída pro různé hodnoty parametru

Definice 3.27. *Yagerova třída rostoucích t-norem parametru p, kde* $0 \leq p \leq \infty$, $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ *je dána následovně*

$$T_p^Y(x,y) = \begin{cases} T_D(x,y), & \text{jestliže } p{=}0, \\ \max\left\{1 - ((1-x)^p + (1-y)^p)^{1/p}, 0\right\}, & \text{jestliže } 0 < p < \infty, \\ T_{MIN}(x,y), & \text{jestliže } p = \infty, \end{cases} \quad (55)$$

Poznámka 3.11. *Můžeme si všimnout, že* T_p^Y *je pro* $0 < p < \infty$ *nilpotentní a speciálně pro* $p = 1$ *platí* $T_p^Y = T_L$*.*

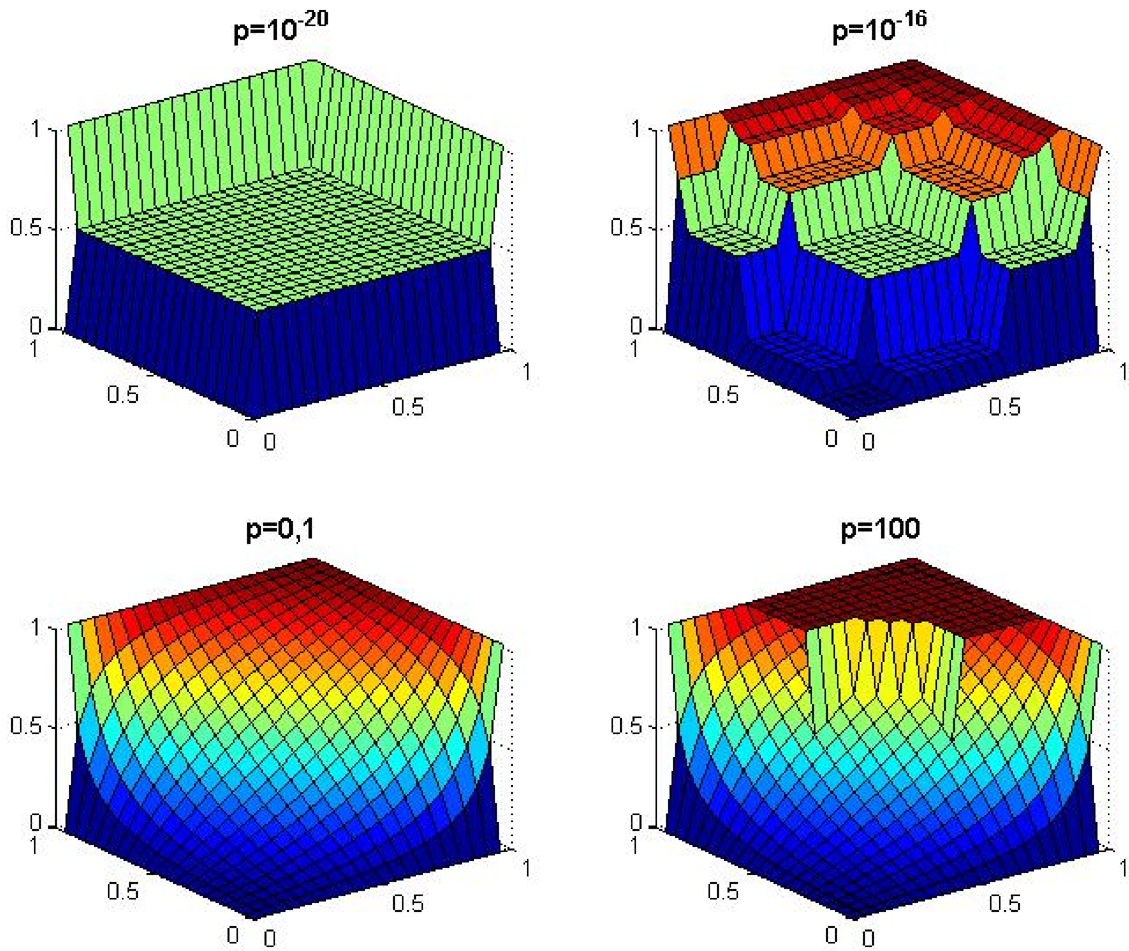


Obr. 11 Yagerova třída pro různé hodnoty parametru

Definice 3.28. *Dombiho třída parametrických t-norem je definována pro parametr p, kde* $0 \leq p \leq \infty$ *a* $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ *takto*

$$T_p^D(x,y) = \begin{cases} 0, & \textit{jestliže } x{=}0 \textit{ nebo } y{=}0, \\ T_D(x,y), & \textit{jestliže } p{=}0, \\ T_{MIN}(x,y), & \textit{jestliže } p = \infty, \\ \frac{1}{1+\left(\left(\frac{1-x}{x}\right)^p+\left(\frac{1-y}{y}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}}, & \textit{jinak.} \end{cases} \tag{56}$$

Poznámka 3.12. *Můžeme si všimnout, že* T_p^D *je pro* $0 < p < \infty$ *ryze monotónní a speciálně pro* $p = 1$ *platí* $T_p^D = T_L$.



Obr. 12 Dombiho třída pro různé hodnoty parametru

3.4 Fuzzy negace a duální t-normy a t-konormy

V této kapitole se seznámíme s negací, jejími základními typy. Budeme ji potřebovat v páté kapitole, která se zabývá praktickými aplikacemi. Ke zpracování této kapitoly jsem využila literatury [1] a [4].

Definice 3.29. *Zobrazení $N : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ se nazývá negace, jestliže je nerostoucí a splňuje následující axiomy*

$$N(0) = 1, N(1) = 0. \tag{57}$$

Definice 3.30. *Negaci z předchozí definice nazveme striktní, jestliže je navíc klesající a spojitá. Nazveme ji silná negace, jestliže splňuje podmínku*

$$\forall x \in \langle 0, 1\rangle : N(N(x)) = x. \tag{58}$$

Silná negace bývá v literatuře nazývána též fuzzy negací a často se označuje $\neg$ (viz např. [4]).

Díky tomu, že striktní negace N je klesající a spojitá funkce, je i její inverze N^{-1} striktní negací.

Definice 3.31. *Intuitionistická negace N_I je definována následujícím vztahem*

$$N_I(x) = \begin{cases} 1, \textit{ jestliže } x{=}0, \\ 0, \textit{ jinak.} \end{cases} \tag{59}$$

Slabá negace N_W je definována následujícím vztahem

$$N_W(x) = \begin{cases} 1, \textit{ jestliže } x < 1, \\ 0, \textit{ jestliže } x{=}1. \end{cases} \tag{60}$$

Standardní negace N je definována vztahem

$$N(x) = 1 - x. \tag{61}$$

Poznámka 3.13. *Silné negace můžeme získat volbou parametru λ v následujícím vztahu*

$$N_\lambda(x) = \frac{1 - x}{1 + \lambda x}, \tag{62}$$

kde $\lambda > -1$.

Poznámka 3.14. *Standardní negace je silná negace. Příkladem striktní a zároveň ne silné negace je $N^{'}$, daná vztahem $N^{'} = 1 - x^2$.*

Definice 3.32. *Nechť T je t-norma, S je t-konorma a N je striktní negace. Uspořádanou trojici (T,S,N) nazýváme De Morganova trojice, jestliže platí*

$$N(S(x, y)) = T(N(x), N(y)). \tag{63}$$

Uvedená trojice získala název po anglickém matematikovi a logikovi Augustu De Morganovi (1806–1871).

Následující věta popisuje způsob, jakým lze zkonstruovat duální t-normu k dané t-konormě.

Věta 3.18. *Nechť N je striktní negace, T je t-norma. Nechť t-konorma S je definována pro každé $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ následovně*

$$S(x, y) = N^{-1}(T(N(x), N(y))). \tag{64}$$

Pak trojice (T, S, N) je De Morganova trojice.

Důkaz: Viz [4].

Poznámka 3.15. *Je-li t-norma v předchozím tvrzení spojitá, pak i t-konorma S je spojitá funkce.*

Poznámka 3.16. *Pokud u duality neuvedeme, vzhledem k jaké negaci je chápána, pak automaticky předpokládáme standardní fuzzy negaci.*

V následující poznámce si uvedeme, vzhledem k jaké negaci jsou t-normy a t-konormy, se kterými jsme se seznámili v předchozí kapitole, duální. Tvrzení je uvedeno v literatuře [4], ale důkaz není doplněn. Ukážeme si ověření tvrzení pro Łukasiewiczovy a součinové operace.

Poznámka 3.17.

Łukasiewiczovy operace T_L, S_L jsou duální vzhledem ke standardní negaci.

Tvrzení můžeme ověřit pomocí formule (62) následovně.

$$N(S_L(x,y)) = N(\min\{1, x+y\}) = \max\{1-1, 1-x-y\} = \max\{0, 1-x-y\}.$$

$$T_L(N(x), N(y)) = T_L(1-x, 1-y) = \max\{0, 1-x+1-y-1\} = \max\{0, 1-x-y\}.$$

Součinové operace T_P, S_P jsou duální vzhledem ke standardní negaci.

Ukážeme si, jak můžeme ověřit platnost toho tvrzení.

$$N(S_P(x,y)) = N(x + y - x \cdot y) = 1 - x - y + x \cdot y.$$

$$T_P(N(x), N(y)) = T_P(1-x, 1-y) = (1-x) \cdot (1-y) = 1 - x - y + x \cdot y.$$

Standardní operace T_{MIN}, S_{MAX} jsou duální vzhledem k jakékoli fuzzy negaci.

Drastické operace T_D, S_D jsou duální vzhledem k jakékoli fuzzy negaci.

4 Využití konjunktních a disjunktních agregačních operátorů

T-normy a t-konormy slouží k modelování průniku a sjednocení fuzzy množin a ve fuzzy logice je využíváme k modelování logických spojek konjunkce a disjunkce. K nastudování a ke zpracování následujícího textu jsem využila publikace [10] a znalostí získaných z přednášek předmětu Fuzzy množiny I a II vedené doc. RNDr. Talašovou, CSc.

Nyní si stručně představíme základní pojmy teorie fuzzy množin.

4.1 Modelování průniku a sjednocení fuzzy množin

Profesor kalifornské univerzity v Berkley L. A. Zadech v roce 1965 publikoval článek, který zahájil rozvoj modifikované teorie množin, tzv. fuzzy množin, které jsou nástrojem pro matematický popis vágních a nepřesných pojmů.

Základní myšlenka fuzzy množin je jednoduchá. Pokud nejsme schopni stanovit přesné hranice třídy vymezené vágním pojmem, nahradíme toto rozhodnutí mírou vybíranou z nějaké škály. Každý prvek bude mít přiřazenou míru, která vyjadřuje jeho místo a roli v této třídě. Bude-li škála uspořádaná, pak menší míra bude vyjadřovat, že daný prvek leží někde na okraji třídy. Tuto míru nazýváme stupněm příslušnosti daného prvku k dané třídě. Třída, v níž každý prvek je charakterizován stupněm příslušnosti k této třídě, se nazývá fuzzy množina. Lze také říci, že stupeň příslušnosti vyjadřuje stupeň našeho přesvědčení, že daný prvek patří do dané fuzzy množiny.

Definice 4.1. *Nechť je dána množina U, tzn. univerzum. Pak fuzzy množina A na univerzu U je definována zobrazením*

$$\mu_A : U \to \langle 0, 1 \rangle. \tag{65}$$

Funkci μ_A nazýváme funkcí příslušnosti fuzzy množiny A. Pro každé $x \in U$ nazveme hodnotu $\mu_A(x)$ stupněm příslušnosti prvku x k fuzzy množině A.

Poznámka 4.1. *Fuzzy množina na U je jednoznačně určena svou funkcí příslušnosti. V klasické teorii množin jsou množiny určeny charakteristickou funkcí, která nabývá hodnot 0 nebo 1, podle toho zda prvek do dané množiny patří či nikoli. Funkce příslušnosti v teorii fuzzy množin umožňuje přiřadit příslušnost prvku k množinám v rozmezí od 0 do 1, včetně obou hraničních hodnot. V případě, že fuzzy množina je definována na diskrétním univerzu, pak funkce příslušnosti je dána výčtem prvků.*

Poznámka 4.2. *Dále budeme pomocí stejného písmena označovat jak fuzzy množinu A tak i její funkci příslušnosti $A(.)$. Stupeň příslušnosti, s nímž prvek $x \in U$ náleží fuzzy množině A, označujeme $A(x)$.*

Poznámka 4.3. *Systém všech fuzzy množin definovaných na univerzu U budeme označovat $\mathcal{F}(U)$. To, že A je fuzzy množina definovaná na U, budeme zapisovat $A \in \mathcal{F}(U)$.*

Je známé, že klasické množinové operace (např. doplněk, průnik, sjednocení) definované na univerzu U pro jakékoli množiny $A, B, C \subseteq U$ splňují všechny vlastnosti uvedené v Tab. 1 (viz [1]). Výčet těchto vlastností by mohl být zúžen, některé vlastnosti jsou důsledkem jiných. Uvádíme zde však výčet všech pojmenovaných vlastností.

idempotence	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
komutativita	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
asociativita	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
absorpce	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
distributivita	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
identita	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
komplementarita	$A \cup A^C = U$	$A \cap A^C = \emptyset$
involuce	$(A^C)^C = A$	-
De Morganovy zákony	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Tab. 1 Vlastnosti operací

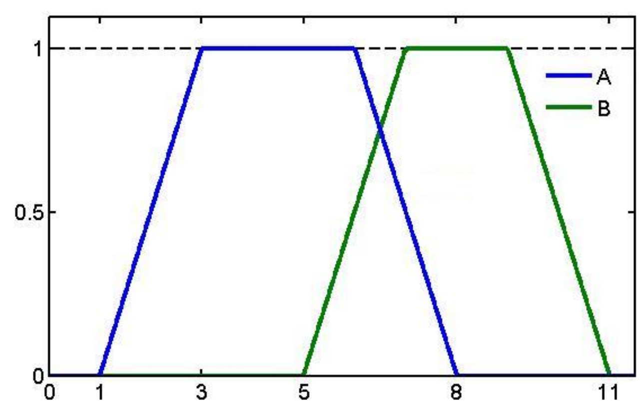
Vlastnost komplementarita je pro operaci sjednocení též známá pod názvem ,,zákon vynechání třetího" a pro průnik jako ,,zákon kontradikce".

Chceme-li pracovat s fuzzy množinami definovanými na univerzu U, které připouští, že prvek náleží do této množiny jen z části, rozšíříme operace s množinami (doplněk, průnik, sjednocení) na případ s fuzzy množinami pomocí operací negace, t-norma, t-konorma

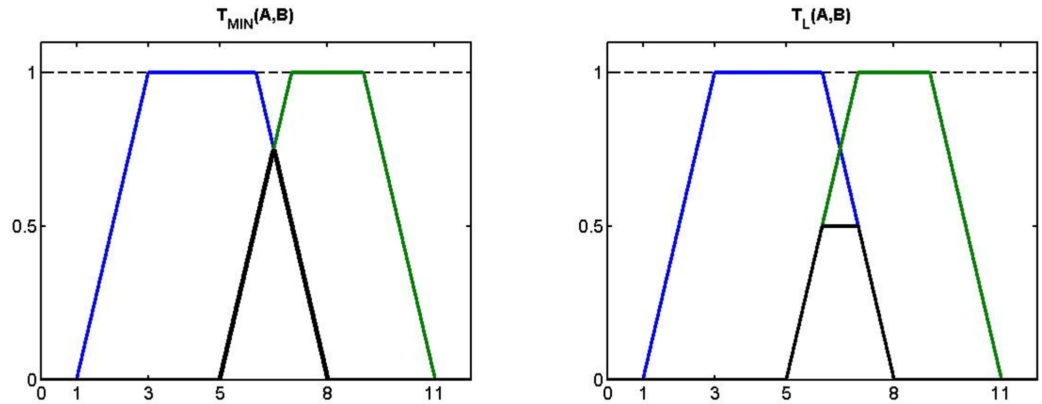
- $A^C(a) = N(A(a))$,
- $(A \cap B)(a) = T(A(a), B(a))$,
- $(A \cup B)(a) = S(A(a), B(a))$.

Na následujících grafech si ukážeme, jak vypadají průniky a sjednocení dvou fuzzy množin namodelované pomocí základních typů t-norem a t-konorem.

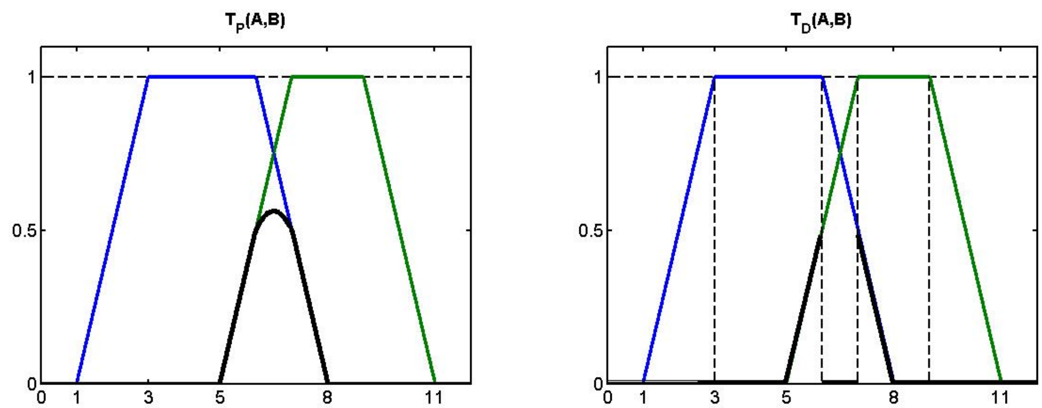
Mějme dány fuzzy množiny A, B (viz Obr. 13), jejich průniky a sjednocení jsou ukázány na Obr. 14 až Obr. 17.



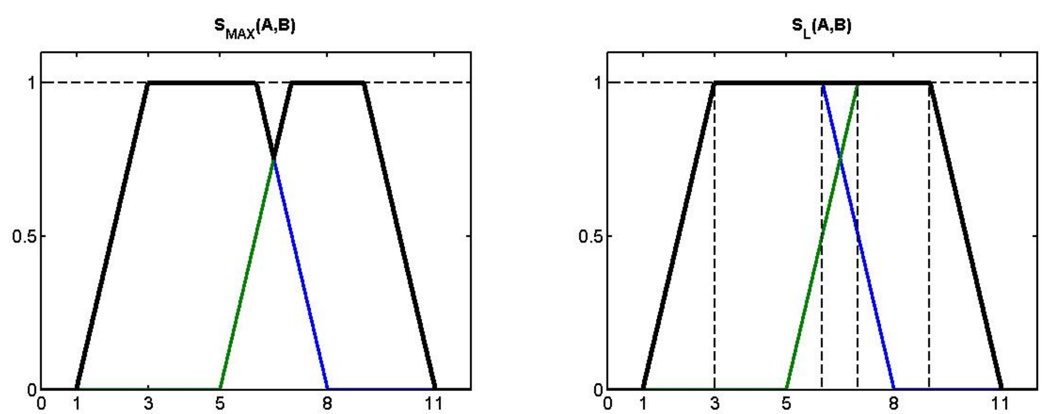
Obr. 13 Fuzzy množiny A, B



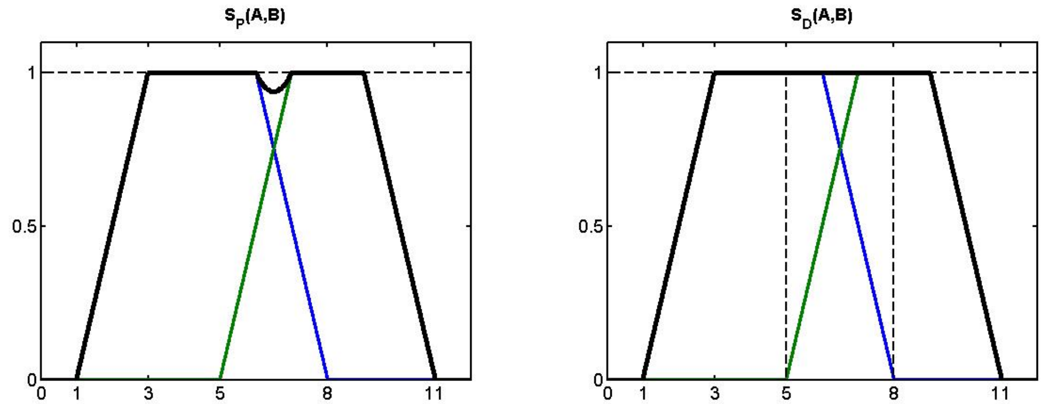
Obr. 14 Modelování průniku dvou fuzzy množin pomocí standardní a Łukasiewiczovy t-normy



Obr. 15 Modelování průniku dvou fuzzy množin pomocí součinové a drastické t-normy



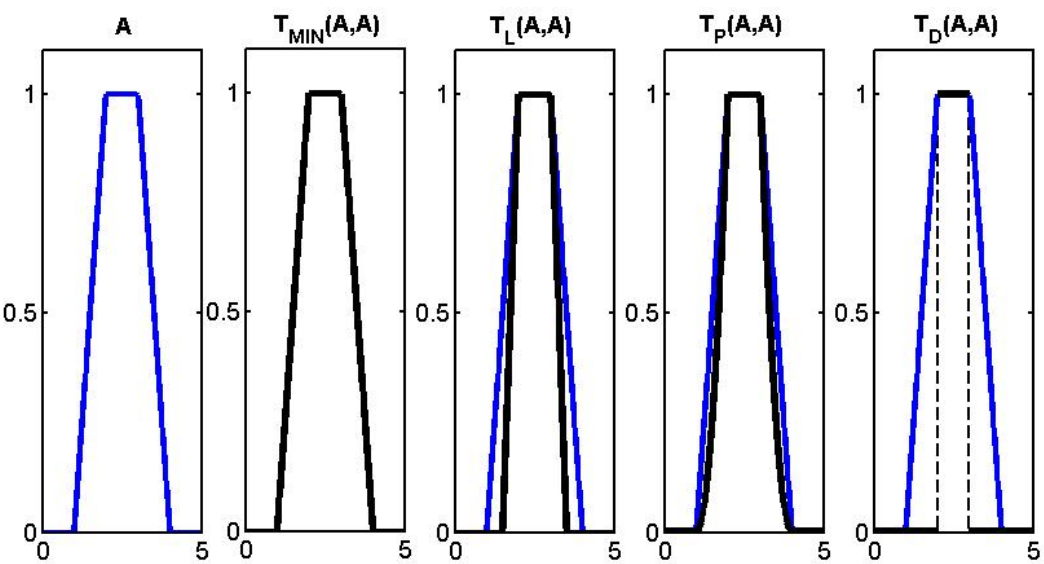
Obr. 16 Modelování sjednocení dvou fuzzy množin pomocí standardní a Łukasiewiczovy t-konormy



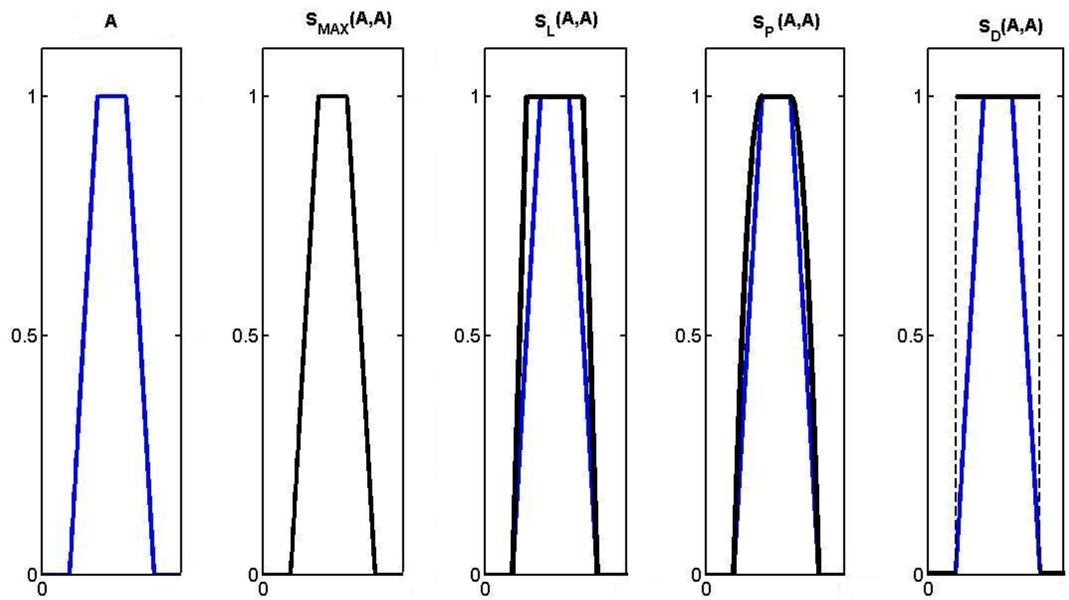
Obr. 17 Modelování sjednocení dvou fuzzy množin pomocí součinové a drastické t-konormy

V následujícím textu ověříme, které z vlastností uvedené v Tab. 1 platí pro jednotlivé základní t-normy a t-konormy, které jsme studovali v teoretické části. Vlastnost komutativita a asociativita patří mezi definiční axiomy t-normy resp. t-konormy, proto je v tomto textu dále nerozebíráme.

Víme, že jediné idempotentní operace jsou standardní t-normy resp. t-konormy. Na Obr. 18 (resp. Obr. 19) ilustrujeme hodnoty $A \cup A$ (resp. $A \cap A$) při použití základních t-norem (resp. t-konorem), modře je znázorněna fuzzy množina A a černě výsledná operace.



Obr. 18 Vlastnost idempotence t-norem



Obr. 19 Vlastnost idempotence t-konorem

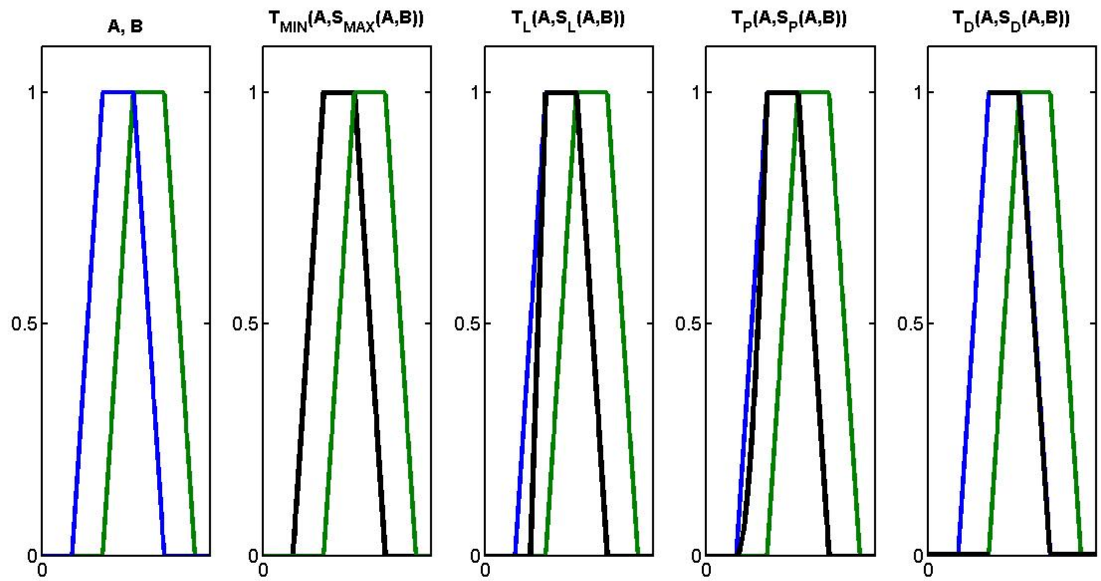
Po ověření vlastnosti absorpce standardní t-konormy dostaneme pro každé $a, b \in \langle 0, 1 \rangle$

$$S_{MAX}(A(a), T_{MIN}(A(a), B(b))) = \max\{A(a), \min\{A(a), B(b)\}\} = A(a).$$

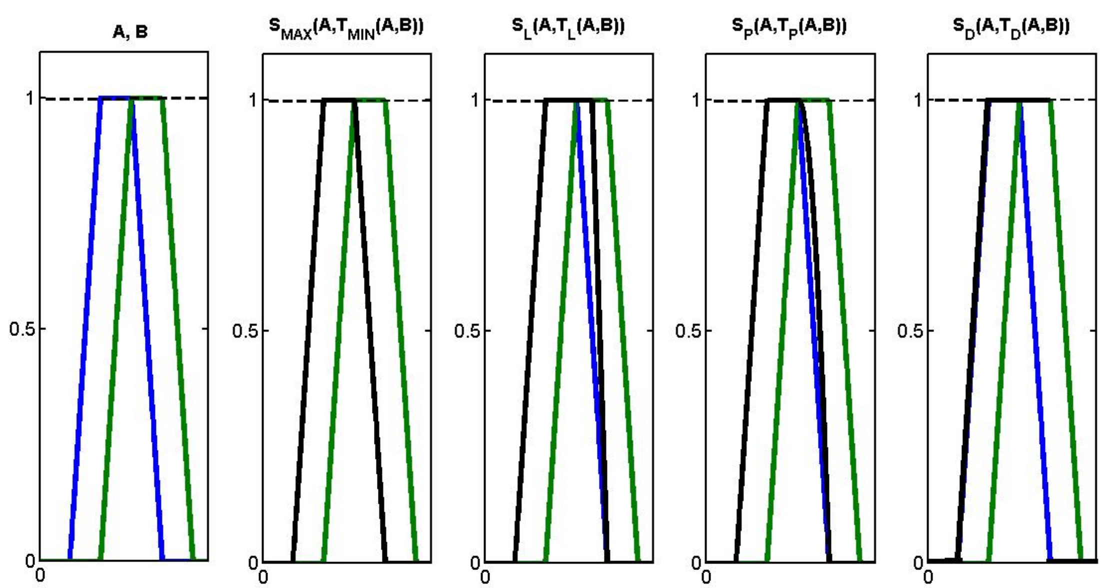
Obdobně pro standardní t-normu, pro každé $a, b \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

$$T_{MIN}(A(a), S_{MAX}(A(a), B(b))) = \min\{A(a), \max\{A(a), B(b)\}\} = A(a).$$

Na následujících obrázcích vidíme, že pro ostatní operace vlastnost absorpce neplatí. Zeleně jsme označili fuzzy množinu A, modrou barvou značíme fuzzy množinu B a černou barvou značíme výslednou operaci.



Obr. 20 Vlastnost absorpce t-norem



Obr. 21 Vlastnost absorpce t-konorem

Jako distributivní operátor se ukázala standardní t-norma a standardní t-konorma, kde pro každé $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$

$$S_{MAX}(A(a), T_{MIN}(B(b), C(c))) = \max\{A(a), \min\{B(b), C(c)\} =$$

$$= min\{max\{A(a), B(b)\}, max\{A(a), B(b)\}.$$

Další vlastností je identita. Množinu neobsahující žádný prvek nazýváme prázdná množina a označujeme $\emptyset$. Prázdná množina je speciálním případem fuzzy množiny, jejíž funkce příslušnosti je rovna nule. Naopak množina obsahující všechny prvky je univerzum, její funkce příslušnosti je rovna jedné.

Nejprve vlastnost identitu ověříme pro operace konjunkce, kde pro každé $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$ platí

$$S_{MAX}(A(a), 0) = \max\{A(a), 0\} = A(a).$$

$$S_P(A(a), 0) = A(a) + 0 - A(a) \cdot 0 = A(a).$$

$$S_L(A(a), 0) = \min\{1, A(a) + 0\}\} = A(a).$$

$$S_D(A(a), 0) = \begin{cases} \max\{A(a), 0\}, & \text{jestliže } \min\{A(a), 0\} = 0, \\ 1, & \text{jinak.} \end{cases} = A(a).$$

Obdobně provedeme ověření pro operace disjunkce, kde pro každé $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$ platí

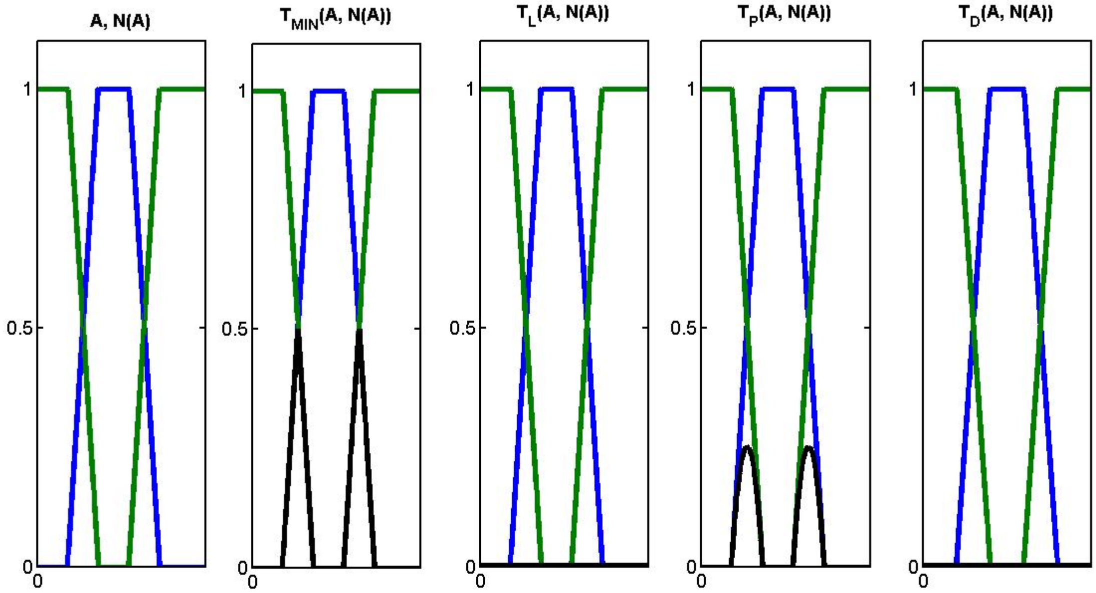
$$T_{MIN}(A(a), 1) = \min\{A(a), 1\} = A(a).$$

$$T_P(A(a), 1) = A(a) \cdot 1 = A(a).$$

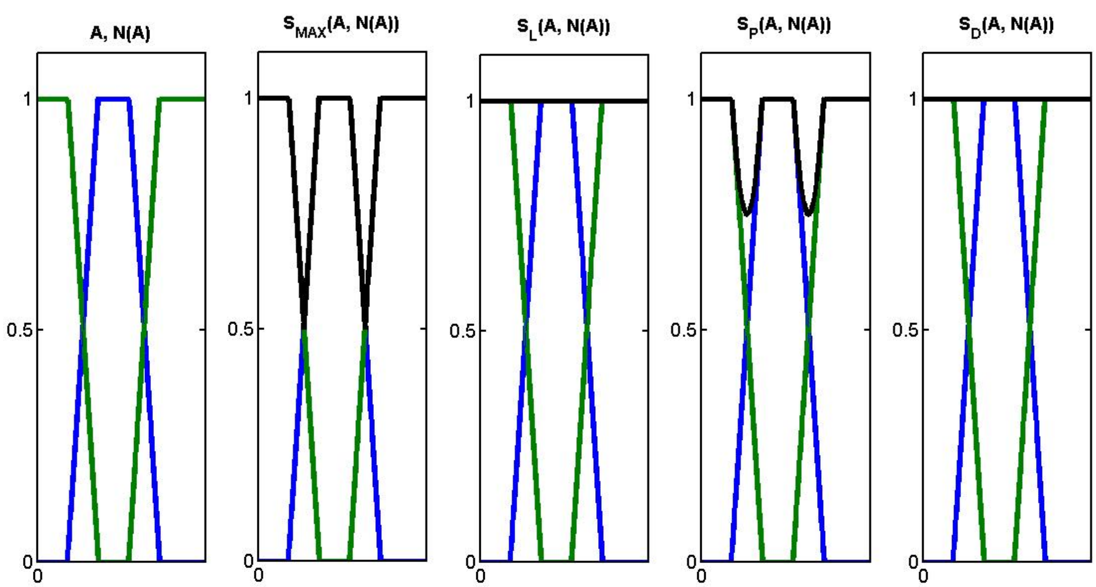
$$T_L(A(a), 1) = \max\{0, A(a) + 1 - 1\}\} = A(a).$$

$$T_D(A(a), 1) = \begin{cases} \min\{A(a), 1\}, & \text{jestliže } \max\{A(a), 1\} = 1, \\ 1, & \text{jinak.} \end{cases} = A(a).$$

Na Obr. 22 (resp. Obr. 23) vidíme, jak dopadlo ověření vlastnosti komplementarity. Fuzzy množinu A jsme označili modře, její negaci jsme označili zeleně a výsledná operace je znázorněna černě. Platnost se prokázala pro Łukasiewiczovu a drastickou t-normu, resp. t-konormu.



Obr. 22 Vlastnost komplementarita t-norem



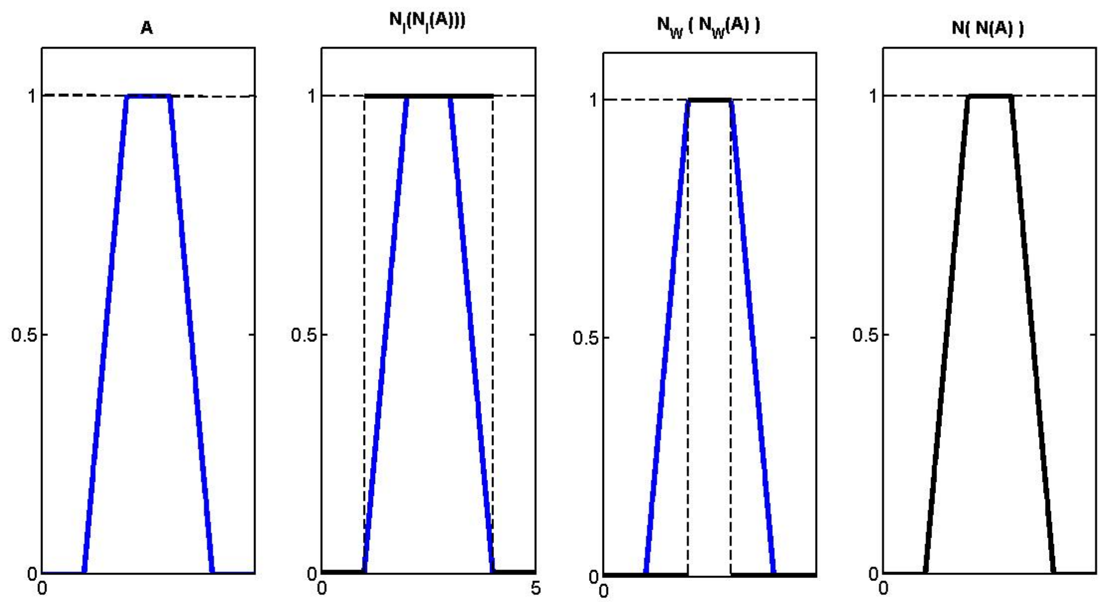
Obr. 23 Vlastnost komplementarita t-konorem

Máme-li dánu fuzzy množinu A definovanou na univerzu U a její doplněk A^C je definovaný pomocí silné negace N, pak jestliže platí zákon vynechání třetího (resp. zákon kontradikce), pak operace sjednocení (resp. průnik) není idempotentní.

Z poznámky v literatuře [1] plyne, že pokud jsou operace a sjednocení vzájemně distributivní, pak ani zákon vynechání třetího ani zákon kontradikce nemůžou platit. Musíme si tedy vybrat mezi platností obou zákonů na jedné straně a mezi vzájemnou distributivitou a idempotencí na straně druhé.

Pro ověření vlastnosti involuce, provedeme dvojitou negaci fuzzy množiny A, která je značena modrou barvou. Za negaci postupně volíme intuitionistickou, slabou a standardní negaci, která je značena černě. Jako involutivní negace se ukáže standardní negace $N(x)$. Což můžeme i jednoduše ověřit pomocí dosazení

$$N(N(x)) = N(1-x) = 1 - 1 + x = x.$$



Obr. 24 Vlastnost involuce

Významně se operace t-norma a t-konorma uplatní při modelování průniku a sjednocení jazykových proměnných.

Jazykové proměnné se využívají k sestavování systému pravidel, dle kterých se řídí zařízení naprogramované technologií fuzzy logic. Pod pojmem technologie fuzzy logic se skrývá moderní technologie, která umožňuje přístrojům pomocí senzorů zjistit, jak probíhá vykonávaná činnost a podle výsledků upravit běh pracovního cyklu.

Zařízení naprogramované pomocí technologie fuzzy logic se řídí algoritmy, které jsou zadány dle expertně stanovených znalostí. Informace, které pro sestavování programu odborníci potřebují, nebývají zadána exaktně (matematickým popisem nebo funkcí). Častěji se setkáváme s případy, kdy jsou tato vstupní data, ze kterých autoři softwaru vycházejí, zadána jazykově. Jsou zadána pomocí tzv. jazykových proměnných.

Pod pojmem jazyková proměnná rozumíme proměnnou, jejímiž hodnotami jsou jazykové termy. Jazykové termy jsou interpretované jako fuzzy množiny na $\mathbb{R}$, nejčastěji jako fuzzy čísla. Výhodou jazykové proměnné je to, že ji vyjádříme pomocí konečně mnoha hodnot reálné proměnné. Obor hodnot reálné proměnné je totožný s univerzem, na kterém jsou definovány významy hodnot dané jazykové proměnné. Smyslem jazykové proměnné je tedy to, že můžeme nespočetně mnoho hodnot reálné proměnné nahradit několika málo fuzzy hodnotami, které jsou navíc jazykově popsány.

Pro úplnost uvádíme obecnou definici jazykové proměnné, definici reálné neboli bazické proměnné. Seznámíme čtenáře s definicí fuzzy čísla, které využíváme k interpretaci jazykových termů a s jazykovou škálou.

Definice 4.2. *Jazykovou proměnnou rozumíme uspořádanou pětici*

$$(\mathcal{V},\ \mathcal{T}(\mathcal{V}),\ X,\ G,\ M), \tag{66}$$

kde symbol $\mathcal{V}$ označuje jméno jazykové proměnné, $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ je množina jazykových hodnot proměnné $\mathcal{V}$, X je univerzum, na kterém jsou definovány fuzzy množiny představující významy jazykových hodnot, G označuje syntaktické pravidlo tzv.

gramatiku zavedenou pro generování jazykových hodnot z $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ a symbol M označuje sémantické pravidlo, tj. zobrazení, které každé hodnotě $\mathcal{C} \in \mathcal{T}(\mathcal{V})$ přiřadí její význam $C = M(\mathcal{C})$, který je fuzzy množinou na X.

Definice 4.3. *Bazickou proměnnou přidruženou k jazykové proměnné*

$$(\mathcal{V},\ \mathcal{T}(\mathcal{V}),\ X,\ G,\ M),$$

rozumíme uspořádanou dvojici

$$(\nu, X), \tag{67}$$

kde symbol ν označuje jméno bazické proměnné, X je obor jejích reálných hodnot.

Důležitou roli v teorii fuzzy množin mají následující pojmy, které využijeme v definici fuzzy čísla.

Definice 4.4. *Nechť je dána fuzzy množina A na univerzu U a reálné číslo $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Pak α-řezem fuzzy množiny A nazveme množinu*

$$A_\alpha = \{x \in U | A(x) \geq \alpha\}. \tag{68}$$

Jádrem fuzzy množiny A na univerzu U rozumíme množinu

$$Ker\ A = \{x \in U | A(x) = 1\}. \tag{69}$$

Nosičem fuzzy množiny A na univerzu U nazýváme množinu

$$Supp\ A = \{x \in U | A(x) > 0\}. \tag{70}$$

Výška fuzzy množiny A na univerzu U je definována vztahem

$$hgt\ A = sup_{x \in U} A(x). \tag{71}$$

Definice 4.5. *Fuzzy množina A na univerzu U se nazývá normální, jestliže*

$$Ker A \neq \emptyset. \tag{72}$$

Fuzzy čísla intuitivně reprezentují hodnotu, která je nepřesná, tj. hodnotu, kterou lze slovně charakterizovat pomocí výrazů ,,asi", ,,zhruba" apod.

Definice 4.6. *Fuzzy množina C definovaná na množině reálných čísel $\mathbb{R}$, která splňuje následující vlastnosti*

1. *C je normální množina,*
2. *α řezy C_α představují pro všechna $\alpha \in (0,1\rangle$ uzavřené intervaly,*
3. *nosič C je ohraničený,*

se nazývá fuzzy číslo.

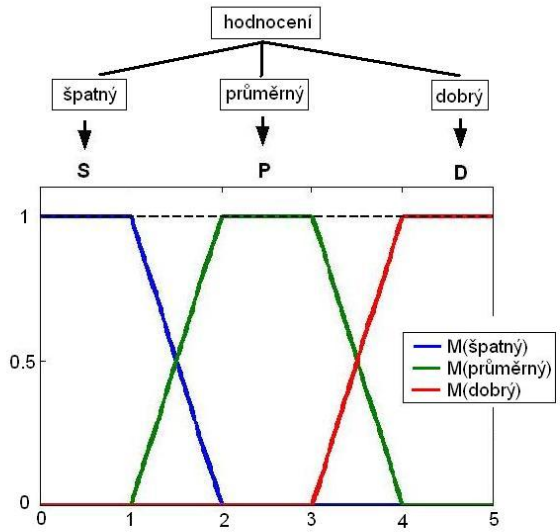
Definice 4.7. *Řekneme, že jazyková proměnná $(\mathcal{V},\ \mathcal{T}(\mathcal{V}), \langle A, B\rangle)$, definuje na intervalu $\langle A, B\rangle$ jazykovou škálu, jestliže fuzzy čísla $T_1, \ldots, T_s$ modelující významy jazykových hodnot $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_s$ tvořících množinu $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ představují fuzzy rozklad intervalu $\langle A, B\rangle$, tj.*

$$\forall x \in \langle A, B\rangle : \sum_{i=1}^{s} T_i(x) = 1 \tag{73}$$

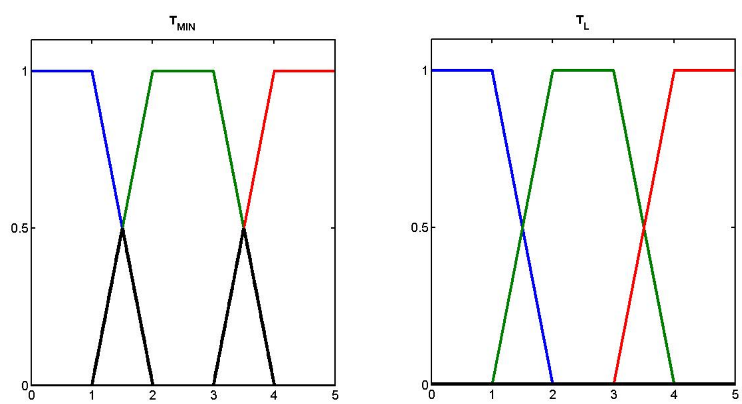
Mezi příklady elementárních termů jazykové škály patří: *špatný, průměrný, dobrý; podprůměrný, průměrný, nadprůměrný; malý, střední, vysoký.*

Často je výhodou pracovat s jazykovou proměnnou s bohatší strukturou hodnot, kdy k elementárním termům tvořících jazykovou škálu přidáváme ještě termy odvozené. Příkladem bohatších struktur je *obohacená jazyková škála* a *rozvinutá jazyková škála.* V případě obohacené jazykové škály mezi významy termů patří například *víceméně špatný, špatný, určitě špatný, průměrný, víceméně dobrý, dobrý, určitě dobrý.* V případě rozšířené jazykové škály vypadají významy termů například takto *špatný, průměrný až špatný, průměrný, průměrný až dobrý, dobrý.*

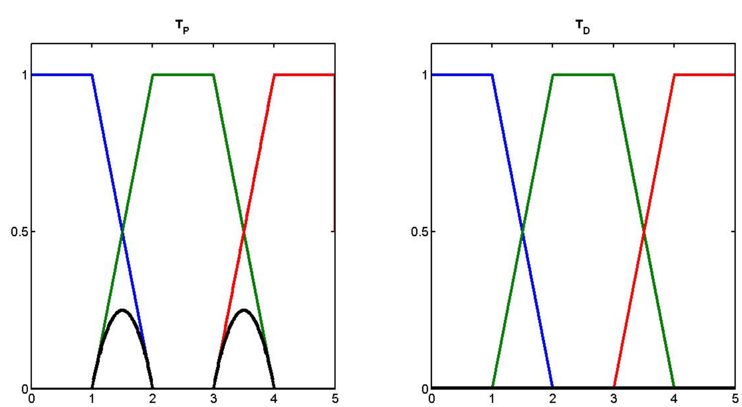
Na následujících grafech ilustrujeme modelování průniku (resp. sjednocení) jazykové proměnné ,,Hodnocení". Jazyková proměnná je vyjádřena hodnotami špatný, průměrný, dobrý a pomocí fuzzy čísel S,P,D. Tato fuzzy čísla jsou v daném příkladě definovaná na univerzu $\langle 0, 5\rangle$, pod tímto intervalem si můžeme představit např. bodovou škálu. Fuzzy čísla jsou označena zelenou, modrou a červenou barvou a výsledné operace průniku a sjednocení jsou znázorněny černou barvou.



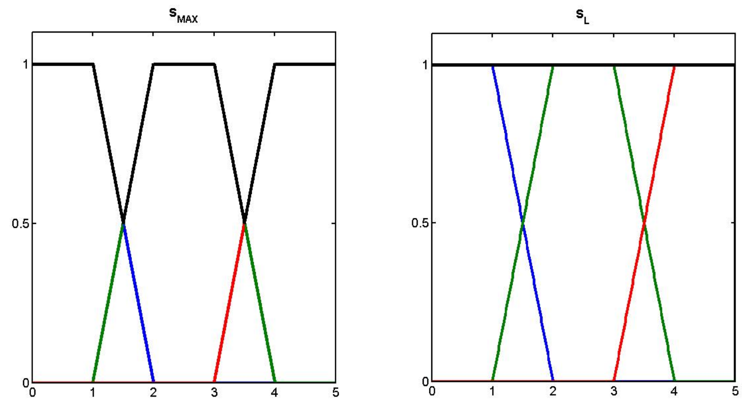
Obr. 25 Jazyková proměnná



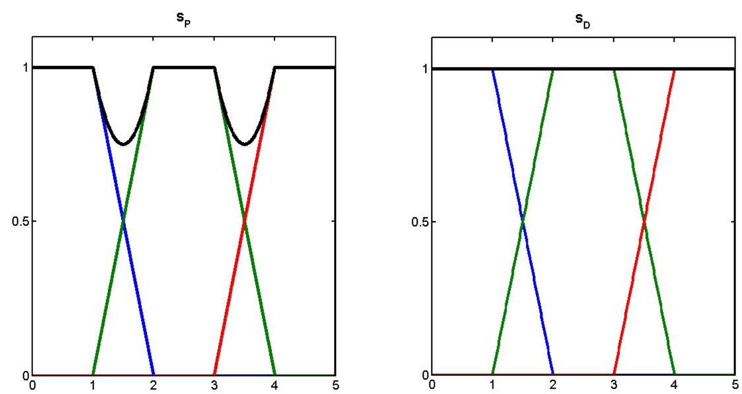
Obr. 26 Modelování průniku pomocí standardní a Łukasiewiczovy t-normy



Obr. 27 Modelování průniku pomocí součinové a drastické t-normy



Obr. 28 Modelování sjednocení pomocí standardní a Łukasiewiczovy t-konormy



Obr. 29 Modelování průniku pomocí součinové a drastické t-konormy

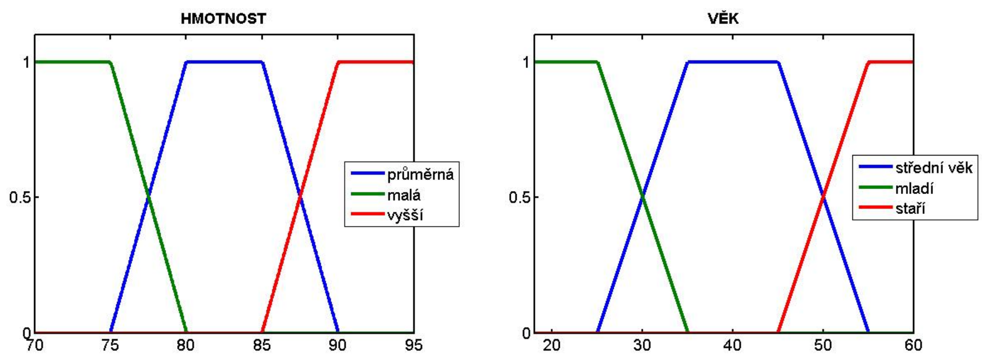
Na následujícím příkladě si uvedeme jednu z možností využití modelování průniku a sjednocení fuzzy množin.

Příklad 4.1. *Chceme rozeslat nabídku zboží mezi naše stávající zákazníky. Jako informační zdroj nám poslouží databáze s potřebnými informacemi, kterou si vedeme. Výjimku tvoří zákazník označen písmenem L, u kterého nemáme údaje dostupné.*

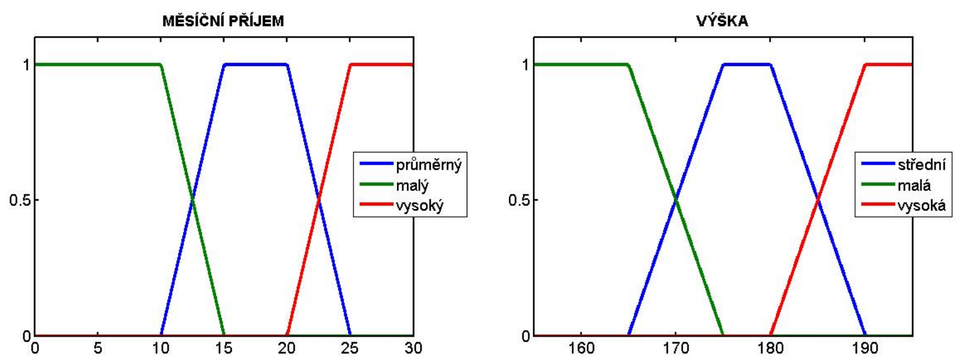
Pro tuto konkrétní nabídku vycházíme z charakteristik: výška, váha, věk, hmotnost a průměrný měsíční příjem. V Tab. 2 jsou uvedeny dostupné údaje o jednotlivých zákaznících, kde váha je uvedena v kilogramech, výška je udána v centimetrech a průměrný měsíční příjem je uveden v tisících.

klient	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
věk	21	24	36	32	36	38	40	40	42	48	54	-
váha	86	78	91	88	79	90	92	86	90	82	84	-
výška	185	182	180	178	187	179	170	182	189	179	186	-
příjem	10	12	14	10	8	18	12	30	23	20	18	-

Tab. 2 Databáze zákazníků



Obr. 30 Fuzzy množiny charakteristik hmotnost a věk



Obr. 31 Fuzzy množiny charakteristik příjem a výška

Nabídku zboží chceme rozeslat zákazníkům, kteří mají malou až střední výšku, patří do skupiny lidí ve středním věku s větší hmotností a s měsíčním příjmem průměrným až vysokým.

Vybrané fuzzy množiny si označíme následovně: malá výška ozn. MV, střední výška ozn. SV, střední věk ozn. STRVEK, vyšší hmotnost ozn. VHM, průměrný příjem ozn. PR, vysoký příjem ozn. VP. Fuzzy množinu malá až střední výška za-

pisujeme $(MV \cup SV)$*, fuzzy množinu průměrný až vysoký měsíční příjem značíme* $(PR \cup VP)$*. Výslednou množinu vybraných zákazníků označíme VZ, můžeme ji zapsat následovně* $VZ = (MV \cup SV) \cap STRVEK \cap VHM \cap (PR \cup VP)$.

Zákazníkovi s chybějícími informacemi (ozn. L) přiřadíme stupně příslušnosti ke všem skupinám 0,5.

klient	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*
mladí	*1*	*1*	*0*	*0,3*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0,5*
střední věk	*0*	*0*	*1*	*0,7*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0,7*	*0,1*	*0,5*
staří	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0,3*	*0,9*	*0,5*

Tab. 3 Stupně příslušnosti zákazníků k fuzzy množinám mladí, střední věk, staří

klient	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*
malá	*0*	*0,4*	*0*	*0*	*0,2*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0,5*
střední	*0,8*	*0,6*	*0*	*0,4*	*0,8*	*0*	*0*	*0,8*	*0*	*1*	*1*	*0,5*
vyšší	*0,2*	*0*	*1*	*0,6*	*0*	*1*	*1*	*0,2*	*1*	*0*	*0*	*0,5*

Tab. 4 Stupně přísl. zákazníků k fuzzy množinám malá, střední, vyšší hmotnost

klient	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*
malá	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0,5*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0,5*
střední	*0,5*	*0,8*	*1*	*1*	*0,3*	*1*	*0,5*	*0,8*	*0,1*	*1*	*0,4*	*0,5*
vysoká	*0,5*	*0,2*	*0*	*0*	*0,7*	*0*	*0*	*0,2*	*0,9*	*0*	*0,6*	*0,5*

Tab. 5 Stupně přísl. zákazníků k fuzzy množinám malá, střední, vysoká výška

klient	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*
malý	*1*	*0,6*	*0,2*	*1*	*1*	*0*	*0,6*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0,5*
průměrný	*0*	*0,4*	*0,8*	*0*	*0*	*1*	*0,4*	*0*	*0,4*	*1*	*1*	*0,5*
vysoký	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0,6*	*0*	*0*	*0,5*

Tab. 6 Stupně přísl. zákazníků k fuzzy množinám malý, průměrný, vysoký příjem

Sestavíme si tabulku se stupni příslušnosti jednotlivých zákazníků k daným fuzzy množinám na základě vybraných operací sjednocení a průniku. Dolním indexem S označujeme operace sjednocení, průnik a výslednou množinu v případě užití standardních t-norem a t-konorem, tj.

$$(MV \cup_S SV) = \max\{MV, SV\},$$

$$(PR \cup_S VP) = \max\{PR, VP\},$$

$$VZ_S = (MV \cup_S SV) \cap_S STRVEK \cap_S VHM \cap_S (PR \cup_S VP) =$$

$$= \min\{\max\{MV, SV\}, STRVEK, VHM, \max\{PR, VP\}\}.$$

Obdobně dolním indexem L označujeme užití Łukasiewiczových t-norem a t-konorem a indexem P označujeme užití součinových t-norem a t-konorem.

Kritérium, na základě kterého se rozhodneme, komu pošleme naši nabídku, jsme si zvolili hodnotu stupně příslušnosti k výsledné fuzzy množině větší než 0,5.

klient	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
VZ_S	0	0	0,8	0	0	1	0,4	0,2	0,1	0	0	0,5
VZ_L	0	0	0,8	0	0	1	0,4	0	0,1	0	0	0
VZ_P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,015625
VZ_D	0	0	0,8	0	0	1	0	0	0	0	0	0

Tab. 7 Stupně příslušnosti zákazníků k výsledné množině podle jednotlivých typů t-norem a t-konorem

Dle standardních operací do výsledné skupiny vybraných zákazníků patří C, F, G, H, I, K, L se svými stupni příslušnosti. Nabídku pošleme zákazníkům C, F, L, dle kritéria rozeslat nabídky zákazníkům se stupni příslušnosti k výsledné množině aspoň 0,5.

Dle Łukasiewiczových operací do výsledné skupiny vybraných zákazníků patří C, F, G, I se svými stupni příslušnosti. Nabídku pošleme zákazníkům C, F.

Dle součinových operací do skupiny vybraných zákazníků patří pouze zákazník L. Nabídku bysme mu, ale při užití součinových t-norem a t-konorem neodeslali.

Dle drastických operací do výsledné skupiny vybraných zákazníků patří C, F se svými stupni příslušnosti. Těmto zákazníkům také odešleme nabídku.

□

4.2 Fuzzy logika

Nejprve se ve stručnosti seznámíme s vícehodnotovou logikou, která nás přivede na fuzzy logiku a její základní rozdělení. Při zpracování jsem čerpala zejména z publikací [2] a [4] a také jsem využila informačních zdrojů [3], [8] a [9].

V životě se často dostáváme do situací, kdy si nejsme zcela jisti, zda tvrzení je určitě správné, např. se setkáváme s tvrzením, že pacient má pravděpodobně danou nemoc, ale stále máme určité pochybnosti. Popis tohoto uvažování vede k vícehodnotové logice, kde kromě hodnot pravda (hodnota 1) a nepravda (hodnota 0), uvažované v klasické logice, připouštíme i hodnotu udávající stupeň našeho přesvědčení např. hodnoty udávané v procentech.

Nejznámějším a nejstarším představitelem vícehodnotových logik je logika trojhodnotová, kde je zvykem význam třetí hodnoty chápat jako *nevím* (ozn. *1/2*). Mezi vícehodnotovou logiku zařazujeme také fuzzy logiku.

V klasické logice je počet možných hodnot argumentů roven dvěma a interpretaci logické spojky lze určit výčtem všech možností. K tomu nám slouží pravdivostní tabulky logických operací. Na následující tabulce vidíme hodnoty jednotlivých operací pro pravdivostní hodnoty výroků A, B (0 resp. 1), symbolem $\neg$ označujeme negaci, $\wedge$ značí logickou spojku konjunkci a $\vee$ označuje disjunkci. Konstrukce pravdivostních hodnot jednotlivých operací je znázorněna v Tab. 9.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1

Tab. 9 Pravdivostní tabulky

Logická spojka implikace (ozn. $\Rightarrow$), je binární operací mezi dvěma proměnnými. Pravdivostní hodnoty této operace uvádíme v Tab. 9.

Nyní si uvedeme dvě důležité vlastnosti implikace.

Implikaci můžeme nahradit disjunkcí, protože platí

$$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b). \tag{74}$$

Platí také obměna implikace

$$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a). \tag{75}$$

Další logickou operací je ekvivalence (ozn. $\Leftrightarrow$). Pravdivostní hodnoty této operace uvádíme v Tab. 9. Pravdivostní hodnota ekvivalence je shodná s pravdivostní hodnotou oboustranné implikace, tj. následující dvě formule mají stejnou pravdivostní tabulku

$$\begin{gathered} a \Leftrightarrow b, \\ (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a). \end{gathered} \tag{76}$$

Pravdivostní hodnota ekvivalence je opačná k pravdivostní hodnotě disjunkce, tj. následující dvě formule mají stejnou pravdivostní tabulku

$$\begin{gathered} a \Leftrightarrow b, \\ \neg((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)). \end{gathered} \tag{77}$$

Fuzzy logika je zobecněním klasické logiky. Ve fuzzy logice uvažujeme pravdivostní hodnoty 1 (pravda) a 0 (nepravda), které považujeme za extrémní hodnoty a navíc mezi nimi připouštíme i hodnoty částečné pravdivosti. Fuzzy logika tedy pracuje se všemi hodnotami z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Fuzzy logiku můžeme chápat jako logiku komparativní pravdy, kdy výroky mohou být více či méně pravdivé. Díky faktu, že fuzzy logika pracuje s nekonečným počtem hodnot z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, nemůžeme sestavit tabulku pravdivostních hodnot jako v klasické logice. Logické spojky můžeme popsat funkcí. Konjunkci $\wedge$ modelujeme pomocí operace t-normy a disjunkci $\vee$ pomocí operace t-konormy. Uvedeme si značení operací, které využijeme v Příkladu 4.4, kde konjunkci (resp. disjunkci) modelujeme pomocí standardních operací, používáme značení $\wedge_S$ (resp. $\vee_S$), obdobně pro Łukasiewiczovy operace $\wedge_L$ (resp. $\vee_L$) a pro součinové operace využíváme značení $\wedge_P$ (resp. $\vee_P$).

Pomocí znalosti t-norem, t-konorem a negace můžeme nadefinovat další logickou spojku nazvanou fuzzy implikaci (můžeme k jejímu nadefinování využít i formule (75)) a následně lze vyjádřit i fuzzy ekvivalenci (můžeme se setkat s označením fuzzy biimplikace). K sestavení následujícího textu jsem využila literatury [2], [4].

Nyní si představíme nejčastěji používané typy fuzzy implikace, kterými jsou reziduovaná fuzzy implikace (R-implikace, reziduovaná implikace), S-implikace, Q-implikace (kvantová implikace z ang. quantum implication).

Definice 4.8. *R-implikace je binární operace* $\Rightarrow_{\bullet}^{R}\colon \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$, *daná vztahem*

$$a \Rightarrow_{\bullet}^{R} b = sup\{c : T(a,c) \leq b\}, \tag{78}$$

kde T označuje příslušnou t-normu.

S-implikace je binární operace $\Rightarrow_{\bullet}^{S}\colon \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$, *definovaná vztahem*

$$a \Rightarrow_{\bullet}^{S} b = S(N(a),b)\}, \tag{79}$$

kde N je standardní negace a S označuje t-konormu.

Q-implikace je binární operace $\Rightarrow_{\bullet}^{Q}\colon \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$, *definovaná vztahem*

$$a \Rightarrow_{\bullet}^{Q} b = S(N(a),T(a,b)\}, \tag{80}$$

kde N je standardní negace, T je t-norma a S označuje duální t-konormu k T vzhledem k negaci N.

Nyní si představíme nejčastěji využívané typy fuzzy implikace.

Příklad 4.2. *Gödelova implikace, která je odvozena ze standardní t-normy, je dána následujícím vztahem*

$$a \Rightarrow_S^R b = \begin{cases} 1, \ a \leq b, \\ b, \ jinak. \end{cases} \tag{81}$$

Łukasiewiczova implikace, která je odvozena pomocí Łukasiewiczovy t-normy, je definována následovně

$$a \Rightarrow_L^R b = \begin{cases} 1, & a \leq b, \\ 1 - a + b, & jinak. \end{cases} \tag{82}$$

Od součinové t-normy je odvozena Goguenova implikace daná následujícím vztahem

$$a \Rightarrow_P^R b = \begin{cases} 1, \ a \leq b, \\ \frac{b}{a}, \ jinak. \end{cases} \tag{83}$$

Goguenova implikace je také známá pod názvem Gainesova implikace.

Ze standardní t-normy dostaneme Zadehovu implikaci (ang. early Zadeh implication)

$$a \Rightarrow_S^Q b = S_{MAX}(N(a), T_{MIN}(A, B)) = \max\{1 - a, \min\{a, b\}\}. \tag{84}$$

□

Od implikace $\Rightarrow_\bullet^\bullet$ se odvozuje komutativní operace $\Leftrightarrow_\bullet^\bullet$, definovaná vztahem

$$a \Leftrightarrow_\bullet^\bullet b = T((a \Rightarrow_\bullet^\bullet b), (b \Rightarrow_\bullet^\bullet a)), \tag{85}$$

kterou nazýváme fuzzy ekvivalence.

Příklad 4.3. *Łukasiewiczova ekvivalence*

$$a \Leftrightarrow_L^R b = 1 - |a - b|, \tag{86}$$

Gödelova ekvivalence

$$a \Leftrightarrow_S^R b = \begin{cases} 1, & a = b; \\ T_{MIN}(a, b), & jinak, \end{cases} \tag{87}$$

Součinová ekvivalence

$$a \Leftrightarrow_P^R b = \begin{cases} 1, & a = b = 0; \\ \frac{T_{MIN}(a,b)}{S_{MAX}(a,b)}, & jinak. \end{cases} \qquad (88)$$

□

Příklad 4.4. *Mějme dány výroky A a B, s danými pravdivostními hodnotami. Pak představené logické operace mají hodnoty uvedené v Tab. 10 až v Tab. 12.*

A	B	$A \wedge_S B$	$A \vee_S B$	$A \Rightarrow_S^R B$	$A \Leftrightarrow_S^R B$
0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
0,8	0,2	0,2	0,8	0,2	1
0,3	0,2	0,2	0,3	0,2	1
0,9	0,8	0,8	0,9	0,8	1
0,3	0,6	0,3	0,6	1	1

Tab. 10 Pravdivostní tabulky pro standardní operace

A	B	$A \wedge_L B$	$A \vee_L B$	$A \Rightarrow_L^R B$	$A \Leftrightarrow_L^R B$
0,5	0,5	0	1	1	1
0,8	0,2	0	1	0,4	0,4
0,3	0,2	0	0,5	0,9	0,9
0,9	0,8	0,7	1	0,9	0,9
0,3	0,6	0	0,9	1	0,7

Tab. 11 Pravdivostní tabulky pro Łukasiewiczovy operace

A	B	$A \wedge_P B$	$A \vee_P B$	$A \Rightarrow_P^R B$	$A \Leftrightarrow_P^R B$
0,5	0,5	0,25	0,75	1	1
0,8	0,2	0,16	0,84	0,25	0,25
0,3	0,2	0,06	0,44	0,67	0,67
0,9	0,8	0,72	0,98	0,89	0,89
0,3	0,6	0,18	0,72	1	0,5

Tab. 12 Pravdivostní tabulky pro součinové operace

□

Nyní si představíme několik základních typů fuzzy logik. V literatuře (např. [2], [4]) jsme se setkali s členěním, které využívá modelaci konjunkce příslušnou t-normou a spojky implikace. My zde uvedeme členění, kde využíváme operací t-norma, t-konorma a negace.

- *Základní výroková fuzzy logika* (ang. Basic fuzzy logic, odtud označení BL), představuje logiku, kde konjunkce je definována spojitou t-normou, disjunkce je modelovaná spojitou t-konormou duální k dané t-normě vzhledem k standardní negaci.

- *Gödelova fuzzy logika* je zvláštním případem základní fuzzy logiky, kde konjunkcí je standardní t-norma, disjunkcí je standardní t-konorma, jako negace tady vystupuje standardní negace.

- *Łukasiewiczova fuzzy logika* je zvláštním případem základní fuzzy logiky, kde konjunkcí (resp. disjunkcí) je Łukasiewiczova t-norma (resp. Łukasiewiczova t-konorma) a negaci modelujeme pomocí standardní negace.

5 Závěr

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře s třídami konjunktních a disjunktních agregačních operátorů, s jejich matematickými vlastnostmi a s jejich možným využitím. Práci jsem pro větší názornost ilustrovala obrázky.

Velkou část práce jsem se zabývala zkoumáním matematických vlastností jednotlivých studovaných agregačních operátorů, přičemž vlastnosti, jejichž důkaz nebyl uvedený v mě dostupné literatuře, jsem zde navíc dokázala. Přehled zjištěných vlastností je uveden v příloze (viz Tab. 13 a Tab. 14).

V kapitole věnované praktickým aplikacím, jsem uvedla příklady využití disjunktních a konjunktních agregačních operátorů, které se využívají při modelování průniku a sjednocení fuzzy množin a při modelování logických spojek konjunkce a disjunkce ve fuzzy logice. Možné aplikace jsou pak znázorněny na konkrétních příkladech.

Díky této práci jsem si rozšířila znalosti týkající se problematiky agregačních operátorů, které jsem částečně nabyla při zpracování bakalářské práce.

Obrázky jsem vytvořila pomocí matematického softwaru Matlab. Velkou výhodou tohoto systému je vložený balík programů zabývající se teorií fuzzy - Fuzzy Logic Toolbox. Využila jsem zejména příkazů pro fuzzy aritmetiku.

K vysázení textu této práce jsem využila topografický systému LATEX, tento systém je preferovaný nástroj pro zpracování matematických výrazů. Vznikl neplánovaně, kdy měl prof. Donald E. Knuth v roce 1977 v úmyslu vydat knihu The Art of Computer Programming. Zjistil, že sazba není provedena příliš kvalitně a že lepší způsob neexistuje, rozhodl se, že vytvoří nový sázecí systém. Za rok už se LATEXdostal k prvním uživatelům. Vývoj pokračoval a vznikaly tak další verze. S verzí 3.0 se však vývoj z rozhodnutí Donalda Knutha zastavil. Každé další vydání pouze opravuje nalezené chyby a jeho číslo je doplněno o jednu další číslici tak, že konverguje k číslu π.

Literatura

[1] Fodor, J., Yager. R.: Fuzzy set-theoretic operators and quantifiers. In: Dubois, D., Prade, H. (Eds.), Fundamentals of fuzzy sets. Kluwer Academic Publishers, Boston-London-Dordrecht, 2000, 125–194.

[2] Hájek, P.: Metamathematics of Fuzzy Logic. Kluwer Academic Publishers, 1998.

[3] Lukasová, A.: Formální logika v umělé inteligenci. Brno: Computer Press, 2003.

[4] Navara, M., Olšák, P.: Základy fuzzy množin. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002.ibitemlit3 Lukasová, A.: Formální logika v umělé inteligenci. Brno: Computer Press, 2003.

[5] Nquyen, H., Walker, E.: A First Course in Fuzzy Logic. Chapman & Hall/CRC, 2000.

[6] Ramík, J., Vlach, M.: Generalized Concavity In Fuzzy Optimization And Decision Analysis. Kluwer Academic Publishers. Boston-Dordrecht-London, 2002.

[7] Slezáková, M.: Agregační operátory. Bakalářská práce, UP Olomouc, 2009.

[8] Sochor, A.: Klasická matematická logika. Praze: Karolinum, 2001.

[9] Švejdar, V.: Logika neúplnost, složitost a nutnost. Praha: Academia, 2002.

[10] Talašová, J., Fuzzy metody vícekriteriálního hodnocení a rozhodování. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc 2003.

[11] http://en.wikipedia.org/wiki/Construction_of_t-norms [citováno 5. 2. 2011].

[12] http://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy_logic [citováno 1. 3. 2011].

[13] http://www.rydval.cz/phprs/view.php?cisloclanku=2005061701 [citováno 7. 3. 2011].

Seznam příloh

Příloha A - Vlastnosti t-norem

Příloha B - Vlastnosti t-konorem

Přílohy

A.

operátor	T_{MIN}	T_L	T_P	T_D
SYMETRIE	ANO	ANO	ANO	ANO
SPOJITOST	ANO	ANO	ANO	NE
RYZÍ MONOTÓNNOST	NE	NE	ANO	NE
RYZÍ	NE	NE	ANO	NE
ASOCIATIVITA	ANO	ANO	ANO	ANO
ROZLOŽITELNOST	ANO	NE	NE	NE
ANIHILÁTOR	ANO	ANO	ANO	ANO
NEUTRÁLNÍ ELEMENT	ANO	ANO	ANO	ANO
BISYMETRIE	ANO	ANO	ANO	ANO
IDEMPOTENTNOST	ANO	NE	NE	NE
VYVÁŽITELNOST	ANO	ANO	ANO	ANO
ARCHIMEDOVSKÁ	NE	ANO	ANO	NE
NILPOTENTNÍ	NE	ANO	NE	NE

Tab. 13 Vlastnosti t-norem

B.

operátor	S_{MAX}	S_L	S_P	S_D
SYMETRIE	ANO	ANO	ANO	ANO
SPOJITOST	ANO	ANO	ANO	NE
RYZÍ MONOTÓNNOST	NE	NE	ANO	NE
RYZÍ	NE	NE	ANO	NE
ASOCIATIVITA	ANO	ANO	NE	ANO
ROZLOŽITELNOST	ANO	NE	NE	NE
ANIHILÁTOR	ANO	ANO	ANO	ANO
NEUTRÁLNÍ ELEMENT	ANO	ANO	ANO	ANO
BISYMETRIE	ANO	ANO	ANO	ANO
IDEMPOTENTNOST	ANO	NE	NE	NE
VYVÁŽITELNOST	ANO	ANO	ANO	ANO
ARCHIMEDOVSKÁ	NE	ANO	ANO	NE
NILPOTENTNÍ	NE	ANO	NE	NE

Tab. 14 Vlastnosti t-konorem