

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Mnohorozměrný regresní model a jeho aplikace
při analýze sesuvu svahu



Vedoucí diplomové práce:
Doc. RNDr. Eva Fišerová, Ph.D.
Rok odevzdání: 2013

Vypracoval:
Bc. Robert Zůvala
AME, II. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně pod vedením Doc. RNDr. Evy Fišerové, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 25. března 2013

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat především vedoucí své diplomové práce Doc. RNDr. Evě Fišerové, Ph.D., za dostatek trpělivosti, čímž mi pomohla dovést tuto práci ke zdárnému konci.

Obsah

Úvod	5
1 Základní poznatky z algebry a pravděpodobnosti	7
1.1 Základní poznatky z teorie matic	7
1.2 Rozdělení pravděpodobnosti kvadratických forem	9
2 Jednorozměrné modely	10
2.1 Lineární regresní model	10
2.2 Metoda nejmenších čtverců a zobecněných nejmenších čtverců (MNČ a MZNČ)	11
2.3 Odhad jednotkové disperze	14
2.4 Oblasti spolehlivosti	17
2.4.1 Sdružené oblasti spolehlivosti	18
3 Mnohorozměrný regresní model	20
3.1 Formulace lineárního modelu	20
3.2 Nejlepší lineární nestranný odhad matice \mathbf{B}	23
3.3 Odhad parametru σ^2	25
3.4 Oblasti spolehlivosti	27
4 Modelování sesuvu svahu	30
4.1 Lokalizace svahu	30
4.2 Sběr dat	30
4.3 Chybějící data v pozorování	31
4.3.1 Doplnění chybějících dat	32
4.4 Rozdělení sesuvu	36
4.5 Tvorba modelu horní části svahu	41
4.6 Varianční matice svahu	46
4.7 Elipsy spolehlivosti pro odhady bodů	48
4.8 Posuny bodů v x -ovém a y -ovém směru pro celý svah	51
Závěr	57
Přílohy	59
Příloha 1: Souřadnice bodů v jednotlivých časech	59
Příloha 2: Srovnání modelu a skutečnosti pro horní část svahu	60
Příloha 3: Srovnání modelu a skutečnosti pro horní část svahu	61
Příloha 6: Srovnání modelu a skutečnosti pro dolní část svahu	62
Příloha 7: Srovnání modelu a skutečnosti pro dolní část svahu	63
Příloha 8: Srovnání modelu a skutečnosti pro dolní část svahu	64
Příloha 9: Kružnice spolehlivosti pro horní část svahu	65
Příloha 10: Kružnice spolehlivosti pro dolní část svahu	66

Příloha 10: Metoda kriging: R-kód	67
Literatura	68

Úvod

Problematika sesuvů svahů mě zaujala již v bakalářském studiu, kde jsem si zvolil toto téma pro mou bakalářskou práci s názvem Analýza sesuvu svahu pomocí metody kriging. Diplomová práce navazuje na tuto bakalářskou práci, avšak zkoumá problematiku z jiného hlediska. Zatímco v bakalářské práci jsem se věnoval problematice sesuvů z hlediska geodézie a aplikací metody kriging v programu ArcGIS, tak v této diplomové práci se chci věnovat matematické stránce sesuvů. Cílem práce je vytvořit mnohorozměrný regresní model, který by popisoval sesuv svahu v Halenkovicích od počátku měření v květnu 2008 až do konce měření v březnu 2010. Dále tento model statisticky popsat a výsledky doprovodit grafickými výstupy pro lepší přehlednost.

Diplomová práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část. V teoretické části jsou na úvod shrnuty základní poznatky z teorie algebry a pravděpodobnosti. Tyto poznatky jsou následně využity v jednorozměrných i mnohorozměrných modelech. Další kapitola pojednává o vlastnostech jednorozměrných modelů, které jsou základem pro odvození modelů mnohorozměrných. Tyto teoretické vztahy a odvození později aplikuji při výpočtech v praktické části. Cílem praktické části je samotné modelování sesuvu svahu, kde nejdříve analyzuji chování jednotlivých bodů, popisují nalezení chybějících dat v souboru a poté vytvářím model na základě teorie první části diplomové práce. Přílohy diplomové práce pak obsahují, kromě souboru dat, také grafické výstupy výsledků vypracované v programu R.

Seznam symbolů a použitého značení

- \mathbf{I} ... jednotková matice,
 $\mathbf{A}_{n,n}$... čtvercová matice řádu n ,
 $\text{Tr}(\mathbf{A})$... stopa matice \mathbf{A} ,
 $r(\mathbf{A})$... hodnota matice \mathbf{A} ,
p.d. ... pozitivně definitní,
 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$... Kroneckerův součin matic \mathbf{A} a \mathbf{B} ,
 \mathbb{R}^n ... n -rozměrný lineární vektorový prostor,
 $\boldsymbol{\beta}$... vektor regresních koeficientů,
 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$... odhad parametru $\boldsymbol{\beta}$,
 \mathbf{B} ... matice regresních koeficientů,
 $\hat{\mathbf{B}}$... odhad matice \mathbf{B} ,
 α ... riziko testu, hladina významnosti,
 \mathbf{X} ... matice plánu,
 \mathbf{Y} ... náhodný vektor,
 $E(\mathbf{Y})$... střední hodnota náhodného vektoru \mathbf{Y} ,
 $\text{var}(\mathbf{Y})$... varianční matice náhodného vektoru \mathbf{Y} ,
 $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$... normálně rozdělený n -rozměrný náhodný vektor se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a varianční maticí $\boldsymbol{\Sigma}$,
 χ_n^2 ... náhodná veličina s χ^2 rozdělením s n stupni volnosti,
 $\chi_n^2(1 - \alpha)$... $(1 - \alpha)$ -kvantil χ^2 rozdělení s n stupni volnosti,
 $F_{m,n}$... náhodná veličina s F rozdělením s m, n stupni volnosti,
 $F_{m,n}(1 - \alpha)$... $(1 - \alpha)$ -kvantil F rozdělení s m, n stupni volnosti,
 $\mathbf{C}_{(1-\alpha)\boldsymbol{\beta}}$... elipsa spolehlivosti pro vektorový parametr $\boldsymbol{\beta}$ na hladině významnosti $(1 - \alpha)$.

1 Základní poznatky z algebry a pravděpodobnosti

1.1 Základní poznatky z teorie matic

Považuji za vhodné na úvod zmínit několik definic a tvrzení z teorie matic, které budu velmi často využívat nejen v kapitole týkající se jednorozměrného a mnohorozměrného modelu, ale také u samotných výpočtů v praktické části. Rozsáhlejší přehled pojmů a tvrzení lze nalézt včetně důkazů např. v [2, 3].

Definice 1.1. Čtvercová matice $\mathbf{A}_{n,n}$ se nazývá pozitivně definitní, je-li symetrická a platí-li pro každý n -rozměrný vektor $\mathbf{x} \neq 0$ nerovnost

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0.$$

Definice 1.2. Čtvercová matice $\mathbf{A}_{n,n}$ se nazývá pozitivně semidefinitní, je-li symetrická a platí-li pro každý n -rozměrný vektor \mathbf{x} nerovnost

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0.$$

Definice 1.3. Matici, která vznikne z matice \mathbf{A} vzájemnou výměnou řádků a sloupců, označujeme jako transponovanou matici a značíme \mathbf{A}' . Pro jednotlivé prvky transponované matice platí

$$a'_{i,j} = a_{j,i}.$$

Pokud má matice \mathbf{A} rozměry (m, n) , pak její transpozicí vznikne matice o rozměrech (n, m) .

Definice 1.4. Čtvercovou matici $\mathbf{A}_{n,n}$ nazýváme jednotkovou maticí, jestliže pro její prvky $a_{i,j}$ platí

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= 0 \text{ pro } i \neq j \\ a_{i,j} &= 1 \text{ pro } i = j \end{aligned}$$

Definice 1.5. Inverzní matice (značíme \mathbf{A}^{-1}) k matici $\mathbf{A}_{n,n}$ je taková matice, která po vynásobení s původní maticí dá jednotkovou matici, tj. platí-li

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I},$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice.

Definice 1.6. Symetrická matice \mathbf{A} se nazývá idempotentní, jestliže platí

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}.$$

Definice 1.7. Necht' $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$ jsou prvky na hlavní diagonále $n \times n$ -rozměrné čtvercové matice \mathbf{A} . Potom stopa matice \mathbf{A} je definována jako součet

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Lemma 1.1. Jestliže \mathbf{A} je idempotentní matice, potom hodnota $r(\mathbf{A}) = \text{Tr}(\mathbf{A})$.

Definice 1.8. Operátor vec vytvoří sloupcový vektor z matice \mathbf{A} skládáním sloupců vektoru matice $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$ pod sebe:

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

Definice 1.9. Necht' \mathbf{A} je $m \times n$ matice a \mathbf{B} je $p \times q$ matice. Symbol $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ značí $mp \times nq$ matici

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\mathbf{B}, \dots, a_{1,n}\mathbf{B} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m,1}\mathbf{B}, \dots, a_{m,n}\mathbf{B} \end{pmatrix},$$

kde $a_{i,j} = \mathbf{A}_{i,j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Matice $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ se nazývá Kroneckerův (tenzorový) součin matic \mathbf{A} a \mathbf{B} .

Lemma 1.2. Necht' \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou čtvercové $n \times n$ -rozměrné matice a necht' $c, d \in \mathbb{R}^1$. Potom platí:

- (i) $\text{Tr}(c\mathbf{A} \pm d\mathbf{B}) = c\text{Tr}(\mathbf{A}) \pm d\text{Tr}(\mathbf{B})$,
- (ii) $\text{Tr}(\mathbf{A}') = \text{Tr}(\mathbf{A})$,
- (iii) $\text{Tr}(\mathbf{AB}) = \text{Tr}(\mathbf{BA})$,
- (iv) $\text{Tr}(\mathbf{AA}') = \text{Tr}(\mathbf{A}'\mathbf{A}) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$,
- (v) $\text{Tr}(\mathbf{AB}) = [\text{vec}(\mathbf{A}')]'\text{vec}(\mathbf{B})$,
- (vi) $\text{Tr}(\mathbf{ABCD}) = [\text{vec}(\mathbf{A}')]'\mathbf{(D}' \otimes \mathbf{B}')\text{vec}(\mathbf{C})$.

Lemma 1.3. *Kroneckerův součin má následující vlastnosti*

- (i) $(a\mathbf{A}) \otimes (b\mathbf{B}) = ab(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}), a, b \in \mathbb{R}^1,$
- (ii) $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C},$
- (iii) $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD}),$
- (iv) $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{D} \otimes \mathbf{E} \otimes \mathbf{F}) = (\mathbf{AD}) \otimes (\mathbf{BE}) \otimes (\mathbf{CF}),$
- (v) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{D},$
- (vi) $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}',$
- (vii) $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1},$
- (viii) $\text{Tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{A})\text{Tr}(\mathbf{B}),$
- (ix) $r(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = r(\mathbf{A})r(\mathbf{B}),$
- (x) $\text{Tr}(\mathbf{AB}) = [\text{vec}(\mathbf{A}')]'\text{vec}(\mathbf{B}),$
- (xi) $\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}' \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B}),$
- (xii) $(\mathbf{B}' \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{X}) = \text{vec}(\mathbf{C}) \Leftrightarrow \mathbf{AXB} = \mathbf{C}.$

1.2 Rozdělení pravděpodobnosti kvadratických forem

V této kapitole budeme specifikovat pravděpodobnostní rozdělení kvadratických forem, vytvořených z náhodných veličin, které mají normální rozdělení. Tato tvrzení jsou pak základem pro některá odvození diplomové práce. Jsou použita především v teorii oblasti spolehlivosti, kde tyto oblasti vytvoříme pomocí statistiky, která je kvadratickou formou odhadu parametru. Důkazy následujících tvrzení lze nalézt například v [4].

Definice 1.10. *Nechť $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny, z nichž každá má rozdělení $N(0,1)$. Potom náhodná veličina $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1^2 + \dots + \mathbf{Y}_n^2$ má rozdělení χ_n^2 .*

Věta 1.1. *Nechť $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{V})$, kde $r(\mathbf{V}) = r \geq 1$. Pak náhodná veličina $(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{V}^- (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})$ má rozdělení $\sigma^2 \chi_r^2$ při libovolné volbě pseudoinverze matice \mathbf{V}^- .*

Věta 1.2. *Nechť $\mathbf{Y} \sim N_n(0, \sigma^2 \mathbf{V})$ a nechť \mathbf{A} je symetrická pozitivně semidefinitní matice. Je-li \mathbf{AV} nenulová a idempotentní matice, pak náhodná veličina $\mathbf{Y}' \mathbf{AY}$ má rozdělení $\sigma^2 \chi^2$ s počtem stupňů volnosti rovným $\text{Tr}(\mathbf{AV})$.*

2 Jednorozměrné modely

2.1 Lineární regresní model

Regresní modely slouží k objasnění vztahů mezi měřenou, výstupní závisle proměnnou veličinou y a nastavovanými, vstupními nezávisle proměnnými veličinami \mathbf{x} . Například cena jednoho typu auta (závisle proměnná y) závisí na jeho stáří (první nezávislá proměnná \mathbf{x}_1) a na počtu najetých kilometrů (druhá nezávislá proměnná \mathbf{x}_2). Výsledkem je pak n naměřených hodnot y při různých kombinacích nastavovaných proměnných \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 . Těmito hodnotami pak chceme proložit funkci $y = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \beta_1, \dots, \beta_k)$, přičemž linearitou se v tomto typu regrese myslí závislost funkce $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ na koeficientech β_1, \dots, β_k . Typ závislosti, vyjádřený funkcí $y = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \beta_1, \dots, \beta_k)$, záleží na tom, jaké povahy jsou veličiny y a $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Dále budeme uvažovat pouze situaci, kdy výstupní veličina je náhodná a vstupní veličiny \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 jsou nenáhodné a libovolně nastavitelné. Jedná se o příklad klasických regresních modelů. Lineární regresní model lze zapsat jako:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Y_i je hodnota vysvětlované proměnné Y , x_{i1}, \dots, x_{ik} jsou hodnoty vysvětlujících proměnných (regresorů), $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ jsou neznámé (regresní) parametry modelu, přičemž β_0 je absolutní člen a ε_i jsou neznámé náhodné chyby (náhodná složka). V maticovém zápisu přechází rovnice (1) na tvar

$$\mathbf{Y}_{n \times 1} = \mathbf{X}_{n \times k} \boldsymbol{\beta}_{k \times 1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n \times 1}, \quad (2)$$

kde

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

přičemž $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^k$, $r(\mathbf{X}) = k < n$.

Dále v modelu lineární regrese předpokládáme, že

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}, \text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I},$$

tj., že náhodné chyby mají nulovou střední hodnotu a stejný neznámý rozptyl, kde jednotlivé reziduální složky jsou navzájem nekorelované. Předpoklady dále můžeme zobecnit, tj.

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}, \text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{V}, \mathbf{V} \text{ je p.d.},$$

kde již reziduální složky nemusí být konstantní a navzájem nekorelované. Tato kapitola byla zpracována s využitím zdrojů [2, 3, 4].

2.2 Metoda nejmenších čtverců a zobecněných nejmenších čtverců (MNČ a MZNČ)

K odhadu parametrů lineárního regresního modelu (2) s varianční maticí $\text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}$ se nejčastěji používá přístup založený na metodě nejmenších čtverců. MNČ hledá odhady parametrů $\boldsymbol{\beta}$ tak, aby součet čtverců odchylek pozorovaných hodnot Y_i a odhadnutých hodnot $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \dots + \hat{\beta}_k x_{ik}$, $i = 1, \dots, n$ byl minimální, což je popsáno v následující definici.

Definice 2.1. *Odhady $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$, které pro dané Y_i minimalizují výraz*

$$S(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} - \dots - \beta_k x_{ik})^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \quad (3)$$

nazýváme odhady parametrů $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ určené metodou nejmenších čtverců.

Věta 2.1. *(o ekvivalenci odhadů) Lineární odhady neznámých parametrů v lineárních regresních modelech optimální ve smyslu principu nejmenších čtverců jsou nejlepší nestranné lineární odhady.*

Věta 2.2. *Odhad parametru $\boldsymbol{\beta}$ v modelu (2) s varianční maticí $\text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}$ získaný metodou MNČ je dán vztahem:*

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}. \quad (4)$$

Důkaz: Metodou nejmenších čtverců hledáme takové β , které minimalizuje kvadratickou formu

$$Q(\mathbf{Y}, \beta) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta).$$

Provedeme parciální derivaci podle parametrů $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ a položíme rovnou nule

$$\frac{\partial Q(\mathbf{Y}, \beta)}{\partial \beta} = 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta - 2\mathbf{X}'\mathbf{Y} = 0.$$

Postupnými úpravami dostaneme odhad parametru β ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'\mathbf{X}\beta &= \mathbf{X}'\mathbf{Y}, \\ \hat{\beta} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Pomocí druhé parciální derivace ověříme, zda v bodě $\hat{\beta}$ je minimum, tj.

$$\frac{\partial Q(\beta)}{\partial \beta \partial \beta'} = 2\mathbf{X}'\mathbf{X}.$$

Zvolíme-li libovolné $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$, pak s použitím předchozího vztahu dostaneme

$$2\mathbf{a}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{a} = 2\|\mathbf{X}\mathbf{a}\|^2 \geq 0.$$

Přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $\mathbf{a} = 0$. Předpokládáme, že model je plné hodnosti, a tudíž jsou sloupce matice \mathbf{X} lineárně nezávislé. Tím jsme ověřili, že matice $2\mathbf{X}'\mathbf{X}$ je p.d. a tudíž je v bodě $\hat{\beta}$ minimum.

□

MNČ je vhodná pouze v případě, kdy pozorování jsou nezávislá a stejně přesná. Nejsou-li tyto předpoklady splněny, odhady pomocí MNČ nejsou obecně eficientní (tedy nejsou nejlepší a dávají zavádějící výsledky), je třeba použít metodu MZNC. MZNC se používá pokud náhodné chyby ε_i jsou závislé nebo mají různý rozptyl, tj. obecně $\text{var}(\varepsilon) = \Sigma$. Pro MZNC platí zobecněný vztah jako v definici 2.1, tedy $S(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)' \Sigma^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)$.

Věta 2.3. Odhad parametru β v modelu (2) s varianční maticí $\text{var}(\varepsilon) = \Sigma$ získaný metodou MZNČ je dán vztahem:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{Y}. \quad (5)$$

Důkaz: Metodou zobecněných nejmenších čtverců hledáme takové β , které minimalizuje kvadratickou formu

$$Q(\mathbf{Y}, \beta) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)' \Sigma^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta).$$

Provedeme parciální derivaci podle parametrů $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ a položíme rovnou nule

$$\frac{\partial Q(\mathbf{Y}, \beta)}{\partial \beta} = 2\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X}\beta - 2\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{Y} = 0.$$

Postupnými úpravami dostaneme odhad parametru β ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X}\beta &= \mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{Y}, \\ \hat{\beta} &= (\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Dále ukážeme že se jedná o minimum, což plyne ze skutečnosti, že

$$\frac{\partial Q(\beta)}{\partial \beta \partial \beta'} = 2\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X},$$

což je pozitivně definitní matice, neboť Σ je p.d. a tedy i Σ^{-1} je p.d. matice.

□

Věta 2.4. Varianční matice nejlepšího nestranného odhadu $\hat{\beta}$ je v modelu (2), kde $\text{var}(\varepsilon) = \Sigma$, dána jako:

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = (\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X})^{-1} \quad (6)$$

Důkaz: V důkazu používáme výpočtů rozptylu pro odhad $\hat{\beta}$, tj.

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \text{Var}[(\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{Y}].$$

Při výpočtech se řídíme pravidly pro výpočet rozptylu, tedy

$$\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\text{var}(\mathbf{Y})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}.$$

Výraz už jen upravíme

$$\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}$$

a dostaneme

$$\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}.$$

□

2.3 Odhad jednotkové disperze

Abychom mohli určit nejlepší nestranné lineární odhady regresních parametrů je potřeba znát varianční matici vektoru pozorování. Uvažujme např. situaci zaměrování bodů jedním přístrojem, přičemž neznáme přesnost měření. Varianční matici vektoru pozorování pak lze zapsat ve tvaru $\text{var}(\mathbf{Y}) = \sigma^2\mathbf{V}$, kde \mathbf{V} je známá p.d. matice a $\sigma > 0$ je neznámý parametr představující přesnost měření. Pokud jsou všechna měření nezávislá, je matice \mathbf{V} jednotková. Po dosazení do vztahů (5) a (6) pro odhad parametru $\boldsymbol{\beta}$ dostaneme, že

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}, \quad \text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}.$$

Vidíme, že pro určení varianční matice je potřeba znát parametr σ . Je-li parametr σ^2 neznámý, můžeme jej odhadnout pomocí následující věty.

Věta 2.5. *Nechť v modelu (2) je $\text{var}(\mathbf{Y}) = \sigma^2\mathbf{V}$, kde \mathbf{V} je známá pozitivně definitní matice a $\sigma^2 > 0$ neznámé. Pak odhad parametru σ^2 daný vztahem*

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}}{n-k}, \quad (7)$$

je nestranný odhad, přičemž $\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ je reziduální vektor, n počet měření a k počet neznámých parametrů $\boldsymbol{\beta}$.

Důkaz: Nejdříve si rozepíšeme reziduální vektor

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y} = [\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}]\mathbf{Y}$$

a spočteme jeho střední hodnotu

$$\mathbf{E}[\mathbf{e}] = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$$

a varianční matici

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathbf{e}) &= [\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}]\sigma^2\mathbf{V}[\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'] \\ &= \sigma^2[\mathbf{V} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}']. \end{aligned}$$

Tím jsme dostali charakteristiky pro reziduální vektor a můžeme přikročit k ověření, že se jedná o nestranný odhad, tj. spočteme

$$\mathbf{E}(\mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}) = \mathbf{E}[\text{Tr}(\mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e})] = \mathbf{E}[\text{Tr}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}\mathbf{e}')] = \text{Tr}[\mathbf{V}^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{e}\mathbf{e}')] =$$

$$\text{var}(\mathbf{e}) = \mathbf{E}[(\mathbf{e}-\mathbf{E}(\mathbf{e}))(\mathbf{e}-\mathbf{E}(\mathbf{e}))'] = \mathbf{E}(\mathbf{e}\mathbf{e}') - \mathbf{E}(\mathbf{e})\mathbf{E}(\mathbf{e}') = \mathbf{E}(\mathbf{e}\mathbf{e}')$$

$$\begin{aligned} &= \text{Tr}[\mathbf{V}^{-1}\text{var}(\mathbf{e})] = \sigma^2\text{Tr}[\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{V} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')] = \sigma^2\text{Tr}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}) - \\ &\sigma^2\text{Tr}[\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'] = \sigma^2\text{Tr}(\mathbf{I}_{n \times n}) - \sigma^2\text{Tr}(\mathbf{I}_{k \times k}) = \sigma^2(n - k). \end{aligned}$$

Pro lepší přehlednost si to můžeme ještě rozepsat jako

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\hat{\sigma}^2) &= \frac{1}{n-k}\mathbf{E}[\mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}], \\ \mathbf{E}(\hat{\sigma}^2) &= \frac{1}{n-k}\sigma^2(n - k), \\ \mathbf{E}(\hat{\sigma}^2) &= \sigma^2. \end{aligned}$$

□

Dalším předpokladem modelu lineární regrese je normalita. Tedy uvažujeme, že chybové složky jsou normálně rozdělené tzn. $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(0, \sigma^2\mathbf{V})$. Normalita je předpokladem v situaci, kdy je nutné specifikovat pravděpodobnostní rozdělení chybové složky.

Věta 2.6. *Nechť v modelu (2) je $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(0, \sigma^2\mathbf{V})$, \mathbf{V} je pozitivně definitní. Pak platí:*

1. $\hat{\sigma}^2 \sim \frac{\sigma^2}{n-k}\chi_{n-k}^2$,

2. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ a $\widehat{\sigma}^2$ jsou nezávislé.

Důkaz:

ad 1) Víme, že platí

$$\mathbf{e} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) \sim N_n[0, \sigma^2(\mathbf{V} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')].$$

Dle věty 1.2 je matice $\mathbf{A} = \text{var}(\mathbf{e})\sigma^{-2}\mathbf{V}^{-1}$ idempotentní. Nejdříve si vztah upravíme do tvaru

$$\mathbf{A} = [\sigma^2(\mathbf{V} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')]\sigma^{-2}\mathbf{V}^{-1} = [\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}].$$

Ověříme, zda je tento vztah idempotentní, tj. platí $\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}][\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}] = \\ & \mathbf{I} - 2\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} = \\ & \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}. \end{aligned}$$

Dále určíme počet stupňů volnosti jako

$$\text{Tr}[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}] = \text{Tr}(\mathbf{I}) - \text{Tr}[(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}] = n - k.$$

Pak dle věty 1.2 platí

$$(\mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}) \sim \sigma^2\chi_{n-k}^2.$$

Úpravami dostaneme tvar

$$\frac{1}{n-k}(\mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}) \sim \frac{\sigma^2}{n-k}\chi_{n-k}^2,$$

kde na levé straně dostáváme přímo vztah pro odhad $\widehat{\sigma}^2$. Potom

$$\widehat{\sigma}^2 \sim \frac{\sigma^2}{n-k}\chi_{n-k}^2.$$

ad 2) Nejprve ukážeme nezávislost mezi $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ a \mathbf{e} . Zřejmě

$$\begin{aligned} \text{cov}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{e}) &= \text{cov}[(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}, \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}], \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} \cdot \sigma^2\mathbf{V} \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'], \\ &= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' - \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}', \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Vidíme, že $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ a \mathbf{e} jsou nekorelované, a tedy v případě normality jsou nezávislé. A protože $\widehat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}}{n-k}$, jsou i $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ a $\widehat{\sigma}^2$ nezávislé.

□

2.4 Oblasti spolehlivosti

Interval spolehlivosti (konfidenční, toleranční interval) pro parametr je náhodný interval, který s pravděpodobností $1 - \alpha$ pokrývá skutečnou hodnotu daného parametru. Jedná se tedy o nalezení mezí, uvnitř kterých se při opakovaných výběrech nalézá skutečná hodnota parametru s určitým stupněm spolehlivosti, s požadovanou pravděpodobností $1 - \alpha$, která se volí předem a nazýváme ji hladinou spolehlivosti. Nejčastěji se používají intervaly spolehlivosti pro $\alpha = 0,01, 0,05$ nebo $0,1$. Pro dva nebo více regresních parametrů dohromady se konstruuje tzv. oblast spolehlivosti.

Definice 2.2. *Nechť k n -rozměrnému vektoru měření \mathbf{Y} je přiřazena třída rozdělení pravděpodobností $F = \{F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) : \boldsymbol{\beta} \in \tau \subset \mathbb{R}^k\}$. Dále nechť zobrazení $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \tau$ má vlastnost $\forall \boldsymbol{\beta} \in \tau : P\{\boldsymbol{\beta} \in C(\mathbf{Y})\} = 1 - \alpha$. Potom zobrazení C nazýváme $1 - \alpha$ oblastí spolehlivosti pro parametr $\boldsymbol{\beta}$. Číslo $1 - \alpha$ se nazývá spolehlivost.*

Věta 2.7. *Oblast spolehlivosti pro parametr $\boldsymbol{\beta}$ při známém σ^2 je ve tvaru*

$$\mathbf{C}_{(1-\alpha)\boldsymbol{\beta}} = \{\boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^k, (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \leq \sigma^2 \chi_k^2(1 - \alpha)\}. \quad (8)$$

Důkaz: Z kapitoly 1.3 plyne, že za předpokladu normality platí

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N_k[\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1}].$$

Pomocí kvadratické formy přejdeme k náhodné veličině:

$$(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \sim \sigma^2 \chi_k^2.$$

Pak platí

$$P\{(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \leq \sigma^2 \chi_k^2\} = (1 - \alpha).$$

□

Věta 2.8. *Oblast spolehlivosti pro parametr $\boldsymbol{\beta}$ při neznámém σ^2 je ve tvaru*

$$\mathbf{C}_{(1-\alpha)\boldsymbol{\beta}} = \{\boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^k, (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \leq k \hat{\sigma}^2 F_{k, n-k}(1 - \alpha)\}. \quad (9)$$

Důkaz: Z věty 2.6 víme, že

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})' \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \sim \frac{\sigma^2}{n-k} \chi_{n-k}^2$$

a také, že $\hat{\sigma}^2$ a $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ jsou nezávislé. Pomocí kvadratické formy přejdeme k náhodné veličině:

$$(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \sim \sigma^2 \chi_k^2.$$

Pak z nezávislosti plyne

$$\frac{(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) / \sigma^2 k}{\hat{\sigma}^2 / \sigma^2} \sim F_{k, n-k},$$

$$\frac{(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})}{\hat{\sigma}^2 k} \sim F_{k, n-k},$$

a tedy

$$P\{(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \leq k \hat{\sigma}^2 F_{k, n-k}(1 - \alpha)\} = 1 - \alpha.$$

□

2.4.1 Sdružené oblasti spolehlivosti

Uvažujme m oblastí spolehlivosti, přičemž každá oblast pokrývá skutečnou hodnotu parametru se spolehlivostí $1 - \alpha$. Potom pro všechny oblasti spolehlivosti současně bude celková hladina menší než $1 - \alpha$. Z praktických důvodů je však přínosné určit m oblastí spolehlivosti tak, aby všechny oblasti současně pokrývali skutečné hodnoty parametrů se spolehlivostí alespoň $1 - \alpha$. Tvrzení užitá v této podkapitole lze nalézt v [2, 8].

Definice 2.3. $(1 - \alpha)$ -oblasti spolehlivosti $\mathbf{C}_{(1-\alpha)\boldsymbol{\beta}^{(i)}}^{(j)}$, $i = 1, \dots, m$, s vlastností

$$P\left\{\boldsymbol{\beta}^{(i)} \in \mathbf{C}_{(1-\alpha)\boldsymbol{\beta}^{(i)}}^{(j)}, i = 1, \dots, m\right\} \geq (1 - \alpha),$$

kde $\boldsymbol{\beta}^{(i)}$ je vektor parametrů pro i -tou oblast, nazýváme sdružené oblasti spolehlivosti na hladině spolehlivosti alespoň $1 - \alpha$.

Věta 2.9. *Nechť $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma})$, kde $\boldsymbol{\Sigma}$ je p.d., $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^k$, $r(\mathbf{X}) = k \leq n$. Potom*

$$\mathbf{C}_{(1-\alpha)\boldsymbol{\beta}^{(i)}}^{(J)} = \{\boldsymbol{\beta}^{(i)} : \boldsymbol{\beta}^{(i)} \in \mathbb{R}^k, (\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)} - \boldsymbol{\beta}^{(i)})' [\text{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)})]^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)} - \boldsymbol{\beta}^{(i)}) \leq \chi_k^2(1-\alpha)\}. \quad (10)$$

Pokud $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{V}$, \mathbf{V} je p.d., pak

$$\mathbf{C}_{(1-\alpha)\boldsymbol{\beta}^{(i)}}^{(J)} = \{\boldsymbol{\beta}^{(i)} \in \mathbb{R}^k, (\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)} - \boldsymbol{\beta}^{(i)})' [\text{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)})]^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)} - \boldsymbol{\beta}^{(i)}) \leq k\hat{\sigma}^2 F_{k, n-k}(1-\alpha)\}. \quad (11)$$

3 Mnohorozměrný regresní model

V předcházející kapitole jsme se věnovali jednorozměrným lineárním modelům, ze kterých budeme vycházet pro odvození mnohorozměrných regresních modelů. Uvažujeme tedy mnohorozměrné rozšíření a zobecnění jednorozměrné lineární regrese. Pokud bychom tedy mnohorozměrně rozšířili příklad z kapitoly jednorozměrných modelů, znamenalo by to, že bychom neměli pouze jednu výstupní proměnnou, ale m výstupních proměnných. Zkoumali bychom cenu několika typů automobilů v závislosti na jeho stáří a počtu najetých kilometrů. Výsledkem by pak bylo n naměřených hodnot pro m typů automobilů při různých kombinacích nastavovaných proměnných. Mnohorozměrný regresní model lze zapsat jako:

$$Y_{ip} = \beta_{0p} + \beta_{1p}x_{i1} + \beta_{2p}x_{i2} + \dots + \beta_{kp}x_{ik} + \varepsilon_{ip}, \quad i = 1, \dots, n; \quad p = 1, \dots, m, \quad (12)$$

kde p představuje index pro jednotlivé výstupní proměnné, Y_{ip} jsou hodnoty vysvětlovaných proměnných Y_p při i -tém nastavení proměnných, x_{i1}, \dots, x_{ik} jsou hodnoty vysvětlujících proměnných (regresorů), $\beta_{0p}, \beta_{1p}, \dots, \beta_{kp}$ jsou neznámé (regresní) parametry modelu, přičemž β_{0p} jsou absolutní členy, ε_{ip} jsou neznámé náhodné chyby (náhodná složka).

3.1 Formulace lineárního modelu

Nejdříve se zaměříme na jednotlivé segmenty modelu aplikovaném na příkladě s automobily. Výsledkem experimentu je matice zjištěných cen automobilů Y_{ip} . Experiment tedy můžeme modelovat pomocí náhodné matice \mathbf{Y} , kterou si rozepíšeme po prvcích, tj.

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1m} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nm} \end{pmatrix} = [\mathbf{Y}_{(1)}, \mathbf{Y}_{(2)}, \dots, \mathbf{Y}_{(m)}],$$

kde n řádků tvoří jednotlivé ceny pro m typů automobilů (představující sloupce) při různých kombinacích nastavovaných proměnných. Pro účely odvozování vztahů je výhodnější si matici zapsat do vektoru pomocí operátoru *vec* jako

$$\text{vec}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{(1)} \\ \mathbf{Y}_{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{(m)} \end{bmatrix}.$$

Maticе plánu \mathbf{X} je stejně jako u jednorozměrného regresního modelu, maticí hodnot vysvětlujících proměnných (regresorů). V našem případě první sloupec odpovídá absolutním členům a další sloupce představují různé hodnoty stáří aut a různé hodnoty najetých kilometrů. Samozřejmě bychom mohli uvažovat i další proměnné, které nám ovlivňují cenu aut, například počet předchozích majitelů. Maticе plánu je ve tvaru

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}.$$

Matici neznámých regresních parametrů \mathbf{B} si rozepíšeme opět po prvcích jako

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{01} & \beta_{02} & \cdots & \beta_{0m} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & \beta_{km} \end{pmatrix} = [\boldsymbol{\beta}_{(1)}, \boldsymbol{\beta}_{(2)}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{(m)}],$$

kde si můžeme představit jednotlivé sloupce jako jednorozměrné úlohy, přičemž první řádek je řádek absolutních členů pro jednotlivé typy aut. Celou matici si stejně jako u matice \mathbf{Y} zapíšeme do vektoru pomocí operátoru vec

$$\text{vec}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{(1)} \\ \boldsymbol{\beta}_{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{(m)} \end{bmatrix}.$$

Posledním segmentem je matice chyb \mathbf{E} , která má po rozepsání tvar

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1m} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \cdots & \varepsilon_{nm} \end{pmatrix} = [\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_{(m)}],$$

kde jednotlivé prvky odpovídají prvkům matice \mathbf{Y} . I zde matici zapíšeme do vektoru, tj.

$$\text{vec}(\mathbf{E}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{(m)} \end{bmatrix}.$$

Každý vektor $\mathbf{Y}_{(p)}$ má stejnou matici plánu \mathbf{X} s vektorem regresních parametrů $\boldsymbol{\beta}_p$ a vektorem chyb $\boldsymbol{\varepsilon}_p$. Nyní si můžeme mnohorozměrný lineární statistický model vyjádřit v maticovém tvaru jako:

$$(\mathbf{Y}_{(1)}, \mathbf{Y}_{(2)}, \dots, \mathbf{Y}_{(m)}) = \mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}_{(1)}, \boldsymbol{\beta}_{(2)}, \dots, \boldsymbol{\beta}_{(m)}) + (\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{(m)}),$$

neboli

$$\mathbf{Y}_{n,m} = \mathbf{X}_{n,k} \mathbf{B}_{k,m} + \mathbf{E}_{n,m}. \quad (13)$$

Dále budeme předpokládat stejnou varianční matici pro všechny výstupní proměnné $\mathbf{Y}_{(p)}$ a jejich vzájemnou nezávislost, tj.

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(p)}) = \mathbf{0}, \text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(p)}) = \boldsymbol{\Sigma}_{n,n}, \boldsymbol{\Sigma} \text{ je p.d.}$$

Již jsme si ukázali, že jednotlivé segmenty modelu lze převést do vektorů pomocí operátoru vec . Stejně tak bychom mohli převést celý mnohorozměrný model na jednorozměrný model. Vyjdeme z mnohorozměrného modelu (13) s varianční maticí ve tvaru $\text{var}[\text{vec}(\mathbf{E})] = \mathbf{I}_{m,m} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{n,n}$ a převedeme jej do jednorozměrného podoby

$$\text{vec}(\mathbf{Y}_{n,m}) = \text{vec}(\mathbf{X}_{n,k} \mathbf{B}_{k,m}) + \text{vec}(\mathbf{E}_{n,m}).$$

Doplníme do vztahu jednotkovou matici, která nám původní vztah nezmění, tzn.

$$\text{vec}(\mathbf{Y}_{n,m}) = \text{vec}(\mathbf{X}_{n,k} \mathbf{B}_{k,m} \mathbf{I}_{m,m}) + \text{vec}(\mathbf{E}_{n,m})$$

a současně nám dovolí aplikovat vlastnost (xi) lemmatu 1.3, čímž získáme jednorozměrný model

$$\text{vec}(\mathbf{Y}_{n,m}) = (\mathbf{I}_{m,m} \otimes \mathbf{X}_{n,k}) \text{vec}(\mathbf{B}_{k,m}) + \text{vec}(\mathbf{E}_{n,m}). \quad (14)$$

Základní literaturou k tvorbě této kapitoly byly [1, 5, 6].

3.2 Nejlepší lineární nestranný odhad matice \mathbf{B}

Lemma 3.1. *Nejlepší lineární nestranný odhad matice \mathbf{B} , $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{k \times m}$, v modelu (13) je:*

$$\widehat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{Y}. \quad (15)$$

Důkaz: Nejdříve si celý model převedeme do vektorové podoby

$$\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}}) = [(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X})'(\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X})]^{-1}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X})'(\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma})^{-1}\text{vec}(\mathbf{Y}).$$

Vztah upravujeme pomocí vlastnosti (iii) lemmatu 1.3

$$\begin{aligned} \text{vec}(\widehat{\mathbf{B}}) &= [(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X})]^{-1}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\text{vec}(\mathbf{Y}) \\ \text{vec}(\widehat{\mathbf{B}}) &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\text{vec}(\mathbf{Y}) \\ \text{vec}(\widehat{\mathbf{B}}) &= [\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]\text{vec}(\mathbf{Y}) \end{aligned}$$

a dále aplikujeme vlastnost (xi) lemmatu 1.3

$$\begin{aligned} \text{vec}(\widehat{\mathbf{B}}) &= \text{vec}[(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{Y}] \\ \widehat{\mathbf{B}} &= (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

□

Pro lepší pochopení práce s mnohorozměrným modelem si ukážeme, jakým způsobem bychom ověřili, že odhad $\widehat{\mathbf{B}}$ je nestranný odhad matice \mathbf{B} . Nejprve doplníme do vztahu jednotkovou matici a převedeme do vektorové podoby

$$\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}}) = \text{vec}[(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{Y} \cdot \mathbf{I}]$$

a současně aplikujeme vlastnost dle lemmatu 1.3(xi), podle kterého vztah upravíme, tedy

$$\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}}) = [\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}] \cdot \text{vec}(\mathbf{Y}).$$

Z jednorozměrného tvaru (14) víme, že $E[\text{vec}(\mathbf{Y})] = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{X})\text{vec}(\mathbf{B})$. Odtud dostaneme

$$E[\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}})] = [\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}] \cdot [\mathbf{I} \otimes \mathbf{X}] \cdot \text{vec}(\mathbf{B}).$$

Úpravami, kde využíváme další vlastnost z lemmatu 1.3(iii), dojdeme k

$$\begin{aligned} E[\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}})] &= [\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X}] \cdot \text{vec}(\mathbf{B}), \\ E[\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}})] &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \cdot \text{vec}(\mathbf{B}), \end{aligned}$$

kde využijeme vlastnosti z lemmatu 1.3(xii) a dostaneme

$$E[\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}})] = \text{vec}(\mathbf{B}).$$

Lemma 3.2. *Varianční matice nejlepšího nestranného odhadu $\text{Var}[\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}})]$ v modelu (13) je dána jako:*

$$\text{Var}[\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}})] = \mathbf{I} \otimes [(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}]. \quad (16)$$

Důkaz: Opět si nejprve pomůžeme jednotkovou maticí, tj.

$$\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}}) = \text{vec}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\underline{\mathbf{Y}} \cdot \mathbf{I}$$

a aplikujeme vlastnost z lemmatu 1.3(xi). Dostaneme

$$\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}}) = (\mathbf{I} \otimes [(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]) \cdot \text{vec}(\mathbf{Y}).$$

Z jednorozměrného tvaru (14) víme, že $\text{var}[\text{vec}(\mathbf{Y})] = (\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma})$. Dosadíme do vztahu a dostaneme

$$\text{Var}[\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}})] = (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \cdot (\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \cdot (\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}).$$

Úpravami, kde využíváme další vlastnost z lemmatu 1.3(iii), dojdeme k

$$\begin{aligned} \text{Var}[\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}})] &= (\mathbf{I} \otimes [(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}]) \cdot (\mathbf{I} \otimes [\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}]), \\ \text{Var}[\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}})] &= \mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}, \\ \text{Var}[\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}})] &= \mathbf{I} \otimes [(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}]. \end{aligned}$$

□

3.3 Odhad parametru σ^2

Lemma 3.3. *Nechť varianční matice $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{V}$, kde \mathbf{V} je známá pozitivně definitní matice a $\sigma^2 > 0$ neznámé. Pak nestranný odhad parametru σ^2 v modelu (13) je:*

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\text{Tr}[(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}})' \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}})]}{m(n - k)}. \quad (17)$$

Důkaz: V prvním kroku důkazu nestrannosti odhadu $\hat{\sigma}^2$ upravíme vztah (17), kde opět využijeme jednotkové matice tj.

$$E[m(n - k)\hat{\sigma}^2] = E(\text{Tr}[\underline{\mathbf{e}}' \mathbf{V}^{-1} \underline{\mathbf{e}}]) = E(\text{Tr}[\underline{\mathbf{e}}' \mathbf{V}^{-1} \underline{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{I}]).$$

Dále využijeme vlastnosti z lemmatu 1.2(vi) a výsledný vztah upravíme

$$E(\text{Tr}[\underline{\mathbf{e}}' \mathbf{V}^{-1} \underline{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{I}]) = E[\text{vec}(\underline{\mathbf{e}})' (\mathbf{I} \otimes \mathbf{V}^{-1}) \text{vec}(\underline{\mathbf{e}})] = \text{Tr}\{(\mathbf{I} \otimes \mathbf{V}^{-1}) \underbrace{E[\text{vec}(\underline{\mathbf{e}})\text{vec}(\underline{\mathbf{e}})']}_{\text{var}[\text{vec}(\underline{\mathbf{e}})]}\}.$$

Abychom mohli dále pokračovat v úpravách musíme si vyjádřit člen $\text{var}[\text{vec}(\underline{\mathbf{e}})]$, kde využijeme vztahu pro reziduální vektor. Tedy

$$\text{var}[\text{vec}(\underline{\mathbf{e}})] = \text{var}[\text{vec}(\mathbf{Y}) - \text{vec}(\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}})],$$

kde dosadíme vztah pro $\hat{\mathbf{B}}$

$$\text{var}\{\text{vec}[(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1}) \mathbf{Y}]\}.$$

Opět využijeme jednotkové matice a vlastnosti z lemmatu 1.3(xi), a proto

$$\begin{aligned} \text{var}\{\text{vec}[(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1}) \mathbf{Y} \cdot \mathbf{I}]\} = \\ [\mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1}) \cdot \text{var}(\text{vec}) \mathbf{Y}]. \end{aligned}$$

Z jednorozměrného tvaru (14) víme, že $\text{var}[\text{vec}(\mathbf{Y})] = (\mathbf{I} \otimes \sigma^2 \mathbf{V})$. Dosadíme do vztahu a dostaneme

$$[\mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1})] (\mathbf{I} \otimes \sigma^2 \mathbf{V}) [\mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}')].$$

Pak využijeme vlastnosti z lemmatu 1.3(iii), tj.

$$\begin{aligned} & [\mathbf{I} \otimes (\sigma^2 \mathbf{V} - \mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \sigma^2 \mathbf{V})] [\mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}')] = \\ & [\mathbf{I} \otimes (\sigma^2 \mathbf{V} - \sigma^2 \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' - \mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \sigma^2 \mathbf{V} + \\ & \mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \sigma^2 \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}')] \end{aligned}$$

a vztah upravujeme do výsledné podoby

$$[\mathbf{I} \otimes (\sigma^2 \mathbf{V} - \sigma^2 \mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}')].$$

Tento vztah zpět dosadíme do $\text{Tr}\{(\mathbf{I} \otimes \mathbf{V}^{-1}) \text{var}[\text{vec}(\underline{\mathbf{e}})]\}$

$$\text{Tr}[(\mathbf{I} \otimes \mathbf{V}^{-1}) \cdot (\mathbf{I} \otimes (\sigma^2 \mathbf{V} - \sigma^2 \mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'))].$$

Opět aplikujeme vlastnost z lemmatu 1.3(iii) a upravujeme

$$\begin{aligned} & \text{Tr}[\mathbf{I} \otimes (\sigma^2 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} - \mathbf{V}^{-1} \sigma^2 \mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}')], \\ & \text{Tr}[\mathbf{I} \otimes (\sigma^2 \mathbf{I}_{n \times n} - \sigma^2 (\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})], \\ & \text{Tr}[\mathbf{I} \otimes \sigma^2 (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{I}_{k \times k})], \\ & \text{Tr}[\mathbf{I}_{m \times m}] \cdot \text{Tr}[\sigma^2 (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{I}_{k \times k})], \\ & m(n - k) \cdot \sigma^2. \end{aligned}$$

Pro lepší přehlednost si to můžeme ještě rozepsat jako

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\hat{\sigma}^2) &= \frac{1}{m(n-k)} \mathbf{E}(\text{Tr}[\underline{\mathbf{e}}' \mathbf{V}^{-1} \underline{\mathbf{e}}]), \\ \mathbf{E}(\hat{\sigma}^2) &= \frac{1}{m(n-k)} \sigma^2 m(n-k), \\ \mathbf{E}(\hat{\sigma}^2) &= \sigma^2. \end{aligned}$$

□

Věta 3.1. *Jestliže vektor pozorování $\text{vec}(\mathbf{Y})$ má normální rozdělení s varianční maticí $\text{var}[\text{vec}(\mathbf{Y})] = (\mathbf{I} \otimes \sigma^2 \mathbf{V})$, pak v modelu (13) platí:*

$$\hat{\sigma}^2 \sim \frac{\sigma^2 \chi_{m(n-k)}^2}{m(n-k)}. \quad (18)$$

Důkaz: Víme, že platí

$$\text{vec}(\underline{\mathbf{e}}) \sim N_{km}[\mathbf{0}, \mathbf{I} \otimes (\sigma^2 \mathbf{V} - \sigma^2 \mathbf{X}(\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}')].$$

Dle věty 1.2 je matice $\mathbf{A} = \{\text{var}[\text{vec}(\underline{\mathbf{e}})]\} (\mathbf{I} \otimes \sigma^{-2} \mathbf{V}^{-1})$ idempotentní. Nejdříve si vztah upravíme pomocí vlastnosti (iii) lemmatu 1.3 do tvaru

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} \otimes \left\{ [\sigma^2 (\mathbf{V} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')] \sigma^{-2} \mathbf{V}^{-1} \right\} = \mathbf{I} \otimes [\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}].$$

Ověříme, zda je tento vztah idempotentní, tj. platí $\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{I} \otimes [\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}] \right\} \left\{ \mathbf{I} \otimes [\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}] \right\} = \\ & \mathbf{I} \otimes [\mathbf{I} - 2\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}] = \\ & \mathbf{I} \otimes [\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}]. \end{aligned}$$

Dále určíme počet stupňů volnosti jako

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ \mathbf{I} \otimes [\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}] \right\} &= \text{Tr} \left\{ \mathbf{I} \otimes [\mathbf{I} - (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}] \right\} = \\ & m(n - k). \end{aligned}$$

Pak dle věty 1.2 platí

$$\text{vec}(\underline{\mathbf{e}})' (\mathbf{I} \otimes \mathbf{V}^{-1}) \text{vec}(\underline{\mathbf{e}}) \sim \sigma^2 \chi_{m(n-k)}^2.$$

Vztah upravíme pomocí vlastnosti (vi) lemmatu 1.2 do tvaru

$$\text{Tr}(\underline{\mathbf{e}}' \mathbf{V}^{-1} \underline{\mathbf{e}}) \sim \sigma^2 \chi_{m(n-k)}^2.$$

Úpravami dostaneme tvar

$$\frac{\text{Tr}(\underline{\mathbf{e}}' \mathbf{V}^{-1} \underline{\mathbf{e}})}{m(n-k)} \sim \frac{\sigma^2}{m(n-k)} \chi_{m(n-k)}^2,$$

kde na levé straně dostáváme přímo vztah pro odhad $\hat{\sigma}^2$. Potom

$$\hat{\sigma}^2 \sim \frac{\sigma^2}{m(n-k)} \chi_{m(n-k)}^2.$$

□

3.4 Oblasti spolehlivosti

Věta 3.2. *Předpokládejme, že pozorování vektoru $\text{vec}(\mathbf{Y})$ je normálně rozdělené s varianční maticí $\text{var}[\text{vec}(\mathbf{Y})] = (\mathbf{I} \otimes \Sigma)$. Pak pro $1 - \alpha$ oblast spolehlivosti matice \mathbf{B} platí:*

$$\mathbf{C}_{(1-\alpha)\mathbf{B}} = \{ \text{Tr}[\mathbf{B} : (\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})' \mathbf{X}' \Sigma^{-1} \mathbf{X} (\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})] \leq \chi_{km}^2(1 - \alpha) \}. \quad (19)$$

Důkaz: Ve vektorové podobě za předpokladu normality platí

$$\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}}) \sim N_{km}[\text{vec}(\mathbf{B}), \mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}].$$

Pomocí kvadratické formy přejdeme k náhodné veličině:

$$[\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})]'[\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})]\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}) \sim \chi_{km}^2$$

a vztah upravíme pomocí vlastnosti (vi) lemmatu 1.2 do tvaru

$$\text{Tr}[(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})'(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})] \sim \chi_{km}^2.$$

Pak platí

$$P \left\{ \text{Tr}[(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})'(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})] \leq \chi_{km}^2 \right\} = 1 - \alpha.$$

□

Věta 3.3. Předpokládejme, že pozorování vektoru $\text{vec}(\mathbf{Y})$ je normálně rozdělené s varianční maticí $\text{var}[\text{vec}(\mathbf{Y})] = (\mathbf{I} \otimes \sigma^2\mathbf{V})$. Pak pro $1 - \alpha$ oblast spolehlivosti matice \mathbf{B} při známém σ^2 platí:

$$\mathbf{C}_{(1-\alpha)\mathbf{B}} = \{ \text{Tr}[\mathbf{B} : (\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})'\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})] \leq \sigma^2\chi_{km}^2(1 - \alpha) \}. \quad (20)$$

Důkaz: Ve vektorové podobě za předpokladu normality platí

$$\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}}) \sim N_{km}[\text{vec}(\mathbf{B}), \mathbf{I} \otimes \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}].$$

Pomocí kvadratické formy přejdeme k náhodné veličině:

$$[\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})]'[\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})]\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}) \sim \sigma^2\chi_{km}^2$$

a vztah upravíme pomocí vlastnosti (vi) lemmatu 1.2 do tvaru

$$\text{Tr}[(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})'(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})] \sim \sigma^2\chi_{km}^2.$$

Pak platí

$$P \left\{ \text{Tr}[(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})'(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})] \leq \sigma^2\chi_{km}^2 \right\} = 1 - \alpha.$$

□

Věta 3.4. Předpokládejme, že pozorování vektoru $\text{vec}(\mathbf{Y})$ je normálně rozdělené s varianční maticí $\text{var}[\text{vec}(\mathbf{Y})] = (\mathbf{I} \otimes \sigma^2 \mathbf{V})$. Pak pro $1 - \alpha$ oblast spolehlivosti matice \mathbf{B} při neznámém σ^2 platí:

$$\mathbf{C}_{(1-\alpha)\mathbf{B}} = \{\text{Tr}[\mathbf{B} : (\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})] \leq k \cdot m \cdot \widehat{\sigma}^2 \mathbf{F}_{km, m(n-k)}(1 - \alpha)\}. \quad (21)$$

Důkaz: Víme, že

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})' (\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}) (\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})] &\sim \sigma^2 \chi_{km}^2, \\ \widehat{\sigma}^2 &\sim \frac{\sigma^2 \chi_{m(n-k)}^2}{m(n-k)} \end{aligned}$$

a také, že $\widehat{\sigma}^2$ a $\widehat{\mathbf{B}}$ jsou nezávislé. Pak z nezávislosti plyne

$$\frac{(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}) / \sigma^2 km}{\widehat{\sigma}^2 / \sigma^2} \sim \mathbf{F}_{km, m(n-k)},$$

$$\frac{(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})}{\widehat{\sigma}^2 km} \sim \mathbf{F}_{km, m(n-k)},$$

a tedy

$$P\{(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}) \leq k \cdot m \cdot \widehat{\sigma}^2 \mathbf{F}_{km, m(n-k)}(1 - \alpha)\} = 1 - \alpha.$$

□

4 Modelování sesuvu svahu

4.1 Lokalizace svahu

Svah, který budu modelovat není vymyšlený matematický příklad, ale jedná se o skutečný sesuv, jež se nachází poblíž obce Halenkovice ve Zlínském kraji asi 4 kilometry od Napajedel. Samotný sesuv leží na poli v neobydlené oblasti, kde neohrožuje svým posunem žádné obytné či jiné stavby. Sesuv vznikl v roce 2006 pravděpodobně díky bohatým srážkám. Místo sesuvu je na obrázku 1 označeno červenou kružnicí.



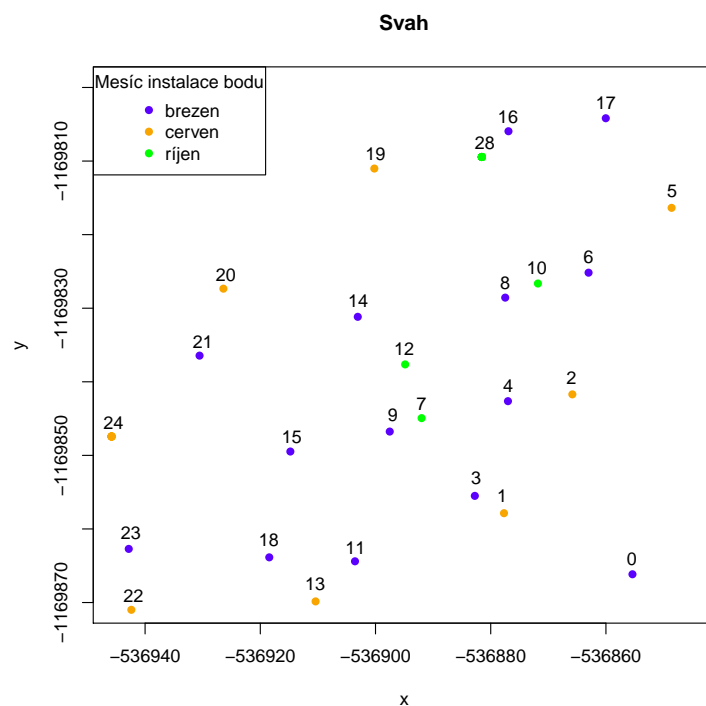
Obrázek 1: Lokalizace sesuvu

4.2 Sběr dat

V březnu roku 2008 bylo rozmístěno 13 geoharpon v sesuvné oblasti svahu a 1 geoharpon, označující stanoviště měření (označujeme jako bod 0), mimo oblast sesuvu. V červnu 2008 pak bylo dodáno dalších 8 geoharpon mimo sesuvnou oblast, které měly sloužit jako referenční body. V říjnu 2008 došlo k osazení dalších 4 geoharpon v sesuvné oblasti. Tyto body byly doplněny, jelikož některé geoharpony osazené v březnu nebyly nalezeny. To bylo pravděpodobně způsobeno zavalením zeminy. Od té doby je svah nepravidelně měřen až do roku 2011, kdy ovšem již nebyla nalezena většina geoharpon v nejvíce se pohybujících částech

svahu. Proto jsem tato data z posledního měření v roce 2011 nepoužil při tvorbě modelu. Všechna měření byla prováděna totální stanicí Trimble 5503 DR Standard. Naměřené souřadnice bodů ze všech období uvádím v příloze 1, kde je ještě uvedena i z -ová souřadnice bodů. Ovšem v geodézii se pohyb v z -ové rovině řeší zvlášť. My se budeme zabývat posunem pouze v rovinách x a y .

Souřadnice všech bodů vychází ze S-JTSK (Souřadnicového systému jednotné trigonometrické sítě katastrální). Tento systém byl vytvořen pro české a slovenské podmínky, aby co nejlépe approximoval teoretický tvar zeměkoule tzv. geoidu pro území tehdejší ČSR. Počátek souřadnic byl zvolen tak, aby vše co nejlépe vycházelo. Celkový pohled na svah s čísly geoharpon je znázorněn v obrázku 2.



Obrázek 2: Rozmístění geoharpon v sesuvné oblasti svahu Halenkovice v roce 2008

4.3 Chybějící data v pozorování

V datovém souboru pozorování uvedeném v příloze 1 nejsou některá pozorování kompletní. U bodů 8,9 a 15 jsou uvedeny souřadnice z počátečního měření

a tyto body jsou tudíž nepoužitelné pro modelování, jelikož nevíme, jak se v dané oblasti chovaly. Chybějící pozorování u těchto bodů bylo pravděpodobně způsobeno zavalením bodů zeminou. Tyto body pak již nebyly nikdy nalezeny, a proto jsem je z modelu vyloučil. Body 25,26 a 27 představují sloupy elektrického vedení, které sloužily ke zjišťování změny polohy základního stanoviště mimo sesuvnou oblast. Do modelu jsem tyto body nepoužil, jelikož nám neovlivňují žádným způsobem posun bodů v oblasti sesuvu. Body, které jsem vyloučil z modelu, již dále nezobrazuji v grafických výstupech.

Další body, u kterých chybí pozorování, jsou body 7,12,10 a 28. Tyto body byly instalovány až říjnu 2008 a tudíž jim chybí souřadnice prvního pozorování. Abych mohl body použít do modelu, je potřeba chybějící souřadnice doplnit. Způsob, jakým jsem souřadnice doplnil, je popsán v podkapitole 4.3.1. Specifickým bodem je bod 16. Tento bod byl instalován v březnu 2008, ovšem pak při dalších dvou měření nebyl nalezen. Byl objeven až při čtvrtém zaměřování v dubnu následujícího roku. Tento bod se nachází v oblasti s největšími posuny, a tudíž je velice důležitý. I jeho souřadnice jsem proto doplnil. Princip doplnění souřadnic podrobně objasním v následující podkapitole.

4.3.1 Doplnění chybějících dat

Prvním krokem k nalezení chybějících dat je vykreslení oblasti v níž se bod, kterému chybí pozorování, nachází. Z jeho okolních bodů vybereme ty body, díky kterým budeme interpolovat náš bod s neznámými souřadnicemi v jednom čase. Budeme přitom hledat takové body, u kterých známe jejich posuny mezi dvěma časy, a tudíž jejich souřadnice v obou časech.

Postup uvedu na bodě 7, kterému chybí první pozorování. Všechny body jsou zobrazeny v obrázku 2, kde vidíme, že nejbližší okolní body, které bychom chtěli vybrat, by byly body 4,9 a 12. Bod 12 ovšem nemůžeme použít, protože stejně jako bod 7 nemá souřadnice v prvním čase. Bod 9, jak jsem uvedl v přecházející kapitole, zmizel a již nebyl nalezen. Nakonec tedy vybereme body 3,4 a 14, jež mají všechny souřadnice v obou časech. Souřadnice jsou uvedeny v následující

tabulce 1.

číslo bodu	březen 2008		říjen 2008	
	x	y	x	y
3	-536882.756	-1169855.506	-536882.743	-1169855.555
4	-536877.008	-1169842.632	-536876.582	-1169842.132
14	-536903.077	-1169831.170	-536902.580	-1169830.877
7			-536891.999	-1169844.940

Tabulka 1: Souřadnice bodů

Dalším krokem provedeme lineární interpolaci posunů v hledaném bodě. Nejprve využijeme interpolaci dvou bodů z okolí vzhledem k posunům v x -ovém a y -ovém směru. Tím získáme hledaný bod s interpolovaným či v některých případech s extrapolovaným posunem. Takto pokračujeme s dalšími dvěma body z okolí. Postup opakujeme tak dlouho, dokud nepoužijeme všechny možné kombinace těchto okolních bodů. Tím nám vznikne n -tice interpolovaných/extrapolovaných bodů.

Pro bod 7 tedy budeme uvažovat dvojice okolních bodů (3,4), (3,14) a (4,14). Vznikne nám trojice interpolovaných/extrapolovaných hledaných bodů vzhledem k použitým kombinacím bodů z okolí. Interpolace/extrapolace ve směrech x a y pomocí bodů 4 a 14 je graficky znázorněna na obrázku 7.

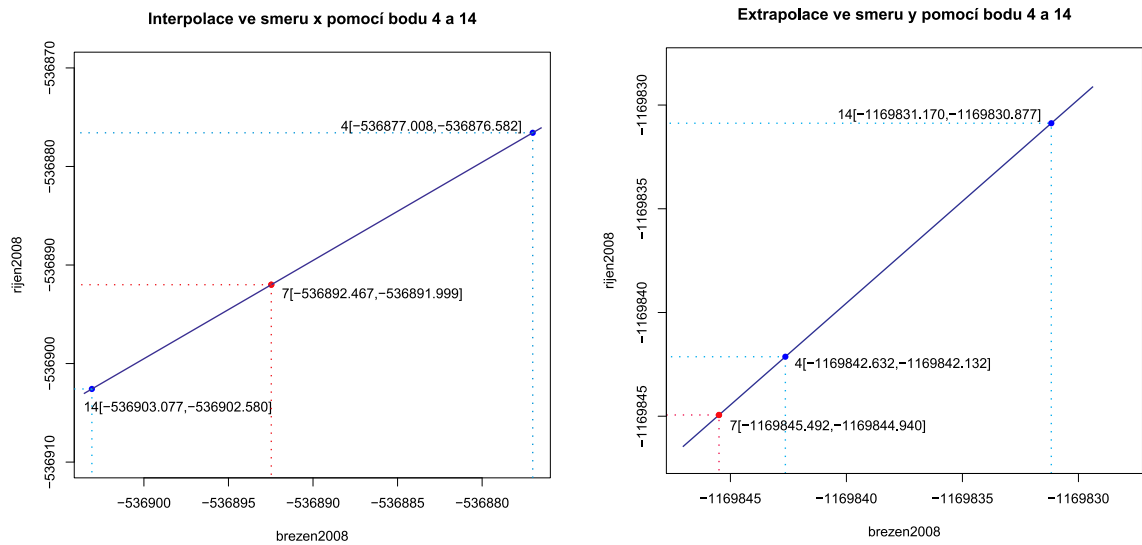
Výpočetní postup ukáží pro x -ovou souřadnici bodu 7. Nejdříve potřebujeme zjistit rovnici přímky spojující body 4 a 14 z obrázku 7. Obecná rovnice přímky je dána vztahem $y = ax + b$. Dosadíme-li za x souřadnice bodů 4 a 14 z března 2008 a za y souřadnice bodů 4 a 14 z října 2008, dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} -536902.580 &= -536903.077 a + b, \\ -536876.582 &= -536877.008 a + b. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je $a = 0.997276459$ a $b = -1461.780745$ a výsledná rovnice přímky je tedy ve tvaru

$$y = 0.997276459 x - 1461.780745.$$

Do rovnice potom stačí dosadit za y známou x -ovou souřadnici bodu 7 a dopočítat neznámou x , která představuje hledanou x -ovou souřadnici. Vyřešením poté



Obrázek 3: Interpolace/extrapolace ve směrech x a y . Údaje v závorce u jednotlivých bodů udávají souřadnice v březnu a říjnu 2008, vlevo x -ové souřadnice, vpravo y -ové souřadnice.

dostaneme, že $x = -536892.467$. Stejným postupem bychom dopočítali i y -ovou souřadnici. Získali jsme tak první interpolované/extrapolované souřadnice bodu 7 pomocí okolních bodů 4 a 14. Dále bychom pokračovali stejným postupem i pro okolní dvojice (3,4) a (3,14), kde rovnice interpolační přímky pro (3,4) je

$$y = 1.071851079 x - 38575.61811,$$

a pro (3,14) je

$$y = 0.976182274 x - 12787.31311.$$

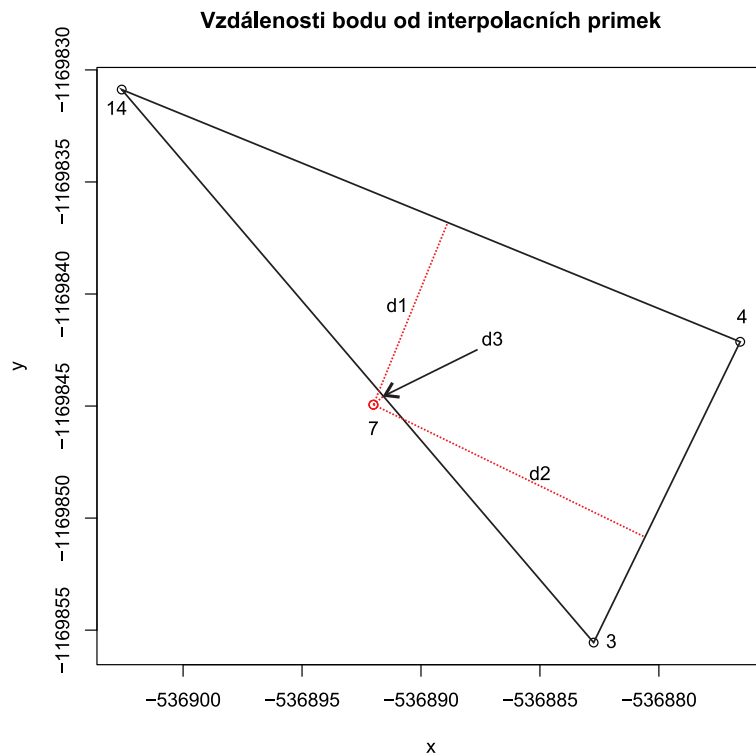
Následující tabulka 2 ukazuje trojici výsledků získaných souřadnic bodu 7.

okolní body	interpolované souřadnice	
	x	y
3, 4	-536891.392	-1169845.325
4, 14	-536892.467	-1169845.492
3, 14	-536892.238	-1169845.038

Tabulka 2: Interpolované/extrapolované souřadnice bodu 7 v březnu 2008

K tomu, abychom dostali výsledné souřadnice bodu, je zapotřebí provést vážený průměr interpolovaných/extrapolovaných souřadnic. Normované váhy bu-

dou představovat kolmé vzdálenosti bodu 7 k interpolačním přímkám, přičemž největší váhu bude mít nejkratší vzdálenost.



Obrázek 4: Situace kolem bodu 7

Vzdálenosti bodu 7 se souřadnicemi $[x_7, y_7]$ od přímek $p : ax + by + c = 0$ vypočítáme pomocí vztahu uvedeném v literatuře [9]:

$$d = \frac{|ax_7 + by_7 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (22)$$

Vzhledem k podmínce, že největší váhu bude mít nejkratší vzdálenost, musíme vzdálenosti normovat pomocí převrácených hodnot, tedy $\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \frac{1}{d_3}$. Pro první vzdálenost dopočítáme normovanou váhu pomocí vztahu $w_1 = \frac{\frac{1}{d_1}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}}$. Podobně budeme postupovat i pro ostatní váhy. Vypočítané vzdálenosti spolu s příslušnými normovanými váhami jsou uvedeny v tabulce 3:

	vzdálenost [m]		normované váhy
$d1$	8.70212464	$w1$	0.058441731
$d2$	12.84028799	$w2$	0.039607151
$d3$	0.563852317	$w3$	0.901951118

Tabulka 3: Vzdálenosti bodu 7 od interpolačních přímk spolu s normovanými váhami

Výsledné interpolované/extrapolované souřadnice bodu dostaneme váženým průměrem s normovanými váhami, vypočítaným dle vztahů $\bar{x} = \sum_{i=1}^n w_i x_i$ a $\bar{y} = \sum_{i=1}^n w_i y_i$. Pro bod 7 tedy získáme souřadnice $7 = [-536892,218, -1169845,076]$. Stejným postupem bychom vyřešili všechna ostatní chybějící měření. Výsledky jsou uvedené v tabulkách 4 a 5.

číslo bodu	okolní body	říjen 2008		prosinec 2008	
		x	y	x	y
16	6, 17, 28	-536876.442	-1169804.928	-536875.804	-1169803.834

Tabulka 4: Doplněné souřadnice bodu 16

číslo bodu	okolní body	březen 2008	
		x	y
7	3, 4, 14	-536892.218	-1169845.076
10	4, 6, 17	-536872.332	-1169827.716
12	4, 7, 14	-536895.196	-1169838.046
28	10, 17, 19	-536881.974	-1169809.742

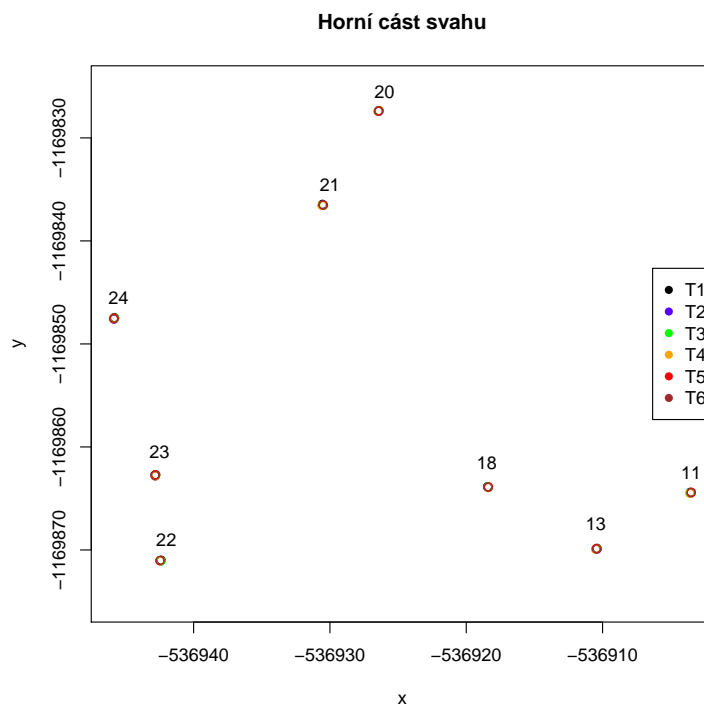
Tabulka 5: Doplněné souřadnice bodů 7,10,12 a 28

4.4 Rozdělení sesuvu

V první fázi analýzy získaných dat bylo zapotřebí se zaměřit, jak se jednotlivé body pohybují. Každý bod byl měřen v šesti časech, kde volíme

T1= květen 2008 T4= duben 2009
T2= říjen 2008 T5= květen 2009
T3= prosinec 2008 T6= březen 2010

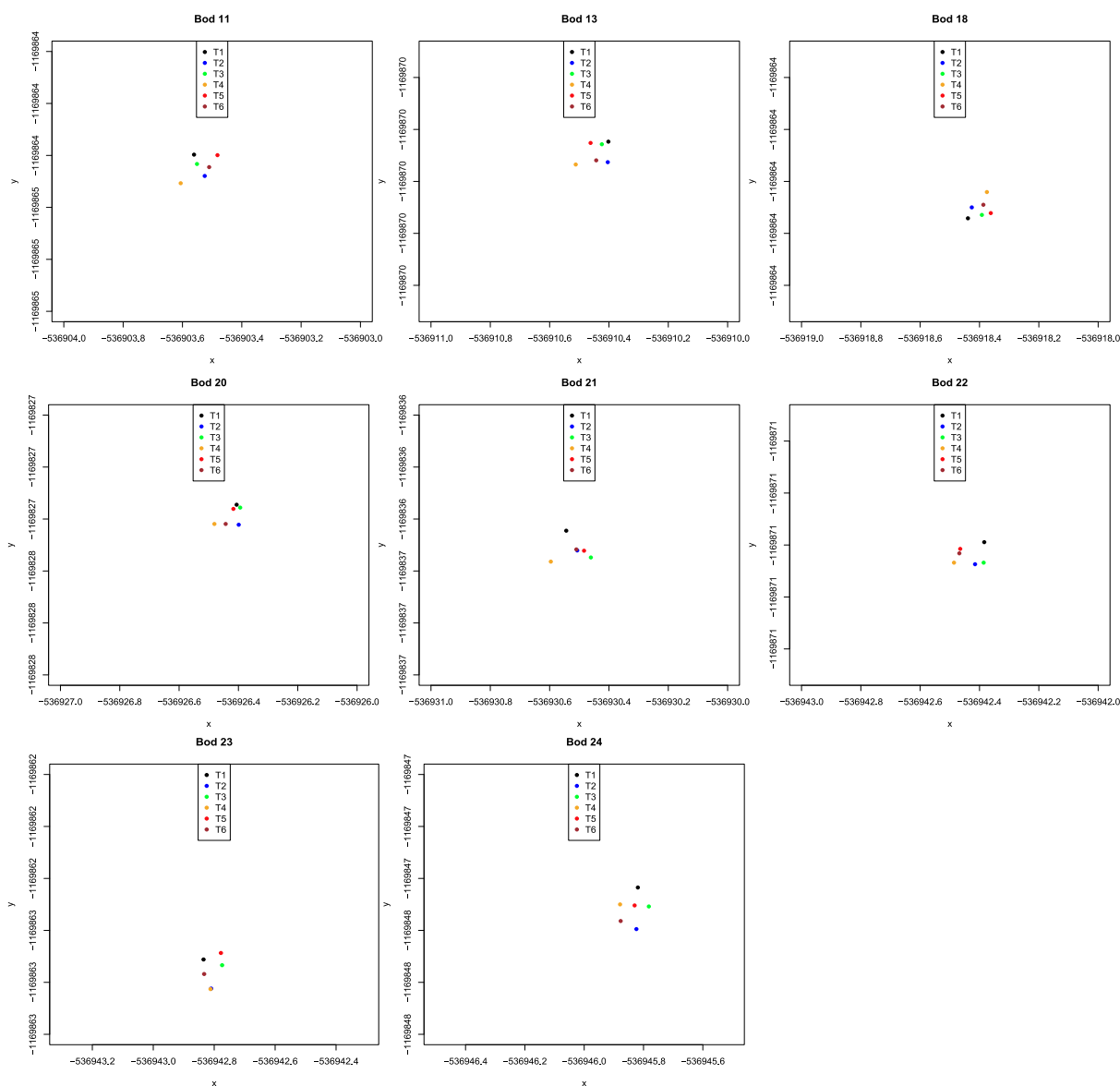
Po vykreslení jednotlivých bodů ve všech měřených časech, jsem oproti očekávání zjistil, že se některé body pohybují chaoticky bez jakéhokoliv trendu a některé se naopak pohybují jakoby po přímce jedním směrem. Rozhodl jsem se tedy body postupně dělit podle jejich chování. Přitom jsem se snažil zaměřit i na oblasti odkud každý bod pochází. Tímto jsem zjistil, že body s podobným chováním pochází ze stejné oblasti. Vznikli mi tak dvě oblasti svahu. V jedné se body pohybovaly chaoticky s minimálními posuny a ve druhé naopak docházelo k větším posunům jedním směrem. Na základě těchto vlastností jsem svah rozdělil na spodní a horní část. Horní část svahu se skládala z bodů 11,13,15,18,20,21,22,23,24 a je vyobrazena i se svými posuny v čase na obrázku 5.



Obrázek 5: Horní část svahu v průběhu celé doby měření

Při pohledu na obrázek 5 se může jevit, že body se v horní části svahu vůbec nepohnuly. To je způsobeno měřítkem souřadnicových os, kde rozmezí x -ové osy dosahuje 50 metrů a y -ové osy 60 metrů. Vzhledem k tomu, že posuny se v horní části svahu pohybovaly pouze v centimetrech, tak při daném měřítku nelze tento

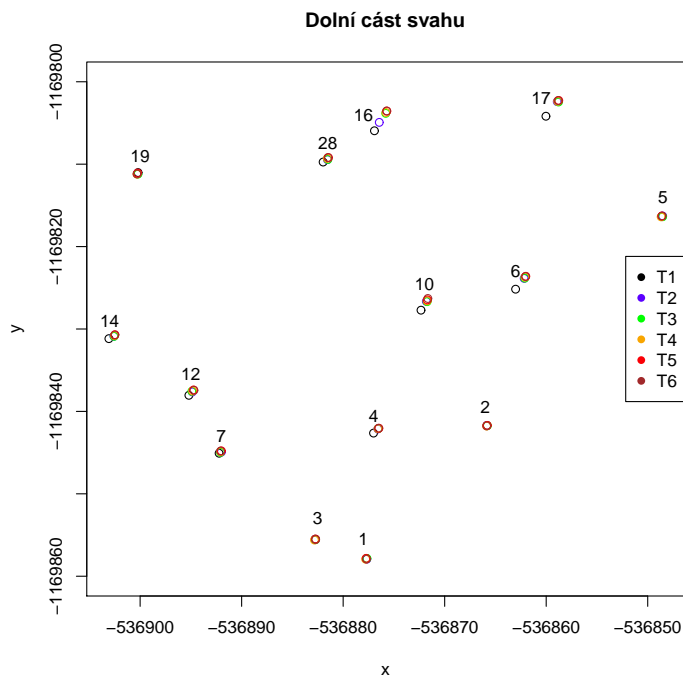
posun zaznamenat. Tyto posuny však lze pozorovat při bližším pohledu, jak ukazuje obrázek 6. Na něm vidíme chování jednotlivých bodů zvlášť. Měřítko x -ové i y -ové souřadnice dosahuje rozmezí 1 metru. Můžeme si povšimnout chaotického chování bodů v čase, kdy se body různě posunují všemi směry dopředu i zpět.



Obrázek 6: Detailní pohled na horní část svahu

Spodní část svahu se skládala z bodů 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,16,17,19,28 a je také vyobrazena se svými posuny v čase na obrázku 7. Body 8 a 9 jsou z modelu vypuštěny z důvodu neznalosti dat. Podrobnosti byly uvedeny v předchozí

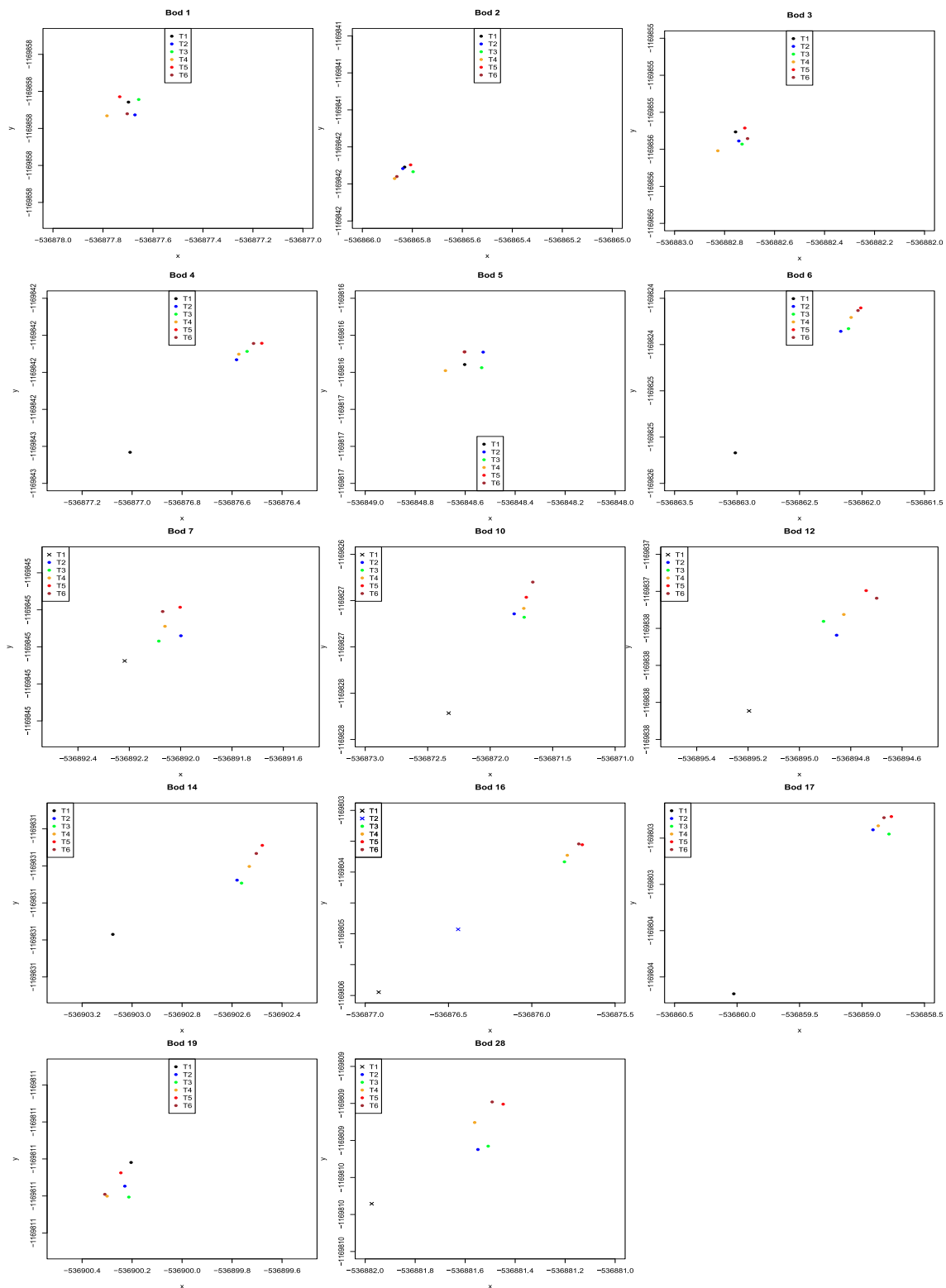
kapitole.



Obrázek 7: Spodní část svahu

Zde jsou již vidět, na rozdíl od horní části svahu, pohyby bodů v čase i v tomto měřítku. Posuny byly v této části razantnější a pohybovaly se v řádech desítek centimetrů až v některých případech i metrů. Opět při bližším pohledu (obrázek 8) vidíme posuny ještě zřetelněji. Měřítko x -ové i y -ové souřadnice dosahuje rozmezí 1 metru. Výjimku tvoří body 6,10,16 a 17, kde z důvodu velkých posunů muselo být rozmezí pro obě dvě osy 2 metry. Chování bodů již není chaotické, ale lze pozorovat, že se většina bodů pohybuje jedním směrem dopředu jakoby po přímce. U bodů 1,2,3,5 a 19 lze konstatovat, že body zůstaly stabilní, jelikož posuny byly pouze centimetrové.

Za celou dobu měření obou částí svahu lze říci, že spodní část svahu se „utrhla“ a pohybovala se dále směrem dolů, zatímco horní část svahu zaznamenala jen mírné posuny. Nutno dodat, že k největším posunům ve spodní části svahu došlo v prvních fázích měření. V dalších fázích již posun nedosahoval takových hodnot a spíše se stabilizoval.



Obrázek 8: Detailní pohled na spodní část svahu v průběhu celé doby měření včetně doplněných chybějících údajů znázorněných křížkem

4.5 Tvorba modelu horní části svahu

Po doplnění chybějících dat do souboru pozorování můžeme přikročit k tvorbě modelu. V kapitole 4.4 věnované popisu sesuvu jsme došli k závěru, že bude lepší svah rozdělit na horní a dolní část. Budeme tedy modelovat obě tyto části zvlášť.

Horní část sesuvu se skládá z 8 bodů měřených v 6 různých časech, které budeme prokládat polynomy druhého stupně. Druhý stupeň polynomů je volen z důvodu chování bodů uvedeném v kapitole 4.4. Uvažujeme-li, že každý bod se posunuje po křivce druhého stupně, potom i jeho x -ová a y -ová souřadnice se pohybuje po křivce druhého stupně. Pro libovolný bod $[x_i, y_i]$ v čase t pak můžeme psát, že:

$$x_{i,t} = \alpha_i + \beta_i T_t + \varphi_i T_t^2 + \varepsilon_{x_{i,t}} \quad (23)$$

$$y_{i,t} = \gamma_i + \delta_i T_t + \omega_i T_t^2 + \varepsilon_{y_{i,t}}. \quad (24)$$

Celý model nyní přepíšeme do maticové podoby mnohorozměrného modelu. Řádky matice pozorování \mathbf{Y} budou tvořit jednotlivé časy měření souřadnic bodů a sloupce budou představovat x -ové a y -ové souřadnice jednotlivých bodů. Díky dvěma souřadnicím bude matice pozorování \mathbf{Y} obsahovat dva sloupce pro každý bod a výsledný model bude o rozměrech:

$$\mathbf{Y}_{6,16} = \mathbf{X}_{6,3} \mathbf{B}_{3,16} + \mathbf{E}_{6,16}. \quad (25)$$

Rozepíšeme-li si jednotlivé složky modelu pak

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x_{11,1} & y_{11,1} & x_{13,1} & y_{13,1} & x_{18,1} & y_{18,1} & x_{20,1} & y_{20,1} & x_{21,1} & y_{21,1} & x_{22,1} & y_{22,1} & x_{23,1} & y_{23,1} & x_{24,1} & y_{24,1} \\ x_{11,2} & y_{11,2} & x_{13,2} & y_{13,2} & x_{18,2} & y_{18,2} & x_{20,2} & y_{20,2} & x_{21,2} & y_{21,2} & x_{22,2} & y_{22,2} & x_{23,2} & y_{23,2} & x_{24,2} & y_{24,2} \\ x_{11,3} & y_{11,3} & x_{13,3} & y_{13,3} & x_{18,3} & y_{18,3} & x_{20,3} & y_{20,3} & x_{21,3} & y_{21,3} & x_{22,3} & y_{22,3} & x_{23,3} & y_{23,3} & x_{24,3} & y_{24,3} \\ x_{11,4} & y_{11,4} & x_{13,4} & y_{13,4} & x_{18,4} & y_{18,4} & x_{20,4} & y_{20,4} & x_{21,4} & y_{21,4} & x_{22,4} & y_{22,4} & x_{23,4} & y_{23,4} & x_{24,4} & y_{24,4} \\ x_{11,5} & y_{11,5} & x_{13,5} & y_{13,5} & x_{18,5} & y_{18,5} & x_{20,5} & y_{20,5} & x_{21,5} & y_{21,5} & x_{22,5} & y_{22,5} & x_{23,5} & y_{23,5} & x_{24,5} & y_{24,5} \\ x_{11,6} & y_{11,6} & x_{13,6} & y_{13,6} & x_{18,6} & y_{18,6} & x_{20,6} & y_{20,6} & x_{21,6} & y_{21,6} & x_{22,6} & y_{22,6} & x_{23,6} & y_{23,6} & x_{24,6} & y_{24,6} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \gamma_{11} & \alpha_{13} & \gamma_{13} & \alpha_{18} & \gamma_{18} & \alpha_{20} & \gamma_{20} & \alpha_{21} & \gamma_{21} & \alpha_{22} & \gamma_{22} & \alpha_{23} & \gamma_{23} & \alpha_{24} & \gamma_{24} \\ \beta_{11} & \delta_{11} & \beta_{13} & \delta_{13} & \beta_{18} & \delta_{18} & \beta_{20} & \delta_{20} & \beta_{21} & \delta_{21} & \beta_{22} & \delta_{22} & \beta_{23} & \delta_{23} & \beta_{24} & \delta_{24} \\ \varphi_{11} & \omega_{11} & \varphi_{13} & \omega_{13} & \varphi_{18} & \omega_{18} & \varphi_{20} & \omega_{20} & \varphi_{21} & \omega_{21} & \varphi_{22} & \omega_{22} & \varphi_{23} & \omega_{23} & \varphi_{24} & \omega_{24} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 11 & 121 \\ 1 & 12 & 144 \\ 1 & 22 & 484 \end{pmatrix},$$

kde jednotlivé časy představují počet měsíců mezi jednotlivými měřeními. Tedy

T1 - T2	T2 - T3	T3 - T4	T4 - T5	T5 - T6
5	2	4	1	10

Tabulka 6: Počet měsíců mezi jednotlivými měřeními [měsíc]

V našem případě jsou všechna pozorování nezávislá, a proto v souladu s kapitolou 3 můžeme psát, že varianční matice je ve tvaru $\text{var}[\text{vec}(\mathbf{Y})] = \mathbf{I}_{(16,16)} \otimes \sigma^2 \mathbf{I}_{(6,6)}$. Nejlepší nestranný odhad matice \mathbf{B} (viz lemma 3.1) je rozepsán po jednotlivých parametrech v tabulce 7.

α_{11}	-536903.5543	α_{20}	-536926.3940	α_{23}	-536942.8337
β_{11}	0.0018	β_{20}	-0.0044	β_{23}	0.0082
φ_{11}	0.0001	φ_{20}	0.0001	φ_{23}	-0.0004
γ_{11}	-1169864.4113	γ_{20}	-1169827.3591	γ_{23}	-1169862.7371
δ_{11}	-0.0074	δ_{20}	-0.0037	δ_{23}	-0.0047
ω_{11}	0.0003	ω_{20}	0.0001	ω_{23}	0.0002
α_{13}	-536910.3842	α_{21}	-536930.5269	α_{24}	-536945.8107
β_{13}	-0.0118	β_{21}	0.0021	β_{24}	-0.0014
φ_{13}	0.0004	φ_{21}	-0.0001	φ_{24}	0.0001
γ_{13}	-1169869.8614	γ_{21}	-1169836.4530	γ_{24}	-1169847.4734
δ_{13}	-0.0040	δ_{21}	-0.0152	δ_{24}	-0.0067
ω_{13}	0.0001	ω_{21}	0.0006	ω_{24}	0.0001
α_{18}	-536918.4478	α_{22}	-536942.3720		
β_{18}	0.0101	β_{22}	-0.0102		
φ_{18}	-0.0003	φ_{22}	0.0003		
γ_{18}	-1169863.8579	γ_{22}	-1169871.0083		
δ_{18}	-0.0072	δ_{22}	-0.0087		
ω_{18}	0.0002	ω_{22}	0.0004		

Tabulka 7: Odhady parametrů v modelu pro horní část svahu

Pomocí těchto parametrů můžeme vypočítat očekávané souřadnice bodů horní části svahu v jednotlivých časech měření, tj.

$$\hat{x}_{i,t} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i T_t + \hat{\varphi}_i T_t^2$$

$$\hat{y}_{i,t} = \hat{\gamma}_i + \hat{\delta}_i T_t + \hat{\omega}_i T_t^2.$$

Shodu dat v modelu posoudíme pomocí reziduálního součtu čtverců. Je zřejmé, že čím je model lepší, tím je reziduální součet čtverců menší. Reziduální součet čtverců vypočítáme dle vztahu

$$S_e = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^{16} (\mathbf{Y}_{ij} - \hat{\mathbf{Y}}_{ij})^2, \quad (26)$$

kde \mathbf{Y}_{ij} je (i, j) -tý prvek matice \mathbf{Y} a $\hat{\mathbf{Y}}_{ij}$ je očekávaná hodnota (i, j) -tého prvku matice $\hat{\mathbf{Y}}$. Dosazením dostaneme reziduální součet čtverců pro horní část svahu $S_e = 0.0977$ metru. Statistika

$$S^2 = \frac{S_e}{n - k}, \quad (27)$$

kterou nazýváme reziduální rozptyl, je nestranným odhadem parametru σ^2 . V našem případě pro $(n = 96, k = 48)$ je $S^2 = \sigma^2 = 0.00195 \text{ m}^2$, resp. reziduální směrodatná odchylka $S = 0.0441$ metru. Tyto výsledky musí být stejné jako u vztahů používaných pro mnohorozměrné modely. Pro odhad σ^2 v modelu (25) dle lemmatu (3.3) platí:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\text{Tr}[(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}})]}{m(n - k)}, \quad (28)$$

kde v našem případě, pokud modelujeme sesuv horní části svahu, je $m = 16, n = 6, k = 3$. Pak $\hat{\sigma}^2 = 0.00195 \text{ m}^2$, resp. $\hat{\sigma} = 0.0441$ metru. Výsledky jsou stejné jako v případě užití vztahu pro jednorozměrný model. Nadále tedy budeme užívat vztahů pouze pro mnohorozměrné modely.

Dále provedeme celkový F-test významnosti modelu, kde se testuje nulová hypotéza, že kromě absolutních členů jsou všechny další parametry nulové. Platí-li nulová hypotéza, pak to znamená, že model je nevhodný, a tedy souřadnice bodů jsou stejné ve všech časech. Statistika za platnost nulové hypotézy má tvar

$$F_r = \frac{\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^{16} (\hat{\mathbf{Y}}_{ij} - \bar{\mathbf{Y}}_j)^2}{\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^{16} (\mathbf{Y}_{ij} - \hat{\mathbf{Y}}_{ij})^2} \frac{n-k}{k} \sim F_{k;n-k},$$

kde v případě horní části svahu $n = 96, k = 48$. Nulovou hypotézu na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ zamítáme pokud $F_r > F_{k;n-k}(1 - \alpha)$. V našem případě $1.36 < 1.62$ a tedy nulovou hypotézu nezamítáme z čehož vyplývá, že model není vhodný.

Zkusíme proto uvažovat model bez regresorů T_t^2 a body v horní části svahu prokládat přímkami. Protože i body ve spodní části prokládáme přímkami, tak vytvoříme jeden společný model pro obě části. Uvažujeme-li, že každý bod se posunuje po přímce, potom i jeho x -ová a y -ová souřadnice se pohybuje po přímce. Pak můžeme pro libovolný čas t psát, že:

$$x_{i,t} = \alpha_i + \beta_i T_t + \varepsilon_{x_{i,t}} \quad (29)$$

$$y_{i,t} = \gamma_i + \delta_i T_t + \varepsilon_{y_{i,t}}. \quad (30)$$

Celý model nyní přepíšeme do maticové podoby mnohorozměrného modelu. Řádky matice pozorování \mathbf{Y} budou tvořit jednotlivé časy měření souřadnic bodů a sloupce budou představovat x -ové a y -ové souřadnice jednotlivých bodů. Díky dvěma souřadnicím bude matice pozorování \mathbf{Y} obsahovat dva sloupce pro každý bod a výsledný model bude o rozměrech:

$$\mathbf{Y}_{6,44} = \mathbf{X}_{6,2} \mathbf{B}_{2,44} + \mathbf{E}_{6,44}. \quad (31)$$

Rozepíšeme-li si jednotlivé složky modelu pak

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & y_{1,1} & x_{2,1} & y_{2,1} & x_{3,1} & y_{3,1} & \cdots & x_{28,1} & y_{28,1} \\ x_{1,2} & y_{1,2} & x_{2,2} & y_{2,2} & x_{3,2} & y_{3,2} & \cdots & x_{28,2} & y_{28,2} \\ x_{1,3} & y_{1,3} & x_{2,3} & y_{2,3} & x_{3,3} & y_{3,3} & \cdots & x_{28,3} & y_{28,3} \\ x_{1,4} & y_{1,4} & x_{2,4} & y_{2,4} & x_{3,4} & y_{3,4} & \cdots & x_{28,4} & y_{28,4} \\ x_{1,5} & y_{1,5} & x_{2,5} & y_{2,5} & x_{3,5} & y_{3,5} & \cdots & x_{28,5} & y_{28,5} \\ x_{1,6} & y_{1,6} & x_{2,6} & y_{2,6} & x_{3,6} & y_{3,6} & \cdots & x_{28,6} & y_{28,6} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 1 & 7 \\ 1 & 11 \\ 1 & 12 \\ 1 & 22 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & \alpha_3 & \gamma_3 & \cdots & \alpha_{28} & \gamma_{28} \\ \beta_1 & \delta_1 & \beta_2 & \delta_2 & \beta_3 & \delta_3 & \cdots & \beta_{28} & \delta_{28} \end{pmatrix}.$$

V našem případě jsou všechna pozorování nezávislá, a proto v souladu s kapitolou 3 můžeme psát, že varianční matice je ve tvaru $\text{var}[\text{vec}(\mathbf{Y})] = \mathbf{I}_{(44,44)} \otimes \sigma^2 \mathbf{I}_{(6,6)}$. Nejlepší nestranný odhad matice \mathbf{B} (viz lemma 3.1) pro tento model je uveden níže v tabulkách 8 a 9, kde je z důvodu přehlednosti zachováno rozdělení na obě části svahu.

α_1	-536877.6912	α_6	-536862.5781	α_{16}	-536876.5617
β_1	-0.0018	β_6	0.0359	β_{16}	0.0527
γ_1	-1169857.8673	γ_6	-1169824.5092	γ_{16}	-1169805.2513
δ_1	-0.0020	δ_6	0.0571	δ_{16}	0.1047
α_2	-536865.8195	α_7	-536892.1166	α_{17}	-536859.4282
β_2	-0.0016	β_7	0.0046	β_{17}	0.0419
γ_2	-1169841.7111	γ_7	-1169845.0281	γ_{17}	-1169803.3022
δ_2	-0.0021	δ_7	0.0123	δ_{17}	0.0675
α_3	-536882.7628	α_{10}	-536872.0644	α_{19}	-536900.2019
β_3	0.0016	β_{10}	0.0249	β_{19}	-0.0051
γ_3	-1169855.5392	γ_{10}	-1169827.2414	γ_{19}	-1169811.0890
δ_3	0.0015	δ_{10}	0.0537	δ_{19}	-0.0054
α_4	-536876.7871	α_{12}	-536895.0611	α_{28}	-536881.7535
β_4	0.0180	β_{12}	0.0201	β_{28}	0.0173
γ_4	-1169842.3763	γ_{12}	-1169837.8363	γ_{28}	-1169809.6162
δ_4	0.0213	δ_{12}	0.0248	δ_{28}	0.0241
α_5	-536848.5704	α_{14}	-536902.8233		
β_5	-0.0022	β_{14}	0.0212		
γ_5	-1169816.3571	γ_{14}	-1169831.0362		
δ_5	0.0026	δ_{14}	0.0185		

Tabulka 8: Odhad parametrů v modelu pro dolní část svahu

α_{11}	-536903.5588	α_{20}	-536926.4009	α_{23}	-536942.8049
β_{11}	0.0021	β_{20}	-0.0024	β_{23}	0.0012
γ_{11}	-1169864.4328	γ_{20}	-1169827.3633	γ_{23}	-1169862.7501
δ_{11}	-0.0011	δ_{20}	-0.0025	δ_{23}	-0.0019
α_{13}	-536910.4154	α_{21}	-536930.5212	α_{24}	-536945.8044
β_{13}	-0.0027	β_{21}	0.0014	β_{24}	-0.0032
γ_{13}	-1169869.8669	γ_{21}	-1169836.4968	γ_{24}	-1169847.4846
δ_{13}	-0.0024	δ_{21}	-0.0024	δ_{24}	-0.0035
α_{18}	-536918.4226	α_{22}	-536942.3914		
β_{18}	0.0027	β_{22}	-0.0045		
γ_{18}	-1169863.8747	γ_{22}	-1169871.0362		
δ_{18}	-0.0022	δ_{22}	-0.0015		

Tabulka 9: Odhady parametrů v modelu pro horní část svahu

Očekávané souřadnice bodů spolu se skutečnými hodnotami jsou znázorněny na obrázcích v přílohách 2-6. Očekávané body jsou znázorněny vlevo, skutečné body vpravo.

4.6 Varianční matice svahu

V této části budeme výpočty nejprve porovnávat pro obě části svahu zvlášť a pak pro kontrolu pro celý model dohromady. V případě užití vzorců (26) a (27) pro mnohorozměrný model je pro horní část $n = 96, k = 32$ a pro dolní část $n = 168, k = 56$. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 10.

	Horní svah	Dolní svah
S_e	0.1118	7.0774
S^2	0.0018	0.0632
S	0.0418	0.2514

Tabulka 10: Reziduální součet [m], reziduální rozptyl [m^2] a směrodatná odchylka [m] pro obě části svahu

Výsledky jsou stejné jako v případě užití vztahu (28) pro mnohorozměrný model, kde pro horní část $n = 6, k = 2, m = 16$ a pro dolní část $n = 6, k = 2, m = 28$. Tedy pro horní část $\hat{\sigma}_1^2 = 0.0018 m^2$, resp. $\hat{\sigma}_1 = 0.0418$ metru a pro dolní část $\hat{\sigma}_2^2 = 0.0632 m^2$, resp. $\hat{\sigma}_2 = 0.2514$ metru.

Nyní zkusíme spočítat celkovou hodnotu $\hat{\sigma}^2$ na základě obou částí a poté výsledky srovnáme s celým modelem. Vzhledem k tomu, že jsme celý sesuv, tedy horní i dolní část, měřili jedním přístrojem, pak celková hodnota $\hat{\sigma}^2$ musí být stanovena na základě obou částí jako vážený průměr jednotlivých odhadů $\hat{\sigma}_1^2$ a $\hat{\sigma}_2^2$. Potom celkovou hodnotu $\hat{\sigma}^2$ určíme jako

$$\hat{\sigma}^2 = w_1 \hat{\sigma}_1^2 + w_2 \hat{\sigma}_2^2, \quad (32)$$

přičemž váhy w_1 a w_2 jsou závislé na počtech bodů jednotlivých částí. Tedy

$$w_1 = \frac{8}{14+8}, \quad w_2 = \frac{14}{14+8}.$$

Pak celková hodnota $\hat{\sigma}^2 = 0.0409 \text{ m}^2$, resp. $\hat{\sigma} = 0.2022$ metru. Pokud budeme uvažovat celý model, tedy obě části dohromady, pak ve vztahu (28) je $n = 6$, $k = 2$, $m = 44$ a výsledné $\hat{\sigma}^2$ je stejné jako vážený průměr jednotlivých odhadů $\hat{\sigma}_1^2$ a $\hat{\sigma}_2^2$.

Pro odhad varianční matice odhadů parametrů platí:

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Var}}[\text{vec}(\hat{\mathbf{B}})] &= \hat{\sigma}^2 \cdot \text{Var}[\text{vec}(\hat{\mathbf{B}})] \\ \widehat{\text{Var}}[\text{vec}(\hat{\mathbf{B}})] &= \hat{\sigma}^2 \cdot \left\{ \mathbf{I} \otimes [(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}] \right\}. \end{aligned}$$

Odhad varianční matice je čtvercová matice o rozměrech 88x88, kde na hlavní diagonále je 44 bloků o rozměrech 2x2. Každý blok obsahuje stejné prvky, tj.

$$\begin{pmatrix} 0.01991 & -0.00138 \\ -0.00138 & 0.00015 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Tato matice odpovídá varianční matici souřadnic celého svahu.

Dále provedeme celkový F-test významnosti modelů pro horní a dolní část zvlášť. V případě horní části svahu $1.70 > 1.63$ a v případě dolní části svahu $1.58 > 1.45$. Tudíž v obou případech zamítáme nulovou hypotézu o nulových parametrech. Pokud bychom provedli F-test pro celkový model, pak by $1.59 > 1.32$ a opět bychom nulovou hypotézu zamítli. To znamená, že všechny modely jsou vhodné a tedy ve všech případech je zaznamenán posun bodů v průběhu celé doby měření.

4.7 Elipsy spolehlivosti pro odhady bodů

Jak již bylo řečeno v kapitole 4.5, tak každý bod se pohybuje po přímce a tudíž i jeho souřadnice se pohybují po přímce. Tedy platí:

$$\hat{\mathbf{p}}_{x_i} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i T_1 \\ \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i T_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i T_t \end{pmatrix}$$

a

$$\hat{\mathbf{p}}_{y_i} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_i + \hat{\delta}_i T_1 \\ \hat{\gamma}_i + \hat{\delta}_i T_2 \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_i + \hat{\delta}_i T_t \end{pmatrix},$$

kde $\hat{\mathbf{p}}_{x_i}$ je vektor očekávaných x -ových souřadnic a $\hat{\mathbf{p}}_{y_i}$ je vektor očekávaných y -ových souřadnic. Abychom celou situaci zpřehlednili nebudeme tuto úlohu řešit pro všechny časové okamžiky dohromady, ale jednotlivě pro každý čas zvlášť. Z

matice $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \\ 1 & T_3 \\ 1 & T_4 \\ 1 & T_5 \\ 1 & T_6 \end{pmatrix}$ obsahující všechny časy budeme vybírat postupně jednot-

livé časové okamžiky a zároveň zavedeme nové značení

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \mathbf{X} = \mathbf{F}_1, \dots, (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) \mathbf{X} = \mathbf{F}_6.$$

Změnou polohy jedničky dostaneme postupně všechny časy. Následně pro souřadnice všech bodů ve fixním čase t využijeme přeznačení pomocí operátoru *vec*

$$\text{vec} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{p}}_x \\ \hat{\mathbf{p}}_y \end{pmatrix} = \text{vec} \left(\mathbf{F}_t \hat{\mathbf{B}} \right) = \text{vec} \left(\mathbf{F}_t \hat{\mathbf{B}} \mathbf{I} \right).$$

Užitím vztahu $\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}' \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B})$ nám vznikne

$$\text{vec} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{p}}_x \\ \hat{\mathbf{p}}_y \end{pmatrix} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}_t) \text{vec}(\hat{\mathbf{B}}).$$

Pro střední hodnotu platí

$$\mathbb{E} \left[\text{vec} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{P}}_x \\ \widehat{\mathbf{P}}_y \end{pmatrix} \right] = \mathbb{E} \left[(\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}_t) [\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}})] \right] = \mathbb{E} \left[\text{vec} \left(\mathbf{F}_t \widehat{\mathbf{B}} \right) \right]$$

a varianční matice je rovna

$$\text{var} \left[\text{vec} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{P}}_x \\ \widehat{\mathbf{P}}_y \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}_t) \text{var} \left[\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}}) \right] (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}_t'),$$

kde

$$\text{Var}[\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}})] = \mathbf{I} \otimes [\widehat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}].$$

Každý bod $\widehat{\mathbf{p}}_{i,t} = \begin{pmatrix} \widehat{p}_{x_{i,t}} \\ \widehat{p}_{y_{i,t}} \end{pmatrix}$ ve fixním čase t má rozdělení dané vztahem

$$\widehat{\mathbf{p}}_{i,t} \sim N_2 \left[\mathbb{E}[\text{vec}(\mathbf{F}_t \widehat{\mathbf{B}})]; (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}_t) \text{var} \left[\text{vec}(\widehat{\mathbf{B}}) \right] (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}_t') \right].$$

Z kapitoly 2.4 věnované oblastem spolehlivosti vyplývá, že $(1 - \alpha)$ elipsu spolehlivosti pro bod můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{p}_{i,t}}(1 - \alpha) &= \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} p_{x_{i,t}} \\ p_{y_{i,t}} \end{pmatrix} : (p_{x_{i,t}} - \widehat{p}_{x_{i,t}}, p_{y_{i,t}} - \widehat{p}_{y_{i,t}})' \left[(\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}_t) \left(\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \right) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}_t') \right]^{-1} \begin{pmatrix} p_{x_{i,t}} - \widehat{p}_{x_{i,t}} \\ p_{y_{i,t}} - \widehat{p}_{y_{i,t}} \end{pmatrix} \leq \right. \\ &\leq \left. 2\widehat{\sigma}^2 F_{2,(n-k)}(1 - \alpha) \right\} \end{aligned}$$

Z varianční matice (33) vyplývá, že rozptyly jsou stejné v jednotlivých časech pro všechny x -ové i y -ové souřadnice, tj.

$$\text{var}(x_{i,t}) = \text{var}(y_{i,t}), \quad \forall i = 1, \dots, 44, \quad \forall t = 1, \dots, 6.$$

Tudíž délky poloos elipsy spolehlivosti, vypočítané dle vztahu $\sqrt{\frac{2\widehat{\sigma}^2 F_{2,(n-k)}(1-\alpha)}{\lambda_s}}$, kde $n = 264, k = 88, \lambda_s$ jsou vlastní čísla matice $[\text{var}(\widehat{\mathbf{p}}_{i,t})]^{-1}$, budou stejné a vzniknou nám kružnice spolehlivosti. Navíc poloměry kružnic spolehlivosti budou v daném čase pro všechny odhady bodů stejně velké. Pro celý model je $[\text{var}(\widehat{\mathbf{p}}_{i,t})]^{-1}$ pro čas:

$$\begin{aligned}
t = 0 : [\text{var}(\widehat{\mathbf{p}}_{i,1})]^{-1} &= \begin{pmatrix} 2.0523 & 0 \\ 0 & 2.0523 \end{pmatrix}; & t = 5 : [\text{var}(\widehat{\mathbf{p}}_{i,2})]^{-1} &= \begin{pmatrix} 4.1911 & 0 \\ 0 & 4.1911 \end{pmatrix} \\
t = 7 : [\text{var}(\widehat{\mathbf{p}}_{i,3})]^{-1} &= \begin{pmatrix} 5.2947 & 0 \\ 0 & 5.2947 \end{pmatrix}; & t = 11 : [\text{var}(\widehat{\mathbf{p}}_{i,4})]^{-1} &= \begin{pmatrix} 5.7254 & 0 \\ 0 & 5.7254 \end{pmatrix} \\
t = 12 : [\text{var}(\widehat{\mathbf{p}}_{i,5})]^{-1} &= \begin{pmatrix} 5.2947 & 0 \\ 0 & 5.2947 \end{pmatrix}; & t = 22 : [\text{var}(\widehat{\mathbf{p}}_{i,6})]^{-1} &= \begin{pmatrix} 1.3855 & 0 \\ 0 & 1.3855 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Pak poloměr kružnice spolehlivosti pro všechny body je na hladině spolehlivosti 0.95 v čase

$$\begin{aligned}
t = 0 & : r_1 = 0.3483 \text{ metru} \\
t = 5 & : r_2 = 0.2437 \text{ metru} \\
t = 7 & : r_3 = 0.2169 \text{ metru} \\
t = 11 & : r_4 = 0.2085 \text{ metru} \\
t = 12 & : r_5 = 0.2169 \text{ metru} \\
t = 22 & : r_6 = 0.4240 \text{ metru.}
\end{aligned}$$

V přílohách 7 a 8 jsou zobrazeny odhady bodů z horní a dolní části svahu v jednotlivých časech spolu se svými kružnicemi spolehlivosti v měřítku 1x1 metru pro horní část a 2x4 metru pro dolní část. Vzhledem k malému posunu v horní části leží kružnice defakto na sobě. Ovšem většina bodů v dolní části se pohybovala mnohem výrazněji než v horní a tedy kružnice spolehlivosti se již celé nepřekrývají. U bodu 16 se dokonce mezi dubnem a květnem 2009 kružnice spolehlivosti vůbec neprotínají, jelikož zde došlo během jednoho měsíce k velmi výraznému posunu, což mohlo být způsobeno extrémními srážkami v tomto období.

Pokud bychom uvažovali sdružené kružnice spolehlivosti, pak poloměr kružnice je v čase

$$\begin{aligned}
t = 0 & : r_1 = 1.1252 \text{ metru} \\
t = 5 & : r_2 = 0.7874 \text{ metru} \\
t = 7 & : r_3 = 0.7005 \text{ metru} \\
t = 11 & : r_4 = 0.6737 \text{ metru} \\
t = 12 & : r_5 = 0.7005 \text{ metru} \\
t = 22 & : r_6 = 1.3695 \text{ metru.}
\end{aligned}$$

To znamená, že tyto kružnice současně pokrývají souřadnice všech bodů ve všech časech měření na hladině spolehlivosti 0.95. Lze si povšimnout, že poloměry sdru-

žených kružnic spolehlivosti jsou přibližně trojnásobně větší, což odpovídá i logické úvaze.

4.8 Posuny bodů v x -ovém a y -ovém směru pro celý svah

Na závěr budeme zkoumat celkový posun svahu. Nejdříve se podíváme na posuny jednotlivých bodů z deterministického modelu za celou dobu pozorování tj. od května 2008 do března 2010. V tabulce 11 je pak uvedeno, o kolik se jednotlivé body posunuly v x -ovém a y -ovém směru. Opět zde nejsou uvedeny všechny body z důvodu udaném v kapitole 4.3.

č. bodu	květen 2008		březen 2010		posuny [m]	
	x	y	x	y	Δx	Δy
1	-536877.698	-1169857.858	-536877.703	-1169857.921	-0.005	-0.063
2	-536865.831	-1169841.709	-536865.862	-1169841.760	-0.031	-0.052
3	-536882.756	-1169855.506	-536882.708	-1169855.542	0.048	-0.036
4	-536877.008	-1169842.632	-536876.514	-1169842.044	0.494	0.588
5	-536848.602	-1169816.358	-536848.602	-1169816.289	0.000	0.069
6	-536863.014	-1169825.170	-536862.032	-1169823.632	0.982	1.538
7	-536892.218	-1169845.076	-536892.070	-1169844.809	0.148	0.267
10	-536872.332	-1169827.716	-536871.659	-1169826.300	0.673	1.416
11	-536903.561	-1169864.397	-536903.510	-1169864.445	0.050	-0.048
12	-536895.196	-1169838.046	-536894.699	-1169837.437	0.497	0.609
13	-536910.402	-1169869.847	-536910.443	-1169869.919	-0.040	-0.072
14	-536903.077	-1169831.170	-536902.503	-1169830.733	0.574	0.437
16	-536876.919	-1169805.947	-536875.718	-1169803.844	1.201	2.103
17	-536860.026	-1169804.182	-536858.824	-1169802.279	1.202	1.903
18	-536918.439	-1169863.858	-536918.387	-1169863.910	0.052	-0.052
19	-536900.204	-1169811.019	-536900.309	-1169811.191	-0.105	-0.172
20	-536926.406	-1169827.345	-536926.443	-1169827.419	-0.037	-0.074
21	-536930.544	-1169836.445	-536930.510	-1169836.517	0.033	-0.072
22	-536942.384	-1169870.989	-536942.468	-1169871.032	-0.084	-0.043
23	-536942.835	-1169862.712	-536942.833	-1169862.768	0.002	-0.056
24	-536945.819	-1169847.435	-536945.877	-1169847.564	-0.057	-0.129
28	-536881.974	-1169809.742	-536881.492	-1169809.192	0.482	0.550

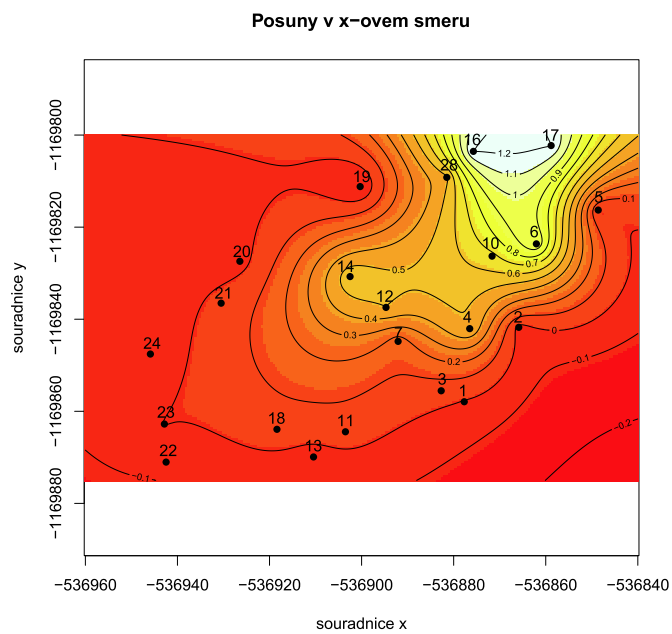
Tabulka 11: Posuny ve směrech x a y deterministického modelu

Z tabulky 11 vidíme, že v x -ovém směru došlo k největším posunům u bodů 6,16 a 17, kde se posuny pohybovaly okolo jednoho metru. V bodech 4,10,12,14 a

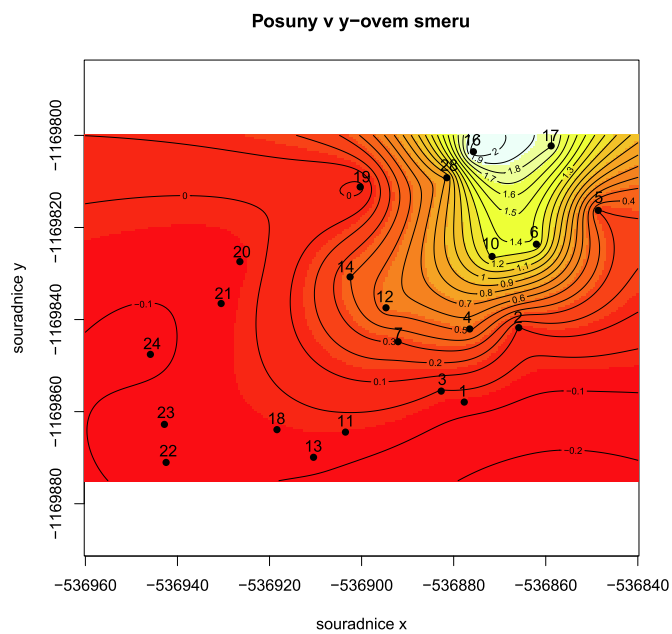
28 byl zaznamenán posun už jen kolem 50 cm a v ostatních bodech pouze okolo 10 centimetrů. V y -ovém směru byly posuny výraznější a u bodů 6,10,16 a 17 dosahovaly od 1.5 do 2.1 metru. V bodech 4,12,14 a 28 byly posuny obdobné jako v x -ovém směru kolem 50 cm. Lze si všimnout, že body, které zaznamenaly největší posuny, pocházejí z dolní části svahu.

Celou situaci si tedy vykreslíme v programu R, kde si nejprve data převedeme na geodata a posléze pomocí metody kriging zobrazíme posuny na celém svahu (obrázky 9 a 10). Musíme si uvědomit, že známe pouze informace o chování jednotlivých bodů. Ovšem tyto informace nám neříkají, co se děje mezi body. K tomu potřebujeme přesný způsob odhadu hodnoty mezi dvěma body nebo oblastmi bodů. Metoda používaná k nalezení hodnot těchto odhadů se nazývá kriging. Metoda kriging je v podstatě způsob, jak najít nejlepší nestranné lineární odhady. Více o metodě kriging nalezneme v bakalářské práci [7].

Na obrázcích 9 a 10 vidíme, že skutečně k největšímu posunu došlo ve spodní části svahu kolem bodů 16 a 17, a to, jak v x -ovém, tak v y -ovém směru. Podle hustoty vrstevnic lze říci, že k pozvolnému sesuvu došlo z jihozápadu od bodu 23 směrem k bodům 16 a 17. Naopak ke strmému sesuvu došlo v okolí bodů 5 a 28, kde jsou vrstevnice nejhustší.



Obrázek 9: Celkové skutečné posuny v x -ovém směru



Obrázek 10: Celkové skutečné posuny v y -ovém směru

Skutečné posuny nyní srovnáme s odhadnutými posuny z vytvořeného stochastického modelu. Nejprve je v tabulce 12 uvedeno, o kolik se jednotlivé odhady bodů posunuly v obou směrech.

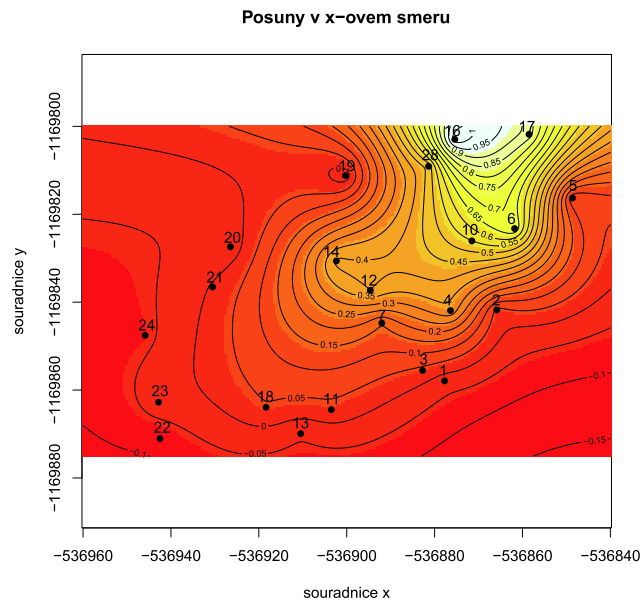
č. bodu	květen 2008		březen 2010		posuny [m]	
	x	y	x	y	Δx	Δy
1	-536877.691	-1169857.867	-536877.730	-1169857.910	-0.039	-0.043
2	-536865.820	-1169841.711	-536865.854	-1169841.758	-0.034	-0.047
3	-536882.763	-1169855.539	-536882.727	-1169855.552	0.036	-0.013
4	-536876.787	-1169842.376	-536876.392	-1169841.907	0.395	0.469
5	-536848.570	-1169816.357	-536848.619	-1169816.300	-0.049	0.057
6	-536862.578	-1169824.509	-536861.788	-1169823.253	0.790	1.256
7	-536892.117	-1169845.028	-536892.014	-1169844.758	0.102	0.270
10	-536872.064	-1169827.241	-536871.517	-1169826.060	0.547	1.181
11	-536903.559	-1169864.433	-536903.513	-1169864.457	0.045	-0.024
12	-536895.061	-1169837.836	-536894.620	-1169837.291	0.441	0.545
13	-536910.415	-1169869.867	-536910.475	-1169869.919	-0.060	-0.052
14	-536902.823	-1169831.036	-536902.357	-1169830.630	0.466	0.406
16	-536876.562	-1169805.251	-536875.403	-1169802.948	1.159	2.303
17	-536859.428	-1169803.302	-536858.507	-1169801.816	0.922	1.486
18	-536918.423	-1169863.875	-536918.363	-1169863.924	0.060	-0.049
19	-536900.202	-1169811.089	-536900.313	-1169811.207	-0.111	-0.118
20	-536926.401	-1169827.363	-536926.453	-1169827.418	-0.052	-0.055
21	-536930.521	-1169836.497	-536930.512	-1169836.549	0.010	-0.052
22	-536942.391	-1169871.036	-536942.490	-1169871.047	-0.099	-0.011
23	-536942.805	-1169862.750	-536942.810	-1169862.770	-0.005	-0.020
24	-536945.804	-1169847.485	-536945.876	-1169847.561	-0.071	-0.076
28	-536881.754	-1169809.616	-536881.372	-1169809.086	0.381	0.530

Tabulka 12: Posuny ve směrech x a y stochastického modelu

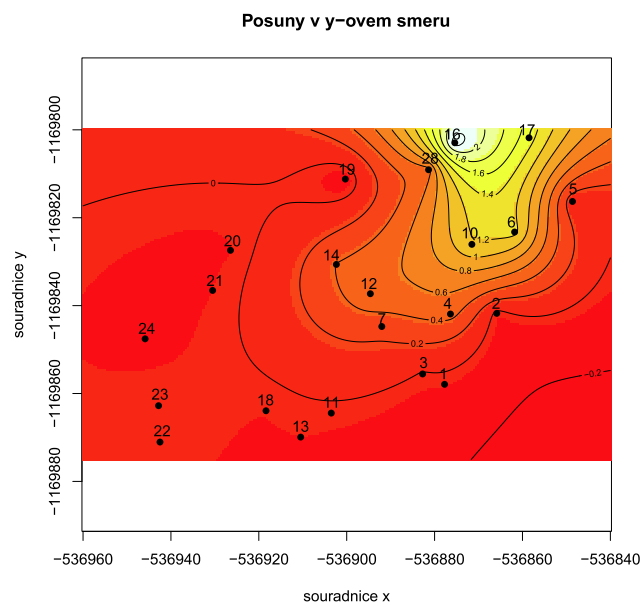
Pokud srovnáme posuny bodů z tabulek 11 a 12, pak dojdeme k závěru, že posuny odhadnutých bodů jsou v některých případech o několik centimetrů menší nebo větší. Největší rozdíl je samozřejmě u bodů, které se nejvíce pohybovaly. V x -ovém směru jsou to body 6 a 17, kde jsou rozdíly kolem 20 cm a v y -ovém směru body 6,16 a 17, kde se rozdíly pohybují v rozmezí 20-40 cm. Znovu všechny tyto body pochází z dolní části svahu.

Situaci si opět vykreslíme do obrázků 11 pro x -ový a 12 pro y -ový směr. Při srovnání obrázků 9,10 a 11,12 si lze všimnout, že posuny jsou zdánlivě srovnatelné

s posuny z deterministického modelu. Ovšem při bližším zkoumání jsou již vidět rozdíly odpovídající rozdílům posunů mezi tabulkami 11 a 12. Například u bodu 17 se u deterministického modelu posun v y -ovém směru pohybuje kolem 1.9 metru, zatímco u stochastického modelu se pohybuje jen kolem 1.5 metru.



Obrázek 11: Odhadnuté celkové posuny v x -ovém směru



Obrázek 12: Odhadnuté celkové posuny v y -ovém směru

Jelikož pracujeme s odhadnutými posuny, je třeba uvažovat přesnost odhadů. Známe-li přesnost odhadů v obou časech, pak přesnost posunu bude rovna součtu přesností těchto odhadů. Z varianční matice (33) vyplývá, že přesnost odhadů bude stejná pro x -ové i y -ové souřadnice v obou časech. V našem případě je přesnost posunu rovna součtu 0.4240 metru a 0.3483 metru. Takže celková přesnost posunu je 0.7723 metru. Pokud bychom tedy k posunu bodu 17 v y -ovém směru uvažovali jeho přesnost, pak by již posun ze stochastického modelu odpovídal posunu z deterministického modelu.

Závěr

Cílem diplomové práce bylo podívat se na problematiku sesuvů z matematického hlediska a především vytvořit mnohorozměrný regresní model, který by co nejlépe popisoval sesuv svahu v Halenkovicích. Teoretická část práce měla za úkol představit teorii potřebnou k vytvoření mnohorozměrného regresního modelu, čemuž dopomohla kapitola věnující se jednorozměrným modelům.

V praktické části bylo nejdříve nutné analyzovat data vykreslením bodů ve všech obdobích, abychom zjistili podobná chování bodů. Ovšem díky velkému měřítku a relativně malým posunům se musela celá oblast rozdělit na menší oblasti s menším měřítkem, kde již byly posuny bodů znatelné. Z této analýzy pak vyplynulo, že některé body se chovají chaoticky a některé, jakoby se pohybovaly po přímce. Proto jsme se rozhodli, že bude lepší celý svah rozdělit na dvě části podle chování bodů a vytvořit modely pro obě dvě části zvlášť.

Dalším problémem byly chybějící údaje v datovém souboru. Stěžejním v této kapitole bylo vybrat vhodné okolní body a následně díky interpolacím či extrapolacím ve směru x a y najít souřadnice bodu v čase, ve kterém chyběla data.

Až po doplnění chybějících dat jsme mohli přistoupit ke tvorbě modelu pro horní a dolní část svahu. U horní části jsme body nejprve prokládali polynomem druhého stupně. Avšak tento model nebyl vhodný, a proto jsme vytvořili jeden společný model pro horní a dolní část dohromady, kde jsme body prokládali přímkami. Odhady bodů jsme dále srovnávali se skutečnými souřadnicemi bodů vykreslením v programu R.

V poslední části diplomové práce jsme se zabývali elipsami spolehlivosti modelu. V této kapitole jsme díky varianční matici odhadů zjistili, že délky poloos elipsy budou stejné ve všech časech, a tudíž budeme řešit kružnice spolehlivosti.

Na závěr práce jsou pak posuny ve směrech x a y z deterministického modelu srovnávány s posuny ze stochastického modelu. Celkový model dozajista není nejpřesnější, avšak jedná se o jisté přiblížení, které by se do budoucna dalo zlepšit.

Díky diplomové práci jsem se naučil aplikovat těžce nabitě vědomosti do praktického užití v oblasti geodézie a naskytl se mi hlubší pohled využití matematiky

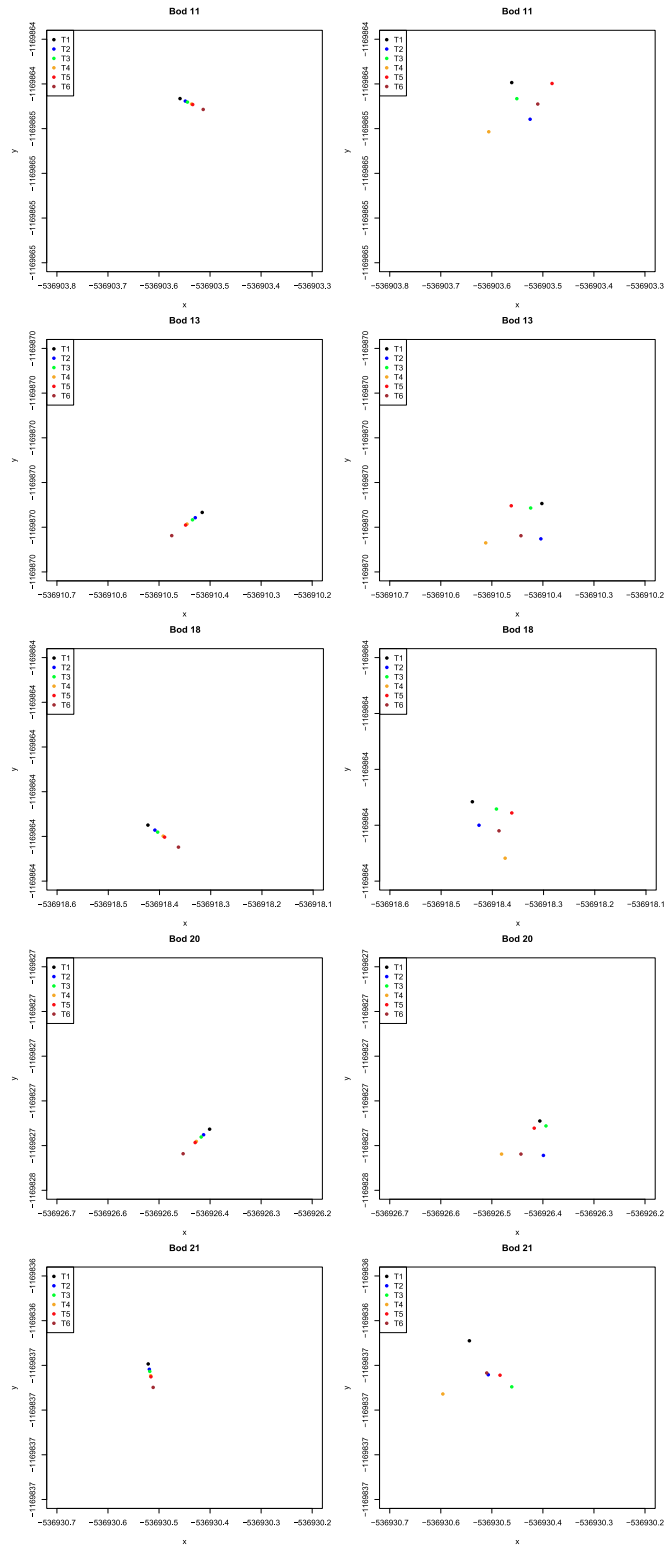
ve skutečných problémech. V této práci bych chtěl dále pokračovat i v doktorském studiu, kde bych se problematice vytváření mnohorozměrných modelů věnoval hlouběji a pokusil bych se vytvořit přesnější matematický model pro sesuv v Halenkovicích. Tato diplomová práce může být přínosná i pro kohokoliv jiného zabývajícím se sesuvy svahů.

Příloha 1: Souřadnice bodů v jednotlivých časech

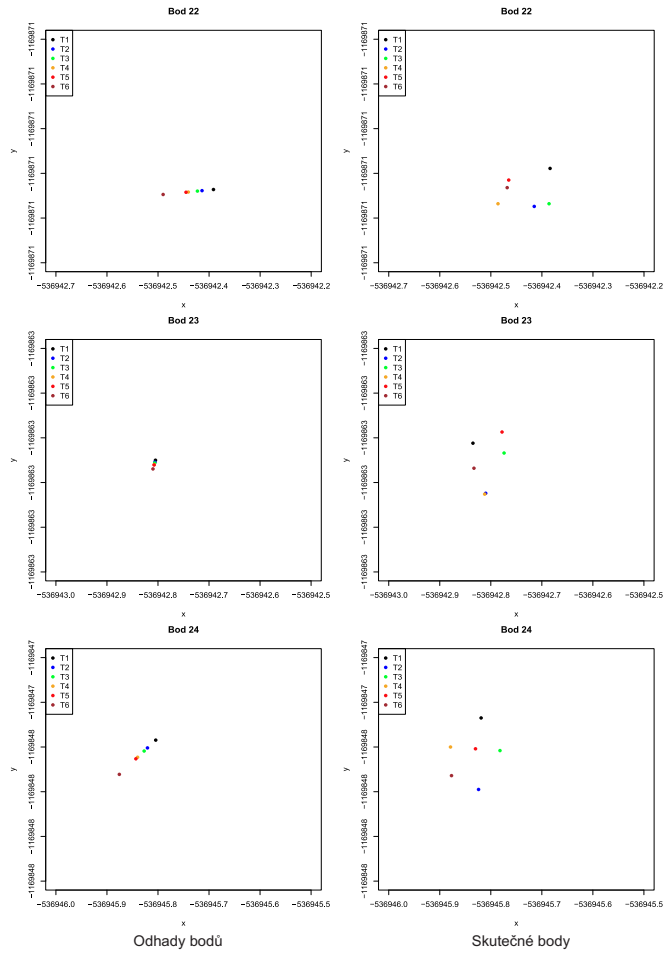
bod	květen 2008			říjen 2008			prosinec 2008		
	Y	X	Z	Y	X	Z	Y	X	Z
1	-536877,698	-1169857,858	267,913	-536877,672	-1169857,927	267,863	-536877,657	-1169857,844	267,880
2	-536865,831	-1169841,709	263,880	-536865,838	-1169841,717	263,840	-536865,797	-1169841,734	263,870
3	-536882,756	-1169855,506	267,640	-536882,743	-1169855,555	267,620	-536882,730	-1169855,572	267,650
4	-536877,008	-1169842,632	264,420	-536876,582	-1169842,132	264,130	-536876,540	-1169842,087	264,130
5	-536848,602	-1169816,358	256,683	-536848,528	-1169816,291	256,647	-536848,534	-1169816,375	256,660
6	-536863,014	-1169825,170	260,360	-536862,170	-1169823,857	260,027	-536862,108	-1169823,828	260,060
7	NA	NA	NA	-536891,999	-1169844,940	266,750	-536892,085	-1169844,969	266,770
8	-536877,480	-1169828,561	262,840	NA	NA	NA	NA	NA	NA
9	-536897,529	-1169846,765	267,480	NA	NA	NA	NA	NA	NA
10	NA	NA	NA	-536871,808	-1169826,643	262,740	-536871,728	-1169826,680	262,740
11	-536903,561	-1169864,397	268,960	-536903,525	-1169864,479	268,930	-536903,551	-1169864,433	268,960
12	NA	NA	NA	-536894,855	-1169837,637	266,050	-536894,906	-1169837,562	266,090
13	-536910,402	-1169869,847	272,223	-536910,404	-1169869,926	272,200	-536910,424	-1169869,857	272,230
14	-536903,077	-1169831,170	265,760	-536902,580	-1169830,877	265,630	-536902,562	-1169830,893	265,630
15	-536914,781	-1169849,478	269,480	NA	NA	NA	NA	NA	NA
16	-536876,919	-1169805,947	258,080	NA	NA	NA	NA	NA	NA
17	-536860,026	-1169804,182	256,300	-536858,912	-1169802,410	256,000	-536858,784	-1169802,456	256,003
18	-536918,439	-1169863,858	271,650	-536918,426	-1169863,900	271,630	-536918,392	-1169863,871	271,660
19	-536900,204	-1169811,019	261,753	-536900,229	-1169811,147	261,700	-536900,213	-1169811,206	261,750
20	-536926,406	-1169827,345	268,643	-536926,399	-1169827,422	268,600	-536926,394	-1169827,356	268,620
21	-536930,544	-1169836,445	270,350	-536930,507	-1169836,521	270,320	-536930,461	-1169836,548	270,330
22	-536942,384	-1169870,989	275,717	-536942,415	-1169871,074	275,690	-536942,386	-1169871,068	275,690
23	-536942,835	-1169862,712	274,350	-536942,810	-1169862,824	274,340	-536942,774	-1169862,734	274,350
24	-536945,819	-1169847,435	273,557	-536945,824	-1169847,595	273,530	-536945,782	-1169847,508	273,530
25	NA	NA	NA	NA	NA	NA	-536927,048	-1169802,492	264,930
26	NA	NA	NA	-536960,397	-1169826,982	273,580	-536960,412	-1169827,013	273,580
27	NA	NA	NA	NA	NA	NA	-536987,524	-1169857,749	281,770
28	NA	NA	NA	-536881,549	-1169809,449	259,330	-536881,508	-1169809,431	259,330
0	-536855,395	-1169866,159	266,990	-536855,377	-1169866,224	266,910	-536855,392	-1169866,244	266,930

bod	duben 2009			květen 2009			březen 2010		
	Y	X	Z	Y	X	Z	Y	X	Z
1	-536877,784	-1169857,932	267,913	-536877,733	-1169857,829	267,872	-1169857,921	-536877,703	267,856
2	-536865,871	-1169841,771	263,870	-536865,807	-1169841,697	263,852	-1169841,760	-536865,862	263,803
3	-536882,827	-1169855,608	267,660	-536882,719	-1169855,485	267,640	-1169855,542	-536882,708	267,600
4	-536876,573	-1169842,102	264,110	-536876,481	-1169842,043	264,060	-1169842,044	-536876,514	264,030
5	-536848,679	-1169816,391	256,663	-536848,603	-1169816,290	256,657	-1169816,289	-536848,602	256,657
6	-536862,087	-1169823,707	260,010	-536862,010	-1169823,604	259,973	-1169823,632	-536862,032	259,990
7	-536892,061	-1169844,889	266,770	-536892,002	-1169844,786	266,752	-1169844,809	-536892,070	266,728
8	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
9	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
10	-536871,731	-1169826,584	262,700	-536871,711	-1169826,464	262,690	-1169826,300	-536871,659	262,715
11	-536903,606	-1169864,507	268,970	-536903,482	-1169864,399	268,950	-1169864,445	-536903,510	268,919
12	-536894,827	-1169837,525	266,060	-536894,740	-1169837,396	266,050	-1169837,437	-536894,699	266,008
13	-536910,512	-1169869,935	272,233	-536910,462	-1169869,852	272,210	-1169869,919	-536910,443	272,199
14	-536902,531	-1169830,803	265,630	-536902,479	-1169830,689	265,600	-1169830,733	-536902,503	265,577
15	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
16	-536875,787	-1169803,728	257,550	-536875,697	-1169803,557	257,550	-1169803,544	-536875,718	257,522
17	-536858,870	-1169802,367	255,980	-536858,765	-1169802,267	255,986	-1169802,279	-536858,824	255,965
18	-536918,375	-1169863,959	271,640	-536918,362	-1169863,878	271,616	-1169863,910	-536918,387	271,596
19	-536900,300	-1169811,201	261,740	-536900,245	-1169811,075	261,720	-1169811,191	-536900,309	261,722
20	-536926,481	-1169827,419	268,637	-536926,417	-1169827,361	268,620	-1169827,419	-536926,443	268,608
21	-536930,596	-1169836,564	270,350	-536930,484	-1169836,522	270,330	-1169836,517	-536930,510	270,312
22	-536942,486	-1169871,068	275,710	-536942,465	-1169871,015	275,690	-1169871,032	-536942,468	275,689
23	-536942,812	-1169862,826	274,323	-536942,778	-1169862,687	274,340	-1169862,768	-536942,833	274,336
24	-536945,879	-1169847,500	273,533	-536945,830	-1169847,504	273,510	-1169847,564	-536945,877	273,517
25	NA	NA	NA	-536927,080	-1169802,505	264,910	-1169802,503	-536927,079	264,915
26	-536960,481	-1169827,009	273,590	-536960,404	-1169826,962	273,580	-1169826,974	-536960,420	273,580
27	-536987,577	-1169857,772	281,770	-536987,488	-1169857,686	281,776	-1169857,686	-536987,489	281,769
28	-536881,562	-1169809,303	259,300	-536881,448	-1169809,204	259,280	-1169809,192	-536881,492	259,240
0	-536855,462	-1169866,257	266,940	-536855,398	-1169866,197	266,92	-1169866,200	-536855,409	266,923

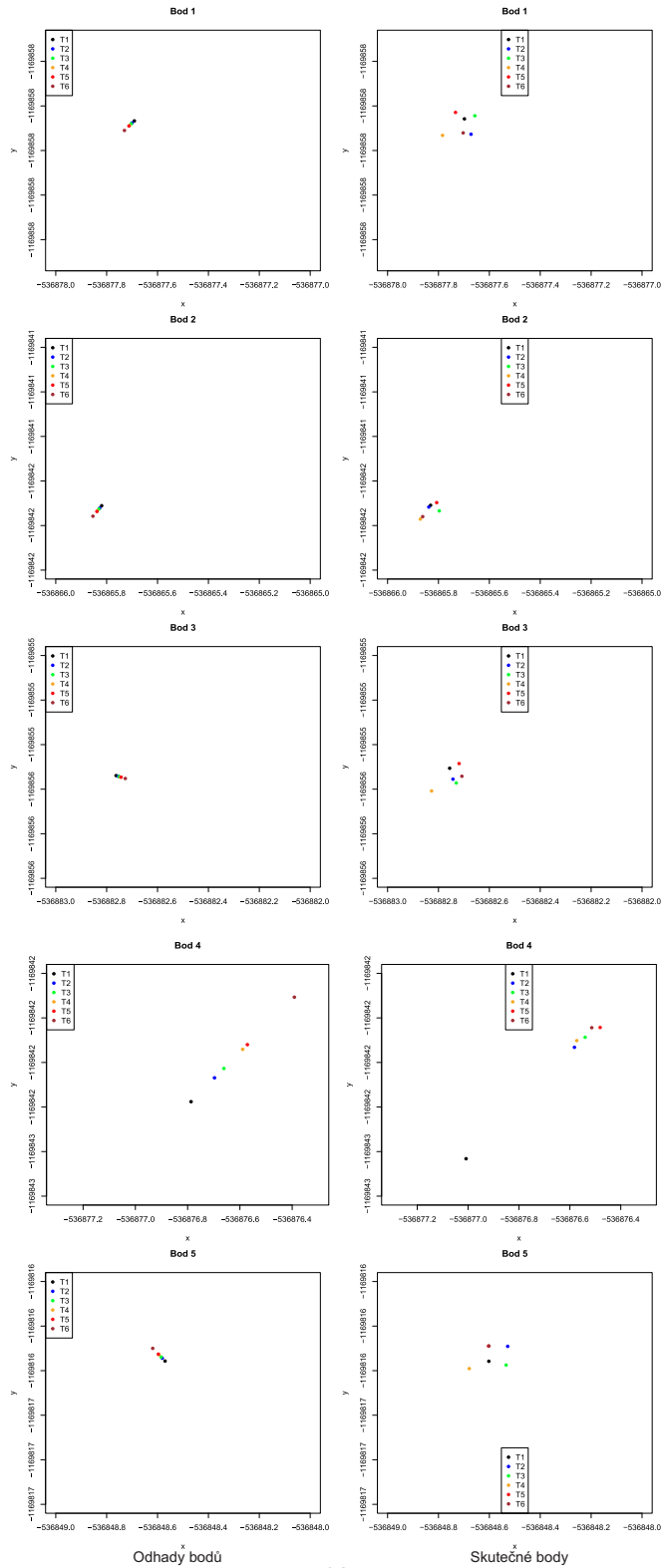
Příloha 2: Srovnání modelu a skutečnosti pro horní část svahu



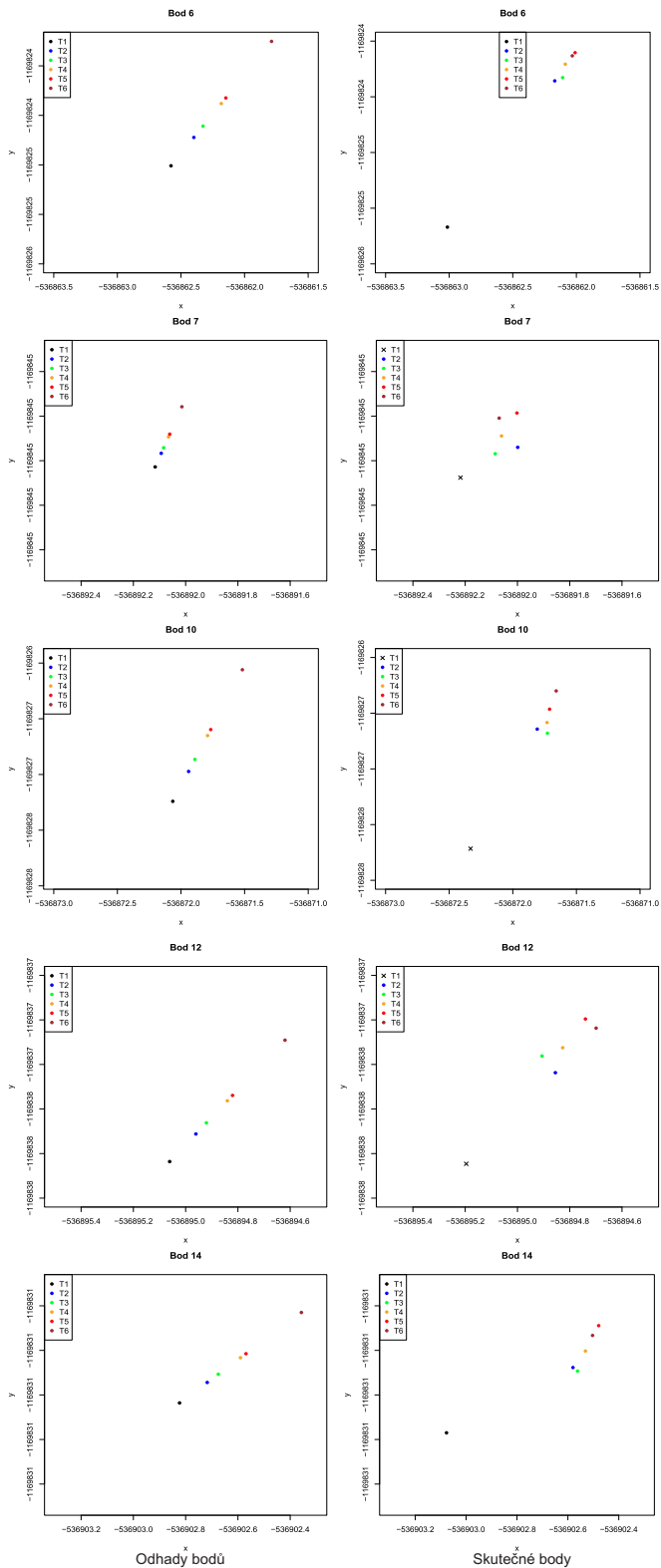
Příloha 3: Srovnání modelu a skutečnosti pro horní část svahu



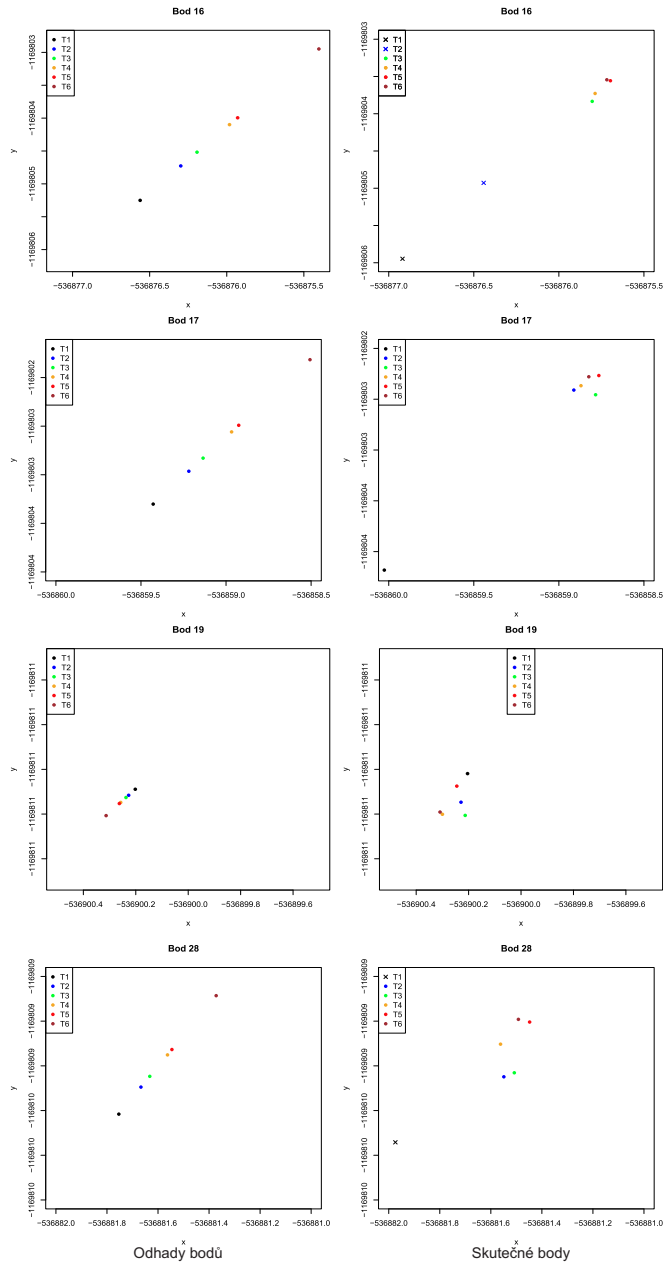
Příloha 4: Srovnání modelu a skutečnosti pro dolní část svahu



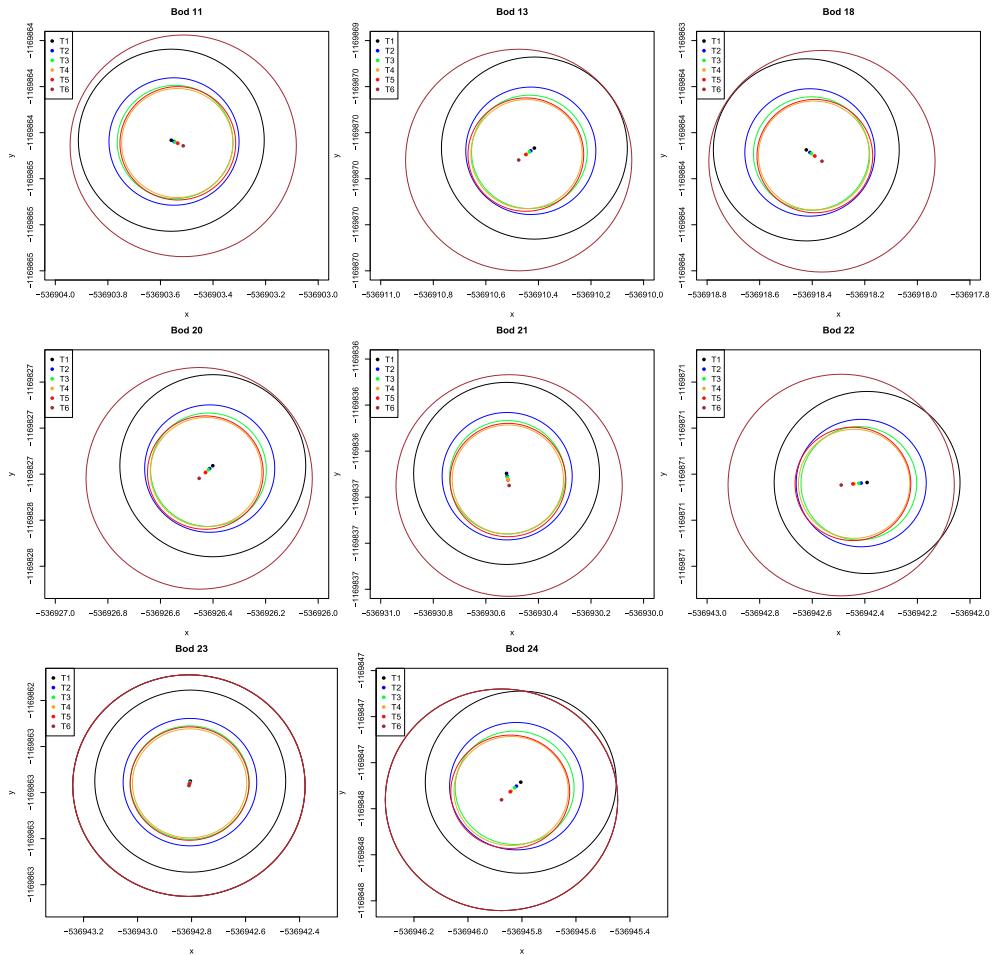
Příloha 5: Srovnání modelu a skutečnosti pro dolní část svahu



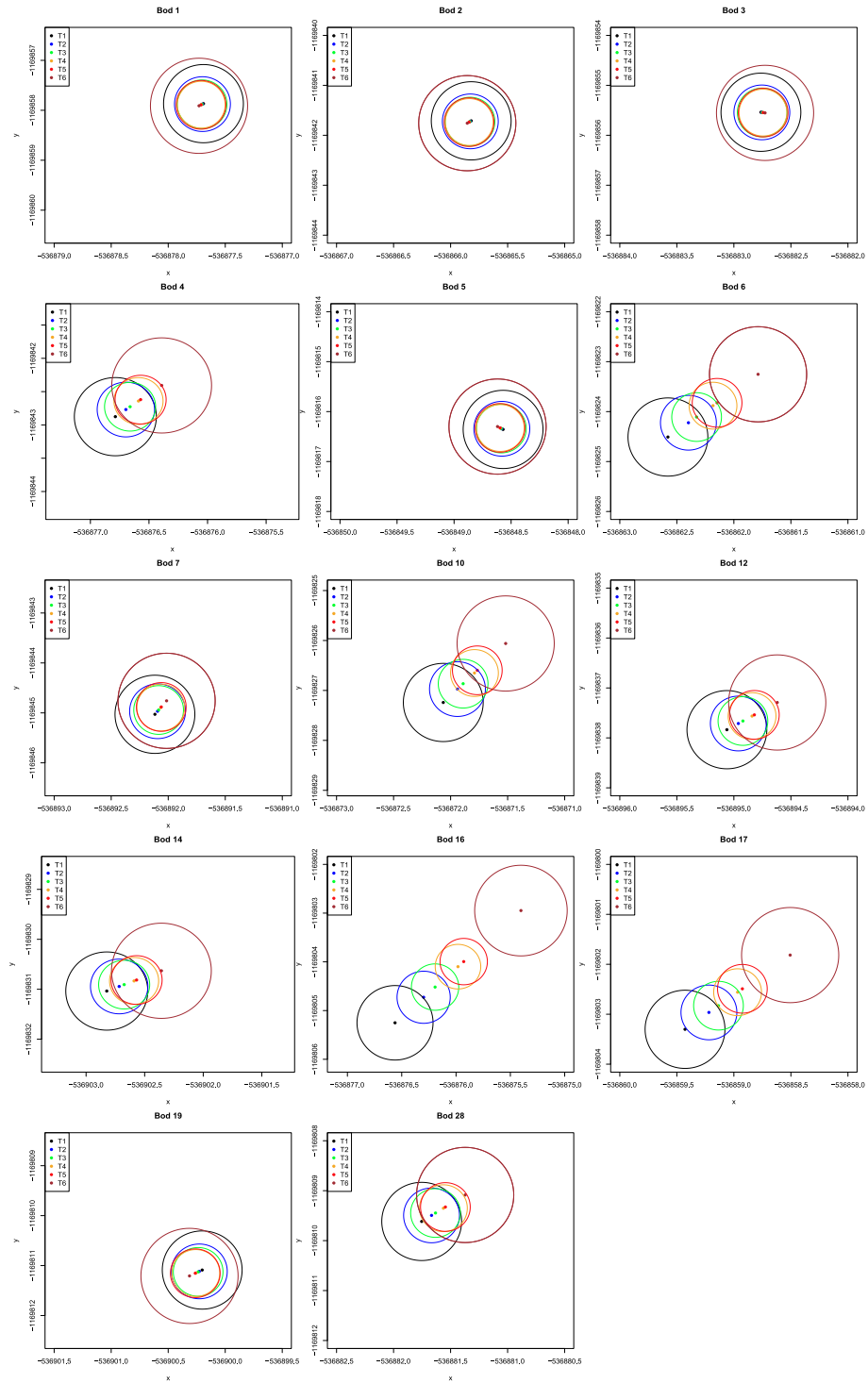
Příloha 6: Srovnání modelu a skutečnosti pro dolní část svahu



Příloha 7: Kružnice spolehlivosti pro horní část svahu



Příloha 8: Kružnice spolehlivosti pro dolní část svahu



Příloha 9: Metoda kriging: R-kód

```
library(geoR)
library(mvoutlier)
x=read.table("brezen-duben.txt",header=TRUE)
hist(x$W, main="Histogram vzdalenosti")
hist(log(x$W), main="Histogram vzdalenosti")
shapiro.test(log(x$W))
shapiro.test(x$W)
data=matrix(0,ncol=3,nrow=19)
data
data[,1]=x$X
data[,2]=x$Z
data[,3]=log(x$W)
geodata=as.geodata(data,coords.col=1:2,data.col=3)
var=varlog(geodata)
plot(var)
vario.fit=variofit(var)
lines(vario.fit,col="blue")
vario.fit2=variofit(var,cov.model="gaussian",weights="equal")
lines(vario.fit2,col="red")
vario.fit3=variofit(var,cov.model="spherical",weights="equal")
lines(vario.fit3,col="green")
vario.fit4=variofit(var,cov.model="exponential",weights="equal")
lines(vario.fit4,col="blue")

max=max(geodata$coords[,1])
max(geodata$coords[,1])
max(geodata$coords[,2])
min(geodata$coords[,1])
min(geodata$coords[,2])
loci=expand.grid(seq(-1169875,-1169800,b=0.4),seq(256,280,b=0.4))
kc=krige.conv(geodata,loc=loci,krige=krige.control(obj.model=vario.fit,type.krige = "ok"))
image(kc)
contour(kc,add=T)
image(kc,main=" ",ylab="souradnice y",xlab="souradnice x")
kc2=kc$predict
kc2=exp(kc$predict)
e=exp(1)
kc2=e^(kc$predict) #odlogaritmovani a vraceni zpet hodnoty
kc3=kc
kc3$predict=kc2
image(kc3)
contour(kc3,add=T)
```

Literatura

- [1] Kubáček, L., Multivariate statistical models revisited, Palacký University, Olomouc, 2008,
- [2] Fišerová, E., Pravděpodobnost a statistika 3 (texty k přednáškám), 2012,
- [3] Fišerová, E., Kubáček, L., Kunderová, P.: Linear statistical models. Regularity and singularities. Praha: Academia, 2007,
- [4] Anděl, J., Základy matematické statistiky, Matfyzpress, 2007,
- [5] Seber, G.A.F., Multivariate observations, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey 2004,
- [6] Anderson, T.W., An introduction to multivariate statistical analysis, 3rd edn. John Wiley and Sons, New York, 2003,
- [7] Zůvala, R., Analýza sesuvu svahu pomocí metody kriging (bakalářská práce), 2011,
- [8] Meloun, M., Militký, J., Statistická analýza experimentálních dat. Praha: Academia, 2004,
- [9] Hort, D., Rachůnek, J., Algebra I. VUP Olomouc, 2003.