Univerzita Palackého v Olomouci

Přírodovědecká fakulta

Katedra algebry a geometrie

Hudba očima matematiky aneb Klavír jako matematická pomůcka

Music Through the Eyes of Mathematics

or Piano as a Mathematical Tool

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Autor:	Bc. Lucie Urbancová, DiS.
Studijní program:	N1701 Fyzika
Stdudijní obor:	7504T055 Učitelství fyziky pro SŠ
	7504T089 Učitelství matematiky pro SŠ
	7504T000 Společný základ učitelských oborů
Forma studia:	kombinovaná
Vedoucí práce:	prof. RNDr. Josef Molnár, CSc.
Rok odevzdání práce:	2019

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s vyznačením všech použitých pramenů a spoluautorství. Souhlasím se zveřejněním diplomové práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách, ve znění pozdějších předpisů. Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, ve znění pozdějších předpisů.

V Olomouci dne 24. 6. 2019 ………………………………

podpis studenta

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu mé diplomové práce prof. RNDr. Josefu Molnárovi, CSc. za trpělivost, všestrannou pomoc, množství cenných rad, podnětů a doporučení a za vždy vstřícný a obětavý přístup. Ráda bych také vyjádřila svůj dík všem, kteří mě při psaní této diplomové práce podporovali a bez jejichž pomoci by nebylo možné práci dokončit – na prvním místě svému manželovi a své rodině a také přátelům a kolegům. V neposlední řadě bych chtěla poděkovat své kolegyni Mgr. Lence Dobrovolné, s jejíž laskavou pomocí jsem mohla dokončit praktickou část této diplomové práce.

Bibliografická identifikace:

Jméno a příjmení autora:	Bc. Lucie Urbancová, DiS.
Název práce:	Hudba očima matematiky aneb Klavír jako matematická pomůcka
Typ práce:	Diplomová
Pracoviště:	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce:	Prof. RNDr. Josef Molnár, CSc.
Rok obhajoby:	2019
Abstrakt:	Diplomová práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část. V teoretické části popisuje souvislosti matematiky a hudby z hlediska historického a uvádí konkrétní příklady aplikace matematiky v hudbě. Praktická část obsahuje netradiční příklady mezipředmětových vztahů matematiky a hudby, v rámci kterých je použit klavír, a dále DVD se souborem multimediálních příloh, ve kterých jsou tyto příklady názorně ukázány. Součástí praktické části je vypracovaný pracovní list s tématem „matematika u klavíru“, který je ověřen v edukační praxi na vybrané střední škole. Cílem práce je teoreticky i prakticky propojit mezipředmětové vztahy matematiky a hudby a začlenit je do výuky jako aktivizační a motivační prvky.
Klíčová slova:	matematika a hudba, pythagorejské ladění, rovnoměrně temperované ladění, Fibonacciho posloupnost, zlatý řez, množiny, relace, kombinatorika, posloupnosti, matematika u klavíru, netradiční matematické příklady, aktivizační úlohy, mezipředmětové vztahy
Počet stran:	119
Počet příloh:	6 + DVD
Jazyk:	Český

Bibliographical identification:

Autor's first name and surname:	Bc. Lucie Urbancová, DiS.
Title:	Mathematics Through the Eyes of Mathematics or Piano as a Mathematical Tool
Type of thesis:	Master
Department:	Department of Algebra and Geometry
Supervisor:	Prof. RNDr. Josef Molnár, CSc.
The year of presentation:	2019

Abstract:

The thesis is divided into theoretical and practical part. In the theoretical part there are examples of using mathematics in music. The practical part contains unconventional examples of interdisciplinary relations of mathematics and music, in which a piano is used as a mathematical tool. Practical part also contains a DVD with a set of multimedia attachments, in which these examples are shown. This part includes a list of exercises with the theme "math at the piano", which is verified in the pedagogical practice at a selected secondary school. The aim of this thesis is to theoretically and practically connect the interdisciplinary relations of mathematics and music and to incorporate these relations to teaching as activating and motivating elements.

Keywords: mathematics and music, Pythagorean tuning, equal tempered tuning, Fibonacci sequence, golden cut, sets, relations, combinatorics, sequences, piano in mathematics teaching, active learning, unconventional mathematical exercises, interdisciplinary relations

Number of pages: 119

Number of appendices: 6 + DVD

Language: Czech

OBSAH

ÚVOD

Při vyslovení slovního spojení „matematika a hudba“ se mnoho lidí pousměje s otázkou na rtech, zda tyto dvě disciplíny lze vůbec propojit. Prolínání těchto oblastí a jisté analogie mezi matematikou a hudbou vnímám už delší dobu. Myslím, že pro pochopení kontextu je důležité uvést, že hra na klavír mě provází od sedmi let, přičemž s výukou hry na klavír jsem začala asi před pěti lety. Při mém souběžném studiu hry na klavír na konzervatoři jsem si v mnoha skladbách uvědomovala, že matematika a muzika mají společného mnohem víc než jen čtyři písmena. Už systém učení skladeb byl podobný jako v matematice – uvědomit si obsah skladby, systematicky ji rozčlenit na úseky, pozorovat harmonickou strukturu, vycvičovat místa. Je to podobné jako s osvojováním matematického myšlení při řešení úloh – nejdříve musím vědět, co chci počítat, úlohu analyzovat a najít vhodné kroky k dosažení cíle, což se neobejde bez procvičování početních úloh. Při důkladnějším zkoumání souvislostí hudby a matematiky však zjistíme, že počátky propojení těchto dvou oblastí zasahují až do starověké antiky a prorůstají historií ruku v ruce až dodnes. Metaforická nit, která je propojuje, jako by měla spojené konce – na počátku Pythagoras spatřil matematiku v hudbě, a tak rozvinul klubko bádání a nacházení jejich souvislostí. A dnes matematické principy ovlivnily hudbu natolik, že zasáhly do oblasti komponování nejvýznamnějších skladatelů moderny (O. Messiean, I. Stravinskij, B. Bartók, P. Boulez, P. Hindemith, I. Xenakis a další). Právě proto shledávám důležité se tomuto tématu věnovat a začlenit jej do výuky ať už pro její zpestření či motivaci a aktivizaci studentů v hodinách matematiky či hudební výchovy.

Tato diplomová práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část. Teoretická část obsahuje tři kapitoly členěné do podkapitol. První kapitola hledá vztahy matematiky a hudby v kurikulárních dokumentech, didaktických publikacích a také historickou souvislost matematiky a hudby. Druhá kapitola matematicky popisuje základní složku hudby – tón. Teoretická část vrcholí třetí kapitolou, která popisuje vybraný matematický aparát aplikovaný v hudební teorii.

V první kapitole praktické části jsou postupně na dvanácti podkapitolách rozebrány matematické oblasti učiva víceletých gymnázií za pomoci klavíru. Ve druhé kapitole je vytvořen pracovní list se začleněním příkladů z první kapitoly. Tento pracovní list je ověřen v edukační praxi v rámci výuky matematiky na Biskupském gymnáziu Brno. Praktickou část uzavírá reflexe hodiny matematiky, ve které byly začleněny netradičních matematické úlohy s klavírem.

Součástí této diplomové práce je i příloha DVD multimediálních souborů videí a nahrávek s ukázkami matematických příkladů na klavíru z první kapitoly praktické části.

Pro názornost dané problematiky jsem v teoretické i praktické části pracovala s freewarem *Audacity*, který umožňuje znázornit časový průběh akustického tlaku různých zvuků, které byly nahrávány prostřednictvím zabudovaného mikrofonu v počítači. Součástí diplomové práce je i několik grafů, které byly vytvořeny v programu *Excel*, dále jsem pracovala s programem *Overtone Analyzer* pro analýzu témbru tónu. Většina obrázků vlastní tvorby byly vytvářeny a upravovány v programu *Malování*. Notový zápis byl vytvořen ve freewaru *MuseScore*.

Zdroje této diplomové práce opírám především o zahraniční publikace, které byly dostupné knižně v univerzitních knihovnách nebo ve formátu pdf. Dále jsou v práci uvedeny citace článků z webových stránek akademických pracovníků a z videonahrávek přednášek o matematice a hudbě zahraničních zdrojů.

Byla bych ráda, kdyby tato diplomová práce posloužila učitelům matematiky a hudební výchovy jako inspirace pro začlenění netradičních úloh do výuky těchto předmětů.

CÍLE PRÁCE

Cílem teoretické části práce je najít souvislosti matematiky a hudby v kurikulárních dokumentech, dále v historickém hledisku a v odborných publikacích, které popisují aplikace matematického aparátu v hudební teorii.

Cílem praktické části práce je nalézt příklady matematických oblastí vyučovaných na osmiletých a čtyřletých gymnázií a základních školách v rámci standardních hodin matematiky i cvičení a seminářů s využitím klavíru. Dalším cílem praktické části je vytvořit pracovní list pro skupinovou výuku matematiky u klavíru a aplikovat dané poznatky jako aktivizační a motivační prvky do výuky matematiky na vybrané střední škole.

Cíl této diplomové práce je současně její náplní. Chci poukázat na vztah matematiky a hudby v historických souvislostech, popsat tuto souvislost prostřednictvím vybraných matematických aparátů v hudební teorii a vytvořit didaktický materiál souboru úloh, z nichž některé ověřím v praxi.

TEORETICKÁ ČÁST

1. MEZIPŘEDMĚTOVÉ VZTAHY – matematické „šlahouny“ v jiných předmětech

Matematika a hudba jsou jen zdánlivě nepropojitelné oblasti. Mnozí teoretici dokonce říkají, že matematika a hudba jsou dvě strany jedné mince (Rokyta, 2014). Abych ale obhájila přínos této diplomové práce, je třeba si uvědomit, že má smysl se věnovat souvislosti hudby a matematiky a tuto souvislost začlenit do výuky. Pro didaktický záměr této diplomové práce je tedy žádoucí nahlédnout do tématu mezipředmětových vztahů nejdříve v oficiálních dokumentech, které vymezují vzdělávání na národní úrovni, a posléze pátrat po propojení hudby a matematiky v další literatuře.

1.1 Pouto matematiky a hudby v kurikulárních dokumentech

Zákon 561/2004 Sb. o předškolním o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon) v § 3 vymezuje systém vzdělávacích programů, tzv. kurikulární dokumenty. Pro účely této diplomové práce se stačí zmínit o Národním programu rozvoje vzdělávání v ČR (tzv. Bílá kniha), z jehož koncepce vzešly rámcové vzdělávací programy (RVP), které vymezují vzdělávání na státní úrovni, a školní vzdělávací program (ŠVP), který si každá škola upravuje sama (školní úroveň).

Rámcové vzdělávací programy vešly v platnost v roce 2004. Kromě cílů vzdělávání stanovují také klíčové kompetence žáka, očekávané výstupy, dále rozdělují vzdělávací obsah do vzdělávacích oblastí a mezipředmětové vztahy zahrnují do průřezových témat. Tento přístup zdůrazňuje mezioborové přesahy vzdělávacích oborů a může být inspirací při integraci jejich obsahů. (Balada, 2007; *RVP ZV*, 2017)

Smyslem a cílem vzdělávání je podle RVP vybavit všechny žáky souborem klíčových kompetencí. Dle Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (*RVP ZV*, 2017, s. 10) představují klíčové kompetence *„souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti“*. Tyto kompetence nestojí izolovaně, ale různými způsoby se prolínají a lze je získat vždy jen jako výsledek uceleného procesu vzdělávání. Osvojování klíčových kompetencí je dlouhodobý proces. Získané klíčové kompetence jsou „výbavou" žáka pro jeho vstup do života a do pracovního procesu a procesu celoživotního učení vůbec. V *RVP G* (2007, s. 9, 10) i v *RVP ZV* (2017, s. 10–13) je stanoveno těchto šest klíčových kompetencí:

- kompetence k učení
- kompetence k řešení problémů
- kompetence komunikativní
- kompetence sociální a personální
- kompetence občanské
- kompetence pracovní/k podnikavosti

Dále je v *RVP ZV* (2017, s. 14) uvedeno těchto deset vzdělávacích oblastí, přičemž *RVP G* (2007, s. 11) obsahuje pouze prvních osm.

- Jazyk a jazyková komunikace
- Matematika a její aplikace
- Člověk a příroda
- Člověk a společnost
- Člověk a svět práce
- Umění a kultura
- Člověk a zdraví
- Informační a komunikační technologie (pozn. v RVP G je uvedena Informatika a informační a komunikační technologie)
- Člověk a jeho svět
- Doplňující vzdělávací obory

Dále *RVP ZV* (2017, s. 125) vymezuje šest průřezových témat, v *RVP G* (2007, s. 65) je uvedeno prvních pět:

- Osobnostní a sociální výchova
- Výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech
- Multikulturní výchova
- Environmentální výchova
- Mediální výchova
- Výchova demokratického občana

Průřezová témata jsou dále členěna do tematických okruhů. Přítomnost průřezových témat v RVP zajišťuje integraci mezipředmětových vztahů do výuky – dle *RVP G* (2007, s. 65) je lze *„realizovat jako součást vzdělávacího obsahu vyučovacích předmětů, je možné jim věnovat samostatné projekty, semináře, kurzy, besedy apod., případně je lze realizovat jako samostatný vyučovací předmět"*. Pro všechny školy je povinné, aby byly všechny okruhy průřezových témat zařazeny do svého ŠVP.

Jasný záměr matematiku propojit s dalšími předměty však můžeme nalézt ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace v *RVP G* (2007, s. 21, 22). Zaměříme-li se na tuto vzdělávací oblast podrobněji, zjistíme, že je tento záměr vyjádřen již v úvodním odstavci *Charakteristika vzdělávací oblasti*. Zde je uvedeno, že *„osvojené matematické pojmy, vztahy a procesy pěstují myšlenkovou ukázněnost, napomáhají žákům k prožitku celistvosti,*“ a konečně také, že *„během studia žáci objevují, že matematika nachází uplatnění v mnoha oborech lidské činnosti (např. v ekonomii, technice, ale i ve společenských vědách), že je ovlivňována vnějšími podněty (například z oblasti přírodních věd) a že moderní technologie jsou užitečným pomocníkem matematiky“* (RVP G, 2016, s. 21, 22).

1.2 Pouto matematiky a hudby v jiných didaktických publikacích

Protože v RVP konkrétní provázanost matematiky a hudby není uvedena, opřu se dále o publikaci Molnár (2007), kde se klade důraz právě na mezioborové vztahy matematiky a dalších oblastí. Celá učebnice vnímá žáka velmi komplexně. Snaží se odpovědět na otázku „jak mohou k rozvoji klíčových kompetencí přispět učebnice matematiky“. Teoretické poznatky demonstruje ukázkami didaktického materiálu učebnic matematiky. Poukazuje na pojmy osobnost, schopnosti a jejich osvojování, dovednosti, vědomosti a postoje, které se mimo jiné objevují v základní definici klíčových kompetencí podle RVP. Velmi úzce je klade do souvislosti právě s klíčovými kompetencemi, o kterých se dále zmiňuje v rámci vlastní rozsáhlé kapitoly. Molnár, (2007, s. 38, 39) uvádí definici klíčových kompetencí následovně:

„Klíčovými kompetencemi se podle Belze a Siegrista rozumí takové znalosti, schopnosti a dovednosti, které vyúsťují v kompetence, s jejichž pomocí je možno v daném okamžiku zastávat velký počet pozic a funkcí a které jsou vhodné ke zvládání problémů celé řady většinou nepředvídatelně se měnících požadavků v průběhu života.“

Z definice je patrné, že výstupem žáka v procesu vzdělávání nemá být člověk s izolovanými znalostmi z daných vzdělávacích oblastí, ale naopak člověk flexibilní, který své poznatky dokáže propojovat a uvažovat komplexně.

Dále se tato publikace zaměřuje na roli učebnic matematiky při rozvoji klíčových kompetencí. Uvádí, že výstupními vědomostmi žáka ve výuce matematiky by měly být vědomosti uvedené v kurikulárních dokumentech, ale také informace z jiných oborů, které pozitivně prohlubují vztah žáka k mezipředmětovým vztahům matematiky a jiných vzdělávacích oblastí. V rámci výstupních dovedností žáka při užívání učebnic matematiky pak uvádí schopnost aplikovat matematické poznatky, řešit problémy, logicky uvažovat či objevovat a pracovat tvořivě. Jednotlivé dovednosti dále rozvádí, konkrétně dovednost objevovat a pracovat tvořivě obnáší schopnost dávat věci do souvislosti, nalézat nová řešení a nestandardní aplikace, být flexibilní a adaptabilní při změnách. Také je zde zmíněna dovednost řešit problémy, které dále rozvádí mimo jiné ve schopnost pochopit problém, analyzovat a postupovat plánovitě, nenechat se odradit. (Molnár, 2007, s. 53–55)

A konečně, jistou spojitost matematiky a hudby lze konkrétně nalézt téže publikaci v rámci postojů, které by měly učebnice matematiky měly u žáků formovat. Mezi ně Molnár (2007, s. 56) řadí také kladný postoj k umění, ke všem formám kulturních projevů, pozitivní přístup k životu, schopnost projevovat pozitivní city, s čímž je hudba úzce spjata.

1.3 Pouto matematiky a hudby historicky

Rozebrat tuto podkapitolu důkladně by jistě vyšlo na jinou závěrečnou práci, proto zde pouze vyberu důležité milníky v průřezu dějin matematiky a hudby. Některé z nich rozvedu v kapitole číslo 5.

Historické pouto matematiky a hudby zasahuje až do 6. století př. n. l. do dob Pythagora ze Samu (cca 570 – 510 př. n. l.). Starověká antika se stala kolébkou hudby jakožto vědy spřízněné s matematikou. Pythagorejec Archytas (přelom 5. a 4. století př. n. l.) ve své knize *O matematice* hned v úvodu píše:

„Zdá se, že matematikové dosáhli správného poznání a nelze se divit, že pochopili podstatu každé jednotlivé věci; neboť když pronikli k poznání celku, tak vidí v pravém světle také všechny jednotlivé části. Předali nám jasné poznání rychlosti hvězd, jejich východů a západů, také o geometrii, aritmetice a sférické geometrii a v neposlední řadě také o hudbě; neboť tyto nauky (mathémata) považujeme za příbuzné.“ (Halas, nedatováno, s. 12)

Matematické disciplíny Pythagorejců v antice ovlivnily i vzdělání na středověkých univerzitách. Z jejich učení se vyvinul obor klasického univerzitního vzdělání zvaného kvadrivium – kombinace čtyř pohledů na vlastnosti čísel. Tvořily jej obory aritmetika, která popisuje číslo jako takové, dále geometrie zabývající se číslem v prostoru, astronomie pak zkoumá číslo v časoprostoru a konečně hudba, která zkoumá číslo v čase. (*Port,* 2012)

Ve starověkém Řecku tedy byla matematika spjata s mnohem širším okruhem oblastí. Devlin (2011, s. 13, 14) uvádí, že toto pojetí matematiky se udrželo po více než 2000 let. Teprve s rozvojem vědeckých metod v 17. století se cesty matematiky a hudby začaly rozbíhat. Profesor matematiky Stanislav Vydra v učebnici *Počátkové arytmetyky* z počátku 19. století rozděluje matematiku na disciplíny „čisté matematiky“, kam řadí aritmetiku, geometrii, analýzu, algebru, trigonometrii, teorii křivek („učení o křivých čárkách“) a diferenciální a integrální počet, a dále „smíšené matematiky“, kam například kromě mechaniky, hydrostatiky či „umění, které tesá do kamenů“ zařazuje také „muzyku neb hudbu“ (Halas, nedatováno, s. 13).

James D. Steward, Ph.D. (1941–2014), kanadský profesor matematiky na McMaster University a houslista, mimo jiné na své přednášce z dubna roku 2010 v MAA Carriage House s názvem *Matematika a hudba* uvádí některá jména významných matematiků, kteří hráli na hudební nástroj nebo se zabývali hudební teorií: Pythagoras, Eukleides, G. Cardano, G. Galilei, J. Kepler, R. Déscartes, J. d’Alembert, L. Euler, J. Bolyai, B. Riemann, W. Jacobi, L. Cronecker, J. J. Sylvester, R. Poincaré, A. Einstein, G. D. Birkhoff. (Steward, 2010; *Legacy*, 2014)

Dále Steward (2010) ve své přednášce odpovídá na otázku „jak můžeme vysvětlit skutečnost, že tolik matematiků bylo úzce spjatých s hudbou“. Pokud se podle Stewarda (2010) podíváme na některé podobné znaky matematiky a hudby, zjistíme tyto paralely. Zaprvé, obě disciplíny spojuje přesnost. Jak matematika, tak hudba mohou být velmi přesně zapsány – hudba pomocí notového zápisu a matematika pomocí knih o kalkulu. Zadruhé, v obecné rovině je hudba podle Stewarda nejvíce abstraktním uměním, stejně tak jako matematika je nejvíce abstraktní vědou. Dle Devlina (2011, s. 13) *„má obojí svůj vlastní vysoce abstraktní zápis a řídí se svými vlastními strukturálními pravidly“*. Svou přednášku Steward (2010) končí slovy, že matematika a hudba mají společné analogie ve formě, struktuře a logice.

Souvislost abstrakce matematiky a hudby si mimo jiné uvědomoval i slavný matematik Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Napsal: *„Hudba je skrytý a nevědomý matematický problém duše“* (Veselý, 2013, s. 302). O stři století později francouzský matematik Jean Dieudonné (1906–1992) nazval matematiku „hudbou rozumu” (Šťastný, 2009).

Pokud se recipročně podíváme na významné hudebníky, kteří své skladby komponovali na matematických principech (ať už úmyslně nebo ne zcela záměrně), narazíme například na jména W. A. Mozart, J. S. Bach, C. Debussy, B. Bartók, P. Hindemith, A. Honegger, O. Messiean, A. Schönberg, A. Berg, A. Webern, I. Xenakis. O vztahu matematiky a hudby se Igora Stravinskij (1882–1971) vyjádřil slovy: *„Hudba je daleko bližší matematice než literatuře – ne snad přímo matematice jako takové, ale dozajista něčemu, jako je matematické myšlení nebo matematické vztahy“* (Veselý, 2013, s. 302).

Ve 20. století se pak vymezily nové hudební směry, které využívají matematické principy. Mezi ty nejvýznamnější se řadí dodekafonie, serialismus, minimalismus, aleatorika, elektronická hudba nebo hudba témbrů. Někteří skladatelé ve svých kompozičních technikách dokonce došli k názoru, že hudbu mohou redukovat na matematiku (Petr, 2008). Striktní doktrína však s sebou nese daň. Po formální stránce dokonalá, matematicky prokalkulovaná hudba si už jen těžko hledá posluchače a postrádá jádro, které hudbu tvoří a má být zprostředkováno – emoce (Petr, 2008).

Souvislost matematiky a hudby vnímají také soudobí hudebníci. Například hudební skladatel a klavírista Albert Breier se v rozhovoru pro časopis *HIS Voice* vyjadřuje o vztahu matematiky a hudby slovy, že pravděpodobně neexistuje hudba, která by byla matematikou naprosto nedotčena. Podle Breiera mohou být v hudební kompozici skladatelů, kteří se ve svých partiturách matematikou vědomě nezabývají, jednou muzikology objeveny komplikované matematické postupy a struktury. Je také zajímavé, že se ve svém vlastním kompozičním stylu snaží Breier matematizace zbavit, avšak to podle jeho slov není vůbec snadné, v některých případech nemožné. (Šťastný, 2009, s. 20–23)

Na základě těchto tří podkapitol je tedy jisté, že matematika a hudba jsou úzce spjaté disciplíny. Z didaktického hlediska tedy **má smysl** studovat provázanost matematiky a hudby a tuto spojitost využít při výuce matematiky a hudby.

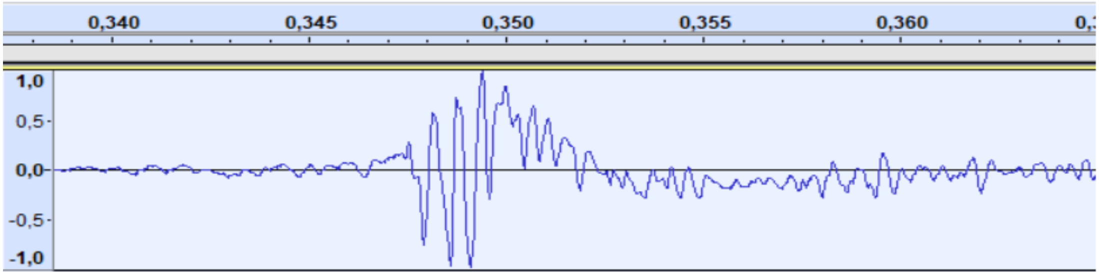
2. CO JE TO ZVUK

2.1 Zrození tónu

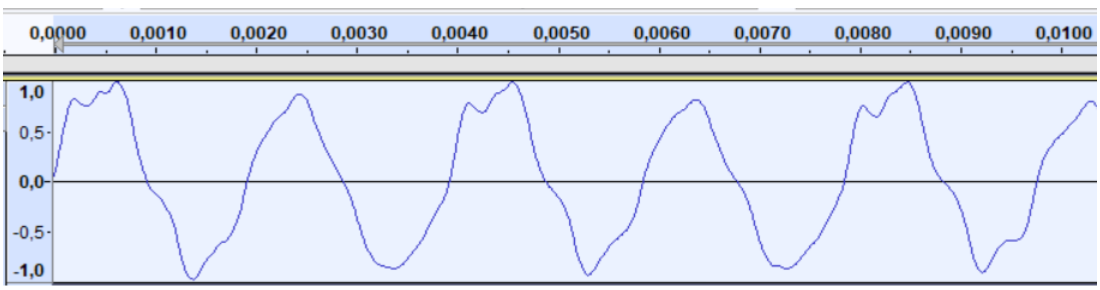
Dříve než přejdeme k vlastnímu zkoumání vztahu matematiky a hudby, bude užitečné se seznámit s tónem samotným, jeho charakteristikou a procesem vzniku a šíření. V této části textu využiji další mezioborové vztahy matematiky s fyzikou a pro pochopení vzniku zvuku mezipředmětové vztahy fyziky a biologie.

Je třeba odlišit zvuk od tónu a tón od hluku. Zenkl (2003, s. 9) vymezuje zvuky jako vše, co slyšíme. Další definici zvuku uvádí Svoboda (2013, s. 226): *„Zvukem je každé mechanické vlnění v látkovém prostředí, které je schopno vyvolat v lidském uchu sluchový vjem.“*

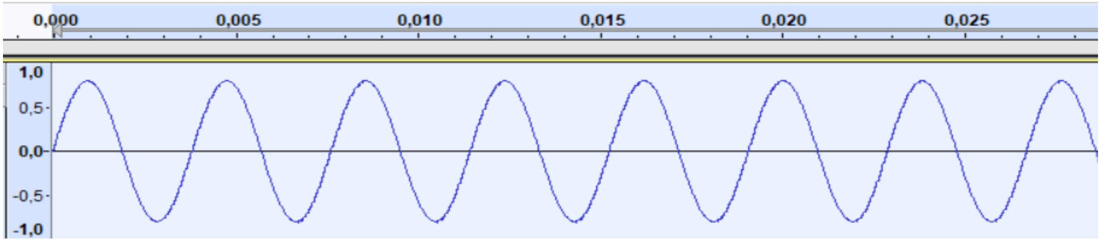
Zvuk vzniká chvěním pružné hmoty (pevné látky, kapalin nebo plynů). Zenkl (2003, s. 9) rozděluje zvuky na tóny, které vznikají pravidelným chvěním hmoty, a hluky, vznikající naopak nepravidelným chvěním (např. šum, rána, skřípání, …). Tóny mají určitou přesnou výšku, kterou lze napodobit (jiným nástrojem, hlasem), hluky naopak mají výšku neurčitou (Zenkl, 2003, s. 9). Tóny lze dále dělit na jednoduché s harmonickým průběhem (tj. takovým, jehož grafem závislosti intenzity zvuku na čase je funkce sinus) a složené, které jsou sice periodické, ale jejich časový průběh není popsán sinusoidou (Reichl, ©2006–2019*e*).



Obrázek 1: Neperiodický časový průběh tlesknutí.



Obrázek 2: Periodický časový průběh vokálu „e“.



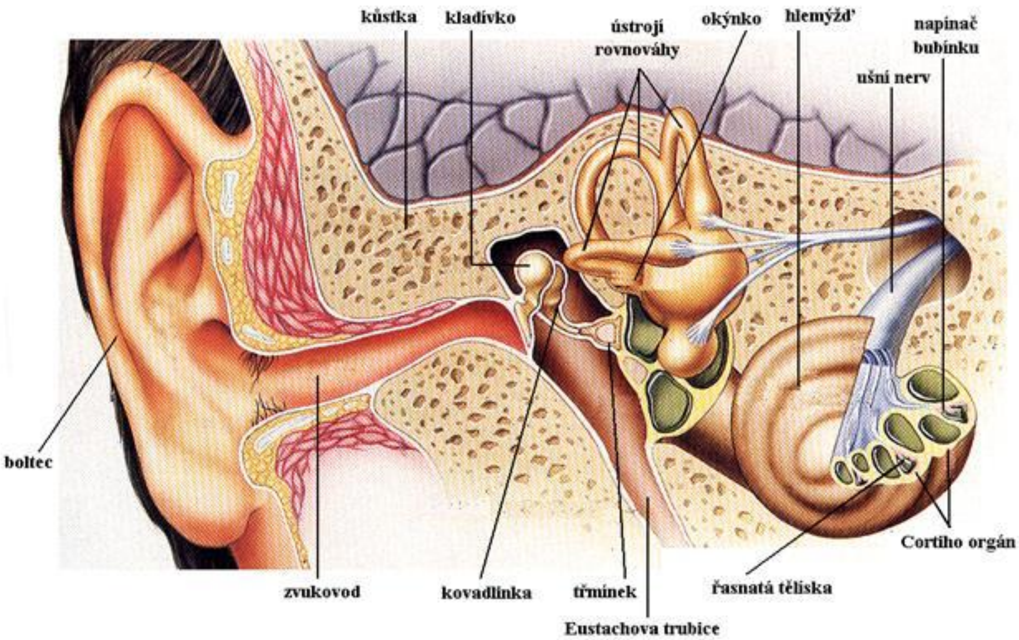
Obrázek 3: Harmonický časový průběh tónu c[1] generovaného v programu Audacity.

Důležité je upozornit, že se na předchozích obrázcích nejedná o samotnou zvukovou vlnu, ale o průběh změny tlaku v čase.

Pravidelné chvění nějakého tělesa tedy zapříčiní vznik tónu. K tomu, abychom tón uslyšeli, je třeba, aby se šířil pružným látkovým prostředím (nejčastěji vzduch). Například u klavíru stisknutím klávesy vymrštíme dřevěné kladívko potažené plstí, které ťukne do dané struny, ta se rozkmitá, její pravidelný pohyb dále rozkmitá masu molekul vzduchu, která se postupně zhušťuje a řídne. Tím vytváří pravidelnou změnu tlaku vzduchu, která se podélným vlněním šíří až k našemu sluchovému aparátu. Níže se krátce zmíním o jeho popisu.

2.1.1 Stavba a popis sluchového aparátu

Zachycení a zpracování zvukových vln dochází v našem sluchovém aparátu, jehož periferii tvoří ušní boltec. V uchu se pak zvukový signál přemění na nervový vzruch (Reichl, ©2006–2019*c*). Na obrázku níže je znázorněno, z jakých částí se ucho skládá.



Obrázek 4: Popis sluchového aparátu (Reichl, ©2006–2019c).

Vnější ucho se skládá z ušního boltce a zvukovodu o délce asi 3 cm a šířce kolem 7–8 mm. Zvuková vlna je částečně zachycena boltcem a nasměrována do zvukovodu. Boltec a zvukovod společně fungují jako jednoduchý zesilovač a filtr frekvencí – podobně jako mikrofon. Zároveň vnější ucho odděluje vnější okolí od středního ucha, a tak má i ochrannou funkci. (Mourek, 2008, s. 181–184; Reichl, ©2006–2019*c*)

Na konci zvukovodu se nachází bubínek a tři kůstky, které dohromady tvoří střední ucho. Zde nastává samotný děj slyšení. Bubínek je pružná vazivová blána silná asi 0,1 mm. Po dopadu zvukové vlny na bubínek se bubínek rozkmitá se ve stejném rytmu a se stejnou frekvencí, jakou měla zvuková vlna. Tuto vibraci pak přejímá soustava tří nejmenších kůstek v těle – kladiva, kovadlinky a třmínku. Tyto kůstky jsou v pohybu 24 hodin denně a převádí akustické vlnění zachycené bubínkem do kapaliny ve vnitřním uchu. Zajímavé je, že pokud by soustava těchto kůstek chyběla a zvuková vlna by dopadla přímo na kapalinu vnitřního ucha, akustický signál (tedy vibrace vzduchu) by byl odražen zpět a my bychom nic neuslyšeli. Převodní systém tedy provede impedanční přizpůsobení, a tak nedochází k odrazu energie. Druhou částí převodního systému jsou dva nejtenčí svaly v lidském těle, které slouží k regulaci tuhosti přenosu zvukového signálu. Třetí částí převodního systému je Eustachova trubice, která spojuje střední ucho s nosohltanem. Její funkce je vyrovnávání tlaku vzduchu před bubínkem a za ním. (Mourek, 2008, s. 181–184; Reichl, ©2006–2019*c*)

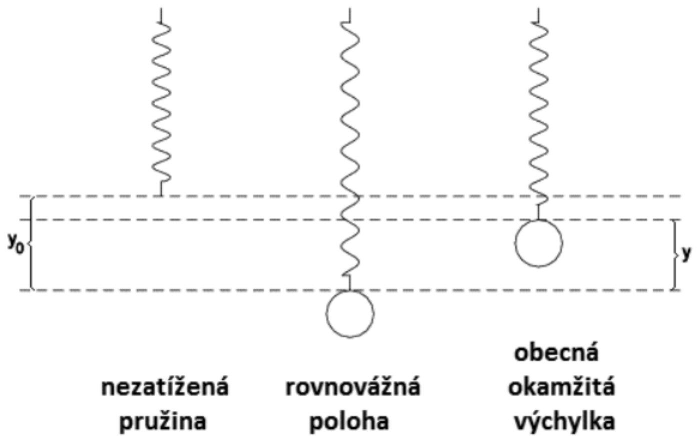
Střední a vnitřní ucho odděluje blanka oválného okénka, která uzavírá kapalinu uvnitř vnitřního ucha. Zvuková vlna prostřednictvím převodního systému kůstek a svalu středního ucha rozkmitá kapalinu v hlemýždi, kde se nachází recepční systém vlastního ústrojí sluchu (Cortiho orgán). Ten je tvořen řadami 23 000–25 0000 řasnatých buněk. Tlakové vlny akustického signálu pohybují pružnou membránou, která deformuje tyto řasnaté buňky, a ty převedou tento zvukový signál na elektrický, který je odváděn do mozku a tam dále zpracován. (Mourek, 2008, s. 181–184; Reichl, ©2006–2019*c*)

Teoretický frekvenční rozsah lidského sluchu se uvádí jako 16 Hz až 20 000 Hz. V praxi je pak rozmezí slyšitelných frekvencí 17–17 000 Hz. Jeho krajní hodnoty jsou u každého člověka individuální, ale platí, že s rostoucím věkem jeho horní hranice výrazně klesá. Nejvýznamnější frekvence zvukového signálu je kolem 3 000 Hz. Signály blízké této frekvenci lidské ucho zpracovává nejvíce účinně. Tato frekvence souvisí se srozumitelností lidské řeči, na níž je lidské ucho nejcitlivější. (Loy, 2006, s. 15, 16)

Jak vysvětlil doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc.: *„Slyšet hudbu znamená být schopen vnímat chvění vzduchu a být schopen dekódovat, rozložit a interpretovat jeho strukturu“* (Matěna, 2015). Hudbu tedy neposuzujeme jen podle našeho rozumu, ale především na základě dekódování frekvence kmitů, jejímž prostřednictvím naše ucho hudbu vnímá (Matěna, 2015).

2.2 Matematický popis tónu

Jak bylo řečeno, tón vzniká pravidelným kmitáním pružného prostředí. Protože časový průběh intenzity tónu je periodický, pro matematický popis dobře poslouží zkoumání časového průběhu výchylky kmitání tělesa na pružině (harmonického oscilátoru).



Obrázek 5: Harmonický oscilátor (Fendt, 2014).

Následující matematizace předpokládá model harmonického oscilátoru, tedy ideální případ, kdy těleso kmitá bez energetických ztrát. Případ nepopisuje tlumené kmitání ani vynucené kmity, které se svou podstatou přibližují reálné situaci více. Pro účel popisu tónu však toto zjednodušení postačí.

Fyzikální popis kmitavého pohybu vede na řešení pohybové rovnice ve tvaru lineární diferenciální rovnice druhého řádu:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky,$$

kde t je čas, m je hmotnost závaží oscilátoru, k tuhost pružiny a y okamžitá výchylka kmitání tělesa vzhledem k rovnovážné poloze. Levá strana reprezentuje sílu, která se po vychýlení tělesa z rovnovážné polohy snaží toto těleso do ní vrátit, a pravá strana vyjadřuje přímou úměrnost této síly k okamžité výchylce tělesa s konstantou úměrnosti k. Znaménko mínus pak značí, že se jedná o sílu působící proti pohybu kmitajícího tělesa. Jinými slovy: čím více bude těleso vychýleno z rovnovážné polohy, tím větší bude síla, která se snaží dostat těleso zpět do rovnovážné polohy.

Jednoduchou ekvivalentní úpravou dostaneme tvar:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$$

Jedná se o homogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty. Pro její řešení tedy užijeme její charakteristickou rovnici:

$$m\lambda^2 + k = 0,$$

odkud $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Ve fyzice se daná odmocnina označuje veličinou ω, která se nazývá kruhová frekvence kmitů. Platí tedy $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Protože jsou oba kořeny dvojicí komplexně sdružených kořenů ve tvaru $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, kde $\alpha = 0$ a $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$, tak řešení dané diferenciální rovnice hledáme ve tvaru:

$$y_1(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t) \text{ a } y_2(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$

Dané funkce y_1, y_2 jsou lineárně nezávislé, a tvoří tedy fundamentální systém řešení. Po dosazení se jedná o funkce:

$$y_1(t) = \sin(\omega t) \text{ a } y_2(t) = \cos(\omega t)$$

Obecné řešení má pak tvar lineární kombinace nalezených lineárně nezávislých funkcí:

$$y(t) = C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)\,, C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}$$

Určení daných konstant určíme jako partikulární řešení počáteční úlohy. Označme v čase $t = 0$ výchylku $y = A$ a rychlost $v = v_0$. Rychlost je dána první derivací dané funkce podle času, a tedy:

$$y(0) = C_2 = A$$

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = C_1\omega\cos(\omega t) - A\omega\sin(\omega t)$$

$$v_0 = v(0) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = C_1\omega,$$

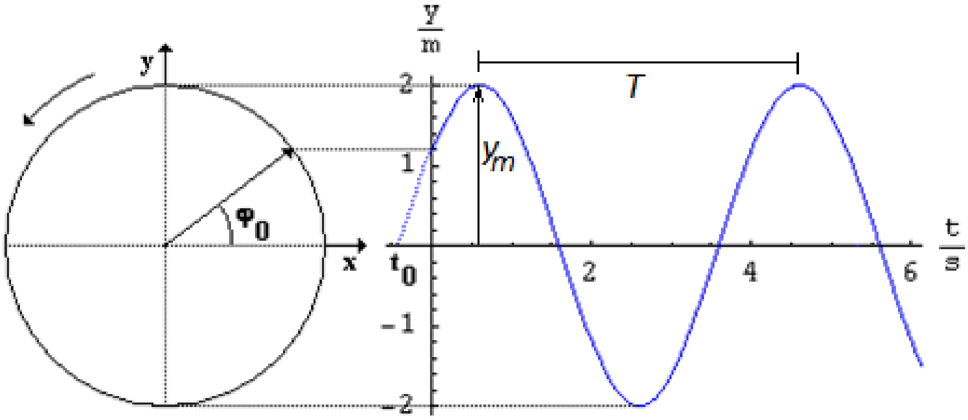
odkud $C_1 = \frac{v_0}{\omega}$. Dosazením konstant do rovnice obecného řešení vyjde:

$$y(t) = A\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

Jedná se tedy o složení dvou periodických funkcí. Pro účely matematického popisu tónu je praktičtější použít funkci ve tvaru:

$$\boldsymbol{y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)}$$

Dané řešení diferenciální rovnice se dá na tento tvar jednoduše převést pomocí goniometrické identity ve tvaru $\sin(a+b) = \sin b \cos a + \cos b \sin a$, provedením substituce $A = y_m \sin \varphi_0$ a $\frac{v_0}{\omega} = y_m \cos \varphi_0$. Zbývá ještě pojmenovat poslední veličiny. Člen y_m udává maximální výchylku, tj. amplitudu kmitavého pohybu a φ_0 značí počáteční fázi kmitavého pohybu. Pokud je fáze nenulová, okamžik sledování kmitavého pohybu oscilátoru nastal v čase, kdy těleso neprocházelo rovnovážnou polohou.



Obrázek 6: Harmonické kmitání – graf a popis veličin (Reichl, ©2006–2019).

Odvozený vzorec tedy odpovídá harmonickému průběhu tónu, a jak uvidíme v následující kapitole, plně koresponduje s tím, co pozorujeme u jednoduchých tónů. Ještě dodejme, že kruhová frekvence je svázaná s frekvencí tónu *f*, a tím i periodou kmitání *T* vztahem:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

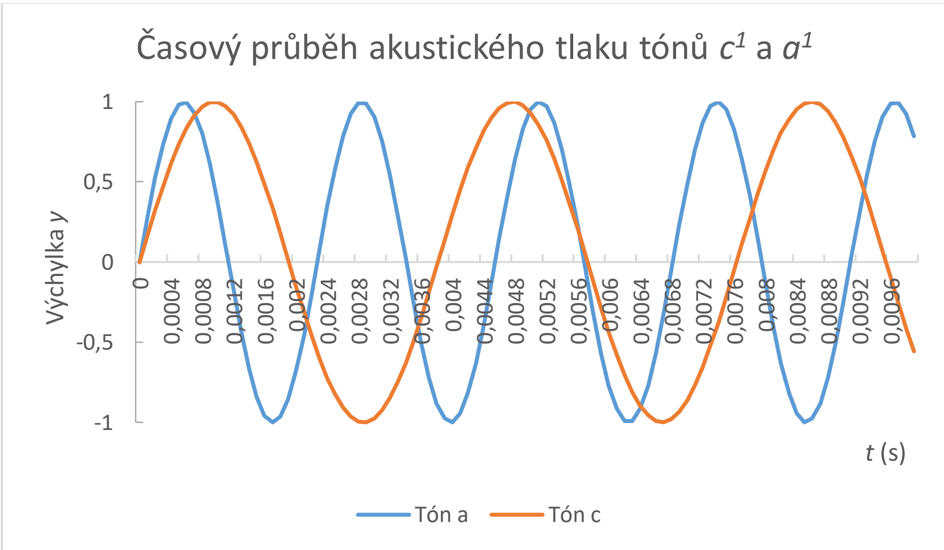
Funkce popisující časový průběh výchylky lze tedy přepsat do tvaru:

$$\boldsymbol{y(t) = y_m \sin(2\pi f t + \varphi_0)}$$

Frekvence f obecně udává počet těchto pravidelných pohybů za jednu sekundu, měří se v hertzích (Hz). Perioda *T* je naopak časový údaj, který udává dobu nejkratšího úseku periodického děje, jehož opakováním vzniká výsledný periodický pohyb. Základní jednotkou periody je sekunda (s). Zvukovou vlnu lze dále charakterizovat prostřednictvím vlnové délky λ, jejíž základní jednotkou je metr (m). Pokud první rozkmitaná částice vykoná jeden kmit za periodu *T*, pak se za tuto dobu rozšíří vlnění do vzdálenosti $\lambda = vT = \frac{v}{f}$, kde v je rychlost šířící se fáze v prostoru. Rychlost šíření závisí na teplotě a na prostředí, ve kterém se zvuk šíří. Z matematicko-fyzikálních tabulek lze zjistit, že ve vzduchu je tato rychlost při teplotě 20 °C zhruba 343 ms^{-1}, přičemž se s klesající teplotou snižuje a naopak. V pevných látkách je několikanásobně větší. V grafu vlnovou délku tedy reprezentuje nejmenší vzdálenost dvou bodů kmitajících se stejnou fází.

Na základě odvození rovnice kmitavého pohybu lze vytvářet grafy popisující časovou závislost výchylky intenzity zvuku tónů různých frekvencí. Pro jejich generování v programu *Excel* užiji vztah $y(t) = y_m \sin(2\pi f t + \varphi_0)$. Pro jednoduchost zvolím nulovou počáteční fázi a jednotkovou maximální výchylku.

Graf 1: Časový průběh změn akustického tlaku



2.3 Čtyři dimenze tónu

Tón samotný je charakterizován čtyřmi základními vlastnostmi. Haluška (2006, s. 97) tyto vlastnosti tónu nazývá psychologickými: *„Jedná se o vlastnosti, které jsou podmíněné lidskou psychikou. Výzkumy uvádí, že např. ptáci pěvci vnímají tyto fenomény úplně odlišně.“* Tóny zapisujeme notami.

2.3.1 Výška

Základní zákonitosti o vztahu mezi výškami tónu pomohly zformulovat pokusy na monochordu (jedné struny natažené na ozvučnou skříňku): čím kratší a napnutější je struna, tím vyšší tón vydává (Haluška, 2006, s. 98). Na přelomu 16. a 17. století zjistil

G. Galilei nezávisle na francouzském knězi a matematikovi M. Mersenneovi, že výška tónu je nepřímo úměrná jeho frekvenci (Benson, 2013, s. 149). Mersenne pak odvodil matematický vztah pro frekvenci tónu v závislosti na fyzikálních parametrech struny a jejím napětí (Haluška, 2006, s. 156). Vnímání výšky tónu je tedy zapříčiněno změnami frekvencí tónu – tedy tím, jak rychle probíhá vibrační pohyb molekul prostředí, kterým se zvuková vlna šíří. Mnoho lidí, a to především ti, kteří byli muzikálně trénováni, je schopno rozeznat již pouhé 2 Hz v rozdílu frekvencí (*ADM magazín*, 2016).

Souvislost výšky tónu a jeho frekvence prakticky ukazuje např. Savartova siréna. Jedná se o několik ozubených koleček různých průměrů otáčivých na společné ose. Jestliže k zubům roztočené sirény přiložíme karton, siréna vydává zvuk tím vyšší, čím vyšší je rychlost otáčení nebo počet zubů na příslušném kotouči. Platí tedy, že vyšší tóny mají vyšší frekvenci a naopak. (Králová, nedatováno)

Souvislost mezi frekvencí a vlnovou délkou tónu popisuje Haluška (2006, str. 101). Frekvenci nazývá akustickou míru času a vlnovou délku akustickou míru prostoru. Dále uvádí, že: *„Vlnová délka a frekvence reprezentují pro hudebníka reciprocitu prostoru a času, bytí a vzniku. Tón existuje v prostoru jako vlnová délka a pohybuje se v čase jako frekvence“* Haluška (2006, str. 101).

V hudební akustice hrají významnou roli také pojmy absolutní a relativní výška tónu. Reichl (©2006–2019*d*) uvádí, že absolutní výšku je možné měřit pomocí přístrojů a udává konkrétní frekvenci daného tónu. Relativní výška tónu je určena poměrem frekvence daného tónu vzhledem ke zvolenému referenčnímu tónu. Na počátku 20. století byl jako referenční tón v hudební akustice ustanoven tón o frekvenci 440 Hz, který odpovídá tónu a_1 – tzv. komorní *a* (Loy, 2006, s. 14). Podle mezinárodní dohody z roku 1953 se mají orchestry a hudební tělesa ladit právě podle komorního *a* (Zenkl, 2003, s. 28).

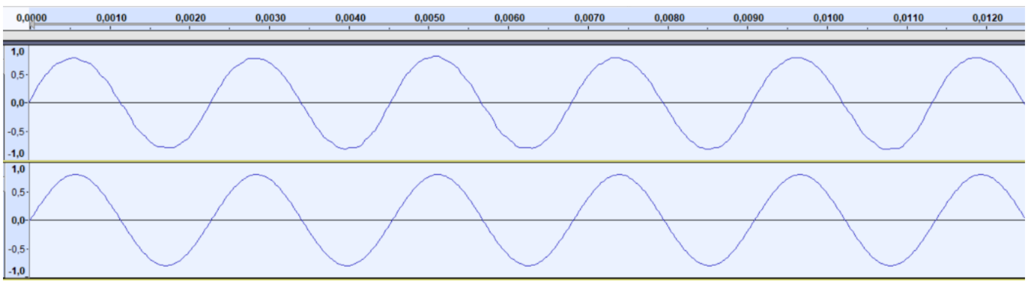
Absolutním sluchem se vyznačují lidé, kteří jsou schopni z poslechu tónu určit, o jaký tón se jedná. Uvádí se, že absolutní sluch má 0,1 ‰ – 1 % populace. Avšak u hudebníků je toto procento mnohem vyšší. Absolutní sluch je podmíněn geneticky a stimuluje se hudebním tréninkem v dětství. (Bártová, 2016, s. 22)

V subjektivním vnímání zvuku je velmi důležitá především relativní výška tónu, tedy schopnost rozeznat vzájemné vztahy tónů a zapamatovat si melodii (Bártová, 2016, s. 19). Výzkumy pražského Ústavu experimentální medicíny prokazují, že mechanismy, kterými vnímáme hudbu, jsou základní výbavou savců (*Port*, 2007).

V rámci této podkapitoly nyní nastíním jednoduchou logickou aplikaci matematiky, prostřednictvím které se dá představit výška tónu daná frekvencí. Jak bylo řečeno, výška tónu závisí na rychlosti kmitání pružného tělesa a prostředí. Čím rychlejší tento pohyb je, tím vyšší tón slyšíme (čím rychleji probíhá pohyb bubínku a kůstek středního ucha, tím vyšší tón slyšíme). Například komorní a^1 má frekvenci 440 Hz. To znamená, že za jednu sekundu dopadne na bubínek 440 vlnek vyššího tlaku vzduchu. Blanka bubínku se vlivem toho rozkmitá a vykoná za jednu sekundu 440x stejný pohyb. Jednoduchou trojčlenkou bychom odvodili, že komorní a^1 má periodu 1/440 s. To znamená, že než bubínek znovu udeří do kladívka, uběhne zhruba 2,3 ms, což je asi 50x rychlejší pohyb než mrknutí lidského oka.

Z uvedeného vyplývá, že pokud známe absolutní výšku tónu, lze prostřednictvím frekvence určit, kolikrát za sekundu byl vykonán kmit zdroje zvuku. Králová (nedatováno) uvádí tuto skutečnost na příkladu z přírody. Chceme-li zjistit, kolikrát za sekundu mávne nějaký hmyz křídly, stačí určit absolutní výšku jeho zvuku křídel. Křídlo v tomto případě funguje jako kmitající membrána vydávající tón určité frekvence. Bylo například zjištěno, že moucha domácí, která při letu vydává tón f_1, vykoná 352 kmitů křídly za sekundu. Včela medonosná letící bez zatížení kmitá křídly 440x za sekundu, což odpovídá komornímu a^1. Pokud je obtížena medem, frekvence kmitů se sníží na 330x za sekundu (tón e^1).

Souvislost výšky tónu s frekvencí velmi pěkně zviditelňují následující obrázky ze záznamu zvuku v programu Audacity, které ukazují harmonický průběh změny akustického tlaku vzduchu jednoduchých tónů různých frekvencí. Je vidět, že dané obrázky přesně korespondují s odvozeným vztahem v kapitole 2.2 (viz *Graf 1*).

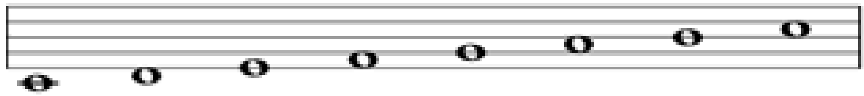


Obrázek 7: Časový průběh zpívané samohlásky „u“ na tónu a^1 (horní řádek).

Tento harmonický průběh však příliš neodpovídá reálným zvukům, které náš sluch vnímá. Zvuk, který je charakterizován tak pěkným předpisem, ve skutečnosti zní velmi nepřirozeně (viz *Ukázka 1* na DVD multimediálních souborů). Tóny, které se náš mozek naučil vnímat jako přirozené, jsou tóny složené z několika sinusoid. O tomto tématu mimo jiné pojednává podkapitola 2.3.2.

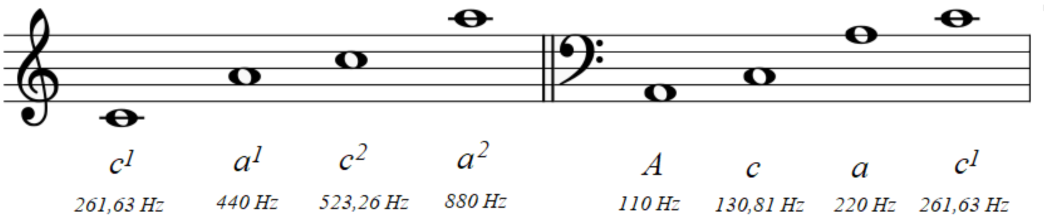
Notový záznam výšky tónu

Výšku tónu zaznamenává poloha noty v notové osnově. Notová osnova sestává z pěti linek a čtyř mezer. Čím výše se nachází daná nota, tím vyšší tón (tedy tón s vyšší frekvencí) označuje. Relativní zápis výšek tónů by vypadal například takto:



Obrázek 8: Relativní zápis výšek některých tónů.

Z předchozího obrázku lze vyčíst jen informaci o tom, který tón má vyšší, a který naopak nižší frekvenci. Absolutní výšku tónu udává klíč. Dnes se užívá čtyř klíčů, které označují polohu noty o přesně určené výšce (houslový, basový, altový a tenorový) (Zenkl, 2003, s. 19). Na obrázku níže jsou zaznamenány čtyři tóny daných frekvencí v rovnoměrně temperovaném ladění v houslovém a basovém klíči. Právě v těchto dvou klíčích se klavíristé učí od útlého věku číst.



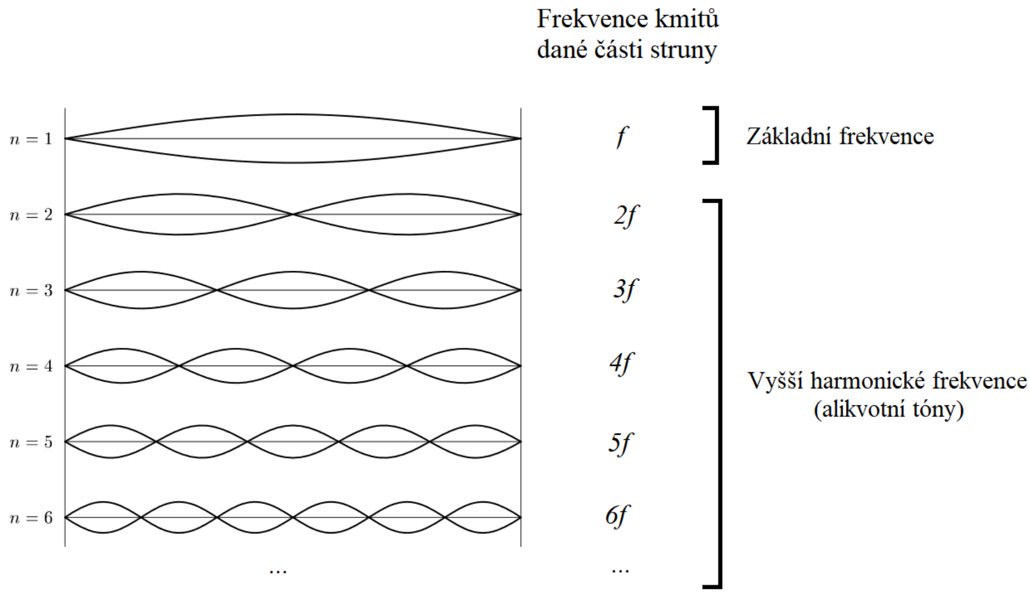
Obrázek 9: Příklady zápisu výšek různých tónů s příslušnými frekvencemi.

2.3.2 Témbr (barva)

Lidský mozek rozliší, zda daný tón hraje klavír, housle nebo jakýkoliv jiný nástroj. Stejně tak rozliší, zda byl stejný tón na housle vytvořen drnknutím prstu o strunu nebo smyčcem. Tuto skutečnost popisuje hudebně-akustický termín barva tónu, vhodněji témbr.

Pokud je lidský mozek schopen témbr různých nástrojů rozlišit, zákonitě je možné fyzikálně analyzovat a matematicky popsat tuto vlastnost tónu. V předchozí kapitole bylo zmíněno, že tóny, které se nám jeví jako přirozené, jsou ve skutečnosti složené z několika dalších tónů, tzv. vyšších harmonických neboli alikvotních tónů. A právě poměr hlasitostí těchto alikvotních tónů vůči základnímu tónu ovlivňuje výsledný témbr zvuku – jedná se o tzv. spektrum frekvencí tónů obsažených v základním tónu. Tóny tedy rozdělujeme na jednoduché, jejichž průběh je popsán harmonickou funkcí (sinusoidou), a na složené, kdy kromě jejich základní frekvence, která určuje výšku tónu, zní zároveň i vyšší harmonické frekvence. Tyto vyšší frekvence jsou celočíselným násobkem základní frekvence a mají většinou menší amplitudu než základní frekvence. Lidské ucho tento vjem zpracuje jako jediný tón charakteristického zabarvení o frekvenci základního tónu. (Haluška, 2006, s, 104, 105; Tyc, 2010)

Vysvětlení vzniku barvy tónu poskytuje opět kmitání struny. Pokud rozezvučíme strunu dané délky, bude kmitat jednak po celé délce, ale také v celočíselných částech této struny kvůli vzniku stojatého vlnění. Struna tak bude kmitat kromě základní frekvence (danou celou délkou struny) i na vyšších harmonických frekvencích, které tvoří celočíselné násobky základní frekvence určené délkou struny. Způsob kmitání struny na vyšších frekvencích se nazývá vibrační módy struny. (Loy, 2006, s. 29, 30)



Obrázek 10: Kmitání struny (vibrační módy struny) (Tyc, 2010; upraveno).

Je vidět, že části kmitající struny tvoří teoreticky nekonečnou posloupnost převrácených hodnot přirozených čísel $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$, přičemž frekvence je popsána aritmetickou řadou $\{n\}_{n=1}^{\infty} = \{1,2,3,4,\dots\}$. Protože výška tónu je popsána harmonickou funkcí, lze na základě odvozeného vztahu kmitavého pohybu obecně popsat složené kmitání struny v módech $n \in \mathbb{N}$ jako řadu:

$$f(t) = y_0 + y_1 \sin(2\pi f + \varphi_1) + y_2 \sin(2\pi f \cdot 2 + \varphi_2) + y_2 \sin(2\pi f \cdot 2 + \varphi_2)$$
$$= y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin(2\pi f \cdot n + \varphi_n)$$

y_0 … stejnosměrná amplituda kmitavého pohybu

y_n … amplituda *n*-té vyšší harmonické frekvence struny

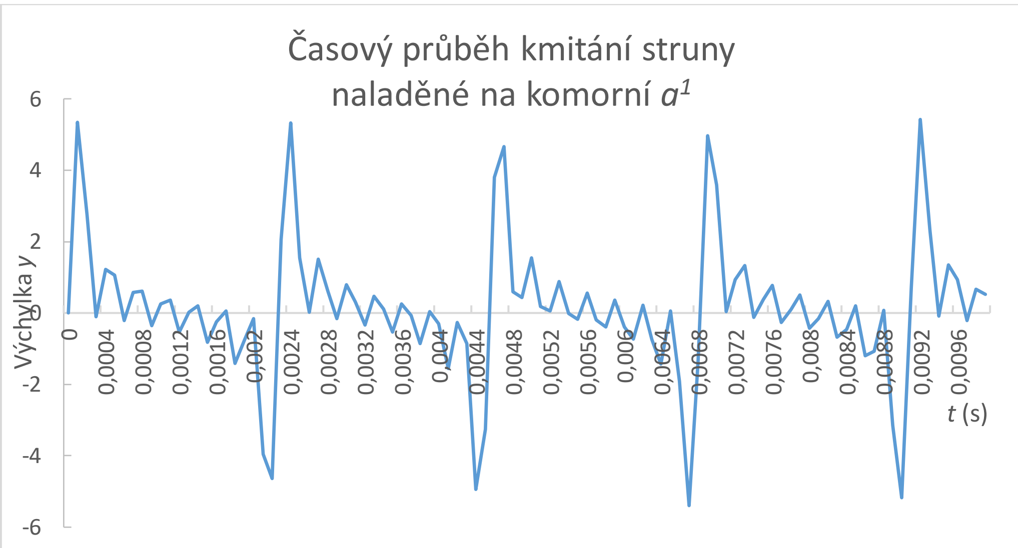
f … základní frekvence kmitání struny (závislá na délce struny)

φ_n … fáze *n*-té vyšší harmonické frekvence struny

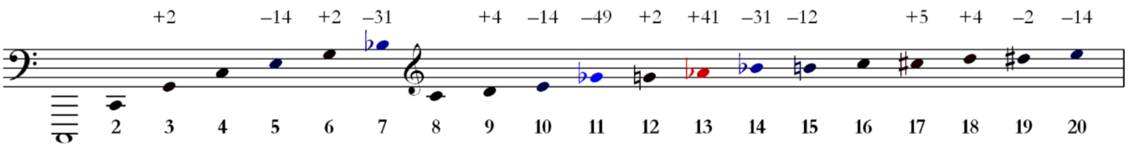
(Krystek, nedatováno, s. 1)

Na základě této řady lze generovat graf časového průběhu kmitání struny naladěné na komorní a^1 = 440 Hz do 7. módu. Pro jednoduchost byla zvolena nulová stejnosměrná amplituda, stejně tak i fáze základní i vyšších harmonických frekvencí a všechny amplitudy alikvotních tónů mají jednotkovou hodnotu.

Graf 2: Kmitání struny do 7. módu



Další příklad popisuje notový záznam alikvotních tónů, které znějí při rozezvučení struny naladěné na tón C_1 do 20. módu. Čísla nad notami popisují odchylku od rovnoměrně temperovaného ladění v centech. Barevné označení not upozorňuje na poměrně velkou odchylku.

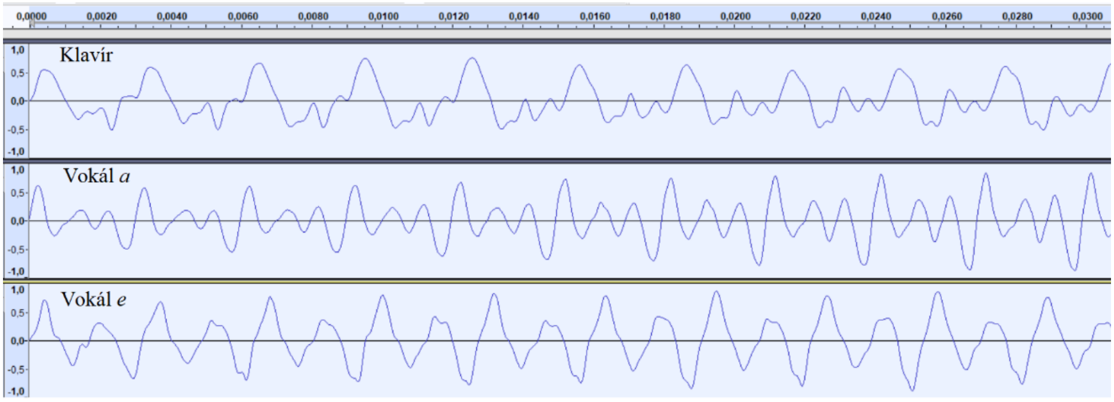


Obrázek 11: Zobrazení alikvotních tónů tónu C_1 v hudební notaci (Wikipedia, 2007).

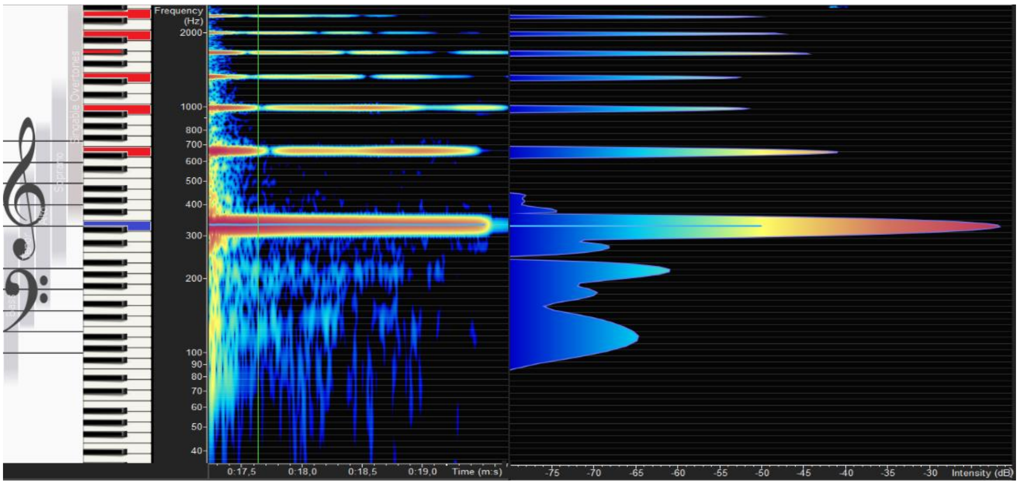
Video, jak zní a vypadá tato posloupnost alikvotních tónů na klavíru, je obsaženo na DVD multimediálních souborů (*Ukázka 2*).

Objev řady vyšších harmonických tónů se připisuje Pythagorovi (Brown, nedatováno).

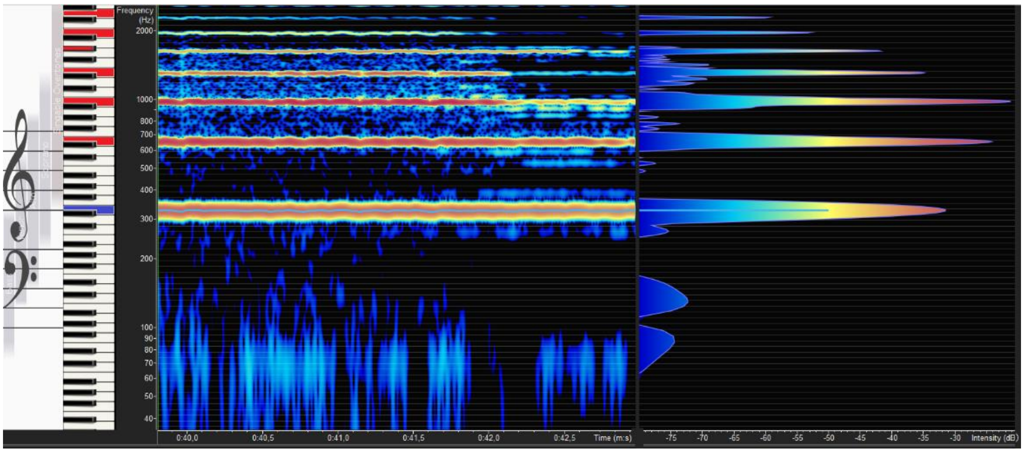
Barva daného tónu závisí na poměru zastoupení jeho alikvotních tónů a jejich hlasitosti. Příklady níže popisují periodický průběh tónu e^1 zahraného na klavír a zazpívané lidským hlasem na samohlásky *a* a *e*. Dále je v programu *Overtone Analyzer* vygenerováno zastoupení alikvotních tónů daných příkladů. Tento program využívá Fourierovy analýzy, která umožňuje rozložit daný tón na tón o základní frekvenci na jeho zastoupení jednotlivých složek alikvotních tónů včetně jejich amplitud.



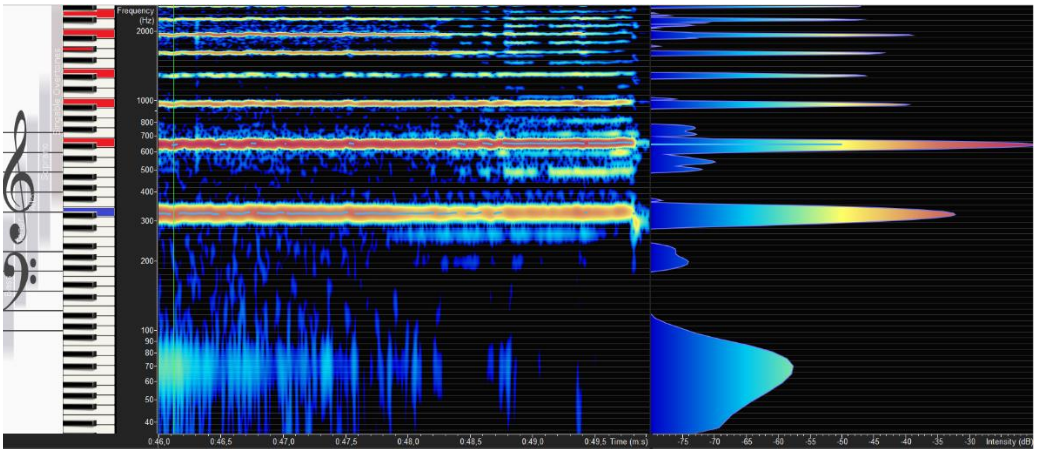
Obrázek 12: Periodický průběh tónu e^1 zahraného na klavír a zazpívaného na různé samohlásky (vokály). Vygenerováno v progamu Audacity.



Obrázek 13: Harmonická analýza – frekvenční spektrum tónu e^1 zahraného na klavír. Základní tón je na klaviatuře vyznačen modře, alikvotní tóny červeně. Vygenerováno v programu Overtone Analyzer.



Obrázek 14: Frekvenční spektrum tónu e^1 zazpívaného na vokál „a“.



Obrázek 15: Frekvenční spektrum tónu e^1 zazpívaného na vokál „e“.

Z obrázků je patrné, že ve všech případech jsou zobrazené alikvotní tóny stejné výšky, ale liší se jejich hlasitost, což ovlivňuje výsledné zabarvení tónu. Pokud by byl vygenerován jednoduchý tón e^1, v programu zobrazující frekvenční spektrum by byla obsažena pouze základní frekvence a nebyl by zobrazen žádný alikvotní tón.

Zastoupení alikvotních tónů daného nástroje přímo ovlivňuje materiál a konstrukce daného nástroje. Tyto vlastnosti nástroje pak také rozšiřují posloupnost slyšitelných alikvotních tónů, nebo ji naopak ohraničuje a činí konečnou. Dokonce umožňuje některé alikvoty eliminovat úplně (např. uzavření flétny „zlikviduje“ polovinu všech alikvotů). Dále je frekvenční spektrum tónu ovlivněno způsobem hry, tedy jak tón začne a jak skončí. Zde leží jedna z příčin rozdílnosti hry profesionála a amatéra na tentýž hudební nástroj. (Haluška, 2006, s. 104, 105)

2.3.3 Síla

V hudbě je síla zvuku označena pojmem dynamika. V notovém partu pro klavír se zaznamenává mezi notovou osnovu pro pravou a levou ruku. Následující tabulka popisuje hudební terminologii základních dynamických označení.

Tabulka 1: Přehled základních dynamických označení (dle Zenkla, 2003, s. 42)

Pianississimo	*ppp*	Co nejtišeji
Pianissimo	*pp*	Velmi potichu
Piano	*p*	Potichu
Mezzopiano	*mp*	Středně potichu
Mezzoforte	*mf*	Středně silně
Forte	*f*	Silně
Fortissimo	*ff*	Velmi silně
Fortississimo	*fff*	Co nejsilněji
Crescendo	$<$	Zesilovat
Decrescendo	$>$	Zeslabovat

Pozn.: Skladatelé serialismu a multiserialismu používali matematické principy i v rovině dynamiky skladby. Sami si vytvářeli i „jemnější dynamické síto“, přičemž používali i označení pěti *p* či *f*.

Možnost zesílit tón závisí na konstrukci nástroje – například na cembale ovlivnit hlasitost tónu nelze, na klavíru lze vytvořit zesílení postupně, ale nelze ovlivnit sílu již zahraného tónu. U houslí naopak lze měnit hlasitost právě znějícího tónu. (Haluška, 2006, s. 102)

Pokusy na monochordu ukazují, že síla zvuku souvisí s mírou toho, jak moc je struna vychýlena z rovnovážné polohy, tedy s amplitudou vibrací struny (Haluška, 2006, s. 101). Čím je rozkmit struny větší, tím silněji zní tón. V řeči vlnění souvisí síla zvuku s výchylkou změn tlaku vzduchu. Čím větší je periodické stlačování vzduchu (respektive pružného prostředí), tím více se bubínek rozkmitává a zvuk je hlasitější (*ELUC*, nedatováno).

Síla zvuku je subjektivní veličina a závisí na citlivosti sluchu. Citlivost lidského sluchu pro rozlišování síly jednotlivých tónů je závislá na výškové poloze. Zenkl (2003, s. 117) například uvádí, že lidský sluch u tónu s frekvencí tónu v nejnižší poloze (kolem

32 Hz) rozeznává 3 dynamické stupně, v nejvyšší poloze (kolem 16 kHz) rozeznává přibližně 16 dynamických stupňů a ve frekvenčním intervalu od 700 Hz do 6 000 Hz rozeznává 200 až 300 různých stupňů síly zvuku. Lidský sluch tedy vnímá sílu zvuku nejcitlivěji v rozmezí 700 až 6000 Hz (Reichl, ©2006–2019*b*).

Pro objektivní hodnocení síly zvuku se zavádí fyzikální pojmy akustický tlak, intenzita zvuku, akustický výkon a hladina akustického výkonu. V této diplomové práci objasním pouze některé z nich. Intenzita zvuku I je dána podílem změny akustického výkonu P zvukového vlnění a změny plochy S, kterou vlnění prochází. Platí tedy:

$$I = \frac{\Delta P}{\Delta S}$$

Jednotkou intenzity zvuku je Wm^{-2} (watt na metr čtvereční). Protože lidský sluch má největší citlivost síly zvuku při frekvencích v rozmezí 700–6000 Hz, zavádí se dvě hranice intenzity zvuku, a to práh slyšitelnosti s intenzitou $I_0 = 10^{-12}\ Wm^{-2}$ a práh bolesti o intenzitě 1 Wm^{-2}. Zvuky s vyšší intenzitou mohou v uchu vyvolat bolestivý pocit. Poměr nejvyšší a nejmenší intenzity zvuku je 10^{12}. Pokud bychom tedy chtěli rozsah prahových intenzit zobrazit v grafu, museli bychom souřadnicovou osu rozdělit na 10^{12} dílů. Proto se zavádí pojem hladina intenzity (hlasitost) zvuku L pomocí logaritmu poměru intenzity zvuku daného tónu a intenzity prahu slyšitelnosti. Jednotkou hladiny intenzity zvuku je bel (B), v praxi se užívá decibel (dB), protože rozlišovací schopnost lidského sluchu je řádově právě 1 dB. Vzorec níže je vyjádřením hlasitosti zvuku měřenou v decibelech. (Reichl, ©2006–2019*b*)

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Hlasitost prahu slyšitelnosti tedy odpovídá 0 dB, hranice prahu bolesti 120 dB. Například ticho na venkově odpovídá hlasitosti 10 dB, tlumený hovor 40 dB, hluk motorových vozidel 90 dB (Reichl, ©2006–2019*b*). Zenkl (2003, s. 118, 119) uvádí, že při hře na hudební nástroje nebo při zpěvu odpovídá pianissimo 40–50 dB, fortissimo 80–100 dB. Ticho v koncertní síni s posluchači, kteří jsou soustředěni na poslech hudby, odpovídá hladině 40 dB, orchestr v dynamických vrcholech často přesahuje hodnot u 100 dB. Následující tabulka ukazuje hlasitost zvuku některých hudebních nástrojů nebo zpěvu v dynamice pianissima a fortissimo.

Tabulka 2: Hlasitost vybraných hudebních nástrojů (dle Zenkla, 2003, s. 118)

Zdroj zvuku	Vzdálenost od mikrofonu	*pp*	*ff*
Klavír	10 m	52 dB	87 dB
Housle	6,5 m	47 dB	79 dB
Cembalo	4 m	58 dB	71 dB
Trubka	14 m	69 dB	88 dB
Soprán	6 m	62 dB	85 dB
Bas	6 m	58 dB	84 dB

Zajímavé je, že pokud na přijímač zvukového signálu (mikrofon, ucho, …) dopadá několik zvukových vln různých hlasitostí, výsledná hlasitost zvuku nebude dána součtem jednotlivých hlasitostí těchto zvukových vln, ale součtu jejich intenzit, které určovaly danou zvukovou vlnu. Pro výslednou hlasitost zvuku *n* zvuků s intenzitami I_1, I_2, …, I_n tedy platí:

$$L = 10 \log \sum_{i=1}^{n} \frac{I_i}{I_0}$$

(Reichl, ©2006–2019*b*)

Například pokud by snímal mikrofon dva klavíry, z nichž každý hraje fortissimo ze vzdálenosti 10 m (přičemž hladina pianissima jednoho klavíru by odpovídala podle tabulky 87 dB), výsledná intenzita dvou klavírů se vypočítá podle daných vzorců následujícím způsobem:

$$L_1 = L_2 = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

$$87 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \to I = 10^{8,7} \cdot 10^{-12} = 10^{-3,3} = \sqrt[10]{10^{-33}}\ \mathrm{Wm^{-2}}$$

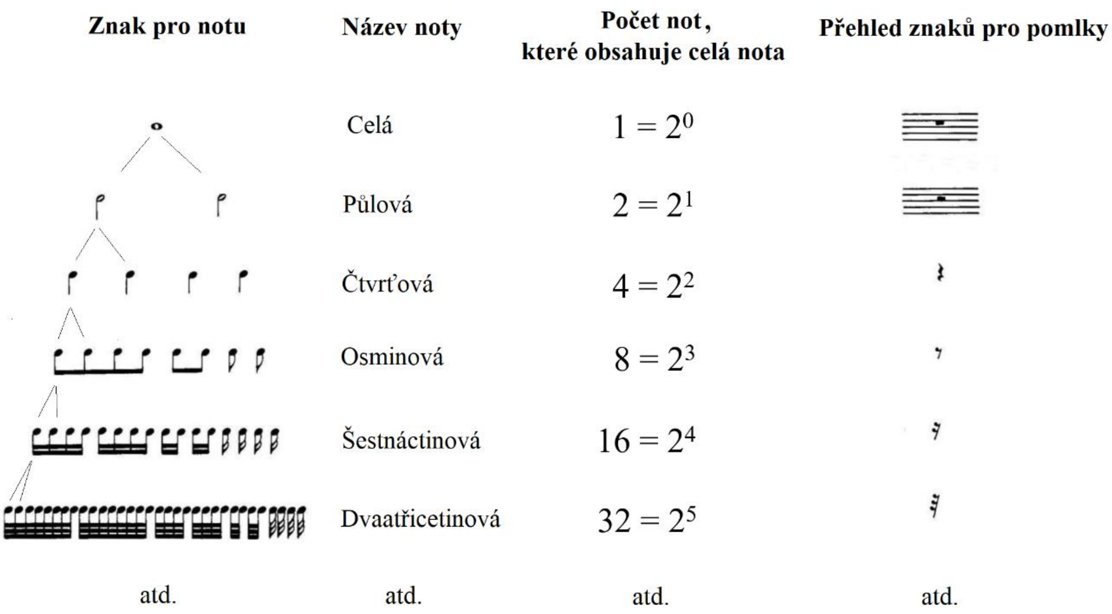
$$L = 10 \log \frac{2I}{I_0}$$

$$L = 10 \log \frac{2 \cdot 10^{-3,3}}{10^{-12}} \doteq 90\ \mathrm{dB}$$

Je vidět, že výsledná hlasitost dvou klavírů hrajících forte o hladině intenzity 87 dB by se zvýšila pouze o 3 dB.

2.3.4 Délka

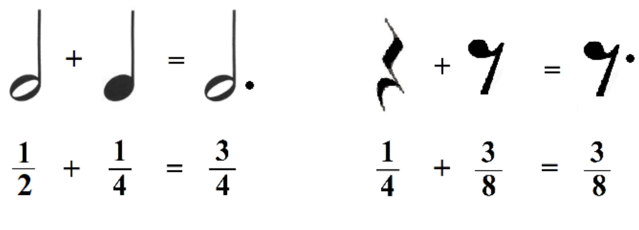
Doba trvání kmitů pružného prostředí určuje délku tónu. Tuto dobu lze rozdělit na kratší pravidelné časové úseky – doby. Doby můžeme dobře reprezentovat například pravidelným dupáním. Relativní délku tónu pak určuje počet těchto dob. Hudbu stejně dobře jako zvuk utváří i ticho. Ticho se v hudebním partu zaznačuje pomocí pomlk. Následující obrázek udává přehled hodnot relativních délek not a pomlk.



Obrázek 16: Přehled názvů not a pomlk a jejich hodnot relativních délek.

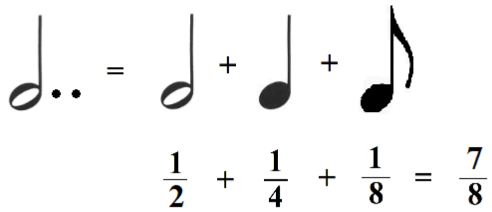
Dané názvy not (pomlk) lze vyjádřit příslušným zlomkem – celá nota by odpovídala zlomku $\frac{1}{1}$, půlová $\frac{1}{2}$, čtvrťová $\frac{1}{4}$ apod.

Tečka za příslušnou notou nebo pomlkou prodlužuje dobu trvání tónu (ticha) o polovinu hodnoty daného tónu (ticha).



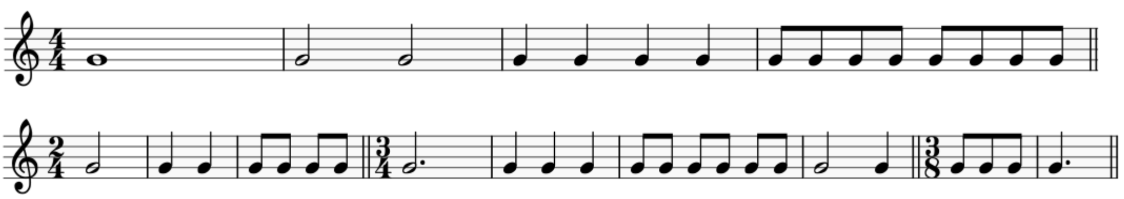
Obrázek 17: Význam tečky za notou (pomlkou). Zlomek níže udává druh noty (pomlky).

Dvě tečky za notou pak prodlužují notu následujícím způsobem:



Obrázek 18: Funkce dvojité tečky za notou.

Propojení hudby a matematiky začíná již na samém počátku skladby – rytmem. Rytmus je základním stavebním kamenem hudby, stejně jako je číslo základním stavebním prvkem matematiky (Garland a Kahn, 1994, s. 6). Skladby velkých umělců zní krásně nejen kvůli harmoniím a melodiím, které jsou v nich obsaženy, ale také proto, že obsahují řád v podobě pravidelného členění času. Krátké hudební úseky se nazývají takty a v notaci se zapisují pomocí kolmých čar k linkám notové osnovy. Takty slouží k oddělení přízvučných (těžkých) a nepřízvučných (lehkých) dob (Zenkl, 2003, s. 28). V každém taktu je přesně určený počet dob, které každý takt musí obsahovat. Počet dob o dané hodnotě udává taktové označení. Wright (2009, s. 22) taktové označení vyjadřuje matematicky jako dvě čísla nad sebou ve tvaru $\frac{n}{r}$, kde číslo $n \in \mathbb{N}$ udává počet dob a číslo $r \in \{2^n\}_{n=0}^{\infty}$ udává v převrácené hodnotě druh doby v jednom taktu (čtvrťová, půlová, osminová, …). Například čtyřčtvrťový takt znamená, že v jednom taktu musí být právě čtyři čtvrťové doby (ani více, ani méně). Součet daných dob ve zlomcích tedy musí být roven jedné (jednomu celku).



Obrázek 19: Příklady taktových označení a druhů not v daném taktu (čtyřčtvrťový, dvoučtvrťový, tříčtvrťový, tříosminový).

Dané uskupení čísel $\frac{n}{r}$ se chová stejně jako zlomek (viz *Obrázek 20*) (Garland a Kahn, 1994, s. 10). Tuto vlastnost využívám v praktické části této diplomové práce.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{16}+\frac{1}{8}=\frac{4}{4}=\frac{1}{1}\qquad\qquad \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=\frac{4}{4}=\frac{1}{1}$$

Obrázek 20: Sčítání daných hodnot relativních délek not v taktu. Je vidět, že jde o jednoduché sčítání zlomků.

Absolutní délka tónu je definována prostřednictvím tempového označení a zapisuje se na začátek skladby nad notovou osnovu (Loy, 2006, s. 26). Např. *allegro* (rychle), *moderato* (mírně rychle), *lento* (pomalu) apod. Pomocí metronomu pak můžeme určit dané tempo (Loy, 2006, s. 26). Pokud je tempové označení udáno pomocí noty dané hodnoty (nejčastěji půlová, čtvrťová nebo osminová) a čísla, toto číslo udává počet úderů dob dané hodnoty za minutu. Například ♪ = 120 znamená, že jedna osminová nota trvá 0,5 s. Toto označení však nelze brát jako dogma. V praxi se jedná o přibližné tempo, které si každý interpret upraví podle svých preferencí a možností. Kromě toho vkládá interpret do skladby i své city, které může vyjádřit zpomalením (*ritardando*) či zrychlením (*accelerando*) v rámci určitého úseku skladby či nepravidelným uvolněným tempem (*rubato*) (Loy, 2006, s. 26).

3. HUDBA OČIMA MATEMATIKY

Odpověď na otázku, zda vědecké bádání mělo nebo má dopad na hudbu, je podle Halušky (2006, s. 277, 278) jasná. Uvádí, že vliv vědy na rozvoj hudby byl vždy velmi značný, v současné době je obrovský. Dále shrnuje, že antické a středověké evropské hudební akustice dal základy Pythagoras a jeho škola. Za postupnou reformou k „nové“ akustice stáli Marin Mersenne (1588–1648), Andreas Werckmeister (1645–1706), Jean Philippe Rameau (1683–1764), Hermann von Helmholtz (1821–1894) a mnoho dalších. Teorií tónových systémů se také vědecky zabývala spousta slavných hudebníků, o kterých již byla zmínka (Hindemith, Hába, Schönberg, Xenakis aj.). Dodává, že současná informatika různými směry rozpracovává teorie tónových systémů. S tímto tvrzením nelze jinak než souhlasit.

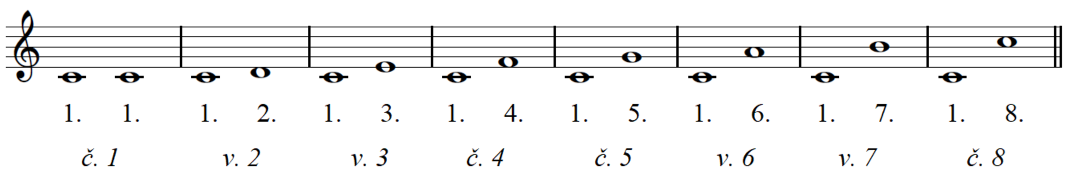
V této kapitole uvedu významné matematické disciplíny, které souvisí s hudební teorií a o které se budou opírat v praktické části této diplomové práce.

3.1 Vzdálenost v hudbě – intervaly

Interval v hudbě znamená rozdíl ve výšce dvou tónů neboli vzdálenost dvou tónů (Loy, 2006, s. 14). Například tón *e* je od tónu *g* vzdálen o tercii, tón *c* od tónu *g* o kvintu apod. Intervaly dělíme z různých hledisek. Pro účel této diplomové práce postačí, když objasním pojem intervalů základních a odvozených.

Základních intervalů je 8. Názvy těchto intervalů kopírují názvy ročníků osmiletých gymnázií – prima, sekunda, tercie, kvarta, kvinta, sexta, septima a oktáva. Základní intervaly nacházíme na klaviatuře nejjednodušeji v rámci stupnice *C* dur (Zenkl, 2003, s. 81), tedy na bílých klávesách. V této stupnici při zvolení počátečního (prvního) tónů *c* je prima vzdálenost prvního tónu od prvního, tj. *c–c*, sekunda je vzdálenost od prvního tónu ke druhému, tj. *c–d*, tercie od prvního ke třetímu, tedy *c–e* apod.

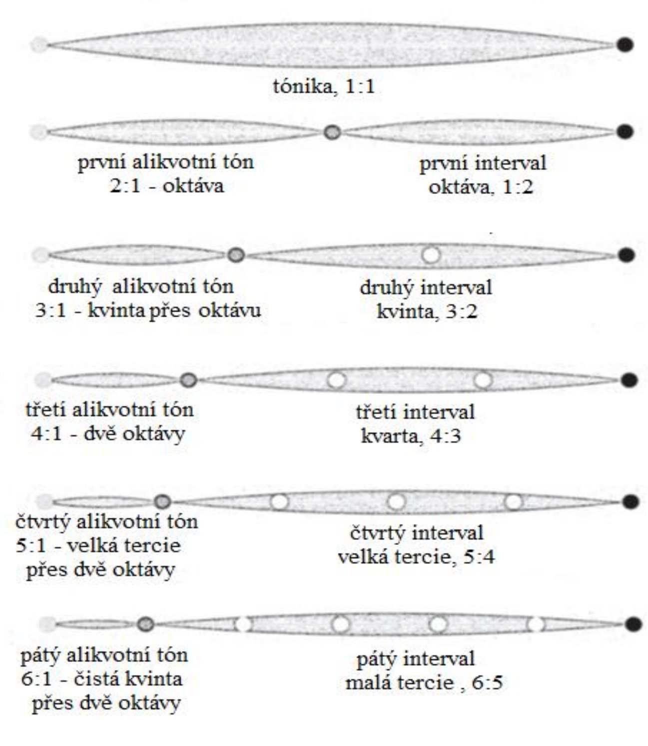
Základní intervaly se dále dělí na velké (označujeme v.) a čisté (označujeme č.) (Zenkl, 2003, s. 81). Tato přídavná jména pak určují tzv. jakost intervalů. Mezi intervaly čisté řadíme primu, kvartu, kvintu a oktávu, mezi intervaly velké pak sekundu, tercii, sextu a septimu. Intervaly velké a čisté nalezneme nejlépe opět na příkladu stupnice *C* dur.



Obrázek 21: Přehled velkých a čistých intervalů ve stupnici C dur. Čísla pod notami označují pořadí tónů ve stupnici C dur, kurzívou jsou pak značeny jakosti příslušných intervalů.

Mezi odvozené intervaly řadíme malé, zvětšené, zmenšené, dvojzvětšené a dvojzmenšené (Zenkl, 2003, s. 80). Tyto jakosti intervalů vzniknou ze základních zvýšením/snížením intervalu o příslušný počet půltónů. Půltón je nejmenší vzdálenost mezi dvěma tóny daná nejmenším zřetelně slyšitelným poměrem výšek tónů, které sluch běžného posluchače může zachytit. Celý tón pak tvoří dva půltóny. Zenkl (2003, s. 80) dále rozděluje případy, kdy z intervalů velkých lze snížením o jeden půltón vytvořit intervaly malé, zvýšením pak intervaly zvětšené, z intervalů čistých lze zvýšením nebo snížením o jeden půltón vytvořit intervaly zvětšené nebo zmenšené. Dále uvádí, že z intervalů velkých i malých lze vytvořit intervaly dvojzvětšené i dvojzmenšené.

Intervaly dvou tónů jsou charakterizovány jejich frekvenčním poměrem. Poměry frekvencí intervalů čistých lze vyjádřit poměrem čísel základní harmonické řady (Obdržálek, 2003, s. 2).



Obrázek 22: Prvních šest módů struny – jak souvisí intervaly s alikvotními tóny (Ashton, 2015, s. 9).

V průběhu dějin hudby se tento poměr měnil podle druhu ladění. Následující kapitoly popisují dva druhy ladění, ve kterých jsou srovnány frekvenční poměry daných intervalů.

3.2 Jak zní poměr – pythagorejské ladění

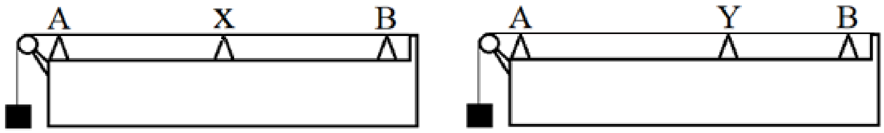
Hudbu vytváří tóny různých frekvencí. Aby souzvuk či posloupnost daných tónů „lahodily uchu", musí spektrum těchto frekvencí zachovávat nějaký řád. Při poslechu dvou tónů se náš mozek naučil vnímat souzvuky konsonantní (libozvučné) a disonantní (nelibozvučné). Již antičtí Řekové věděli, že konsonantní souzvuky tvoří tóny, jimž odpovídající délky struny na monochordu jsou v poměru malých přirozených čísel. Na přelomu 16. a 17. století Galileo Galilei vysvětluje konsonanci jako souzvuk tónů, jejichž frekvence jsou v poměru malých přirozených čísel (Benson, 2013, s. 149). Vytvořit řadu tónů, která se stane východiskem pro „hudbu sfér s léčivými účinky", se podařilo Pythagorovi. Ve starověkém Řecku totiž byla hudba považována za léčivý prostředek, a tento atribut jí byl připisován až do až do 15. století (Marek, 2000).

Čaloud (nedatováno) uvádí, že samotný důvod pro zavedení ladění nástrojů byla situace, kdy lidé začali užívat melodických hudebních nástrojů ke hře vícehlasů. Hra souzvuků těchto nástrojů zněla konsonantně jen v rámci malé škály tónů (jedné oktávy). Pokud hráči chtěli zvětšit rozsah hry daných nástrojů, museli použít jiné nástroje nebo dané nástroje přeladit. Nejstarší ladění, které se vypořádalo s tímto problémem, bylo ladění Pythagorovo (Fauvel, Flood a Wilson, 2003, s. 14).

O Pythagorovi se v mnoha spisech traduje, že jednou procházel kolem kováře a zaposlouchal se do zvuku, které vydávala různá kladiva bijící o kovadlinu. Pythagoras pak prý zjistil, že tóny, které kladiva při úderu vydávala, byly v přímém poměru s velikostí a hmotností kladiv. Přišel také na to, že pokud mělo kladivo poloviční hmotnost než druhé, vydávalo o oktávu vyšší tón. (Fauvel, Flood a Wilson, 2003, s. 14)

V antickém Řecku slovo „oktáva" nahrazovalo slovo „diapazón" (v překladu znamená „přes všechno") (Haluška, 2006 s. 59). Tón, který je vzdálen o oktávu výš od jiného tónu, má dvojnásobnou frekvenci. To znamená, že zdroj takového tónu kmitá dvakrát rychleji.

Pythagorovo ladění vzniklo na základě pokusů s monochordem. Pythagoras zkonstruoval celou stupnici tónů (nejdříve pětitónovou, pak sedmitónovou) na základě aplikace pouhých dvou poměrů délky celé struny ku její části. Jedná se o poměry (tedy racionální čísla) 2:1 a 3:2, přičemž poměr 2:1 reprezentuje čistou oktávu a poměr 3:2 čistou kvintu. Jedná se o nejvíce konsonantní poměry frekvencí dvou tónů. (Benson, 2013, s. 162; Fauvel, Flood a Wilson, 2003, s. 14)



Obrázek 23: Princip dělení struny délky |AB| na monochordu v poměru 2:1 = |AB|:|AX| a 3:2 = |AB|:|AY|. Pokud by struna délky |AB| byla naladěna na c, drnknutí o strunu AX by odpovídalo tónu c^1 a o strunu AY tónu g. Stejný princip tvoření tónů užívají hráči na strunné nástroje tím, že do daných míst (X, Y, …) umísťují prsty a rozezvučí příslušnou část struny.

Další tóny, které odpovídaly poloze prostředního klínu, Pythagoras vytvořil násobným vršením kvint a jejich přesunutím o oktávu níž/výš (dělením/násobením dvěma) (Fauvel, Flood a Wilson, 2003, s. 15). Například prodloužením délky struny *AB* o velikost |*AX*| by vznikla struna s poměrem délek 3:2 ku struně délky |*AB*|. Daná struna by tedy zněla o kvintu níže. Protože je délka této struny větší než délka struny *AB*, jejím zkrácením o polovinu bude znít tento tón o oktávu výš. Polohu hrotu *Z* lze pak jednoduše určit jako (3:2):2 = 3:4, bude se tedy nacházet ve $\frac{3}{4}$ struny *AB*. Poměr délek struny |*AB*|:|*AZ*| je tedy 4:3. Daný tón vytvořený drnknutím o strunu *AZ* tvoří interval čisté kvarty od původního tónu, na který je naladěna struna *AB*. Při ladění této struny na tón c^1 by tento poměr odpovídal tónu *f*. Analogickým způsobem byla vytvořena celá řada dnešní diatonické durové stupnice (v uvedeném příkladu ladění by tedy šlo o tóny *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *a*, *h*, c^1).

Tytéž zlomky označují i frekvence takto vytvořených tónů vůči základnímu tónu (naladěným na délku struny *AB*). Matematicky by tedy generování celé stupnice pythagorejského ladění obsahovalo pouze mocnění poměru 3:2 (vrstvení kvint) a dělení/násobení *n*-té mocniny poměrem (2:1) (snížení/zvýšení o *n* oktáv). Například postup pro frekvenční poměr tónu vytvořeného navrstvením tří kvint nad sebe a posunutým o jednu oktávu níž by vypadal $(3:2)^3:(2:1) = 27:16$ – interval velké sexty (ladění struny *AB* na tón *c* by daný frekvenční poměr odpovídal tónu *a*). Navrstvením čtyř kvint nad sebe a přesunutím o dvě oktávy níž pak $(3:2)^4:(2:1)^2 = 81:64$ – interval velké tercie (tón *e*) atd. Následující frekvenční poměry popisují tóny diatonické stupnice *C* dur v pythagorejském ladění.

Tabulka 3: Frekvenční poměry daných tónů diatonické stupnice C dur vůči tónu c v pythagorejském ladění (dle publikace Fauvel, Flood a Wilson, 2003, s. 16)

Interval	*prima*	*sekunda*	*tercie*	*kvarta*	*kvinta*	*sexta*	*septima*	*oktáva*
Název noty	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*	c^1
Frekvenční poměr	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1

Pozn: Jakosti intervalů kopírují intervaly v durové stupnici – jedná se tedy o čisté a velké intervaly.

Pokud bychom podobně generovali frekvence dalších tónů, jejichž rozdíly jsou jasně zaznamenatelné běžným lidským sluchem, tato řada by se rozšířila o další tóny. Při vrstvení kvint nahoru by vznikla dvanáctitónová řada. Stejně tak při vrstvení kvint dolů. Jak ukáže další odstavec, tyto dvanáctitónové řady by však nebyly identické.

Haluška (2006, s. 252) uvádí, že pythagorejské ladění v melodických ohledech v rámci jedné oktávy velmi dobře splňuje svou funkci. Avšak tóny vzniklé postupným vrstvením kvint v obou směrech se nikdy nestřetnou s oktávou, protože 12 kvint je „o trochu více“ než 7 oktáv. Matematicky je jednoduché tuto větu dokázat:

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{\left(\frac{2}{1}\right)^{7}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = 1{,}01364326477\ \dots$$

Tato hodnota frekvenčního podílu se nazývá pythagorejské komma (Haluška, 2006, s. 252).

Je vidět, že frekvence tónů pythagorejského ladění se dá reprezentovat racionálními čísly. Konkrétní frekvence tónů diatonické stupnice *C* dur lze tedy určit prostým násobením těmito racionálními čísly pomocí jediného tónu, u kterého známe absolutní výšku. Mějme tedy tón a^1 o frekvenci 440 Hz. Frekvence tónů zaokrouhlené na dvě desetinná místa uvádí následující tabulka.

Tabulka 4: Absolutní výšky (frekvence) tónů stupnice C dur v pythagorejském ladění

Název noty	c^1	d^1	e^1	f^1	g^1	a^1	h^1	c^2
Frekvence v Hz	260,74	293,33	330	347,65	391,11	440	495	521,48

Marek (nedatováno) píše, že pro Pythagorovy učence byla hudba byla matematikou a vesmír byl hudbou. O tom také svědčí Pythagorův citát, kterým uzavřu tuto podkapitolu: *„V bzučení strun je geometrie. Mezi sférami světů zní hudba. Studuj zákony monochordu.“*

3.3 Jak zní geometrická posloupnost – temperované ladění

Problém pythagorejského ladění a dalších přirozených ladění nastává u transpozic skladeb – tedy přesunu celé skladby o určitý počet tónů výš nebo níž. Protože tvoření tónů pomocí vrstvení kvint s sebou nese úskalí pythagorejského komatu, transpozice dané písně by zněla rozladěně. Tato skutečnost upozorňovala na potřebu nového ladění, které by tento problém eliminoval.

V 16. a 17. století se ve střední Evropě rozmohla ladění temperovaná, která mechanicky dělí oktávu či jiný interval rovnoměrně tak, aby čisté intervaly byly co nejlépe zachovány. Nejvýznamnější z temperovaných ladění je ladění rovnoměrně temperované ladění. Rovnoměrně temperované ladění rozděluje oktávu na 12 stejných, tzv. temperovaných půltónů. (Obdržálek, 2003, s. 5)

Rozdělit oktávu na 12 stejných půltónů jinými slovy znamená oktávu rovnoměrně rozdělit na takových 13 různých tónů, kde poměry každých dvou sousedních tónů jsou stejné. Zvolme např. oktávu a^1–a^2 (tyto tóny tvoří první a poslední (13.) tón dané oktávy). Frekvenční poměr těchto tónů je popořadě 440:880 = 1:2. Mezi dané tóny tedy musíme nějakých způsobem „vměstnat“ dalších 11 tónů. Frekvence těchto tónů vytvoří posloupnost {440 Hz, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, 880 Hz} kterou charakterizuje vlastnost $x_2:440 = x_3:x_2 = x_4:x_3 = \ldots = 880:x_{12}$, obecně tedy $x_{n+1}:x_n = q$, kde n je kladné číslo určující pořadí prvku v posloupnosti a q vyjadřuje poměr dvou sousedních členů. Matematicky se tedy o geometrickou posloupnost $\{a_n\}$, jejíž poslední člen lze vyjádřit podle rekurentního vzorce pro n-tý člen posloupnosti $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Po dosazení $a_{13} = 880$, $a_1 = 440$ nalezneme koeficient q řešením rovnice:

$$880 = 440 \cdot q^{12}$$
$$2 = q^{12}$$

Protože frekvence nabývá pouze kladných hodnot, je číslo q kladné, a tak lze předchozí rovnici upravit na stejný základ:

$$2^1 = \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{12},$$

odkud tedy $q = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}05946309436$. Dá se dokázat, že dané číslo je iracionální. Toto číslo potom generuje celou množinu tónů temperovaného ladění prostým dosazením počtu půltónů $n \geq 0$ od referenčního tónů (např. a^1 = 440 Hz) do rekurentního vzorce pro danou geometrickou posloupnost

$$a_{n+1} = a_1 \cdot 2^{\frac{n}{12}} \qquad \spadesuit$$

Pozn.: Pokud budeme rozlišovat i „zvýšení“ o daný počet půltónů či „snížení“ o daný počet půltónů, stačí si za *n* dosadit celé číslo, jehož znaménko rozliší tyto dvě možnosti.

Následující tabulka udává frekvenci rovnoměrně temperovaných tónů stupnice *C* dur (zaokrouhlenou na dvě desetinná místa), která vznikla dosazením daného počtu půltónů od referenčního tónu a^1 = 440 Hz pomocí rekurentního vzorce ♠.

Tabulka 5: Frekvence tónů stupnice C dur v rovnoměrně temperovaném ladění

Název noty	c^1	d^1	e^1	f^1	g^1	a^1	h^1	c^2
Frekvence v Hz	261,63	293,66	329,63	349,23	391,00	440	493,88	523,25

V porovnání s *Tabulkou 4* je vidět, že temperovaná kvarta zní o trochu výš než čistá kvarta a temperovaná kvinta o trochu níž než čistá kvinta. Z téže tabulky lze prostým vydělením dvou sousedních čísel zjistit, že je frekvenční poměr pythagorejského půltónu roven racionálnímu číslu $\frac{256}{243} \approx 1.05349794$. Je vidět, že frekvenční poměr rovnoměrně temperovaného půltónu a pythagorejského půltónu se liší až na místě tisícin. I takto malý rozdíl stačí k tomu, aby vyvolal tak velké „hudební schizma“, že od 17. století umožní hudebníkům transpozice do všech tónin, všech oktáv, zapříčiní reformu v ladění nástrojů (zejména klavíru) a inspiroval J. S. Bacha, aby v roce 1721 napsal dvoudílnou sbírku preludií a fug *Das Wohletemperierte Klavier* (*Dobře temperovaný klavír*), která obsahuje preludia a fugy psané ve všech durových i mollových tóninách rovnoměrně temperovaného ladění klavíru. A právě rovnoměrně temperované klavíru a jeho uspořádání klaviatury otvírá brány spoustě matematizací, které jdou velmi pěkně znázornit na klaviatuře (viz praktická část této diplomové práce).

3.4 Fibonacciho posloupnost poprvé

Mezi další zajímavá spojení matematiky a hudby patří neodmyslitelně Fibonacciho posloupnost. Leonardo Pisánský zvaný Fibonacci byl italský matematik žijící na přelomu 12. a 13. století, který je známý mimo jiné tím, že v Evropě významně podpořil používání arabských číslic (O'Connor a Robertson, 1998). Také jako první sepsal jedinečnou posloupnost čísel, která souvisí s matematickou otázkou hypotetického množení králíků (přeloženo z O'Connor a Robertson, 1998):

„Jistý člověk dal do výběhu ohraničeného zídkou pár mladých králíků. Kolik párů králíků bude v ohradě za rok, pokud předpokládáme, že každý měsíc porodí králíci nový pár, který je po dvou měsících svého života také produktivní?"

Řešení uvádí následující tabulka (dle Nocar, 2008, s. 5).

Tabulka 6: Množení králíků v daných měsících – Fibonacciho posloupnost

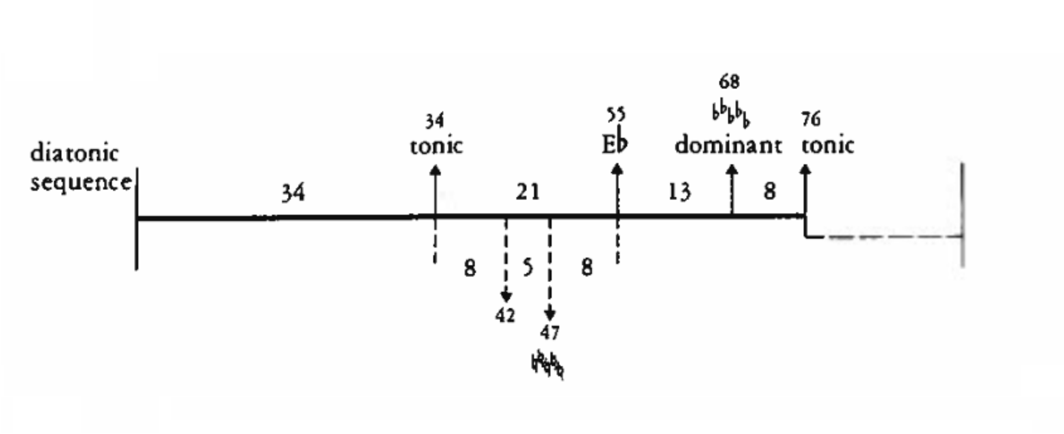
Počet párů v měsíci	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
Dospělí	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Mláďata	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
Celkem	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**	**89**	**144**

Z posledního řádku je patrné, že každý následující člen této posloupnosti je součtem dvou předchozích členů. Ačkoliv byl původcem této posloupnosti právě Fibonacci, jeho jméno nesla tato posloupnost až o několik století později (O'Connor a Robertson, 1998).

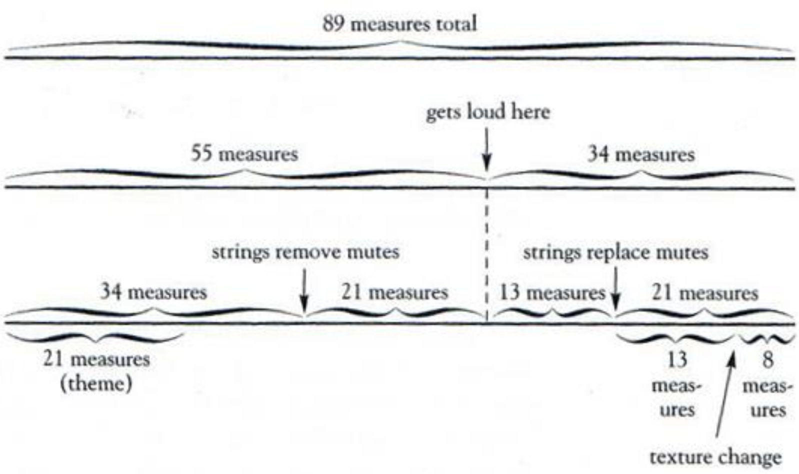
Definice: *Fibonacciho posloupnost je posloupnost* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ *přirozených čísel splňující rekurentní formuli* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *s počáteční podmínkou* $F_1 = F_2 = 1$. *Jejími prvními členy jsou 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...*

Prvky F_n posloupnosti se nazývají Fibonacciho čísla. Fibonacciho posloupnost nachází kromě matematiky uplatnění také v mnoha dalších oblastech, jako je například botanika, zoologie, filozofie, poetika, astronomie, výtvarné umění nebo programování (O'Connor a Robertson, 1998).

Fibonacciho posloupnost zakomponovali do svých skladeb například C. Debussy či B. Bartók (Roberts, 2012). Následující obrázky ukazují příklady užití Fibonacciho posloupnosti v díle C. Debussyho *Odrazy ve vodě* a B. Bartóka *Hudba pro smyčce, bicí a celestu*.



Obrázek 24: Fibonacciho čísla ve struktuře skladby „Odrazy ve vodě" C. Debussyho (Roberts, 2012, s. 27). Jedná se o proporci taktů stejné tonality a témat.



Obrázek 25: Fibonacciho čísla ve struktuře první věty B. Bartóka „Hudba pro smyčce, bicí a celestu“ (Garland a Kahn, 1994, s. 115).

3.5 Zlatý řez v hudbě

Geometrický pojem zlatý řez nalézá uplatnění v mnoha oblastech umění (architektura, malířství, hudba, …), ale i v přírodě (v anatomii rostlin, v anatomii člověka, v poloze hvězd a planet, v krystalických strukturách, …). Zlatý řez je ideál harmonických a kompozičních proporcí aplikovatelný už od starověku. (Jarošová, 2009, s. 12)

Ačkoliv se pojem „zlatý řez“ začal užívat až od 19. století, poměr zlatého řezu byl údajně znám už Egypťanům při stavbě pyramid – o této skutečnosti lze najít zápis na *Rhindově (či Ahmesově) papyru* (18.–15. století př. n. l.) (Horděječuk, ©2018–2019). První písemné zmínky o proporci zlatého řezu najdeme v knize *Základy* antického matematika a geometra Eukleida (cca 325–260 př. n. l.) (Jarošová, 2009, s. 12). V této knize nalezneme úlohy vedoucí ke konstrukci zlatého řezu na několika místech.

Základy, Kniha VI.: Upotřebení úměrnosti veličin v geometrii nabízí definici, která přímo souvisí s hodnotou zlatého řezu: *„Pravíme, že přímka jest rozdělena poměrem krajním a středním, když větší úsečka má se k menší jako celá k větší“* (Servít, 1907, s. 83). Tato definice navazuje na úlohu v *Základech, Knize VI.: O dělení přímek a jeho důsledcích*, odstavec *XI*. Odrazíme-li se od této definice, jedná se o úlohu, kterou lze přepsat do tvaru: *„Rozděl danou úsečku a na dvě části tak, aby poměr celé úsečky a ku větší části x byl stejný jako poměr této části x ku menší části a – x“* (Jarošová, 2009, s. 12). Znění této úlohy lze tedy přepsat jednoduchou rovnicí:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}.$$

Řešením této rovnice je nalezení čísla *x*. Protože čísla a a x jsou z vlastnosti délky úsečky čísla kladná a navíc $a > x$, tedy $a - x$ je také číslo kladné, pak lze jednoduchými ekvivalentními kroky dojít k výsledku:

$$x^2 + ax - a^2 = 0\,,$$

jejímž řešením jsou kořeny:

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\,a.$$

Protože *x* i a mají význam délek úsečky, hledáme pouze kladný kořen, což je:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\,a,$$

odkud délka úsečky a závisí na *x* po vyjádření a usměrnění následovně:

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x$$

Zlatý řez lze charakterizovat číslem, který udává poměr $\frac{a}{x}$, po dosazení tedy:

$$\frac{a}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

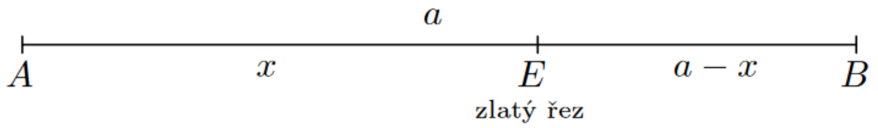
Dá se dokázat, že toto číslo je z podstaty iracionality čísla $\sqrt{5}$ také iracionální. Hodnota zlatého řezu se označuje řeckým písmenem *φ* – toto označení zavedl na počátku 20. století americký matematik Mark Barr (Jarošová, 2009, s. 13). Zlatý řez (též zlatý poměr) je charakterizováno číslem

$$\frac{a}{x} = \varphi = 1{,}618033988749894848\ldots$$

Někdy se uvádí jako hodnota zlatého poměru převrácená hodnota čísla φ, tedy

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{x}{a} = 0{,}618033988749894848\ldots$$

Následující obrázek ukazuje jedno ze dvou možných rozdělení dané úsečky *AB* v poměru zlatého řezu.

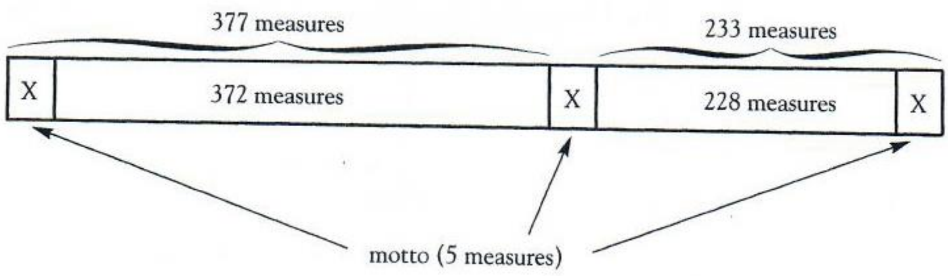


Obrázek 26: Úsečka a = |AB| rozdělená bodem E v poměru zlatého řezu (Jarošová, 2009, s. 13).

Číslo zlatého řezu přímo souvisí s Fibonacciho posloupností. Této skutečnosti si všiml německý astronom Johannes Kepler (1571–1630) (Reichl, ©2006–2019*a*). Jedná se o vlastnost, kdy posloupnost poměrů dvou sousedních čísel Fibonacciho posloupnosti (většího ku menšímu) se limitně blíží k hodnotě zlatého řezu φ. Označíme-li n-té Fibonacciho číslo písmenem F_n, pak podle předchozí lze předchozí větu přepsat následovně:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \approx 1{,}6180334$$

Zlatý řez v hudbě nalezneme od konstrukce hudebních nástrojů (houslí) po kompozice slavných hudebních skladatelů (Garland a Kahn, 1994, s. 115–118). Není výjimkou, že zlatý řez nalezneme ve skladbách, které mají určitou formu – sonáty, symfonie, koncerty (Berger a Riečan, 1997 s. 169). Například mnohé z Mozartových sonát jsou vystavěny tak, že poměr počtu taktů charakterově odlišných částí, se blíží hodnotě zlatého řezu (Loy, 2006, s. 349). Podobné uspořádání vytvářeli ve svých skladbách také Beethoven nebo Webern (Loy, 2006, s. 349).



$$\frac{372}{228} \approx 1{,}6316 \qquad \frac{377}{233} \approx 1{,}6180$$

Obrázek 27: Struktura taktů první věty Beethovenovy Symfonie č. 5 c moll („Osudová") (Garland a Khan, 1994, s. 116). Je vidět, že proporční rozložení tematicky podobných taktů je v poměru blízkému hodnotě zlatého řezu φ.

Zlatý řez lze dokonce najít i v árii A. Dvořáka *Měsíčku na nebi hlubokém*, kde vrchol této árie je v rámci počtu taktů proporčně umístěn ve zlatém řezu (Pokorný, 2013, s. 15).

Nabízí se otázka, zda hudební skladatelé začleňovali zlatý řez do hudby záměrně či nikoliv. Ví se, že záměrně jej užívali např. Bartók (*Hudba pro smyčce, bicí a celestu*) či Debussy (*Odrazy ve vodě*) (Loy, 2006, s. 349). Naopak Chopin komponoval své skladby podle citu – avšak i v jeho skladbách se dají najít paralely se zlatým poměrem (Pokorný, 2013, s. 16).

První členy posloupnosti poměrů dvou sousedních Fibonacciho čísel lze najít i na klaviatuře. O tom pojednává podkapitola 1.12 praktické části.

PRAKTICKÁ ČÁST

V první kapitole praktické části jsou v rámci podkapitol na příkladech vysvětleny vybrané oblasti z matematiky s pomocí klaviatury. Některé podkapitoly jsou pak reprezentovány konkrétním zadáním a řešením příkladů, které lze začlenit do výuky hry na klavír na ZUŠ nebo do hodin matematiky či hudební výchovy na ZŠ a víceletých gymnáziích jako aktivizační a motivační prvky ve výuce. Tyto příklady jsou od podkapitol odděleny vodorovnými čarami. V závěru vybraných podkapitol je upozorněno na roli učitele při začlenění těchto příkladů do výuky klavíru na ZUŠ či matematiky nebo hudební výchovy na ZŠ či víceletých gymnázií.

Praktické ukázky vybraných matematických příkladů na klavíru jsou součástí přílohy DVD multimediálních souborů, na které je upozorněno v textu.

Ve druhé kapitole je vypracovaný pracovní list pro začlenění těchto příkladů do výuky.

Třetí kapitola sepisuje reflexi hodiny se začleněním těchto netradičních příkladů do běžné hodiny matematiky pro třídu Primu A Biskupského gymnázia a mateřské školy Brno.

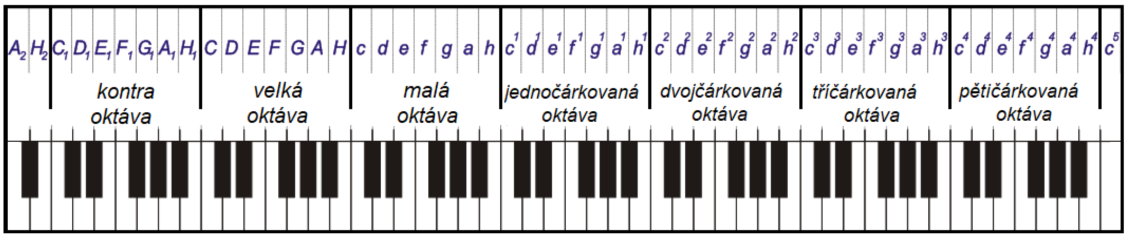
Součástí těchto kapitol jsou také obrázky převážně vlastní tvorby, jejichž seznam je na konci diplomové práce.

1. KLAVÍR JAKO MATEMATICKÁ POMŮCKA

1.1 Krátký popis klavíru

Klavír patří mezi úderné strunné nástroje, jehož zvuk vzniká úderem oplstěného kladívka do struny natažené na masivní litinový rám. Pro hlubší tóny se používají silnější a delší struny a pro vyšší tóny kratší a tenčí. U hlubších tónů se používá jedna struna ovinutá měděným drátem. Struny u vyšších tónů jsou zdvojené nebo ztrojené. Klasický dřevěný nástroj existuje v provedení vertikálním (piano, pianino) a horizontálním (křídlo). Struny jsou laděné rovnoměrně temperovaným laděním. (Kittner, 2017)

Běžné typy klavírů mají klaviaturu o 88 černých a bílých klávesách pravidelně uspořádaných do 7 oktáv po 7 bílých klávesách a 5 černých klávesách a dále tónů části 8. oktávy. Uspořádání kláves na klaviatuře je zobrazeno na obrázku níže.



Obrázek 28: Přehled všech tónů klaviatury (Baran, 2008; upraveno). Bílé klávesy jsou pojmenovány nad klaviaturou.

Kvůli pythagorejskému kommatu strunné nástroje rozlišují např. tón $A^\flat$ (tón A snížený o pythagorejský půltón) a tón $G^\#$ (tón G zvýšený o pythagorejský půltón). Rovnoměrně temperované ladění tento rozdíl smazává – na klavíru tedy platí $A^\flat = G^\#$ apod. Vzájemná záměna těchto tónů se nazývá enharmonická. Rovnoměrně temperované ladění tak vytváří z klavíru nástroj, který díky speciální konstrukci klávesnice transformuje vztahy násobení do sčítání a dělení do odčítání. Například zvětšením daného tónu o 4 půltóny (posun na klaviatuře o 4 klávesy doprava) vzroste jeho frekvence $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^4$ krát (slyšíme tón, u kterého je exponent poměru frekvencí 4x větší), snížením daného tónu o 12 půltónů klesne jeho frekvence $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{12}$ krát apod. Funkce, která vyjadřuje exponent, a tedy transformuje vztahy do lineárních vzdáleností, je funkce logaritmická. Jak píše Haluška (2006, s. 62):

„Klávesnice funguje jako logaritmické pravítko. Tato transformace se odráží též v našem notovém systému, kde každý interval, nezávisle na výšce tónu, je zobrazený v notové osnově vždy s tou stejnou vzdáleností.“ (doslovně přeloženo ze slovenštiny)

Právě proto, že uspořádání kláves na klaviatuře je periodické, klavír může výborně sloužit pro vizualizaci některých matematických příkladů. Následující kapitoly tyto příklady poodhalí.

Pravidelnost v uspořádání kláves na klaviatuře nabízí první jednoduchý matematický příklad pro žáky hry na klavír na ZUŠ, dále v hodinách hudební výchovy či matematiky u klavíru pro žáky 1. stupně ZŠ i prim víceletých gymnázií. Předpokladem je umět sčítat do stovky a znát násobilku. Výhodou je znát názvy bílých tónů na klaviatuře.

Příklad:

Spočítejte výhodně všechny tóny na klaviatuře. (Všimněte si, po jakých úsecích jsou klávesy pravidelně uspořádány.)

Řešení tohoto příkladu je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 3*).

Role učitele při vysvětlování tohoto příkladu:

Učitel dítěti/skupině dětí klade otázky, kterými jej/je navádí ke správnému řešení příkladu, například:

Všimne si někdo pravidelnosti uspořádání kláves?

Všimne si někdo pravidelnosti uspořádání černých kláves?

Po kolika bílých tónech najdeme opět stejný úsek na klaviatuře?

Co je to oktáva? Kde najdeme na klaviatuře všechny tóny, které nesou název c?

Kolik oktáv počínaje tónem c má daný klavír?

Kolik je v jedné oktávě počínaje tónem c různých bílých tónů?

Kolik je v jedné oktávě počínaje tónem c různých černých tónů?

Pokud znáte počet oktáv, kolik je všech bílých kláves? Kolik je všech černých kláves? Jaký je tedy počet všech kláves na klaviatuře?

Na základě těchto otázek vede učitel s dětmi dialog nebo je nechá vést diskuzi ve skupině, kterou moderuje. Cílem diskuze nebo dialogu je, aby děti správně odpověděly na zadání příkladu.

1.2 Měření vzdáleností na klavíru – půltóny jako jednotka měření

Díky rovnoměrně temperovanému ladění klavíru nejen že lze jakoukoliv skladbu libovolně transponovat, ale kvůli stejnému frekvenčnímu poměru všech půltónů můžeme ***jednoznačně definovat všechny intervaly***.

Je to podobné s měřením vzdáleností. Je třeba vědět, v jakých jednotkách budeme měřit a také s jakou přesností bude měření probíhat (na kolik řádů budeme zaokrouhlovat). První aspekt měření splní právě jeden půltón jakožto nejmenší intervalová vzdálenost („jednotka“) v evropské hudbě. Právě proto, že se na klaviatuře pohybujeme pouze v nezáporných celých číslech počtu půltónů, otázka zaokrouhlování a přesnosti měření nemá význam (při předpokladu, že je klavír naladěný). Je tedy možné vyslovit tuto **definici**:

Nechť A je množina všech tónů klaviatury a pojem interval znamená vzdálenost dvou tónů. Pak:

Čistá prima je interval o vzdálenosti 0 půltónů od daného tónu. (Př. $c^1 - c^1$)

Malá sekunda je interval o vzdálenosti 1 půltónu od daného tónu. (Př. c^1 – des^1)

Velká sekunda je interval o vzdálenosti 2 půltónů od daného tónu. (Př. $c^1 - d^1$)

Malá tercie je interval o vzdálenosti 3 půltónů od daného tónu. (Př. c^1 – es^1)

Velká tercie je interval o vzdálenosti 4 půltóny od daného tónu. (Př. $c^1 - e^1$)

Čistá kvarta je interval o vzdálenosti 5 půltónů od daného tónu. (Př. $c^1 - f^1$)

Zvětšená kvarta je interval o vzdálenosti 6 půltónů od daného tónu. (Př. c^1 –fis^1)

Čistá kvinta je interval o vzdálenosti 7 půltónů od daného tónu. (Př. $c^1 - g^1$)

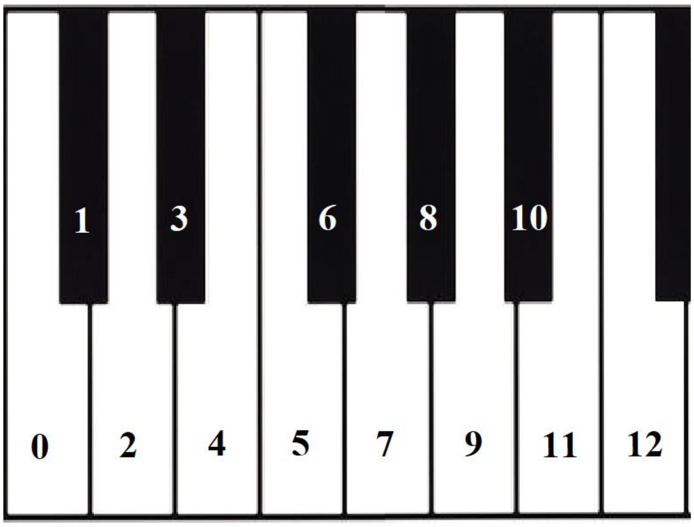
Malá sexta je interval o vzdálenosti 8 půltónů od daného tónu. (Př. c^1 – as^1)

Velká sexta je interval o vzdálenosti 9 půltónů od daného tónu. (Př. $c^1 - a^1$)

Malá septima je interval o vzdálenosti 10 půltónů od daného tónu. (Př. $c^1 - h^1$)

Velká septima je interval o vzdálenosti 11 půltónů od daného tónu. (Př. c^1 – ces^1)

Čistá oktáva je interval o vzdálenosti 12 půltónů od daného tónu. (Př. $c^1 - c^2$)



Obrázek 29: Přehled intervalů v podobě počtu půltónů při volbě výchozího tónu C.

Všechny zvětšené nebo zmenšené intervaly jsou totožné s některými předchozími intervaly až na enharmonickou záměnu, např. zvětšená tercie je interval o vzdálenosti 5 půltónů od výchozího tónu (př. c^1 – *eis*^{1}, tj. $c^1 - f^1$).

Existují i intervaly přesahující vzdálenost jedné oktávy – při jejich definování by se postupovalo stejně.

Následující příklad lze využít v hodinách klavíru pro žáky ZUŠ, dále v hodinách hudební výchovy či matematiky u klavíru pro žáky 1. stupně ZŠ i prim víceletých gymnázií. Předpokladem je umět počítat do dvaceti a znát názvy bílých kláves.

Příklad:

Určete počet půltónů a) mezi dvěma sousedními tóny C, b) mezi dvěma sousedními tóny D, c) mezi vámi zvolenými dvěma tóny na klaviatuře. (Uveďte název těchto tónů.)

Řešení:

Dva sousední tóny tvoří interval čisté oktávy, tedy 12 půltónů, což je odpověď na otázku *a* i *b*. Pro odpověď na otázku *c* poslouží *Obrázek 29*: Přehled intervalů v podobě počtu půltónů při volbě výchozího tónu C..

Role učitele při vysvětlování tohoto příkladu:

Učitel dítěti/skupině dětí klade otázky, kterými jej/je navádí ke správnému řešení příkladu, například:

Co je to půltón?

Kolik půltónů mají mezi sebou dva sousední „bílé“ tóny c, d?

Kolik půltónů mají mezi sebou dva sousední „černé“ tóny cis a dis?

Kolik půltónů mají mezi sebou dva sousední „bílé“ tóny h, c^1?

Pokud víte, jak se určí počet půltónů mezi dvěma tóny, jaké je řešení daného příkladu?

Učitel na základě těchto otázek vede učitel s dětmi dialog nebo je nechá vést diskuzi ve skupině, kterou moderuje. Cílem diskuze nebo dialogu je, aby děti správně odpověděly na zadání příkladu.

1.3 Množiny na klavíru

Řešené příklady k následujícím podkapitolkám s komentářem pro učitele jsou uvedeny na konci této podkapitoly.

1.3.1 Klavírní univerzum

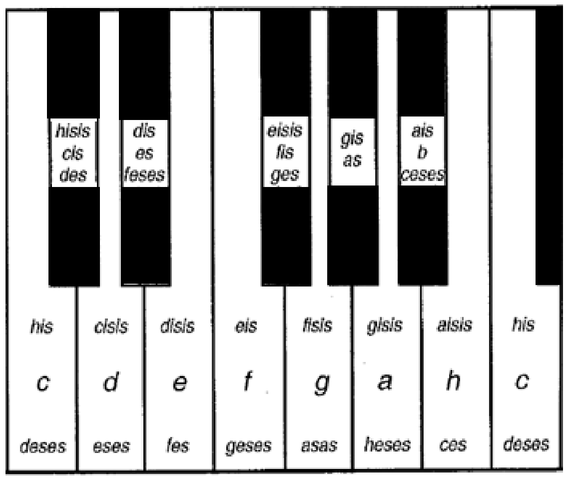
Hudba je tvořena tóny. Je tedy důležité pojmenovat a definovat, jakými tóny je evropská hudba tvořena. Zenkl (2003, s. 11) uvádí, že *„tónová soustava je přehledné* *uspořádání všech tónů užívaných v hudbě podle jejich výšek"*. Základem tónové soustavy evropské hudby je sedm tónů s názvy *c, d, e, f, g, a, h*, které se v tónové soustavě několikrát opakují v různých výškových polohách. Jedná se o tzv. *základní tónovou řadu*. (Zenkl 2003, s. 11)

Vzdálenost základního tónu *C* k nejbližšímu opakovanému tónu *C* je jedna oktáva. Tónová soustava pak obsahuje devět oktáv, v nichž se dané tóny pro jejich jednoznačné určení označují velkými nebo malými písmeny s číselnými indexy (dříve byly místo nich použity čárky). Níže je přehled jednotlivých tónů v rozsahu klavíru.

1. Subkontra oktáva						A_2	H_2
2. Kontra oktáva	C_1	D_1	E_1	F_1	G_1	A_1	H_1
3. Velká oktáva	C	D	E	F	G	A	H
4. Malá oktáva	c	d	e	f	g	a	h
5. Jednočárkovaná oktáva	c^1	d^1	e^1	f^1	g^1	a^1	h^1
6. Dvoučárkovaná oktáva	c^2	d^2	e^2	f^2	g^2	a^2	h^2
7. Tříčárkovaná oktáva	c^3	d^3	e^3	f^3	g^3	a^3	h^3
8. Čtyřčárkovaná oktáva	c^4	d^4	e^4	f^4	g^4	a^4	h^4
9. Pětičárkovaná oktáva	c^5						

Než aplikuji teorii množin na klaviaturu, je dobré uvést základní poznatky z tohoto matematického aparátu. Intuitivní vyjádření množiny nabízí **Cantorova definice**: *„Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých předmětů m našeho nazírání nebo myšlení (které nazýváme prvky) do jediného celku M"* (Podbrdský, 2000). Ačkoliv toto není definice v pravém slova smyslu (obsahuje další neurčité pojmy jako „shrnutí", „celek") a vedla k řadě paradoxů, na jejím podkladu lze danou tónovou soustavu matematicky chápat jako základní množinu tónů na klavíru. Dané tóny jsou na klavíru reprezentovány pouze bílými klávesami, označme proto tuto množinu základních tónů jako konečnou množinu $Z = \{A_2, H_2, C_1, \ldots, c^5\}$.

Každý tón tónové soustavy můžeme až dvakrát zvýšit nebo snížit o půltón. Zvýšením nebo snížením základních tónů vznikají tóny odvozené (alterované). Zvýšení v hudební teorii označujeme křížkem ♯ a přidáním koncovky -is k názvu daného tónu, snížení béčkem ♭ a koncovkou -es, např. zvýšením tónu *c* vznikne tón *cis*, dvojnásobným zvýšením tón *cisis*, snížením tónu *c* vznikne *ces* apod. Kvůli rovnoměrně temperovanému ladění klavíru nesou některé tóny stejný název, např. snížením tónu *d* vznikne tón *des*, což je na klaviatuře stejný tón jako *cis* (enharmonická záměna). V jedné oktávě tak vzniká 35 různých názvů alterovaných a základních tónů.



Obrázek 30: Enharmonická záměna tónů v jedné oktávě (dle Zenkla, 2003, s. 13)
Pozn.: hes = b.

Množinu všech černých kláves na klavíru tedy můžeme označit více způsoby. Označme příhodně množinu všech černých kláves na klaviatuře, danou jednonásobným zvýšením příslušných základních tónů, jako množinu $A^{\#} = \{Ais_2, Cis_1, Dis_1, Fis_1, Gis_1, Ais_1, \ldots, cis^4, dis^4, fis^4, gis^4, ais^4\}$ a analogicky $A^{b} = \{B_2, Des_1, Es_1, Ges_1, As_1, B_1, \ldots, des^4, es^4, ges^4, as^4, b^4\}$ jako množinu všech černých kláves, dané jednonásobným snížením příslušných základních tónů.

Definice: Množiny A, B jsou si rovny právě tehdy, pokud je množina A podmnožinou množiny B a zároveň množina B podmnožinou množiny A. Symbolicky $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$.

Jinými slovy lze říct, že množiny jsou si rovny, pokud obsahují stejné prvky. Protože kvůli enharmonické záměně na klaviatuře platí $Ais_2 = B_2$, $Cis_1 = Des_2$ apod., jsou si množiny $A^{\#}$ a A^{b} rovny, tedy $A^{\#} = A^{b}$.

Definice: *Univerzální množina U* (též univerzum) je množina všech prvků (individuí), které jsou relevantní v rámci daného kontextu.

Definice: *Sjednocení množin A, B* je množina, která obsahuje prvky z množiny A nebo prvky z množiny B. Symbolicky $A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$.

Množinu všech kláves na klaviatuře tedy lze chápat jako univerzum U pro klavírní hudbu, a tedy $U = A^{\#} \cup Z$, resp. $U = A^{b} \cup Z$.

1.3.2 Stupnice a tónina v řeči množin

Zenkl (2003, s. 55) definuje stupnici jako stoupající nebo klesající řadu tónů jedné oktávy uspořádanou podle určitých pravidel (zejména ohledně počtu tónů a intervalové vzdálenosti mezi sousedními tóny stupnice). V řeči matematiky je tedy stupnice uspořádaná n-tice tónů.

Definice: *Uspořádaná dvojice* prvků a, b je množina $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Uspořádaná n-tice prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pro $n \in \mathbb{N}_0$ je množina $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, pro kterou platí:

1. Uspořádaná 0-tice () je prázdná množina.
2. Pokud α je uspořádaná n-tice, pak $\{\{a\}, \{a, \alpha\}\}$ je uspořádaná $(n+1)$-tice začínající prvkem a a pokračující prvky n-tice α.

Definice: *Prázdná množina* $\emptyset = \{\}$ je množina, která neobsahuje žádné prvky.

Rozlišujeme různé druhy stupnic. Níže je přehled několika základních typů stupnic v jedné oktávě. Protože jsou stupnice definovány prostřednictvím počtu půltónů mezi sousedními tóny, jsou obecně aplikovatelné od každého tónu na klavíru (s ohledem na jeho rozsah tónů). Poznamenejme, že počáteční a konečný tón daných stupnic se liší právě o jednu oktávu. Jedná se tedy o stejné tóny co do názvu.

Durová stupnice je řada 8 tónů, jejichž vzdálenosti mezi dvěma po sobě jdoucími tóny vzestupně určují popořadě počty půltónů 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1. Sestupně pak 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2. Durovou stupnici tedy tvoří 7 různých stupňů v dané oktávě.

Mollové stupnice se dělí na harmonickou a melodickou moll.

Harmonická mollová stupnice je řada 8 tónů, jejichž vzdálenosti mezi dvěma po sobě jdoucími tóny vzestupně určují popořadě počty půltónů 2, 1, 2, 2, 1, 3, 1. Sestupně pak 1, 3, 1, 2, 2, 1, 2. Mollovou stupnici tedy tvoří 7 různých stupňů v dané oktávě.

Melodickou mollovou stupnici pak tvoří vzestupně řada 8 tónů, jejichž vzdálenosti mezi dvěma po sobě jdoucími tóny vzestupně určují popořadě počty půltónů 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1. Sestupně pak navazuje na poslední tón řada tónů o posloupnosti počtu půltónů 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2.

Celotónová stupnice je řada 7 tónů, jejichž vzdálenosti mezi dvěma po sobě jdoucími tóny vzestupně určují popořadě počty půltónů 2, 2, 2, 2, 2, 2. Stejně tak sestupně. Celotónovou stupnici tedy tvoří 6 různých stupňů v dané oktávě.

Pentatonická stupnice je řada 6 tónů, jejichž vzdálenosti mezi dvěma po sobě jdoucími tóny vzestupně určují popořadě počty půltónů 2, 3, 2, 2, 3. Sestupně pak 3, 2, 2, 3, 2. Pentatonickou stupnici tedy tvoří 5 různých stupňů v dané oktávě.

Chromatická stupnice je řada 13 tónů, jejichž vzdálenosti mezi dvěma po sobě jdoucími tóny vzestupně určují popořadě počty půltónů 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1. Stejně tak sestupně. Chromatickou stupnici tedy tvoří 12 různých stupňů v dané oktávě.

Protože předchozí pravidla obsahují pouze počty půltónů a nejsou závislá na volbě počátečního tónu, lze tyto definice matematicky převést do uspořádané n-tice pouhým přidáním kulatých závorek k posloupnosti počtu půltónů, jak bývá zvykem uspořádanou n-tici v matematice označovat. Následující tabulka uvádí přehled daných stupnic definovaných jako uspořádané n-tice půltónů.

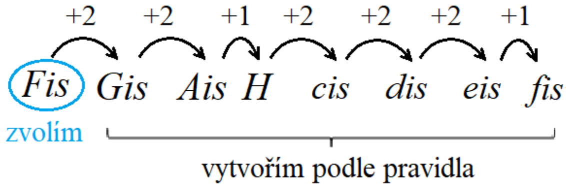
Tabulka 7: Přehled stupnic definovaných jako uspořádané n-tice počtu půltónů

Stupnice	**Definice vzestupně**	**Definice sestupně**
Durová	(2, 2, 1, 2, 2, 2, 1)	(1, 2, 2, 2, 1, 2, 2)
Harmonická moll	(2, 1, 2, 2, 1, 3, 1)	(1, 3, 1, 2, 2, 1, 2)
Melodická moll	(2, 1, 2, 2, 2, 2, 1)	(2, 2, 1, 2, 2, 1, 2)
Celotónová	(2, 2, 2, 2, 2, 2)	(2, 2, 2, 2, 2, 2)
Pentatonika	(2, 3, 2, 2, 3)	(3, 2, 2, 3, 2)
Chromatická	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)

Tabulka 8: Příklady stupnic

Stupnice	**Příklad vzestupně od tónu *c***	**Příklad sestupně od tónu c^1**
Durová	(c, d, e, f, g, a, h, c^1)	(c^1, h, a, g, f, e, d, c)
Harmonická moll	($c, d, es, f, g, as, h, c^1$)	($c^1, h, as, g, f, es, d, c$)
Melodická moll	($c, d, es, f, g, a, h, c^1$)	($c^1, b, as, g, f, es, d, c$)
Celotónová	($c, d, e, fis, gis, ais, c^1$)	($c^1, ais, gis, fis, e, d, c$)
Pentatonika	(c, d, f, g, a, c^1)	(c^1, a, g, f, d, c)
Chromatická	($c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, ais, h, c^1$)	($c^1, h, ais, a, gis, g, fis, f, e, dis, d, cis, c$)

Podle těchto pravidel a díky rovnoměrně temperovanému ladění klavíru lze stupnice zahrát od jakéhokoliv tónu (s tolerancí rozsahu klavíru). Postup je následující – za prvé určit název stupnice (tzn. zvolit výchozí tón), za druhé užít pravidlo posloupnosti počtu půltónů pro danou stupnici. Příklad vytvoření stupnice *Fis* dur od počátečního tónu velké *Fis* zobrazuje následující obrázek.

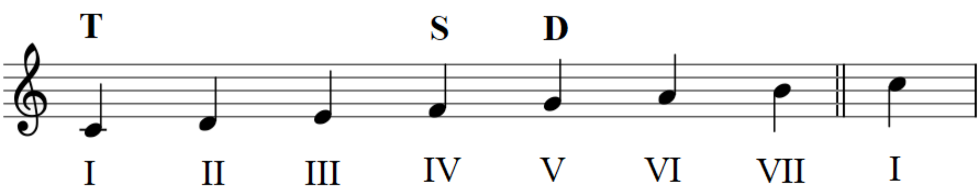


Obrázek 31: Tvoření stupnice Fis dur podle definice durové stupnice prostřednictvím posloupnosti půltónů.

Tato pravidla využívám především u durových stupnic při výuce klavíru na ZUŠ. Žáky nejdříve návodnými otázkami dovedu k tomu, aby došli k danému pravidlu (zkoumají vztahy sousedních tónů durové stupnice) a poté jej aplikují od jiných tónů. Jakmile studenti přijdou na tóny stupnice, fixujeme správný prstoklad. Žáky tímto způsobem vedu k samostatnosti – pokud zapomenou, jaké tóny obsahovala zadaná stupnice, mohou si ji vytvořit podle tohoto pravidla. Výhodou této metody je, že studenti v počátku učení stupnice přemýšlí a že ji mohou zahrát správně již napoprvé (s dostatečnou mírou trpělivosti). Tím lze předcházet chybám, které se v praxi hraní velmi často opakují, právě když student chybuje již v počátcích.

Tvoření durové a pentatonické stupnice pomocí definice prostřednictvím posloupnosti počtu půltónů je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 4*).

Tónina je pak definována jako soubor tónů uspořádaných podle určitých pravidel. Tento soubor tónů přísluší určité stupnici, přičemž všechny tóny stupnice nemusí být v dané tónině obsaženy (Zenkl, 2003, s. 55). Typicky říkáme, že daná skladba je napsána v určité tónině (nikoliv ve stupnici). Prvky dané tóniny jsou tóny stupnice, která přísluší dané tónině. V tónině tedy rozlišujeme 7 různých stupňů, jejichž pořadí označujeme římskými číslicemi I až VII. V rámci harmonie je nejdůležitější I., IV. a V. stupeň, které popořadě označujeme tónika (T), subdominanta (S) a dominanta (D) (Kofroň, 2002, s. 35). Jedná se o tzv. základní harmonické funkce.



Obrázek 32: Základní harmonické funkce a označení stupňů v tónině C dur.

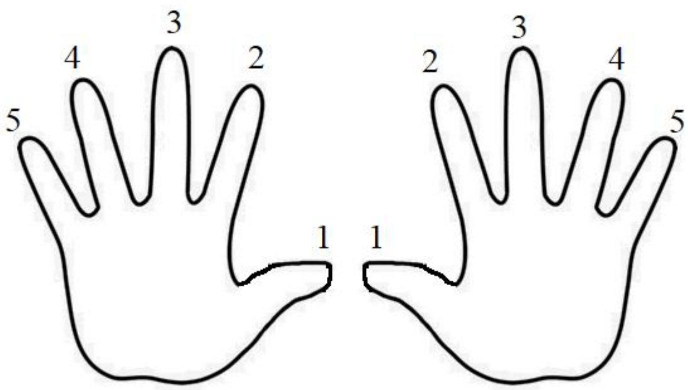
Tuto definici lze využít pro transformaci jednoduchých písniček do uspořádaných *n*-tic, přičemž uvedená čísla budou reprezentovat stupně v tónině, ve které budeme chtít skladbu zahrát. Uvidíme, že následující posloupnost čísel pak lze využít pro transpozici jednoduchých písniček. Uvedené vysvětlím na příkladu lidové písničky *Skákal pes přes oves* zapsané v tónině *C* dur. Přiřadíme-li čísla k tónům dané stupnice tak, že přirozeně ctíme pořadí tónů, získáme pro danou písničku unikátní „kód“ uspořádaných čísel (5, 5, 3, 5, 5, 3, 5, 5, 6, 5, 5, 4, 4, 4, 2, 4, 4, 2, 4, 4, 5, 4, 4, 3). Je dobré podotknout, že toto uspořádání neříká nic o délce tónů, jsou v něm zaznamenány pouze polohy tónů v dané stupnici.

Obrázek 33: Očíslování tónů stupnice C dur.

Obrázek 34: Notový záznam písničky Skákal pes přes oves v C dur.

Takový kód lze využít u transpozic dané písně do různých tónin. Stačí si vybrat tóninu, uvědomit si její předznamenání (počet daných křížků nebo béček), zahrát jí příslušnou stupnici, a aniž by bylo nutné přepsat písničku do jiné tóniny, zahrát popořadě příslušné tóny podle této uspořádané 24-tice.

V praxi však nejčastěji při takto jednoduchých skladbách, které se dají zahrát pěti prsty, využívám přiřazení čísel prstokladu k daným tónům. Číslování prstů při hře na klavír vystihuje následující obrázek.



Obrázek 35: Očíslování prstů levé a pravé ruky pro hru na klavír.

Příslušná čísla pak pro žáky prvních nebo druhých ročníků píšu do celého notového partu. Pro skladbu Skákal pes přes oves by prstoklad vypadal následovně:

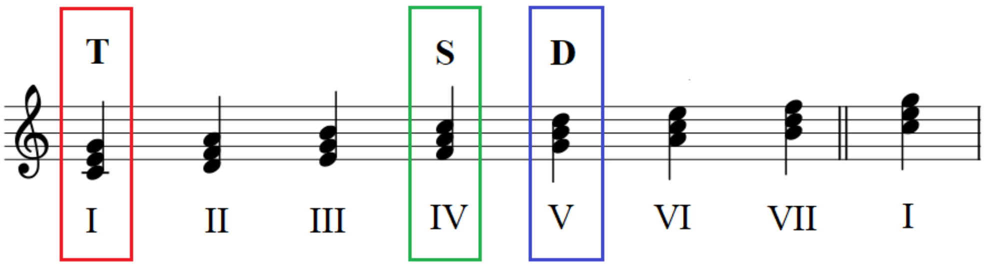
Obrázek 36: Prstoklad pro pravou ruku v písničce Skákal pes přes oves.

Výhodou tohoto značení je, že žák při transpozici skladbičky do jiných tónin čte pouze čísla, podle kterých hraje, což se pro děti, které znají čísla, velmi zjednoduší. Nevýhoda hry podle prstokladu je samozřejmě ta, že děti při hře podle čísel často zanedbávají správné relativní výšku tónů. Tato metoda je vhodná pro děti v přípravném ročníku na ZUŠ a v prvních ročnících hry na klavír.

1.3.3 Podmnožiny

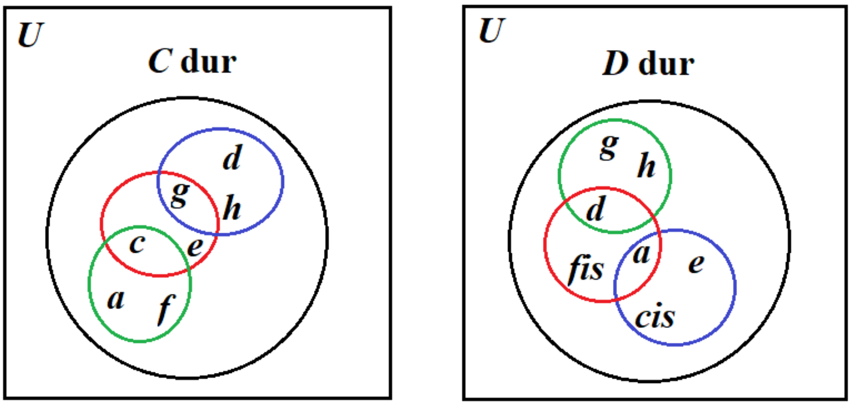
Definice: *Podmnožinou* množiny A je taková množina B, pro jejíž všechny prvky platí, že jsou zároveň prvky množiny A. Symbolicky $B \subseteq A = \{x;\, x \in B \Rightarrow x \in A\}$.

Podmnožin se na klavíru najde celá řada. Významné podmnožiny durových a mollových stupnic tvoří kvintakordy. Jedná se o trojzvuky, které jsou vystavěné podle určitých pravidel. Durový kvintakord sestává ze souzvuku základního tónu, velké tercie a čisté kvinty (intervaly jsou určeny vždy od základního tónu). Mollový kvintakord ze základního tónu, malé tercie a čisté kvinty. Kvintakordy lze vytvořit na každém stupni v dané tónině. Přičemž nejdůležitější z hlediska harmonie jsou kvintakordy základních harmonických funkcí – tónický, subdominantní a dominantní (Kofroň, 2002, s. 35).



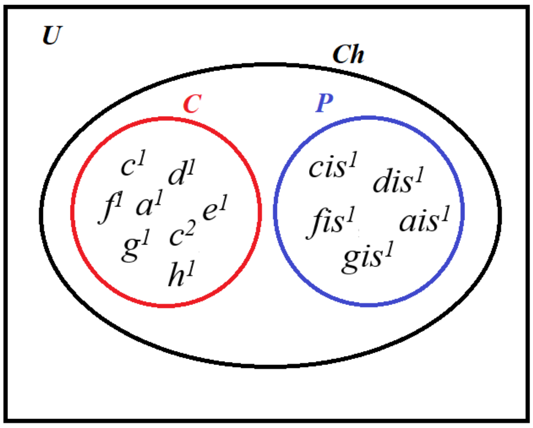
Obrázek 37: Přehled kvintakordů vystavěných na každém stupni stupnice C dur. V rámečku jsou označeny kvintakordy základních harmonických funkcí.

Tóny kvintakordů základních harmonických funkcí lze tedy chápat jako tříprvkové podmnožiny daných tónin.

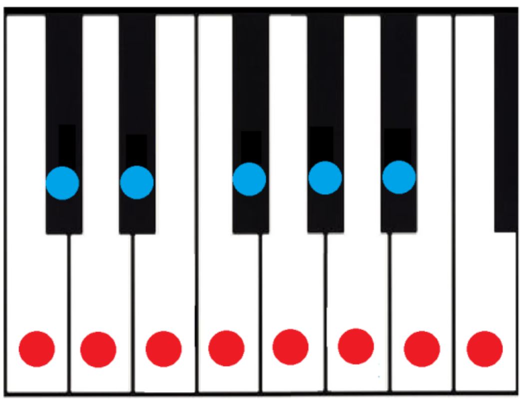


Obrázek 38: Vennovy diagramy podmnožin kvintakordů základních harmonických funkcí v tóninách C dur a D dur na množině klavírního univerza U. Tonický kvintakord je označen červeně, subdominantní zeleně a dominantní modře.

Dalším příkladem podmnožin může být množina prvních pěti tónů pentatonické stupnice na černých klávesách *P* jako podmnožina chromatické stupnice *Ch*. Stejně tak množina prvků stupnice *C* dur *C* je podmnožinou chromatické stupnice. Platí tedy $C \subseteq Ch$ a $P \subseteq Ch$.



Obrázek 39: Vennův diagram podmnožin tónů chromatické stupnice (Ch) na množině klavírního univerza U.

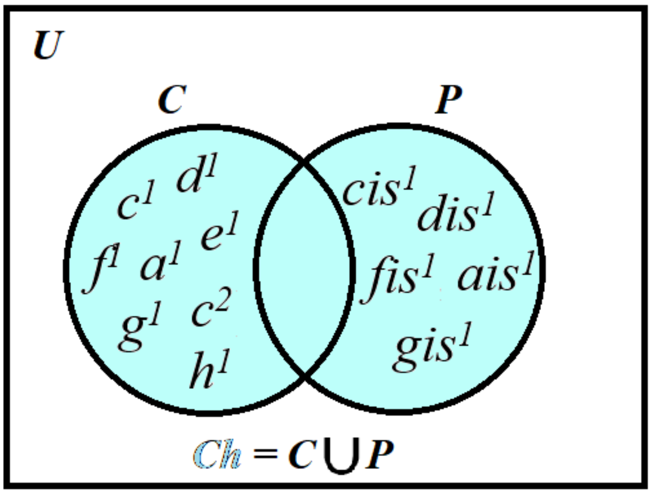


Obrázek 40: Znázornění daných podmnožin na klaviatuře. Modře je označeno prvních 5 tónů pentatoniky, červeně tóny stupnice C dur. (Množinu všech tónů chromatické stupnice od c^1 po c^2 tvoří tóny označené červenými i modrými tečkami.)

Pokud je zavedeno klavírní univerzum U jako množina všech tónů klavíru, pak lze množinu tónů každé klavírní skladby vnímat jako podmnožinu U.

1.3.4 Sjednocení množin

Operace sjednocení množin na klavíru byla užita v podkapitole 1.3.1. Jako další příklad se nabízí množina tónů chromatické stupnice v jednočárkované oktávě jakožto sjednocení množin prvních pěti tónů pentatoniky na černých klávesách a stupnice C dur. Označme množinu tónů pentatoniky $P = \{cis^1, dis^1, fis^1, gis^1, ais^1\}$ a množiny tónů stupnice C dur jako $C = \{c^1, d^1, e^1, f^1, g^1, a^1, h^1, c^2\}$. Pro množinu tónů chromatické stupnice Ch v jednočárkované oktávě pak platí $Ch = C \cup P = \{c^1, cis^1, d^1, dis^1, e^1, f^1, fis^1, g^1, gis^1, a^1, ais^1, h^1, c^2\}$. Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 5*).

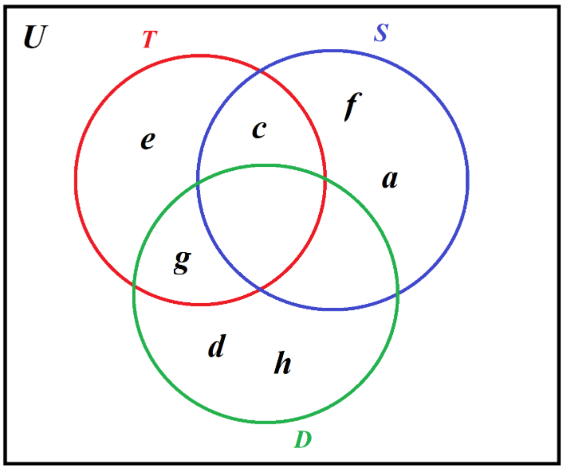


Obrázek 41: Vennův diagam sjednocení množiny tónů stupnice C dur (C) a prvních pěti tónů pentatoniky (P) na množině klavírního univerza U.

1.3.5 Průnik množin jako pomůcka při modulaci

Definice: *Průnikem* množin A, B je množina, která obsahuje prvky z množiny A a zároveň prvky z množiny B. Symbolicky $A \cap B = \{x;\ x \in A \wedge x \in B\}$.

Příklad průniku množin lze znázornit na množině tónů kvintakordů základních harmonických funkcí. Označme množinu $T = \{c, e, g\}$ jako množinu tónů tónického kvintakordu tóniny C dur, $S = \{f, a, c\}$ množinu tónů subdominantního kvintakordu tóniny C dur a $D = \{g, h, d\}$ množinu tónů dominantního kvintakordu tóniny C dur. Je důležité poznamenat, že dané tóny nejsou označeny indexy záměrně, tedy např. pod tónem c se rozumí množina všech tónů $\{c\}$ na klaviatuře. Potom platí $T \cap S = \{c\}$, $T \cap D = \{g\}$, $S \cap D = \emptyset$, $T \cap S \cap D = \emptyset$.

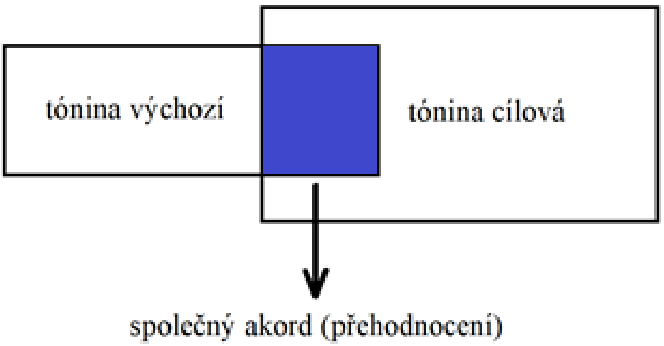


Obrázek 42: Vennovy diagramy množin tónů tónického kvintakordu v C dur (červeně), subdominantního kvintakordu v C dur (zeleně) a dominantního kvintakordu v C dur (modře).

Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka* 6).

Průnik množin tónů kvintakordů základních harmonických funkcí se využívá při diatonické modulaci. Modulace je dle Kofroně (2002, s. 111) *„hudebně správný a přesvědčující přechod z tóniny výchozí do tónin cílové.“* Diatonická modulace má tři části:

1. část v tónině výchozí
2. část modulační – společný akord (tzv. přehodnocení)
3. kadenci v cílové tónině, tj. logický sled harmonických funkcí tak, aby skladba byla ukončena na tónice cílové tóniny



Obrázek 43: Schéma diatonické modulace (dle Kofroně, 2002, s. 114).

Například při modulaci písničky *Ovčáci, čtveráci* z tóniny *C* dur do tóniny *D* dur najdeme průnik akordů základních harmonických funkcí v obou tóninách, daný akord dále přehodnotíme jako jednu ze základních harmonických funkcí v cílové tónině a provedeme kadenci v cílové tónině. Základní harmonické funkce v tónině *C* dur jsou množiny tónů $T_C = \{c, e, g\}$, $S_C = \{f, a, c\}$ a $D_C = \{g, h, d\}$. Množinu základních harmonických funkcí v tónině *C* dur označme $M_C = \{\{c, e, g\}, \{f, a, c\}, \{g, h, d\}\}$.

Základní harmonické funkce v tónině D dur jsou $T_D = \{d, fis\ a\}$, $S_D = \{g, h, d\}$ a $D_D = \{a, cis, e\}$. Analogicky množinu základních harmonických funkcí v tónině D dur označme $M_D = \{\{d, fis\ a\}, \{g, h, d\}, \{a, cis, e\}\}$. Průnikem těchto dvou množin je množina $M_C \cap M_D = \{\{g, h, d\}\}$, kde je tento akord v rámci tóniny C dur dominanta, v rámci tóniny D dur subdominanta. Přehodnocením dominanty tóniny výchozí na subdominantu tóniny cílové dále můžeme pokračovat v kadenci S–D–T.

1.3.6 Počet prvků sjednocení dvou množin

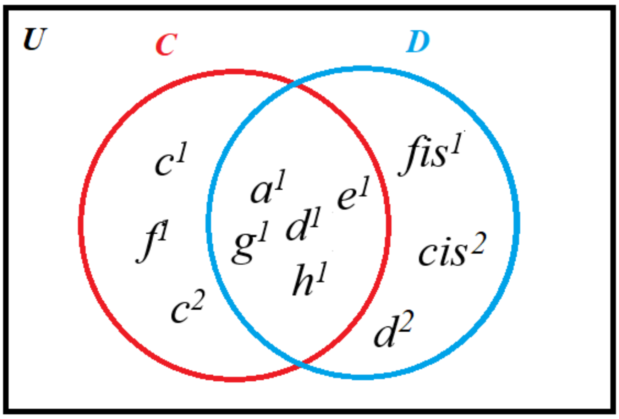
Definice: *Mohutnost množiny A* vyjadřuje počet prvků množiny A. Značí se $cardA$ (kardinalita) nebo $|A|$.

Například mohutnost množiny tónů stupnice C dur v jedné oktávě (ozn. $C = \{c, d, e, f, g, a, h, c^1\}$) je $cardC = |C| = 8$.

Věta: Pro počet prvků sjednocení dvou množin A, B platí:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Například počet prvků sjednocení množiny tónů stupnice C dur v jednočárkované oktávě (ozn. $C = \{c^1, d^1, e^1, f^1, g^1, a^1, h^1, c^2\}$) a množiny tónů stupnice D dur (ozn. $D = \{d^1, e^1, fis^1, g^1, a^1, h^1, cis^2, d^2\}$) je podle věty výše $|C \cup D| = |C| + |D| - |C \cap D|$. Platí: $|C| = |D| = 8$ a $|C \cap D| = 5$, a tedy $|C \cup D| = 8 + 8 - 5 = 11$.



Obrázek 44: Vennův diagram sjednocení množin tónů C dur a D dur na množině klavírního univerza U.

Na klavíru se dá tato věta názorně ukázat na příkladu pětiprvkových množin. Označme množinu tónů pro pravou ruku $P = \{c^1, d^1, e^1, f^1, g^1\}$ a množinu tónů, kterou bude hrát pravá ruka, jako $L = \{e^1, f^1, g^1, a^1, h^1\}$. Protože mají množiny společné 3 prvky, je počet prvků jejich sjednocení $|P \cup L| = 7$. Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 7*).

1.3.7 Rozdíl množin a doplněk množin

Definice: *Rozdíl množin* A, B v tomto pořadí je množina, která obsahuje všechny prvky z množiny A a neobsahuje prvky z množiny B. Symbolicky $A - B = A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$.

Věta: Rozdíl množin není komutativní.

Tato věta se dá na klaviatuře znázornit opět na příkladu pětiprvkových množin. Mějme tedy z předchozího příkladu množinu tónů $P = \{c^1, d^1, e^1, f^1, g^1\}$, které bude hrát pravá ruka, a množinu $L = \{e^1, f^1, g^1, a^1, h^1\}$, kterou bude hrát levá ruka. Pro rozdíly množin platí: $P \setminus L = \{c^1, d^1\}$ a $L \setminus P = \{a^1, h^1\}$. Je vidět, že dané rozdíly netvoří stejné množiny, a tedy rozdíl množin není komutativní. Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 8*).

Definice: *Doplněk* (*komplement*) *množiny* A na množině univerza U pro $A \subseteq B$ je množina, která obsahuje všechny prvky univerza U, které nejsou v množině A. Symbolicky $U \setminus A = A' = \{x; x \in U \wedge x \notin A\}$.

Doplněk množiny lze na klaviatuře znázornit pomocí stisknutí určitých kláves. Mějme např. množinu všech tónů C dur v jednočárkované oktávě, tedy $C = \{c^1, d^1, e^1, f^1, g^1, a^1, h^1, c^2\}$. Doplněk množiny C' je tedy množina všech tónů na klavíru kromě tónů množiny C, tj. $U \setminus C$. Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 9*).

1.3.8 Potenční množina

Definice: *Potenční množina* množiny A, označujeme $\mathcal{P}(A)$, je množina obsahující všechny podmnožiny množiny A, symbolicky $\mathcal{P}(A) = \{X; X \subseteq A\}$.

Příklad potenční množiny na klavíru může být následující. Označme množinu $A = \{c^1, d^1, e^1, f^1, g^1\}$ jako množinu prvních pěti tónů stupnice C dur. (Volba pětiprvkové množiny je z důvodu hry pěti prsty.) Pak potenční množina $\mathcal{P}(A)$ dané množiny je $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{c^1\}, \{d^1\}, \{e^1\}, \{f^1\}, \{g^1\}, \{c^1, d^1\}, \{c^1, e^1\}, \{c^1, f^1\}, \{c^1, g^1\}, \{d^1, e^1\}, \{d^1, f^1\}, \{d^1, g^1\}, \{e^1, f^1\}, \{e^1, g^1\}, \{f^1, g^1\}, \{c^1, d^1, e^1\}, \{c^1, d^1, f^1\}, \{c^1, d^1, g^1\}, \{c^1, e^1, f^1\}, \{c^1, e^1, g^1\}, \{c^1, f^1, g^1\}, \{d^1, e^1, f^1\}, \{d^1, e^1, g^1\}, \{d^1, f^1, g^1\}, \{e^1, f^1, g^1\}, \{c^1, d^1, e^1, f^1\}, \{c^1, d^1, e^1, g^1\}, \{d^1, e^1, f^1, g^1\}, \{c^1, d^1, f^1, g^1\}, \{c^1, e^1, f^1, g^1\}, \{c^1, d^1, e^1, f^1, g^1\}\}$. Na klavíru lze tyto podmnožiny znázornit pomocí hry daných tónů současně. Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh v rámci *Příkladu 3* podkapitolky 1.6.2.

Podmnožiny pětiprvkové množiny lze na klavíru stejně dobře reprezentovat i pomocí prstokladu. Stačí nahradit v předchozím příkladě tóny čísly jedna až pět následujícím způsobem: $c^1 = 1$, $d^1 = 2$, $e^1 = 3$, $f^1 = 4$, $g^1 = 5$, a tedy $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a potenční množina $\mathcal{P}(A)$ má prvky analogicky jako v předchozím příkladu.

Výše uvedené příklady lze začlenit do běžných hodin matematiky nebo hudební výchovy pro první ročníky vyššího stupně víceletých gymnázií. Téma množin na klavíru je také součástí pracovního listu pro primy víceletých gymnázií.

Následující příklady lze využít v hodinách hudební výchovy či matematiky u klavíru pro žáky prvních ročníků vyššího stupně víceletých gymnázií. Předpokladem je znát základní množinové pojmy a operace a množinách. Studenti mohou pracovat ve skupinách, samostatně nebo ve dvojicích.

<u>Příklady na určení univerzální množiny:</u>

1. *Uveďte příklad:*

   a) číselné univerzální množiny (univerza)

   b) univerzální množiny (univerza) *na klaviatuře.*

2. *Zapište pomocí sjednocení dvou různých množin množinu všech kláves na klaviatuře. Dané množiny slovně popište.*

<u>Řešení:</u>

1. a) Např. množina přirozených čísel $\mathbb{N}$, množina celých čísel $\mathbb{Z}$, množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$ apod.

   b) Univerzální množina na klaviatuře je množina všech kláves klaviatury.

2. Např. U je množina všech kláves na klaviatuře, A je množina všech bílých kláves na klaviatuře, B je množina všech černých kláves na klaviatuře, $U = A \cup B$.

<u>Role učitele při vysvětlování tohoto příkladu:</u>

Učitel zadá příklad u klaviatury a nechá studenty samostatně pracovat. Je nápomocný, pokud má některý student dotaz. Učitel na závěr zkontroluje výsledky studentů.

<u>Příklady na základní množinové operace a Vennovy diagramy:</u>

Tento příklad je možno začlenit do běžné hodiny matematiky (bez klavíru).

Nechť C je množina tónů stupnice C dur, tj. $C = \{c^1, d^1, e^1, f^1, g^1, a^1, h^1, c^2\}$ *a D je množina tónů stupnice D dur, tj.* $D = \{d^1, e^1, fis^1, g^1, a^1, h^1, cis^2, d^2\}$.

a) *Načrtněte Vennův diagram pro danou dvojici množin na množině univerza.*
b) *Správně zapište a určete výčtem prvků oba rozdíly daných množin, sjednocení množin a průnik množin.*
c) *Je rozdíl množin komutativní? Vysvětlete na tomto příkladu.*
d) *Určete mohutnosti daných množin z příkladu b).*
e) *Na tomto příkladu ověřte větu o mohutnosti sjednocení dvou množin.*

Řešení:

a) viz *Obrázek 44*
b) $C \setminus D = \{c^1, f^1, c^2\}, D \setminus C = \{fis^1, cis^2, d^2\}, C \cup D = \{c^1, d^1, e^1, f^1, fis^1, g^1, a^1, h^1, c^2, cis^2, d^2\}, C \cap D = \{d^1, e^1, g^1, a^1, h^1\}$
c) Rozdíl množin není komutativní, protože množiny $C \setminus D$ a $D \setminus C$ neobsahují stejné prvky.
d) $|C \setminus D| = |D \setminus C| = 3,\ |C \cup D| = 11, |C \cap D| = 5$
e) Máme ověřit větu $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Pro počet prvků (mohutnost) daných množin platí $|C| = |D| = 8$ a $|C \cap D| = 5$, a tedy $|C \cup D| = 11$.

Role učitele při řešení těchto příkladů:

Učitel rozdá studentům zadání příkladu. Studenti chodí po jednom k tabuli a příklad řeší. Učitel kontroluje řešení studenta u tabule.

Dané příklady je vhodné začlenit i jako domácí úkol.

1.4 Relace na klavíru

Definice: *Kartézský součin* množin *A*, *B* (v tomto pořadí) je množina všech uspořádaných dvojic prvků daných množin tak, že první prvek je z množiny *A* a druhý prvek z množiny *B*. Symbolicky $A \times B = \{(x, y);\ x \in A \wedge y \in B\}$.

Pokud je navíc $A = B$, mluvíme o kartézském součinu na množině *A*. Symbolicky $A \times A = A^2 = \{(x, y);\ x \in A \wedge y \in A\}$.

Věta: Mohutnost (počet prvků) kartézského součinu $A \times B$ je rovna součinu jednotlivých mohutností množin *A* a *B*. Symbolicky $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Pro *A* = *B* je tedy $|A^2| = |A|^2$.

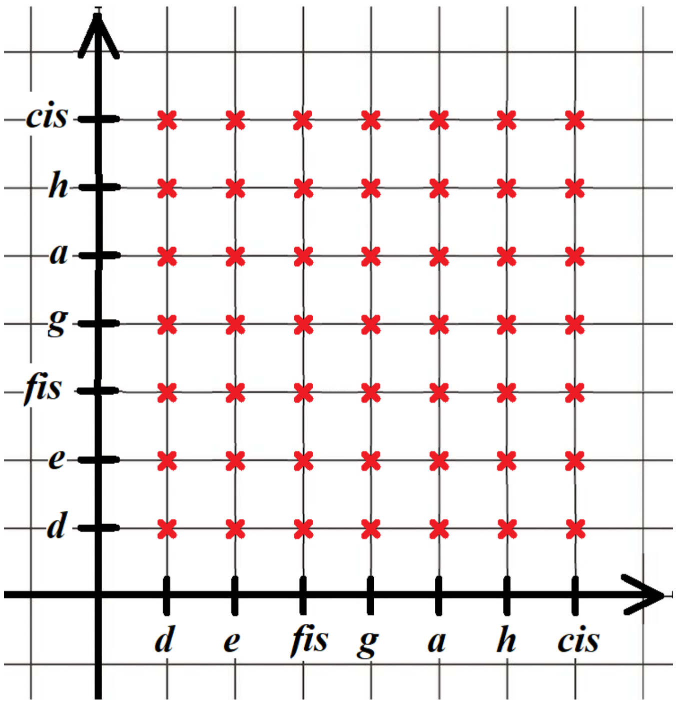
Příkladem kartézského součinu na klaviatuře se nabízí kartézský součin „klavírního univerza“, tedy kartézský součin množin všech tónů klaviatury $U \times U =$

U^2 = {(A^2, A^2), (A^2, Ais^2), (A^2, H^2), (A^2, H^2), (A^2, C^1), …, (h^4, c^5), (c^5, c^5)}. Protože počet kláves na klasické klaviatuře je 88 kláves, tedy $|A| = 88$, tato množina obsahuje $88^2 = 7744$ prvků uspořádaných dvojic.

Definice: *Binární relace* ρ z množiny A do množiny B je libovolná podmnožina kartézského součinu $A \times B$. Symbolicky $\rho \subseteq A \times B$.

Pokud daná uspořádaná dvojice prvků (x, y) náleží vybrané podmnožině ρ kartézského součinu $A \times B$, tedy $(x, y) \in \rho$, říkáme, že prvek x je v relaci s prvkem y. Tuto skutečnost zapisujeme $x\ \rho\ y$.

Příkladem binární relace na množině kartézského součinu U^2 může být například relace „patřit do stejné tóniny“, konkrétně například „patřit do tóniny *D* dur“. Označme tuto relaci ρ_D a množinu všech tónů tóniny *D* dur jako *D* = {*d*, *e*, *fis*, *g*, *a*, *h*, *cis*}. Relace ρ_D je tedy množina ρ_D = {(*d*, *d*), (*d*, *e*), (*d*, *fis*), (*d*, *g*), (*d*, *a*), (*d*, *h*), (*d*, *cis*), (*e*, *d*), (*e*, *e*), (*e*, *fis*), (*e*, *g*), (*e*, *a*), (*e*, *h*), (*e*, *cis*), (*fis*, *d*), (*fis*, *e*), (*fis*, *fis*), (*fis*, *g*), (*fis*, *a*), (*fis*, *h*), (*fis*, *cis*), (*g*, *d*), (*g*, *e*), (*g*, *fis*), (*g*, *g*), (*g*, *a*), (*g*, *h*), (*g*, *cis*), (*a*, *d*), (*a*, *e*), (*a*, *fis*), (*a*, *g*), (*a*, *a*), (*a*, *h*), (*a*, *cis*), (*h*, *d*), (*h*, *e*), (*h*, *fis*), (*h*, *g*), (*h*, *a*), (*h*, *h*), (*h*, *cis*), (*cis*, *d*), (*cis*, *e*), (*cis*, *fis*), (*cis*, *g*), (*cis*, *a*), (*cis*, *a*), (*cis*, *cis*)}. Je vidět, že daná množina je ekvivalentní kartézskému součinu na množině *D*, tedy $\rho_D = D \times D = D^2$. Protože $|D| = 7$, množina ρ_D obsahuje $7^2 = 49$ uspořádaných dvojic. Znázornění binární relace ρ_D je na obrázku níže. (Pozn.: Jedná se o tóny v jedné oktávě.)



Obrázek 45: Binární relace ρ_D na množině U. Prvky této binární relace jsou vyznačeny červeným křížkem.

Definice (vlastností relací): Řekneme, že relace ρ na množině *A* je:

1. *reflexivní*, jestliže pro všechny prvky x z množiny *A* platí, že jsou v relaci samy se sebou, symbolicky $\forall x \in A: x \,\rho\, x$;
2. *symetrická*, jestliže pro všechny prvky *x*, *y* z množiny *A* platí, že je-li prvek *x* v relaci s prvkem y, pak je také prvek y v relaci s prvkem *x*, symbolicky $\forall x, y \in A: x \,\rho\, y \Rightarrow y \,\rho\, x$;
3. *antisymetrická*, jestliže pro všechny prvky x, y z množiny *A* platí, že je-li prvek x v relaci s prvkem y a zároveň je prvek y v relaci s prvkem *x*, pak platí, že jsou si dané prvky rovny, symbolicky $\forall x, y \in A: x \,\rho\, y \;\wedge\; y \,\rho\, x \Rightarrow x = y$;
4. *tranzitivní*, jestliže pro všechny prvky *x*, *y*, *z* z množiny *A* platí, že jestliže je prvek *x* v relaci s prvkem *y* a zároveň prvek *y* v relaci s prvkem *z*, pak je také prvek *x* v relaci s prvkem *z*, symbolicky $\forall x, y, z \in A: x \,\rho\, y \;\wedge\; y \,\rho\, z \Rightarrow x \,\rho\, z$.

1.4.1 Relace ekvivalence na klaviatuře

Definice: Binární relaci ρ na množině *A* nazveme *ekvivalencí*, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Ekvivalenci bývá zvykem označovat symbolem $\sim$.

Příkladem relace ekvivalence může být právě relace $\sim_D$ „patřit do tóniny *D* dur“ na množině kartézského součinu U^2 všech tónů klaviatury. Daná relace je reflexivní, protože všechny tóny jsou v relaci samy se sebou (tón *d* patří do tóniny *D* dur stejně jako tón *d*), symetrická, protože pro všechny tóny platí, že pokud jeden tón patří do tóniny *D* dur stejně jako druhý tón, pak i tento tón patří do stejné tóniny *D* dur jako první tón (např. tón *fis* patří do tóniny *D* dur stejně jako tón *e*, pak tedy i tón *e* patří do tóniny *D* dur stejně jako tón *fis*) a tranzitivní (např. tón *d* patří do tóniny *D* dur stejně jako tón *e* a tón *e* patří do tóniny *D* dur stejně jako tón *h*, pak také tón *d* patří tóniny *D* dur stejně jako tón *h*).

Relaci $\sim_D$ znázorňuje *Tabulka 9*, kde vlastnost, že daný tón je v relaci s jiným tónem, je vyznačena křížkem.

Tabulka 9: Vlastnosti relace „patřit do tóniny D dur“

$\sim_D$	*d*	*e*	*fis*	*g*	*a*	*h*	*cis*
d	X	X	X	X	X	X	X
e	X	X	X	X	X	X	X
fis	X	X	X	X	X	X	X
g	X	X	X	X	X	X	X
a	X	X	X	X	X	X	X
h	X	X	X	X	X	X	X
cis	X	X	X	X	X	X	X

Z tabulky je přímo vidět, že jde o relaci reflexivní (je vyplněna hlavní diagonála) a symetrickou (křížky jsou symetricky rozprostřeny podle hlavní diagonály).

Definice: Nechť relace R je ekvivalence na množině A. *Třídou ekvivalence* R příslušnou prvku $a \in A$ nazýváme množinu $R[a] = \{x \in A\colon a\,R\,x\}$.

Například ekvivalence R zadaná na množině všech tónů klavíru U předpisem „dva tóny jsou v relaci právě tehdy, pokud je najdeme na bílých klávesách klaviatury“, má dvě třídy, a to třídu obsahující např. klávesu *c* (bílá klávesa) a třídu obsahující např. klávesu *cis* (černá klávesa). Tato ekvivalence tedy dělí množinu U na množiny, které byly popsány na konci podkapitoly 1.3.1 praktické části, a to $R[c] = Z = \{A_2, H_2, C_1, \ldots, c^5\}$ jako množina všech bílých kláves a množinu $R[cis] = A^{\#} = \{Ais_2, Cis_1, Dis_1, Fis_1, Gis_1, Ais_1, \ldots, cis^4, dis^4, fis^4, gis^4, ais^4\} = A^{\flat}$ jako množinu všech černých kláves.

Definice: Nechť R je ekvivalence na množině A. Potom pro každý prvek $a \in A$ nazýváme *třídou prvku a* v ekvivalenci R podmnožinu $[a]_R = \{x \in A;\, x\,R\,a\}$.

Před vysvětlením příkladu třídy prvku na klaviatuře je nutné uvést, na jaké množině se bude ekvivalence zavádět. Aby nedocházelo k nepřesnostem v rámci enharmonické záměny tónů, bude množina všech kláves U pro tento příklad chápána jako sjednocení množiny $Z = \{A_2, H_2, C_1, \ldots, c^5\}$ a $A^{\#} = \{Ais_2, Cis_1, Dis_1, Fis_1, Gis_1, Ais_1, \ldots, cis^4, dis^4, fis^4, gis^4, ais^4\}$ popsanou v podkapitole 1.3.1 praktické části této práce. Mějme tedy ekvivalenci R definovanou na množině U zadanou předpisem „dva tóny jsou v relaci právě tehdy, když nesou stejný název bez ohledu na index“. Daná ekvivalence rozděluje klaviaturu právě na 12 tříd, kterým přísluší následující třídy prvků: $[c]_R = \{C_1, C, c, c^1, c^2, c^3, c^4, c^5\}$, $[cis]_R = \{Cis_1, Cis, cis, cis^1, cis^2, cis^3, cis^4\}$, $[d]_R = \{D_1, D, d, d^1, d^2, d^3, d^4\}$, $[dis]_R = \{Dis_1, Dis, dis, dis^1, dis^2, dis^3, dis^4\}$, $[e]_R = \{E_1,$

$E, e, e^1, e^2, e^3, e^4\}$, $[f]_R = \{F_1, F, f, f^1, f^2, f^3, f^4\}$, $[fis]_R = \{Fis_1, Fis, fis, fis^1, fis^2, fis^3, fis^4\}$, $[g]_R = \{G_1, G, g, g^1, g^2, g^3, g^4\}$, $[gis]_R = \{Gis_1, Gis, gis, gis^1, gis^2, gis^3, gis^4\}$, $[a]_R = \{A_2, A_1, A, a, a^1, a^2, a^3, a^4\}$, $[ais]_R = \{Ais_2, Ais_1, Ais, ais, ais^1, ais^2, ais^3, ais^4\}$, $[h]_R = \{H_2, H_1, H, h, h^1, h^2, h^3, h^4\}$. Jedná se tedy o množiny tónů vzdálených přesně o oktávu nebo její násobky. Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 10*).

Definice: Pro neprázdnou množinu A nazýváme systém neprázdných podmnožin $\mathcal{M}$ množiny A *rozkladem na množině* A, pokud splňuje následující dvě podmínky:

1. sjednocením všech množin systému $\mathcal{M}$ vznikne množina A, symbolicky $\bigcup_{X \in \mathcal{M}} X = A$;
2. prvky množiny $\mathcal{M}$ jsou po dvou disjunktní, symbolicky $\forall X, Y \in \mathcal{M}: X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$.

Prvky množiny $\mathcal{M}$ se nazývají třídy rozkladu množiny A.

Příkladem rozkladu na množině všech tónů klaviatury U mohou být právě množiny Z a $A^{\#}$, tedy $\mathcal{M} = \{Z, A^{\#}\}$. Další příklad rozkladu množin je vidět na *Obrázku 39* a *Obrázku 41*. Množina všech tónů chromatické stupnice Ch v rámci jedné oktávy je pomocí ekvivalence „být tónem na bílých klávesách“ rozdělena do dvou tříd ekvivalence C a P, které jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocením vznikne daná množina Ch.

1.4.1 Relace uspořádání na klaviatuře

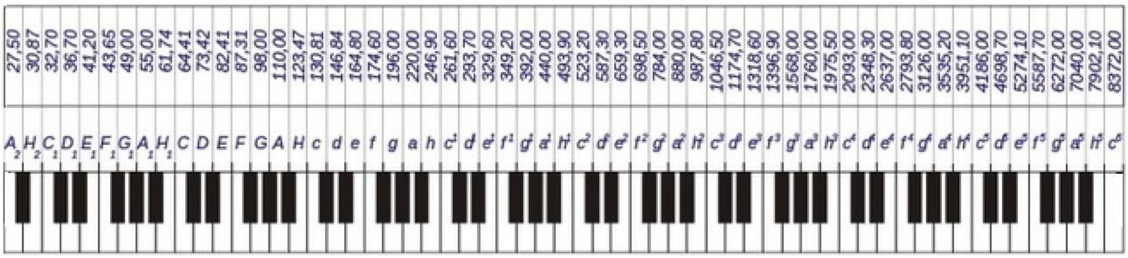
Definice: Binární relaci ρ na množině A nazveme *uspořádáním*, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Relaci uspořádání bývá zvykem označovat symbolem ≤.

Definice: Řekneme, že relace ρ je *úplné uspořádání*, pokud je uspořádáním, a navíc pro všechna $x, y \in A$ platí $x \rho y$ nebo $y \rho x$, symbolicky $\forall x, y \in A: x \rho y \vee y \rho x$.

Definice: Řekneme, že množina M je *dobře uspořádaná* právě tehdy, když její každá neprázdná podmnožina má nejmenší prvek.

Příklad úplného uspořádání a zároveň dobře uspořádané množiny jsou všechny tóny klaviatury, tedy celá množina U. Stačí definovat relaci ≤ na množině U zadáním „každé dva tóny jsou v relaci právě tehdy, když jeden tón má frekvenci větší nebo rovnu druhému tónu“. Klavír je laděn v rovnoměrně temperovaném ladění, takže každá klávesa odpovídá konkrétní hodnotě frekvence v hertzích. Všechny klávesy na klaviatuře tedy lze reprezentovat kladným číslem (viz *Obrázek 46*).



Obrázek 46: Rozsah klaviatury běžného klavíru (Baran, 2008; upraveno). Čísla nad klaviaturou označují kmitočet daných tónů rovnoměrně temperovaného ladění v Hz.

Celý případ ověřování vlastnosti reflexivity, antisymetrie a tranzitivity se tedy eliminuje na ověřování těchto vlastností pro podmnožinu přirozených čísel. Daná relace $\leq$ na množině U je reflexivní (pro všechny tóny platí, že každý tón má frekvenci stejnou jako tentýž tón), antisymetrická (pro všechny tóny platí, že pokud má jeden tón frekvenci větší nebo rovnu než druhý a zároveň druhý tón má frekvenci větší nebo rovnu než první, pak si nutně musí být dané frekvence tónů rovny) a tranzitivní (pro všechny tóny platí, že pokud má jeden tón frekvenci větší nebo rovnu než druhý a zároveň druhý tón má frekvenci větší nebo rovnu než třetí, pak nutně musí být frekvence prvního tónu větší nebo rovna než frekvence třetího tónu). Navíc pro všechny tóny platí, že jsou v relaci s ostatními, tudíž je množina všech kláves na klaviatuře úplně uspořádaná. Danou relaci $\leq$ lze znázornit na množině tónů jedné oktávy na klavíru pomocí tabulky. Tóny, které jsou v relaci, jsou znázorněny křížkem.

Tabulka 10: Vlastnosti relace „mít větší frekvenci“

$\leq$	*c*	*cis*	*d*	*dis*	*e*	*f*	*fis*	*g*	*gis*	*a*	*ais*	*h*	c^1
c	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
cis		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
d			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
dis				X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
e					X	X	X	X	X	X	X	X	X
f						X	X	X	X	X	X	X	X
fis							X	X	X	X	X	X	X
g								X	X	X	X	X	X
gis									X	X	X	X	X
a										X	X	X	X
ais											X	X	X
h												X	X
c^1													X

Z tabulky je přímo vidět, že jde o relaci reflexivní a antisymetrickou.

Množina „klavírního univerza U" je také dobře uspořádaná, protože má nejmenší prvek.

Úplného uspořádání množiny všech kláves klaviatury využívám především při výuce klavíru. Pro označení tónů, které jsou na klaviatuře více napravo (mají vyšší frekvenci), používám slovní spojení „výš na klaviatuře", naopak pro tóny, které se nachází na klaviatuře více vlevo, používám slovní spojení „níž na klaviatuře".

Příklady této podkapitoly lze využít do hodin seminářů z matematiky na SŠ i jako zpestření hodin seminářů z matematiky prvních ročníků studia na VŠ.

1.5 Posloupnosti na klavíru

Definice: Binární relaci $f \subseteq A \times B$ nazveme *zobrazením*, jestliže ke každému prvku x z množiny A existuje právě jeden prvek y z množiny B takový, že prvek x je v relaci s prvkem y, symbolicky $\forall x \in A\ \exists!\, y \in B: (x, y) \in f$. Skutečnost, že jsou prvky x, y zobrazení f v relaci zapisujeme $f(x) = y$.

Definice: Posloupnost a je zobrazení z množiny přirozených čísel do množiny reálných čísel, symbolicky $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Hodnoty posloupnosti značíme a_n a celou posloupnost bývá zvykem značit $\{a_n\}$ či $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Příkladem konečné posloupnosti může být prstoklad ve skladbičce Skákal pes přes oves zavedený v podkapitole 1.3.1. Jednalo by se o posloupnost o výčtu prvků $\{a_n\}_{n=1}^{24} = \{4, 4, 2, 4, 4, 2, 4, 4, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 4, 3, 3, 2\}$.

1.5.1 Aritmetická posloupnost

Definice: Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *aritmetická* právě tehdy, když existuje reálné číslo d takové, že n-tý člen dané posloupnosti lze zapsat rekurentním vzorcem $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$. Číslo d se nazývá *diference* aritmetické posloupnosti.

Rozdíl každých dvou po sobě následujících členů aritmetické posloupnosti je roven stejnému číslu. Příkladem aritmetické posloupnosti může být například kvintový kruh. Jedná se o posloupnost tónů od výchozího tónu C_1, které jsou od sebe vzdáleny o interval čisté kvinty, tj. 7 půltónů. (Poznamenejme, že konkrétní výchozí tón je vybrán z důvodu rozsahu klaviatury.) Přiřadíme-li výchozímu tónu C_1 číslo 0, lze tuto posloupnost zapsat pomocí rekurentního vzorce $a_n = a_1 + d(n - 1)$, kde zřejmě $d = 7$ a $a_1 = 0$, tedy $a_n = 7(n - 1)$. (Jedná se o násobky čísla 7.) Podobně lze pomocí aritmetické posloupnosti reprezentovat kvartový kruh, a to jako posloupnost danou rekurentně

$a_n = 5(n - 1)$ (při volbě stejného tónu). Protože množina tónů klaviatury je konečná, je v praxi konečná i tato aritmetická posloupnost. Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 11*).

Další reprezentaci konečné aritmetické posloupnosti lze najít na příkladu rozkladu zmenšeného septakordu. Jedná se o posloupnost tónů, jejichž intervaly mezi dvěma sousedními tóny jsou malé tercie (tj. 3 půltóny). Tato posloupnost má tedy diferenci $d = 3$. Při volbě výchozího tónu $c = 0$ lze zapsat tuto posloupnost rekurentně jako $a_n = 3(n - 1)$, při volbě výchozího tónu $e = 4$ jako $a_n = 4 + 3(n - 1)$ apod. Číslo výchozího tónu koresponduje s očíslováním tónů klaviatury tak, jak je na *Obrázku 29*. Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 12*).

Následující příklady lze využít při výuce hry na klavír a také při výuce hudební nauky u klavíru primárně pro žáky 4. ročníků. Z praxe učitelky hry na klavír však tyto příklady používám v průřezu všech ročníků od 4. ročníku výš.

Příklady:

1. *Zahrej tóny kvintového kruhu na klaviatuře. Jako počáteční tón zvol C_1.*
2. *Spočítej, kolik oktáv v kvintovém kruhu dělí počáteční tón C_1 od stejnojmenného koncového tónu.*
3. *Zahrej tóny kvartového kruhu na klaviatuře.*
4. *Spočítej, kolik oktáv v kvartovém kruhu dělí počáteční tón C_1 od stejnojmenného koncového tónu.*
5. *Vytvoř zmenšený septakord od tónu c^1, pokud víš, že jej tvoří čtyři tóny takové, že vzdálenost dvou sousedních tónů je rovna počtu půltónů, které obsahuje malá tercie.*

Řešení:

1. Jedná se o tóny $C_1, G_1, D, A, e, h, fis^1, cis^2, gis^2, dis^3, ais^3, eis^4 = f^4, his^4 = c^5$.
2. Vzdálenost tónu C_1 a c^5 je rovna 7 oktávám.
3. Jedná se o tóny $C_1, F_1, B_1, Es, As, des, ges, ces^1 = h, fes^1 = e^1, heses^1 = a^1, eses^2 = d^2, asas^2 = g^2, deses^3 = c^3$.
4. Vzdálenost tónu C_1 a c^3 je rovna 5 oktávám.

Role učitele hry na klavír na ZUŠ při užití daných aritmetických posloupností:

Učitel žákovi pokládá pomocné otázky, na které žák odpovídá, například:

Co je to kvintový kruh?

Co je to kvinta? Kolik půltónů obsahuje kvinta?

Které tóny tedy tvoří takový kvintový kruh, že počáteční a koncový tón nese stejné jméno?

Kolik oktáv takto utvořeného kvintového kruhu je mezi tóny C_1 od tónu c^5?

Co je to kvartový kruh?

Co je to kvarta? Kolik půltónů obsahuje kvarta?

Které tóny tedy tvoří takový kvartový kruh, že počáteční a koncový tón nese stejné jméno?

Kolik oktáv takto utvořeného kvartového kruhu je mezi tóny C_1 od tónu c^3?

Učitel vede s žákem dialog a návodnými otázkami se postupně dostává k odpovědi na dané otázky. Učitel monitoruje znalosti žáka z hudební nauky a uvádí je do praxe u klavíru.

Tento příklad běžně začleňuji do výuky hry na klavír. Dále přidávám využití kvartového a kvintového kruhu při tvorbě durových stupnic s křížky a béčky, žák určuje předznamenání daných stupnic apod.

1.5.2 Geometrická posloupnost podruhé

Definice: Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *geometrická* právě tehdy, když existuje reálné číslo q různé od nuly takové, že vztah mezi po sobě jdoucími členy dané posloupnosti je možné zapsat rekurentním vzorcem $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Číslo q je *kvocient* geometrické posloupnosti.

Každé dva po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti jsou stejným násobkem předchozího člene.

V podkapitolce 2.3.4 lze vyčíst několik hezkých posloupností. Na *Obrázku 16* jde vidět, že počet not obsažených v celé notě tvoří popořadě teoreticky nekonečnou geometrickou posloupnost $\{2^{n-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$ s kvocientem $q = 2$. Převrácené hodnoty těchto čísel, tedy zlomky udávající název not, tvoří nekonečnou geometrickou posloupnost $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ s kvocientem $q = \frac{1}{2}$.

Dále byla v téže kapitole objasněna funkce tečky za notou. Dvě tečky za notou prodlužují danou notu o polovinu hodnoty jejího trvání a pak ještě o polovinu z této poloviny. Například dvě tečky za půlovou notou prodlužují danou notu následovně $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{8}$. Wright (2009, s. 20) uvádí příklad, že se tato vlastnost dá induktivně zobecnit pomocí následujícího součtu řady. Označme *d* relativní dobu trvání noty prodloužené o *n* teček ($n \in \mathbb{N}$) a d_r relativní délku původní noty, ke které přidáváme tečky. Potom platí:

$$d = d\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) = d_r\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{i-1}}$$

Dále obecně pro součet prvních *n* členů geometrické posloupnosti s koeficientem $|q| < 1$ a prvním členem a_1 platí vzorec pro *n*-tý částečný součet řady:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1} = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

Po dosazení:

$$d = d_r\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2d_r\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = d_r\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Například pokud bychom uvažovali celou notu ($d_r = 1$) se třemi tečkami ($n = 3$), její celková relativní délka by po dosazení do vzorce výše vyšla $\frac{15}{8}$.

Pokud je členů geometrické posloupnosti nekonečně mnoho, součet řady nekonečné geometrické posloupnosti bude roven limitě jdoucí k nekonečnu z posloupnosti částečných součtů řady:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1\frac{1-q^n}{1-q} = a_1\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

Wright (2009, s. 20) pak teoreticky zkoumá relativní délku tónu s nekonečně mnoha tečkami. Pro daný případ lze odvodit vzorec pro výpočet relativní délky d_∞ takové noty následovně:

$$d_\infty = \lim_{n\to\infty} d_r\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2d_r - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2d_r$$

Například pokud bychom uvažovali půlovou notu ($d_r = \frac{1}{2}$) s nekonečně mnoha tečkami, celková relativní délka této noty by činila jeden celek, tedy jednu celou notu.

Absolutní délka takové noty závisí na tempovém označení. Například pro tempové označení ♩ = 100, tzn. v jedné minutě (60 s) zazní 100 čtvrťových dob, by absolutní doba trvání dané noty vypadala následovně. Nejdříve je třeba zjistit, jak dlouho trvá čtvrťová nota. Jednoduchou trojčlenkou zjistíme, že čtvrťová nota trvá $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ s. Protože relativní délka půlové noty s nekonečně mnoha tečkami je rovna jedné celé notě, tedy čtyřem čtvrťovým notám, absolutní délka d_a dané noty by byla $d_a = 4 \cdot \frac{3}{5} = 2{,}4$ s.

Pro absolutní délku noty s relativní délkou d_r a s nekonečně mnoha tečkami při tempovém označení ♩ = t, kde $t \in \mathbb{N}$ pak platí:

$$d_a = \frac{60}{t} \cdot 2d_r = \frac{120}{t} d_r$$

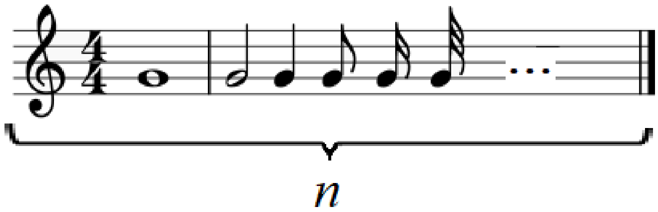
Výše uvedené i následující příklady lze začlenit jak do běžné výuky matematiky v rámci studia posloupností a řad, tak i do výuky hudební výchovy ve 3. nebo 4. ročnících vyšších stupňů gymnázií.

Příklady:

1. *Urči, z kolika čtyřčtvrťových taktů by teoreticky sestávala skladba složená z posloupnosti nekonečně mnoha not následujících vlastností:*
   - *počáteční nota dané posloupnosti je celá nota,*
   - *délka každé následující noty má poloviční hodnotu než předcházející nota.*
2. *Jak dlouho by trvala skladba z příkladu 1 při tempovém označení* ♩ = 60 ?
3. *Tečka za notou prodlužuje notu o polovinu její hodnoty. Dvě tečky za notou prodlužují danou notu o polovinu její hodnoty a ještě o její čtvrtinu (polovinu poloviny) atd. Hodnotě jaké noty (celé, půlové, čtvrťové, ...) by odpovídala čtvrťová nota s nekonečně mnoha tečkami?*

Řešení:

1. Náčrtek pro znázornění této situace by vypadal následovně:



Obrázek 47: Náčrtek k příkladu 1 podkapitolky 1.5.2.

Nejdříve je třeba zjistit, z kolika celých dob se taková skladba sestává. Celá nota obsahuje 4 doby, půlová 2, čtvrťová 1 atd. Danou posloupnost not lze tedy zapsat jako posloupnost dob $\left\{4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$. Jedná se o geometrickou posloupnost s prvním členem a_1 = 4 a kvocientem $q = \frac{1}{2}$. Celkový počet dob takové skladby je dán součtem nekonečné geometrické řady:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

Tato skladba tedy trvá přesně 8 dob, což odpovídá dvěma čtyřčtvrťovým taktům. Ačkoliv by tedy skladba byla zapsána teoreticky na nekonečný počet listů, skládala by se pouze ze dvou taktů.

Provedení takové skladby na klavíru by bylo samozřejmě nemožné. Počet zahraných tónů (prvních členů posloupnosti) by záležel na šikovnosti hbitých prstů klavíristy.

2. Tempové označení ♩= 60 znamená, že za 1 minutu zazní 60 čtvrťových not. Jedna čtvrťová nota tedy trvá 1 sekundu. Z příkladu 1 čtvrťová nota trvá na 1 dobu, celkových dob je v dané skladbě 8. Skladba by tedy trvala 8 sekund, přičemž v poslední sekundě by bylo zahráno nekonečně mnoho not.

3. V tomto příkladu je opět výhodné spočítat, kolik dob by daná nota obsahovala. Čtvrťová nota trvá na jednu dobu. Čtvrťovou notu s nekonečně mnoha tečkami lze tedy opět rozepsat jako součet nekonečně mnoha členů geometrické posloupnosti $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$, tj. geometrické posloupnosti s prvním členem a_1 = 1 a kvocientem $q = \frac{1}{2}$. Celkový počet dob čtvrťové noty s nekonečně mnoha tečkami lze tedy vyjádřit vzorcem pro součet nekonečné geometrické posloupnosti:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Daná nota tedy trvá přesně dvě doby, což odpovídá půlové notě.

Role učitele při vysvětlování těchto příkladů:

Učitel rozdá studentům zadání příkladu. Učitel řeší příklady na tabuli. Přitom pokládá studentům otázky vztahující se k postupu řešení daného příkladu.

Dané příklady je vhodné začlenit i jako nepovinný domácí úkol.

1.6 Kombinatorika na klavíru

1.6.1 Permutace bez opakování

Definice: *Permutace* P na množině $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ je každá bijekce $P: A \to A$.

Permutacemi bez opakování se tedy rozumí všechna možná uspořádání množiny o n různých prvcích tak, že každý prvek je v tomto uspořádání zastoupen právě jednou.

Věta: Pro každou n-prvkovou ($n \geq 1$) množinu $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ je počet jejích permutací bez opakování roven počtu možných pořadí této množiny, a to číslu $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Definujeme $0! = 1$.

Ve středoškolských učebnicích se často uvádí jednoduchý příklad permutací na tříprvkové množině. Tento příklad lze dále rozvést s pomoci klaviatury. Stačí vybrat množinu tří různých tónů a předvést příklad nalezení všech permutací na ní. Zvolme příhodně za tříprvkovou množinu A množinu tónů tónického kvintakordu v C dur, tj. $A = \{c^1, e^1, g^1\}$. Všechny možné permutace této množiny jsou uspořádané trojice (c^1, e^1, g^1), (c^1, g^1, e^1), (e^1, c^1, g^1), (e^1, g^1, c^1), (g^1, c^1, e^1), (g^1, e^1, c^1). Je vidět, že počet permutací odpovídá číslu $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. V notovém partu by příklad všech permutací i s prstokladem vypadal jako skladbička o šesti taktech, které by obsahovaly různá pořadí tónů c^1, e^1, g^1 (viz obrázek níže).

Obrázek 48: Permutace tónů kvintakordu C dur v notovém záznamu s prstokladem pro pravou ruku. Počet taktů odpovídá počtu všech možných permutací z těchto prvků.

Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 13*).

Výše uvedený příklad lze využít při výuce kombinatoriky ve 3. ročnících vyššího stupně gymnázií. Jednotlivé takty permutací lze několikrát opakovat i jako prstové cvičení při výuce klavíru na ZUŠ. Student si tak osvojí všechny možné způsoby navazování prstů v prstokladu 1, 3, 5.

Následující příklady lze využít při výuce permutací nebo jako procvičování učiva kombinatoriky ve 3. ročnících vyššího stupně gymnázií.

<u>Příklad:</u>

1. *Kolik taktů by měla skladba vytvořená ze všech permutací*

a) *čtyř tónů velkého kvintakordu stupnice C dur,*

b) *osmi tónů stupnice C dur tak,*

že v každém taktu bude právě jedna permutace těchto tónů?

2. *Jak dlouho by trvaly skladby z příkladu 1. při tempovém označení skladby ♩ = 60, pokud by skladba byla napsána a) v osminových, b) v šestnáctinových notách?*
3. *Kolika způsoby by bylo možné zapsat skladbu o a) 6, c) 24 taktech tak, aby se v ní žádný z taktů neopakoval a aby bylo pokaždé jiné pořadí těchto taktů?*
4. *Porovnej hodnotu příkladu 3. b) s hodnotou částic v jednom molu látky. Dále porovnej, jak dlouho by daná skladba trvala v případě, kdyby jeden takt trval 1 sekundu, se stářím Země/vesmíru.*

<u>Řešení:</u>

1. a) Tóny velkého kvintakordu v *C* dur jsou například v malé oktávě popořadě *c, e, g,* c^1, jedná se tedy o čtyři různé tóny. Počet možných pořadí čtyř tónů kvintakordu *C* dur je roven číslu 4! = 24. Každému pořadí ve skladbě odpovídá jeden takt, skladba by tedy měla 24 taktů.

   b) Tóny stupnice *C* dur jsou například v malé oktávě popořadě *c, d, e, f, g, a, h,* c^1. Jedná se tedy o 8 různých tónů, jejichž počet způsobů, jak je zahrát v různém pořadí, je roven číslu 8! = 40 320. Daná skladba by měla 40 320 taktů.
2. a) Skladba z příkladu 1. a) by při daném zadání v jednom taktu obsahovala 4 osminové noty, což odpovídá relativní délce dvou čtvrťových not. Dané tempové označení určuje, že jedna čtvrťová nota trvá jednu sekundu. Jeden takt trvá tedy dvakrát tolik, tj. 2 sekundy. Daná skladba má 24 taktů, trvala by tedy 48 sekund.

   Skladba z příkladu 1. b) by při daném zadání v jednom taktu obsahovala 8 osminových not, což odpovídá 4 čtvrťovým notám.

Jeden takt při daném tempovém označení tedy trvá 4 sekundy, celá skladba pak $4 \cdot 40\,320 = 161\,280$ sekund, což je 44 h 48 minut, tedy téměř dva dny.

b) Šestnáctinové hodnoty jsou polovinou relativní doby osminových not. Obě skladby by tedy trvaly dvakrát méně času, tedy 24 sekund a 21 hodin 24 minut.

3. a) Počet možných pořadí 6 taktů je $6! = 720$. Daná skladba by měla 720 taktů.

   b) Počet možných pořadí 24 taktů je $24! \sim 6 \cdot 10^{23}$ taktů.

4. 1 mol je hodnota látkového množství, která odpovídá zaokrouhleně $6{,}022 \cdot 10^{23}$ částic/entit. (Užívá se především v chemii.) Daná skladba by tedy obsahovala zaokrouhleně 1 mol taktů.

Pokud by jeden takt trval jednu sekundu, zahrát tuto skladbu by trvalo řádově $2 \cdot 10^{16}$ let. Stáří vesmíru se odhaduje řádově na 13,7 miliard let, tj. řádově 10^{10} let, což je $2 \cdot 10^{6}$krát méně než délka dané skladby. Tvor, který by si skladbu chtěl vyslechnout od začátku do konce, by musel prožít cca dva miliony našich vesmírů(!)

<u>Role učitele při vysvětlování daných příkladů:</u>

Učitel studentům rozdá zadání příkladů. Učitel volá studenty k tabuli, kteří sami nebo s pomocí ostatních studentů a učitele řeší danou úlohu.

Učitel v prvním příkladu poukazuje na vlastnost faktoriálu, že pokud zvětšíme číslo, ze kterého počítáme faktoriál, o 4, faktoriál tohoto čísla vzroste cca o 3 řády.

Ve druhém příkladu poukáže na to, jak nereálné by bylo skladbu o větším počtu taktů zahrát.

Ve třetím příkladu je vhodné, když před samotným řešením nechá studenty výsledek odhadnout. Dále učitel poukáže na vysoké hodnoty výsledků daných příkladů a také na to, že kombinatorika umožňuje prakticky téměř nekonečně mnoho možností skladby hudebních kompozic (které samozřejmě nic neříkají o tom, jak je daná hudební kompozice z hlediska hudební teorie hodnotná).

Jako alternativa běžného řešení příkladů u tabule se nabízí studenty rozdělit do skupin po 4 lidech a práci jim se sdělením jasných pravidel hodnocení práce zadat jako skupinovou. V praxi se mi osvědčilo, že pokud jsou studenti motivováni „nasbíráním“ malých jedniček a mají jasně daná pravidla, hodiny studenty baví a probíhají velmi dobře. Při definování pravidel kladu důraz na to, aby studenti mezi sebou komunikovali a byli si nápomocni při vysvětlování úloh. Tyto činnosti sleduji u každé skupiny v rámci celé hodiny a ohodnotím je malými jedničkami navíc.

1.6.2 Kombinace bez opakování

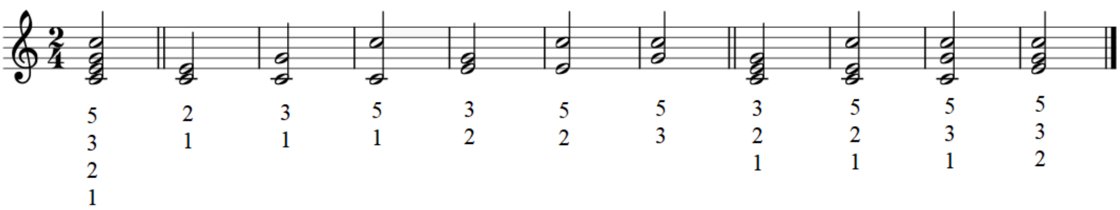
Definice: Nechť je dána množina o n různých prvcích. Neuspořádanou k-tici ($1 \leq k \leq n$) z n prvků nazveme *k-člennou kombinaci z n prvků* právě tehdy, když je v této k-tici zastoupen každý prvek nejvýše jednou.

Věta: Počet všech k-členných kombinaci bez opakování z n prvků je roven kombinačnímu číslu $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Příklad nalezení a určení počtu různých k-členných kombinací z n prvků na klaviatuře nabízí hra dvojhmatů a trojhmatů např. v rámci rozšířeného tónického kvintakordu, který sestává ze čtyř různých tónů. Zvolme tedy rozšířený tónický kvintakord *C* dur, který je tvořen tóny c^1, e^1, g^1, c^2 (tzn. $n = 4$).

Všechny možné dvojhmaty ($k = 2$) z této čtveřice jsou neuspořádané dvojice $\{c^1, e^1\}$, $\{c^1, g^1\}$, $\{c^1, c^2\}$, $\{e^1, g^1\}$, $\{e^1, c^2\}$, $\{g^1, c^2\}$. Je vidět, že jejich počet odpovídá kombinačnímu číslu $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$.

Počet všech možných trojhmatů ($k = 3$) z této čtveřice tónů je roven kombinačnímu číslu $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$ a tvoří je neuspořádané trojice tónů $\{c^1, e^1, g^1\}$, $\{c^1, e^1, c^2\}$, $\{c^1, g^1, c^2\}$, $\{e^1, g^1, c^2\}$. Níže je uveden notový part daných dvojčlenných a trojčlenných kombinací jakožto možných dvojhmatů a trojhmatů, které lze utvořit z rozšířeného tónického kvintakordu *C* dur.



Obrázek 49: Všechny možné dvojčlenné a trojčlenné kombinace utvořené ze čtyř tónů rozšířeného kvintakordu C dur (v prvním taktu) s prstokladem pro pravou ruku. Počet taktů dvojčlenných kombinací ze 4 prvků odpovídá příslušnému kombinačnímu číslu, jehož hodnota je 6. Počet taktů tříčlenných kombinací ze 4 prvků odpovídá příslušnému kombinačnímu číslu, jehož hodnota je 4.

Tento princip uplatňuji v praxi jako učitelka klavíru na ZUŠ v rámci rozšířeného tónického kvintakordu nebo jeho obratů. Žák nalezne tyto dvojhmaty a trojhmaty, které pak procvičuje v různých úhozových technikách. To pomáhá žákům procvičovat rozložení prstů pro hru daných akordů a také jim pomáhá zvyknout si na poměrně velký hmatový rozsah akordů na klaviatuře.

Následující příklady lze využít při výuce matematiky u klavíru i při výuce hudební výchovy v rámci učiva o kombinačních číslech ve 3. ročnících vyššího stupně gymnázií.

Příklady:

1. *Určete počet všech k-členných kombinací pro k = 1, 2, …, 5 z prvních pěti tónů stupnice C dur (tj. c, d, e, f, g).*
2. *Určete výčtem prvků množiny všech k-členných kombinací z příkladu 1.*
3. *Zahrajte tyto množiny na klavír.*

Řešení:

1. Jedná se o jednoduchý výpočet kombinačních čísel. Popořadě pro $k = 1$ je kombinační číslo $\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!4!} = 5$, pro $k = 2$ je $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$, pro $k = 3$ je $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$, pro $k = 4$ je $\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!1!} = 5$ a pro pro $k = 5$ je $\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!0!} = 1$.
2. $A_1 = \{\{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}\}$

   $A_2 = \{\{c, d\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{c, g\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{d, g\}, \{e, f\}, \{e, g\}, \{f, g\}\}$

   $A_3 = \{\{c, d, e\}, \{c, d, f\}, \{c, d, g\}, \{c, e, f\}, \{c, e, g\}, \{c, f, g\}, \{d, e, f\}, \{d, e, g\}, \{d, f g\}, \{e, f, g\}\}$

   $A_3 = \{\{c, d, e\}, \{c, d, f\}, \{c, d, g\}, \{c, e, f\}, \{c, e, g\}, \{c, f, g\}, \{d, e, f\}, \{d, e, g\}, \{d, f, g\}, \{e, f, g\}\}$

   $A_4 = \{\{c, d, e, f\}, \{c, d, e, g\}, \{c, d, f, g\}, \{c, e, f, g\}, \{d, e, f, g\}\}$

   $A_5 = \{\{c, d, e, f, g\}\}$
3. Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 14*).

Role učitele při řešení těchto příkladů:

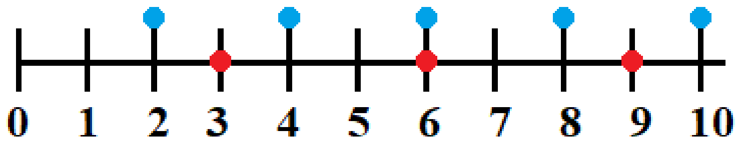
Učitel rozdá studentům zadání příkladů a nechá je samostatně pracovat. Pak vyvolává studenty k tabuli. Učitel po řešení příkladu 2 upozorní studenty na výhodné třídění jednotlivých prvků kombinací (postupným „zafixováním“ dvojic, ke které pak vybírá postupně další prvky, dále postupným „zafixováním“ trojic atd.). Na příklad 3 může vyvolat 5 dobrovolníků (na každou množinu jednoho).

Vhodné je také příklady 1 a 2 použít do písemky.

1.7 Nejmenší společný násobek na klavíru

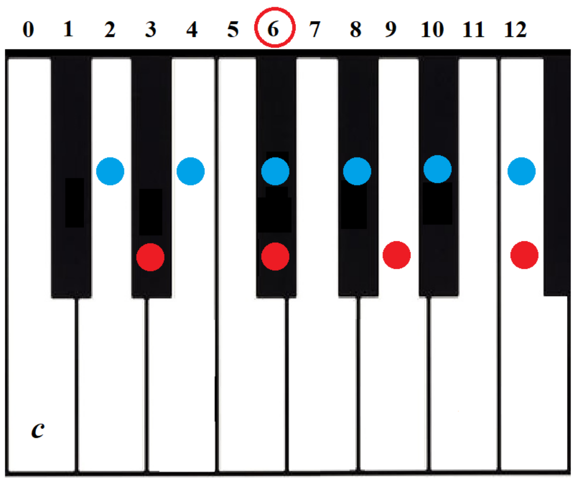
Definice: *Nejmenší společný násobek* čísel a, $b \in \mathbb{N}$, ozn. *nsn* (a, b), je nejmenší číslo $k \in \mathbb{N}$, pro které platí, že je celočíselným násobkem čísla a a zároveň je celočíselným násobkem čísla b.

Například nejmenší společný násobek čísel 2 a 3 by žáci základní školy hledali pomocí výpisu posloupnosti kladných násobků daných čísel – viz následující obrázek.



Obrázek 50: Hledání nejmenšího společného násobku čísel 2 a 3. Modře jsou znázorněny kladné násobky čísla 2, červeně kladné násobky čísla 3.

Rozložení klaviatury umožňuje kromě užitých matematizací i znázornění nejmenšího společného násobku daných čísel. Stačí si pod přirozenými čísly, jejichž nejmenší společný násobek chceme získat, představit počet půltónů. Například nejmenší společný násobek čísel 2 a 3 lze na klaviatuře znázornit následujícím způsobem. Nejdříve zvolíme tón, od kterého budeme počítat násobky půltónů (přirozeně tón *c*). Tento tón by odpovídal číslu nula na číselné ose výše. Poté zahrajeme směrem „nahoru" na klaviatuře posloupnost tónů, které jsou od sebe vzdáleny o dva půltóny, a pravou rukou posloupnost tónů, které jsou od sebe vzdáleny o tři půltóny. Nejmenší společný násobek je dán počtem půltónů tónu, na kterém se tyto násobky tónů sejdou. Tento postup znázorňuje následující obrázek.



Obrázek 51: Nejmenší společný násobek čísel 2 a 3 na klaviatuře. Čísla nad klaviaturou určují počet půltónů od zvoleného tónu c. Modře jsou znázorněny násobky čísla 2 (tóny vzdálené o 2 půltóny), červeně násobky čísla 3. Barvy sejdou na tónu fis, který je ve vzdálenosti 6 půltónů od výchozího tóu c – což určuje nejmenší společný násobek daných čísel (znázorněno červeným kroužkem u čísla 6 nad klaviaturou).

Tento příklad hudebně koresponduje s hledáním společných tónů celotónové stupnice od tónu *d* (násobky dvou – na obrázku modře) a rozkladu zmenšeného septakordu od tónu *es*. Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 15*).

Hledání nejmenšího společného násobku lze ukázat i pomocí kvartového a kvintového kruhu, které jsou hojně užívané v hudební teorii. Jak bylo řečeno v podkapitolce 1.5.1, jedná se o posloupnost tónů, které jsou od sebe vzdáleny o interval čisté kvarty/kvinty. Typická otázka zní, po kolika oktávách se bude opakovat název výchozího tónu (C_1), pokud budeme postupovat v kvartových/kvintových skocích. Tuto úlohu lze převést na hledání nejmenšího společného násobku počtu půltónů v kvartě/kvintě a oktávě.

V případě kvartového kruhu jde o hledání nejmenšího společného násobku čísel 5 a 12 (čistá kvarta obsahuje 5 půltónů, oktáva 12). Čísla jsou nesoudělná, proto je jejich nejmenším společným násobkem jejich součin, tedy číslo 60. Jedná se tedy o 60 půltónů od výchozího tónu C_1, což je 5 oktáv (v jedné oktávě je 12 půltónů). Odpověď tedy zní, že název výchozí tónu se bude opakovat po 5 oktávách, na klavíru se jedná o klávesu c^3.

V případě kvintového kruhu jde o hledání nejmenšího společného násobku čísel 7 a 12. Čísla jsou opět nesoudělná, proto analogicky jako u kvartového kruhu se bude název výchozího tónu opakovat po 7 oktávách, na klavíru se jedná o klávesu c^5.

Tyto příklady jsou součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 16*).

Výše uvedené příklady je vhodné zařadit do hodiny matematiky u klavíru na začátku učiva o nejmenším společném násobku v primách víceletých gymnázií nebo 6. ročníků 2. stupně ZŠ.

<u>Role učitele při hledání nejmenšího společného násobku na klavíru:</u>

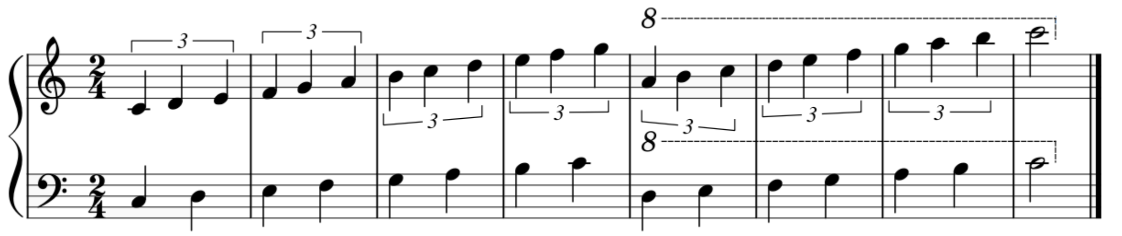
Učitel dětem rozdá přehled kláves klaviatury (*Příloha 2*). Učitel má nachystanou nejlépe barevnou lepicí gumu na označení kláves.

Učitel dětem vysvětlí, že číselnou osu s čísly z množiny $\mathbb{N}_0$ lze znázornit i na klaviatuře, protože klávesy klaviatury jsou uspořádány tak, při hře kláves z leva doprava znějí tóny postupně vyšší (stejně jako směr růstu čísel na číselné ose). Číslo nula lze tedy na klaviatuře zvolit libovolně, výhodné je jej zvolit na tónu kontra C_1. Každá další klávesa (černá nebo bílá) pak určuje následující číslo. Učitel vyzve studenty, aby očíslovali klávesy klaviatury. Přitom kontroluje, aby studenti při očíslování nezapomněli na černé klávesy.

Učitel dále studentům zadává úlohy na nejmenší společný násobek dvou čísel. Přitom upozorní, že pokud se někde objeví číslo 12, lze jej na klavíru při daném značení vnímat jako vzdálenost jedné oktávy, tedy dvou sousedních tónů *C*. Učitel volá ke klavíru studenty po dvou dobrovolnících a zadává, aby postupně zahráli a označili kousky lepicí gumy všechny násobky daných čísel (každý jednu množinu násobků jednou barvou). Dvojice dobrovolníků si mohou zvolit čísla, jejichž nejmenší společný násobek budou chtít na klaviatuře ověřit. (Je nutné volit čísla tak, aby jejich nejmenší společný násobek byl do čísla 85, aby jej bylo možné nalézt na klaviatuře.)

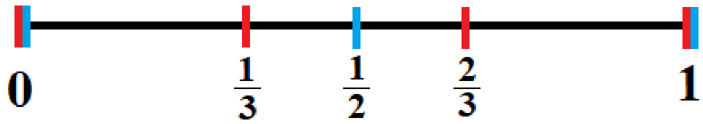
1.8 Rytmický poměr na klavíru

Při technických vycvičování hry na klavír se při výuce hry na klavír na ZUŠ hojně využívá hra stupnic v rytmickém poměru „dva proti třem“ či „dva ku třem“. Jedná se o techniku, kdy obě ruce hrají při stejném taktovém označení, avšak levá ruka hraje čtvrťové hodnoty not a pravá ruka hraje trioly (skupinky not, které jsou rytmicky rozděleny rovnoměrně tak, aby na dvě noty o dané hodnotě v levé ruce připadly tři noty v triolách). Například hra v rytmickém poměru dva ku třem vypadá v notovém partu při hře stupnice *C* dur následovně.



Obrázek 52: Stupnice C dur v rytmickém poměru „dva ku třem".

Matematicky vzato jde o to, že takty v pravé ruce jsou rytmicky přesně rozděleny na třetiny, zatímco v levé ruce na poloviny. Celkový rytmus tónů, které zaznívají po sobě v jednom taktu, je vyznačen na *Obrázku 53*. Úsečka znázorňuje jeden takt, čísla pod úsečkou udávají poměrnou dobu, kdy zazní další tón. Číslo nula reprezentuje první dobu v prvním taktu, číslo jedna pak první dobu ve druhém taktu (je vidět, že se na těchto dobách hrají tóny pravé i levé ruky současně).

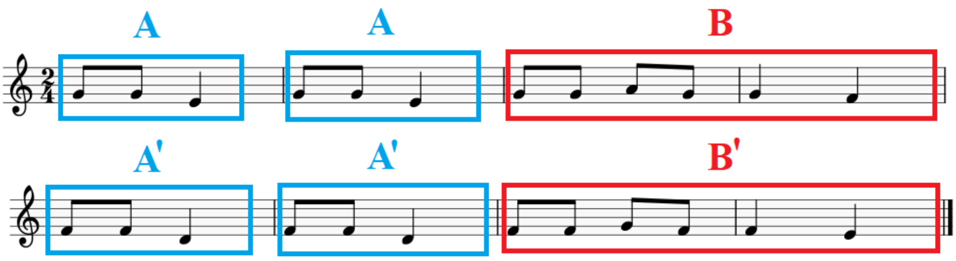


Obrázek 53: Rytmický poměr po sobě zaznívajících tónů stupnice zahrané v rytmickém poměru 2:3 v rámci jednoho taktu. Červeně je vyznačen rytmus pravé ruky, modře rytmus levé ruky.

Jedná se tedy o krásnou ukázku toho, jak „zní" dané zlomky. Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 17*).

1.9 Substituce

Substituce je nahrazení složitějších výrazů jednoduššími výrazy. Substituci lze při hře na klavír zavést hned několika způsoby. První způsob využívá substituci v jednoduchých skladbičkách. Příklad uvedu opět na písničce Skákal pes.



Obrázek 54: Užití substituce v písničce Skákal pes. Čárkovaně jsou vyznačeny oddíly, které mají stejnou strukturu jako nečárkované, ale hrají se od jiného tónu.

Velmi výhodné je užít substituci v rámci prstokladu při prstových cvičeních a klavírních etudách (funkční skladby určené k osvojení určitého stupně techniky klavírní hry). Příkladem může být vybraná pasáž z Etudy č. 1 *C* dur J. B. Cramera.

Obrázek 55: Užití substituce v Etudě č. 1 od J. B. Cramera. Červenými rámečky jsou vyznačeny části, které mají stejnou strukturu (část A) a hrají se od jiných tónů.

Substituci lze v tomto případě užít nejen na skupiny not, které mají stejnou strukturu, ale i na prstoklad. Označíme-li písmenem A posloupnost prstokladu jako uspořádanou čtveřici (4, 1, 2, 3) v pravé ruce (horní notová osnova) a týmž písmenem posloupnost prstokladu (1, 4, 3, 2) v levé ruce (spodní notová osnova), opakováním tohoto prstokladu vždy od následující bílé klávesy vznikne daný úsek skladby.

Substituce se využívá také při hře sonát. Jedná se o cyklickou skladbu, jejíž první věta bývá běžně napsána v sonátové formě. Sonátová forma je založena na kontrastním členění větných dílů a dělí se na expozici, provedení a reprízu. Expozice uvádí (exponuje) různá témata, provedení tato témata dále rozvádí a repríza témata expozice opakuje, respektive opakuje s obměnami týkajících se tonality (zejména v pozdějších sonátách). V souvislosti s tímto rozdělením se velké větné díly expozice, provedení a repríza označují popořadě písmeny A, B, A'. (Ištvan, 2003, s. 6)

Užití substituce v notových partech pomáhá pří výuce hry na klavír především pro zapamatování struktury delších skladeb. V praxi se mi nesčetněkrát ověřilo, že pokud má žák skladbu logicky členěnou, její zapamatování je snazší a rychlejší. Navíc není odkázáno na mechanickou paměť, která je velmi vratkou oporou při veřejných vystoupeních. Stačí si jednotlivé díly logicky rozčlenit podle témat a frází, tyto části označit písmeny a malé obměny těchto částí označit čárkovaně nebo pomocí indexů. Pomocí substituce větších ploch jsem na ZUŠ rozčlenila skladbu soudobého italského hudebního skladatele Ludovica Einaudiho pro žáka 7. ročníku I. cyklu. Ze skladby dlouhé na 7 stran pak žák vnímá strukturu ABCAA'B'C'DEE'FF'G, kde sobě podobné části jsou značeny čárkovaně. Student pak neměl problém si celou skladbu i její strukturu zapamatovat.

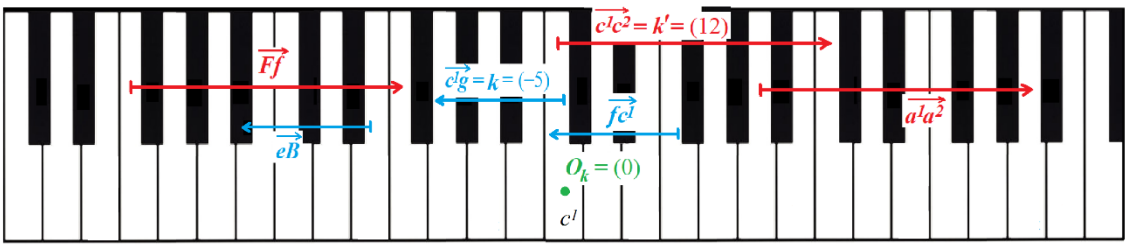
A konečně, pomocí substituce větších ploch lze rozčlenit každou písničku, ať už jde o lidovou nebo umělou. Příkladem může být americká lidová písnička Růže z Texasu, přetextovaná Ivo Fischerem. Píseň má 4 sloky, po kterých přichází refrén. Pokud zavedeme substituci tak, že písmenem A označíme sloku a písmenem B refrén, písničku lze napsat ve formě ABABABAB.

1.10 Klavírní „vektor"

Podkapitola 1.2 praktické části pojednávala o tom, že na klaviatuře lze „měřit" vzdálenosti pomocí půltónů ve dvou směrech, směru nahoru (na klaviatuře doprava) a dolů (na klaviatuře doleva). Daný interval (vzdálenost) mezi dvěma tóny je tvořen určitým počtem půltónů, které nezávisí na volbě výchozího tónu (stejně jako velikost úsečky dané dvěma body v analytické geometrii nezávisí na umístění úsečky v rovině), a dále jej lze utvořit ve dvou směrech. Tyto vlastnosti (vzdálenost a směr) tedy umožňují zavést paralelu vektoru na klaviatuře.

Je třeba určit souřadnicový systém. Ten je v tomto případě velmi jednoduchý – jelikož na klavíru v rámci výšky tónu existuje pouze jeden směr a k němu směr opačný, souřadnicový systém by byl reprezentován jedinou osou, jejíž počátek se nabízí umístit do tónu c^1 (na klaviatuře je umístěn téměř uprostřed a také se jedná o první tón hudební abecedy). Jednalo by se tedy o „vektor" v jednodimenzionálním prostoru.

Klavírní „vektor" by tak mohl být reprezentován jedinou souřadnicí z množiny celých čísel s následujícím významem: absolutní hodnota tohoto čísla by udávala počet půltónů intervalu („velikost vektoru") a znaménko plus nebo mínus by určovalo směr intervalu (nahoru od daného tónu +, nebo dolů –). Zbývá zavést označení „klavírního vektoru" a jeho zápis. Označme název „klavírního vektoru" jako $\boldsymbol{k}$ a jeho souřadnici $x \in \mathbb{Z}$ do kulatých závorek tak, jak je zvykem u vektorů v analytické geometrii. Například zápis $\boldsymbol{k} = (-5)$ by znamenal interval čisté kvarty ve směru dolů (doleva na klaviatuře). A opačně, například výraz „o oktávu výš" by byl reprezentován „klavírním vektorem" ve tvaru $\boldsymbol{k} = (12)$. Nulový klavírní „vektor" $\boldsymbol{o_k} = (0)$ by pak reprezentoval interval čisté primy. Pokud by byl klavírní „vektor" určen dvěma danými tóny, jeho označení by vypadalo například $\boldsymbol{c^1c^2} = \overrightarrow{c^1c^2}$. Následující obrázek znázorňuje dané klavírní „vektory" na části klaviatury od počátečního tónu c^1 a dalších tónech.



Obrázek 56: Příklady klavírních „vektorů" na klaviatuře.

Klavírní „vektory" by se v mnoha ohledech chovaly stejně jako lineárně závislé vektory v analytické geometrii. Daly by se zavést operace sčítání a odčítání vektorů a násobení vektoru celým číslem analogicky, jak je tomu v lineární algebře. Kvůli existenci nulového „klavírního vektoru" by množina klavírních „vektorů" s operací sčítání obsahovala neutrální prvek, kvůli existenci opačných vektorů by obsahovala opačný prvek.

Slovo „vektor" je však v uvozovkách oprávněně. Takto utvořené objekty nabývají pouze určitých hodnot. Jedná se tedy o diskrétní rozložení „délek vektorů".

Na tomto faktu ztroskotá snaha o začlenění klavírního „vektoru“ do vektorového prostoru, protože vektorový prostor je definován na neprázdné množině vektorů a *číselném tělese*. Množina celých čísel s operacemi násobení a sčítání však není tělesem. Klaviatura sama však má také omezený počet kláves, množina klavírních „vektorů“ s operací sčítání nemůže splňovat ani definici grupoidu. Představu klavírního „vektoru“ však lze využít u transpozic klavírních skladeb.

Pojem „standardní intervalový vektor“ užívá v zavedení teoretických operací se systémy množin také Ludvová (1975, s. 70). Ludvová (1975, s. 72) uvádí, že s pomocí intervalových vektorů lze posuzovat odlišnost intervalové stavby analyzované skladby v rámci statistického vyhodnocení. Tento pojem má však jiný význam než uvedený „klavírní vektor“.

1.11 Shodná zobrazení a geometrie na klavíru

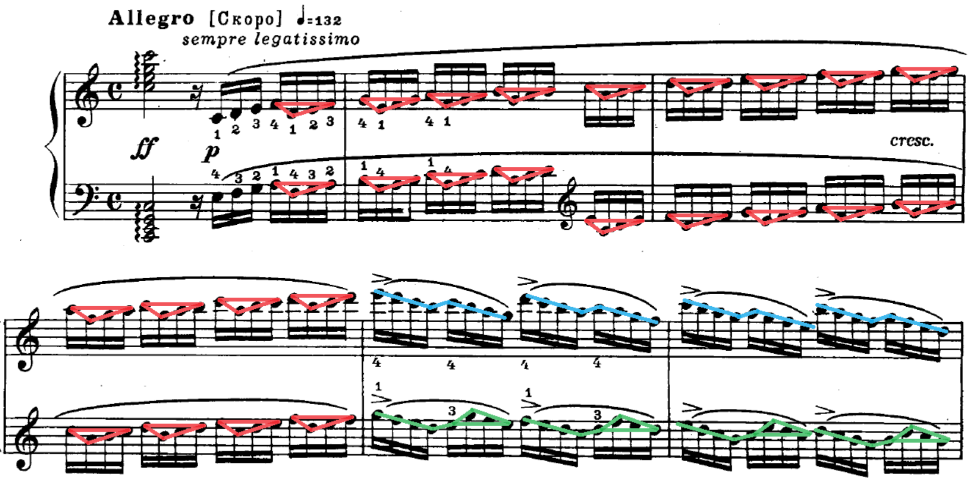
Definice: Zobrazení f v rovině se nazývá *shodné zobrazení* (*shodnost*), jestliže zachovává vzdálenosti, tj. pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' platí $|XY| = |X'Y'|$.

1.11.1 Posunutí

Definice: Posunutí $T(\boldsymbol{AB})$ (neboli translace) určené vektorem $\boldsymbol{AB}$ je zobrazení v rovině, ve kterém se zobrazí bod X na bod X' tak, že orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{XX'}$ jsou rovnoběžné, mají stejnou délku a stejný směr.

Zápis $T(\boldsymbol{AB})$: $X \rightarrow X'$ znamená, že bod X' je obrazem bodu X v posunutí určeném vektorem $\boldsymbol{AB}$.

Příklad posunutí na klaviatuře lze nalézt v mnoha skladbách. Bude jej vhodné uvést opět na vybraných pasážích z Cramerovy Etudy č. 1 *C* dur. Příhodným spojením hlaviček not v substituované části vznikne rovinný útvar, který se v notovém partu posunuje (viz *Obrázek 57*).



Obrázek 57: Posunutí ve vybrané části Cramerovy Etudy č. 1 C dur.

Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 18*).

Další příklad vizuálního posunutí na bílých klávesách klaviatury nabízejí staré církevní stupnice neboli mody. Existuje sedm církevních stupnic, které lze zahrát od jakéhokoliv tónu, pokud jsou zachovány intervalové poměry mezi sousedními tóny. Nejjednodušší způsob, jak zahrát staré církevní stupnice na klaviatuře, je zahrát popořadě tóny stupnice *C* dur (základní diatonické stupnice) vždy od jiného počátečního tónu. Tento tón se stává základním tónem, na kterém daná církevní stupnice začíná, a končí na témž tónu o oktávu výš. Níže je uveden přehled církevních stupnic vytvořených tímto způsobem.

Tabulka 11: Přehled církevních stupnic (modů)

Jónská stupnice (= *C* dur)	$\boldsymbol{c_1}$ d_1 e_1 f_1 g_1 a_1 h_1 c_2
Dórská stupnice	$\boldsymbol{d_1}$ e_1 f_1 g_1 a_1 h_1 c_2 d_2
Frygická stupnice	$\boldsymbol{e_1}$ f_1 g_1 a_1 h_1 c_2 d_2 e_2
Lydická stupnice	$\boldsymbol{f_1}$ g_1 a_1 h_1 c_2 d_2 e_2 f_2
Mixolydická stupnice	$\boldsymbol{g_1}$ a_1 h_1 c_2 d_2 e_2 f_2 g_2
Aiolská stupnice	$\boldsymbol{a_1}$ h_1 c_2 d_2 e_2 f_2 g_2 a_2
Lokrická stupnice	$\boldsymbol{h_1}$ c_2 d_2 e_2 f_2 g_2 a_2 h_2

Na klaviatuře nalezneme tyto stupnice pod bílými klávesami. Pokud tedy posuneme například jónskou stupnici o jednu bílou klávesu výš, vzniká dórská stupnice. Posunutím jónské stupnice o jednu bílou klávesu níž vzniká lokrická stupnice apod. Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 19*).

Příklad posunutí na klaviatuře „o klavírní vektor“ se nabízí v transpozicích. Transpozice skladby je převedení této skladby nebo její části do jiné tóniny, přičemž jsou zachované vzdálenosti mezi jednotlivými tóny (intervaly) (Zenkl, 2003). Při transpozici jsou tedy všechny tóny posunuty o stejnou vzdálenost nahoru nebo dolů. Matematicky vzato, transpozice v hudbě se chová stejně jako translace (posunutí) v geometrii. Například transpozice *T* skladby *X* z tóniny *C* dur do *E* dur by mohla být reprezentovaná následujícím zápisem: $T(\boldsymbol{c^1e^1})$: $X \rightarrow X'$, kde figuruje klavírní „vektor“ $\boldsymbol{c^1e^1} = \boldsymbol{k} = (4)$. Příklad transpozice části skladby *Balada pro Adélku* z tóniny *C* dur do tóniny E dur je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 20*).

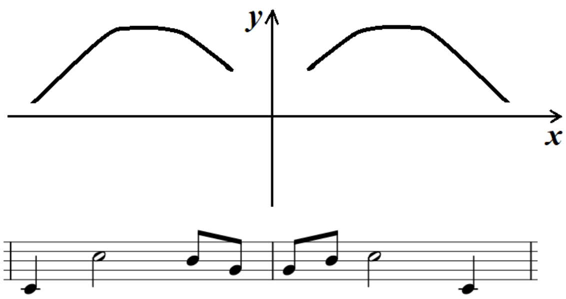
Princip posunutí při hře na klavír uplatňuji kromě vysvětlování transpozice také pro cvičení hmatové paměti. Příklad uvedu na hmatu velkého tónického kvintakordu v několika tóninách. Žáka nechám najít na klaviatuře tónický kvintakord např. v tónině *C* dur. Se zavřenýma očima pak s udržením stejného hmatu „cestuje“ po klaviatuře a hraje různé druhy kvintakordů. Matematicky vzato je tedy prstoklad a poloha ruky invariantní vůči posunutí. Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 21*).

1.11.2 Osová souměrnost na klaviatuře

Definice: *Osová souměrnost O*(*o*) s osou souměrnosti *o* je zobrazení v rovině, které zobrazí body následujícím způsobem:

- každý bod $X \notin o$ se zobrazí na totožný bod $X' = X$,
- každý bod $X \notin o$ na bod X' tak, že úsečka XX' je kolmá na osu *o* a střed *S* úsečky XX' leží na přímce *o*.

První příklad osové souměrnosti uvedu v notovém partu. Hudební protějšek osové souměrnosti je *retrogradace* (česky „rak“). Jedná se o techniku, kde část zkomponované skladby je po určité době zahrána zrcadlově. (Garland a Kahn, 1994, s. 73)



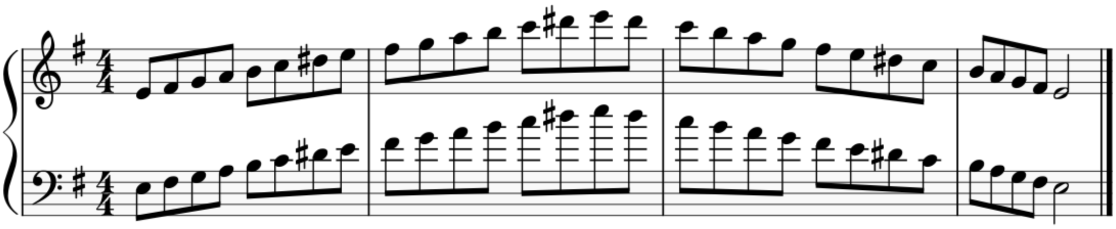
Obrázek 58: Ukázka retrogradace v notovém partu (dle Garland a Kahn, 1994).

Krásný příklad osové souměrnosti co do posloupnosti bílých a černých kláves na klaviatuře je například hra stupnice *E* dur v protipohybu. Mezi klavíristy je obecně známo, že se vůbec nejlépe ze všech stupnic hraje právě *E* dur. Je to proto, že posloupnost bílých a černých kláves je při hře v protipohybu stejná v obou rukách. V ostatních durových stupnicích kromě stupnice *C* dur tomu tak není. Navíc ve stupnici *E* dur poloha černých kláves kopíruje přirozené postavení prstů na klavíru. Je důležité zdůraznit, že je zde osová souměrnost ve smyslu posloupnosti bílých a černých kláves, nikoliv doslovného zrcadlení včetně vzdáleností kláves na klaviatuře. Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 22*).

Osovou souměrnost v pravém slova smyslu v rámci struktury klaviatury a členění kláves využívám při vycvičování levé ruky, která kvůli mé lateralitě podléhá dominanci pravé ruky. Opírám se o zkušenost, že lidské tělo pracuje přirozeně synchronně právě v zrcadlení činností končetin. Příklad využití osové souměrnosti uvedu při vycvičování části pasáže pro levou ruku v Etudě op. 10 č. 12 *c* moll (*„Revoluční etuda“*) F. Chopina. Nejdříve jsem si našla polohu na klaviatuře, která přesně zrcadlí polohu kláves v této pasáži. Protože je zachovaná poloha kláves, zachovává se i prstoklad. Tudíž jsem tuto pasáž zahrála týmž prstokladem v pravé ruce. Následně jsem zahrála část této pasáže několikrát dohromady v protipohybu. Levá ruka přirozeně přebírala kromě prstokladu i techniku hry v pravé ruce (akcenty, volnost zápěstí atd.). Nakonec jsem pasáž vycvičovala levou rukou. Ve výsledku tedy může pomocí osové souměrnosti „ta šikovnější“ ruka naučit hrát totéž ruku „méně šikovnou“. Při tomto „doslovném“ užití osové souměrnosti na klaviatuře je nutné při hraní počítat se značnou disharmonií. Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 23*).

1.11.3 Rovnoběžnost na klaviatuře

Rovnoběžnost má hudební protějšek jako hra *unisono* nebo hra *paralelně.* Nejvíce se uplatňuje ve stupnicích nebo v etudách, a to při hře v oktávách, terciích a sextách. Při hře v oktávách se navíc zachovávají i vzdálenost čisté oktávy mezi tóny hranými současně. Jedná se tedy o rovnoběžnost v takovém smyslu, jak ji zavádíme v matematice. Příklad rovnoběžnosti v notovém partu je znázorněn na *Obrázku 59*.

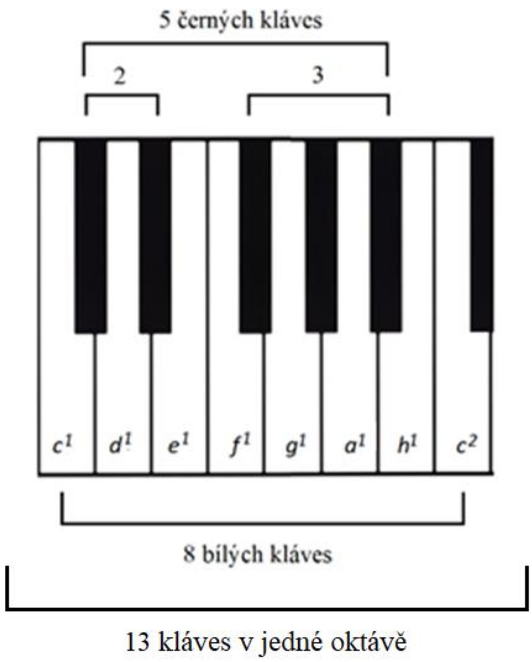


Obrázek 59: Příklad rovnoběžnosti v notovém partu. Harmonická stupnice e moll přes dvě oktávy v každé ruce hraná nahoru a dolů.

Tento příklad je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 24*).

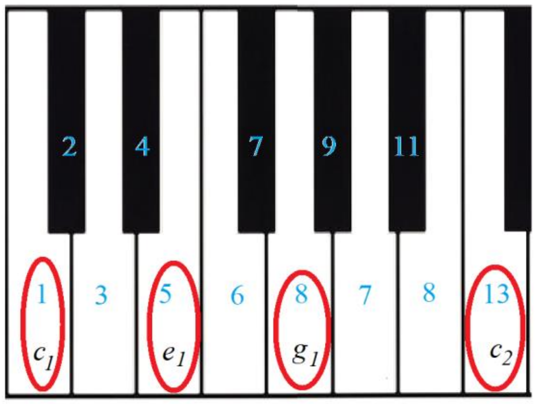
1.12 Fibonacciho posloupnost podruhé

Kuriozní užití Fibonacciho posloupnosti můžeme najít i na klaviatuře, a to hned několika způsoby. Jestliže nahlédneme do soustavy tónů v jedné oktávě od tónu c_1 po c_2, je možné si všimnout následujících souvislostí.

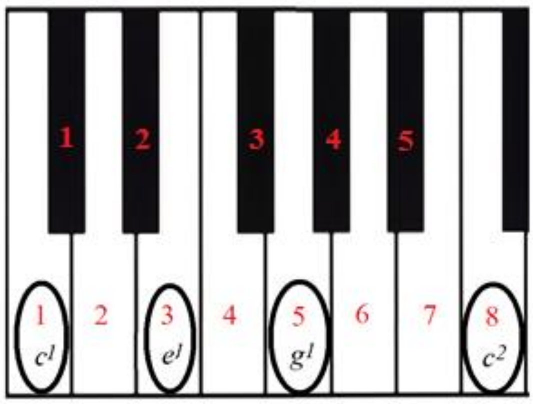


Obrázek 60: Fibonacciho čísla na klaviatuře (dle Garlad a Kahn, 1994, s. 111).

Další část Fibonacciho posloupnosti najdeme, když klávesy očíslujeme po půltónech od 1 do 13 (na obrázku níže modře). Potom základní prvek každé evropské harmonie – velký tonický kvintakord složený po řadě z tónů c^1, e^1, g^1, c^2 – můžeme zapsat posloupností 1, 5, 8, 13, což je podmnožina Fibonacciho posloupnosti. Podobně je tomu v případě, kdy bílé a černé klávesy očíslujeme vzestupně zvlášť od 1 do 8 a od 1 do 5 (na obrázku červeně). Tentýž kvintakord je nyní vyjádřen posloupností 1, 3, 5, 8 (na obrázku černě). (*Youtube,* 2014)

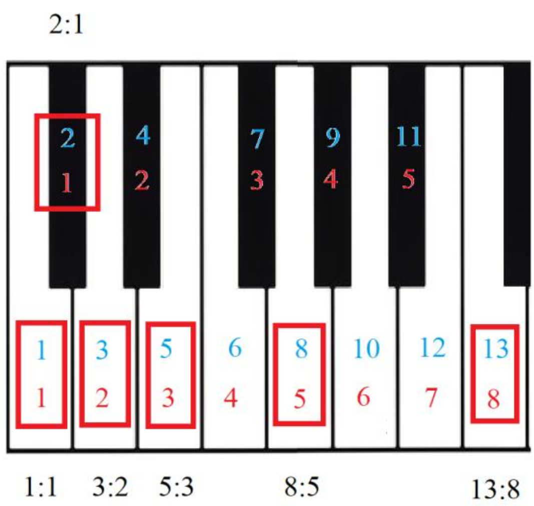


Obrázek 61: Fibonacciho čísla v rozšířeném tónickém kvintakordu v C dur (dle Youtube, 2012).



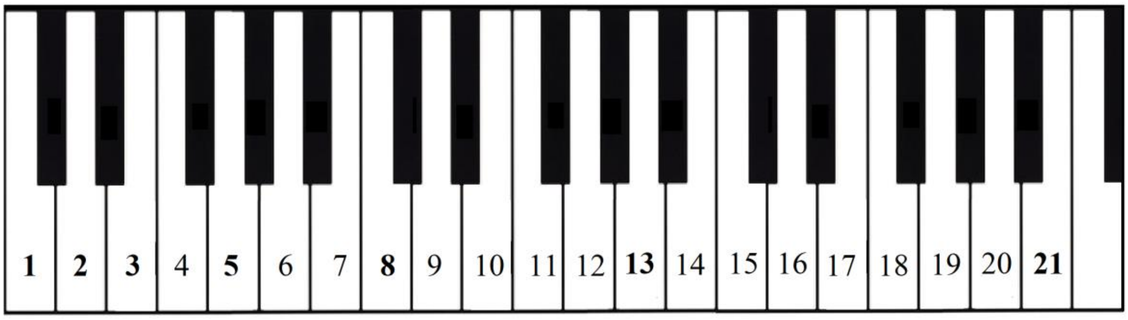
Obrázek 62: Jiný příklad Fibonacciho čísel na témž kvintakordu (dle Youtube, 2014).

A navíc pokud zkombinujeme obojí očíslování, na tónech c_1, cis_1, d_1, e_1, g_1, c_2 se vykrystalizuje dvojice čísel udávající poměr dvou sousedních čísel Fibonacciho posloupnosti, tedy prvních členů posloupnosti $\left\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, která limitně konverguje k hodnotě zlatého řezu. (*Youtube*, 2012)



Obrázek 63: Příklad poměrů dvou sousedních Fibonacciho čísel, který je přibližným vyjádřením hodnoty zlatého řezu (dle Youtube, 2012).

Jako další krásné užití Fibonacciho posloupnosti je *„Fibonacciho skladba“* pro klavír soudobého australského houslisty Roberta van Genda. Partitura této skladby je součástí *Přílohy 1*. Autor skladby ji vytvořil tak, že každou klávesu v tónině *C* dur očísloval jako na obrázku níže a skladbu vytvořil z různých kombinací sekvencí posloupnosti prvních čísel Fibonacciho posloupnosti 1, 1 2, 3, 5, 8, 11, občas přidal čísla 13 a 21. Autor skladby dále uvádí, že při modulaci skladby do tóniny *D* dur, *E* dur a *G* dur klávesy přečísloval tak, aby korespondovaly s novou tóninou (číslo 1 odpovídá tónu *d* apod.). (Gend, 2014, s. 74, 76)



Obrázek 64: Očíslování kláves klaviatury pro hru Fibonacciho skladby (dle Gend, 2014, s. 74).

Skladba je dlouhá 13 taktů a je strukturována na fráze, jejichž délka opět realizuje posloupnost prvních pěti Fibonacciho čísel. Ve skladbě jsou fráze značeny obloučkem. Autor v 7. taktu používá jediný tón, který není Fibonacciho číslem – nazývá jej „tónem překvapení“. Dodává, že je zajímavé, že pokud v této skladbě použije tón odlišné číselné hodnoty, než jsou čísla Fibonacciho posloupnosti, tento tón slyšitelně rozbourá melodickou sktrukturu skladby a zní „nepřirozeně“. (Gend, 2014, s. 76)

Gend (2014, s. 76) svůj článek uzavírá tím, že je zajímavé, že užití čísel Fibonacciho posloupnosti v klavírní kompozici zní velmi přirozeně. Není tedy divu, že tuto posloupnost a zlatý řez užili ve svých skladbách významní hudební skladatelé. Tato skladba je součástí DVD multimediálních příloh (*Ukázka 25*).

2. PŘÍPRAVA NA HODINU

2.1 Obecné informace

Při přípravě hodiny matematiky u klavíru se začleněním netradičních úloh z matematiky, které souvisí s hudbou, bylo nasnadě rozhodnutí, jak bude tato hodina probíhat. Protože jsem v daný den nemohla být v hodině přítomna, musela jsem vypracovat materiály tak, aby studenti mohli pracovat samostatně po celou dobu a aby vyučující práci studentů pouze monitoroval (a nesl tak méně zodpovědnosti za průběh hodiny). Zvolila jsem proto formu skupinových aktivit u klavíru a vyplnění pracovního listu.

Pracovní list byl vypracován pro primy víceletých gymnázií. Časová náročnost této aktivity je jedna vyučovací hodina (45 minut). Téma hodiny jsem zvolila tak, aby si žáci zopakovali a upevnili některé oblasti učiva, které jsme probírali v tomto školním roce.

Hodina proběhla ve třídě primy Biskupského gymnázia Brno v průběhu dne 18. 6. 2019 pod vedením Mgr. Lenky Dobrovolné (aprobace český jazyk, hudební výchova. Ve třídě bylo 26 studentů ve věku 12–13 let, z toho 8 dívek a 18 chlapců. Mezi chlapci byl jeden student se speciálně vzdělávacími potřebami. Přítomna byla i asistentka pedagoga.

Biskupské gymnázium a Brno v současné době navštěvuje 824 studentů. Gymnázium je vybaveno moderní technikou, několika laboratořemi, interaktivními tabulemi, počítačovými učebnami s dataprojektory, učebnami s hudebními nástroji, dvěma hřišti, knihovnou, aulou a sálem pro konání významnějších akcí a disponuje mimo jiné také elektronovým mikroskopem, na kterém sklízí úspěchy mnoha studentů.

2.2 Struktura hodiny

Před samotnou hodinou je třeba, aby učitel zajistil učebnu s klavírem, dostatečně velkou pro celou třídu. Klaviatura daného klavíru by měla mít standardní rozsah od A_2 po c^5. Na začátku hodiny učitel nechá děti rozdělit do 5 pracovních skupin (cca po 6 lidech), kde v každé skupině je alespoň jeden student, který umí hrát na klavír nebo který zná názvy tónů klaviatury. Dále učitel rozdá každému studentovi po jednom oboustranně tištěném pracovním listu, jehož záhlaví studenti vyplní. Pracovní list je součástí této diplomové práce v závěru kapitoly 2.3 praktické části.

Dále učitel každému studentovi rozdá papír s nadpisem *Moje reflexe hodiny*, který studenti anonymně vyplní až na konci hodiny. Tento dokument je součástí *Přílohy 4* této diplomové práce. Vyplněním tohoto papíru tak učitel získá zpětnou vazbu od studentů, jak se jim hodina líbila, s čím měli potíže, co si z dané hodiny odnesli a zda chtějí více takových hodin. Následně učitel každé skupině rozdá po jednom přehledu tónů klaviatury, která je součástí *Přílohy 2*.

Učitel studentům před zahájením práce přečte pravidla, která jsou součástí *Pokynů pro učitele* v *Příloze 3*. Mezi uvedená pravidla je vhodné zařadit i pravidla pro hodnocení práce, aby studenti byli motivování celou hodinu pracovat na daném úkolu. Já například volím systém odměňování určitého počtu malých jedniček podle kvality zpracované práce a podle míry spolupráce ve skupině. Termín „kvalita práce" bych však musela studentům jasně dodefinovat (správnost, čitelnost, úprava, …).

Učitel zahájí práci studentů, přičemž po celou dobu monitoruje jejich práci a je jim případně nápomocen návodnými otázkami pro řešení daného úkolu. Před koncem učitel upozorní studenty na vyplnění reflexe hodiny a na konci hodiny učitel vybere všechny materiály.

Cílem hodiny je začlenit netradiční úlohy mezipředmětových vztahů matematiky a hudby do praxe formou, která žáky aktivizuje. Dalšími cíli je upevnit poznatky o množinách a zlomcích, přenést zodpovědnost na studenty prostřednictvím skupinové práce, nechat studenty samostatně pracovat. Je potřeba, aby učitel v hodině práci studentů sledoval, aby byl schopen provést následující hodinu reflexi dané hodiny před studenty, vést s nimi diskuzi ohledně této hodiny a poukázat na kvality i úskalí jejich práce.

2.3 Pracovní list

Pracovní list je členěn do dvou kapitol – *A) Klavírní množiny* a *B) Netradiční počítání se zlomky*. Část *A* je obsáhlejší, na prvních pěti úlohách shrnuje učivo o množinách, které studenti probírali v prvním pololetí školního roku 2018/2019. V úlohách 5 a 6 je začleněn nový pojem doplňku množin. Tyto úlohy si kladou za cíl prozkoumat, zda studenti pochopí symbolický zápis této množiny a také, zda dojdou k řešení, pokud pracují ve skupině. Část *B* na dvou netradičních úlohách prověřuje početní operace (+, –, :) a přednost početních operací se zlomky, které studenti probírali ve druhém pololetí. Pracovní list včetně jeho řešení poskytují následující strany.

PRACOVNÍ LIST: Matematika u klavíru

Jméno a příjmení: ___________________________________

Jména spolupracujících žáků: ____

____

Třída: _________________________

A. KLAVÍRNÍ MNOŽINY

1.) Klaviaturu klavíru lze vnímat jako množinu všech tónů klavíru. Označme tuto množinu $U = \{A_2, B_2, H_2, C_1, \ldots, a^4, b^4, h^4, c^5\}$. Kolik prvků obsahuje daná množina? Počítej výhodně a popiš, jak jsi při počítání postupoval. Výsledek správně zapiš.

Nápověda: Všimneš si nějaké pravidelnosti v uspořádání černých a bílých kláves? Po kolika bílých tónech najdeme na klaviatuře opět stejný úsek?

<u>Můj postup při počítání kláves:</u>

<u>Odpověď:</u> Počet prvků množiny všech tónů klavíru je …….. . Matematicky:...............................

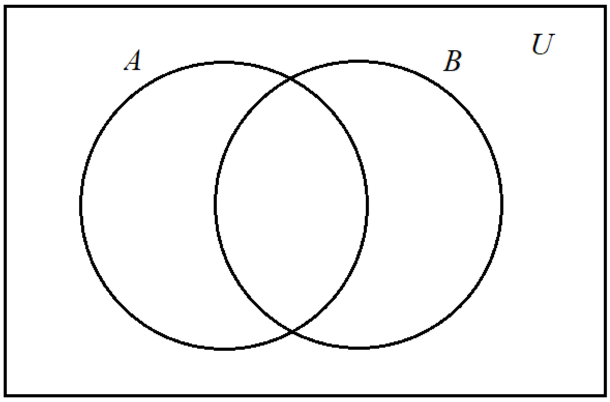
2.) Je dána množina U všech kláves (tónů) klaviatury. Přehled názvů všech tónů klaviatury vám poskytne vyučující.

a) Uveď příklad pětiprvkové podmnožiny A množiny U. Tuto množinu správně zapiš výčtem prvků.
<u>Řešení:</u>...

b) Uveď příklad šestiprvkové podmnožiny B množiny U tak, aby množina B měla s množinou A neprázdný průnik. Tuto množinu správně zapiš výčtem prvků.
<u>Řešení:</u>...

c) Zahrej prvky množin A a B na klavír.

3.) Doplň Vennův diagram množin A, B z příkladu 2.



4.) Pomocí Vennova diagramu v příkladu 3 urči výčtem prvků a správně zapiš tyto množiny:

- Sjednocení množin A a B: ....
- Průnik množin A a B: ....
- Rozdíl množin A a B (v tomto pořadí): ....
- Rozdíl množin B a A (v tomto pořadí): ....

Prvky daných množin (sjedocení, průniku, rozdílů) zahrej na klavír.

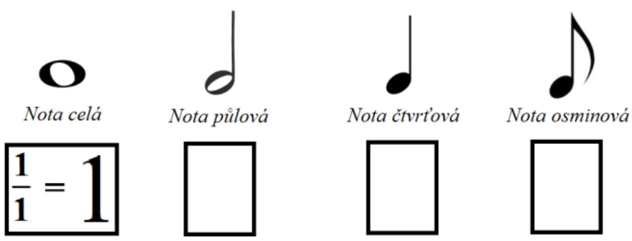
5.) Ve Vennově diagramu v příkladu 3 barevně vyznač množinu doplňku sjednocení množin A a B, tedy množinu $(A \cup B)' = U - (A \cup B)$.

6.) Urči počet prvků množiny z příkladu 5, tj.: $|U - (A \cup B)|$. Uveď krátký postup výpočtu a výsledek správně zapiš.

Řešení: ....

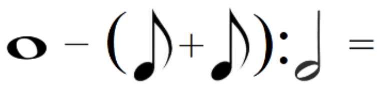
B. NETRADIČNÍ POČÍTÁNÍ SE ZLOMKY

1.) V hudbě rozdělujeme druhy not podle jejich délek. Níže jsou uvedeny čtyři z nich. V názvech těchto not jsou schované zlomky. Dokážeš je rozkódovat a doplnit do rámečků pod dané noty?



2.) Převeď počítání s notami na počítání se zlomky a výsledek zapiš jako zlomek. Dále přiřaď těmto zlomkům jim odpovídající notu. (Dvojtečka v příkladech má význam dělení.)

a) 

b) 

PRACOVNÍ LIST: Matematika u klavíru – ŘEŠENÍ

A. KLAVÍRNÍ MNOŽINY

1.) Klaviaturu klavíru lze vnímat jako množinu všech tónů klavíru. Označme tuto množinu $U = \{A_2, B_2, H_2, C_1, \ldots, a^4, b^4, h^4, c^5\}$. Kolik prvků obsahuje daná množina? Počítej výhodně a popiš, jak jsi při počítání postupoval. Výsledek správně zapiš.

Nápověda: Všimneš si nějaké pravidelnosti v uspořádání černých a bílých kláves? Po kolika bílých tónech najdeme na klaviatuře opět stejný úsek?

Můj postup při počítání kláves:

Například: Klavír obsahuje 7 pravidelných úseků (oktáv s rozsahem vždy *c* až *h*) po 12 tónech (bílých i černých) a dále navíc obsahuje jeden tón (c^5) z pětičárkované oktávy a tři tóny (A_2, B_2, H_2) ze subkontra oktávy. Celkový počet kláves je tedy:

$$\mathbf{7 \cdot 12 + 1 + 3 = 84 + 4 = 88}$$

Nebo například: V jedné oktávě je 5 různých černých kláves a 7 různých bílých kláves. Oktáv je na klavíru 7. Klavír dále navíc obsahuje jeden tón (c^5) z pětičárkované oktávy a tři tóny (A_2, B_2, H_2) ze subkontra oktávy. Celkový počet kláves je tedy:

$$\mathbf{5 \cdot 7 + 7 \cdot 7 + 1 + 3 = 35 + 49 + 4 = 88}$$

Odpověď: Počet prvků množiny všech tónů klavíru je **88**. Matematicky: $|\boldsymbol{U}| = \mathbf{88}$.

2.) Je dána množina *U* všech kláves (tónů) klaviatury. Přehled názvů všech tónů klaviatury vám poskytne vyučující.

d) Uveď příklad pětiprvkové podmnožiny *A* množiny *U*. Tuto množinu správně zapiš výčtem prvků.

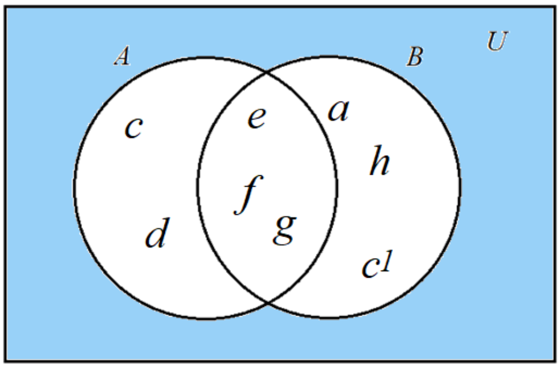
Řešení: Např. $\boldsymbol{A = \{c, d, e, f, g\}}$

Uveď příklad šestiprvkové podmnožiny *B* množiny *U* tak, aby množina *B* měla s množinou *A* neprázdný průnik. Tuto množinu správně zapiš výčtem prvků.

Řešení: Např. $\boldsymbol{B = \{e, f, g, a, h, c_1\}}$

e) Zahrej prvky množin A a B na klavír.

3.) Vyplň Vennův diagram množin z příkladu 2.



4.) Pomocí Vennova diagramu v příkladu 3 urči výčtem prvků a správně zapiš tyto množiny:

- Sjednocení množin A a B: $\boldsymbol{A \cup B = \{c, d, e, f, g, a, h, c^1\}}$
- Průnik množin A a B: $\boldsymbol{A \cap B = \{e, f, g\}}$
- Rozdíl množin A a B (v tomto pořadí): $\boldsymbol{A - B = A \backslash B = \{c, d\}}$
- Rozdíl množin B a A (v tomto pořadí): $\boldsymbol{B - A = B \backslash A = \{a, h, c^1\}}$

Prvky daných množin (sjedocení, průniku, rozdílů) zahrej na klavír.

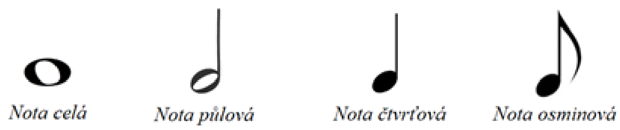
5.) Ve Vennově diagramu v příkladu 3 barevně vyznač množinu doplňku sjednocení množin A a B, tedy množinu $(A \cup B)' = U - (A \cup B)$. **Viz modře.**

6.) Urči počet prvků množiny z příkladu 5, tj.: $|U - (A \cup B)|$. Uveď krátký postup výpočtu a výsledek správně zapiš.

<u>Řešení:</u> $\boldsymbol{|U - (A \cup B)| = 88 - 8 = 80}$.

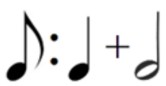
B. NETRADIČNÍ POČÍTÁNÍ SE ZLOMKY

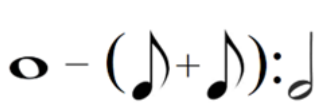
3.) V hudbě rozdělujeme druhy not podle jejich délek. Níže jsou uvedeny čtyři z nich. V názvech těchto not jsou schované zlomky. Dokážeš je rozkódovat a doplnit do rámečků pod dané noty?



$\boxed{\frac{1}{1} = 1}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\boxed{\frac{1}{4}}$	$\boxed{\frac{1}{8}}$

4.) Převeď počítání s notami na počítání se zlomky a výsledek zapiš jako zlomek. Dále přiřaď těmto zlomkům jim odpovídající notu. (Dvojtečka v příkladech má význam dělení.)

a)  $= \frac{1}{8} : \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 

b)  $= 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) : \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 

3. REFLEXE HODINY

3.1 Vyhodnocení a diskuze řešení úloh

3.1.1 Výsledky řešení úloh

Hodiny se aktivně zúčastnilo 25 dětí, které byly rozděleny do 5 pracovních skupinek po 5 lidech. Student se speciálně vzdělávacími potřebami se hodiny odmítl zúčastnit. Třídu Primu A jsem ve školním roce 2018/2019 učila matematice já, takže mohu v následujících odstavcích poskytnout informace o tom, kdy jsme probírali danou látku.

Část ***A) Klavírní množiny***

V **úloze 1** (počítání kláves na klavíru) uvedlo správný počet všech kláves (88) celkem 17 studentů, z toho správný postup uvedlo 14 studentů. Vyskytly se dva druhy špatných odpovědí. 5 studentů odpovědělo, že klaviatura má 52 kláves a 3 studenti odpověděli, že má klaviatura 87 kláves. Správný formální zápis počtu prvků pomocí množinové symboliky ($|U| = 88$) neuvedl nikdo.

Úlohu 2 ***a, b*** vyřešilo a správně zapsalo 11 studentů. 6 studentů vypsalo správné prvky (tóny), které splňují danou vlastnost, avšak chyběl jim správný formální zápis (označení množiny, množinové závorky). 6 studentů mělo formální zápis množin správně, ale chybovali ve výčtech prvků. 2 studenti chybovali ve výčtech prvků a neměli správně ani formální zápis.

S **úlohou 3** (doplnění prvků množin do Vennova diagramu) neměl problém žádný student.

Naopak **úlohu 4** (operace na množinách) zcela správně včetně všech formálních zápisů (sjednocení, průniku, rozdílů) množin nevyřešil nikdo. 9 studentů však uvedlo správný výčet prvků a správně použilo množinové závorky. 5 studentů vypsalo správné prvky, avšak bez množinových závorek. 5 studentů mělo formálně a věcně správně zapsán průnik i sjednocení množin, ale chybovalo v rozdílu množin. 3 studenti měli uveden správně výčet prvků (včetně množinových závorek) sjednocení a průniku množin, chybovali však v rozdílu množin. 3 studenti měli příklad vyřešený špatně.

Úlohu 5 (doplněk množin) barevně správně vyznačila jediná studentka. 13 studentů špatně vyznačilo místo doplňku sjednocení množin A a B. 11 studentů tuto úlohu neřešilo.

Počet prvků doplňku z **úlohy 6** uvedlo správně 14 studentů, 4 studenti měli výsledek špatně a 4 studenti úlohu neřešili. 3 studenti postupovali správně, ale počítali se špatným počtem všech tónů klaviatury.

Část *B) Netradiční počítání se zlomky*

Úlohu 1 vyřešilo správně 24 studentů. 1 student úlohu neřešil.

U **úlohy 2** uvedlo správný postup převedení na zlomky, správný výpočet i příslušnou notu celkem 8 studentů. 11 studentů uvedlo správný postup i výpočet, nenapsali však k výsledkům příslušnou notu. 5 studentů neuvedlo postup, ale uvedlo výsledek. 1 student úlohu neřešil.

3.1.2 Diskuze k výsledkům řešení úloh

Úloha 1 části *A* vedla na jednoduché spočítání všech kláves na klavíru. Studenti měli k dispozici jak samotný nástroj, tak přehled všech kláves klaviatury. Navíc úloha obsahovala dvě návodné otázky, jak výhodně spočítat všechny klávesy na klaviatuře. Je překvapivé, že správný (výhodný) princip počítání kláves a správný výsledek uvedlo pouze 56 % studentů. 12 % správných řešitelů postupovalo tak, že klávesy spočítali po jedné. 20 % studentů zapomnělo spočítat černé klávesy a 12 % studentů zřejmě zapomnělo v postupu přičíst poslední bílou klávesu (c^5). V zápisu počtu kláves se nejvíce objevovalo chybně „$U = \{88\}$“. Ačkoliv studentům bylo vysvětleno, jak se formálně správně zapisuje počet prvků množiny (byl jim dokonce vysvětlen pojem mohutnosti množiny), nikdo tento zápis neuvedl. Příčinou byla zřejmě skutečnost, že studenti téma množiny neměli čerstvě v paměti (toto téma se probíralo v prvním pololetí). Dále se často v postupu opakovala známá chyba, že za znaménko rovnosti studenti zapsali výsledek a rovnou i následující početní krok (viz *Příloha 5: Řešení pracovního listu z edukační praxe*). Protože však tato chyba nenarušuje správný postup počítání kláves, lze ji považovat za nepodstatnou. V opravě je na ni však upozorněno (*Příloha 6: Oprava pracovního listu z edukační praxe*).

Úloha 2 části *A* měla ověřit, jak si studenti pamatují správný zápis množiny výčtem prvků daných vlastností a také jak dokážou tyto poznatky aplikovat na množinu prvků, se kterými se v běžné hodině nesetkali (množinu všech kláves). Z výsledků této úlohy lze konstatovat, že zcela správně dané učivo pochopila a zapamatovala necelá polovina studentů (44 %). Učivo o prvcích množin daných vlastností správně pochopila téměř celá polovina studentů (48 %), ale část z nich zapomněla formální zápis množiny a část z nich si pořádně nepřečetla zadání v úloze 2 *b*, protože uvedla obě množiny pětiprvkové. 8 % studentů si nepřečetlo správně zadání a byli laxní v zápisu výčtu prvků. Celkem se však dá konstatovat, že téměř všichni studenti (98 %) základní znalosti o množinách pochytili správně.

Úloha 3 navazovala na 2. cvičení, avšak s vyplněním Vennova diagramu podle výsledků v pracovním listu neměl problém žádný student, což je pozitivní.

Úlohu 4 určila více než polovina studentů (56 %) správný výčet prvků daných množin nehledě na formální úpravu zápisu. Téměř třetina studentů (32 %) chybovala v rozdílu množin. Tito studenti si zjevně neuvědomili, že se nejedná o komutativní operaci, protože zapsali oba rozdíly stejně. 12 % studentů si vůbec nevybavilo pojmy sjednocení, průniku a rozdílu.

Z hlediska správných odpovědí dopadla nejhůř úloha 5. Jak bylo zmíněno v podkapitole 2.3, tato úloha včetně úlohy 6 měla prověřit, zda jsou studenti schopni porozumět zadání úkolu, což se v praxi neověřilo. Správnou odpověď našla pouze jedna studentka, která jako jediná dokázala pochopit text zadání úlohy. Je dobré poznamenat, že se tato studentka umístila mezi třemi nejlepšími v okresním kole 68. ročníku matematické olympiády (2018/2019) kategorie Z6. Je tedy pozitivní, že čas nadcházejících prázdnin na její soustředěnost v matematice neměl špatný vliv.

Je překvapivé, že ačkoliv téměř nikdo neuvedl správné řešení úlohy 5, správný postup úlohy 6 (o počtu prvků doplňku, který studenti měli barevně zaznačit do Vennova diagramu) uvedly více než 2/3 studentů (68 %).

Cílem části *B* bylo prověřit počítání se zlomky užitím substituce (symbol noty za příslušný zlomek a obráceně). Ačkoliv pojem substituce studenti neznají, s řešením úlohy 1 a 2 částí *B* prakticky nebyl problém. Více než 3/4 studentů uvedlo správnou výslednou hodnotu zlomků včetně postupu. Téměř čtvrtina studentů pak uvedla správné řešení, ale neuvedla postup. Jeden student úlohu neřešil.

Kromě studenta se speciálně vzdělávacími potřebami pouze jeden student odevzdal z poloviny vyřešený pracovní list. Všichni ostatní studenti se o řešení všech příkladů pokusili.

Z výsledků úloh je vidět, že bude třeba se studenty zopakovat rozdíl množin, formální zápis množin a počet prvků množin, seznámit je s pojmem doplněk množiny a upozornit na správný zápis kroků při použití znaménka „je rovno“.

Je důležité zohlednit, že studenti o této hodině nebyli informováni předem a také jim nebylo řečeno, jakou látku si mají na tuto hodinu zopakovat. Dále téma množiny byly probírány v začátku školního roku, takže pracovní list prověřil u studentů dlouhodobou paměť a schopnost dlouhodobé fixace učiva. Naopak téma zlomky měli studenti čerstvě v paměti, což koresponduje s výsledky úlohy *B*.

3.2 Vyhodnocení a diskuze reflexí hodin od studentů

3.2.1 Výsledky reflexí od studentů

Otázka 1 se zabývala tématem hodiny. 17 studentů odpovědělo, že tématem hodiny bylo *„propojení matematiky a hudby“*, *„matematika u klavíru“* nebo *„zajímavější hodina matematiky“*. 3 studenti odpověděli *„počítání s notami“*, 2 studenti odpověděli *„klavír“*, 2 studenti odpověděli, že téma bylo *„zajímavé“* a 1 student odpověděl *„nevím“*.

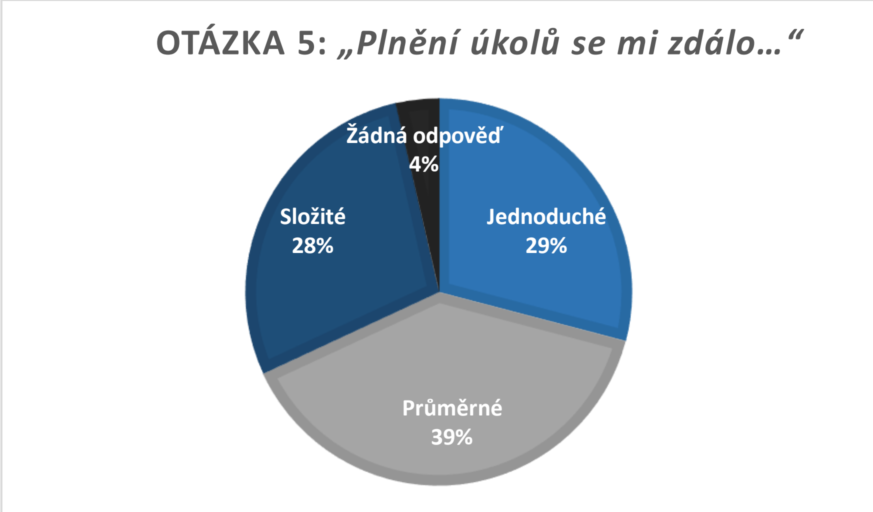
Na **otázku 2**, co se studenti dnes naučili nového, se objevilo 9 odpovědí, které souvisely s počtem kláves nebo oktáv na klaviatuře, 9 odpovědí *„nic“*, 5 odpovědí ve smyslu negace (*„že neznám doplněk“*, *„že se neumíme dohodnout“*, *„že neznám klaviaturu“*) a 3 odpovědi, *„že existuje spojení matematiky a hudby“* nebo *„že se matematika prolíná ve věcech, které by mě v životě nenapadly“*.

Na **otázku 3**, co se studentům líbilo, se objevilo 8 odpovědí *„práce v týmu“*, 5 odpovědí ve smyslu *„provedení hodiny a připravený pracovní list“*, 4 odpovědi *„část B – netradiční počítání se zlomky“*, 3 odpovědi *„všechno“* 2 odpovědi *„odreagování“* a další 4 následující odpovědi: *„spojení matematiky a hudby“*, *„Vennovy diagramy“*, *„že jsme se neučili“* a *„nic“*.

Otázka 4, s čím měli studenti potíže, skýtala 16 odpovědí, které souvisely s řešením části *A) Klavírní množiny* (Vennovy diagramy, rozdíl množin, doplněk 3 odpovědi *„s ničím“*, 3 odpovědi *„se vším“* a 2 odpovědi *„s klavírem“* a *„s částí B) Netradiční počítání se zlomky“*. 1 student pak odpověděl, že měl potíže s domluvou týmu.

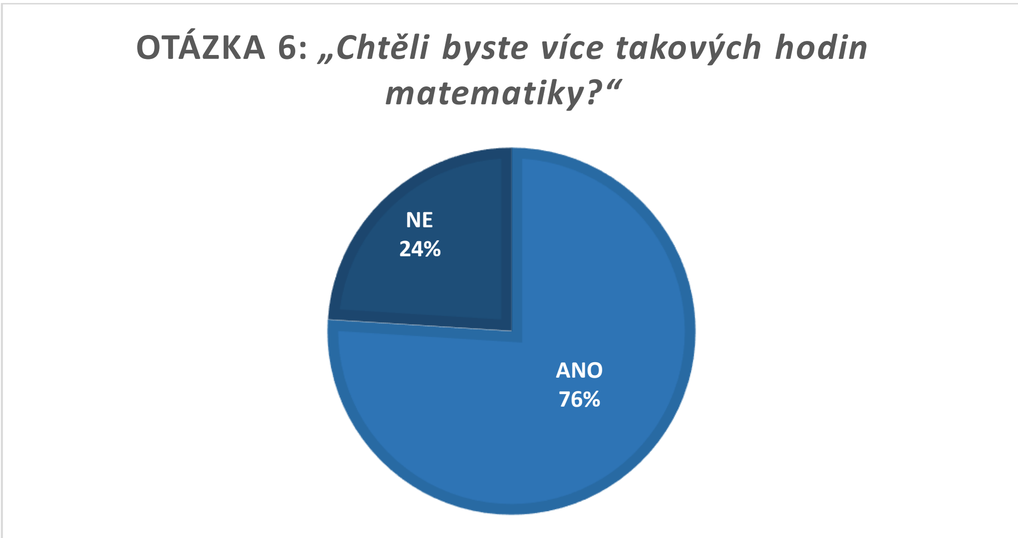
Otázka 5 (*„Plnění úkolů se mi zdálo…“*) nabízela škálu 3 odpovědí (*„jednoduché – průměrné – složité“*). *„Průměrné“* odpovědělo 11 studentů, *„složité“* odpovědělo 8 studentů, *„jednoduché“* odpovědělo 5 studentů a 1 student odpověď nevyplnil. Tento výsledek znázorňuje přehledně následující graf.

Graf 3: Procentuální zastoupení odpovědí studentů na otázku č. 5



Na **otázku** 6, zda by studenti chtěli více takových hodin matematiky, odpovědělo 19 studentů *„ano“* a 6 studentů *„ne“*. Tento výsledek je přehledně znázorněn v následujícím grafu.

Graf 4: Procentuální zastoupení odpovědí studentů na otázku č. 6



3.2.2 Diskuze k reflexím od studentů

Téma hodiny komplexně a správně určila převážná většina studentů (80 %). Pro 8 % studentů se tématem hodiny stal klavír, což neměl být záměr. 8 % studentů si nepřečetlo správně otázku, avšak jejich odpověď byla alespoň pozitivní.

Je vidět, že na otázku 2 se vyskytlo nejvíce negativních odpovědí (56 %). 36 % odpovědí uvedlo konkrétní příklad, co si z hodiny studenti odnesli a pouhých

12 % odpovědí měly přesah, protože si daní respondenti uvědomili mezipředmětové vazby matematiky a hudby. Příčina „nepopularity“ této otázky může tkvět v tom, že studenti nejsou zvyklí provádět běžně reflexe hodin a že s touto otázkou nejsou zvyklí pracovat.

Naopak v otázce 3 téměř třetina studentů ocenila práci ve skupině, pětina studentů vyzdvihla přípravu na hodinu a její průběh a zhruba šestina studentů uvedla, že se jí líbily příklady s netradičními příklady se zlomky. Jako velmi pozitivní shledávám fakt, že kromě jednoho studenta dokázali všichni najít na hodině něco, co se jim líbilo – i ti, kteří by takové hodiny už v matematice nechtěli.

Převážná většina studentů pak měla problém s vypracováním části *A) Klavírní množiny*, přičemž vyplnili, že se nejvíce opakoval problém s doplňkem množin (5. příklad). Více než desetina studentů však uvedla, že jim nedělal problém žádný příklad. Pravděpodobným důvodem pro tuto odpověď bude opět, že téma množiny bylo probíráno v průběhu prvního pololetí. Dále je vidět, že řešení úlohy 5 a 6 zaskočilo většinu studentů, což koresponduje s řešením těchto úloh (viz podkapitolka 3.1.1).

K otázce 5 ohledně složitosti zadání úloh se téměř 2/3 studentů (67 %) vyjádřilo, že úkoly byly průměrné nebo složité. Skoro třetina žáků pak uvedla, že plnění těchto úloh se jim zdálo jednoduché. Za faktory ovlivňující tento výsledek lze považovat novou zkušenost se strukturou hodiny (práce v týmech, netradiční spojení matematiky a hudby u klavíru), volbu množin jako jedné oblasti opakování učiva (žáci probrali toto učivo v prvním pololetí), příklad na doplněk množin, který byl pro studenty nový. Ačkoliv téměř 30 % studentů uvedla, že plnění úloh pro ně bylo složité, lze zvolenou obtížnost pracovního listu považovat za uspokojivou, protože se ve výsledku vyskytla celá škála odpovědí.

A konečně více než 3/4 studentů uvedla, že by chtěli začlenit více takových hodin do výuky matematiky. Společným jmenovatelem těchto odpovědí bylo, že studenti v převážné většině označili plnění úloh za průměrné nebo jednoduché, dále že pokud byl problém s nějakými úlohami, tak to byla úloha s doplňkem množin (což bylo pro studenty nové), a také ve většině případů studenti ocenili průběh hodiny a netradiční spojení matematiky a hudby. 24 % studentů se pak vyjádřilo, že takové hodiny matematiky nechce. Většina studentů, kteří zaznačili tuto odpověď, uvedla, že se jim plnění úloh zdálo složité, protože měli problém s převážnou většinou příkladů. Tento poměr zastoupení odpovědí na otázku č. 6 lze považovat za úspěšný.

3.2.3 Návrh na vylepšení hodiny

Lze předpokládat, že by výsledky reflexe dopadly lépe, kdyby studenti věděli, na co se mají připravit, proto by bylo dobré studenty o hodině informovat. Dále se nabízí uvést pravidla pro hodnocení pracovního listu, aby studenti byli více motivováni pracovní list vyplnit správně a čitelně. Je také vhodné studentům v rámci pravidel určit, kolika body budou ohodnoceni navíc, když se učiteli bude líbit spolupráce ve skupině.

Zajímavé by bylo vytvořit týmy po 4 lidech. Samozřejmě je potřeba zohlednit, zda se ve třídě nachází potřebný počet studentů, kteří hrají na klavír nebo alespoň znají názvy tónů na klaviatuře.

Také by se do hodiny dala zakomponovat „nápověda učitele“, kterou by si studenti mohli „koupit“ za strhnutí určitého počtu bodů. Vhodné by také bylo začlenit možnost vyhledávat informace na počítači nebo tabletu, pokud jej má škola k dispozici. Těmito prostředky by učitel docílil toho, že v hodině bude skutečně jen monitorovat práci studentů, na které tímto přenese zodpovědnost za práci v hodině.

ZÁVĚR

Tato diplomová práce se zabývá souvislostmi matematiky a hudby v historickém kontextu, popisuje vybraný matematický aparát v hudební teorii, přináší netradiční příklady „matematiky u klavíru“ aplikovatelné do běžných hodin matematiky nebo hudební výchovy na ZŠ či víceletých gymnázií jako aktivizační prvky, k nimž je vytvořeno DVD s obsahem nahrávek a videí vztahujících se k dané problematice. Diplomová práce také obsahuje pracovní list s těmito příklady, který je uveden do edukační praxe. Dále obsahuje reflexi vyučovací hodiny se začleněním netradičních příkladů „matematiky u klavíru“.

Cílem teoretické části bylo najít souvislosti matematiky a hudby v kurikulárních dokumentech, v historickém kontextu a v odborných publikacích. Tento cíl diplomové práce byl naplněn v prvních třech kapitolách.

V první kapitole jsou uvedeny souvislosti matematiky a hudby v didaktických publikacích, dále v rámci historické bibliografie, výukových podpor akademických pracovníků a videonahrávek z přednášek o matematice a hudbě.

Druhá kapitola pojednává o zvuku prostřednictvím užití mnohých matematizací. Součástí této kapitoly jsou i obrázky se záznamem zvuku vytvořené ve volně dostupném programu *Audacity*, které slouží pro názornost vysvětlovaných problematik.

Třetí kapitola shrnuje a vysvětluje na konkrétních hudebních příkladech užitý matematický aparát, o který se dále opírá první kapitola praktické části diplomové práce.

První cíl praktické části bylo nalézt netradiční příklady matematiky a hudby s využitím klavíru, které by bylo možné začlenit do hodin matematiky na základních školách a víceletých gymnáziích. Tento cíl byl zcela naplněn první kapitole praktické části. Dvanáct podkapitol obsahuje průřez převážně autorských netradičních úloh zaměřených na různé věkové skupiny studentů od 1. stupně základní školy přes úlohy pro 2. stupně ZŠ či nižších stupňů víceletých gymnázií až po vyšší ročníky gymnázií. Úlohy z kapitoly 1.4 lze využít jako netradiční příklady do seminářů z matematiky na vyšším stupni gymnázií či pro studenty seminářů prvních semestrů pedagogických fakult vysokých škol s kombinací oborů učitelství matematiky a hudební výchovy. Některé kapitoly obsahují i matematické příklady vhodné pro začlenění do výuky hry na klavír na ZUŠ. Vybrané kapitoly dále obsahují konkrétní zadání i řešení netradičních matematických příkladů, jejichž součástí je i krátký metodický komentář k roli učitele při začlenění těchto úloh do výuky.

V kapitole 1.12 praktické části je poukázáno na kuriozní užití Fibonacciho posloupnosti na klaviatuře. Je zde upozorněno na zahraniční článek australského houslisty, který zkomponoval *Fibonacciho skladbu* (*Fibonacci Composition*) pro klavír. Její nahrávka je součástí DVD multimediálních příloh, které se mi podařilo vytvořit k této diplomové práci navíc. Toto DVD obsahuje primárně videa názorných ukázek daných matematických příkladů na klavíru, a tak může sloužit učitelům matematiky a hudební výchovy jako opora při přípravě na hodinu nebo jako materiál k promítnutí do hodin se začleněním těchto příkladů do výuky.

Dalším cílem této diplomové práce byla tvorba pracovního listu jakožto přípravy na hodinu „matematiky u klavíru" pro 6. ročníky ZŠ a primy víceletých gymnázií. Tento cíl byl naplněn ve 2. kapitole praktické části.

Posledním cílem této diplomové práce bylo aplikovat dané poznatky jako aktivizační a motivační prvky do výuky matematiky na vybrané střední škole. Tento cíl byl naplněn ve 2. kapitole praktické části. Vytvořený pracovní list byl ověřen v rámci jedné vyučovací hodiny na Biskupském gymnáziu Brno. Podkapitola 2.1 praktické části obsahuje krátké informace o škole a třídě, kde praxe proběhla, a o struktuře dané hodiny.

3. kapitola praktické části pak sepisuje reflexi této hodiny formou vyhodnocení a diskuze. Z výsledků reflexe hodiny lze konstatovat, že tato hodina byla úspěšná, protože zhruba tři čtvrtiny studentů uvedla, že by do běžné výuky chtěli začlenit více takových hodin.

Vypracováním této diplomové práce jsem se dozvěděla o historických milnících souvislosti matematiky a hudby, rozšířila jsem si poznatky o základních druzích ladění a aplikacích matematiky v hudební teorii, prohloubila znalosti o zvuku a tónu a vytvořila soubor úloh, který bude součástí mého portfolia učitele matematiky na střední škole. V následujících letech bych ráda tyto příklady začlenila do běžné výuky matematiky na střední škole. Věřím, že tento počin sklidí své ovoce.

SEZNAMY

1. Seznam obrázků

2. Seznam tabulek

3. Seznam grafů

4. Seznam příloh

Příloha 1: Rober van Gend: *Fibonacciho skladba*
Příloha 2: Přehled názvů tónů klaviatury
Příloha 3: Pokyny pro učitele
Příloha 4: Dotazník – reflexe hodiny od studentů
Příloha 5: Řešení pracovního listu z edukační praxe
Příloha 6: Oprava pracovního listu z edukační praxe

5. Seznam multimediálních souborů na DVD

Ukázka 1: Zvuk komorního *a* s harmonickým průběhem (vygenerovaný programem *Audacity*)
Ukázka 2: Posloupnost prvních 20 alikvotních tónů na klavíru
Ukázka 3: Počítání kláves
Ukázka 4: Tvoření durových stupnic a pentatoniky pomocí posloupnosti počtu půltónů
Ukázka 5: Sjednocení množin na klavíru
Ukázka 6: Průnik množin na klavíru
Ukázka 7: Počet prvků sjednocení množin na klavíru
Ukázka 8: Rozdíl množin na klavíru
Ukázka 9: Doplněk množiny na klavíru
Ukázka 10: Relace ekvivalence na klavíru
Ukázka 11: Aritmetická posloupnost na klavíru – kvartový a kvintový kruh
Ukázka 12: Aritmetická posloupnost na klavíru – rozklad zmenšeného septakordu
Ukázka 13: Permutace na klavíru
Ukázka 14: Kombinace na klavíru
Ukázka 15: Nejmenší společný násobek čísel 2 a 3 na klavíru
Ukázka 16: Nejmenší společný násobek na klavíru – kvartový a kvintový kruh
Ukázka 17: Rytmický poměr 2:3
Ukázka 18: Shodná zobrazení na klavíru: posunutí 1
Ukázka 19: Shodná zobrazení na klavíru: posunutí 2
Ukázka 20: Shodná zobrazení na klavíru: posunutí 3
Ukázka 21: Shodná zobrazení na klavíru: posunutí 4
Ukázka 22: Shodná zobrazení na klavíru: osová souměrnost 1
Ukázka 23: Shodná zobrazení na klavíru: osová souměrnost 2
Ukázka 24: Rovnoběžnost na klavíru
Ukázka 25: Robert van Gend: *Fibonacciho skladba*

PŘEHLED UŽITÝCH ZDROJŮ

1. Bibliografické citace

BALADA, Jan, 2007. Rámcový vzdělávací program pro gymnázia: RVP G. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, ©2007. ISBN 978-80-87000-11-3.

BENSON, D. J. *Music*, 2013*: A Mathematical Offering*. 6. New York: Cambridge University Press. ISBN 978-052-1853-873.

BERGER, R. a B. RIEČAN, 1997: Matematika a hudba, VEDA, vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied. Bratislava. ISBN 80-224-0473-X.

DEVLIN, Keith J., 2011. *Jazyk matematiky: jak zviditelnit neviditelné*. 2. vyd. v českém jazyce. Praha: Argo. Aliter (Argo: Dokořán): Dokořán. ISBN 978-80-7363-364-6.

FAUVEL, John, Raymond FLOOD a Robin WILSON, 2003. *Music and Mathematics: From Pythagoras to Fractals*. 1. New York: Oxford University Press. ISBN 9780199298938.

GARLAND, Trudi Hammel a Charity Vaughan KAHN, 1994. *Math and music: harmonious connections*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications. ISBN 08-665-1829-0.HALUŠKA, Ján, 2006. *Hľadanie harmónie: Vyznanie matematika o hudbe a trochu aj o filozofii*. 1. Bratislava: VEDA, vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied. ISBN 80-224-0918-9.

IŠTVAN, Radomír, 2003. *Nauka o hudbeních formách: pomocný učební text pro posluchače konzervatoře*. Konzervatoř Brno.

KOFROŇ, Jaroslav, 2002. *Učebnice harmonie*. 10., upr. vyd., (V Editio Bärenreiter Praha vyd. 1.). Praha: Editio Bärenreiter Praha. ISBN 80-863-8514-0.

LOY, D. Gareth, 2006. *Musimathics: the mathematical foundations of music*. London: MIT Press. ISBN 02-621-2285-5.

LUDVOVÁ, Jitka. *Matematické metody v hudební analýze: K muzikologické aplikaci teorie informace a teorie množin*. Praha: Editio Supraphon, 1975.

MAREK, Vlastimil, 2000. Pythagorův monochord: Tajné dějiny hudby: Zvuk a ticho jako stav vědomí. *Baraka* [online]. Eminent. [cit. 2019-06-24]. Dostupné z: <http://www.baraka.cz/Marek/knihy/tajne_dejiny_hudby/Pythagoruv_monochord.pdf>

MOLNÁR, Josef, 2007. *Učebnice matematiky a klíčové kompetence* [online]. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, [cit. 2019-08-29]. ISBN 978-80-244-1722-6. Dostupné z: <http://esfmoduly.upol.cz/publikace/ucebnice_m.pdf>

MOUREK, Jindřich, 2005. *Fyziologie: učebnice pro studenty zdravotnických oborů*. Praha: Grada. ISBN 80-247-1190-7.

SERVÍT, František, 1907. Eukleidovy základy [online]. Praha. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Eukleides.pdf>

SVOBODA, Emanuel, 2014. *Přehled středoškolské fyziky*. 5., přeprac. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 978-807-1964-384.

WRIGHT, David, 2009. *Mathematics and music*. Providence, R.I.: American Mathematical Society. ISBN 08-218-4873-9.

ZENKL, Luděk, 2003. *ABC hudební nauky*. 8. vyd., v Editio Bärenreiter Praha vyd. 2. Praha: Editio Bärenreiter Praha. ISBN 80-863-8521-3.

2. Internetové zdroje

BÁRTOVÁ, Jitka, 2016. *Absolutní sluch v teorii i praxi* [online]. Praha [cit. 2019-02-12]. Diplomová práce. Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy. Dostupné z: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/173932/>

BROWN, Pebber, nedatováno. Pythagoras: Music, Geometry and Mathematics. *History of Music Theory* [online]. [cit. 2019-04-20]. Dostupné z: <http://www.historyofmusictheory.com/?page_id=20>

ČALOUD, Karel, nedatováno. Ladění. *Kurz harmonie bez not* [online]. [cit. 2019-06-24]. Dostupné z: <https://webhouse.cz/kurz-harmonie/ladeni.htm>

Fibonacci Sequence in Music, 2012. In: *Youtube* [online]. 10. 1. 2012. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=2pbEarwdusc>

Fibonacci Sequence in Music Original Theory, 2014. In: *Youtube* [online]. 30. 11. 2014. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=vlaxcze89Rs>

Frekvence a výška tónu, 2016. *ADM magazín: Analog Digital Music* [online]. **2016**(7) [cit. 2019-02-12]. Dostupné z: <https://admmagazin.cz/frekvence-vyska-tonu-zvuk-4/>

Fyzika: Hlasitost a intenzita zvuku, nedatováno. *ELUC: Elektronická učebnice* [online]. [cit. 2019-04-20]. Dostupné z: <https://eluc.kr-olomoucky.cz/verejne/lekce/1672>

GEND, Robert van, 2014. The Fibonacci sequence and the golden ratio in music. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics* [online]. **20**(1), 72-77 [cit. 2019-02-15]. ISSN 1310–5132. Dostupné z: <http://nntdm.net/papers/nntdm-20/NNTDM-20-1-72-77.pdf>

HALAS, Zdeněk, nedatováno. *Historie matematiky* [Brno (Czechia)]: KDM MFF UK. [15 s.]. [cit. 2019-02-10]. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Dejiny/Uvod.pdf>

HORDĚJČUK, Vojtěch, ©2018–2019. Zlatý řez. *VOHO* [online]. [cit. 2019-06-24]. Dostupné z: <http://voho.eu/wiki/zlaty-rez/>

James Drewry Steward, Ph.D, D.Sc(H), 2014. *Legacy* [online]. 5. 12. 2014 [cit. 2018-08-28]. Dostupné z: <https://www.legacy.com/obituaries/thestar/obituary.aspx?n=james-drewry-stewart&pid=173372811>

JAROŠOVÁ, Martina, 2009. Konstrukce zlatého řezu. *Rozhledy matematicko-fyzikální* [online]. © Jednota českých matematiků a fyziků, **84**(2), 12-16 [cit. 2019-04-20]. Dostupné z: <https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/146296/Rozhledy_084-2009-2_3.pdf>

KITTNER, Martin, 2017. *Stavba klavíru* [online]. © Copyright 2017. [cit. 2019-06-24]. Dostupné z: <http://www.pianoservice.cz/index.php?route=information/information&information_id=5>

Komponovat čísla — Večeře pro černou díru se blíží — Matematika hudby, 2012. [online]. In: *Port*. TV, ČT2, 10. 2. 2012, 15:20. Dostupné z: <https://www.ceskatelevize.cz/ivysilani/10121359557-port/212563241900003/titulky>

KRÁLOVÁ, Magda, nedatováno. Výška zvuku. Techmania Science Center: Eduportál [online]. [cit. 2019-06-23]. Dostupné z: <https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/fyzika/akustika/vyska-zvuku>

KRYSTEK, Jan, nedatováno. Metody analýzy časově proměnných signálů: Matematický popis harmonického signálu. *KME ZČU* [online]. [cit. 2019-02-10]. Dostupné z: <https://www.kme.zcu.cz/krystek/exm2/soubory/scitani_a_FFT_signalu.pdf>

MATĚNA, David, 2015. Slyšet hudbu znamená pochopit její strukturu. Koncert Matematika a hudba uzavřel letošní Krásu dneška. *Harmonie* [online]. **2015**(6) [cit. 2019-02-10]. Dostupné z: <https://www.casopisharmonie.cz/kritiky/slyset-hudbu-znamena-pochopit-jeji-strukturu-koncert-matematika-a-hudba-uzavrel-letosni-krasu-dneska.html>

NOCAR, David, 2008. *Mezipředmětové vztahy s matematikou - matematika kolem nás: Zlatý řez a Fibonacciho posloupnost* [online]. 17 s. [cit. 2019-06-24]. Dostupné z: <https://www.researchgate.net/publication/329131181_Mezipredmetove_vztahy_s_matematiko u_-_matematika_kolem_nas_Zlaty_rez_a_Fibonacciho_posloupnost>

OBDRŽÁLEK, Jan, 2003. Přehled a výklad hudebních ladění. *Laboratoř biokybernetiky a počítačové podpory výuky* [online]. Ústav patologické fyziologie [cit. 2019-04-20]. Dostupné z: <patf-biokyb.lf1.cuni.cz/projects/ladeni/prehled_a_vyklad_hudebniho_ladeni.doc>

O'CONNOR, J. J. a E. F. ROBERTSON, 1998. Leonardo Pisano Fibonacci. *School of Mathematics and Statistics* [online]. Scotland: University of St Andrews, 1998, JOC/EFR © October 1998 [cit. 2019-06-24]. Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/~history/Biographies/Fibonacci.html>

PETR, Jaroslav, 2008. Jak vidí moderní věda hudbu?. *21stoleti* [online]. **2008**(12) [cit. 2019-02-10]. Dostupné z: <https://21stoleti.cz/2008/12/19/jak-vidi-moderni-veda-hudbu/>

PODBRDSKÝ, Pavel, 2000. Teorie množin. In: *Korespondenční seminář* [online]. Valdek: MFF UK. [cit. 2019-05-25]. Dostupné z: <https://mks.mff.cuni.cz/library/TeorieMnozinPPo/TeorieMnozinPPo.pdf>

POKORNÝ, Jaroslav, 2013. *Informatika a hudba* [Brno (Czechia)]: KDM MFF UK. [51 s.]. [cit. 2019-05-25]. Dostupné z: <http://ktiml.mff.cuni.cz/fpi/data/2013-04-23-Pokorny_Jaroslav-InformatikaHudba.pdf>

ROBERTS, Gareth E., 2012. *Béla Bartók and the Golden Section* [Worcester (UK)]: College of the Holly Cross. [29 s.] [cit. 2019-04-20]. Dostupné z: <http://mathcs.holycross.edu/~groberts/Courses/Mont2/2012/Handouts/Lectures/Bartok-web.pdf>

REICHL, Jaroslav, ©2006–2019*a*. Fibonacciho posloupnost a zlatý řez. *Encyklopedie fyziky* [online]. [cit. 2019-02-10]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1496-fibonacciho-posloupnost-a-zlaty-rez>

REICHL, Jaroslav, ©2006–2019*b*. Intenzita zvuku. *Encyklopedie fyziky* [online]. [cit. 2019-02-10]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/208-zakladni-definice>

REICHL, Jaroslav, ©2006–2019*c*. Stavba a popis sluchového aparátu. *Encyklopedie fyziky* [online]. [cit. 2019-02-10]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/201-stavba-a-popis>

REICHL, Jaroslav, ©2006–2019*d*. Výška zvuku. *Encyklopedie fyziky* [online]. [cit. 2019-02-10]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/194-vyska-zvuku>

REICHL, Jaroslav, ©2006–2019*e*. Základní dělení zvuků. *Encyklopedie fyziky* [online]. [cit. 2019-02-10]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/186-zakladni-deleni-zvuku>

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání: RVP ZV, 2017. [online]. Praha: MŠMT. 164 s. [cit. 2018-8-28]. Dostupné z: <http://www.nuv.cz/uploads/RVP_ZV_2017.pdf>

ROKYTA, Mirko, 2014. *Mezi námi: Jsou matematika a hudba dvě strany jedné mince?* [online]. 15. 12. 2014, [cit. 2019-02-10]. Dostupné z: <https://www.matfyz.cz/clanky/121-mezi-nami-jsou-matematika-a-hudba-dve-strany-jedne-mince>

STEWARD, James D., 2010. Mathematics and Musics [přednáška]. In: *Mathematical Association of America: MAA* [online]. MAA Carriage House. [vid. 27. 4. 2010]. Záznam dostupný z: <https://www.maa.org/sites/default/files/audio_clips/StewartLecture2010.mp3>

ŠŤASTNÝ, Jaroslav, 2009. Hudební myšlení se nemusí nutně projevit v hudební produkci: Albert Breier. *HISvoice: Časopis o jiné hudbě* [online]. **2009**(6), 20-23 [cit. 2019-08-28]. Dostupné z: <https://www.hisvoice.cz/hudebni-mysleni-se-nemusi-nutne-projevit-v-hudebni-produkci-albert-breier/>

Tajemství hluchu a sluchu, 2007. [online]. In: *Port*. TV, ČT2, 17. 1. 2007. Dostupné z: <https://www.ceskatelevize.cz/porady/10121359557-port/21-tajemstvi-hluchu-a-sluchu/video/>

TYC, Tomáš, 2010. Akustika a hudební nástroje. *Zajímavá fyzika* [online]. [cit. 2019-02-12]. Dostupné z: <http://www.physics.muni.cz/~tomtyc/fyzika_hudebnich_nastroju.pdf>

VESELÝ, Jiří, 2013. Euler z jiného zorného úhlu. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* [online]. **58**(4), 301-310 [cit. 2019-08-28]. Dostupné z: <https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/143723/PokrokyMFA_58-2013-4_4.pdf>

3. Citace obrázků

ASHTON, Anthony, 2015. Harmonická řada alikvotních tónů. In: ASHTON, Anthony. *Harmonograf: vizuální průvodce matematikou hudby*. Praha: Dokořán. Pergamen. s. 9. ISBN 978-80-7363-668-5.

BARAN, Ivo, 2008. Musical Instruments and Voice – Frequencies and Tones. In: *Wikipedia* [online]. CC BY-SA 3.0. [cit. 2019-05-25]. Dostupné z: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a0/Hudobne_nastroje.svg> (upraveno)

FENDT, Walter, 2014. Pružinový oscilátor. In: FENDT, W. *Pružinový oscilátor: matematický dodatek* [online]. [cit. 2019-02-10]. Dostupné z: <http://www.walter-fendt.de/html5/phcz/springpendulum_math_cz.htm>

Fibonacciho čísla ve skladbě „Odrazy ve vodě“, 2012. In: ROBERTS, Gareth E., 2012. *Béla Bartók and the Golden Section* [Worcester (UK)]: College of the Holly Cross. [s. 27] [cit. 2019-04-20]. Dostupné z: <http://mathcs.holycross.edu/~groberts/Courses/Mont2/2012/Handouts/Lectures/Bartok-web.pdf>

Fibonacciho čísla ve skladbě „Hudba pro smyčce, bicí a celestu“, 1994. In: GARLAND, Trudi Hammel a Charity Vaughan KAHN. *Math and music: harmonious connections*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications. ISBN 08-665-1829-0.

GARLAND, Trudi Hammel a Charity Vaughan KAHN, 1994. Struktura taktů první věty Beethovenovy Symfonie č. 5 c moll („Osudová"), 1994. In: GARLAND, T. H. a C. V. KAHN. *Math and music: harmonious connections*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications. ISBN 08-665-1829-0

Harmonická řada alikvotních tónů, 2007. In: *Wikipedia* [online]. CC BY-SA 3.0. [cit. 2019-02-15]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Harmonick%C3%A1_%C5%99ada_(hudba)#/media/File:Harmonic_Series.png>

JAROŠOVÁ, Martina, 2009. Zlatý řez úsečky. In: JAROŠOVÁ, M. Konstrukce zlatého řezu. *Rozhledy matematicko-fyzikální* [online]. © Jednota českých matematiků a fyziků, **84**(2), 12-16 [cit. 2019-04-20]. Dostupné z: <https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/146296/Rozhledy_084-2009-2_3.pdf>

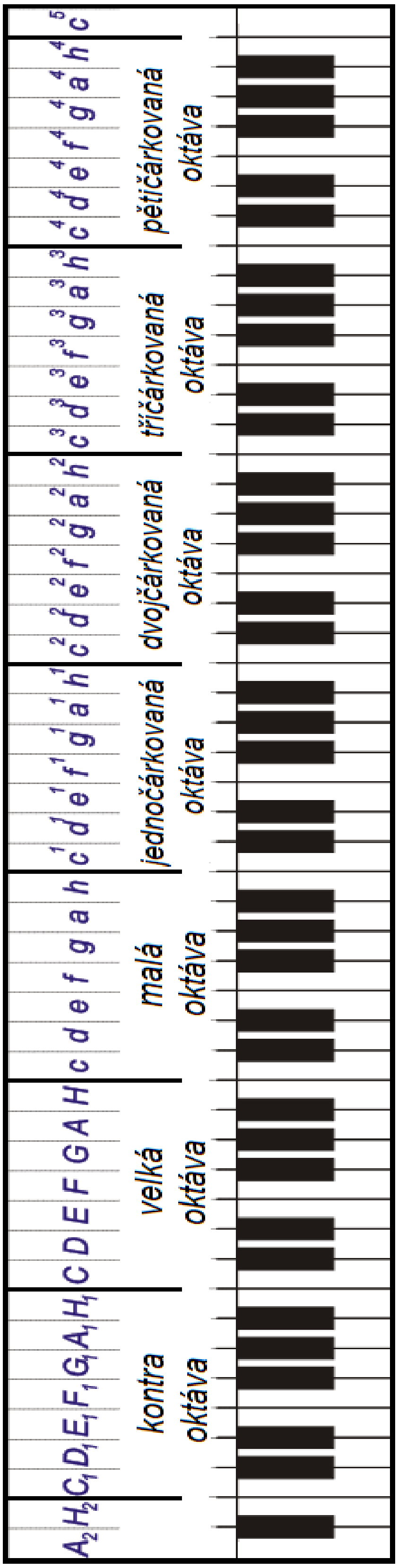
REICHL, Jaroslav, ©2006–2019. Fáze kmitavého pohybu. In: REICHL, J. *Encyklopedie fyziky* [online]. [cit. 2019-02-10]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/157-faze-kmitaveho-pohybu>

Stavba a popis sluchového aparátu, ©2006–2019*c*. In: REICHL, Jaroslav. *Encyklopedie fyziky* [online]. [cit. 2019-02-10]. Dostupné z: <http://imageproxy.jxs.cz/~nd01/jxs/cz~/553/113/c212b8b7ea_37316817_o2.png>

Vibrační mody struny, 2010. In: TYC, T. *Zajímavá fyzika* [online]. [cit. 2019-02-12]. Dostupné z: <http://www.physics.muni.cz/~tomtyc/fyzika_hudebnich_nastroju.pdf> (upraveno)

Příloha 1: Robert van Gend: *Fibonacciho skladba*

Příloha 2: Přehled názvů tónů klaviatury



Příloha 3: Pokyny pro učitele

POKYNY PRO UČITELE PŘI HODINĚ MATEMATIKY U KLAVÍRU

1. Učitel zajistí hodinu v učebně s klavírem (nejlépe křídlo s rozsahem klaviatury od A_2 po c^5).
2. Učitel nechá studenty rozdělit do 5 pracovních skupinek (cca po 6 lidech). Je lepší, aby ve skupinkách byl sudý počet dětí. **V každé skupině je alespoň jeden student, který hraje na klavír nebo který zná názvy tónů klaviatury**.
3. Učitel každému studentu rozdá pracovní list, jehož záhlaví studenti vyplní (jméno a příjmení, jména svých spolupracující studentů a třídu). Studenti dále vyčkají na pokyn učitele, kdy mohou zahájit práci. (Mohou si zatím číst zadání pracovního listu.)
4. Učitel každému studentu rozdá papír s nadpisem ***„Moje reflexe hodiny“***. Učitel upozorní studenty, že tento papír anonymně vyplní až **na závěr hodiny**.
5. Učitel rozdá každé skupině papír s přehledem názvů kláves klaviatury.
6. Před zahájením samostatné práce skupinek učitel studentům řekne pravidla:
   - **U klavíru bude vždy jen jedna skupina.**
   - **U klavíru se musí vystřídat všechny skupiny.**
   - **Úlohy nemusíte řešit postupně, můžete přeskakovat.**
   - **Cílem hodiny je, abyste společnými silami ve skupině vyplnili celý pracovní list a aby všichni studenti z vaší skupiny rozuměli tomu, co do pracovního listu vyplní. (Důležité je tedy spolupracovat.)**
7. Učitel zahájí práci studentů.
8. Učitel monitoruje práci studentů ve skupině.
9. Na závěr hodiny učitel upozorní studenty, aby anonymně vyplnili papír s nadpisem ***„Moje reflexe hodiny“***.
10. Po skončení hodiny učitel vybere pracovní listy, reflexe hodiny a přehledy tónů klaviatury.

Příloha 4: Dotazník – reflexe hodiny od studentů

Moje reflexe hodiny (anonymní):

1. Tématem dnešní hodiny bylo ....
2. Dnes jsem se dozvěděl/a tyto nové věci: ....
   ....
3. Líbilo se mi: ....
   ....
4. Měl/a jsem potíže s: ....
   ....
5. Plnění úkolů se mi zdálo (zakroužkuj): jednoduché – průměrné – složité
6. Chtěl/a bych více takových hodin matematiky (zakroužkuj): .... ANO/NE

Moje reflexe hodiny (anonymní):

1. Tématem dnešní hodiny bylo ....
2. Dnes jsem se dozvěděl/a tyto nové věci: ....
   ....
3. Líbilo se mi: ....
   ....
4. Měl/a jsem potíže s: ....
   ....
5. Plnění úkolů se mi zdálo (zakroužkuj): jednoduché – průměrné – složité
6. Chtěl/a bych více takových hodin matematiky (zakroužkuj): .... ANO/NE

Moje reflexe hodiny (anonymní):

1. Tématem dnešní hodiny bylo ....
2. Dnes jsem se dozvěděl/a tyto nové věci: ....
   ....
3. Líbilo se mi: ....
   ....
4. Měl/a jsem potíže s: ....
   ....
5. Plnění úkolů se mi zdálo (zakroužkuj): jednoduché – průměrné – složité
6. Chtěl/a bych více takových hodin matematiky (zakroužkuj): ....ANO/NE

Příloha 5: Řešení pracovního listu z edukační praxe

PRACOVNÍ LIST: Matematika u klavíru

Jméno a příjmení: Petr Záviška

Jména spolupracujících žáků: Martin Piňos, Dan Mudrák, Václav Krajsa, Natka Klimčková, Ondra Švihálek

Třída: Prima A

A. KLAVÍRNÍ MNOŽINY

1.) Klaviaturu klavíru lze vnímat jako množinu všech tónů klavíru. Označme tuto množinu $U = \{A_2, B_2, H_2, C_1, \ldots, a^4, b^4, h^4, c^5\}$. Kolik prvků obsahuje daná množina? Počítej výhodně a popiš, jak jsi při počítání postupoval/a. Výsledek správně zapiš. 88

Nápověda: Všimneš si nějaké pravidelnosti v uspořádání černých a bílých kláves? Po kolika bílých tónech najdeme na klaviatuře opět stejný úsek?

Můj postup při počítání kláves:

od C po h je to s béčky 12 kláves

12 kláves · 7 oktáv = 84 + 4 zbývající tóny = 88

Odpověď: Počet prvků množiny všech tónů klavíru je 88. Matematicky: $12 \cdot 7 + 4$

2.) Je dána množina U všech kláves (tónů) klaviatury. Přehled názvů všech tónů klaviatury vám poskytne vyučující.

a) Uveď příklad pětiprvkové podmnožiny A množiny U. Tuto množinu správně zapiš výčtem prvků.

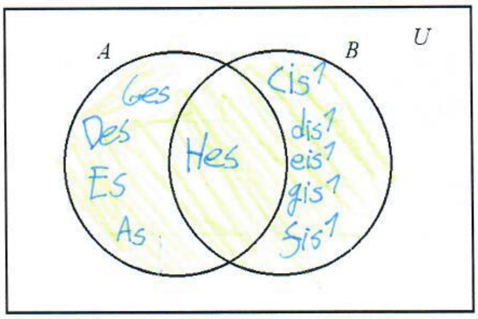
Řešení: A = {Des, Es, Ges, As, Hes(Bé)}

b) Uveď příklad šestiprvkové podmnožiny B množiny U tak, aby množina B měla s množinou A neprázdný průnik. Tuto množinu správně zapiš výčtem prvků.

Řešení: $B = \{cis^1, dis^1, eis^1, fis^1, gis^1, Hes^1\}$

c) ***Zahrej prvky množin A a B na klavír.***

3.) Doplň Vennův diagram množin A, B z příkladu 2.



4.) Pomocí Vennova diagramu v příkladu 3 urči výčtem prvků a správně zapiš tyto množiny:

- Sjednocení množin A a B: = {Ges, Des, Es, As, Hes, cis^1, dis^1, eis^1, gis^1, fis^1}
- Průnik množin A a B: = {Hes}
- Rozdíl množin A a B (v tomto pořadí): = {Ges, Des, Es, As, cis^1, dis^1, eis^1, fis^1, gis^1}
- Rozdíl množin B a A (v tomto pořadí): = { ——— || ——— }

Prvky daných množin (sjedocení, průniku, rozdílů) zahrej na klavír.

5.) Ve Vennově diagramu v příkladu 3 barevně vyznač množinu **doplňku** sjednocení množin A a B, tedy množinu $(A \cup B)' = U - (A \cup B)$.

6.) Urči počet prvků množiny z příkladu 5, tj.: $|U - (A \cup B)|$. Uveď krátký postup výpočtu a výsledek správně zapiš.

Řešení: $U = 88 \quad A \cup B = 10 \quad U - (A \cup B) = 78$

B. NETRADIČNÍ POČÍTÁNÍ SE ZLOMKY

1.) V hudbě rozdělujeme druhy not podle jejich délek. Níže jsou uvedeny čtyři z nich. V názvech těchto not jsou schované zlomky. Dokážeš je rozkódovat a doplnit do rámečků pod dané noty?

Nota celá	Nota půlová	Nota čtvrťová	Nota osminová
$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

2.) Převeď počítání s notami na počítání se zlomky a výsledek zapiš jako **zlomek**. Dále přiřaď těmto zlomkům jim odpovídající **notu**. (Dvojtečka v příkladech má význam dělení.)

a) ♪ : ♩ + 𝅗𝅥 $= \frac{1}{8} : \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ = 𝅝

b) 𝅝 − (♪ + ♪) : 𝅗𝅥 $= \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) : \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ = 𝅗𝅥

Příloha 6: Oprava pracovního listu z edukační praxe

PRACOVNÍ LIST: Matematika u klavíru

Jméno a příjmení: Petr Záviška

Jména spolupracujících žáků: Martin Piňos, Dan Mudrák, Václav Krajsa, Natka Klimčková, Ondra Švihálek

Třída: Prima A

A. KLAVÍRNÍ MNOŽINY

1.) Klaviaturu klavíru lze vnímat jako množinu všech tónů klavíru. Označme tuto množinu $U = \{A_2, B_2, H_2, C_1, \ldots, a^4, b^4, h^4, c^5\}$. Kolik prvků obsahuje daná množina? Počítej výhodně a popiš, jak jsi při počítání postupoval/a. Výsledek správně zapiš. 88

Nápověda: Všimneš si nějaké pravidelnosti v uspořádání černých a bílých kláves? Po kolika bílých tónech najdeme na klaviatuře opět stejný úsek?

Můj postup při počítání kláves:

od C po h je to s béčky 12 kláves

12 kláves · 7 oktáv = 84 + 4 zbývající tóny = 88

Odpověď: Počet prvků množiny všech tónů klavíru je 88 ✓. Matematicky: $12 \cdot 7 + 4$ ✓

$|U| = 88$

2.) Je dána množina U všech kláves (tónů) klaviatury. Přehled názvů všech tónů klaviatury vám poskytne vyučující.

a) Uveď příklad pětiprvkové podmnožiny A množiny U. Tuto množinu správně zapiš výčtem prvků.

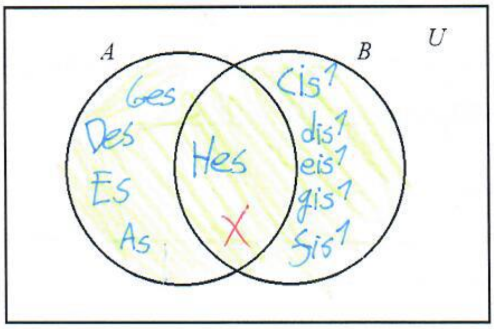
Řešení: A = {Des, Es, Ges, As, Hes(Bé)} ✓

b) Uveď příklad šestiprvkové podmnožiny B množiny U tak, aby množina B měla s množinou A neprázdný průnik. Tuto množinu správně zapiš výčtem prvků.

Řešení: B = {cis¹, dis¹, eis¹, fis¹, gis¹, Hes¹} ✓

*c) **Zahrej prvky množin A a B na klavír.***

3.) Doplň Vennův diagram množin A, B z příkladu 2.



4.) Pomocí Vennova diagramu v příkladu 3 urči výčtem prvků a správně zapiš tyto množiny:

- Sjednocení množin A a B: $A \cup B = \{Ges, Des, Es, As, Hes, cis^1, dis^1, eis^1, gis^1, fis^1\}$
- Průnik množin A a B: $A \cap B = \{Hes\}$
- Rozdíl množin A a B (v tomto pořadí): $A - B = \{Ges, Des, Es, As, cis^1, dis^1, eis^1, fis^1, gis^1\}$
- Rozdíl množin B a A (v tomto pořadí): $B - A = \{ \quad \}$

Prvky daných množin (sjedocení, průniku, rozdílů) zahrej na klavír.

5.) Ve Vennově diagramu v příkladu 3 barevně vyznač množinu **doplňku** sjednocení množin A a B, tedy množinu $(A \cup B)' = U - (A \cup B)$. X

6.) Urči počet prvků množiny z příkladu 5, tj.: $|U - (A \cup B)|$. Uveď krátký postup výpočtu a výsledek správně zapiš.

Řešení: $|U| = 88 \quad |A \cup B| = 10 \quad |U - (A \cup B)| = 78$

B. NETRADIČNÍ POČÍTÁNÍ SE ZLOMKY

1.) V hudbě rozdělujeme druhy not podle jejich délek. Níže jsou uvedeny čtyři z nich. V názvech těchto not jsou schované zlomky. Dokážeš je rozkódovat a doplnit do rámečků pod dané noty?

Nota celá	Nota půlová	Nota čtvrťová	Nota osminová
$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

2.) Převeď počítání s notami na počítání se zlomky a výsledek zapiš jako **zlomek**. Dále přiřaď těmto zlomkům jim odpovídající **notu**. (Dvojtečka v příkladech má význam dělení.)

a) 𝅘𝅥𝅮 : 𝅘𝅥 + 𝅗𝅥 = $\frac{1}{8} : \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8} : \frac{1}{4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \approx$ 𝅝

b) 𝅝 − (𝅘𝅥𝅮 + 𝅘𝅥𝅮) : 𝅗𝅥 = $\frac{1}{1} - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) : \frac{1}{2} = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} =$ 𝅗𝅥