UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA EXPERIMENTÁLNÍ FYZIKY

Sbírka úloh z elektřiny a magnetismu pro SŠ studenty a bakaláře fyziky

Bakalářská práce

Autor: Adam Czernek
Studijní program: B1701 Fyzika
Studijní obor: Fyzika – Matematika
Forma studia: Prezenční
Vedoucí práce: doc. RNDr. Roman Kubínek, CSc.
Termín odevzdání práce: duben 2012

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Romana Kubínka, CSc. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci …………………… ………………………

Poděkování:

Chtěl bych poděkovat hlavně doc. RNDr. Romanu Kubínkovi, CSc. za jeho rady, trpělivost, věnovaný čas.

Děkuji všem učitelkám a učitelům, kteří mi pomohli při písemném zkoušení studentů středních škol, Mgr. Adamu Sabelovi za konzultace při seznámení s vektorovým editorem.

Děkuji svým rodičům za jejich podporu.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora: Adam Czernek

Název práce: Sbírka úloh z elektřiny a magnetismu pro SŠ studenty a bakaláře fyziky

Typ práce: Bakalářská

Pracoviště: Katedra experimentální fyziky

Vedoucí práce: doc. RNDr. Roman Kubínek, CSc.

Rok obhajoby práce: 2012

Abstrakt: Fyzikální úlohy jsou základním prostředkem výuky fyziky. Pomáhají studentům využít teoretické poznatky v praxi. Cílem této práce je zrevidovat fyzikální úlohy z elektřiny a magnetismu a následně zkoumat schopnost studentů řešení úloh z elektřiny a magnetismu. Uvedené úlohy mohou být využity studenty fyziky na UP nebo rovněž různými zájemci z řad středoškolských učitelů či studentů.

Klíčová slova: sbírka úloh, sbírka příkladů, elektřina a magnetismus

Počet stran: 134

Počet příloh: 0

Jazyk: český

Bibliografical identification

Author: Adam Czernek

Title: Compilation of calculations from electricity and magnetism for secondary school students and bachelors of physics

Type od thesis: Bachelor thesis

Department: Department of experimental physics

Supervisor: doc. RNDr. Roman Kubínek, CSc.

The year of presentation: 2012

Abstract: Physical calculations are an essential instrument for teaching Physics. It helps students to exploit their theoretical knowledges in practice. The aim of this thesis is to revise some physical compilations used for calculation of electricity and magnetism and also to test the ability of students in solving these calculations from electricity and magnetism. These particular compilation can be later used by students of physics and also by various highschool teachers or students.

Keywords: compilation of calculations, compilation of exercises, electricity and magnetism

Number of pages: 134

Number of appendices: 0

Language: Czech

OBSAH

ÚVOD

Fyzikální úlohy jsou základním prostředkem fyziky, který pomáhá studentům proniknout do podstaty problému, vžít se do dané situace a pochopit uvažovaný jev. Ve 20. století se používaly zejména příklady z fyziky v tištěné podobě. V důsledku rozšíření internetu se však v poslední době velice rozmohl trend online studijních opor a to včetně elektronických sbírek úloh z fyziky, vytvářených často v rámci kvalifikačních prací studentů didaktiky fyziky. Ještě před několika lety si student při větším zájmu o počítání příkladů z fyziky musel pracně opatřovat tištěné materiály, dnes má však k dispozici pomocí pár kliknutí myši kvalitně zpracované příklady včetně řešení a veškerých detailů. Oblast sbírek úloh z fyziky je tedy oblast velice rychle se rozvíjející. Pořád však existuje celá řada zajímavých příkladů, jež není studentům snadno dostupná. Tímto motivujeme zavedení dalších příkladů, jež bychom mohli zveřejnit a tím propagovat fyziku a usnadnit studentům získání takového druhu učiva. Zabývat se budeme užším tematickým celkem, a to elektřinou a magnetismem. Elektřina a magnetismus je dle mého názoru, minimálně na středních školách jednou z nejméně oblíbených studovaných látek. Na mé mateřské střední škole jsme sice měli to štěstí, že nás vyučovala učitelka zkušená, ze „staré školy“, vyžadující dobrou znalost základů středoškolské fyziky v každé oblasti, včetně elektřiny a magnetismu, fyziky mikrosvěta a teorie relativity, což jsou tematické celky, které jsou často na středních školách opomíjeny, ačkoliv jsou dle slov mé středoškolské učitelky právě „tím nejzajímavějším“ z fyziky. Řada studentů středních škol toto štěstí, že je vyučována dobrým učitelem nemá. Jsme svědky upadající úrovně vzdělávání středních škol, přírodovědných předmětů a fyziky pak především. V této bakalářské práci budu analyzovat znalosti studentů středních škol a studentů prvního ročníku bakalářského studia na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci.

1 REŠERŠE LITERATURY

Co se týče studijních materiálů v oboru příkladů z elektřiny a magnetismu, je jich na jednu stranu celá řada, na druhou stranu příkladů není nikdy dost a i v případě příkladů podobných typů si student zapamatovává vztahy a stává se zběhlejším v počítání. Já sám jsem si fyziku oblíbil proto, že mi umožnila vnímat svět kolem nás jinýma očima. Na příkladech jsem si ověřil fyzikální teorii a to umožnilo její lepší chápání přirozeným způsobem, nikoli „biflováním“. Při provádění rešerše jsem zjistil, že existuje jak celá řada příkladů a sbírek úloh s příklady notoricky známými, tak také řada příkladů vyžadující neobvyklou myšlenku, různé matematické operace, hlubší fyzikální uvažování studentů. Obecně sbírky úloh obsahují nejčastěji příklady neřešené. Některé pak řešené vzorové příklady, které předcházejí neřešené úlohy, anebo řešené příklady obtížnější, které by student sám často nezvládl. Řešené sbírky příkladů se tak často neobjevují. Co se týče sbírek příkladů pro střední školy, dohledal jsem několik učebnic obsahujících příklady z elektřiny a magnetismu, využívaných na středních školách. Jednak je zde pravděpodobně méně využívaná učebnice [1], sloužící k přípravě zahraničních studentů před vstupem na české vysoké školy. Neřešené příklady zde následují několik vzorových řešených příkladů. Sbírku charakterizuje jednoduchost používaného jazyka. Literatura [2] určená pro SOŠ a SOU, obsahuje hlavně neřešené příklady a podobá se knize [3]. Liší se obtížností. Kniha [3] obsahuje neřešené úlohy a řešené obtížnější úlohy. Nutno dodat, že před několika lety se objevila tato kniha také v elektronické podobě, kde jsou u příkladů uvedená také jejich řešení. I když u řešení jsou občas některé mezikroky vynechány, pro studenty středních škol poskytuje tato elektronická sbírka úloh dostačující studijní oporu. Literatura [4], určená pro přípravu k přijímacím zkouškám na VŠ, především pak na lékařskou fakultu obsahuje teoretické základy, testové otázky a neřešené jednoduché příklady. Velice dobrou knihou, kterou jsem také při sestavování úloh pro SŠ používal, je kniha řešených úloh z elektřiny a magnetismu [5]. Tato knížka se mi velice líbí proto, že obsahuje mnoho různých příkladů, v nichž se používá jiný postup a často je třeba aplikovat hlubší znalost teorie, ne pouze dosadit do vzorce nebo ze vzorců jiný vzorec odvodit. Myslím si, že úlohy zde uvedené jsou o něco obtížnější, než příklady, které učitelé nejčastěji používají při přípravě písemky. Věřím, že propočet příkladů zde uvedených studentovi dá širší rozhled v této oblasti, naučí ho používat různé postupy řešení. Myslím si také, že to může být užitečná kniha pro učitele, kteří si chtějí počítání příkladů trochu potrénovat. Na rozdíl od sbírky [3], která samozřejmě také řešitele mnoho naučí, jsou zde úlohy podrobně řešeny, včetně komentáře. Dle mého názoru nejlepší sbírkou úloh je elektronická sbírka na webové stránce [6]. Na této stránce můžeme najít 58 příkladů z elektřiny a magnetismu označených jako středoškolské, 96 označených jako obtížnější středoškolské. Úlohy označené jako obtížné středoškolské a jednoduché vysokoškolské se mi však jeví poměrně těžké. Myslím si, že mnou vybrané příklady pro písemku bakalářů fyziky v kapitole 4.2 (1) byly ve srovnání s těmito méně obtížné. Tento web obsahuje také 112 úloh typicky vysokoškolských. Myslím si, že vysokoškolské úlohy na naší fakultě jsou s těmito srovnatelné. Tento web je dle mého názoru minimálně jednou z nejlepších studijních opor v oblasti příkladů z elektřiny a magnetismu. Další užitečným odkazem je [7]. Na této webové stránce je zhruba padesát úloh určených primárně pro vysokoškoláky, avšak najdou se zde také úlohy řešitelné pomocí středoškolských znalostí, obdobně jak na webové stránce [8], kde úloh je kolem tří set. Při své bakalářské práci jsem čerpal z neřešených příkladů na této webové stránce uvedených. Mezi nejlepší tištěné sbírky řešených příkladů z elektřiny a magnetismu pro VŠ patří dle mého názoru učebnice [9] a [10]. V první jmenované je uvedena základní teorie na začátku jednotlivých tematických celků, některé příklady v této sbírce jsou stejné jak příklady na poslední jmenované webové stránce, obsahuje také úlohy neřešené. Literatura [10] je psána slovensky, neobsahuje u kapitol teorii, na začátku je uveden matematický dodatek, úlohy a jejich následná řešení jsou uvedeny odděleně ve dvou částech této knihy. Obě jmenované učebnice poskytují široký výběr vysokoškolských úloh, řešení je zde pro lepší pochopení popsáno, výtkou je však stáří těchto knih, a tedy nižší grafická úroveň. Sbírka příkladů [11], přeložena z ruského originálu, obsahuje neřešené úlohy a obtížnější řešené úlohy. Skriptum [12], určeno primárně pro studenty chemie, je sbírkou příkladů neřešených a obtížnějších příkladů s návodem pro řešení, obdobně jak sbírka příkladů [13] z Masarykovy univerzity, kde však autor uvádí také teoretický základ u jednotlivých tematických celků. Ve skriptech Pardubické univerzity [14] jsou úlohy značeny dle obtížnosti, u jednodušších úloh je uveden pouze výsledek, u složitějších pak i řešení. Učebnice elektřiny a magnetismu [15] sice není sbírkou úloh, nicméně obsahuje několik řešených příkladů na konci každé kapitoly.

2 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY PRO STŘEDNÍ ŠKOLY

Na základě osobních výukových materiálů doc. Kubínka jsem vytvořil sbírku příkladů, určených primárně pro střední školy, především pak pro gymnázia. Příklady navazují na učebnici elektřiny a magnetismu pro gymnázia [16], avšak je zde uvedena řada příkladů, která sice používá znalostí z této knihy, nicméně používají se zde některé operace a odvození, které si učitelé na svých hodinách často nemohou dovolit jak z důvodů časových, tak také z důvodu, že matematické dovednosti studentů nejsou na dostatečné úrovni. Příklady, u nichž neuvádím citaci, jsou vybrány z [17]. Některé příklady byly vybrány z [5] nebo [3]. Tyto úlohy nejsou kvůli přehlednosti psány kurzívou. Obrázky u příkladů pochází ze stejného zdroje jak celý příklad, vytvářel jsem je pomocí programu Adobe InDesign.

2.1 Elektrostatické pole

Základními pojmy elektrostatiky jsou náboje, a jimi tvořené elektrostatické pole. Coulombův zákon určuje závislost síly působící mezi náboji na velikosti nábojů a na jejich vzdálenosti. Této problematice se věnují příklady 1 až 5, přičemž v příkladu 1 používáme jednoduchých odvození z Coulombova zákona. Jak bude následně psáno v hodnocení písemek pro SŠ, už jen samotné použití vzorce a správné dosazení působí často studentům gymnázií problémy, proto zde zařazuji příklady, kde je potřebné odvodit z jednoduchého vzorce potřebné veličiny, jak je tomu v příkladu 1. Příklad 2 dává do souvislosti dvě rovnice Coulombova zákona, které by student na základě zadání měl být schopný vytvořit. Tato úloha je obecná, tedy bez zadaných veličin, což často studenty gymnázií dokáže zmást, takže si neuvědomí, co se po nich vlastně chce. Následně v příkladu 3 používáme skládání sil, které pomáhá pochopit silové působení mezi náboji. Úlohy 4 a 5 se věnují výpočtu veličin z rovnosti síly elektrické a odstředivé a následně elektrické a gravitační. V příkladu 5 navíc využíváme také vzorec pro objem koule a při kombinaci vzorců to studentovi dává poměrně složitý celek operací, v němž není těžké se zamotat nebo udělat chybu. Důležitou veličinou, která popisuje elektrostatické pole je elektrická intenzita. *Tato veličina je číselně rovna velikosti síly, která by v uvažovaném bodě pole působila na kladný jednotkový bodový náboj.*[18] Elektrické intenzitě se věnují úlohy 6, 7, 8. Intenzity se zde učíme skládat, přičemž v každém z těchto příkladů skládáme intenzity jiným způsobem. V příkladu 6 používáme rozdílu intenzit, dále v příkladu 7 používáme Kosinovu větu, kde se ukáže (jelikož operujeme v rovnostranném trojúhelníku), že velikosti elektrických intenzit jsou si rovny. V 8 používáme vektorového součtu elektrických intenzit. Příklad 9 poskytuje komplexní obraz o chování elektronu v elektrickém poli. Příklad 10 uvádím jako dle mého názoru nejnáročnější příklad pro střední školy. Sestavení rovnice sice není zvlášť obtížné, následující výpočet z kvadratické rovnice však zvládne málokterý student fyziky v Olomouci, natož středoškolák. Nechci tím říci, že by studenti fyziky v Olomouci neuměli kvadratické rovnice, ale že možnost, že se student někde splete, ve výpočtu se nějak zamotá, anebo se nechá demotivovat náročností úlohy, zde hodnotím jako vysokou. Jelikož však v této úloze používáme pouze středoškolských znalostí, uvedl jsem tuto úlohu jako středoškolskou. Další důležitou veličinou elektrostatického pole je elektrický potenciál, který *je číselně roven práci vykonané elektrostatickým polem potřebné k přenesení kladného jednotkového náboje z místa pole do* *nekonečna.*[18] Této veličině se věnují příklady 11 a 12. Př. 11 je postupem analogický jako 10, ovšem méně náročný z důvodu absence kvadratické rovnice. V 12 používáme jednoduchých odvození a výpočtu ze základních vzorců definujících vztah kapacity vodiče, potenciálu a náboje. Kapacitě vodiče, tedy schopnosti vodiče absorbovat náboj je věnována již zmíněná úloha 12 a následné úlohy v závěru kapitoly 3.1. Znalost vlastností deskových kondenzátorů, tedy kondenzátorů s rovnoběžnými deskami, jejichž vzdálenost je zanedbatelně malá ve srovnání s obsahem desek, je potřebná v příkladu 13. Spojováním kondenzátorů se zabývají úlohy 14 a 15, kde v 14 je potřebná také znalost chování náboje a napětí na kondenzátorech spojených sériově, respektive paralelně. V 15 pak odvozujeme výslednou kapacitu z rozdílu jednotlivých zapojení kondenzátorů. Taková na pohled jednoduchá úloha ovšem, jak uvidíme v kapitole 4.2 (7), také nepostrádala studentů, kteří buďto chybovali ve výpočtech, nebo prokázali neznalost vlastností jednotlivých zapojení kondenzátorů. Poslední příklad kapitoly, příklad 16, je jeden z nejtěžších příkladů v kapitole 2.1. Je možné jej řešit odvozením obecného vzorce obdobně jak ve vzorovém řešení nebo je řešení možné provést výpočtem jednotlivých kapacit kondenzátorů a následným výpočtem jejich sériového zapojení. Obdobně také u jiných úloh je možný o něco jiný postup, než uvádím ve vzorových řešeních. Nejčastěji výpočtem jednotlivých veličin a jejich dosazováním do jiných vztahů.

1. Dva stejné bodové náboje $2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ působí na sebe ve vzduchu silou $4\,\mathrm{N}$. Ponoříme-li je do oleje, síla působící mezi nimi bude $1\,\mathrm{N}$. Jaká je vzdálenost náboje, a jaká je relativní permitivita oleje?

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}\Rightarrow r=\frac{Q}{2\sqrt{\pi\varepsilon_0 F}}=\frac{2\cdot 10^{-6}}{2\cdot\sqrt{3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 4}}=\underline{\underline{0{,}095\,\mathrm{m}}}$$

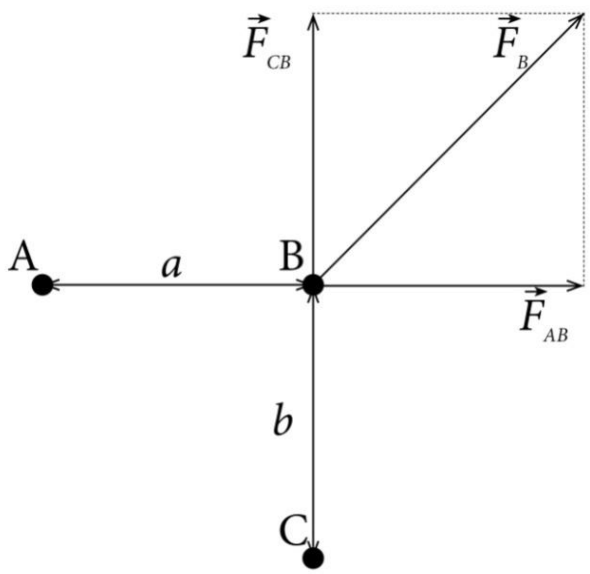
$$\varepsilon_r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{F'r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{F'}\frac{4\pi\varepsilon_0 F}{Q^2}=\frac{F}{F'}=\frac{4}{1}=\underline{\underline{4}}$$

2. V jistém dielektriku působí na sebe dva bodové náboje Q_1 a Q_2 vzdálené od sebe o vzdálenost r, vzájemnou silou stejnou, jakou na sebe působí ve vzduchu, změníme-li jejich vzdálenost o Δr. Určete relativní permitivitu dielektrika ε_{r2} v závislosti na relativní permitivitě vzduchu ε_{r1}.

$$F_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\frac{Q_1Q_2}{(r-\Delta r)^2}\qquad F_{12}{}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\qquad F_{12}=F_{12}{}'$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\frac{1}{(r-\Delta r)^2}=\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\frac{1}{r^2}\Rightarrow \varepsilon_{r2}=\underline{\underline{\varepsilon_{r1}\frac{(r-\Delta r)^2}{r^2}}}$$

3. Tři kuličky nabité stejným nábojem Q jsou ve vakuu rozmístěny podle obrázku 1. Vzdálenost kuliček A a B je $a=2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{-1}\,\mathrm{cm}$ a kuliček B a C $b=1\,\mathrm{cm}$. Víte-li, že kulička C působí na kuličku B silou $F_{CB}=4\cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}$ vypočtěte a) náboj Q na kuličkách, b) velikost síly F_{AB}, kterou působí kulička A na kuličku B, c) výslednou sílu F_B působící na kuličku B.



Obr. 1

a) $F_{CB} = k\dfrac{Q^2}{b^2} \Rightarrow Q = b\sqrt{\dfrac{F_{CB}}{k}} = 1\cdot 10^{-2}\sqrt{\dfrac{4\cdot 10^{-6}}{9\cdot 10^9}} = \underline{\underline{2{,}11\cdot 10^{-10}\ \mathrm{C}}}$

b) $F_{AB} = k\dfrac{Q^2}{a^2} = 9\cdot 10^9\dfrac{\left(2{,}11\cdot 10^{-10}\right)^2}{\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot 10^{-2}\right)^2} = \underline{\underline{3\cdot 10^{-6}\ \mathrm{N}}}$

c) $\vec{F}_B = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CB}$

$$F_B = \sqrt{F_{AB}{}^2 + F_{CB}{}^2} = \sqrt{\left(4\cdot 10^{-6}\right)^2 + \left(3\cdot 10^{-6}\right)^2} = \underline{\underline{5\cdot 10^{-6}\ \mathrm{N}}}$$

4. V Bohrově modelu atomu vodíku obíhá elektron po kruhové dráze kolem protonu. Je-li poloměr dráhy $r_1 = 5{,}28\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}$, vypočtěte rychlost elektronu.

$$F = k\frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{kr^2}{mr} \Rightarrow v = e\sqrt{\frac{k}{mr}}$$

$$e\sqrt{\frac{k}{mr}} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot\sqrt{\frac{9\cdot 10^9}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 5{,}28\cdot 10^{-11}}} = \underline{\underline{2{,}2\cdot 10^6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}}$$

5. Na dvou stejných kapkách vody je po jednom volném elektronu, přičemž síla elektrického odpuzování je stejná, jako gravitační síla, kterou se přitahují. Jaké jsou poloměry kapek?

$F_e = F_g$ $\qquad\qquad$ $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\mathrm{C}$

$\kappa\dfrac{m^2}{r^2} = k\dfrac{Q^2}{r^2}$ $\qquad\qquad$ $m = V\rho = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

$$\frac{ke^2}{\kappa} = m^2$$

$$V^2\rho^2 = \frac{4^2}{3^2}\pi^2R^6 \Rightarrow R^6 = \frac{ke^2 3^2}{\kappa\rho^2 4^2\pi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{e}{4\pi\rho}\sqrt{\frac{3^2k}{\kappa}}} = \sqrt[3]{\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}}{4\pi\cdot 10^3}\sqrt{\frac{9\cdot 9\cdot 10^9}{6{,}67\cdot 10^{-11}}}} = \underline{\underline{7{,}6\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}}}$$

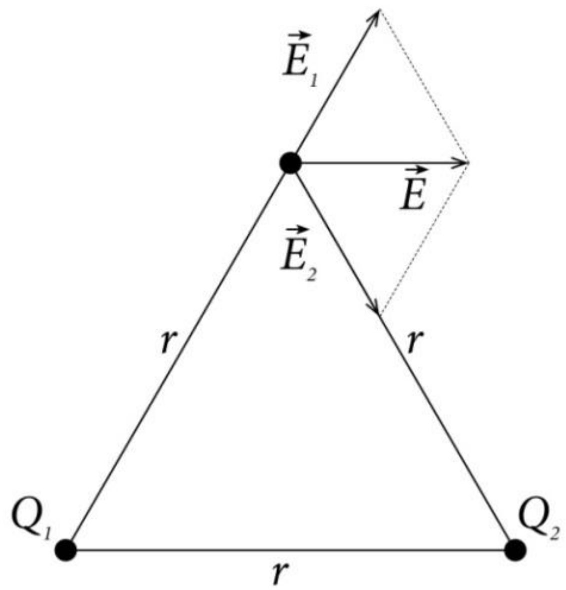
6. Určete velikost intenzity elektrického pole v bodě, který leží uprostřed, mezi dvěma náboji $Q_1 = 5\cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}$, $Q_2 = 7\cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}$, které jsou od sebe vzdáleny $d = 0{,}2\ \mathrm{m}$.

Obr. 2

$$E_1 = k\frac{Q_1}{r^2} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2 Q_2} = \frac{F}{Q_2} \qquad E_2 = k\frac{Q_2}{r^2}$$

$$E = E_2 - E_1 = \frac{k}{r^2}(Q_2 - Q_1) = \frac{9\cdot 10^9}{(0{,}1)^2}\left(7\cdot 10^{-5} - 5\cdot 10^{-5}\right) = \underline{\underline{18\cdot 10^6\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}}}$$

7. Ve dvou vrcholech rovnostranného trojúhelníku o straně $r = 0{,}5\,\mathrm{m}$ jsou umístěny náboje $Q_1 = 25\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}$ a $Q_2 = -25\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}$. Určete velikost intenzity elektrostatického pole ve třetím vrcholu.

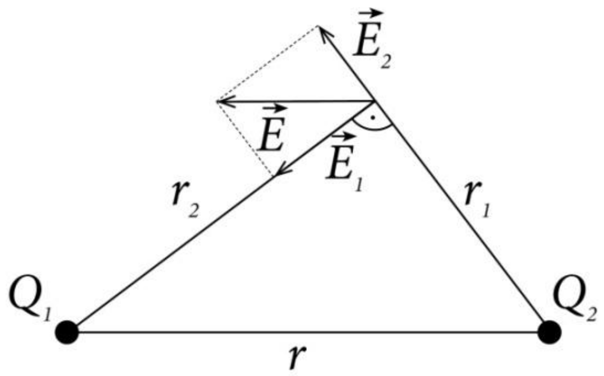


Obr. 3

$$E_1 = E_2 = k\frac{Q_1}{r^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{25\cdot 10^{-9}}{0{,}5^2} = \underline{\underline{900\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}}}$$

$$E^2 = E_1^{\ 2} + E_2^{\ 2} - 2E_1E_2\cos\alpha = 2E_1^{\ 2} - 2E_2^{\ 2}\,\frac{1}{2} = E_1^{\ 2} \Rightarrow \underline{\underline{E_1 = E}}$$

8. Určete elektrickou intenzitu pole v bodě, který je ve vzdálenosti $r_1 = 0{,}4\,\mathrm{m}$ od náboje $Q_1 = -4\cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}$ a $r_2 = 0{,}3\,\mathrm{m}$ od náboje $Q_2 = 5\cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}$, je-li vzájemná vzdálenost nábojů $r = 0{,}5\,\mathrm{m}$.



Obr. 4

$$E_2 = k\frac{Q_2}{r_2^{\;2}} = 9\cdot 10^9\,\frac{5\cdot 10^{-7}}{9\cdot 10^{-2}} = 5\cdot 10^4\ \mathrm{N\cdot C^{-1}} \qquad E_1 = k\frac{Q_1}{r_1^{\;2}} = 9\cdot 10^9\,\frac{4\cdot 10^{-7}}{16\cdot 10^{-2}} = \frac{9}{4}10^4\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$$

$$E = \sqrt{E_1^{\;2} + E_2^{\;2}} = \sqrt{\frac{81}{16}\cdot 10^8 + 25\cdot 10^8} = \underline{\underline{5{,}48\cdot 10^4\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}}}$$

9. V homogenním elektrickém poli o intenzitě $E = 11{,}4\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$ se nachází elektron. Vypočtěte a) zrychlení elektronu, je-li jeho počáteční rychlost nulová, b) jeho kinetickou energii v čase $t = 10^{-1}\,\mathrm{s}$, c) napětí v místech, kterým projde za $t = 10\,\mathrm{s}$.

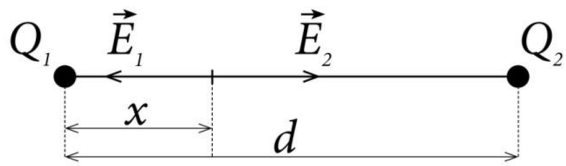
a) $F_e = QE = eE = 1{,}61\cdot 10^{-19}\cdot 11{,}4 = \underline{1{,}824\cdot 10^{-18}\ \mathrm{N}}$ $\qquad v = at$

$$F_e = F = am \Rightarrow a = \frac{F_e}{m} = \frac{1{,}824\cdot 10^{-18}}{9{,}1\cdot 10^{-31}} = \underline{\underline{2\cdot 10^{12}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}}}$$

b) $E_k = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{1}{2}m_e(at)^2 = \frac{1}{2}9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot\left(2\cdot 10^{12}\cdot 10^{-5}\right)^2 = \underline{\underline{1{,}82\cdot 10^{-16}\ \mathrm{J}}}$

c) $U = \frac{W}{Q} = Ed = E\,\frac{1}{2}at^2 = 11{,}4\cdot 0{,}5\cdot 2\cdot 10^{12}\cdot\left(10^{-5}\right)^2 = 1{,}14\cdot 10^3 V = \underline{\underline{1{,}14\,\mathrm{kV}}}$

10. Dva bodové náboje $2\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ a $8\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ jsou ve vakuu uloženy ve vzdálenosti $21\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte, ve kterém místě na jejich spojnici bude intenzita elektrického pole nulová.



Obr. 5

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \qquad E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{(d-x)^2}$$

$$\frac{Q_1}{x^2} = \frac{Q_2}{(d-x)^2}$$

$$(d-x)^2 Q_1 = x^2 Q_2$$

$$\left(d^2 - 2dx + x^2\right)Q_1 = x^2 Q_2$$

$$d^2 Q_1 - 2dxQ_1 + x^2 Q_1 = x^2 Q_2$$

$$(Q_2 - Q_1)x^2 + 2dQ_1 x - Q_1 d^2 = 0$$

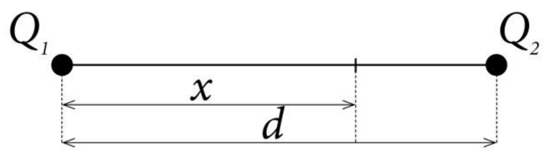
$$x_{1,2} = \frac{-2dQ_1 + \sqrt{(2dQ_1)^2 - 4(Q_2 - Q_1)\left(-Q_1 d^2\right)}}{2(Q_2 - Q_1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2\cdot 0{,}21\cdot 2\cdot 10^{-8} + \sqrt{\left(2\cdot 0{,}21\cdot 2\cdot 10^{-8}\right)^2 - 4\left(8\cdot 10^{-8} - 2\cdot 10^{-8}\right)\left(-2\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}21^2\right)}}{2\cdot\left(8\cdot 10^{-8} - 2\cdot 10^{-8}\right)}$$

$$x_1 = \underline{\underline{0{,}07\,\mathrm{m}}} \qquad x_2 = -0{,}21\,\mathrm{m}$$

Obdrželi jsme dvě hodnoty vzdáleností, z nichž hodnotu x_2 neuvažujeme, protože bod o takové vzdálenosti od náboje Q_1 neleží na spojnici mezi náboji. Nulová intenzita tedy bude v bodě vzdáleném o 7 cm od náboje Q_1 a 14 cm od náboje Q_2.

11. Dva náboje $Q_2 = 4\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ a $Q_1 = 8\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ jsou ve vzájemné vzdálenosti $d = 24\,\mathrm{cm}$ od sebe. Ve kterém bodě na jejich spojnici budou potenciály buzené oběma náboji stejné?



Obr. 6

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x} \qquad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{d-x}$$

$$\frac{Q_1}{x} = \frac{Q_2}{d-x}$$

$$dQ_1 - xQ_1 = xQ_2$$

$$dQ_1 = x(Q_1 + Q_2) \Rightarrow x = \frac{Q_1 d}{Q_1 + Q_2} = \frac{8\cdot 10^{-6}\cdot 24\cdot 10^{-2}}{8\cdot 10^{-6} + 4\cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{16\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}}}$$

Potenciály buzené oběma náboji budou stejné ve vzdálenosti 16 cm od náboje Q_1 na spojnici obou nábojů.

12. Těleso se nábojem $Q = 6\cdot 10^{-3}\ \mathrm{C}$ nabije na potenciál $\varphi = 3\,\mathrm{kV}$? Jaký by musel být poloměr koule, aby měla stejnou kapacitu, jako toto těleso?

$$C = \frac{Q}{\varphi} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}} = 4\pi\varepsilon_0 r \Rightarrow r = \frac{C}{4\pi\varepsilon_0} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r\varphi} = \frac{6\cdot 10^{-3}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 3\cdot 10^{3}} = \underline{\underline{18\cdot 10^{3}\ \mathrm{m}}}$$

13. Desky kondenzátoru mají plošný obsah $S = 2\ \mathrm{m}^2$ a jsou od sebe vzdáleny 5 mm. Desky jsou ve vakuu. Na kondenzátoru je napětí $U = 10^4\ \mathrm{V}$.

a) Vypočtěte kapacitu kondenzátoru.

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\frac{2}{5\cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{3{,}54\cdot 10^{-9}\ \mathrm{F}}}$$

b) Vypočtěte náboj každé desky.

$$Q = CU = 3{,}54\cdot 10^{-9}\cdot 10^{4} = \underline{\underline{3{,}54\cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}}}$$

c) Vypočtěte intenzitu mezi deskami.

$$E = \frac{U}{d} = \frac{10^4}{5\cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{2\cdot 10^{6}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}}}$$

14. Dva kondenzátory s kapacitami $C_1 = 1\,\mu\text{F}$ a $C_2 = 10\,\mu\text{F}$ jsou zapojeny do série. Na svorky baterie přiložíme napětí $U = 200\,\text{V}$.

a) Určete výslednou kapacitu.

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{10^{-6} \cdot 10^{-5}}{10^{-6} + 10^{-5}} = \underline{\underline{0{,}909\,\mu\text{F}}}$$

b) Určete napětí U_1 a U_2 na kondenzátorech s kapacitami C_1 a C_2.

$$Q = CU = C_1 U_1 = C_2 U_2$$

$$U_1 = \frac{CU}{C_1} = \frac{0{,}909 \cdot 10^{-6} \cdot 200}{10^{-6}} = \underline{\underline{181{,}8\,\text{V}}}$$

$$U_2 = \frac{CU}{C_2} = \frac{0{,}909 \cdot 10^{-6} \cdot 200}{10^{-5}} = \underline{\underline{18{,}18\,\text{V}}}$$

c) Určete celkovou energii spojených kondenzátorů.

$$E_e = \frac{1}{2} CU^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}909 \cdot 10^{-6} \cdot 200^2 = \underline{\underline{1{,}818 \cdot 10^{-2}\ \text{J}}}$$

15. Dva kondenzátory o stejné kapacitě zapojíme jednou do série, potom paralelně. Rozdíl v kapacitách obou kombinací je $3\,\mu\text{F}$. Určete kapacitu těchto kondenzátorů.

Paralelně: $C_P = C + C = 2C$ Sériově: $C_S = \dfrac{C^2}{2C} = \dfrac{C}{2}$

$$C_P - C_S = 2C - \frac{C}{2} = \frac{3}{2} C \Rightarrow C = \frac{2}{3}\left(C_P - C_S\right) = \frac{2}{3} \cdot 3 = \underline{\underline{2\,\mu\text{F}}}$$

16. Dielektrikum mezi deskami kondenzátoru se skládá ze dvou vrstev. První tvoří vzduch tloušťky $0{,}4\,\text{mm}$, druhou plexisklo o tloušťce $2\,\text{mm}$, jehož relativní permitivita je $\varepsilon_\text{r} = 3{,}4$. Určete kapacitu kondenzátoru, je-li plošný obsah jedné desky $2\,\text{dm}^2$.

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{C}_1 C_2}{C_1 + C_2} \qquad \mathrm{C}_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_1} \qquad \mathrm{C}_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d_2} \qquad \mathrm{C} = \frac{\mathrm{C}_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 \dfrac{S}{d_1}\, \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{S}{d_2}}{\varepsilon_0 \dfrac{S}{d_1} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{S}{d_2}} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{S}{d_1 d_2}}{\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{\varepsilon_r}{d_2}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d_2 + d_1 \varepsilon_r} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}4 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3} + 0{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}4} = 1{,}79 \cdot 10^{-10}\ \text{F} = \underline{\underline{179\,\text{pF}}}$$

2.2 Stacionární elektrické pole

Stacionární elektrické pole je pole ustálených stejnosměrných proudů. *Uspořádaný pohyb elektricky nabitých částic nazýváme elektrickým proudem.*[18] Elektrický proud je číselně roven náboji, který projde za jednu sekundu vodičem, což využíváme v příkladu 1, navíc zde spočteme také střední hodnotu proudu, který se za určitý časový interval mění rovnoměrně, a to pomocí aritmetického průměru. Při sestavování elektrického vedení je nutno počítat s elektrickým odporem, který poskytuje drát, který pro takové vedení použijeme. Odpor vodiče je číselně roven měrnému odporu materiálu, z něhož je vodič zhotoven násobeného poměrem jeho délky a průřezu kolmého ke směru šíření proudu. V úloze 2 si student může vyzkoušet, jak tlustý hliníkový drát by musel použít u sestavení elektrického vedení, aby mělo toto vedení stejný odpor i délku jak druhé vedení uvedené v př. 2. V př. 3 je možno se přesvědčit, jak rychle s klesající teplotou vařiče klesá jeho odpor. Spojování rezistorů jsou vyhrazeny úlohy 4 a 5, kde první jmenovaná je velice jednoduchá, avšak ne pro všechny studenty gymnázia, jak uvidíme v kapitole 4.1(6). Příklad 5 je příkladem náročnějším, avšak studenti gymnázií by jej měli také umět řešit, byť ne za minutu, jak příklad předchozí. Př. 6 na pohled vypadá sice složitě, nicméně když si student uvědomí, co a jak má počítat, tj. vypočítá jednotlivá zapojení, která pak použije v konečném výpočtu, jak je uvedeno ve vzorovém řešení, pak by tato úloha neměla být zvlášť obtížná. Následující praktický příklad 7 umožňuje studentům, kteří uspějí při výpočtu počtu svíček, na základě znalosti závislosti výkonu, napětí a odporu, zapřemýšlet nad tím, jak budeme vypočtený počet svíček zaokrouhlovat. Využijí při tom znalostí rozdělení proudu a napětí při sériovém zapojení svíček (rezistorů). Zařadil jsem zde také úlohy využívající Ohmův zákon pro uzavřený obvod (8). V úloze 9 je možno si procvičit výpočet účinnosti vařiče, kde používáme také vztahu pro energii uvolněného tepla z termodynamiky. Důležitými zákony pro znalost fungování proudových obvodů jsou Kirchhoffovy zákony. Tyto si lze procvičit v úloze 10. Dále využijeme zákony Faradayovy v posledních příkladech (11, 12), kde si vyjádříme hmotnost pomocí násobku objemu a hustoty látky.

1. Elektrický proud se během 10 s rovnoměrně zvětšoval z počáteční nulové hodnoty na hodnotu 3 A. Jaký celkový náboj prošel za tuto dobu vodičem? (čerpáno z [5])

Hledaný celkový náboj je určen vztahem $Q = I_S t$, kde $I_S = \frac{0+I}{2} = \frac{I}{2}$ je střední hodnota proudu procházejícího během deseti sekund vodičem.

$$Q = \frac{I}{2}t = \frac{3}{2}10 = \underline{\underline{15\,\mathrm{C}}}$$

2. Měděné vedení má průřez $S_{Cu} = 20\,\mathrm{mm}^2$. Jaký průřez musí mít hliníkové vedení stejné délky, aby mělo stejný odpor jak vedení měděné?

$$R = \rho_{Cu}\frac{l}{S_{Cu}} = \rho_{Al}\frac{l}{S_{Al}} \Rightarrow \frac{S_{Al}}{S_{Cu}} = \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu}} \Rightarrow S_{Al} = S_{Cu}\frac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu}} = 20\cdot\frac{2{,}4}{1{,}5} = \underline{\underline{32\,\mathrm{mm}^2}}$$

3. Elektrický vařič má při provozní teplotě 750°C odpor $R = 46\,\Omega$. Jaký je jeho odpor při teplotě 0°C, je-li $\alpha = 2\cdot10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1}$?

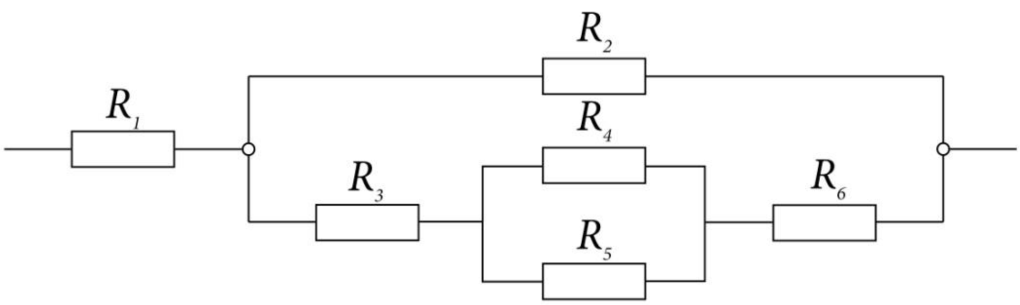
$$R = R_0(1+\alpha\cdot t) \Rightarrow R_0 = \frac{R}{1+\alpha\cdot t} = \frac{46}{1+2\cdot10^{-4}\cdot750} = \underline{\underline{40\,\Omega}}$$

4. Odpory $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 3\,\Omega$, $R_4 = 4\,\Omega$ jsou zapojeny a) sériově, b) paralelně. Vypočtěte výsledný odpor.

a) $R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 1+2+3+4 = \underline{\underline{10\,\Omega}}$

b) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}\Omega \Rightarrow R = \frac{12}{25} = \underline{\underline{0{,}48\,\Omega}}$

5. Jak velký je odpor zapojení podle obrázku. Jsou-li odpory $R_1 = 3\,\Omega$, $R_2 = 30\,\Omega$, $R_3 = 4\,\Omega$, $R_4 = 60\,\Omega$, $R_5 = 12\,\Omega$, $R_6 = 6\,\Omega$?

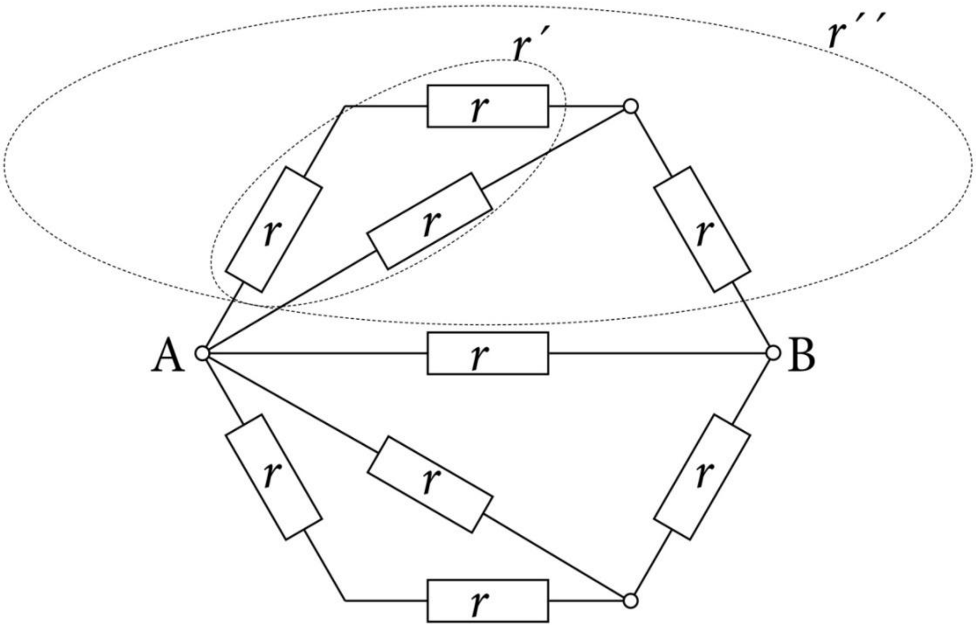


Obr. 7

$$R = R_1 + R'' = R_1 + \left(\frac{1}{R''}\right)^{-1} = R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'}\right)^{-1} = R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_{45} + R_6}\right)^{-1} =$$

$$= R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + \dfrac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} + R_6}\right)^{-1} = 3 + \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{4 + \dfrac{60 \cdot 12}{60 + 12} + 6}\right)^{-1} = \underline{\underline{15\,\Omega}}$$

6. Síť je tvořena devíti vodiči téhož odporu *R*, které tvoří stranu a úhlopříčky šestiúhelníku. Určete odpor mezi uzly A a B.



Obr. 8

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{2r} + \frac{1}{r} = \frac{3}{2}r \Rightarrow r' = \frac{2}{3}r \qquad r'' = r' + r = \frac{2}{3}r + r = \frac{5}{3}r$$

$$R = \left(\frac{1}{R}\right)^{-1} = \left(2\frac{1}{r''} + \frac{1}{r}\right)^{-1} = \left(2\frac{3}{5r} + \frac{1}{r}\right)^{-1} = \left(\frac{11}{5r}\right)^{-1} = \underline{\underline{\frac{5}{11}r}}$$

7. Svíčková žárovka na vánoční stromek má příkon $P = 9{,}8\,\mathrm{W}$ a odpor $R = 20\,\Omega$. Kolik svíček je nutné zapojit do série při zapojení na $U = 230\,\mathrm{V}$?

$$P_1 = U_1 I_1 = \frac{U_1^2}{R} \Rightarrow U_1 = \sqrt{P_1 R}$$

$$n = \frac{U}{U_1} = \frac{U}{\sqrt{P_1 R}} = \frac{230}{\sqrt{9{,}8 \cdot 20}} = 16{,}43$$

Na sériově zapojených odporech, v tomto případě svíčkách, s klesajícím počtem svíček roste napětí na každé svíčce. Napětí na svíčkách nesmí překročit určenou hodnotu napětí pro svíčky, což by se v případě, že bychom zapojili 16 svíček, stalo. Tedy zaokrouhlujeme nahoru. Je třeba zapojit $\underline{\underline{17}}$ svíček.

8. Elektromotorické napětí zrdoje je $1{,}1\,\mathrm{V}$. Po připojení spotřebiče s odporem $5\,\Omega$ je svorkové napětí jen $0{,}6\,\mathrm{V}$. Jaký je vnitřní odpor zdroje a jaký je proud procházející odvodem?

$$R_i = \frac{U_e - U}{I} \qquad I = \frac{U}{R} \qquad R_i = \frac{(U_e - U)R}{U} = \frac{(1{,}1 - 0{,}6)\cdot 5}{0{,}6} = \underline{\underline{4{,}17\,\Omega}}$$

$$U = U_e - R_i I$$

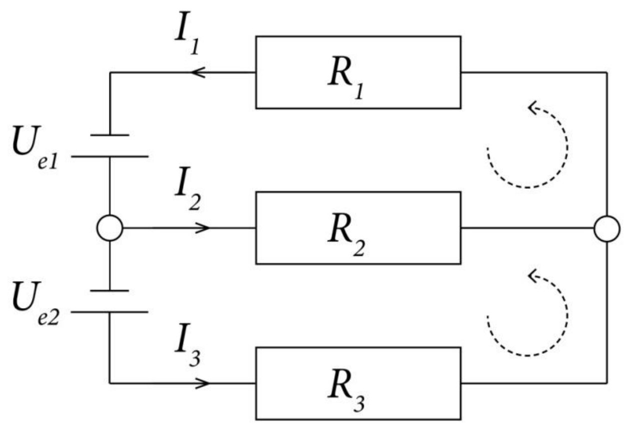
$$I = \frac{U}{R} = \frac{0{,}6}{5} = \underline{\underline{0{,}12\,\mathrm{A}}}$$

9. Na vařiči s elektrickým příkonem $800\,\mathrm{W}$ jsme ohřáli $4\,\mathrm{l}$ vody z teploty $20°\mathrm{C}$ na $100°\mathrm{C}$ za 30 minut. Jaká je účinnost vařiče? Měrné teplo vody je $4{,}2\cdot 10^3\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$.

$$\eta = \frac{P}{P_p} \qquad Q = mc(t_2 - t_1) \qquad m = \rho V \qquad P = \frac{Q}{\tau} = \frac{\rho V c(t_2 - t_1)}{\tau}$$

$$\eta = \frac{P}{P_p} = \frac{\rho V c(t_2 - t_1)}{P_p \tau} = \frac{10^3\cdot 4\cdot 10^{-3}\cdot 4{,}2\cdot 10^3(100-20)}{800\cdot 1800} = 0{,}933 = \underline{\underline{93{,}3\%}}$$

10. Jak velké proudy procházejí jednotlivými odpory v obvodu zapojeném podle obrázku, je-li $U_{e1} = 2\,\mathrm{V}, U_{e2} = 4\,\mathrm{V}$, $R_1 = 5\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 10\,\Omega$. Vnitřní odpory jsou zanedbatelně malé.



Obr. 9

$$U_{e1} = I_3R_3 + I_1R_1 \Rightarrow I_1 = \frac{U_{e1} - I_3R_3}{R_1} \qquad U_{e2} = I_2R_2 - I_3R_3 \Rightarrow I_2 = \frac{U_{e2} + I_3R_3}{R_2}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad \frac{U_{e1} - I_3R_3}{R_1} = \frac{U_{e2} + I_3R_3}{R_2} + I_3$$

$$U_{e1}R_2 - I_3R_3R_2 = U_{e2}R_1 + I_3R_3R_1 + I_3R_1R_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{U_{e1}R_2 - U_{e2}R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} = \frac{2 \cdot 2 - 4 \cdot 5}{5 \cdot 2 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 10} = \underline{\underline{-0{,}2\ \mathrm{A}}}$$

$$I_2 = \frac{U_{e2} + I_3R_3}{R_2} = \frac{4 - 0{,}2 \cdot 10}{2} = \underline{\underline{1\ \mathrm{A}}} \qquad I_1 = \frac{U_{e1} - I_3R_3}{R_1} = \frac{2 + 0{,}2 \cdot 10}{5} = \underline{\underline{0{,}8\ \mathrm{A}}}$$

11. Předmět plochy $S = 20\,\mathrm{dm}^2$ je třeba postříbřit vrstvou tloušťky $d = 0{,}2\,\mathrm{mm}$. Jaká hmotnost stříbra se musí vyloučit a jak dlouho bude pokovování trvat, je-li možné plochy zatížit proudem 0,4 A? ($\rho_{Ag} = 10{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $v_{Ag} = 1$, $\alpha = 108$)

$$m = dS\rho = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-1} \cdot 10{,}5 \cdot 10^3 = \underline{\underline{0{,}42\ \mathrm{kg}}}$$

$$I = 0{,}4\mathrm{A} \cdot \mathrm{dm}^{-2} \cdot 20\mathrm{dm}^2 = 8\ \mathrm{A}$$

$$m = \frac{\alpha}{vF} It \Rightarrow t = \frac{mvF}{\alpha I} = \frac{0{,}42 \cdot 9{,}65 \cdot 10^7}{108 \cdot 8} = 46909\mathrm{s} = \underline{\underline{13\,\mathrm{h}}}$$

12. Vypočtěte energetickou spotřebu při elektrolytickém pokrytí plochy S vrstvou stříbra o tloušťce h při napětí U.

$$E = UIt \qquad m = \rho V \qquad m = AIt \Rightarrow It = \frac{m}{A} \qquad E = U\frac{m}{A} = U\frac{\rho V}{A} = \underline{\underline{\frac{U}{A}\rho Sh}}$$

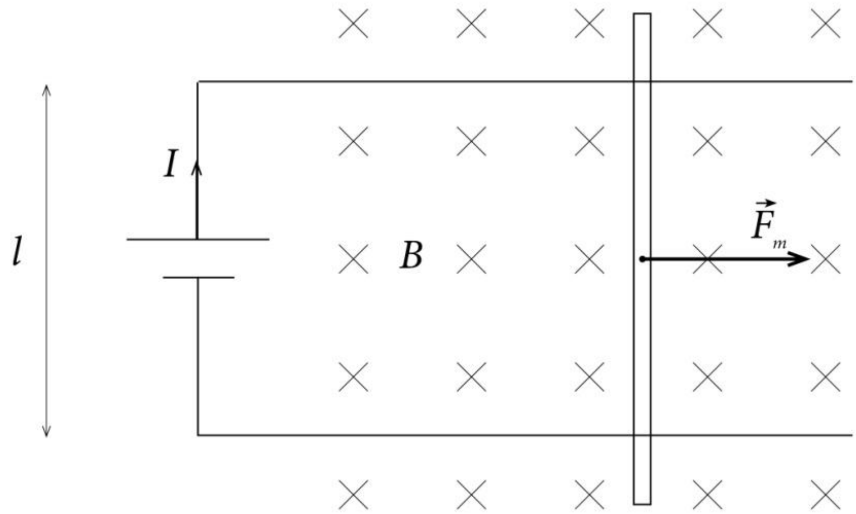
2.3 Stacionární magnetické pole

Dlouhou dobu známým faktem je, že magnetické látky vytvářejí ve svém okolí magnetické pole. CH. H. Oersted si však v roce 1820 všiml toho, že je-li v okolí vodiče umístěna magnetka, pak v momentě, když vodičem začne procházet proud, se magnetka vychýlí.(čerpáno z [18]) *Pak bylo zjištěno, že vzájemné silové působení existuje nejen mezi magnety, ale také mezi magnetem a vodičem s proudem nebo mezi dvěma vodiči s proudem. Z důvodu pohybu nosičů elektrického náboje existuje magnetické pole v okolí vodičů s proudem.* (čerpáno z [16]) Tato magnetická síla vodiče s proudem, kterou vypočteme v příkladu 1, je číselně rovna součinu velikosti proudu, jenž vodičem prochází, délky vodiče, sinu úhlu, který svírá směr proudu se směrem magnetické indukce a velikosti magnetické indukce, přičemž magnetická indukce je vektorová veličina, která nám magnetické pole popisuje. V úloze následující (2) je pak potřeba tuto magnetickou sílu položit rovnu síle, která je číselně rovna hmotnosti tělesa násobené jeho zrychlením. V př. 3 aplikujeme znalost chování magnetické indukce v okolí velmi dlouhého přímého vodiče s proudem, a následně v př. 5 vztahu pro magnetickou indukci rovnoběžných velmi dlouhých přímých vodičů. Úloha 4 je úlohou obtížnější, postupem podobnou úlohám 10 a 12 v kapitole 3.1. Takové úlohy zde zařazuji, neboť se mi líbí postup, jakým k výsledku docházíme. Při tomto postupu je třeba vědět, co počítáme, ne jen bezmyšlenkovitě dosadit do vzorce a je třeba jako výsledek uvést nejen hodnotu vzdálenosti, ale také přesnou polohu hledaného bodu, na což také nemálo studentů v písemce pro bakaláře zapomnělo. Informace o chování částice s nábojem v magnetickém poli využíváme v úloze 6. Víme, že *na částici s nábojem, která se pohybuje v magnetickém poli, působí magnetické síla, která je v každém okamžiku kolmá ke směru magnetické indukce i ke směru rychlosti částice.* (čerpáno z [16]) Rovnici zde sestavíme na základě vztahu mezi intenzitou elektrického pole a silou, která na náboj působí. Obdobně jak v úloze 4 v kapitole 3.1. V příkladě posledním (7) užíváme rovnosti sil. Místo síly elektrické však zde působí síla magnetická. Dosazení do vzorce studenti zvládali v písemkách poměrně dobře, když však měli uvažovat rovnost dvou sil, často nepochopili příklad, nebo někde udělali triviální chybu.

1. Jaká síla působí na vodič délky $l = 30\,\mathrm{cm}$ v homogenním magnetickém poli o indukci $B = 0{,}8\,\mathrm{T}$ protéká-li jím proud $I = 10\,\mathrm{A}$, přičemž vodič je kolmý ke směru magnetické indukce?

$$F_m = BIl\sin\alpha = 0{,}8 \cdot 10 \cdot 0{,}3 \cdot \sin 90° = \underline{\underline{2{,}4\,\mathrm{N}}}$$

2. Vodič, kterým prochází proud $1\,\mathrm{A}$ a který má obsah příčného řezu $1\,\mathrm{mm}^2$, se pohybuje v homogenním magnetickém poli se stálým zrychlením o velikosti $2\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ kolmo na směr indukčních čar. (Obr. 9) Hustota látky, ze které je zhotoven vodič, je $2{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$. Určete velikost magnetické indukce daného homogenního magnetického pole. Tření neuvažujte. (čerpáno z [5])



Obr. 10

$$F_m = BIl \qquad F = ma = \rho Va = \rho Sla$$

$$F_m = F$$

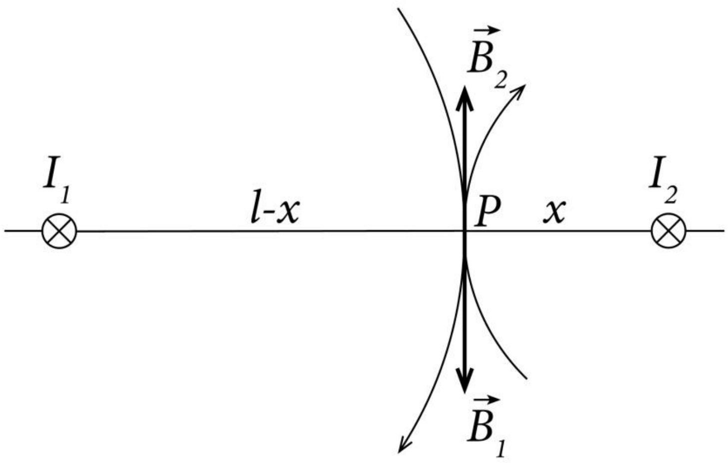
$$BIl = \rho Sla \Rightarrow B = \frac{\rho Sa}{I} = \frac{2{,}5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 2}{1} = 5\,\mathrm{mT}$$

3. Jaký proud prochází velmi dlouhým přímým vodičem, jestliže velikost magnetické indukce ve vzdálenosti 20 cm od vodiče je $20\,\mu\mathrm{T}$? (čerpáno z [5])

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \Rightarrow I = \frac{2\pi dB}{\mu_0} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0{,}2 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = \underline{\underline{20\,\mathrm{A}}}$$

4. Dva dlouhé přímé rovnoběžné vodiče jsou od sebe vzdáleny 10 cm. Jedním prochází proud 15 A, druhým 5 A. Ve kterém bodě na přímce kolmé k oběma vodičům je magnetická indukce výsledného magnetického pole nulová? Řešte pro případ souhlasných i opačných směrů proudů. (čerpáno z [5])

a) Proudy mají souhlasný směr (Obr. 11): Magnetická indukce výsledného magnetického pole v určitém bodě P je nulová, jestliže magnetické indukce B_1 a B_2 magnetických polí obou vodičů v tomto bodě jsou stejně velké a mají opačný směr. Z podmínky $B_1 = B_2$ podle obrázku 11 dostáváme



Obr. 11

$$\frac{I_1}{l-x} = \frac{I_2}{x}$$

$$I_1 x = I_2 (l - x)$$

$$I_1 x + I_2 x = I_2 l$$

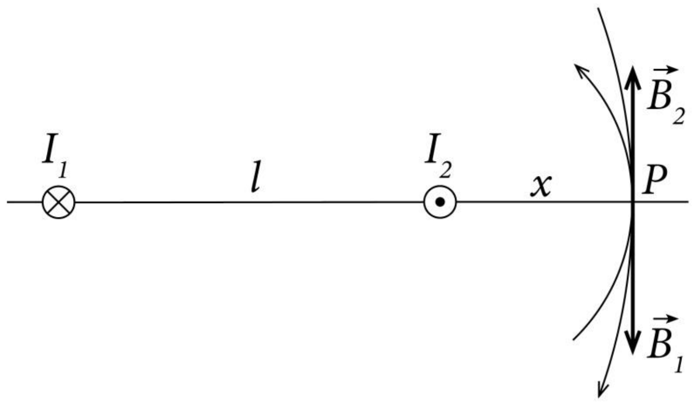
$$\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{l-x} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{x}$$

$$x(I_1 + I_2) = I_2 l \Rightarrow x = \frac{I_2 l}{I_1 + I_2} = \frac{5 \cdot 10}{15 + 5} = \underline{\underline{2{,}5\,\text{cm}}}$$

Mají-li proudy ve vodičích stejný směr, leží hledaný bod P mezi oběma vodiči ve vzdálenosti 2,5 cm od vodiče s menším proudem.

b) Proudy mají opačný směr (Obr. 12):

Podle obrázku 12 z podmínky $B_1 = B_2$ dostáváme



Obr. 12

$$\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{l+x}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{x}$$

$$\frac{I_1}{l+x}=\frac{I_2}{x}$$

$$I_1 x = I_2 (l+x)$$

$$I_1 x - I_2 x = I_2 l$$

$$x(I_1 - I_2) = I_2 l \Rightarrow x = \frac{I_2 l}{I_1 - I_2} = \frac{5\cdot 10}{15-5} = \underline{\underline{5\,\text{cm}}}$$

Mají-li proudy ve vodičích opačný směr, leží hledaný bod P ve vzdálenosti $5\,\text{cm}$ napravo od vodiče s menším proudem.

5. Jakou intenzitou přitahuje vodič protékaný proudem $I_1 = 25\,\text{A}$ délky $20\,\text{cm}$ rovnoběžný vodič, jímž teče proud $I_2 = 30\,\text{A}$?

$$F_m = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\cdot 25\cdot 30\cdot 0{,}2}{2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}01} = \underline{\underline{3\cdot 10^{-3}\,\text{N}}}$$

6. Mezi póly elektromagnetu je homogenní magnetické pole o indukci $B = 0{,}5\,\text{T}$. Jaké napětí se indukuje ve vodiči délky $l = 0{,}5\,\text{m}$, který je kolmý k vektoru magnetické indukce a pohybuje se rychlostí $v = 1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ve směru kolmém k vektoru magnetické indukce i ke své délce?

$$F_m = Bev \qquad E = \frac{F}{e}$$

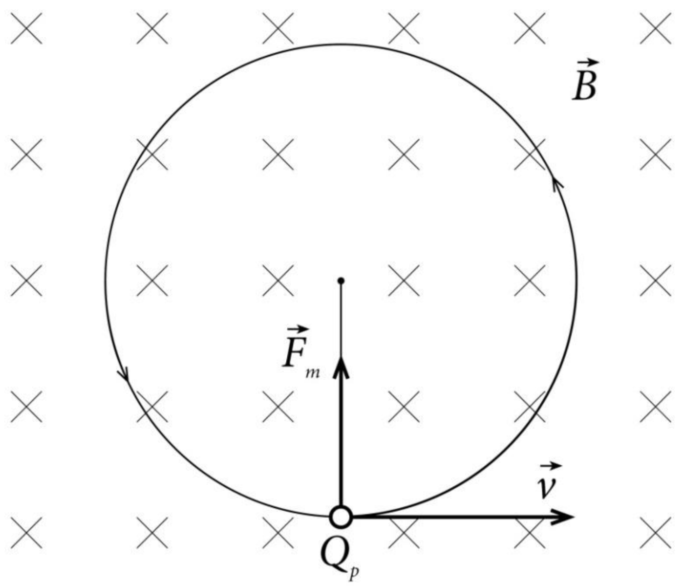
$Bev = eE$

$Bv = E$

$Bv = \frac{U}{l}$

$U = Bvl = 0{,}5 \cdot 1 \cdot 0{,}1 = \underline{\underline{0{,}05\,\mathrm{V}}}$

7. Proton se pohybuje v homogenním magnetickém poli rychlostí o velikosti $2 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ kolmo ke směru indukčních čar. Velikost magnetické indukce homogenního magnetického pole je 15 mT. Určete poloměr kružnicové trajektorie protonu. (čerpáno z [5])



Obr. 13

$F_d = m\frac{v^2}{r}$ $\quad F_m = Bev \quad F_d = F_m$

$m\frac{v^2}{r} = Bev \Rightarrow r = \frac{mv}{eB} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 2 \cdot 10^6}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 15 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{1{,}39\,\mathrm{m}}}$

2.4 Nestacionární magnetické pole

V předchozích kapitolách jsme řešili pole, v nichž se elektrické a magnetické veličiny s časem neměnily. Nestacionární pole je pole, které se s časem mění. Důležitou veličinou v elektromagnetickém poli je magnetický indukční tok. *Uvažujeme-li rovinnou plochu umístěnou v homogenním magnetickém poli, pak magnetický indukční tok, procházející touto plochou je roven násobku velikosti vektoru magnetické indukce, plochy a kosinu úhlu, který svírá normála plochy se směrem magnetické indukce* [16], jak je patrno v prvních čtyřech příkladech. Důležitým fyzikálním zákonem, který v těchto příkladech je aplikován, je Faradayův zákon elektromagnetické indukce. Jestliže magnetický indukční tok plochou ohraničenou vodičem se za nějaký čas změní o určitou hodnotu, pak střední hodnota elektromotorického napětí, které se na vodiči indukuje je rovna opačné hodnotě podílu velikosti magnetického indukčního toku a času, za který změna proběhla. Tyto příklady se liší tím, že v 1 je nutno si dopočítat plochu závitu, v 2 je třeba správně určit úhel, který svírá směr magnetické indukce s normálou k ploše, v 3 se vyjádří proud procházející závitem jako podíl indukovaného napětí a odporu závitu dle Ohmova zákona a konečně v př. 4 si indukované napětí vyjádříme jako součin velikosti magnetické indukce, rychlosti a délky tyče. Tento vztah je uveden na straně 163 literatury [16] v odvození zákona elektromagnetické indukce. V úloze 5 počítáme indukované elektromotorické napětí na cívce. Záporně vzatá hodnota tohoto napětí roste spolu s rostoucí indukčností cívky, která cívku charakterizuje a s rychlostí změny proudu. Výpočet energie magnetického pole cívky je uveden v následujícím příkladě (6). Navíc zde opět je potřeba provést odvození hledané veličiny. V př. 7 pak navíc používáme vyjádření zkratového proudu, jakožto podílu elektromotorického napětí a vnitřního odporu zdroje. Př. 8–11 jsou příklady se střídavým napětím. *Proměnné napětí s harmonickým průběhem je střídavé napětí a elektrickým obvodem prochází střídavý proud, který má rovněž harmonický průběh.*[16] V úloze 8 určujeme hodnotu okamžitých napětí v různých časech, což je vesměs mechanická záležitost. Následně v př. 9 určujeme veličiny v obvodu s kapacitancí a rezistancí. Tuto úlohu považuji za náročnější, kde kromě znalosti potřebných vzorců je třeba uvážit, jak bude vypadat ilustrace a jak budeme jednotlivé veličiny skládat. V př. 10 si stačí vyjádřit proud dle Ohmova zákona a následně za odpor dosadit obrácenou hodnotu součinu kapacity a úhlové frekvence, kterou si pak vyjádříme jako dvojnásobek frekvence a plného úhlu. Zjišťujeme, že velikost proudu s frekvencí úměrně roste. V př.

11 skládáme napětí a v druhé části příkladu pak počítáme s maximálním prvním napětím, které je maximální právě tehdy, když druhé napětí vynásobíme kosinem daného úhlu nebo kosinem záporné hodnoty tohoto úhlu.

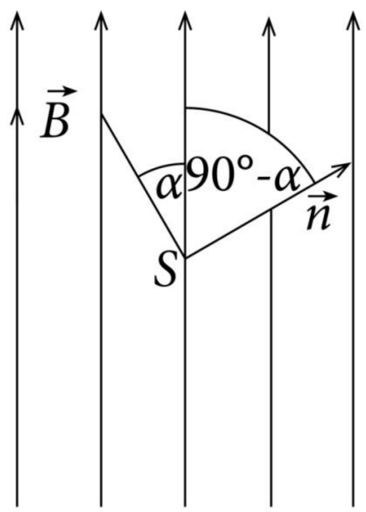
1. Vodič ve tvaru kruhového závitu o poloměru $r = 10\,\mathrm{cm}$ je v homogenním magnetickém poli o indukci $B = 1\,\mathrm{T}$ a jeho rovina je kolmá k vektoru magnetické indukce. Jaké indukované napětí vznikne ve vodiči, jestliže magnetické pole rovnoměrně vymizí za dobu $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$?

$$\Phi = BS = B\pi r^2$$

$$U = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad d\Phi = -B\pi r^2$$

$$U = \frac{B\pi r^2}{t} = \frac{1\cdot 3{,}14\cdot 0{,}1^2}{0{,}5} = \underline{\underline{6{,}28\cdot 10^{-2}\ \mathrm{V}}}$$

2. Drátěný závit o obsahu $50\,\mathrm{cm}^2$ je umístěn v homogenním magnetickém poli, jehož indukční čáry svírají s rovinou závitu úhel 30°. Velikost magnetické indukce homogenního magnetického pole se za dobu 0,02 s rovnoměrně zmenšovala z počáteční hodnoty 0,2 T na nulovou hodnotu. Určete indukované napětí. (čerpáno z [5])



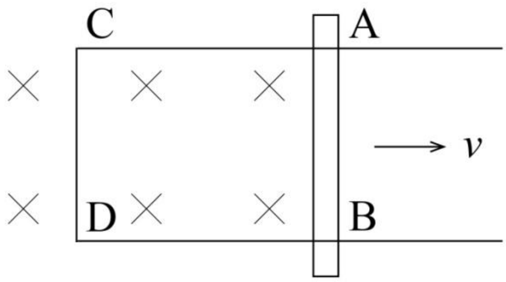
Obr. 14

$$|U_i| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta BS\cos(90° - \alpha)}{\Delta t} = \frac{0{,}2\cdot 5\cdot 10^{-3}\cdot\cos(90° - 30°)}{0{,}02} = \underline{\underline{25\,\mathrm{mV}}}$$

3. V homogenním magnetickém poli je umístěn závit o obsahu $10^{-2}\ \mathrm{m}^2$ kolmo na směr indukčních čar. Odpor závitu je $0{,}2\,\Omega$. Určete náboj, který projde závitem, jestliže se velikost magnetické indukce rovnoměrně zmenší z počáteční hodnoty 1 T na hodnotu nulovou. (čerpáno z [5])

$$Q = I\Delta t = \frac{|U_i|}{R\Delta t} = \frac{1}{R}\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}\Delta t = \frac{1}{R}\Delta \Phi = \frac{\Delta BS}{R} = \frac{1\cdot 10^{-2}}{0{,}2} = \underline{\underline{5\cdot 10^{-2}\ \mathrm{C}}}$$

4. Vodivá tyč se dotýká drátů CA a DB. (Obr. 15) Zařízení je v homogenním magnetickém poli o indukci $0{,}5\,\mathrm{T}$. Určete velikost indukovaného elektromotorického napětí v tyči, pohybuje-li se rychlostí $4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete proud procházející obvodem, je-li odpor obvodu $2\,\Omega$ a sílu, která působí na pohybující se tyč. Vzájemná vzdálenost drátů je 0,5 metru.



Obr. 15

$$U = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{Blv\Delta t}{\Delta t}$$

$$U = Blv = 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 4 = \underline{\underline{1\,\mathrm{V}}}$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{1}{2} = \underline{\underline{0{,}5\,\mathrm{A}}} \qquad F_m = BIl = 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5 = \underline{\underline{0{,}125\,\mathrm{N}}}$$

5. Vypočtěte elektromotorické napětí, které se indukuje v cívce s indukčností $L = 0{,}6\,\mathrm{H}$, jestliže v ní proud roste rovnoměrně tak, že se za $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ zvýší o $\Delta I = 1\,\mathrm{A}$.

$$U = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} = -0{,}6\frac{1}{1} = \underline{\underline{-0{,}6\,\mathrm{V}}}$$

6. Jaký proud prochází tlumivkou o indukčnosti $L = 4\,\mathrm{H}$, má-li magnetické pole energii $E = 50\,\mathrm{J}$.

$$E = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow I = \sqrt{\frac{2E}{L}} = \sqrt{\frac{2\cdot 50}{4}} = \underline{\underline{5\,\mathrm{A}}}$$

7. K cívce o indukčnosti 0,3 H zhotovené ze silného měděného vodiče je paralelně připojen rezistor a obvod je připojen ke zdroji elektromotorického napětí 4 V, jehož vnitřní odpor je $2\,\Omega$. Určete energii cívky a rezistoru po odpojení zdroje napětí. (čerpáno z [3])

$$E = \frac{1}{2}LI^2 \qquad I_z = \frac{U_e}{R_i}$$

$$E = \frac{1}{2}L\left(\frac{U_e}{R_i}\right) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}3\left(\frac{4}{2}\right)^2 = \underline{\underline{0{,}6\ \mathrm{J}}}$$

8. Při otáčení závitu v homogenním magnetickém poli je amplituda střídavého napětí $100\,\mathrm{V}$ a perioda $0{,}02\,\mathrm{s}$. Určete okamžitou hodnotu napětí v časech $0{,}005\,\mathrm{s},\ 0{,}01\,\mathrm{s},\ 0{,}015\,\mathrm{s},\ 0{,}02\,\mathrm{s}$.

$$u = U_m \sin \omega t \qquad \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$$

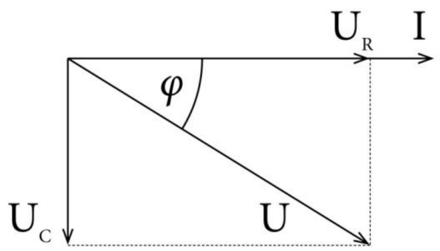
$$u_1 = U_m \sin\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t_1 = 100\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{0{,}02}0{,}005 = \underline{\underline{100\ \mathrm{V}}}$$

$$u_2 = U_m \sin\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t_2 = 100\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{0{,}02}0{,}01 = \underline{\underline{0\ \mathrm{V}}}$$

$$u_3 = U_m \sin\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t_3 = 100\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{0{,}02}0{,}015 = \underline{\underline{100\ \mathrm{V}}}$$

$$u_4 = U_m \sin\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t_4 = 100\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{0{,}02}0{,}005 = \underline{\underline{0\ \mathrm{V}}}$$

9. Kondenzátor o kapacitě $C = 16\,\mu\mathrm{F}$ a rezistor s odporem $R = 200\,\Omega$ jsou zapojeny do série a připojeny ke zdroji střídavého napětí $U = 220\,\mathrm{V}$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Určete impedanci v obvodu, proud v obvodu, fázový posun mezi proudem a napětím, napětí na kondenzátoru a odporu.



Obr. 16

$U_R = RI_R \qquad U_C = \frac{I}{\omega C} \qquad U = \sqrt{U_R{}^2 + U_C{}^2} = I\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(2\pi f)^2 C^2}} =$$

$$= \sqrt{200^2 + \frac{1}{(2 \cdot 3{,}14 \cdot 50)^2 \cdot (16 \cdot 10^{-6})^2}} = \underline{\underline{280\,\Omega}} \qquad I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{280} = \underline{\underline{0{,}8\text{A}}}$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{1}{\omega \text{CR}} = \frac{1}{2\pi f \text{CR}} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 16 \cdot 10^{-6} \cdot 200} = 0{,}995 \cong 1 \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = 45°}}$$

$$U_R = IR = 0{,}8 \cdot 200 = \underline{\underline{160\text{ V}}}$$

$$U_C = IX_C = I\frac{1}{\omega C} = 0{,}8 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 16 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{160\text{ V}}}$$

10. Ke zdroji střídavého napětí 230 V s frekvencí 50 Hz je připojený kondenzátor s kapacitou 6 pF. Vypočtěte, jaký proud teče obvodem a jaký proud by procházel, kdyby se frekvence zvýšila desetinásobně.

$$I = \frac{U}{X_C} = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = \omega CU = 2\pi f CU$$

$$I_1 = 2\pi f CU = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 230 = \underline{\underline{4{,}34 \cdot 10^{-7}\text{ A}}}$$

$$I_1 = 2\pi 10 f CU = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 50 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 230 = \underline{\underline{4{,}34 \cdot 10^{-6}\text{ A}}}$$

11. Jak velké je výsledné střídavé napětí v obvodu, v němž jsou zapojeny za sebou dva zdroje střídavého napětí $U_1 = 30\text{ V}$, $U_2 = 40\text{ V}$, jestliže U_1 předbíhá U_2 o fázový úhel 60°. Jak velká je hodnota napětí v okamžiku, když U_1 je maximální?

$$U_m = \sqrt{U_{m_1}{}^2 + U_{m_2}{}^2 + 2U_{m_1}U_{m_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} =$$

$$= \sqrt{30^2 + 40^2 + 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 60°} = \underline{\underline{61\text{ V}}}$$

Hodnota U pro maximální U_1: $\quad U = U_1 + U_2 \cos 60° = 30 + 20 = \underline{\underline{50\text{ V}}}$

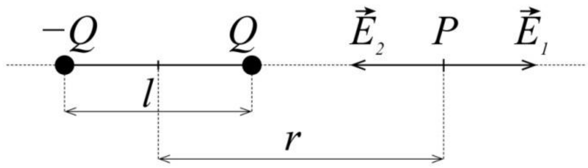
3 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY PRO BAKALÁŘE FYZIKY

Na základě [17] jsem vytvořil soubor příkladů, určených primárně pro studenty bakalářského studia fyziky na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého. Jedná se o některé z neřešených příkladů uvedených na webu [8]. Obrázky u příkladů pochází také z [17]. Vytvářel jsem je pomocí programu Adobe InDesign.

3.1 Elektrostatické pole

Do tohoto tematického celku jsem zařadil úlohy pro odvození intenzity v okolí dipólu, a to v úlohách 1 a 2. Následně v př. 3 aplikujeme Gaussovu větu. Př. 4 je komplexnější, počítáme zde kromě intenzity také vykonanou práci. Dále jsem zde zařadil úlohu 5, kde určujeme, jakou křivku tvoří body nulového potenciálu. V příkladu 6 určujeme otáčivý moment a práci potřebnou k natočení dipólu. Výpočet otáčivého mementu si myslím, že je úkol, který se v elektřině a magnetismu zřídka vyskytuje. V 7 určujeme ekvipotenciální hladinu. Líbí se mi, že zde podobně jak v příkladě 5 využíváme znalostí analytické geometrie, i když jen základních, protože si myslím, že obecně analytická geometrie není u příkladů ze základního kurzu fyziky využívána. Úlohy 8–11 se věnují výpočtu kapacity a v poslední úloze této části počítáme plošné hustoty náboje na jednotlivých deskách. Myslím si, že by bakaláři měli počítat více takových úloh, protože si pak lépe zapamatují a pochopí teoretické poznatky zde využívané. Poslední úloha 12 dává návod pro výpočet plošných nábojů na vnitřních plochách rovin kondenzátoru.

1. Vypočtěte intenzitu elektrostatického pole v bodě na ose dipólu.



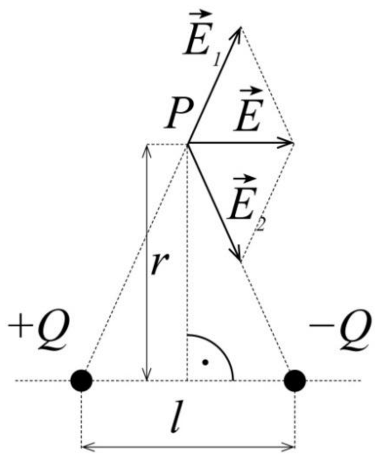
Obr. 17

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} \qquad E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$E = E_1 - E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2 + rl + \frac{l^2}{4} - r^2 + rl - \frac{l^2}{4}}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2rl}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} = \frac{rQl}{2\pi\varepsilon_0\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} \qquad l \ll r: E = \frac{rQl}{2\pi\varepsilon_0 r^4} = \underline{\underline{\frac{Ql}{2\pi\varepsilon_0 r^3}}}$$

2. Vypočtěte intenzitu elektrostatického pole v bodě na ose kolmé k dipólu.

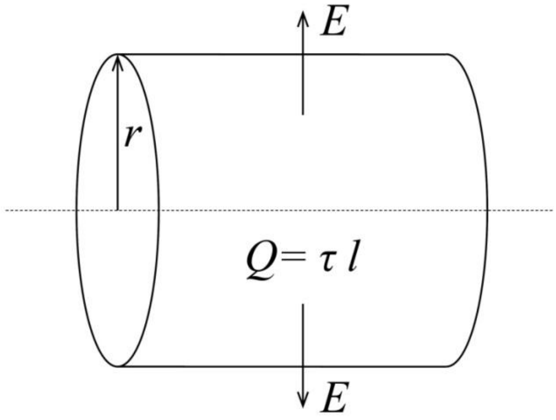


Obr. 18

$$E_1 = E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)} \qquad r^2 + \frac{l^2}{4} = a^2 \qquad \sin\alpha = \frac{l}{2\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

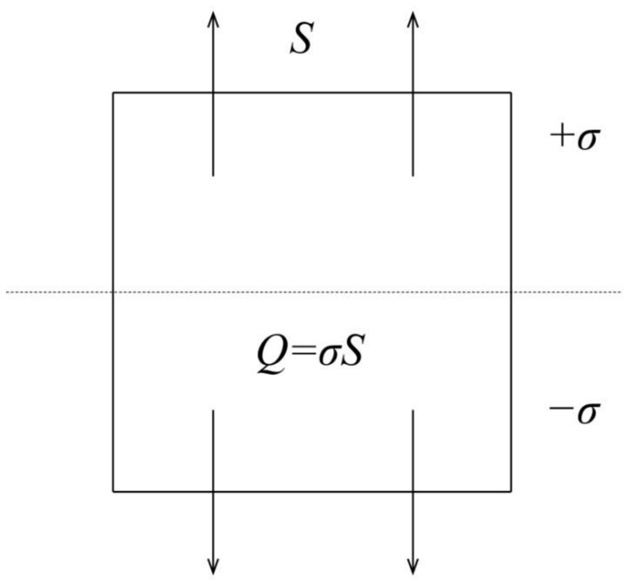
$$E = 2E_1 \sin\alpha = 2\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)}\frac{l}{2\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}} = \frac{Ql}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad l \ll r: E = \underline{\underline{\frac{Ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}}$$

3. Pomocí Gaussovy věty elektrostatiky odvoďte a) elektrickou intenzitu v okolí nekonečně dlouhého nabitého vodiče, b) elektrickou intenzitu v okolí nekonečné nabité roviny.



Obr. 19a

a) $\Phi = ES = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\tau l}{\varepsilon_0} \qquad S = 2\pi r l \qquad E \cdot 2\pi r l = \frac{\tau l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \underline{\underline{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}}}$

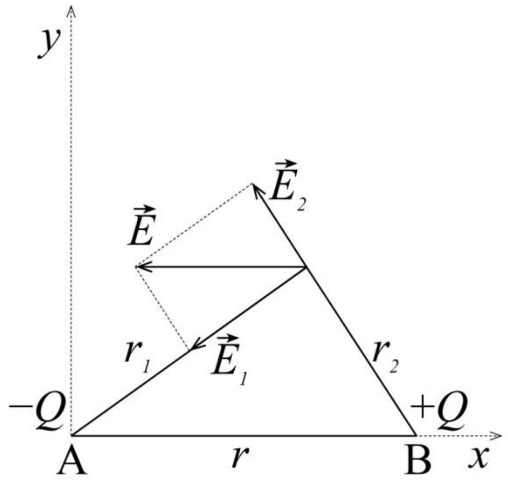


Obr. 19b

b) $\Phi = E2S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \underline{\underline{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}}$

4. V bodech A, B jsou po řadě umístěny dva bodové náboje $-Q_1$, Q_2, vzdáleny od sebe o délku r. Bod C je vzdálený od bodu A o délku r_1 a od bodu B o délku r_2.

a) Vypočtěte elektrickou intenzitu v bodě C, tvoří-li body A, B, C pravoúhlý trojúhelník o přeponě AB, b) Vypočtěte elektrickou intenzitu v bodě C, tvoří-li body A, B, C kosoúhlý trojúhelník. c) Vypočtete práci, kterou je nutno vykonat při přenesení kladného bodového náboje Q_3 ze středu S spojnice AB do bodu C.



Obr. 20

a) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ $\qquad E_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1^2}$ $\qquad E_2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_2^2}$

Trojúhelník je pravoúhlý $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\underline{\underline{E = \left(E_1^2 + E_2^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{Q_2^2}{r_2^4}\right)^{\frac{1}{2}}}}$

b) Trojúhelník je kosoúhlý $\quad E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\varphi$

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r^2}{2r_1r_2}$$

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\frac{r_1^2 + r_2^2 - r^2}{2r_1r_2}$$

$$\underline{\underline{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{Q_2^2}{r_2^4} - \frac{Q_1Q_2}{r_1^3r_2^3}\left(r_1^2 + r_2^2 - r\right)\right]^{\frac{1}{2}}}}$$

c) $W = Q_3(\varphi_S - \varphi_C)$ $\qquad \varphi_S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{Q_1}{\frac{r}{2}} + \frac{Q_2}{\frac{r}{2}}\right)$ $\qquad \varphi_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right)$

$$W = Q_3\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{Q_1}{\frac{r}{2}}+\frac{Q_2}{\frac{r}{2}}\right)-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{Q_1}{r_1}+\frac{Q_2}{r_2}\right)\right) \qquad \underline{\underline{W = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{r}\left(Q_2 - Q_1\right)+\frac{Q_1}{r_1}-\frac{Q_2}{r_2}\right]}}$$

5. Dva bodové náboje Q_1, Q_2, opačné polarity jsou umístěny ve vakuu ve vzájemné vzdálenosti *d*. Pro jejich velikosti platí $|Q_1| = k|Q_2|$, $k > 1$. Zjistěte, jakou křivku tvoří body nulového potenciálu elektrického pole, tvořeného náboji Q_1 a Q_2, v libovolné rovině obsahující uvedené náboje.

Náboj Q_1 umístíme do počátku souřadné soustavy, náboj Q_2 umístíme do bodu $(d, 0)$ na ose *x*. Vypočteme potenciál elektrického pole v bodě $P(x, y)$ roviny, obsahující oba náboje.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{\left[(d-x)^2+y^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$|Q_1| = k|Q_2|$$

$$\varphi = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{k}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[(d-x)^2+y^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$\varphi = 0:\ (d-x)^2 + y^2 = \frac{1}{k^2}x^2 + y^2$$

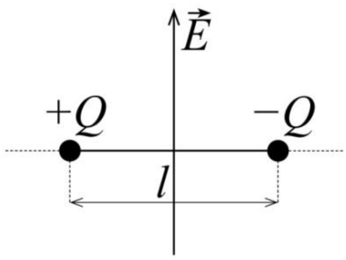
$$\left(x - \frac{dk^2}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{dk}{k^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Obdrželi jsme rovnici kružnice. Určíme její střed a poloměr.

$$\underline{\underline{S\left(\frac{dk^2}{k^2-1}, 0\right)}} \qquad \underline{\underline{r = \frac{dk}{k^2-1}}}$$

6. Elektrický dipól je umístěn v homogenním elektrickém poli intenzity *E* tak, že osa dipólu je kolmá ke směru elektrických siločar. Vypočtěte velikost otáčivého

momentu *M*, kterým působí pole na dipól a práci, kterou vykoná pole při natočení dipólu do směru čar pole. ($p = 1{,}8 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{C \cdot m}$, $E = 5 \cdot 10^{4}\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$)



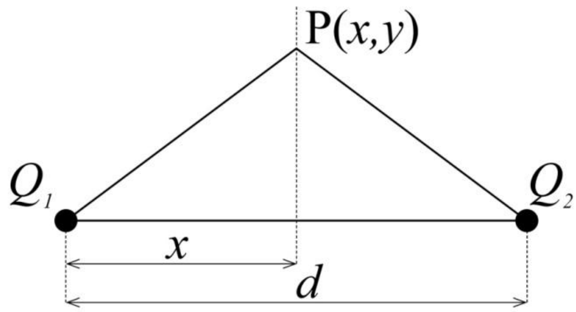
Obr. 22

$$\vec{M} = \vec{l} x Q \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$M = pE \sin\varphi = pE \sin\frac{\pi}{2} = pE = 1{,}8 \cdot 10^{-28} \cdot 5 \cdot 10^{4} = \underline{\underline{9 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{N \cdot m}}}$$

$$W = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} M \mathrm{d}\varphi = pE \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = -pE = \underline{\underline{-9 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{J}}}$$

7. Mezi dvěma bodovými náboji Q_1, Q_2 je vzdálenost *d*. Najděte ekvipotenciální hladinu nulového potenciálu elektrického pole těchto nábojů ve vakuu. ($Q_1 = -3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$, $Q_2 = 2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$, $d = 5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$)



Obr. 23

V bodě P: $$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2}{\left[(d-x)^2 + y^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\varphi = 0: \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2}{\left[(d-x)^2 + y^2\right]^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\frac{Q_1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{Q_2}{\left[(d-x)^2+y^2\right]^{\frac{1}{2}}}=0$$

$$Q_1\left[(d-x)^2+y^2\right]^{\frac{1}{2}}-Q_2\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}=0$$

$$Q_1\left[d^2-2dx+x^2+y^2\right]^{\frac{1}{2}}-Q_2\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}=0$$

$$Q_1^{\,2}d^2-Q_1^{\,2}2dx+Q_1^{\,2}x^2+Q_1^{\,2}y^2-Q_2^{\,2}x^2-Q_2^{\,2}y^2=0$$

$$\left(Q_1^{\,2}-Q_2^{\,2}\right)x^2+\left(Q_1^{\,2}-Q_2^{\,2}\right)y^2-Q_1^{\,2}2dx+Q_1^{\,2}d^2=0$$

Kružnici normujeme.

$$x^2+y^2-2\frac{Q_1^{\,2}}{Q_1^{\,2}-Q_2^{\,2}}dx+\frac{Q_1^{\,2}}{Q_1^{\,2}-Q_2^{\,2}}d^2=0$$

$$x^2+y^2-2\frac{Q_1^{\,2}}{Q_1^{\,2}-Q_2^{\,2}}dx=-\frac{Q_1^{\,2}}{Q_1^{\,2}-Q_2^{\,2}}d^2$$

$$\left(x-\frac{Q_1^{\,2}}{Q_1^{\,2}-Q_2^{\,2}}d\right)^2+y^2=\left(\frac{Q_1Q_2}{Q_1^{\,2}-Q_2^{\,2}}d\right)^2$$

Určíme poloměr a střed kružnice.

$$r=\frac{Q_1Q_2}{Q_1^{\,2}-Q_2^{\,2}}d=\frac{-3\cdot 10^{-6}\cdot 2\cdot 10^{-6}}{\left(-3\cdot 10^{-6}\right)^2-\left(2\cdot 10^{-6}\right)^2}\cdot 5\cdot 10^{-2}=\underline{\underline{6\,\mathrm{cm}}}$$

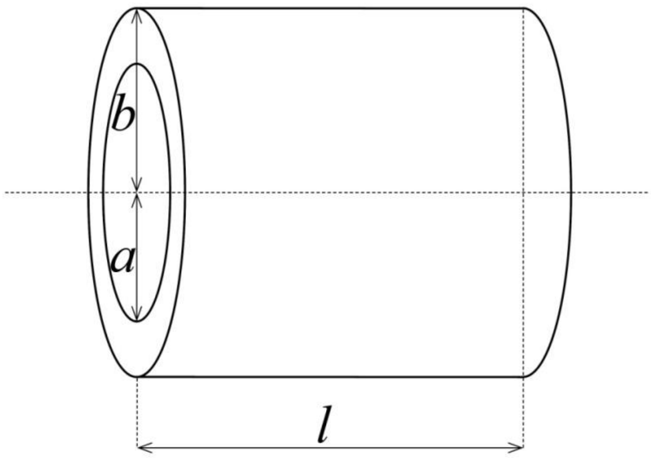
$$S\left[\frac{Q_1^{\,2}}{Q_1^{\,2}-Q_2^{\,2}}d,0\right]$$

$$S_x=\frac{\left(-3\cdot 10^{-6}\right)^2}{\left(-3\cdot 10^{-6}\right)^2-\left(2\cdot 10^{-6}\right)^2}\cdot 5\cdot 10^{-2}=\frac{\left(-3\cdot 10^{-6}\right)^2}{\left(-3\cdot 10^{-6}\right)^2-\left(2\cdot 10^{-6}\right)^2}\cdot 5\cdot 10^{-2}=9\,\mathrm{cm}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{S}[9\,\mathrm{cm},0]}}$$

Hledaná ekvipotenciální hladina je tvořena kružnicí o poloměru 6 cm a středu v bodě $\mathrm{S}[9\,\mathrm{cm},0]$.

8. Vypočtěte kapacitu tří paralelně zapojených Leydenských láhví (válcových kondenzátorů o vnějším poloměru *b*, vnitřním poloměru *a* a výšce polepů *l*. Odvoďte vztah pro kapacitu válcového kondenzátoru a pak numericky pro $b = 0{,}08\,\mathrm{m}$, $a = 0{,}075\,\mathrm{m}$, $l = 0{,}2\,\mathrm{m}$, $\varepsilon_r = 6$.



Obr. 24

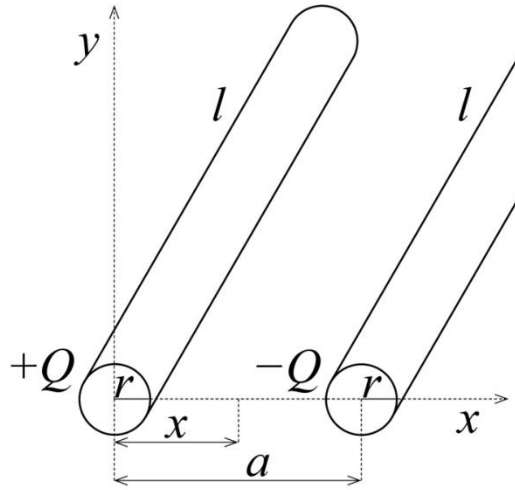
Vnitřní plocha je nabita nábojem $+Q$, vnější pak nábojem $-Q$.

$b > \mathrm{r} > a$ $$E 2\pi r l = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\frac{Q}{r}$$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi \Rightarrow \varphi = \int_a^b E\mathrm{d}r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a} \qquad C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{b}{a}}$$

$$C_V = 3C = \frac{6\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{b}{a}} = \frac{6\cdot\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}2}{\ln\frac{0{,}08}{0{,}075}} = \underline{\underline{5{,}1\cdot 10^{-9}\ \mathrm{F}}}$$

9. Vypočtěte kapacitu dvou rovnoběžných válcových vodičů, vzájemně izolovaných, o délce *l*, je-li jejich poloměr *r* a vzájemná vzdálenost *a*.



Obr. 25

$$C = \frac{Q}{U} \qquad U = \int E \mathrm{d}x$$

V bodě P na spojnici středů přispívají jednotlivé vodiče intenzitami dle Gaussovy věty.

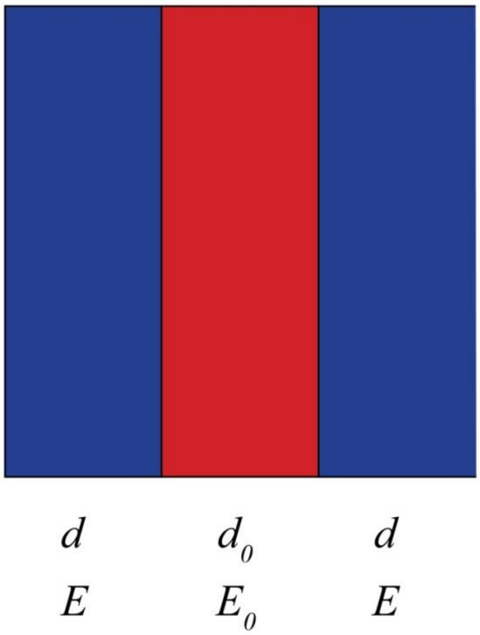
$$2\pi x l E_{+} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \qquad 2\pi(a - x) l E_{-} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a - x}\right)\frac{Q}{l}$$

$$U = \int_{r}^{a-r} E \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{l}\int_{r}^{a-r}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a - x}\right)\mathrm{d}x$$

$$U = \frac{1}{\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{l}\ln\frac{a - r}{r} \Rightarrow C = \underline{\underline{\frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}{\ln\frac{a - r}{r}}}}$$

10. Vypočtěte kapacitu deskového kondenzátoru o ploše *S*, je-li jeho dielektrikum složené ze tří vrstev, kde první a třetí vrstva mají stejnou relativní permeabilitu. (viz Obr. 26)



Obr. 26

Tok vektoru $\vec{D}$ plochou S je všude stejný.

$$C = \frac{Q}{U} \qquad \psi = \iint_S D\mathrm{d}S = D \cdot S = Q$$

$$\varepsilon_{r_0} E_0 = \varepsilon_r E \Rightarrow E = \frac{\varepsilon_{r_0} E_0}{\varepsilon_r}$$

Napětí je rovno součtu napětí mezi jednotlivými vrstvami.

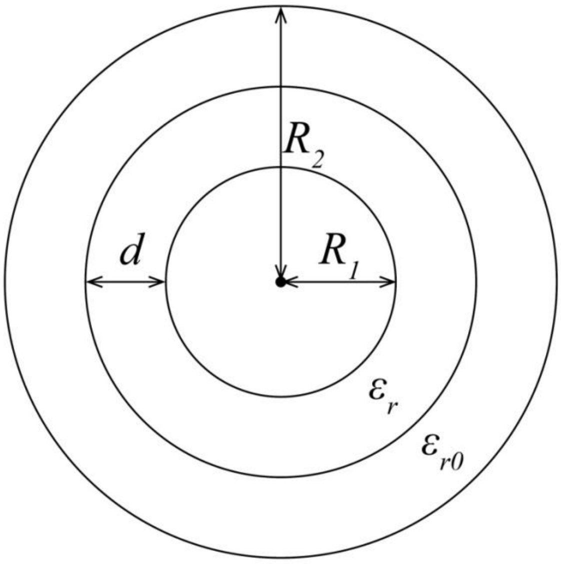
$$U = U_{AD} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} = Ed + E_0 d_0 + Ed = E_0 d_0 + 2Ed = E_0 d_0 + 2\frac{\varepsilon_{r_0} E_0}{\varepsilon_r} d =$$

$$= E_0 d_0 + 2\frac{\varepsilon_{r_0} E_0}{\varepsilon_r} d = E_0 \left(d_0 + 2\frac{\varepsilon_{r_0}}{\varepsilon_r} d \right) = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_0}} \left(d_0 + 2\frac{\varepsilon_{r_0}}{\varepsilon_r} d \right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{DS}{\frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_0}} \left(d_0 + 2\frac{\varepsilon_{r_0}}{\varepsilon_r} d \right)} = \frac{S}{\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_0}} \left(d_0 + 2\frac{\varepsilon_{r_0}}{\varepsilon_r} d \right)} = \frac{S}{\frac{d_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_0}} + 2\frac{\varepsilon_{r_0}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_0} \varepsilon_r} d} = \underline{\underline{\frac{S}{\frac{d_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_0}} + 2\frac{d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}}}$$

11. Vnitřní koule o poloměru R_1 kulového kondenzátoru je polepena vrstvou dielektrika o tloušťce d a relativní permitivitě ε_r. Zbylý prostor mezi tímto dielektrikem

a vnější koulí poloměru R_2 je vyplněn vzruchem o relativní permitivitě ε_{r_0}. Vypočtěte kapacitu kulového kondenzátoru.



Obr. 27

$$C = \frac{Q}{U}$$

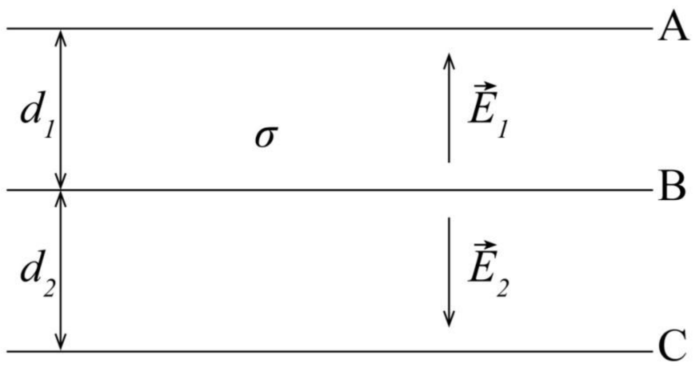
$$U = \int_{R_1}^{R_1+d} E_1 d_1 + \int_{R_1+d}^{R_1} E_2 d_2$$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2} \qquad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_0}}\frac{Q}{r^2}$$

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_1+d}\frac{1}{\varepsilon_r r^2}d_1 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1+d}^{R_1}\frac{1}{\varepsilon_{r_0} r^2}d_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_r R_1} - \frac{1}{\varepsilon_{r_0} R_2} + \frac{1}{R_1+d}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - \frac{1}{\varepsilon_{r_0}}\right)\right]$$

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_r R_1} - \frac{1}{\varepsilon_{r_0} R_2} + \frac{1}{R_1+d}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - \frac{1}{\varepsilon_{r_0}}\right)\right]} = \underline{\underline{\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_r R_1} - \frac{1}{\varepsilon_{r_0} R_2} + \frac{1}{R_1+d}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - \frac{1}{\varepsilon_{r_0}}\right)}}}$$

12. Rovnoběžné vodivé roviny A, B, C tvoří deskový kondenzátor. Na rovině B je hustota náboje σ. Roviny A a C jsou vodivě spojeny a nenabity. Určete plošné náboje na vnitřních plochách rovin A a C.



Obr. 28

$$E_1 d_1 = E_2 d_2$$

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{\sigma d_2}{\varepsilon_0 (d_1 + d_2)} = -\frac{\sigma_A}{\varepsilon_0} \qquad \underline{\underline{\sigma_A = -\frac{\sigma d_2}{d_1 + d_2}}}$$

$$E_2 = \frac{\sigma d_1}{\varepsilon_0 (d_1 + d_2)} = -\frac{\sigma_C}{\varepsilon_0} \qquad \underline{\underline{\sigma_C = -\frac{\sigma d_1}{d_1 + d_2}}}$$

3.2 Stacionární elektrické pole

Při sestavování úloh ze stacionárního elektrického pole jsem použil často úlohy ne příliš náročné, avšak vyžadující znalosti vysokoškolských matematických operací, a tedy se tyto úlohy nedaly zařadit jako středoškolské, i když úloha 2 by byla řešitelná také výpočtem ze sestavených rovnic, zde je uvedeno řešení pomocí determinantu, a tedy je úloha řazená jako vysokoškolská. V př. 1 počítáme náboj pomocí integrace přes čas, následně spočteme střední hodnotu proudu. Tato úloha se sice jeví velice jednoduše, avšak nepochybně by s ní měli studenti učitelských oborů jako např. F-BI problém. Př. 3 je použitými matematickými operacemi podobný příkladu 1, počítáme zde však výkon. V úloze 4 je třeba správně ilustrovat a pochopit příklad, znát vyjádření vodivosti materiálu. Vyjádříme-li si správně veličinu dG, úloha pak nepředstavuje zásadní problém. Př. 5 se mi líbí proto, že vyžaduje neobvyklou myšlenku vytvoření si náhradního obvodu. Napadne-li studenta tato myšlenka, další část příkladů pro něj nepředstavuje zásadní problém. Poslední příklad této části (6) je trochu sporný v tom, že by mohl být klasifikován jako příklad středoškolský, nicméně vzhledem z náročnosti jsem ho zařadil jako příklad pro bakaláře.

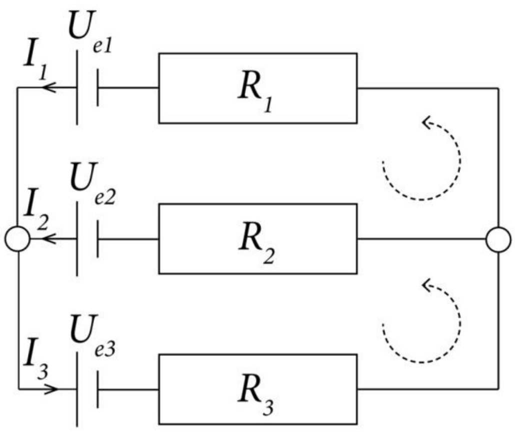
1. Proud ve vodiči se mění s časem podle vztahu $I = 4 + 3t^2$, přičemž proud uvažujeme v Ampérech, čas v sekundách. Určete, jak velký náboj projde vodičem za čas od $t_1 = 5\,\mathrm{s}$ do $t_2 = 10\,\mathrm{s}$ a jaká je střední hodnota proudu v tomto časovém intervalu.

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left(4 + 3t^2\right)\mathrm{d}t = \left[4t + t^3\right]_{t_1}^{t_2} =$$

$$= 4(t_2 - t_1) + \left(t_2^{\,3} - t_1^{\,3}\right) = 4(10 - 5) + \left(10^3 - 5^3\right) = \underline{\underline{895\,\mathrm{C}}}$$

$$I = \frac{Q}{t_2 - t_1} = \frac{895}{10 - 5} = \underline{\underline{179\,\mathrm{A}}}$$

2. Vypočtěte proudy jdoucí jednotlivými odpory v obvodu podle obrázku, přičemž víme, že $U_{e1} = 8\,\mathrm{V}$, $U_{e2} = 6\,\mathrm{V}$, $U_{e3} = 5\,\mathrm{V}$, $R_1 = 20\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$, $R_3 = 5\,\Omega$, a vnitřní odpory jsou zanedbatelně malé.



Obr. 29

$$I_1 + I_2 = I_3$$

$$U_{e1} - U_{e2} = I_1 R_1 - I_2 R_2$$

$$U_{e2} + U_{e3} = I_2 R_2 + I_3 R_3$$

$$0 = I_3 - I_1 - I_2$$

$$0 = I_1 + I_2 - I_3$$

$$U_{e1} - U_{e2} = I_1 R_1 - I_2 R_2 + 0$$

$$U_{e2} + U_{e3} = 0 + I_2 R_2 + I_3 R_3$$

$0 = I_1 + I_2 - I_3$

$2 = 20I_1 - 10I_2 + 0I_3$

$11 = 0I_1 + 10I_2 + 5I_3$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 20 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \end{vmatrix} = -50 - 200 - 100 = -250$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -10 & 0 \\ 11 & 10 & 10 \end{vmatrix} = -20 - 110 - 10 = -140 \qquad I_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-140}{-350} = \underline{\underline{0{,}4\ \mathrm{A}}}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 20 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 220 = -210 \qquad I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-210}{-350} = \underline{\underline{0{,}6\ \mathrm{A}}}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 20 & -10 & 2 \\ 0 & 10 & 11 \end{vmatrix} = -110 - 220 - 20 = -350 \qquad I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-350}{-350} = \underline{\underline{1\ \mathrm{A}}}$$

3. Vypočtěte práci proudu v části obvodu, ve které nejsou zdroje elektromotorického napětí, a která má odpor $R = 12\,\Omega$, jestliže se elektrický proud po dobu $t = 5\,\mathrm{s}$ rovnoměrně zvětšuje od $I_1 = 2\ \mathrm{A}$ do $I_2 = 10\ \mathrm{A}$.

$U = RI$

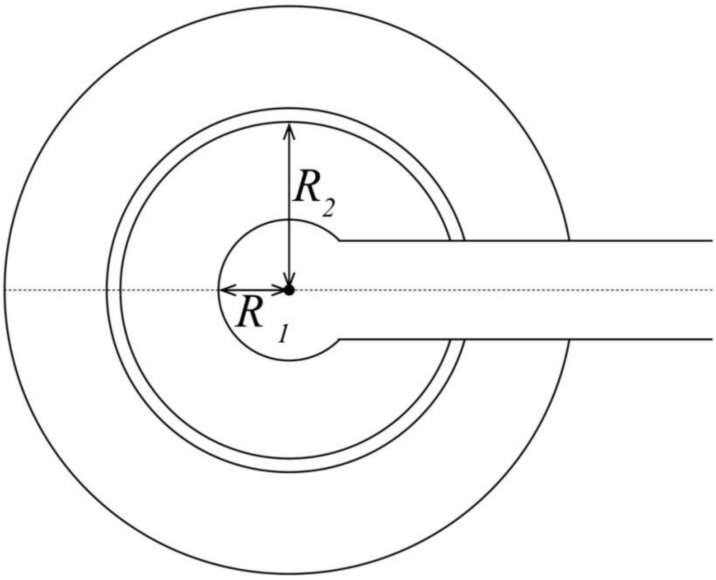
$I = \frac{8}{5}t + 2$

$$A = \int_0^t UI\mathrm{d}t = R\int_0^t I^2\mathrm{d}t = R\int_0^t \left(\frac{8}{5}t + 2\right)^2 \mathrm{d}t =$$

$$= 12\int_0^5 \left(\frac{8}{5}t + 2\right)^2 \mathrm{d}t = 12\int_0^5 \left(\frac{64}{25}t^2 + \frac{32}{5}t + 4\right)^2 \mathrm{d}t =$$

$$= 12\left[\frac{64}{75}t^3 + \frac{16}{5}t^2 + 4t\right]_0^5 = 12\cdot\left(\frac{64}{75}\cdot 5^3 + \frac{16}{5}\cdot 5^2 + 4\cdot 5\right) = \underline{\underline{2480\ \mathrm{J}}}$$

4. Tenký rovinný prstenec o poloměrech R_2, R_1 $(R_2 > \mathrm{R}_1)$ a tloušťky h na jedné straně rozřízneme (viz Obr. 30) a k plochám řezů přiložíme kontakty přívodů. Je-li znám materiál prstence, vypočtete jeho odpor.



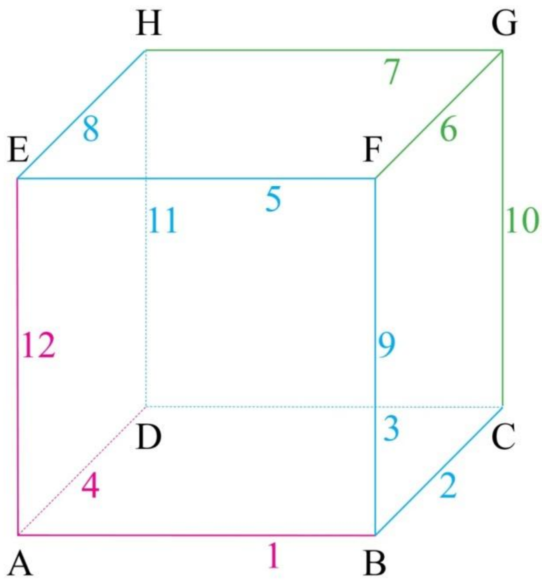
Obr. 30

Elementem je tenký prstenec délky $2\pi r$, průřezu $k\mathrm{d}r$.

$$\mathrm{d}R = \rho \frac{2\pi r}{h\mathrm{d}r} \qquad \frac{1}{\mathrm{d}R} = \frac{h\mathrm{d}r}{\rho 2\pi r}$$ Rovnice představuje vodivost dG elementu.

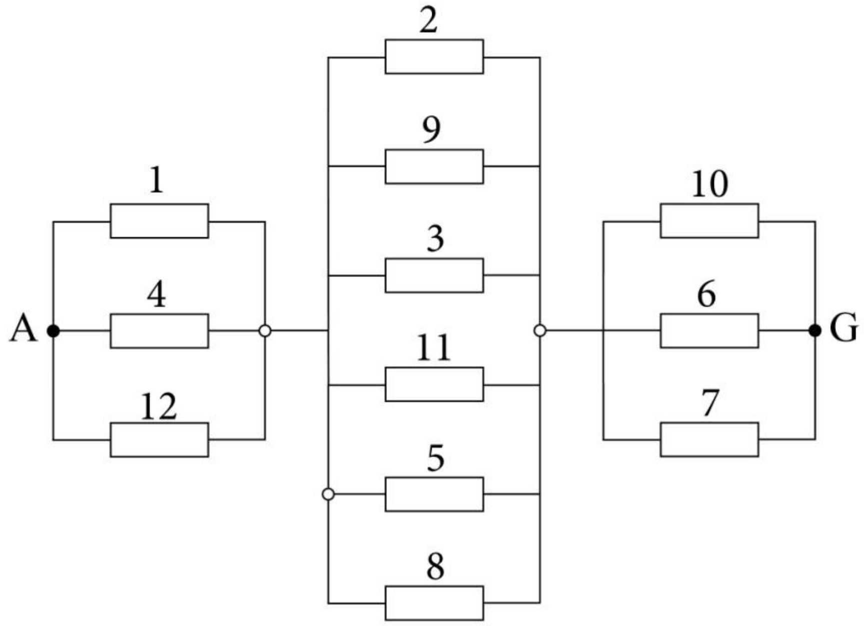
$$G = \int_{R_1}^{R_2} \mathrm{d}G = \frac{h}{\rho 2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \underline{\underline{R = \frac{2\pi\rho}{h} \ln \frac{R_1}{R_2}}}$$

5. Kostka ve tvaru krychle se skládá ze stejných vodičů (hran) téhož odporu R. Vypočtěte odpor krychle, přiložíme-li zdroj stejnosměrného napětí ke dvěma protějším vrcholům A, G.



Obr. 31

Prochází-li mezi vrcholy A a G proud, pak vrcholy přilehlé k vrcholu A, resp. G mají stejný potenciál, tj. vrcholy B, D, E mají stejný potenciál jako vrchol A, podobně HFC jako G. Proto lze jmenované trojice vrcholů bezodporně spojit v uzly, takže vznikne náhradní zapojení, kde každý odpor má hodnotu R.



Obr. 32

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R} \Rightarrow R_1 = R_3 = \frac{R}{3}$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{6}{R} \Rightarrow R_2 = \frac{R}{6}$$

$$R_V = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{2R + 1R + 2R}{6} = \underline{\underline{\frac{5}{6}R}}$$

6. Žárovka s údaji 12 V a 40 W se má zapojit tak, aby pracovala s výkonem, na který byla zhotovená. K dispozici máme reostat a dvě stejné baterie, z kterých každá má elektromotorické napětí $U_e = 12\,\mathrm{V}$ a vnitřní odpor $R_i = 0{,}5\,\Omega$. Odpor spojení vodičů zanedbáváme. Určete a) s jakým výkonem by žárovka pracovala, kdybychom ji připojili jen k jednomu ze zdrojů, b) hodnotu odporu reostatu, který musíme do obvodu zapojit, když žárovku připojíme k oběma bateriím zapojeným do série a požadujeme, aby žárovka pracovala s předepsanými hodnotami napětí a výkonu.

a) $P_{\check{Z}}' = R_{\check{Z}} I'^2$ $\qquad I' = \dfrac{U_e}{R_{\check{Z}} + R_i}$

$$P_{\check{Z}}' = R_{\check{Z}} \left(\frac{U_e}{R_{\check{Z}} + R_i} \right)^2 \qquad R_{\check{Z}} = \frac{U_{\check{Z}}^{\ 2}}{P_{\check{Z}}}$$

$$P_{\check{Z}}' = \frac{U_{\check{Z}}^{\ 2}}{P_{\check{Z}}} \left(\frac{U_e}{\dfrac{U_{\check{Z}}^{\ 2}}{P_{\check{Z}}} + R_i} \right)^2 = \frac{U_{\check{Z}}^{\ 2}}{P_{\check{Z}}} \left(\frac{U_e P_{\check{Z}}}{U_{\check{Z}}^{\ 2} + R_i P_{\check{Z}}} \right)^2 = \left(\frac{U_{\check{Z}} U_e}{U_{\check{Z}}^{\ 2} + R_i P_{\check{Z}}} \right)^2 P_{\check{Z}} =$$

$$= \left(\frac{12 \cdot 12}{12^2 + 0{,}5 \cdot 40} \right)^2 \cdot 40 = \underline{\underline{30{,}84\ \mathrm{W}}}$$

b) $I = \dfrac{P_{\check{Z}}}{U_{\check{Z}}}$ $\qquad 2U_e = IR_x + IR_{\check{Z}} + I2R_i$

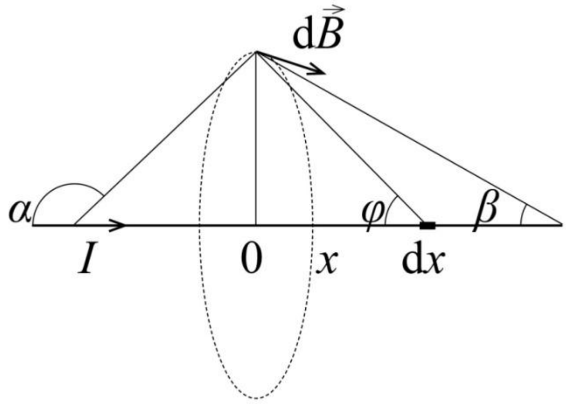
$$I = \frac{2U_e}{R_x + R_{\check{Z}} + 2R_i} \qquad \frac{P_{\check{Z}}}{U_{\check{Z}}} = \frac{2U_e P_{\check{Z}}}{R_x P_{\check{Z}} + U_{\check{Z}}^{\ 2} + 2R_i P_{\check{Z}}}$$

$$R_x = \frac{2U_e U_{\check{Z}} - U_{\check{Z}}^{\ 2} - 2R_i P_{\check{Z}}}{P_{\check{Z}}} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 12 - 12^2 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 40}{40} = \underline{\underline{2{,}6\ \Omega}}$$

3.3 Stacionární magnetické pole

Na začátku tematického celku stacionární magnetické pole figurují dvě typické vysokoškolské úlohy, a to výpočet magnetické indukce a intenzity magnetického pole od velmi dlouhého přímého vodiče (1) a magnetické indukce od vodiče kruhového tvaru (2). Studenti si navíc mohou spočítat číselné hodnoty těchto veličin, což je vždycky dobré pro motivaci studentů v tom smyslu, že se pak úloha jeví praktičtější. Úlohy 3–5 jsou úlohami, které by se na základě teoretických znalostí ze střední školy sice dalo řešit, nicméně kvůli obtížnosti těchto úloh jsem se rozhodl zařadit je jako úlohy vysokoškolské a poskytnout tak bakalářům výčet tří příkladů, kde si mohou procvičit výpočet magnetické indukce ve třech různých případech. V poslední úloze určujeme magnetický indukční tok. Tato úloha je sice jednoduchá, ale vyžaduje znalost pro středoškoláky neznámé veličiny, a to magnetické intenzity. Př. 6 je tedy v tomto kontextu protikladem k příkladům 3–5.

1. Vypočtěte magnetickou indukci a intenzitu magnetického pole ve vzdálenosti $a = 5\,\text{cm}$ od velmi dlouhého přímého vodiče, kterým teče proud $I = 5\,\text{A}$.



Obr. 33

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idx}{r^2}\sin\alpha$$

$$x = a\cot g\varphi \qquad r = \frac{a}{\sin\varphi}$$

$$dx = -\frac{ad\varphi}{\sin^2\varphi}$$

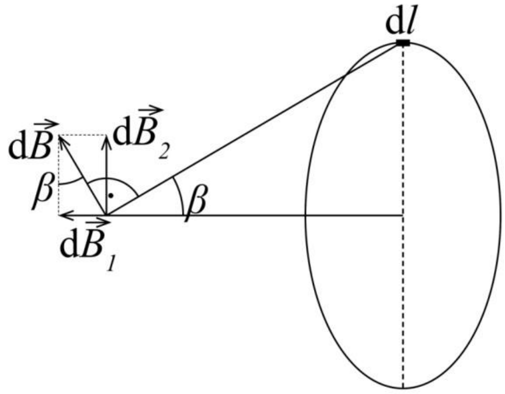
$$dB = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\frac{ad\varphi\sin^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi}\sin\varphi = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_\alpha^\beta \sin\varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[-\cos\varphi\right]_\alpha^\beta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\beta - \cos\alpha\right) \qquad \beta = 0, \alpha = \pi$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} = \frac{4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\cdot 5}{2\cdot\pi\cdot 5\cdot 10^{-2}} = \underline{\underline{2\cdot 10^{-5}\,\text{T}}}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{2\cdot 10^{-5}}{4\pi\cdot 10^{-7}} = \underline{\underline{15{,}9\,\text{A}\cdot\text{m}^{-1}}}$$

2. Vodičem kruhového tvaru o poloměru $a = 0{,}1\,\text{m}$ protéká proud $I = 1\,\text{A}$. Vypočtěte velikost vektoru magnetické indukce a) ve středu vodiče b) v bodě na ose vodiče ve vzdálenosti $b = 0{,}1\,\text{m}$ od středu.



Obr. 34

a) $b = 0$

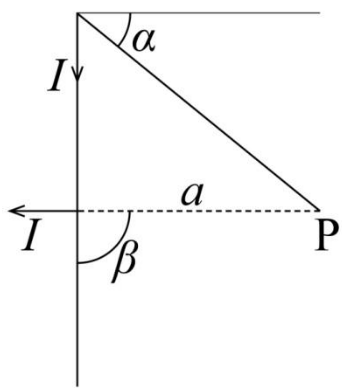
$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2\sqrt{\left(a^2\right)^3}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2a^3} = \frac{\mu_0 I}{2a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2 \cdot 0{,}1} = \underline{\underline{12{,}56 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{T}}}$$

b) $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi r} \dfrac{\sin\beta}{r^2}\, dl = \dfrac{\mu_0 I\, 2\pi a}{4\pi r^2} \sin\beta = \dfrac{\mu_0 I}{2r^2}\, a \sin\beta$

$r^2 = a^2 + b^2$ $\qquad\qquad$ $\sin\beta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2\left(a^2 + b^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 0{,}1^2}{2\left(0{,}1^2 + 0{,}1^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \underline{\underline{4{,}44 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{T}}}$$

3. Dlouhým vodičem, který je ohnut do pravého úhlu, prochází proud $I = 40\,\mathrm{A}$. Vypočtěte magnetickou indukci v bodě P, je-li $a = 2\,\mathrm{cm}$. (Obr. 35)



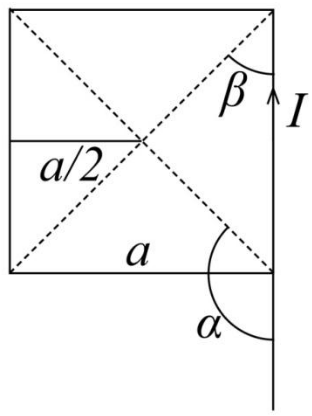
Obr. 35

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\beta - \cos\alpha\right)$$

$\alpha = \pi \qquad \beta = \dfrac{\pi}{2}$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 40}{4 \cdot \pi \cdot 0{,}02} = \underline{\underline{2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}}}$$

4. Vypočtěte magnetickou indukci ve středu závitu tvaru čtverce o straně $a = 0{,}1\,\mathrm{m}$, kterým protéká proud $I = 5\,\mathrm{A}$.



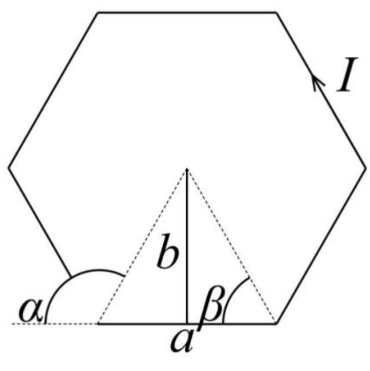
Obr. 36

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} (\cos\beta - \cos\alpha) \qquad \beta = 45° \qquad \alpha = 135°$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{4 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}} (\cos 45° - \cos 135°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot 10^{-5} = \sqrt{2} \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$$

$$B = 4B_1 = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-5} = \underline{\underline{5{,}6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}}}$$

5. Závitem tvaru šestiúhelníka o straně $a = 0{,}1\,\mathrm{m}$ protéká proud $I = 5\,\mathrm{A}$. Vypočtěte magnetickou indukci ve středu závitu.



Obr. 37

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\left(\cos\beta - \cos\alpha\right) \qquad \beta = 60°$$

$$b = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad \alpha = 120°$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I 2}{4\pi a\sqrt{3}}\left(\cos 60° - \cos 120°\right) = \frac{\mu_0 I 2}{4\pi a\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\mu_0 I 2}{4\pi a\sqrt{3}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a\sqrt{3}}$$

$$B = 6B_1 = \frac{6\mu_0 I}{2\pi a\sqrt{3}} = \frac{3\mu_0 I}{\pi a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{\pi a} = \frac{\sqrt{3}\cdot 4\cdot \pi \cdot 10^{-5}\cdot 5}{3{,}14\cdot 0{,}1} = \underline{\underline{3{,}46\cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}}}$$

6. Určete magnetický indukční tok v železe o průřezu $S = 4\,\mathrm{cm}^2$, je-li intenzita magnetického pole $H = 800\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. ($\mu_r = 5000$)

$$\Phi = BS = \mu_0\mu_r HS = 5000\cdot 4\cdot \pi \cdot 10^{-7}\cdot 8000\cdot 4\cdot 10^{-4} = \underline{\underline{0{,}2\,\mathrm{Wb}}}$$

3.4 Nestacionární magnetické pole

V tematickém celku nestacionární magnetické pole V příkladě 1 počítáme časovou konstantu cívky, odvozením ze vztahu pro okamžitou hodnotu proudu. Př. 2 pak vyžaduje určení napětí jakožto integrál intenzity přes délku tyče. V úloze 3 určujeme procházející proud pomocí vyjádření magnetického odporu jednotlivých materiálů. Problematičnost této úlohy vidím hlavně ve správném vyjádření si jednotlivých veličin, a následném odvození veličiny hledané. V příkladě 4 opět určujeme časovou konstantu obvodu, avšak značně pracnějším způsobem než v příkladu 1, řešíme zde i jednoduché diferenciální rovnice. Konečně úloha 5 dává návod pro výpočet měrného odporu uvedeného materiálu.

1. Cívka má odpor 1Ω a indukčnost 0,1 H. Určete časovou konstantu cívky a vypočtěte okamžitou hodnotu proudu v čase $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$ po odpojení cívky od napětí $U_e = 10\,\mathrm{V}$.

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0{,}1}{1} = 0{,}1\,\mathrm{s}$$

$$I_0 = \frac{U_e}{R} = \frac{10}{1} = 10\,\mathrm{A}$$

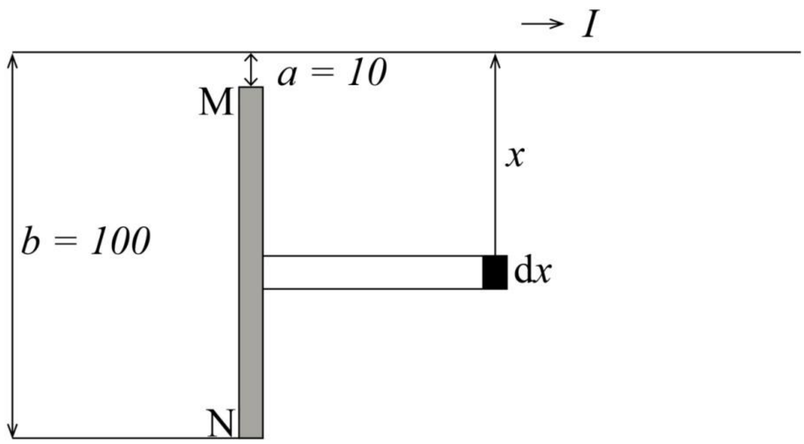
$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 10 \cdot 2{,}72^{-\frac{1}{0{,}1}0{,}5} = \underline{\underline{0{,}067\,\mathrm{A}}}$$

2. Přímá tyč o délce 20 cm se otáčí kolem jednoho svého konce, v rovině kolmé k indukčním čarám homogenního magnetického pole o indukci 1 T. Jak je veliké indukované napětí mezi oběma konci tyče, otočí-li se 10 krát za sekundu?

$$E = x\omega B \qquad B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\left(\cos\beta - \cos\alpha\right)$$

$$U = -\int_0^l x\omega B dx = -\omega B\int_0^l x dx = -\frac{1}{2}\omega B l^2 = -\frac{1}{2}2\pi f B l^2 = -\frac{1}{2}2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 0{,}2^2 = \underline{\underline{1{,}26\,\mathrm{V}}}$$

3. Kovová tyč se pohybuje stálou rychlostí $v = 2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ rovnoběžně s dlouhým přímým drátem, jímž prochází proud $I = 40\,\mathrm{A}$. Vypočtěte indukované elektromotorické napětí v tyči. Který konec tyče je na vyšším potenciálu?



Obr. 38

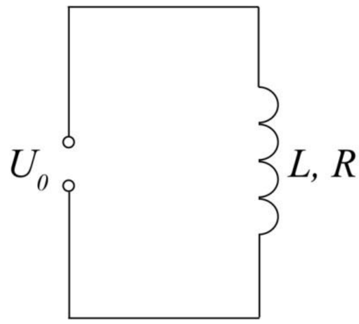
$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi x} \qquad dU_i = Bvdx = \frac{\mu_0}{2\pi} Iv \frac{dx}{x}$$

$$U_i = \frac{\mu_0}{2\pi} Iv \int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0}{2\pi} Iv \ln \frac{b}{a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} 40 \cdot 2 \cdot \ln \frac{100}{10} = \underline{\underline{36{,}8\,\mu\text{V}}}$$

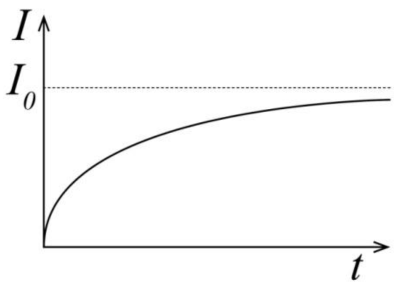
Dle pravidla pravé ruky je na dolním konci tyče v bodě N vyšší potenciál.

4. Prstencové jádro o středním poloměru 0,1 m, průřezu $5 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$ a relativní permeabilitě 800 je ovinuta 1500 závity, jejichž odpor je $2\,\Omega$. Určete časovou konstantu obvodu.

a) Zapojení



Obr. 39a-1



Obr. 39a-2

$$U_0 + U_i = RI$$

$$U_0 - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = RI$$

$$U_0 = RI_0$$

$$\mathrm{d}I = -\mathrm{d}(I_0 - I)$$

$$RI_0 - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = RI$$

$$R\left(I_0 - I\right) = -L\frac{\mathrm{d}\left(I_0 - I\right)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(I_0 - I\right)}{I_0 - I} = -\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

$$I = 0 \qquad t = 0$$

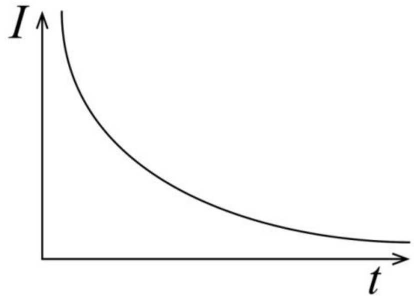
$$\ln I_0 = \ln C$$

$$\ln\left(I_0 - I\right) = -\frac{R}{L}t + \ln C$$

$$\ln\left(I_0 - I\right) = -\frac{R}{L}t + \ln I_0$$

$$I_0 - I = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow I = I_0\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\right)$$

b) Rozpojení



Obr. 39b

$$U_i = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = RI$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

$$\ln I = -\frac{R}{L}t + \ln C \qquad t = 0, I = I_0 = C$$

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

c) Za dobu τ klesne proud na $I_0 \cdot \mathrm{e}^{-1}$.

$$I = \frac{I_0}{\mathrm{e}} = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\tau} \qquad \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{\frac{R}{L}\tau}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

d) Indukčnost toroidu

$$L = \frac{\mu_r \mu_0 N^2 S}{l} = \frac{\mu_r \mu_0 N^2 S}{2\pi R} = \frac{800 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1500^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{2\pi 0{,}1} H = \underline{\underline{1{,}8H}}$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1{,}8}{2} s = \underline{\underline{0{,}9s}}$$

5. Rovinný kondenzátor s parafínovým papírem jako dielektrikem nuloval z původního náboje Q_0 za dobu 10 s náboj $Q = 0{,}1Q_0$. Za předpokladu, že ztráty nastaly vedením v papíře, vypočtěte měrný odpor parafínu.

a) vybíjení kondenzátoru přes odpor

$$I = \frac{U}{R} \qquad U = \frac{Q}{C} \qquad I = \frac{Q}{RC}$$

Za dobu dt se náboj změní o $\mathrm{d}Q = -I\mathrm{d}t = -\dfrac{Q}{RL}\mathrm{d}t$.

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC}$$

$$t = 0 \qquad Q = Q_0$$

$$\ln Q = \frac{1}{RC} t + \ln C \Rightarrow Q = Q_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_0 \mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}} \qquad U = U_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

Časová konstanta $\qquad I = \dfrac{I_0}{\mathrm{e}} = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}} \qquad \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}} \Rightarrow \tau = RC$

Pro daný příklad

$$Q = Q_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \qquad R = \rho \frac{l}{S} \qquad C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{l}$$

$$RC = \rho \frac{l}{S} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{l} = \rho \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

$$Q = Q_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = Q_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\rho \varepsilon_0 \varepsilon_r}} \qquad \frac{Q}{Q_0} = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\rho \varepsilon_0 \varepsilon_r}} \qquad \ln \frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{\rho \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$\ln \frac{Q_0}{Q} = \frac{t}{\rho \varepsilon_0 \varepsilon_r} \Rightarrow \rho = \frac{t}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \ln \frac{Q_0}{Q}} = \frac{600}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot \ln 10} = \underline{\underline{1{,}5 \cdot 10^{13}\ \Omega \cdot \mathrm{m}^{-1}}}$$

4 PÍSEMKY

4.1 Písemka pro střední školy

Formu písemné zkoušky z příkladů z elektřiny a magnetismu jsem vytvořil na základě [17]. Příklady jsem vybíral podle učebnice z elektřiny a magnetismu pro gymnázia, přesněji pak na základě souhrnů tematických celků uváděných na konci kapitoly. Uvedené příklady využívají vzorců v těchto souhrnech. U většiny příkladů je třeba postupovat použitím vhodného vztahu mezi veličinami, případnou transformací a následně dosazením číselných hodnot. V příkladech 4b) a 5 je třeba použít jednoduché odvození ze dvou vztahů pro výsledný výpočet. Pro orientaci v míře zájmů studentů o fyziku, jsem také vytvořil čtyři jednoduché otázky, s výběrem možností.

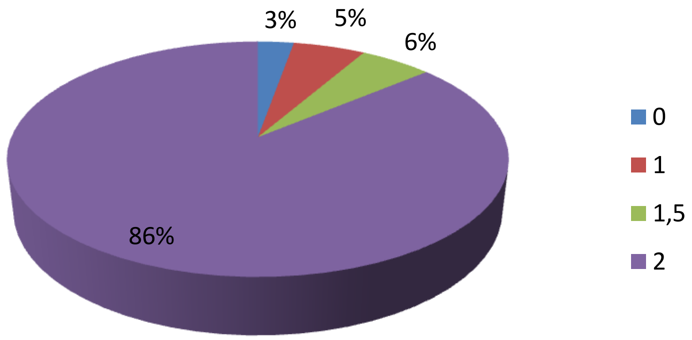
Studenti měli na vyplnění písemky jednu vyučovací hodinu, tj. 45 minut a měli možnost používat kalkulačky. Písemka byla psána na třech školách. Na Gymnáziu s polským jazykem vyučovacím v Českém Těšíně u studentů fyzikálního semináře, kde studenti písemka psali bez přípravy a měli možnost používat tabulky (36 studentů), dále na Gymnáziu Jana Amose Komenského v Třinci u studentů čtvrtého ročníku šestiletého studia, kde žákům bylo oznámeno, že budou psát písemku s týdenním předstihem a žáci nemohli používat tabulky (57 studentů) a konečně na Gymnáziu v Českém Těšíně ve třetím ročníku čtyřletého studia, kde žákům bylo oznámeno, že budou psát písemku pět dní předem a měli následně možnost používat tabulky (42 studentů). Písemka byla předložena také studentům 3. ročníku Gymnázia s polským jazykem vyučovacím v Českém Těšíně. Tito studenti probírali elektřinu a magnetismus před půlrokem a aktuálně probírali optiku. Bohužel učitelům, kteří se mnou spolupracovali a pomáhali mi při provedení těchto písemek, se nepodařilo studenty zmotivovat k úsilí při psaní této písemky. Výsledky písemek byly nepoužitelné, jelikož z asi 30 studentů, kteří tuto písemku psali, napsali asi 4 studenti pár příkladů, což bylo vše, co by bylo možno obodovat.

V následujícím jsou uvedeny jednotlivé příklady se vzorovým řešením a následně je zkoumána schopnost studentů tyto příklady řešit. Nutno je ještě okomentovat bodování úloh. Úloha byla hodnocena dvěma body. V případě, že student napsal pouze vzorec, který je v dané úloze používán obdržel jeden bod. Když student vypočetl výsledek s chybou v jednotce, anebo v řádu výsledku, pak obdržel 1,5 bodu. V případě, že student udělal ve výsledku chybu jak v řádu, tak v jednotce, anebo když student vypočetl nesprávný výsledek se správnou jednotkou nebo se správným řádem, byl obodován pouze jedním bodem, podobně jak kdyby uvedl pouze vzorec potřebný pro výpočet. V grafech 65 a dále se v popiscích vyskytuje proměnná *x*, která značí počet získaných bodů.

1. Dvě kuličky mají náboje $Q_1 = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}$ a $Q_2 = -4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}$. Jak velkou silou se přitahují, jsou-li ve vakuu ve vzdálenosti 4 cm od sebe?

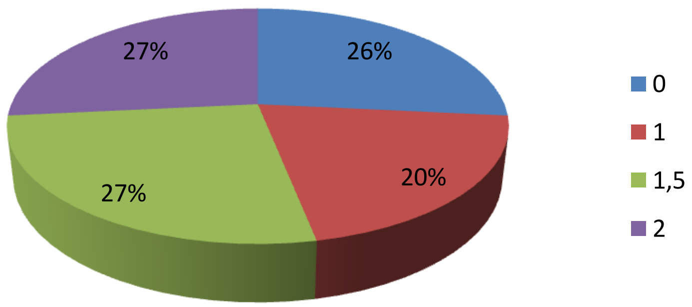
$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}$$

$$F = k\frac{|Q_1 Q_2|}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{|2 \cdot 10^{-5} \cdot (-4 \cdot 10^{-5})|}{(4 \cdot 10^{-2})^2} = \underline{\underline{4{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{N}}}$$



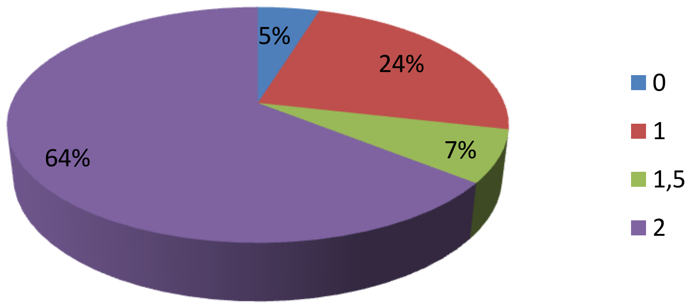
Graf 1: *Bodová úspěšnost v příkladu* 1 *bez přípravy a s použitím tabulek u studentů fyzikálního semináře*

V grafu 1 pozorujeme drtivou většinu studentů, jež příklad vyřešili bezchybně. V příkladě 1 figuruje notoricky známý vzorec, který studenti, připravující se na fyzikálním semináři na maturitu zřejmě dobře znali.



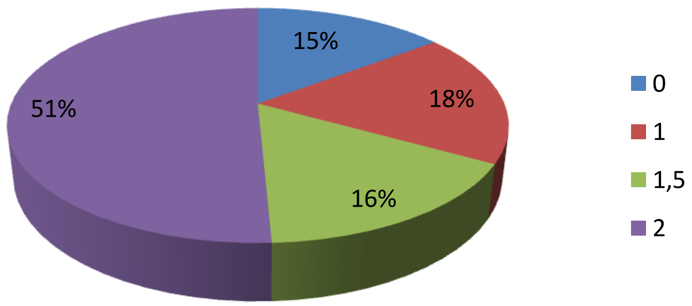
Graf 2: *Bodová úspěšnost v příkladu* 1 *s přípravou a bez použití tabulek u studentů 4. ročníku šestiletého gymnázia*

U studentů, kteří nepoužívali tabulky, vidíme poměrně rovnoměrné rozdělení v úspěšnosti řešení příkladu. Jednotlivých bodových ohodnocení dosáhla přibližně čtvrtina studentů.



Graf 3: *Bodová úspěšnost v příkladu* 1 *s přípravou a s použitím tabulek u studentů 3. ročníku čtyřletého gymnázia*

Na Gymnáziu v Českém Těšíně studenti předvedli poměrně slušný výkon. Téměř třetina studentů vyřešila příklad částečně a 64 % studentů vyřešilo příklad správně.

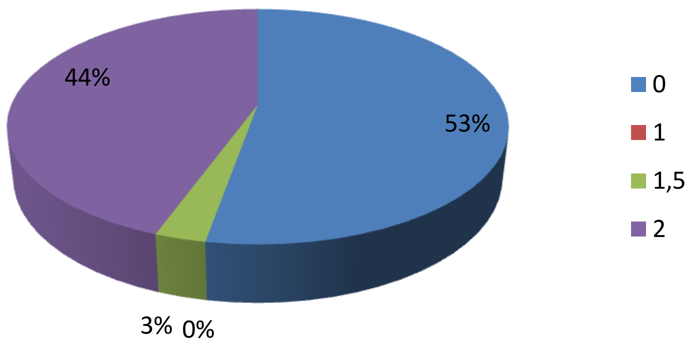


Graf 4: *Bodová úspěšnost v příkladu* 1 *celkem*

Úlohu 1 správně vyřešilo 51 % studentů. 16 % studentů úlohy vyřešilo správně až na chybu v řádu nebo v jednotce, 18 % studentů napsalo správě postup řešení, příklad však nevyřešilo. 15 % studentů vůbec nevědělo jak u tohoto příkladu postupovat.

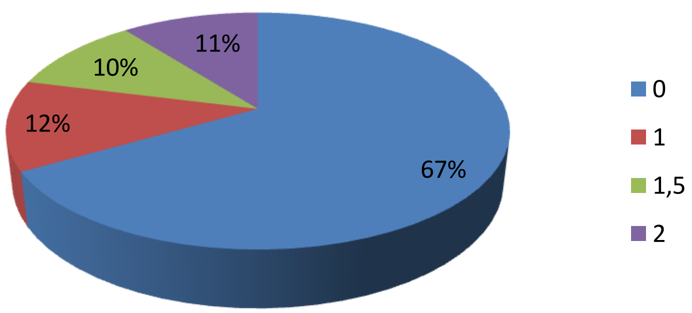
2. Na jaký potenciál by se nabila Země nábojem $Q = 1\,\mathrm{C}$, jestliže je pokládáme za kouli o poloměru $R = 6378\,\mathrm{km}$?

$$\varphi = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}378 \cdot 10^{6}} = \underline{\underline{1408\ \mathrm{V}}}$$



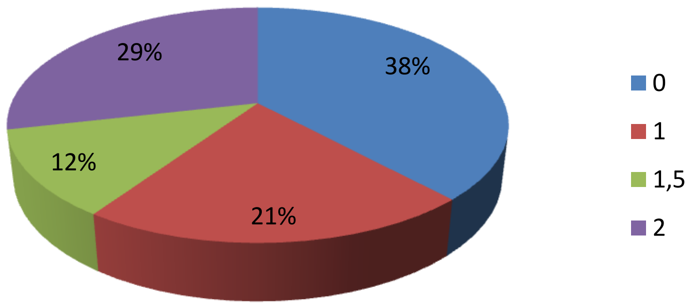
Graf 5: *Bodová úspěšnost v příkladu* 2 *bez přípravy a s použitím tabulek u studentů fyzikálního semináře*

V tomto příkladě bylo třeba znát, nebo si odvodit vztah pro kapacitu v závislosti na poloměru, tento vztah již není tak notoricky známý. V tabulkách [19] se tento vztah pro kapacitu vyskytuje, tedy je otázkou, proč více než polovina studentů disponujících tabulkami, nedokázala příklad ani částečně řešit. Naopak téměř polovina úspěšných řešitelů je poměrně velké číslo vzhledem k tomu, že nebylo studentů, kteří by si s výpočtem nedokázali poradit.



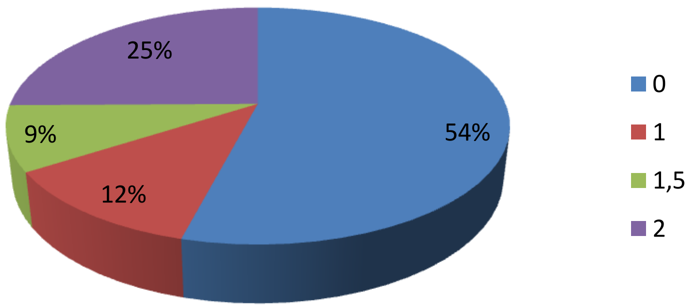
Graf 6: *Bodová úspěšnost v příkladu* 2 *s přípravou a bez použití tabulek u studentů 4. ročníku šestiletého gymnázia*

U řešitelů nedisponujících tabulkami vidíme poměrně přesně jev neznámosti vzorce pro kapacitu v závislosti na poloměru, nebo neschopnosti jeho odvození. Asi dvě třetiny studentů nedokázaly s příkladem nijak pokročit, což dokazuje to, že bez tabulek byla většina studentů bezmocná. Následně vidíme poměrně rovnoměrné rozdělení v řešeních částečných a v řešení úplném.



Graf 7: *Bodová úspěšnost v příkladu* 1 *s přípravou a s použitím tabulek u studentů 3. ročníku čtyřletého gymnázia*

Ve 3. ročníku Gymnázia v Českém Těšíně byly výsledky o něco rovnoměrnější, než u studentů fyzikálního semináře. Celý příklad sice vyřešilo méně studentů, ale více studentů bylo schopno napsat správný postup, nebo někteří studenti chybovali v řádu nebo jednotce u výsledku.



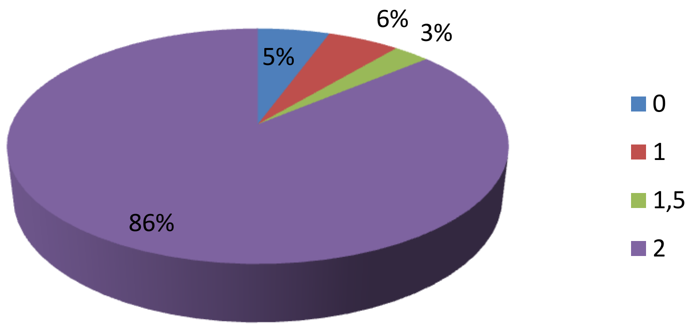
Graf 8: *Bodová úspěšnost v příkladu* 2 *celkem*

Příklad 2 se ukázal jako poměrně obtížný. 54 % studentů nedokázalo s příkladem žádným způsobem pokročit. 25 % studentů příklad vyřešilo a 21 % studentů udělalo chybu ve výpočtu.

3. Desky kondenzátoru mají plošný obsah $S = 2\,\mathrm{m}^2$ a jsou od sebe vzdáleny 5 mm. Desky jsou ve vakuu. Na kondenzátoru je napětí $U = 10^4\,\mathrm{V}$.

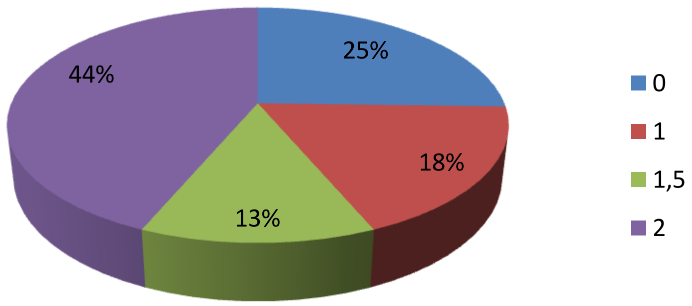
a) Vypočtěte kapacitu kondenzátoru.

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{2}{5 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{3{,}54 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{F}}}$$



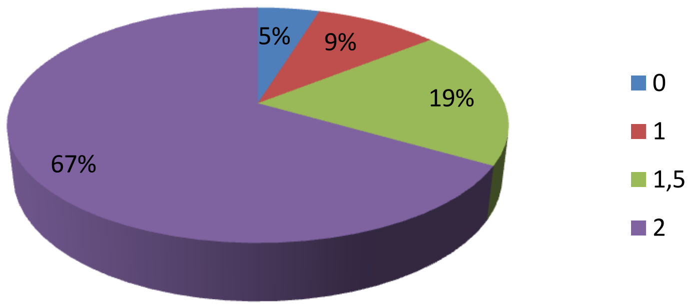
Graf 9: *Bodová úspěšnost v příkladu* 3a) *bez přípravy a s použitím tabulek u studentů fyzikálního semináře*

Počet neúspěšných řešitelů v poměru 86 % se jeví jako překvapivě negativní, zvlášť u studentů fyzikálního semináře. Myslím si, že je možné, že se studenti nechali zmást napětím uvedeným v zadání, které v části a) nebylo potřebné.



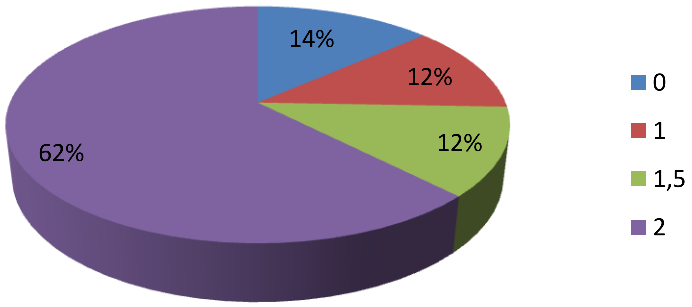
Graf 10: *Bodová úspěšnost v příkladu* 3a) *s přípravou a bez použití tabulek u studentů 4. ročníku šestiletého gymnázia*

U studentů, kteří se připravovali, naopak vidíme poměrně rovnoměrné rozdělení poměrů počtu studentů, kteří dosáhli jednotlivý počet bodů. O něco převládají řešitelé, kteří příklad vyřešili celý.



Graf 11: *Bodová úspěšnost v příkladu* 3a) *s přípravou a s použitím tabulek u studentů 3. ročníku čtyřletého gymnázia*

U studentů, kteří se jednak připravovali a jednak měli k dispozici tabulky, však vidíme úspěšnost diametrálně odlišnou, až na chyby v řádech a jednotkách totiž příklad správně vyřešilo 86 % studentů a asi desetina studentů získala polovinu bodů.

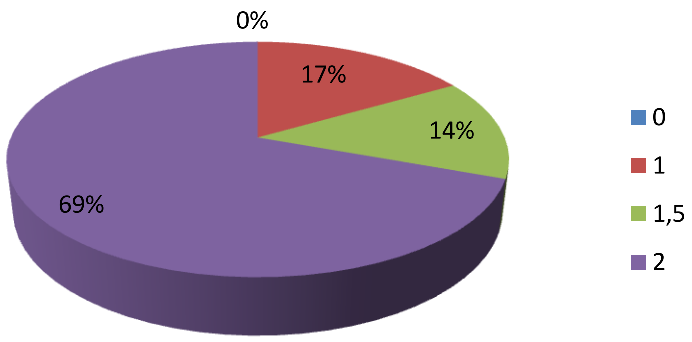


Graf 12: *Bodová úspěšnost v příkladu* 3a) *celkem*

Celkem řešilo příklad bezchybně 62 % studentů. 12 % studentů vyřešilo příklad až na chybu v řádu nebo jednotce ve výsledku, 12 % studentů napsalo správný vzorec bez správného výpočtu a 14 % studentů neudělalo žádný krok, který by bylo možno obodovat.

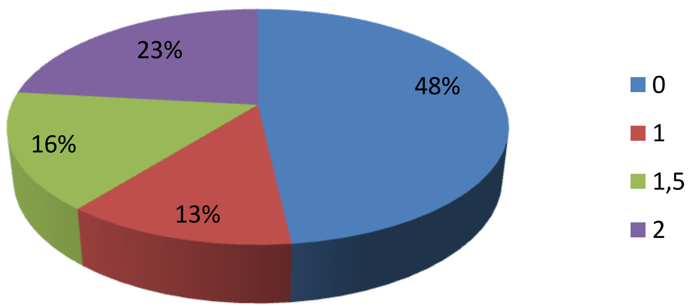
b) Vypočtěte náboj každé desky.

$$Q = CU = 3{,}54 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{4} = \underline{\underline{3{,}54 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}}}$$



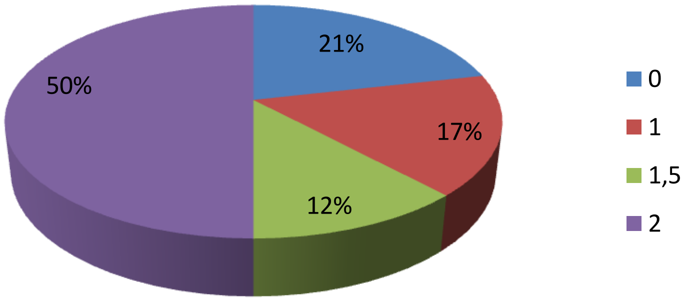
Graf 13: *Bodová úspěšnost v příkladu* 3b) *bez přípravy a s použitím tabulek u studentů fyzikálního semináře*

V příkladě 3b) bylo třeba použít kapacitu vypočtenou v příkladě 3a). 86 % studentů vypočetlo správně kapacitu. Náboj dokázalo správně spočítat 69 % studentů, což se dalo očekávat. Téměř třetina studentů dokázala příklad řešit částečně. Nebylo studenta, který by neznal vzorec, který bude používat, což je poměrně slušný výkon, na druhou stranu se mi úkol opsat vzorec z tabulek nejeví jako složitý.



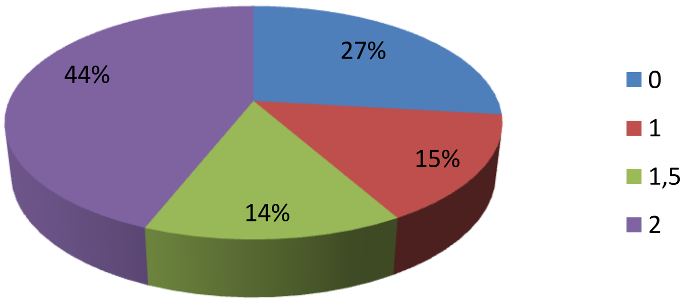
Graf 14: *Bodová úspěšnost v příkladu* 3b) *s přípravou a bez použití tabulek u studentů 4. ročníku šestiletého gymnázia*

U studentů, kteří tabulky nepoužívali, byl propad studentů, kteří měli spočítanou kapacitu, ale nespočítali náboj větší a to ze 44 % na 23 %. Opět jsme svědky toho, že téměř třetina studentů příklad řešila částečně, když neměli k dispozici tabulky. Polovina studentů ovšem vůbec nevěděla, o co jde.



Graf 15: *Bodová úspěšnost v příkladu* 3b) *s přípravou a s použitím tabulek u studentů 3. ročníku čtyřletého gymnázia*

Zde polovina studentů příklad řešila správně. V příkladě 3a) uspělo 67 % studentů. Vzhledem k tomu, že se žáci jednak připravovali a jednak používali tabulky je propad 17 % pochopitelný, takoví studenti chybovali někde na cestě k výsledku. Téměř čtvrtina studentů ani neopsala vzorec z tabulek a skoro třetina studentů řešila příklad s početní chybou nebo chybou v jednotce výsledku.

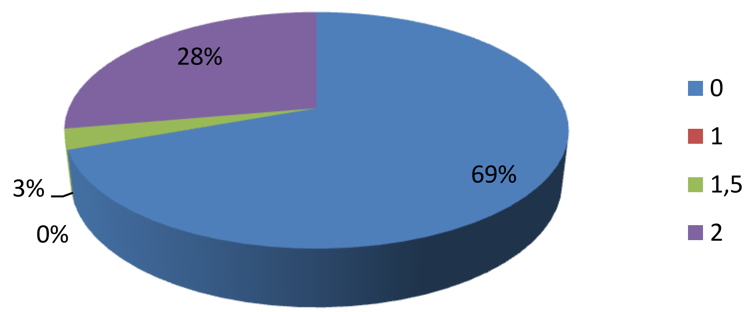


Graf 16: *Bodová úspěšnost v příkladu* 3b) *celkem*

Celková úspěšnost v příkladě 3b) je poměrně rovnoměrně rozdělená, o něco nižší než v příkladě 3a). 44 % úspěšných řešitelů, 29 % studentů chybujících na cestě k výsledku a 28 % studentů bez bodového ohodnocení.

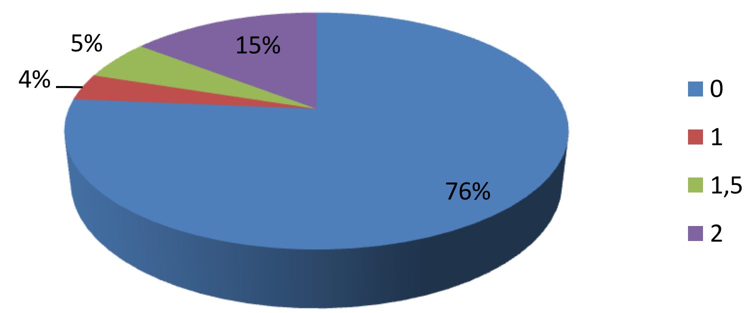
c) Vypočtěte intenzitu mezi deskami.

$$E = \frac{U}{d} = \frac{10^4}{5 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{2 \cdot 10^6\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}}}$$



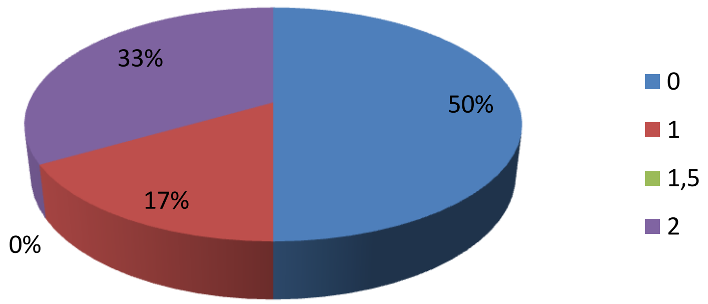
Graf 17: *Bodová úspěšnost v příkladu* 3c) *bez přípravy a s použitím tabulek u studentů fyzikálního semináře*

Tak výsledkům tohoto příklad nerozumím, respektive nerozumím tomu, proč 69 % studentů vůbec nevědělo jak postupovat, ačkoliv v příkladech předchozích si vedli poměrně dobře. Je možné, že studenti očekávali, že budou používat výsledků příkladů 3a) a 3b) anebo byli tím třídílným příkladem nějak zmateni, že poslední část vzdali. Skoro třetina studentů se však zmást nenechala a v řešení nepochybila.



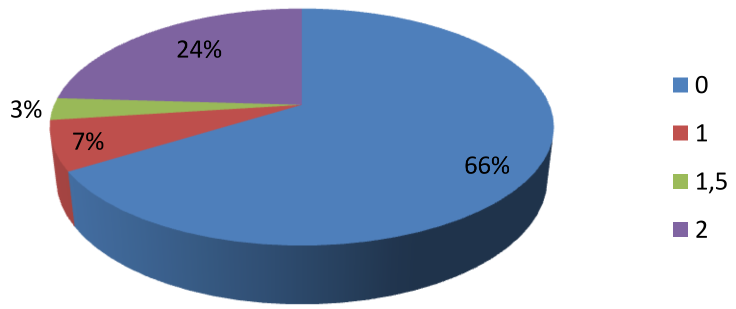
Graf 18: *Bodová úspěšnost v příkladu* 3c) *s přípravou a bez použití tabulek u studentů 4. ročníku šestiletého gymnázia*

U studentů, kteří nepoužívali tabulky, by byl komentář asi podobný jako komentář předchozí. Úspěšných řešitelů je zde ještě méně, a to pouhých 15 %.



Graf 19: *Bodová úspěšnost v příkladu* 3c) *s přípravou a s použitím tabulek u studentů 3. ročníku čtyřletého gymnázia*

Připravení studenti s tabulkami si vedli o něco lépe. Poměr studentů postupujících správně a špatně je zde jedna ku jedné.



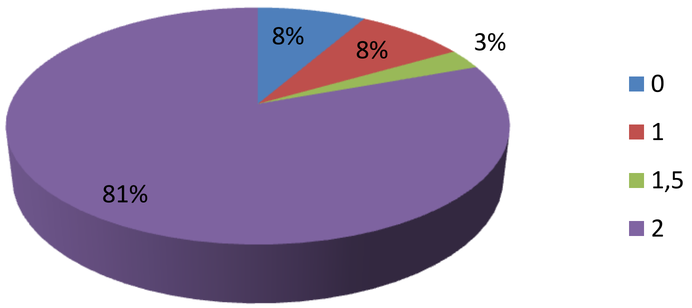
Graf 20: *Bodová úspěšnost v příkladu* 3c) *celkem*

Příklad 3c) dopadl poměrně špatně. 10 % studentů řešilo příklad správně s nějakou chybou, 24 % studentů nepochybilo a 66 % studentů nebo schopno napsat ani vzorec, kterým postupují. Nutno ještě podotknout, že kromě rezignace byla také pádným důvodem k této neúspěšnosti zmatenost v tom, že studenti se snažili intenzitu vypočíst tak, že počítali intenzitu v okolí bodového náboje.

4. Dva kondenzátory s kapacitami $C_1 = 1\,\mu\mathrm{F}$ a $C_2 = 10\,\mu\mathrm{F}$ jsou zapojeny do série. Na svorky baterie přiložíme napětí $U = 200\,\mathrm{V}$.

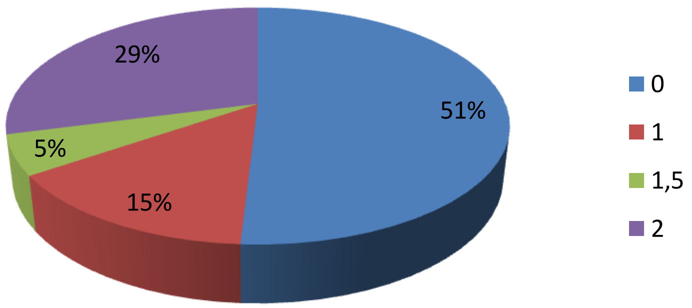
a) Určete výslednou kapacitu.

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{10^{-6} \cdot 10^{-5}}{10^{-6} + 10^{-5}} = \underline{\underline{0{,}909\,\mu\mathrm{F}}}$$



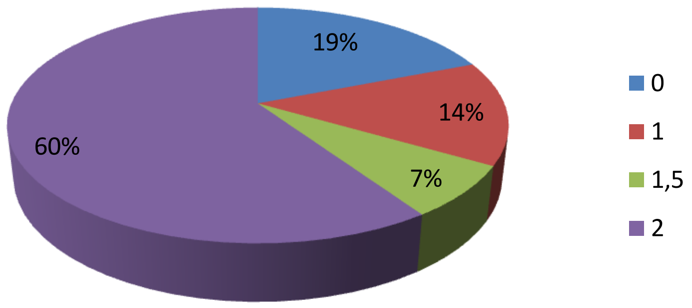
Graf 21: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4a) *bez přípravy a s použitím tabulek u studentů fyzikálního semináře*

U studentů fyzikálního semináře je patrné, že příklady na spojování kondenzátorů mají dobře zvládnuty. I kdyby znalost studentů v oboru příkladů z elektřiny a magnetismu nebyla na zvlášť vysoké úrovni, je možné si vyhledat vzorec pro sériové spojování kondenzátorů a dle něj postupovat, přičemž si myslím, že není třeba tomuto tématu pro účel tohoto výpočtu moc rozumět. Úspěšnost kolem 80 % se proto dala očekávat.



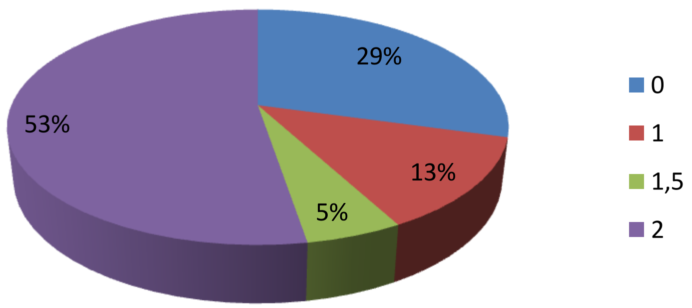
Graf 22: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4a) *s přípravou a bez použití tabulek u studentů 4. ročníku šestiletého gymnázia*

Uvedený komentář výše potvrzuje graf 22. U studentů, kteří neměli k dispozici tabulky, byla totiž neúspěšná asi polovina studentů, úspěšně příklad řešila asi třetina studentů. Častou chybou zde samozřejmě bylo zmatení v tom, jak se postupuje u spojování kondenzátorů, resp. rezistorů při spojování paralelním, resp. sériovém.



Graf 23: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4a) *s přípravou a s použitím tabulek u studentů 3. ročníku čtyřletého gymnázia*

V grafu 23 je opět patrný vliv možnosti používat vzorce v tabulkách. Úspěšně řešilo příklad 60 % studentů, částečně vyřešilo příklad 21 % studentů a asi pětina studentů s příkladem nijak nepokročila. Výsledek je horší než u studentů fyzikálního semináře. Z části je to zapříčiněno tím, že studenti často napsali správný vzorec, ale následně vypočetli pouze převrácenou hodnotu kapacity, kterou označili jako výsledek. Takový postup byl hodnocen pouze jedním bodem za správný vzorec. Takoví studenti tedy tvoří velkou část oněch 14% studentů, kteří získali jeden bod.



Graf 24: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4a) *celkem*

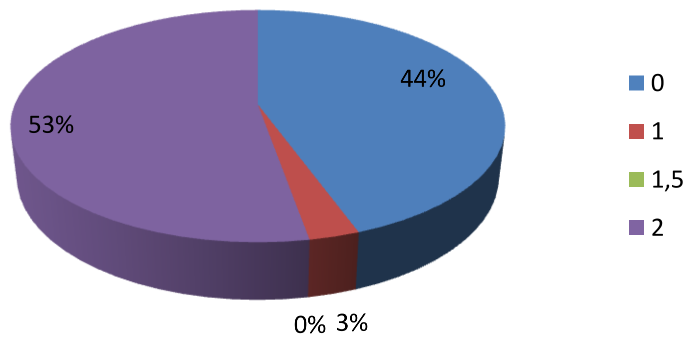
Součtové výsledky nejsou překvapující. Asi polovina řešitelů byla úspěšná. Téměř třetina studentů nebyla obodována a 18 % studentů někde chybovalo po uvedení správného vzorce.

b) Určete napětí U_1 a U_2 na kondenzátorech s kapacitami C_1 a C_2.

$$Q = CU = C_1U_1 = C_2U_2$$

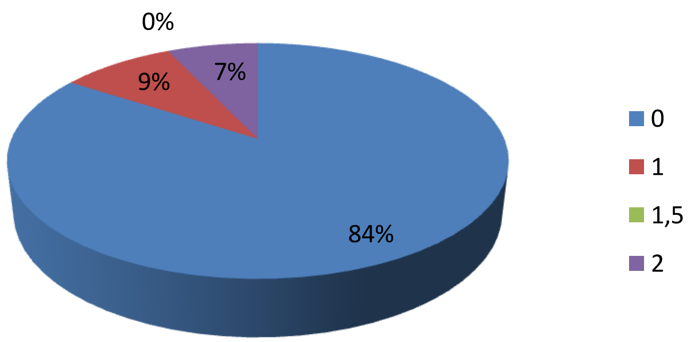
$$U_1 = \frac{CU}{C_1} = \frac{0{,}909 \cdot 10^{-6} \cdot 200}{10^{-6}} = \underline{\underline{181{,}8\ \mathrm{V}}}$$

$$U_2 = \frac{CU}{C_2} = \frac{0{,}909 \cdot 10^{-6} \cdot 200}{10^{-5}} = \underline{\underline{18{,}18\ \mathrm{V}}}$$



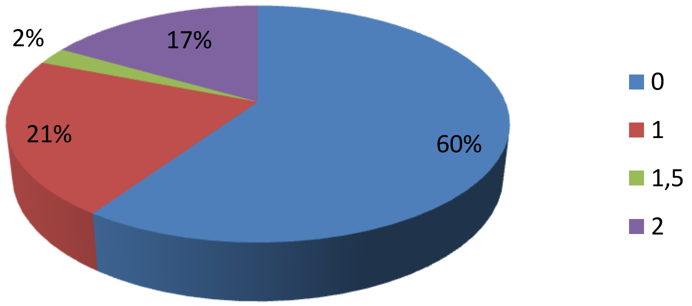
Graf 25: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4b) *u výpočtu napětí* U_1 *bez přípravy a s použitím tabulek u studentů fyzikálního semináře*

U tohoto příkladu jsem přílišné procento úspěšných řešitelů nepředpokládal. Napětí na jednotlivých kondenzátorech si bylo třeba odvodit z rovnice uvedené výše, což je operace, se kterou mají studenti rozhodně větší problém, než pouze dosadit do vzorce. Studenti fyzikálního semináře jako jediní ukázali poměrně slušnou schopnost v této úloze. Nadpoloviční část studentů zde nechybovala.



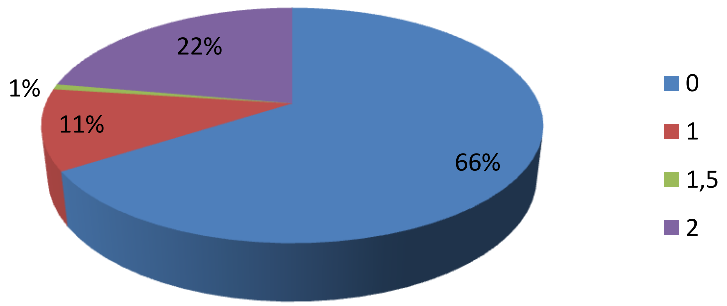
Graf 26: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4b) *u výpočtu napětí* U_1 *s přípravou a bez použití tabulek u studentů 4. ročníku šestiletého gymnázia*

V první části příkladu 4b) si studenti 4. ročníku šestiletého gymnázia vedli katastrofálně. 84 % studentů nebylo nijak obodováno.



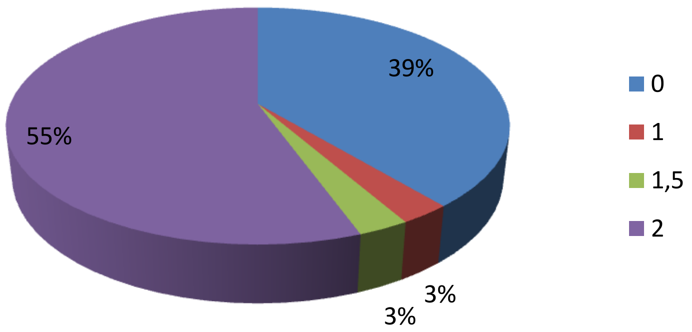
Graf 27: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4b) *u výpočtu napětí* U_1 *s přípravou s použitím tabulek u studentů 3. ročníku čtyřletého gymnázia*

U řešitelů, kteří používali tabulky, správně spočítalo příklad o 10 % více studentů, než u řešitelů bez tabulek, navíc také narost počet studentů, kteří chybovali u výpočtu anebo pouze opsali vzorec z tabulek a získali jeden bod.



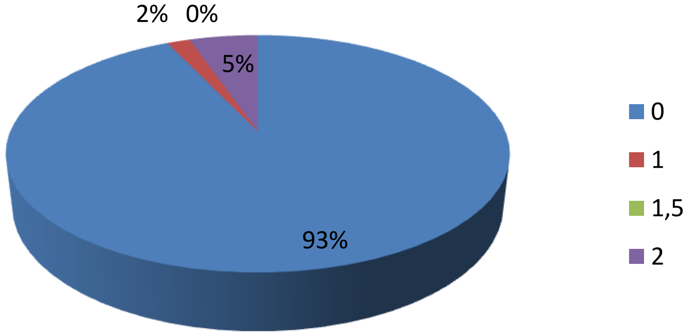
Graf 28: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4b) *u výpočtu napětí* U_1 *celkem*

Celkem v příkladě 4b) vypočetla napětí U_1 asi pětina studentů, 11 % napsalo správný vzorec, 1 % studentů udělalo chybu v řádu nebo jednotce ve výsledku a 66 % studentů si nevědělo vůbec rady.

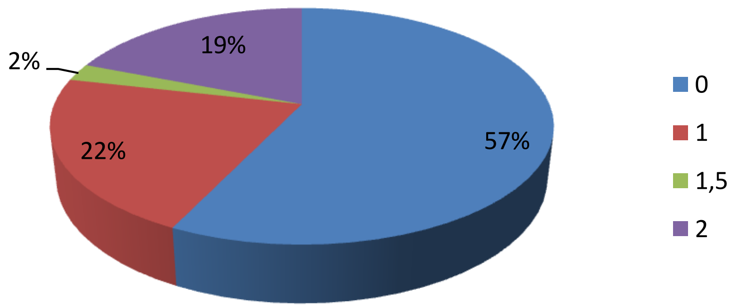


Graf 29: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4b) *u výpočtu napětí* U_2 *bez přípravy a s použitím tabulek u studentů fyzikálního semináře*

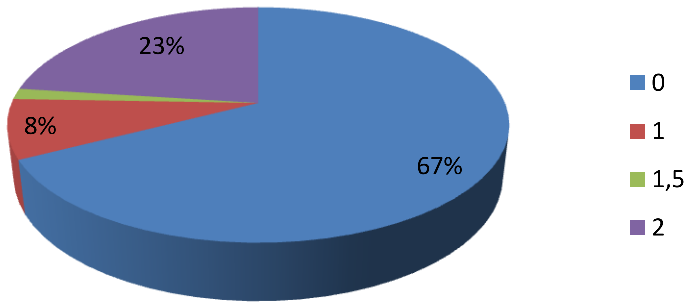
U výpočtu napětí U_2 je postup řešení a tedy i úspěšnost velice podobná, jako u výpočtu napětí U_1.



Graf 30: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4b) *u výpočtu napětí* U_2 *s přípravou a bez použití tabulek u studentů 4. ročníku šestiletého gymnázia*



Graf 31: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4b) *u výpočtu napětí* U_2 *s přípravou s použitím tabulek u studentů 3. ročníku čtyřletého gymnázia*

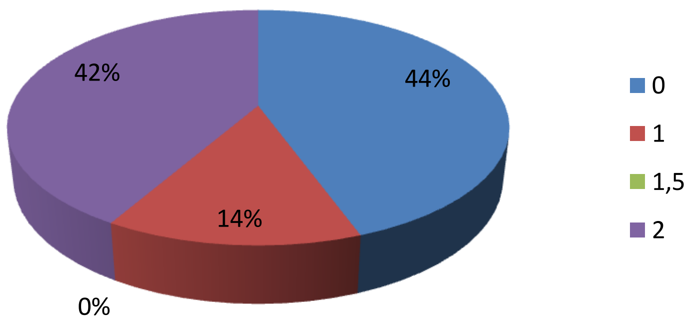


Graf 32: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4b) *u výpočtu napětí* U_2 *celkem*

Při počítání napětí U_2 je procento úspěšnosti velice podobné jak u úkolu předchozího. 67 % studentů si nevědělo rady, 23 % studentů úlohu vyřešilo a 10 % studentů úlohy vyřešilo s nějakou chybou.

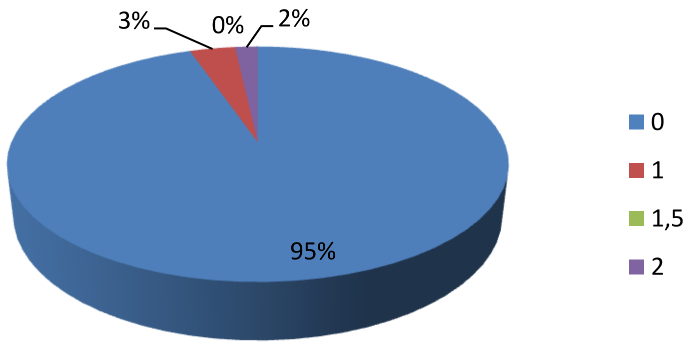
c) Určete celkovou energii spojených kondenzátorů.

$$E_e = \frac{1}{2}CU^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}909 \cdot 10^{-6} \cdot 200^2 = \underline{\underline{1{,}818 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J}}}$$



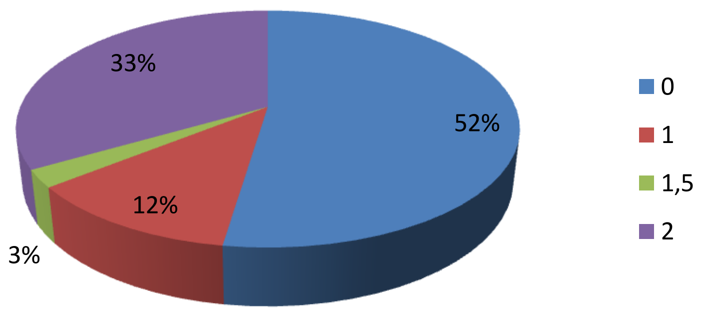
Graf 33: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4c) *bez přípravy a s použitím tabulek u studentů fyzikálního semináře*

Podobně jak u příkladů předchozích vidíme největší úspěšnost studentů fyzikálního semináře. 42 % úspěšných řešitelů, 14 % studentů, kteří uvedli vzorec, který je třeba použít.



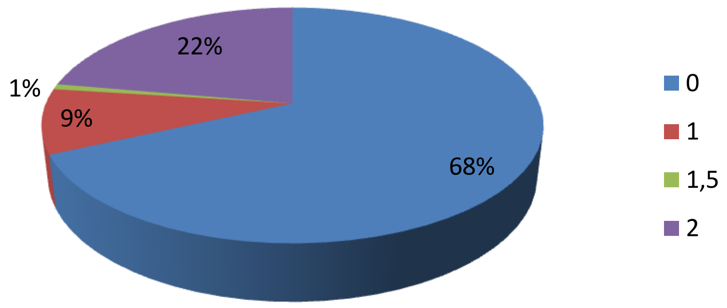
Graf 34: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4c) *s přípravou a bez použití tabulek u studentů 4. ročníku šestiletého gymnázia*

Příklad 4c) sice využíval výsledku úlohy 4a), nicméně když student neměl úlohu 4a) vyřešenou, měl možnost uvést vzorec jakým je třeba v příkladě 4c) postupovat. To ale udělalo pouze 5 % studentů. Drtivá většina studentů u tohoto výpočtu neuspěla, a to 95 %.



Graf 35: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4c) *s přípravou a s použitím tabulek u studentů 3. ročníku čtyřletého gymnázia*

U studentů, kteří se připravovali a měli možnost používat tabulky, jsou výsledky o poznání lepší. 33 % studentů řešilo příklad bezchybně, 15 % částečně, 52 % nevědělo jak příklad řešit.



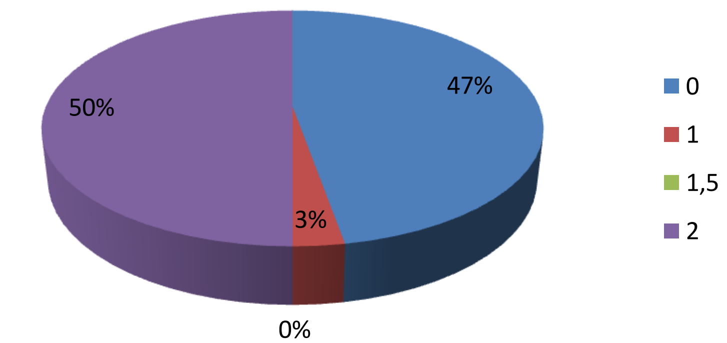
Graf 36: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4c) *celkem*

Celkem v příkladě 4c) bylo úspěšných pouze 22 % studentů. Desetině studentů se příklad podařilo vyřešit částečně, tedy s chybou při výpočtu nebo pouhým uvedením vzorce. 68 % studentů nebylo obodováno žádným bodem.

5. Měděné vedení má průřez $S_{Cu} = 20\,\mathrm{mm}^2$. Jaký průřez musí mít hliníkové vedení stejné délky, aby mělo stejný odpor jak vedení měděné?

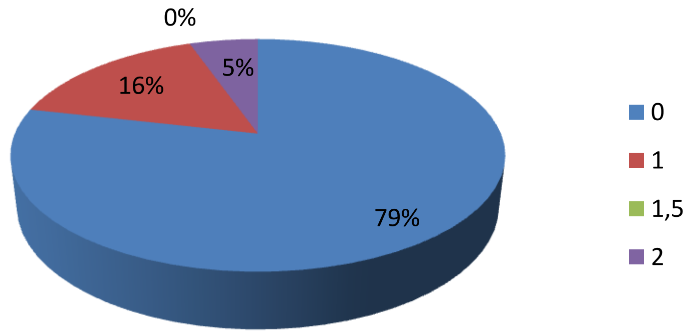
$$R = \rho_{Cu} \frac{l}{S_{Cu}} = \rho_{Al} \frac{l}{S_{Al}}$$

$$\frac{S_{Al}}{S_{Cu}} = \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu}} \Rightarrow S_{Al} = S_{Cu} \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu}} = 20 \cdot \frac{2{,}4}{1{,}5} = \underline{\underline{32\ \mathrm{mm}^2}}$$



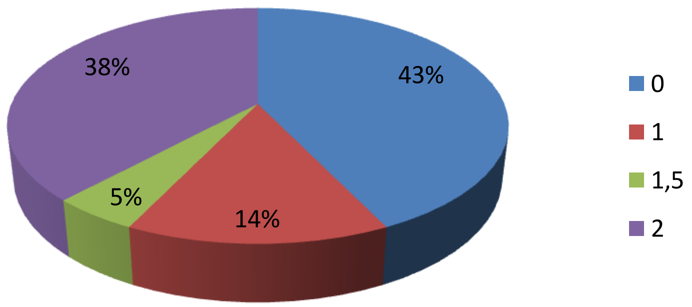
Graf 37: *Bodová úspěšnost v příkladu* 5 *bez přípravy a s použitím tabulek u studentů fyzikálního semináře*

Příklad 5 byl vybrán jako příklad nejtěžší. Studenti fyzikálního semináře však prokázali podobně jak u příkladu 4b) schopnost si z rovnice odvodit potřebnou veličinu a správně příklad řešit. Polovina studentů v tomto případně nepochybila.



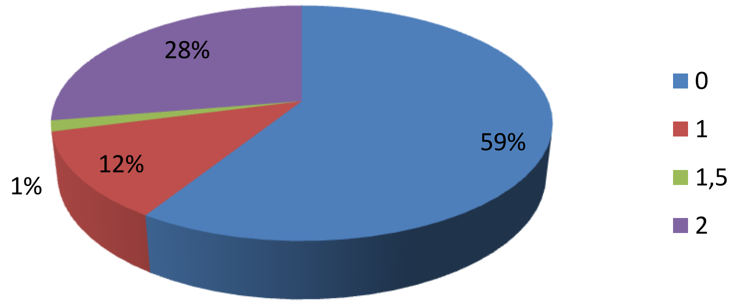
Graf 38: *Bodová úspěšnost v příkladu* 5 *s přípravou a bez použití tabulek u studentů 4. ročníku šestiletého gymnázia*

Na rozdíl od studentů fyzikálního semináře ve 4. ročníku šestiletého gymnázia se žádné překvapení nekonalo. Správně příklad řešila pouze dvacetina studentů, asi čtyři pětiny studentů byly při řešení bezradné, 16 % studentů uvedlo správný vzorec.



Graf 39: *Bodová úspěšnost v příkladu* 5 *s přípravou a s použitím tabulek u studentů 3. ročníku čtyřletého gymnázia*

Studenti s možností přípravy a používání tabulek dopadli znatelně lépe než studenti, jejichž úspěšnost je uvedena v grafu 38. 38 % studentů vyřešilo příklad správně, čímž studenti ukázali, že také umí odvozovat veličinu z rovnice, což v příkladě 4b) nebylo patrné. Navíc 19 % studentů uvedlo správný vzorec. 43 % studentů pak neuspělo vůbec, což ale vzhledem k obtížnosti tohoto příkladu nepovažuji za nejhorší výsledek.

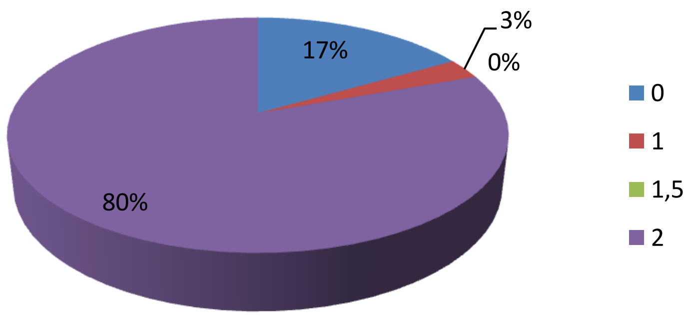


Graf 40: *Bodová úspěšnost v příkladu* 5 *celkem*

Celkem v příkladě 5 nebylo obodováno 59 % studentů, 28 % studentů se dobralo ke správnému výsledku, 12 % studentu uvedlo správný vzorec a 1 % studentů uvedlo správný výsledek až na řád nebo jednotku.

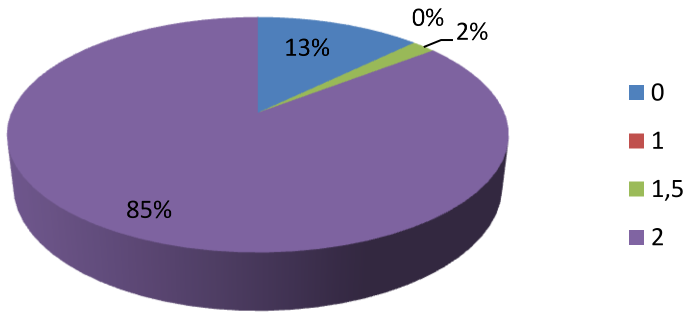
6. Odpory $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 3\,\Omega$, $R_4 = 4\,\Omega$ jsou zapojeny a) sériově, b) paralelně. Vypočtěte výsledný odpor.

$a)\ R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = \underline{\underline{10\,\Omega}}$



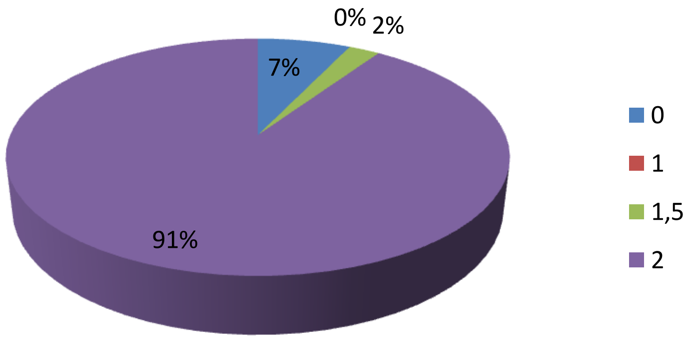
Graf 41: *Bodová úspěšnost v příkladu* 6a) *bez přípravy a s použitím tabulek u studentů fyzikálního semináře*

Příklad 7 byl vybrán jako příklad poměrně jednoduchý, výsledky písemek tento fakt potvrdily. U studentů fyzikálního semináře správně řešilo příklad 80 % studentů.



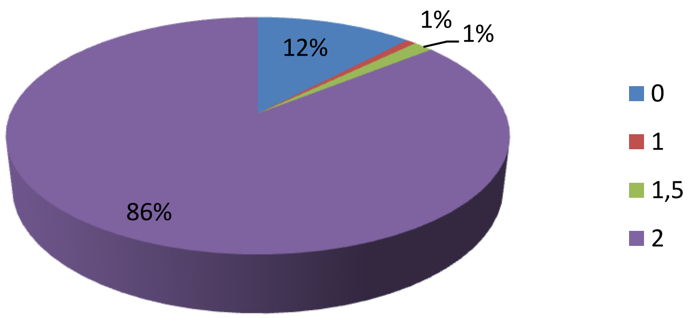
Graf 42: *Bodová úspěšnost v příkladu* 6a) *s přípravou a bez použití tabulek u studentů 4. ročníku šestiletého gymnázia*

Obdobně jak v grafu 41 i v grafu 42 můžeme pozorovat velkou úspěšnost studentů v tomto poměrně jednoduchém příkladě, správně jej řešilo 85 % studentů.



Graf 43: *Bodová úspěšnost v příkladu* 6a) *s přípravou a s použitím tabulek u studentů 3. ročníku čtyřletého gymnázia*

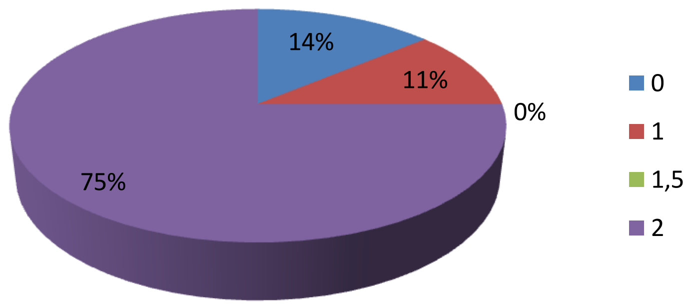
Studenti disponujícími tabulkami a možností přípravy na písemku pochybili u tohoto příkladu nejméně, pochybilo pouhých 9 % studentů, což je ve srovnání se studenty fyzikálního semináře, kde chybovala pětina studentů, slušný výsledek.



Graf 44: *Bodová úspěšnost v příkladu* 6a) *celkem*

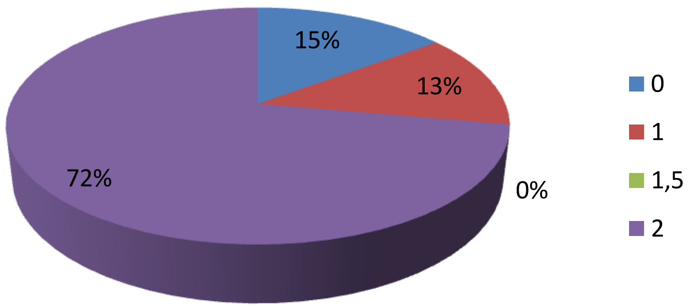
Po sečtení bodových ohodnocení všech řešitelů byla zjištěna úspěšnost 86 %. 12 % studentů s příkladem nijak nepokročilo a zbývající 2 % studentů někde chybovala.

$$b)\ \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}\,\Omega \Rightarrow R = \frac{12}{25} = \underline{\underline{0{,}48\,\Omega}}$$



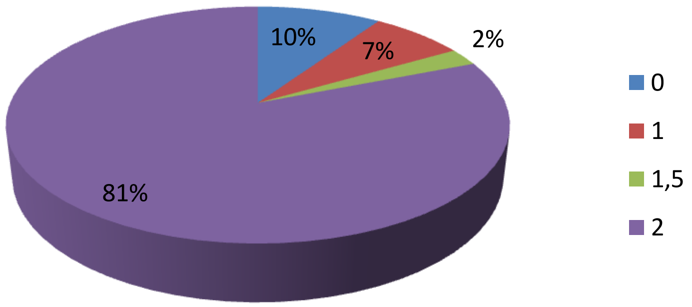
Graf 45: *Bodová úspěšnost v příkladu* 6b) *bez přípravy a s použitím tabulek u studentů fyzikálního semináře*

Příklad 6b) byl o něco náročnější než příklad předcházející. Byla zde větší možnost chybovat při číselném výpočtu, než u předchozího příkladu, kde studenti pouze sečetli čtyři čísla. Studentů, kteří příklad vyřešili správně, je 75 %.



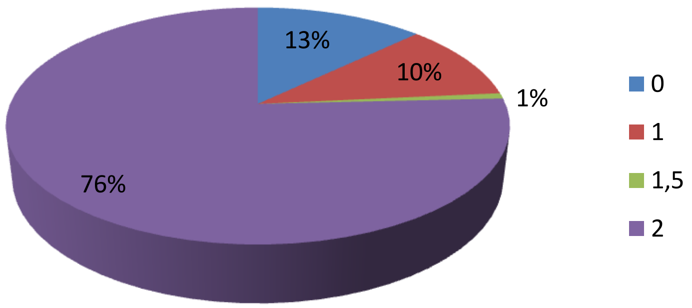
Graf 46: *Bodová úspěšnost v příkladu* 6b) *s přípravou a bez použití tabulek u studentů 4. ročníku šestiletého gymnázia*

I když studenti, jejichž výsledky jsou uvedeny v grafu 46, nepoužívali tabulky, vedli si poměrně dobře. 72 % těchto studentů vyřešilo úlohu bezchybně.



Graf 47: *Bodová úspěšnost v příkladu* 6b) *s přípravou a s použitím tabulek u studentů 3. ročníku čtyřletého gymnázia*

U studentů s tabulkami a přípravou byla úspěšnost o něco vyšší, než v případech předcházejících. 81 % studentů u tohoto příkladu nepochybilo.



Graf 48: *Bodová úspěšnost v příkladu* 6b) *celkem*

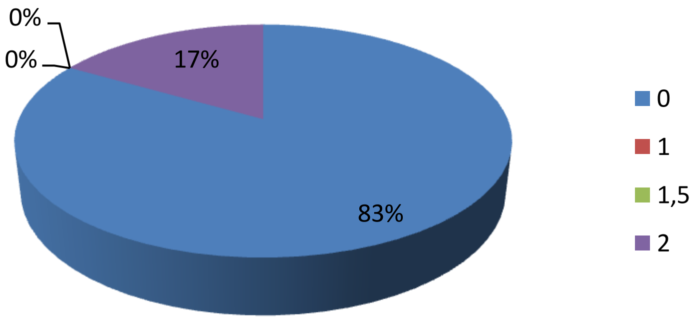
V příkladě 6b) jsme se mohli přesvědčit o tom, že jednoduché spojování odporů není na gymnáziích pro studenty velkým problémem. Po vyrovnaném výkonu studentů na všech třech školách celkem uspělo 76 % studentů. 10 % získalo bod, 13% příklad nedokázalo řešit a 1 % studentů udělalo chybu v řádu nebo v jednotce ve výsledku.

7. Elektromotorické napětí zdroje je $1{,}1\,\mathrm{V}$. Po připojení spotřebiče s odporem $5\,\Omega$ je svorkové napětí jen $0{,}6\,\mathrm{V}$. a) Jaký je vnitřní odpor zdroje? b) Jaký je proud procházející odvodem?

a) $U = U_e - R_i I$

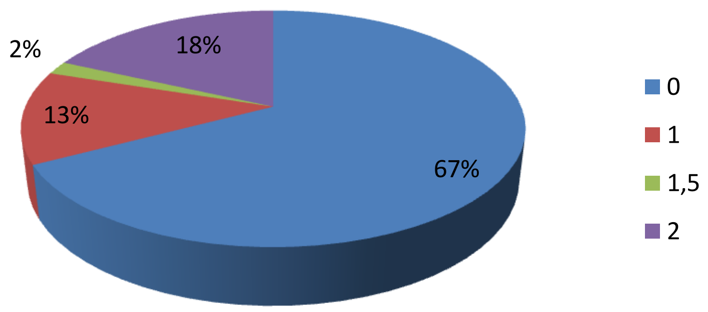
$$R_i = \frac{U_e - U}{I} \qquad I = \frac{U}{R}$$

$$R_i = \frac{(U_e - U)R}{U} = \frac{(1{,}1 - 0{,}6)\cdot 5}{0{,}6} = \underline{\underline{4{,}17\,\Omega}}$$



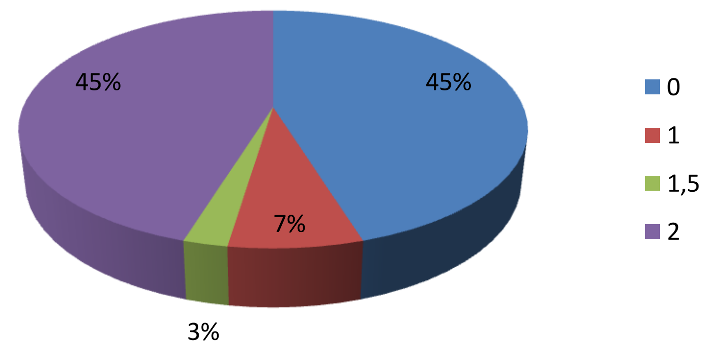
Graf 49: *Bodová úspěšnost v příkladu* 7a) *bez přípravy a s použitím tabulek u studentů fyzikálního semináře*

Příklad 7a) byl jedním z příkladů obtížnějších, byla možnost jej také řešit tak, že ve vzorovém řešení místo podílu odporu a proudu dosadíme převrácenou hodnotu proudu, vypočtenou v příkladu 7b). V grafu 49 vidíme poměrně velký počet neúspěšných řešitelů a to 83 %, dále 17 % úspěšných řešitelů. Žádné výpočty, které by se daly ohodnotit 1 nebo 1,5 bodem tady nejsou.



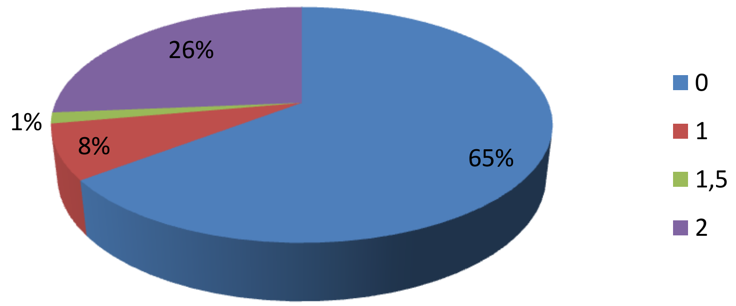
Graf 50: *Bodová úspěšnost v příkladu* 7a) *s přípravou a bez použití tabulek u studentů 4. ročníku šestiletého gymnázia*

I když studenti nepoužívali tabulky, tak 14 % studentů uvedlo správný vzorec. Studenti v grafu 50 dopadli v tomto příkladu lépe než studenti fyzikálního semináře.



Graf 51: *Bodová úspěšnost v příkladu* 7a) *s přípravou a s použitím tabulek u studentů 3. ročníku čtyřletého gymnázia*

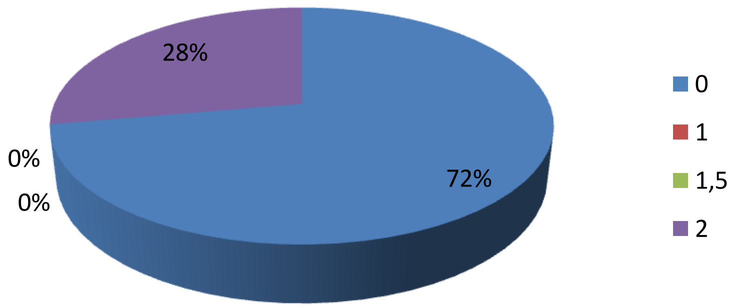
Řešitelé, kteří měli možnost se připravit a používat tabulky, dopadli jednoznačně nejlépe. 45 % studentů vyšilo příklad bezchybně, 10 % částečně. Tento značně lepší výsledek studentů, kteří elektřinu a magnetismus probírali v tomto školním roce, může pramenit z toho, že si něco zapamatovali z hodin a rozuměli látce více, než studenti fyzikálního semináře, kteří po roce, který uplynul od jejich studia elektřiny a magnetismu, postupovali spíše postupem takovým, že se z daných veličin snažili najít vzorec, kterým se doberou ke správnému výsledku, což mohlo v tomto příkladu být problematické.



Graf 52: *Bodová úspěšnost v příkladu* 7a) *celkem*

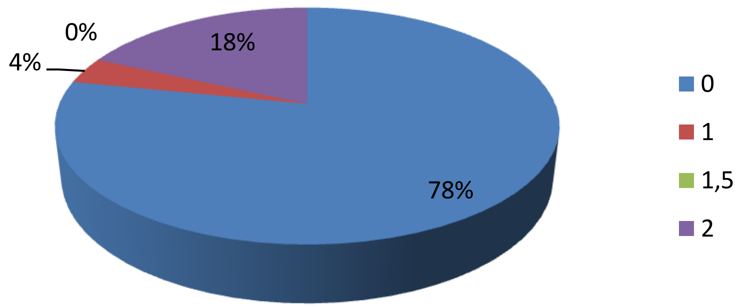
Celkem v příkladu 7a) bylo neúspěšných 65 % studentů, 9 % studentů úlohu vyřešilo částečně a 26 % úplně.

b) $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{0{,}6}{5} = \underline{\underline{0{,}12\ \mathrm{A}}}$



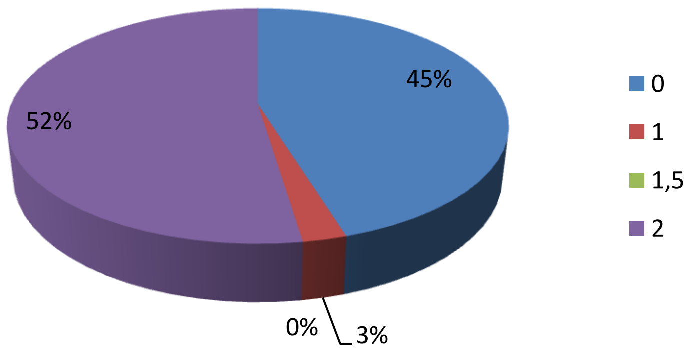
Graf 53: *Bodová úspěšnost v příkladu* 7b) *bez přípravy a s použitím tabulek u studentů fyzikálního semináře*

Příklad 7b) byl vybrán s očekáváním toho, že bude jedním z příkladů, který nebude pro studenty problémový. Opak se však ukázal pravdou. 28 % studentů fyzikálního semináře řešilo úlohu správně, ale 72 % jich nenapsalo tvar Ohmova zákona.



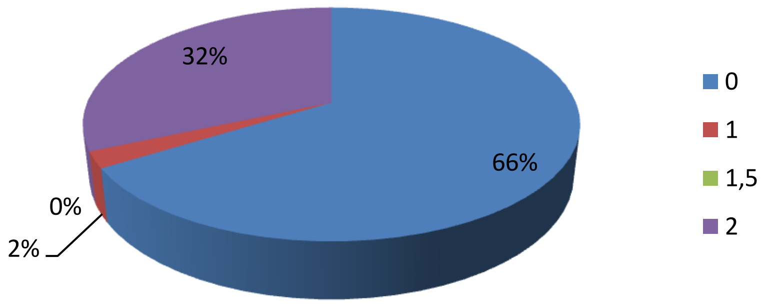
Graf 54: *Bodová úspěšnost v příkladu* 7b) *s přípravou a bez použití tabulek u studentů 4. ročníku šestiletého gymnázia*

Vcelku podobná úspěšnost jako v grafu 53 je viditelná v grafu 54. Úspěšných řešitelů je zde však o 10 % méně.



Graf 55: *Bodová úspěšnost v příkladu* 7b) *s přípravou a s použitím tabulek u studentů 3. ročníku čtyřletého gymnázia*

Studenti s možností přípravy a používáním tabulek dopadli dokonce značně lépe než studenti fyzikálního semináře. Víc než polovina studentů úlohu vyřešila, 45 % studentů nebylo bodováno.

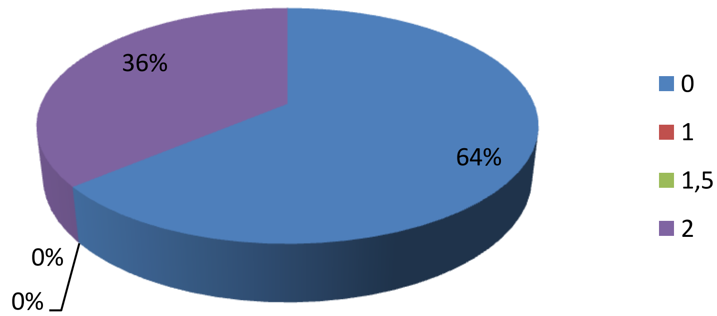


Graf 56: *Bodová úspěšnost v příkladu* 7b) *celkem*

Celkově je příklad 7b) velkým zklamáním. V grafu 56 vidíme 66 % studentů, kteří nenapsali Ohmův zákon a 32 % studentů, kteří u tohoto příkladu nepochybili, 2 % pak byla obodována jedním bodem.

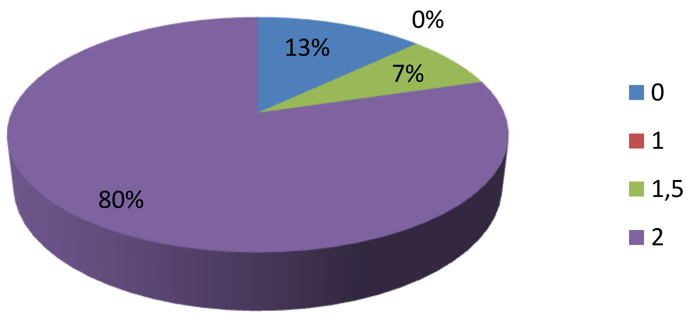
8. Jaká síla působí na vodič délky $l = 30\,\mathrm{cm}$ v homogenním magnetickém poli o indukci $B = 0{,}8\,\mathrm{T}$ protéká-li jím proud $I = 10\,\mathrm{A}$, přičemž vodič je kolmý ke směru magnetické indukce?

$F = BIl = 0{,}8 \cdot 10 \cdot 0{,}3 = \underline{\underline{2{,}4\,\mathrm{N}}}$



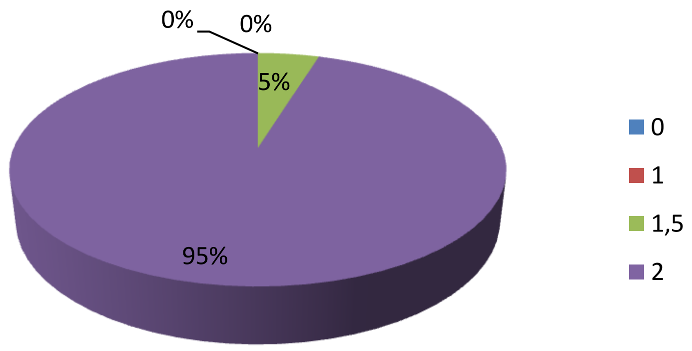
Graf 57: *Bodová úspěšnost v příkladu* 8 *bez přípravy a s použitím tabulek u studentů fyzikálního semináře*

Příklad 8 byl vybrán jako příklad, u kterého stačilo dosadit do vzorce, který se dá najít v tabulkách. Proto, je pouhých 36 % studentů, kteří úlohu vyřešili správně, pod hranicí očekávání. 64 % studentů úlohu buďto nestihli, nebo nevěděli jak postupovat.



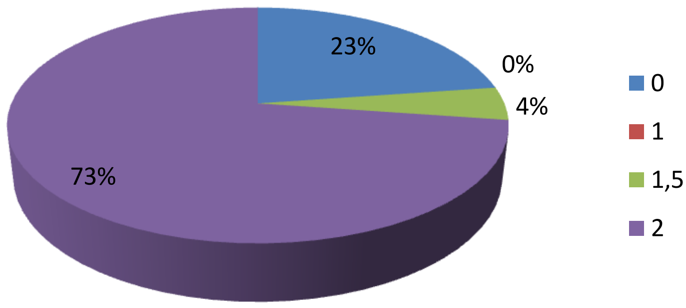
Graf 58: *Bodová úspěšnost v příkladu* 8 *s přípravou a bez použití tabulek u studentů 4. ročníku šestiletého gymnázia*

V tomto příkladě bylo úspěšných 80 % studentů, kteří nepoužívali tabulky a mohli se na písemku připravit.



Graf 59: *Bodová úspěšnost v příkladu* 8 *s přípravou a s použitím tabulek u studentů 3. ročníku čtyřletého gymnázia*

Na gymnáziu, kde studenti měli možnost se připravit a používat tabulky vidíme ještě větší úspěšnost řešitelů, a to 95 %. V grafech 58 a 59 jsou ovšem výsledky velice ovlivněny tím, že studenti zrovna toto téma probírali. Je tedy zřejmé, že z toho co studenti probírali v aktuální době, si pamatují mnoho.

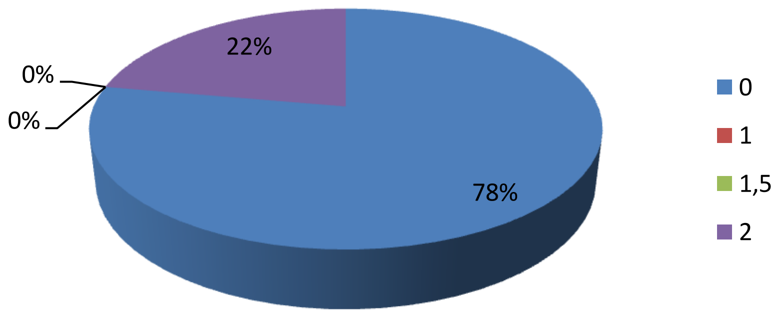


Graf 60: *Bodová úspěšnost v příkladu* 8 *celkem*

Celková statistika sice vychází velice pozitivně, a to 73 % správně vyřešených úloh oproti 23 % neřešených úloh a 4 % úloh vyřešených s chybou v řádu nebo jednotce, nicméně tato statistika je dosti ovlivněna tím, že studenti, jejichž úspěšnost je uvedena v grafech 58 a 59 v rozpětí asi dvou týdnů před písemkou probírali téma s tímto příkladem spojené.

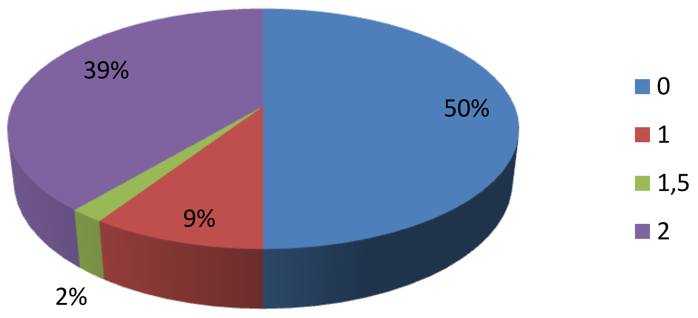
9. Elektron vlétne do magnetického pole o indukci $B = 10\,\mathrm{T}$ rychlostí $v = 3 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ ve směru kolmém k poli. Vypočítejte sílu, kterou pole působí na elektron.

$F = evB = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^{7} \cdot 10 = \underline{\underline{4{,}8 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N}}}$



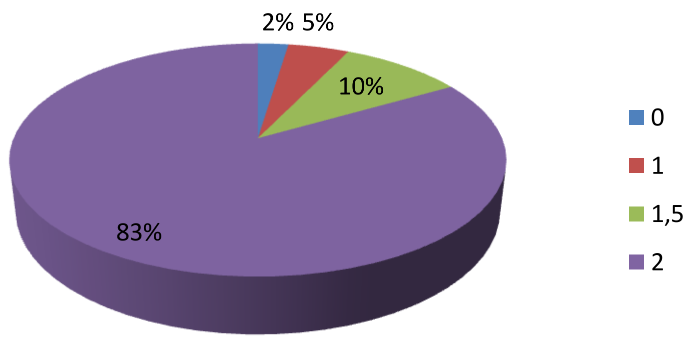
Graf 61: *Bodová úspěšnost v příkladu* 9 *bez přípravy a s použitím tabulek u studentů fyzikálního semináře*

Příklad 9 byl opět příkladem na pouhé dosazení do vzorce. Předpokládám, že nízká úspěšnost studentů fyzikálního semináře 22 % je zapříčiněna časovou tísní.



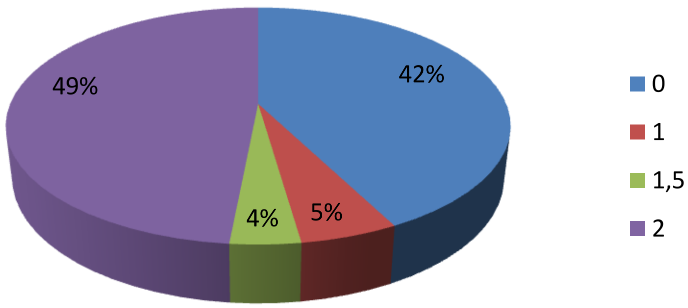
Graf 62: *Bodová úspěšnost v příkladu* 9 *s přípravou a bez použití tabulek u studentů 4. ročníku šestiletého gymnázia*

Studenti, kteří měli možnost přípravy, ale neměli možnost používat tabulky, získali 2 body za tuto úlohu z 39 %, což je vzhledem k tomu, jak dobře si studenti vedli v předcházející úloze překvapivé. 11 % studentů tuto úlohu vyřešilo z části a polovina studentů tuto úlohu nebyla schopna řešit.



Graf 63: *Bodová úspěšnost v příkladu 9 s přípravou a s použitím tabulek u studentů 3. ročníku čtyřletého gymnázia*

Studenti 3. ročníku čtyřletého gymnázia dopadli u této úlohy evidentně nejlépe. 83 % studentů v řešení této úlohy nepochybilo, navíc 15 % studentů úlohy vyřešilo z části a pouhá 2% studentů nebyla schopna napsat zde použitelný vzorec.



Graf 64: *Bodová úspěšnost v příkladu* 9 *celkem*

Celkem je v úspěšnosti podobný podíl studentů, kteří obdrželi 2 body a 0 bodů, a to 49 % k 42 %. 9 % studentů úlohu vyřešilo z části.

Studenti byli také dotázání na míru jejich zájmu o fyziku, a to následujícími otázkami s výběrem možností. V grafech, které v dalším jsou uvedeny, jsou zahrnuty bodová ohodnocení všech 135 studentů gymnázií.

1. V budoucnosti bych chtěl studovat obor, ve kterém fyzika:

a) Není

b) Je

2. (Pouze při odpovědi b) na otázku 1.)

Chci studovat obor, ve kterém je fyzika:

a) Hlavním předmětem

b) Jedním z hlavních předmětů

c) Okrajovým předmětem

3. Z fyziky:

a) Budu maturovat

b) Možná budu maturovat

c) Nebudu maturovat

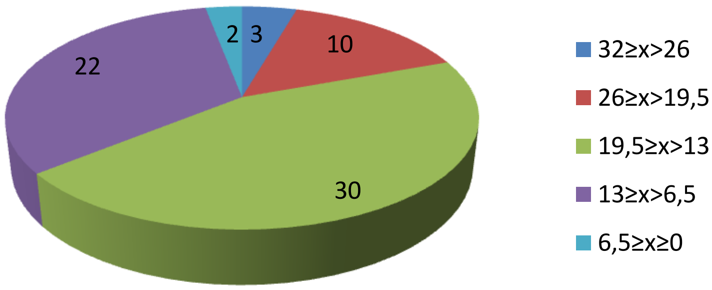
4. (Pouze při odpovědi a) nebo b) na otázku 3.)

Jestli budu maturovat z fyziky, pak si zvolím:

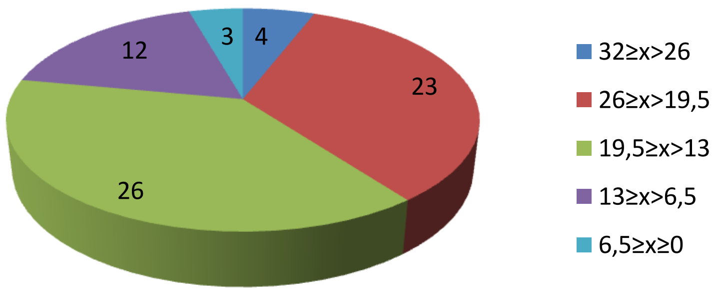
a) Lehčí verzi maturity

b) Těžší verzi maturity

c) Nevím

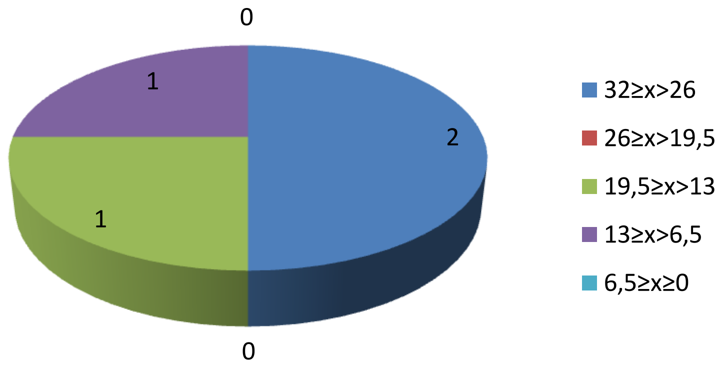


Graf 65: *Počty studentů s odpovědí* a) *na otázku* **1**, *kteří dosáhli počtu bodů v uvedených bodových rozpětích*



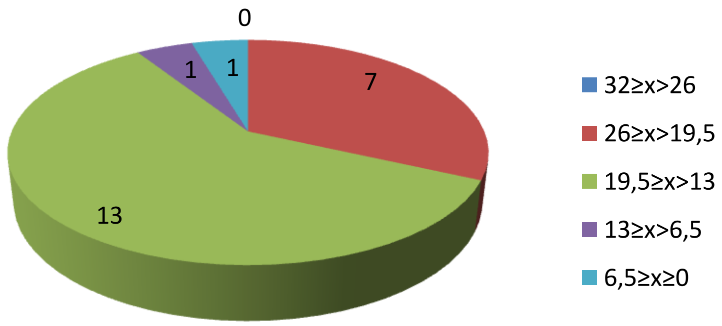
Graf 66: *Počty studentů s odpovědí* b) *na otázku* **1**, *kteří dosáhli počtu bodů v uvedených bodových rozpětích*

Studenti, kteří chtějí studovat obor, ve kterém je fyzika, dopadli o něco lépe než studenti, kteří chtějí studovat obor bez fyziky. Rozdíl je zde 13 studentů, kteří dosáhli druhého nejvyššího bodového rozpětí, 10 studentů, kteří dosáhli druhého nejmenšího bodového rozpětí a pak nějaké rozdíly v řádu jednotek.



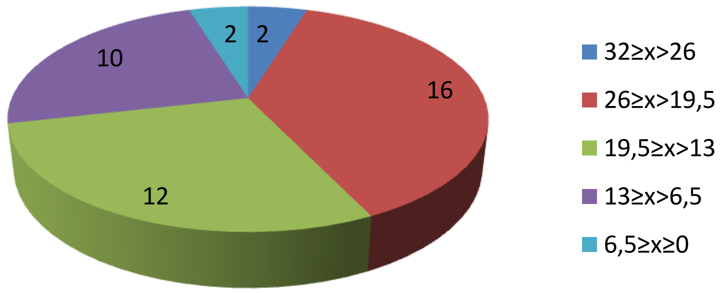
Graf 67: *Počty studentů s odpovědí* a) na otázku **2**, *kteří dosáhli počtu bodů v uvedených bodových rozpětích*

Fyziku chtějí studovat ze 135 studentů pouzí čtyři studenti. Dva z nich získali maximální bodové rozpětí a dva z nich dopadli podobně jak průměrní studenti, kteří tuto písemku psali.



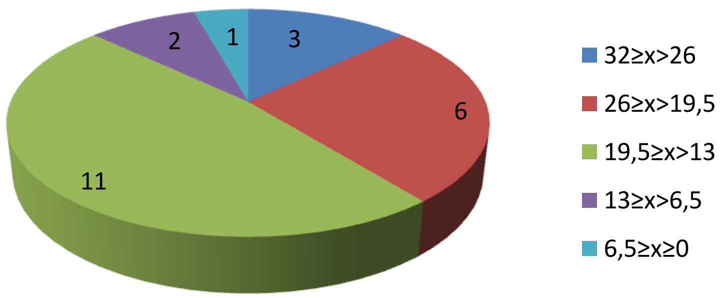
Graf 67: *Počty studentů s odpovědí* b) na otázku **2**, *kteří dosáhli počtu bodů v uvedených bodových rozpětích*

Studenti, kteří by chtěli studovat obor, ve kterém je fyzika jedním z hlavních předmětů, dosáhli nejčastěji středního bodového rozpětí. Sedm studentů pak dosáhlo druhého nejvyššího bodového rozpětí. Jeden student získal bodové ohodnocení, jež náleží do nejvyššího bodového rozpětí, a jeden student získal bodové ohodnocení, jež náleží do nejnižšího bodového rozpětí.



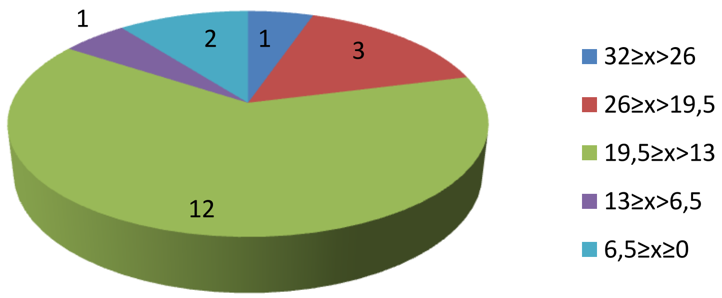
Graf 68: *Počty studentů s odpovědí* c) na otázku **2**, *kteří dosáhli počtu bodů v uvedených bodových rozpětích*

Překvapivě studenti, kteří by chtěli studovat obor, ve kterém fyzika figuruje, jakožto okrajový předmět, dosáhli většího počtu písemek s ohodnocením, spadajícím do druhého nejvyššího bodového ohodnocení, než studenti, jejichž bodové ohodnocení je patrné v grafu 67. Největší počet studentů napsal písemku na 20 až 26 bodů včetně.



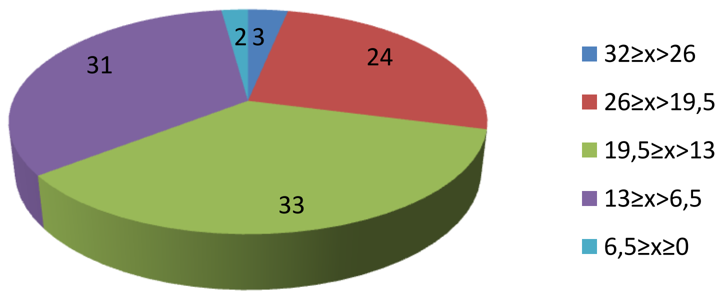
Graf 69: *Počty studentů s odpovědí* a) *na otázku* **3**, *kteří dosáhli počtu bodů v uvedených bodových rozpětích*

Studenti, kteří jsou rozhodnuti z fyziky maturovat, napsali v drtivé většině písemku na počet bodů, který leží ve středním intervalu hodnocení nebo výše. Překvapivé se však může jevit, že studentů, kteří napsali písemku na více, než 19,5 bodu bylo pouze devět.



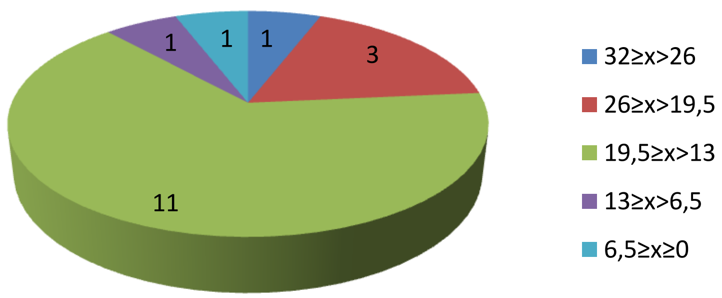
Graf 70: *Počty studentů s odpovědí* b) *na otázku* **3**, *kteří dosáhli počtu bodů v uvedených bodových rozpětích*

U studentů neúplně rozhodnutých pro maturitu z fyziky jsou výsledky značně horší. Většina studentů napsala písemku na zhruba polovinu bodů. Pozitivní však je, že studentů, kteří napsali písemku na méně než 13,5 bodů, bylo zde poměrně málo, a to pouzí tři.



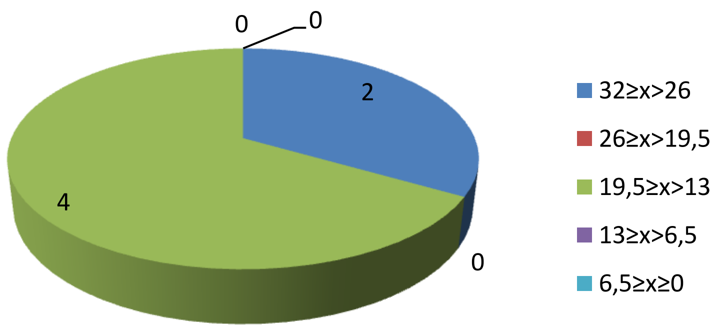
Graf 71: *Počty studentů s odpovědí* c) *na otázku* **3**, *kteří dosáhli počtu bodů v uvedených bodových rozpětích*

U studentů, kteří nechtějí maturovat z fyziky, se vyskytlo 27 studentů, kteří získali více než 19,5 bodu, nicméně také studentů, kteří získali méně než 13,5 bodu bylo zde mnoho, a to 33.



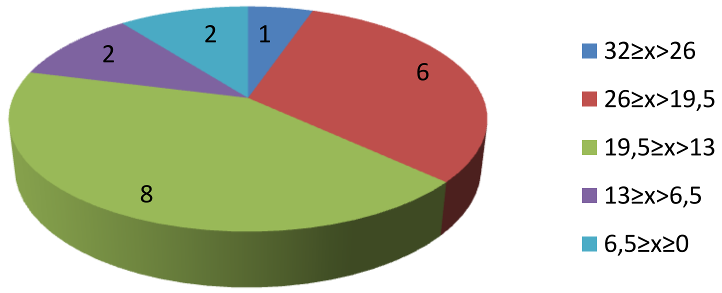
Graf 72: *Počty studentů s odpovědí* a) *na otázku* **4**, *kteří dosáhli počtu bodů v uvedených bodových rozpětích*

Studenti, kteří by si v případě maturování z fyziky zvolili těžší verzi maturity, překvapivě nedosáhli příliš příznivého bodového výsledku. 11 studentů dosáhlo zhruba středního bodového ohodnocení, 3 studenti dosáhli druhého nejvyššího bodového rozpětí a zbylá bodová rozpětí jsou zde zastoupena po jednotkách studentů.



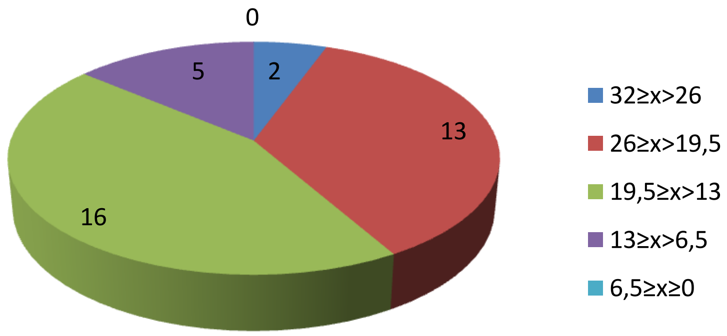
Graf 73: *Počty studentů s odpovědí* b) *na otázku* **4**, *kteří dosáhli počtu bodů v uvedených bodových rozpětích*

Studentů, kteří by si v případě maturity z fyziky zvolili lehčí verzi maturity, bylo překvapivě velice málo, a to pouze 6, z nich třetina dosáhla intervalu nejvyššího bodového ohodnocení a dvě třetiny dosáhly intervalu středního bodového ohodnocení.



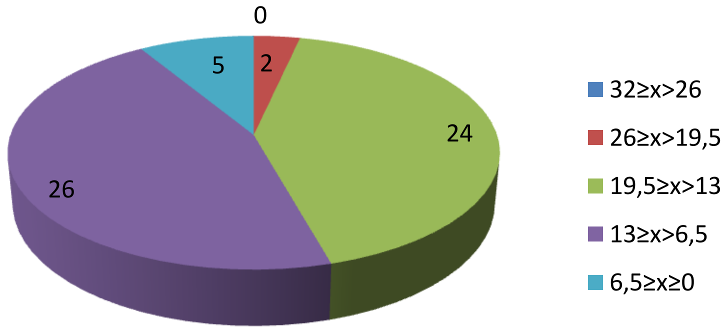
Graf 74: *Počty studentů s odpovědí* c) *na otázku* **4**, *kteří dosáhli počtu bodů v uvedených bodových rozpětích*

Studenti, kteří nejsou rozhodnuti pro obtížnost maturity z fyziky, dopadli srovnatelně se studenty, kteří by volili verzi těžší. 8 studentů získalo počet bodů ze středního intervalu hodnocení, 6 studentů získalo počet bodů ležící v druhém nejvyšším intervalu hodnocení, 4 studenti získali méně než 13,5 bodu a jeden student získal počet bodů z maximálního intervalu hodnocení.



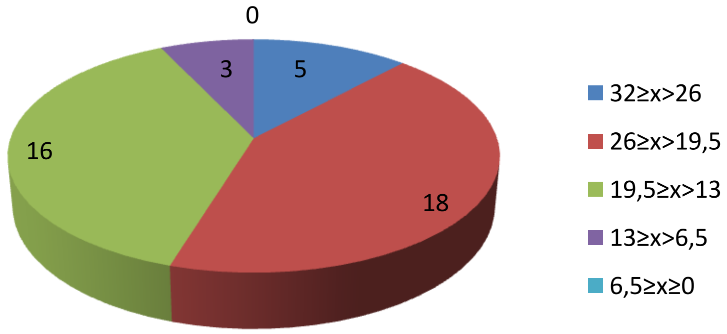
Graf 75: *Počty studentů, kteří dosáhli počtu bodů v uvedených bodových rozpětích u studentů fyzikálního semináře*

U studentů fyzikálního semináře byly evidentně pozitivními faktory zájem fyziku a možnost používání tabulek. Studentů, kteří napsali písemku na méně, než 13,5 bodů zde bylo pouhých pět. 13 studentů dosáhlo slušného výsledku v druhém nejvyšším bodovém rozpětí, na druhou stranu 16 studentů dokázalo řešit příklady s pouze zhruba polovičním bodovým ohodnocením. U oněch 16 studentů, kteří se účastní fyzikálního semináře, bych očekával o něco více vzhledem k tomu, že disponovali tabulkami, nicméně i toto poloviční bodové ohodnocení se vzhledem k náročnosti písemky nedá klasifikovat jako vyloženě špatné.



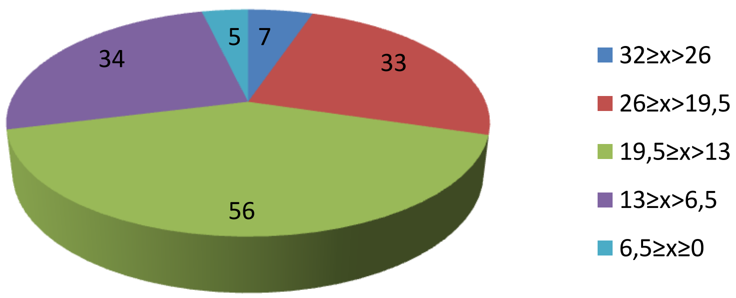
Graf 76: *Počty studentů, kteří dosáhli počtu bodů v uvedených bodových rozpětích u studentů čtvrtého ročníku šestiletého gymnázia*

U studentů, kteří nedisponovali tabulkami je tento faktor velice znatelný. Až 31 studentů zde napsalo písemku na méně než 13,5 bodu. Myslím si, že toto velké číslo skutečně bylo zapříčiněno tím, že si studenti potřebné vztahy nepamatovali. I když studenti měli možnost týdenní přípravy, zdá se, že řada z nich tuto možnost náležitě nevyužila. 26 studentů napsalo písemku se ziskem více než 13 bodů.



Graf 77: *Počty studentů, kteří dosáhli počtu bodů v uvedených bodových rozpětích u studentů třetího ročníku čtyřletého gymnázia*

Při opravování písemek studentů třetího ročníku čtyřletého gymnázia jsem byl nadšen z toho, že řada studentů bylo schopna tuto písemku napsat s velkým počtem správně řešených příkladů. 23 studentů napsalo písemku na více než 19,5 bodu, 16 studentů získalo zhruba poloviční ohodnocení a pouzí 3 studenti získali méně než 13,5 bodu. Myslím si, že se zde projevil jednak pozitivně faktor možnosti používání tabulek, jednak možnost přípravy studentů, a jednak si myslím, že studenti měli učitele, kteří jim svým stylem vyučování pomohli k takovému výkonu.

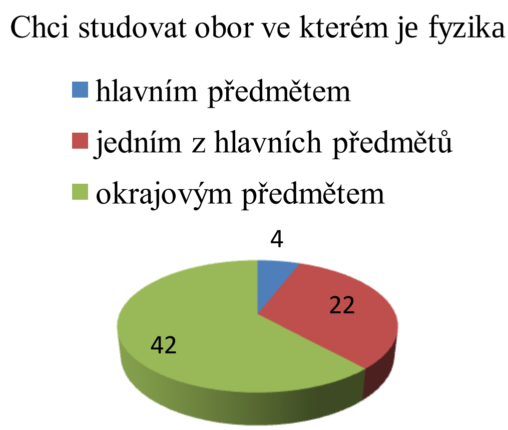


Graf 78: *Počty studentů, kteří dosáhli počtu bodů v uvedených bodových rozpětích celkem*

V grafu 78 máme k dispozici celkovou statistiku bodového hodnocení žáků gymnázií. Výsledky jsou rovnoměrně rozděleny. Bodové ohodnocení 56 studentů se pohybuje ve středním bodovém intervalu, 33 a 34 pak v druhém nejvyšším a druhém nejnižším bodovém intervalu, 5 studentů nezískalo ani 7 bodů a 7 studentů napsalo písemku na více než 26 bodů.

Myslím si, že vzhledem k náročnosti písemky objemové a časové, také vzhledem k tomu, že studenti měli vzhledem k objemu tohoto učiva pouze týdenní, resp. pětidenní, resp. žádnou možnost přípravy nejsou výsledky písemky vůbec špatné. Jelikož jsem byl upozorňován na to, že písemka je sestavená poměrně náročně, jsem velice rád, že zde byli studenti, kteří písemku napsali na maximální počet bodů. Takových studentů bylo 5, z nichž 3 byli z Gymnázia Český Těšín a 2 z Gymnázia s polským vyučovacím jazykem v Českém Těšíně. Jakožto ukazatel zájmu studentů na gymnáziích o fyziku jsem zde uvedl ještě grafy 76–79, které udávají počty studentů odpovídajících na jednotlivé možnosti testových otázek.

Graf 79: *Odpovědi studentů na otázku* **1**



Graf 80: *Odpovědi studentů na otázku* **2**

Graf 81: *Odpovědi studentů na otázku* **3**

Graf 82: *Odpovědi studentů na otázku* **4**

4.2 Písemky pro bakaláře

U sestavování písemek pro bakaláře fyziky jsem použil osobních výukových materiálů doc. Kubínka. Písemky zahrnují pouze téma elektrostatického pole a jsou primárně určeny pro první zápočtovou písemku studentů fyziky prvního ročníku. Sestavoval jsem dvě varianty písemky, tudíž jsem vybral příklady tak, aby jeden z příkladů z jedné varianty písemky odpovídal svou obtížností přibližně jinému příkladu z druhé varianty písemky. Také jsem příklady určoval tak, aby tematické celky Coulombův zákon, elektrická intenzita, potenciál, kapacita a spojování kondenzátorů byly rovnoměrně zastoupeny. Také svou obtížnostní jsou obě varianty přibližně vyrovnány.

Písemky pro bakaláře fyziky se psaly na cvičeních vedených doc. Kubínkem. Studentům bylo dovoleno používat pouze kalkulačky. Písemky pro bakaláře fyziky psalo 5 studentů oboru OFMF, 5 studentů oboru F-M a jeden student oboru MV-F, který byl při sestavování statistiky započten ke studentům F-M, 5 studentů AFYZ, 4 studenti OPT, 3 studenti BF, 3 studenti MBF, 2 studenti F-VT, 2 studenti CH-F a 3 studenti F-BI. Studenti měli pro písemku k dispozici celé cvičení, tj. 90 minut.

Má očekávání byla taková, že příklady, u kterých bylo zapotřebí pouze použití vhodného vzorce, případně jeho jednoduchá transformace a dosazení s výpočtem (tj. příklady 5, 6 ze skupiny A a příklady 2, 6 ze skupiny B) budou napsány v drtivě většině správně. U ostatních příkladů jsem pak předpokládal značnou diferenciaci. U příkladů 3 ze skupiny A a 4 ze skupiny B jsem pak neměl přílišnou naději na úspěšné řešení. A to proto, že u příkladů je využívána řada operací, tedy existuje poměrně velká možnost dopuštění se chyby. Studenti měli dané příklady zadány, jako domácí úkol. Neměli ale veřejně k dispozici řešení těchto úloh, tedy si je buďto vyřešili sami, nebo s něčí pomocí, nebo jejich řešení neměli. Dá se tedy předpokládat, že v případě úspěšné obhajoby této bakalářské práce a jejího zveřejnění budou výsledky podobných písemek v následujících letech lepší.

Bodování úloh je označeno v jednotlivých příkladech. Počet bodů za příklad, které student získal, když došel do označeného místa v řešení je označeno tučným písmem v závorce. U příkladů za dva body bylo bodování stejné jako u úloh středoškolských, s tím rozdílem, že pokud student uvedl nějaký vztah, který nebyl výsledným vztahem pro výpočet, ale byl správný a byl v tomto příkladě použitelný, byl obodován polovinou bodu. Bodování v řešení je uvedeno v celých bodech. Mezikroky, které v řešeních označeny nejsou, jsem bodoval polovinou bodu. V odkazování na příklady je použito číslo příkladu a následně skupina A nebo B, tedy např. 3A značí třetí příklad ze skupiny A. V následujících grafech jsou uvedeny proměnné *x*, které představují počet získaných bodů.

Skupina A

1. Na dvou stejných kapkách vody je po jednom volném elektronu, přičemž síla elektrického odpuzování je stejná, jako gravitační síla, kterou se přitahují. Jaké jsou poloměry kapek?

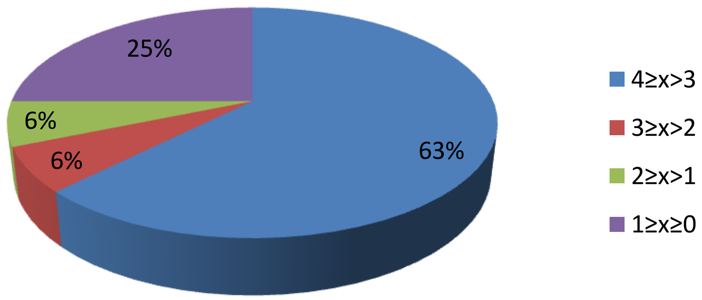
$F_e = F_g$ $\qquad e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$

$\kappa \dfrac{m^2}{r^2} = k \dfrac{Q^2}{r^2}$ **(1)** $\qquad m = V\rho = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

$$\frac{ke^2}{\kappa} = m^2$$

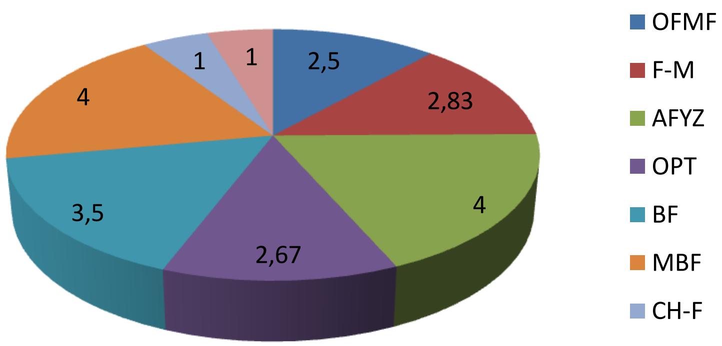
$$V^2 \rho^2 = \frac{4^2}{3^2}\pi^2 R^6 \ \textbf{(2)} \Rightarrow R^6 = \frac{ke^2 3^2}{\kappa \rho^2 4^2 \pi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{e}{4\pi\rho}\sqrt{\frac{3^2 k}{\kappa}}} \ \textbf{(3)} = \sqrt[3]{\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{4\pi \cdot 10^3}\sqrt{\frac{9 \cdot 9 \cdot 10^9}{6{,}67 \cdot 10^{-11}}}} = \underline{\underline{7{,}6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}}} \ \textbf{(4)}$$



Graf 83: *Bodová úspěšnost v příkladu* 1A

Při opravě této úlohy jsem byl svědkem mnoha chyb při odvozování vztahu pro poloměr kapek, nebo chyb početních. Někteří studenti zapomněli při odvozování nějakou veličinu odmocnit, někteří se rozhodli neodvozovat obecný vzorec, ale počítali jednotlivé síly a pak početně chybovali. Zajímavé je, že většinou studenti buďto vůbec nevěděli jak postupovat, anebo tuto úlohu vyřešili téměř celou, což byl častější případ. Studentů, kteří vyřešili úlohu pouze polovičně, je zanedbatelné množství.



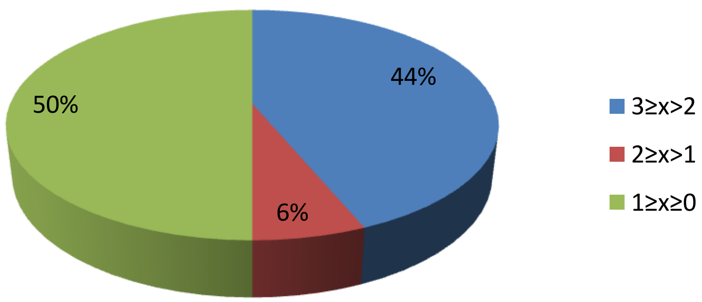
Graf 84: *Průměrný počet bodů za příklad* 1A *u jednotlivých oborů*

Nejúspěšnější byli při této úloze studenti oborů AFYZ a BF, mírným zklamáním byli studenti OFMF, kteří získali průměrně pouze mírně nadpoloviční většinu bodů, nejhůře dopadli studenti učitelských oborů CH-F a F-BI.

2. V jistém dielektriku působí na sebe dva bodové náboje Q_1 a Q_2 vzdálené od sebe o vzdálenost r, vzájemnou silou stejnou, jakou na sebe působí ve vzduchu, změníme-li jejich vzdálenost o Δr. Určete relativní permitivitu dielektrika ε_{r2} v závislosti na relativní permitivitě vzduchu ε_{r1}.

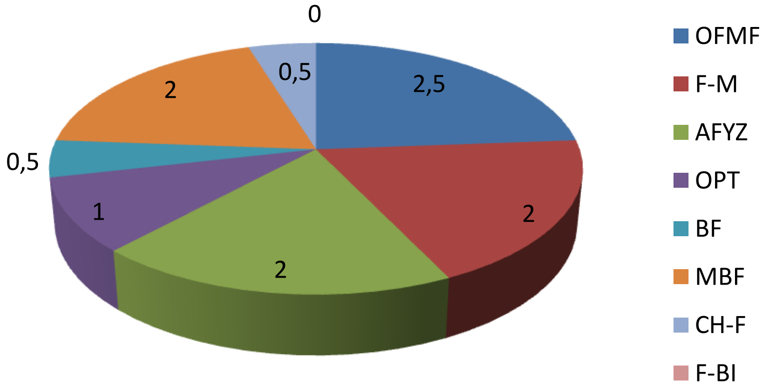
$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} \frac{Q_1 Q_2}{(r-\Delta r)^2} \qquad F_{12}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad \textbf{(1)} \qquad F_{12} = F_{12}'$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{r1}} \frac{1}{(r-\Delta r)^2} \ \textbf{(2)} \ = \frac{1}{\varepsilon_{r2}} \frac{1}{r^2} \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r1} \frac{(r-\Delta r)^2}{r^2}}} \ \textbf{(3)}$$



Graf 85: *Bodová úspěšnost v příkladu* 2

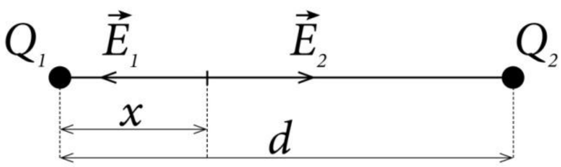
U této úlohy bez číselných výpočtů neuspěla polovina studentů, což je poměrně dost. Studenti často mají naučený postup pomocí jednotlivých vzorců, kde přímo dosazují, anebo si z vzorce odvodí potřebnou veličinu a dosazují následně. Tento příklad nebyl ničím těžším, než odvozením ze dvou vzorců, řada studentů se však touho obecnou úlohou nechala zmást. Vliv na to může mít také styl vyučování na středních školách, kde se úlohy bez dosazení a číselného výpočtu téměř nepočítají.



Graf 86: *Průměrný počet bodů za příklad* 2A *u jednotlivých oborů*

Nejlepších výsledků dosáhli studenti OFMF, 2 body získali studenti F-M, AFYZ a MBF. Naopak nejhorší výsledky měli studenti F-BI, CH-F a BF.

3. Dva bodové náboje $2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ a $8 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ jsou ve vakuu uloženy ve vzdálenosti $21\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte, ve kterém místě na jejich spojnici bude intenzita elektrického pole nulová.



Obr. 40

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \qquad E_1 = E_2$ **(1)**

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{(d-x)^2}$ **(2)**

$$\frac{Q_1}{x^2} = \frac{Q_2}{(d-x)^2}$$

$$(d - x)^2 Q_1 = x^2 Q_2$$

$$(d^2 - 2dx + x^2)Q_1 = x^2 Q_2$$

$$d^2 Q_1 - 2dxQ_1 + x^2 Q_1 = x^2 Q_2$$

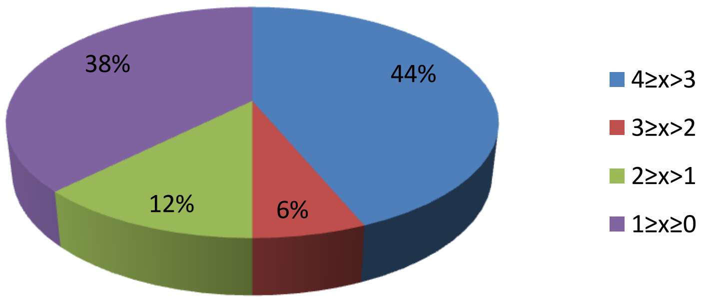
$$(Q_2 - Q_1)x^2 + 2dQ_1 x - Q_1 d^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2dQ_1 + \sqrt{(2dQ_1)^2 - 4(Q_2 - Q_1)(-Q_1 d^2)}}{2(Q_2 - Q_1)} \quad \textbf{(3)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \cdot 0{,}21 \cdot 2 \cdot 10^{-8} + \sqrt{(2 \cdot 0{,}21 \cdot 2 \cdot 10^{-8})^2 - 4(8 \cdot 10^{-8} - 2 \cdot 10^{-8})(-2 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}21^2)}}{2 \cdot (8 \cdot 10^{-8} - 2 \cdot 10^{-8})}$$

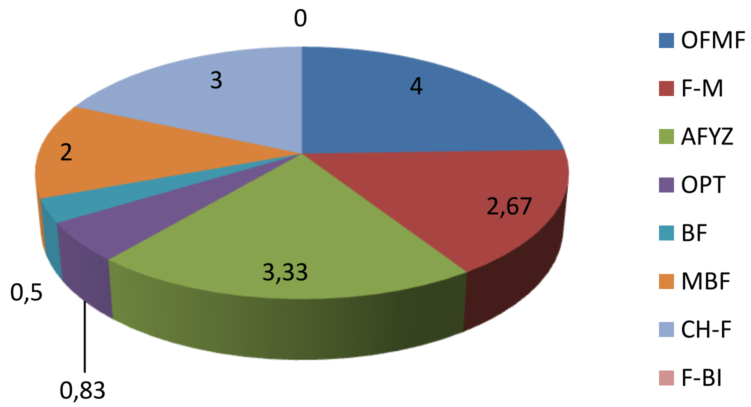
$x_1 = \underline{\underline{0{,}07\,\mathrm{m}}}$ $\qquad x_2 = -0{,}21\,\mathrm{m}$

Obdrželi jsme dvě hodnoty vzdáleností, z nichž hodnotu x_2 neuvažujeme, protože bod o takové vzdálenosti od náboje Q_1 neleží na spojnici mezi náboji. Nulová intenzita tedy bude v bodě vzdáleném o 7 cm od náboje Q_1 a 14 cm od náboje Q_2. **(4)**



Graf 87: *Bodová úspěšnost v příkladu* 3

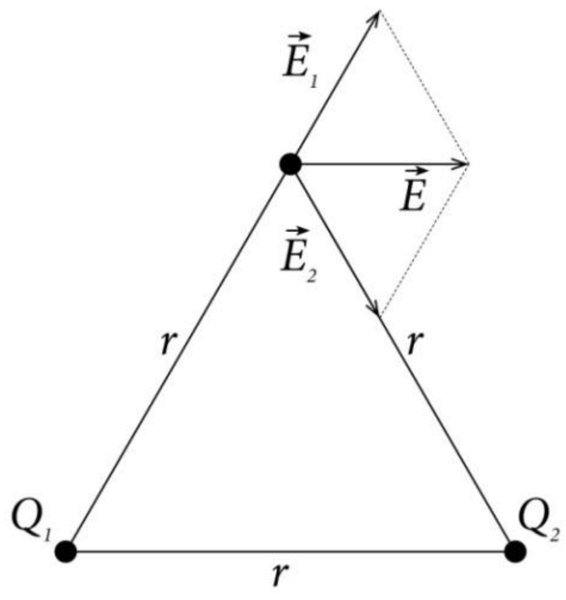
Tuto úlohu jsem vybral s předpokladem, že je to nejtěžší úloha z písemek pro bakaláře a nepředpokládal jsem tak velkou úspěšnost při jejím řešení. Sestavení rovnice, které je hodnoceno dvěma body, není až tak obtížné, avšak při následném odvození vztahu pro vzdálenost, kde je třeba využít vzorce pro kvadratickou rovnici, jsem čekal, že značná část studentů bude chybovat. To se ovšem nepotvrdilo a u tohoto odvození nechyboval téměř nikdo. Pokud studenti věděli jak úlohu řešit, většinou dospěli ke správnému výsledku, nebo alespoň ke správně odvozenému požadovanému vztahu.



Graf 88: *Průměrný počet bodů za příklad* 3A *u jednotlivých oborů*

V příkladě 3A excelovali studenti OFMF, dobře si vedli také studenti AFYZ. Nejhůře si opět vedli studenti F-BI a BF.

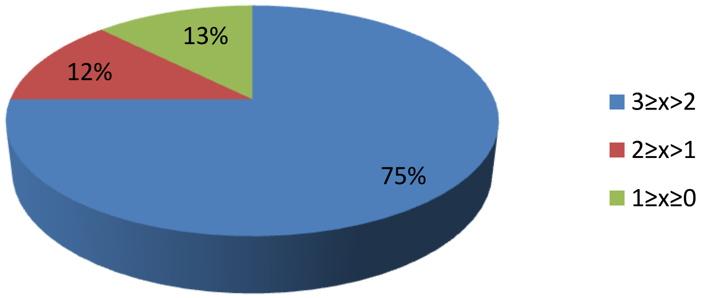
4. Ve dvou vrcholech rovnostranného trojúhelníku o straně $r = 0{,}5\,\mathrm{m}$ jsou umístěny náboje $Q_1 = 25 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$ a $Q_2 = -25 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$. Určete velikost intenzity elektrostatického pole ve třetím vrcholu.



Obr. 41

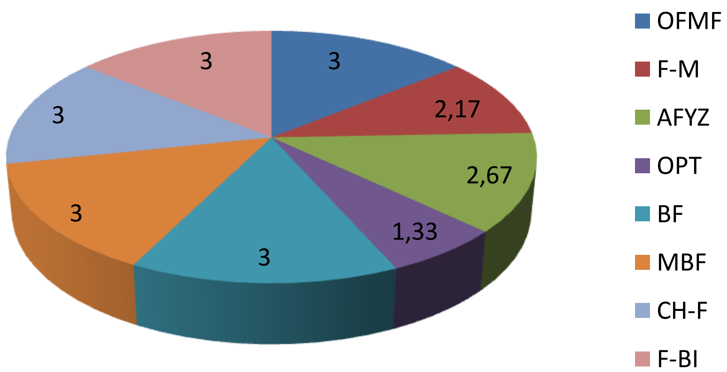
$$E_1 = E_2 = k\frac{Q_1}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{25 \cdot 10^{-9}}{0{,}5^2} = \underline{\underline{900\,\mathrm{N \cdot C^{-1}}}} \quad \textbf{(1)}$$

$$E^2 = E_1^{\ 2} + E_2^{\ 2} - 2E_1E_2\cos\alpha \ \mathbf{(2)} = 2E_1^{\ 2} - 2E_2^{\ 2}\frac{1}{2} = E_1^{\ 2} \Rightarrow \underline{\underline{E_1 = E}} \ \mathbf{(3)}$$



Graf 89: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4

Tento příklad se dle očekávání ukázal jako jednoduchý. Studenti, kteří u řešení tohoto příkladu neuspěli, buďto neznali ani základní vzorec pro intenzitu tvořenou bodovým nábojem, anebo nerozuměli dost dobře tomu, co počítají. Neúspěšným studentům často chyběla ilustrace, na které by si lépe uvědomili, jaký postup řešení je třeba zvolit.

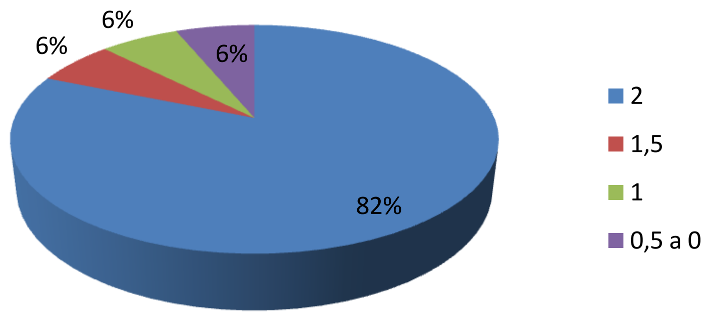


Graf 90: *Průměrný počet bodů za příklad* 4A *u jednotlivých oborů*

U tohoto příkladu získali plný počet bodů studenti všech oborů, kromě oborů F-M, AFYZ a OPT.

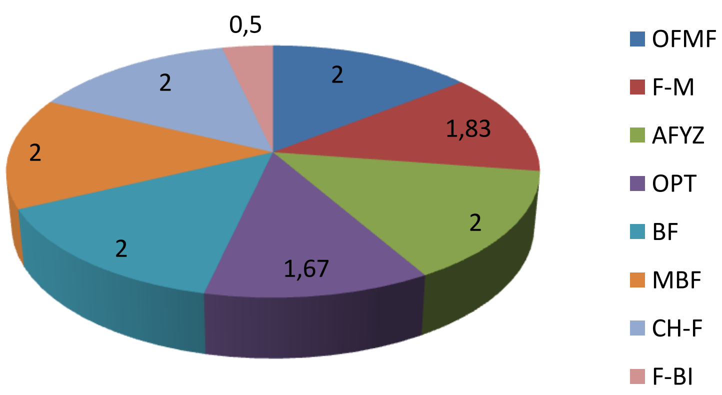
5. Jak velký poloměr musí mít koule, která by se nábojem $Q = 5 \cdot 10^{-6}$ C nabila na potenciál $\varphi = 10^5$ V?

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = k\frac{Q}{r} \Rightarrow r = k\frac{Q}{\varphi}\ \textbf{(1)} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}}{10^5} = \underline{\underline{45 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}}}\ \textbf{(2)}$$



Graf 91: *Bodová úspěšnost v příkladu* 5A

Tento jednoduchý středoškolský příklad podle očekávání přílišné problémy studentům nedělal. Uvážíme-li však, že tento příklad je typickým středoškolským příkladem, tak i oněch 18 % neúspěšných není malé číslo. Jeden student se dopustil početní chyby v řádu, proto obdržel 1,5 bodu. Zbývající dva studenti se pravděpodobně dostatečně na písemku nepřipravili a neznali základní středoškolské vzorce.

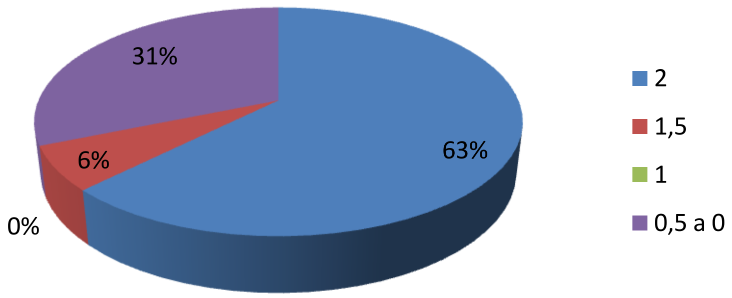


Graf 92: *Průměrný počet bodů za příklad* 5A *u jednotlivých oborů*

Obory, které zde zaváhaly, jsou F-BI, OPT a F-M.

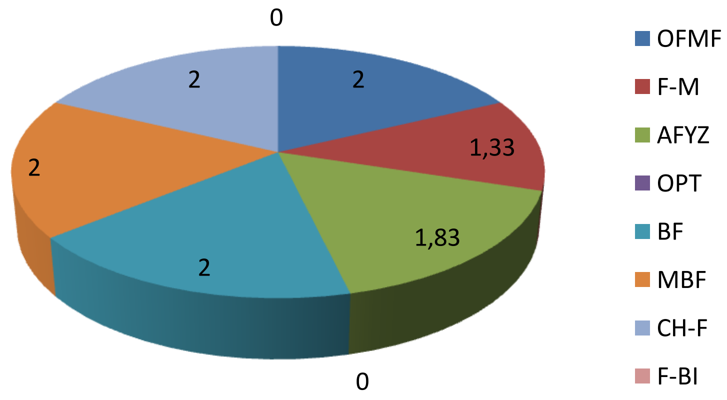
6. Plošný obsah desky kondenzátoru je $7{,}2\,\mathrm{dm}^2$ a tloušťka dielektrika je $2\,\mathrm{mm}$. Dielektrikum má relativní permitivitu $\varepsilon_\mathrm{r} = 2$. Určete kapacitu deskového kondenzátoru.

$$\mathrm{C} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} S}{d}\ \mathbf{(1)}\ = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 7{,}2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{6{,}372 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{F}}}\ \mathbf{(2)}$$



Graf 93: *Bodová úspěšnost v příkladu* 6A

Příklad 6A je středoškolským příkladem vyžadujícím pouhé dosazení do správného vzorce. Překvapivě však někteří studenti, kteří spočítali příklady 1 nebo 3 měli s tímto příkladem problém. Téměř třetina studentů zde neuspěla, což je velmi velká část. Tento neúspěch přisuzuji částečně nedostatečné přípravě na písemku, částečně pak tomu, že někteří studenti úspěšní při jiných o mnoho obtížnějších příkladech, se možná trochu nechali zmást jednoduchostí tohoto příkladu.



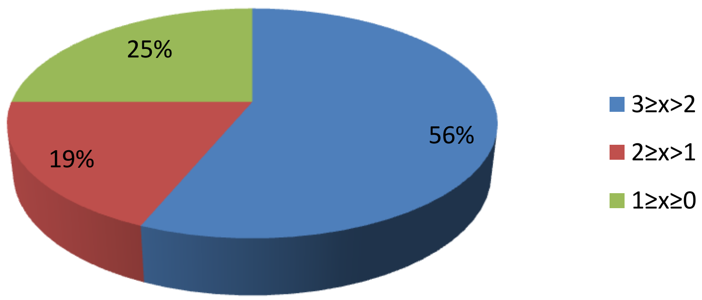
Graf 94: *Průměrný počet bodů za příklad* 6A *u jednotlivých oborů*

Zde pochybili studenti F-BI, OPT, F-M a AFYZ.

7. Dva kondenzátory o stejné kapacitě zapojíme jednou do série, potom paralelně. Rozdíl v kapacitách obou kombinací je $3\,\mu\mathrm{F}$. Určete kapacitu těchto kondenzátorů.

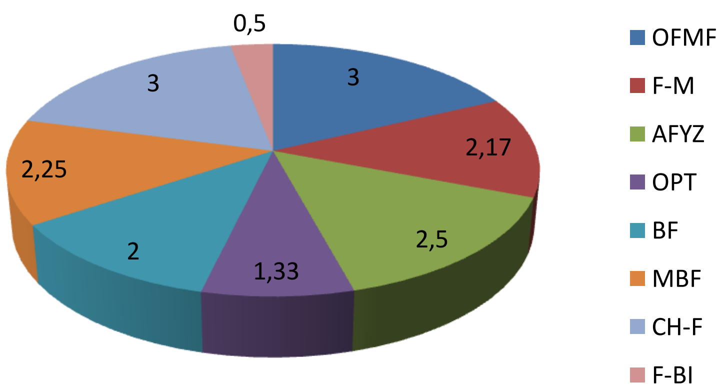
Paralelně: $C_P = C + C = 2C$ Sériově: $C_S = \frac{C^2}{2C} = \frac{C}{2}$ **(1)**

$$C_P - C_S = 2C - \frac{C}{2} = \frac{3}{2}C \Rightarrow C = \frac{2}{3}\left(C_P - C_S\right) \ \mathbf{(2)} = \frac{2}{3}\cdot 3 = \underline{\underline{2\,\mu\mathrm{F}}} \ \mathbf{(3)}$$



Graf 95: *Bodová úspěšnost v příkladu* 7A

V úloze 7A můžeme konečně vidět o něco vyrovnanější rozptyl počtu získaných bodů. Většina studentů tento příklad vyřešila správně. Častou chybou bylo obrácení čitatele a jmenovatele při vyjádření kapacity sériového zapojení kondenzátorů. Někteří studenti si totiž vyjádřili obrácenou hodnotu kapacity sériového zapojení a pak ji dosadili do rovnice na místo hodnoty kapacity sériového zapojení. Čtvrtina studentů buď nedokázali na základě rovnosti kapacit správně sestavit rovnici, anebo téměř nevěděli, o co v tomto příkladu jde a neznali základní vzorce.

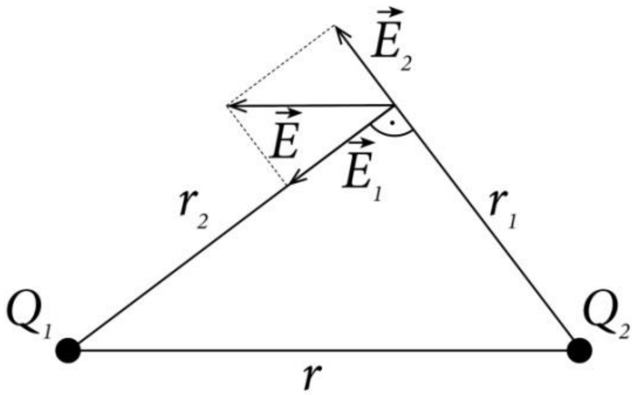


Graf 96: *Průměrný počet bodů za příklad* 7A *u jednotlivých oborů*

Bez chyby si počínali studenti OFMF a CH-F. Nejméně bodů dostaly opět studentky F-BI.

Skupina B

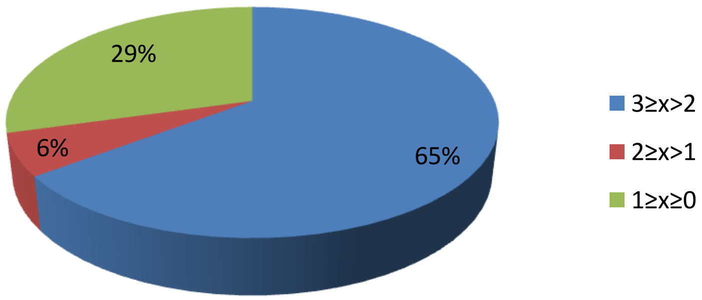
1. Určete elektrickou intenzitu pole v bodě, který je ve vzdálenosti $r_1 = 0{,}4\,\mathrm{m}$ od náboje $Q_1 = -4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}$ a $r_2 = 0{,}3\,\mathrm{m}$ od náboje $Q_2 = 5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}$, je-li vzájemná vzdálenost nábojů $r = 0{,}5\,\mathrm{m}$.



Obr. 42

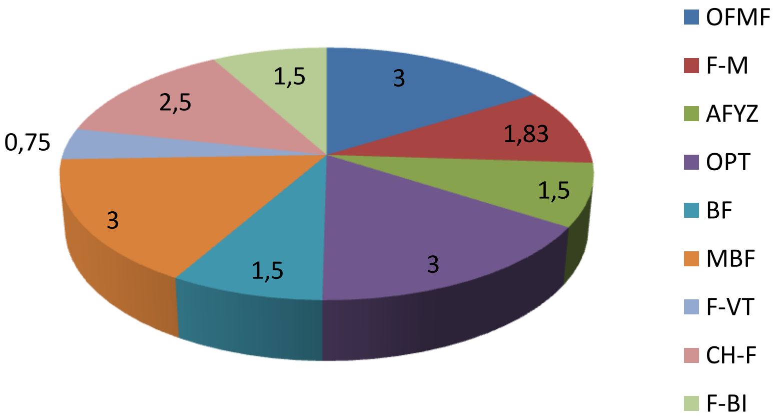
$$E_2 = k\frac{Q_2}{r_2^{\ 2}} = 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-7}}{9 \cdot 10^{-2}} = 5 \cdot 10^4\ \mathrm{N \cdot C^{-1}} \qquad E_1 = k\frac{Q_1}{r_1^{\ 2}} = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-7}}{16 \cdot 10^{-2}} = \frac{9}{4} 10^4\ \mathrm{N \cdot C^{-1}}\ \textbf{(1)}$$

$$E = \sqrt{E_1^{\ 2} + E_2^{\ 2}}\ \textbf{(2)} = \sqrt{\frac{81}{16} \cdot 10^8 + 25 \cdot 10^8} = \underline{\underline{5{,}48 \cdot 10^4\ \mathrm{N \cdot C^{-1}}}}\ \textbf{(3)}$$



Graf 97: *Bodová úspěšnost v příkladu* 1B

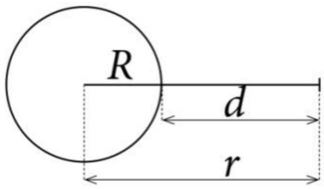
Bodové výsledky příkladu 1B jsou srovnatelné s výsledky příkladu 4A. U tohoto příkladu o něco více studentů nevědělo vůbec jak postupovat, a to téměř třetina.



Graf 98: *Průměrný počet bodů za příklad* 1B *u jednotlivých oborů*

Nejhoršího výsledku zde dosáhl obor F-VT, nejlepšího pak studenti MBF, OFMF a OPT.

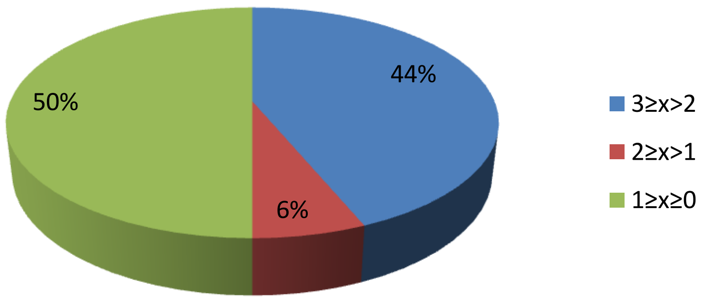
2. Jak velký je potenciál ve vzdálenosti $d = 10\,\text{cm}$ od povrchu koule o poloměru $R = 5\,\text{cm}$, je-li koule nabita nábojem $2 \cdot 10^{-7}\ \text{C}$?



Obr. 43

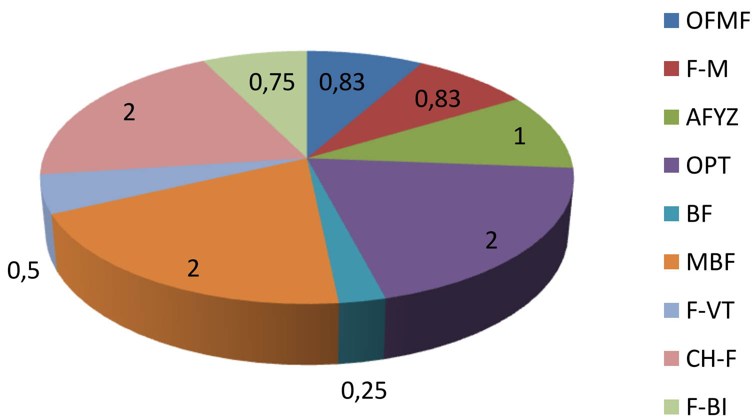
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = k\frac{Q}{R+d} \quad \textbf{(1)} \quad =$$

$$= 9 \cdot 10^{9} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-7}}{(5+10) \cdot 10^{-2}} = \underline{\underline{1{,}2 \cdot 10^{4}\ \text{V}}} \quad \textbf{(2)}$$



Graf 99: *Bodová úspěšnost v příkladu* 2B

V úloze 2 bylo třeba znát to, že pří výpočtu potenciálu nabité koule postupujeme obdobně jako u výpočtu potenciálu v okolí bodového náboje, jenž leží ve středu této koule. Ukázalo se, že polovina studentů to nevěděla. Tento na první pohled jednoduchý příklad vyřešilo správně méně než například příklad 1A, u tohoto bylo úspěšných řešitelů 66 % studentů.

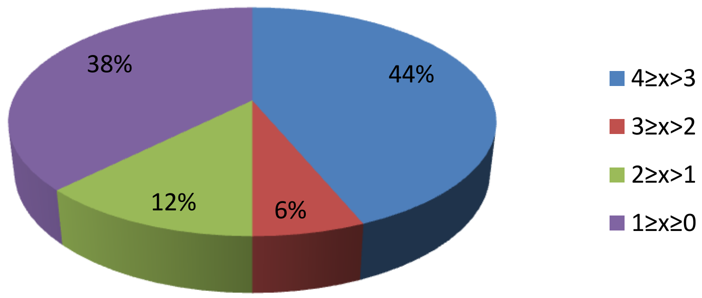


Graf 100: *Průměrný počet bodů za příklad* 2B *u jednotlivých oborů*

S příkladem si vůbec nevěděli rady studenti BF, F-VT, F-BI. Body zde naopak neztratily obory OPT, MBF, CH-F.

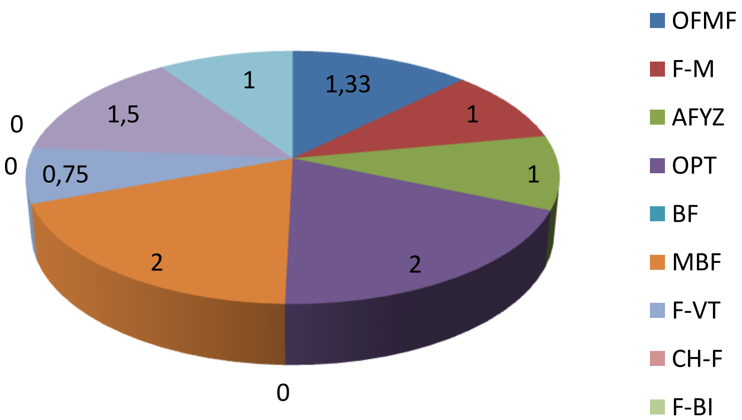
3. Jaká musí být plocha polepů rovinného kondenzátoru s izolační skleněnou vrstvou tloušťky $1\,\mathrm{mm}$, aby kapacita kondenzátoru byla $150\,\mathrm{pF}$? ($\varepsilon_\mathrm{r} = 7$)

$$\mathrm{C} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} S}{d}\ \textbf{(1)}\ \Rightarrow S = \frac{Cd}{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}} = \frac{150 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 7} = 2{,}4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2 = \underline{\underline{24\,\mathrm{cm}^2}}\ \textbf{(2)}$$



Graf 101: *Bodová úspěšnost v příkladu* 3B

Příklad 3B překvapivě nedopadl příliš příznivě. 38 % studentů získalo bod nebo méně. Tento výsledek může být zapříčiněn přílišnou koncentrací studentů na obtížnější úlohy, kdežto na tuto úlohu se studenti buďto nepřipravili, anebo hledali v úloze neexistující obtížnost.



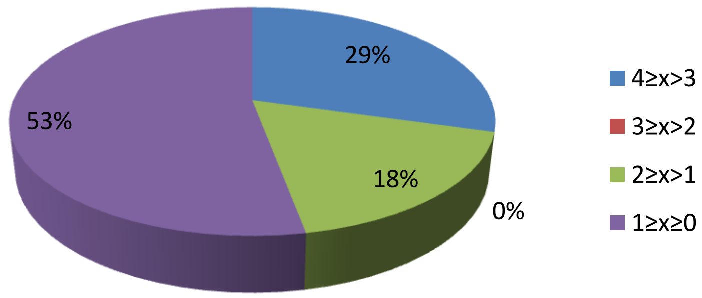
Graf 102: *Průměrný počet bodů za příklad* 3B *u jednotlivých oborů*

V tomto jednoduchém příkladě nepochybili studenti OPT a MBF, naopak neobodováni byli studenti CH-F a F-BI. Ani studenti F-M, AFYZ a OFMF však dostatečně nezabodovali, myslím si, že jejich neúspěch mohl být zapříčiněn právě faktorem, uvedeným výše u grafu 101.

4. Dielektrikum mezi deskami kondenzátoru se skládá ze dvou vrstev. První tvoří vzduch tloušťky $0{,}4\,\mathrm{mm}$, druhou plexisklo o tloušťce $2\,\mathrm{mm}$, jehož relativní permitivita je $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 3{,}4$. Určete kapacitu kondenzátoru, je-li plošný obsah jedné desky $2\,\mathrm{dm}^2$.

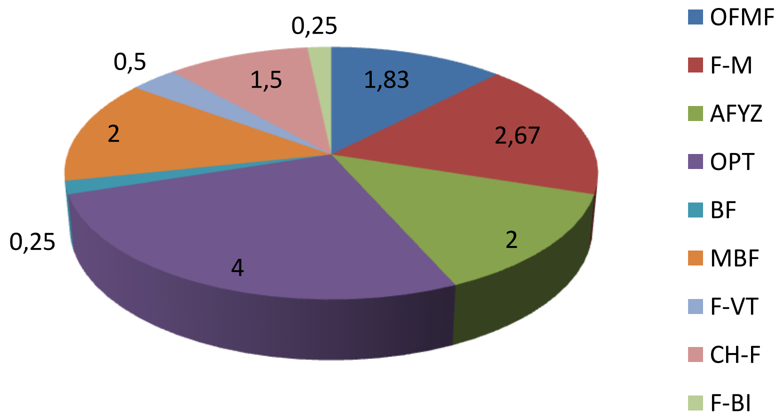
$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_1} \qquad C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d_2} \quad \textbf{(2)} \qquad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 \frac{S}{d_1} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d_2}}{\varepsilon_0 \frac{S}{d_1} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d_2}} \quad \textbf{(3)} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d_1 d_2}}{\frac{1}{d_1} + \frac{\varepsilon_r}{d_2}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d_2 + d_1 \varepsilon_r} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}4 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3} + 0{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}4} = 1{,}79 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{F} = \underline{\underline{179\ \mathrm{pF}}} \quad \textbf{(4)}$$



Graf 103: *Bodová úspěšnost v příkladu* 4B

Příklad 4B dle očekávání působil poměrně velké problémy. Asi polovina studentů uvedla pouze obecný vzorec pro kapacitu deskového kondenzátoru, asi 18 % studentů pak dokázalo uvést postup příkladu s chybou takovou, že následně spojilo kondenzátory paralelně. 29 % studentů zde chybovalo pouze minimálně.



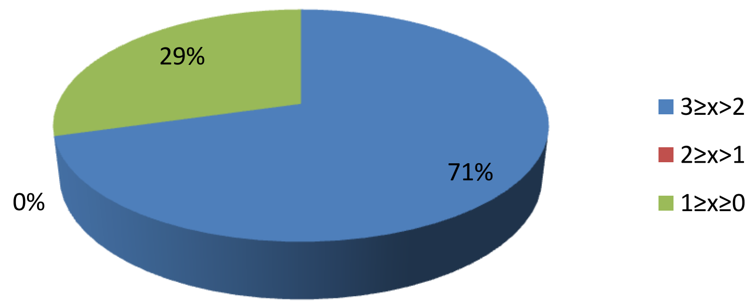
Graf 104: *Průměrný počet bodů za příklad* 4B *u jednotlivých oborů*

U tohoto příkladu nechyboval ani jeden student OPT, naopak největší problém příklad představoval pro obory BF, F-BI, F-VT.

5. V Bohrově modelu atomu vodíku obíhá elektron po kruhové dráze kolem protonu. Je-li poloměr dráhy $r_1 = 5{,}28 \cdot 10^{-11}$ m, vypočtěte rychlost elektronu.

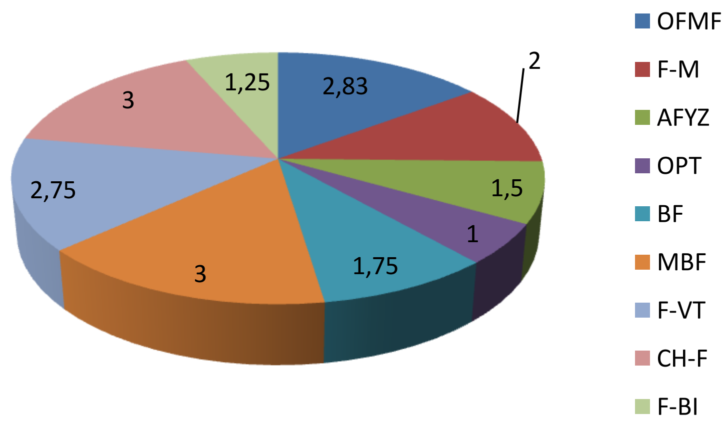
$$F = k\frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \textbf{(1)} \quad \Rightarrow v^2 = \frac{kr^2}{mr} \Rightarrow v = e\sqrt{\frac{k}{mr}} \quad \textbf{(2)}$$

$$e\sqrt{\frac{k}{mr}} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 5{,}28 \cdot 10^{-11}}} = \underline{\underline{2{,}2 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}} \quad \textbf{(3)}$$



Graf 105: *Bodová úspěšnost v příkladu* 5B

Poněkud překvapivě se sestavením dvou rovnic a odvozením hledané rychlosti neměli studenti přílišné problémy. 71 % studentů ztratilo maximálně půl bodu.



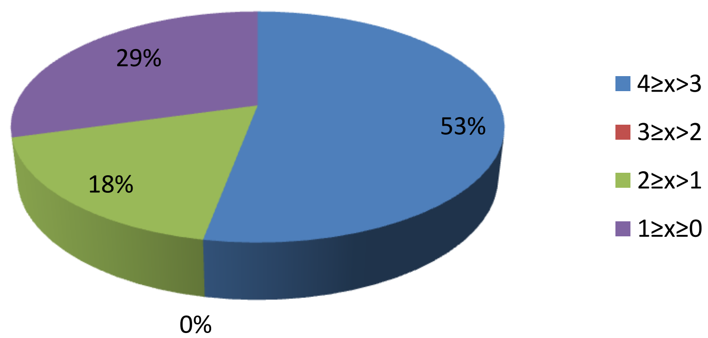
Graf 106: *Průměrný počet bodů za příklad* 5B *u jednotlivých oborů*

V příkladu 5B měli největší problémy překvapivě studenti OPT, nejlépe příklad napsali studenti CH-F a MBF.

6. Dva stejné bodové náboje $2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ působí na sebe ve vzduchu silou $4\,\mathrm{N}$. Ponoříme-li je do oleje, síla působící mezi nimi bude $1\,\mathrm{N}$. Jaká je vzdálenost náboje, a jaká je relativní permitivita oleje?

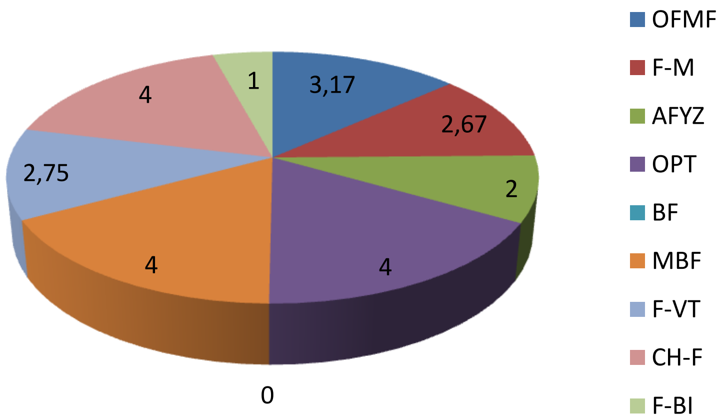
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}\ \textbf{(1)} \Rightarrow r = \frac{Q}{2\sqrt{\pi\varepsilon_0 F}} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot \sqrt{3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 4}} = \underline{\underline{0{,}095\,\mathrm{m}}}\ \textbf{(2)}$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{F'r^2}\ \textbf{(1)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{F'}\frac{4\pi\varepsilon_0 F}{Q^2} = \frac{F}{F'} = \frac{4}{1} = \underline{\underline{4}}\ \textbf{(2)}$$



Graf 107: *Bodová úspěšnost v příkladu* 6B

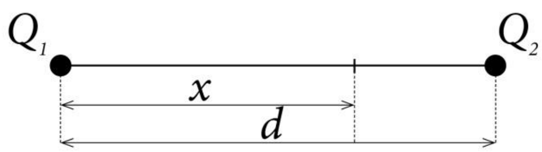
Tento středoškolský příklad, složený ze dvou částí bodovaných po dvou bodech, studentům nadělal vzhledem ke své nenáročnosti poměrně velké problémy. (Bodování popsané na stranách 109 dole a 110 zde platí při rozdělení příkladu na dvě části, a to výpočet poloměru a relativní permitivity.)



Graf 108: *Průměrný počet bodů za příklad* 6B *u jednotlivých oborů*

U tohoto složeného příkladu nechybovali studenti OPT, MBF a CH-F. Nejméně bodů získali studenti F-BI.

7. Dva náboje $Q_2 = 4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ a $Q_1 = 8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ jsou ve vzájemné vzdálenosti $d = 24\,\mathrm{cm}$ od sebe. Ve kterém bodě na jejich spojnici budou potenciály buzené oběma náboji stejné?



Obr. 44

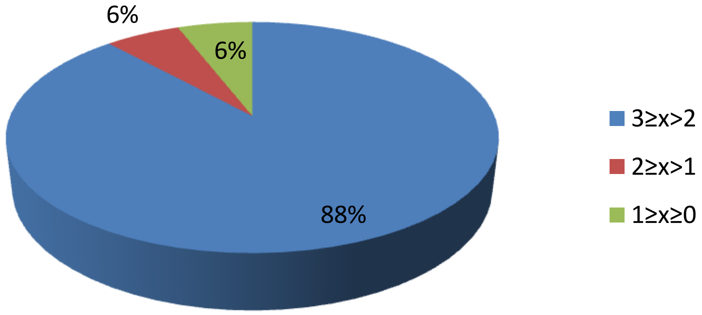
$\varphi_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1}{x}$ $\qquad \varphi_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_2}{d-x}$ **(1)**

$$\frac{Q_1}{x} = \frac{Q_2}{d-x}$$

$$dQ_1 - xQ_1 = xQ_2$$

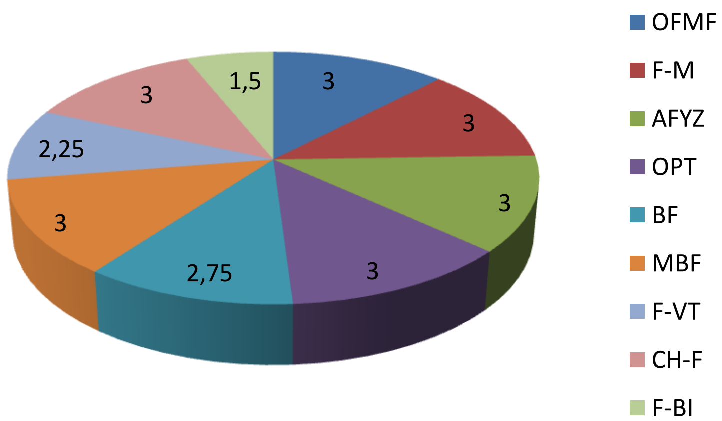
$dQ_1 = x(Q_1 + Q_2) \Rightarrow x = \dfrac{Q_1 d}{Q_1 + Q_2}$ **(2)** $= \dfrac{8 \cdot 10^{-6} \cdot 24 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{16 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}}$

Potenciály buzené oběma náboji budou stejné ve vzdálenosti 16 cm od náboje *Q₁* na spojnici obou nábojů. **(3)**



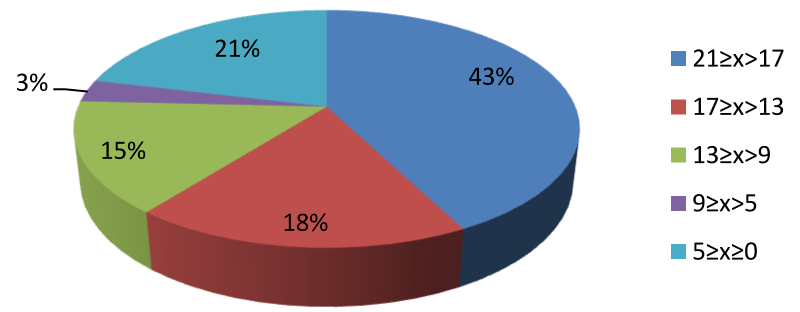
Graf 109: *Bodová úspěšnost v příkladu* 7B

Překvapivě tento příklad nebyl pro studenty obtížný. Téměř všichni studenti získali více než dva body.



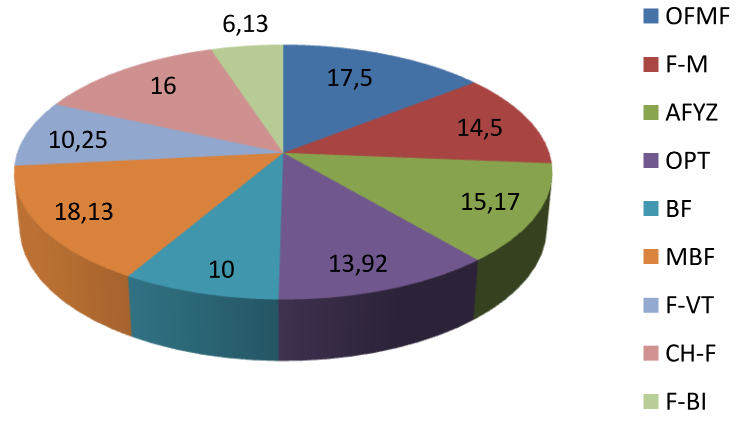
Graf 110: *Průměrný počet bodů za příklad* 7B *u jednotlivých oborů*

V příkladu 7B byly úspěšné skoro všechny obory. Chybovali pouze studenti BF a učitelským oborů F-BI a F-VT.



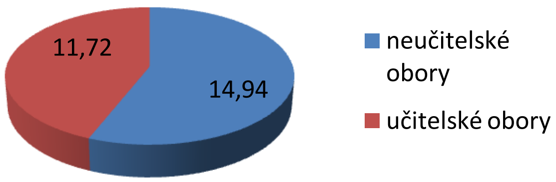
Graf 111: *Poměr bodové úspěšnosti studentů*

Nejvíce studentů, a to 43 % získalo více než 17 bodů. 18 % studentů získalo více než 13 a méně než 17 bodů nebo 17 bodů. 15 % studentů se svým obodováním pohybovalo kolem poloviny získaných bodů a 24 % studentů se na písemku nepřipravilo a získalo devět a méně bodů.



Graf 112: *Průměrný počet bodů za písemku u jednotlivých studijních oborů*

Z grafu 112 je patrné, že písemku nejhůře napsaly obory F-BI, BF. Nejlépe naopak písemku napsali studenti MBF a OFMF. Zajímavý je velký rozdíl u oborů BF a MBF, které se zdají být příbuzné a dále je zajímavý výsledek studentů CH-F, kteří písemku napsali o mnoho lépe než učitelské obory F-BI, F-VT a dokonce i F-M. Nutno podotknout, že statistiku studentům učitelského oboru F-M ovlivnil student MV-F, jehož jsem připočetl ke studentům F-M.



Graf 113: *Průměrný počet bodů učitelských a neučitelských oborů*

Překvapivě mezi průměrným obodováním učitelských a neučitelských oborů není přílišný rozdíl, a to jen 3,22 bodu.

Někteří jednotliví studenti se sice na písemku nepřipravili, nicméně obecně vzato si myslím, že bakalářští studenti fyziky prokázali dobrou schopnost řešit příklady z elektrostatiky. Překvapili mě hlavně studenti, kteří byli schopni řešit bezchybně příklady jako 3A nebo 4B, navíc bylo často jejich řešení zcela bezchybné po formální stránce. Byl obecně odvozen vzorec pro výpočet výsledku, následně bylo dosazeno a byl proveden výpočet. O některých studentech se však toto říci nedá. Dokonce studenti učitelství fyziky někdy počítali formálně špatně a v číselných počtech se pak někdy zamotali. Za tento špatný postup sice nebyly strhávány body, nicméně v případě opravy většího množství písemek bych za tento postup body strhával, protože obtížnost opravování písemek napsaných s různou formální úrovní je diametrálně odlišná. Stojí však za to uvážit, zda by pro příště nebylo vhodné sestavit pro bakaláře písemku o něco obtížnější, také s úlohami typicky vysokoškolskými. Bylo by to pro studenty sice náročnější, na druhou stranu z dlouhodobého hlediska přínosnější.

ZÁVĚR

Má práce uvádí výčet příkladů, které mohou pomoci studentům nebo učitelům středních a vysokých škol. Příklady jsou vybrány tak, aby jednak pokrývaly široké spektrum učiva elektřiny a magnetismu, a jednak aby řešení u těchto příkladů bylo pro jejich řešitele svým způsobem zajímavé.

Další část práce se věnuje průzkumu schopností studentů řešit příklady z elektřiny a magnetismu. Bylo zjištěno, že studentů středních škol, kteří mají zájem o fyziku, není příliš mnoho. Také studentů, kteří se dokázali vypořádat s náročnou písemkou pro středoškoláky, nebylo veliké množství, avšak našli se také takoví, kteří prokázali svou schopnost řešení příkladů a orientaci v elektřině a magnetismu. Myslím si, že takoví studenti jsou budoucností pro fyziku v České Republice. Výzkum má informativní charakter toho, jaký vliv měly na řešení příkladů faktory jak používání tabulek, či možnost přípravy. Studenti fyzikálního semináře, kteří se na písemku nepřipravovali a měli k dispozici tabulky, dosáhli obodování patrného v grafu 75. Studenti gymnázia, kteří měli možnost týdenní přípravy a neměli k dispozici tabulky, získali počty bodů uvedené v grafu 76 a studenti, kteří měli možnost se pět dnů na písemku připravovat a měli také u písemky k dispozici tabulky, byli obodováni dle grafu 77. U studentů fyzikálního semináře je patrné, že drtivá většina studentů získala obodování ležící minimálně ve středním bodovém intervalu, což je vzhledem k zájmu studentů o fyziku pochopitelné, také je přirozené, že ne příliš velká část studentů fyzikálního semináře byla ohodnocena počtem bodů ležícím v nejvyšším bodovém intervalu, neboť se studenti na tuto písemku nepřipravovali. U studentů, kteří se připravovali, ale nepoužívali tabulky, vidíme poměrně drtivý dopad absence některých vzorců, který vyústil v to, že 31 studentů nebylo schopných získat více než 13 z 32 bodů. Studenti, kteří používali tabulky a měli možnost se na písemku připravit, získali o něco lepší výsledek než studenti fyzikálního semináře. Více než 19,5 bodu získalo 23 studentů, méně než 13,5 bodu získali pouze 3 studenti a ostatní studenti získali bodové ohodnocení ležící ve středním bodovém intervalu. Souhrnně písemky dopadly průměrně, jak je to patrné v grafu 78. Vzhledem k časové a objemové náročnosti této písemky hodnotím výsledek v grafu 78 jako mírně pozitivní, v porovnání s mým očekáváním. Co se však týče budoucnosti fyziky na středních školách, bylo zjištěno, že minimálně v oblasti příkladů z elektřiny a magnetismu je mnoho co zlepšovat. Bylo zjištěno, že studovat fyziku by chtěli pouze čtyři ze 135 studentů, 22 ze 135 studentů je pak těch, kteří chtějí studovat obor, ve kterém fyzika figuruje jako jeden z hlavních předmětů a 42 ze 135 studentů by chtěli studovat obor, ve kterém je fyzika okrajový předmět, jak je patrné v grafu 79.

U studentů předmětu elektřina a magnetismus na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci jsou souhrnné výsledky písemek patrné v grafech 111 a 112. 61% studentů bylo ohodnoceno více než 13 z 21 bodů, asi čtvrtina studentů získala méně než 9,5 bodu z celkových 21 bodů. Nejúspěšnější byli studenti oborů MBF, OFMF a CH-F, naopak nejhůře byli obodováni studenti oborů F-BI, BF a M-VT. Rozdíl mezi průměrným obodováním studentů učitelských a neučitelských oborů byl asi 3 body.

Souhrnné statistiky předcházejí statistiky úspěšnosti u jednotlivých úloh. Věřím, že jak tyto úlohy, tak také průzkum toho, jak která úloha byla pro studenty obtížná, může být přínosný ať pro studenty, mající zájem o rozšíření svých znalostí v této oblasti, tak také pro učitele, jakožto materiál inspirující ke zkvalitnění jejich výuky.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

[1] RUBEŠ, Zdeněk a Jaroslava VESECKÁ. *Sbírka úloh z fyziky*. 3., nezměn. vyd. Praha: Karolinum, 2011, 138 s. ISBN 978-80-246-1935-4.

[2] MIKLASOVÁ, Věra. *Sbírka úloh z fyziky pro SOŠ a SOU*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2009, 298 s. ISBN 978-80-7196-377-6.

[3] LEPIL, Oldřich. *Fyzika*: *sbírka úloh pro střední školy*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2000, 269 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6204-X.

[4] KUBÍNEK, Roman a Hana KOLÁŘOVÁ. *Fyzika v příkladech a testových otázkách pro uchazeče o studium na VŠ*. 1. vyd. Olomouc: Rubico, 1996, 211 s. ISBN 80-858-3907-5.

[5] BARTUŠKA, Karel. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 215 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6035-7.

[6] *Sbírka řešených úloh z fyziky*: *Elektřina a magnetismus* [online]. [cit. 2012-04-18]. Dostupné z: http://fyzikalniulohy.cz/

[7] *Fyzikální webové stránky - webFyzika*: *Elektřina a magnetismus* [online]. [cit. 2012-04-18]. Dostupné z: http://webfyzika.fsv.cvut.cz/2elmg.htm

[8] *Sbírka příkladů z elektřiny a magnetismu* [online]. [cit. 2012-04-18]. Dostupné z: http://fyzika.upol.cz/cs/system/files/download/vujtek/texty/emg_sbirka.pdf

[9] SMÉKAL, Petr. *Elektřina a magnetismus: řešené příklady a cvičení*. 1. vyd. Ostrava: Pedagogická fakulta, 1983, 252 s.

[10] TIRPÁK, Andrej. *Elektrina a magnetismus*: *úlohy k cvičeniam*. 1. vyd. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, 1991, 352 s. ISBN 80-223-0359-3.

[11] STRELKOV, S.P., I.A. ELCIN a I.A. JAKOVLEV. *Sbírka příkladů z fysiky*. 1. vyd. Praha: Nakladatelství Československé Akademie Věd, 1953, 276 s.

[12] LIMPOUCHOVÁ, Zuzana. *Elektřina, magnetismus a optika*: *sbírka příkladů*. 1. vyd. Praha: Karolinum, 1999, 138 s. ISBN 382-161-68.

[13] PROKEŠ, Vladimír. *Sbírka příkladů z obecné fyziky II*: *Elektřina a magnetismus*. 2. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1992, 100 s. ISBN 80-210-0383-9.

[14] TULKA, Jiří. *Výpočtové úlohy z fyziky*. 2. vyd. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2005, 50 s. ISBN ISBN 80-7194-770-9.

[15] LYSENKO, Vladimír. *Elektřina a magnetismus*. Vyd. 1. Ostrava: Ostravská univerzita, 2003, 2 s. Systém celoživotního vzdělávání Moravskoslezska. ISBN 80-7042-880-52.

[16] LEPIL, Oldřich a Přemysl ŠEDIVÝ. *Fyzika pro gymnázia*: *Elektřina a magnetismus*. 6. vyd., dotisk. Praha: Prometheus, 2011, 342 s. ISBN 978-807-1963-851.

[17] KUBÍNEK, Roman. Osobní výukové materiály pro cvičení z elektřiny a magnetismu.

[18] ZÁHEJSKÝ, Jiří. *Elektřina a magnetismus*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2002, 236 s. ISBN 80-244-0482-6.

[19] MIKULČÁK, Jiří. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, c2003, 276 s. ISBN 80-719-6264-3.