Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Integrály a diferenciální rovnice v aplikačních úlohách - sbírka řešených příkladů

Vypracoval: Bc. Miroslav Holub
Vedoucí práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice 2020

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Integrály a diferenciální rovnice v aplikačních úlohách - sbírka řešených příkladů jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 9. července 2020

....

Miroslav Holub

Anotace

Hlavním tématem diplomové práce je vytvoření sbírky vybraných řešených zajímavých úloh určených pro rozšiřující výuku seminářů matematiky na středních školách, případně jako doplňková literatura studentům rozličných oborů vysokých škol.

První část pojednává o možnostech aplikací integrálního počtu v úlohách z běžné praxe. Specifická témata některých úloh jsou využitelná i v oblastech odborných kruhů.

Druhá část práce se zaměřuje na matematicky řešené úlohy, jejichž předlohou jsou výjimečné nastalé okolnosti z běžného života. Cílem každého příkladu je sestavení obyčejné diferenciální rovnice, stanovení počátečních podmínek, dořešení rovnice a konfrontace se zadáním úlohy.

Annotation

The main topic of the Thesis is the creation of a collection of selected solved interesting tasks intended for expanding the teaching of mathematics seminars at secondary schools, or as supplementary literature for students of various fields of university.

The first part deals with the possibilities of applications of integral calculus in problems from common practice. Specific topics of some tasks can also be used in areas of professional circles.

The second part of the Thesis focuses on mathematically solved problems, based on exceptional circumstances from everyday life. The goal of each example is to compile an ODE, determine the initial conditions, solve the equation and confront the task.

Poděkování
Děkuji vedoucí své diplomové práce, paní RNDr. Libuši Samkové, Ph.D., za poskytované odborné rady a za čas, který mi věnovala během psaní práce a konzultací.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Moderní doba se společností vyspělou v mnoha oblastech před nás staví nejrůznější úkoly. Zároveň vzniká potřeba hledat odpovědi na otázky řešící důsledky pokrokového způsobu života. Leckteré situace se pro laiky mohou stát neřešitelnými. Mnoho z nich však s využitím dávno objevených pravidel a zákonitostí matematiky vyřešit dokážeme.

Prvotním impulzem pro výběr námětu této práce se stala moje záliba v detektivních příbězích. Inspirovaly mě vyobrazené myšlenkové pochody kriminalistů i odborné metody, kterými se snaží případy vyřešit. Jejich úvahy mě přivedly k myšlence rozvinout objasnění detektivního případu matematickou cestou, která v žádné z detektivních knih popsána není.

Problematika životních situací, které můžeme popsat matematicky a najít jejich matematické řešení, se stala podkladem pro téma této diplomové práce. Velkou inspirací pro volbu příkladů byl i kurz Diferenciálních rovnic.

Cílem diplomové práce je vytvořit sbírku řešených příkladů z integrálního počtu a diferenciálních rovnic. Výběr zadání příkladů se řídí hlavně zajímavostí postupů řešení. Diplomová práce si neklade za cíl vytvoření ucelené učebnice s výkladem teorie, ale spíše praktickou sbírku vybraných zajímavých příkladů a možných způsobů jejich řešení.

Stěžejními částmi práce jsou dvě kapitoly. V Kapitole 2 je prezentována řada zajímavých příkladů využívajících při řešení integrálního počtu a jeho aplikací. V této kapitole jsou spočítány integrály pomocí substitučních metod, pomocí metody per partes a integrály, které vedou ke známým vzorcům pro objem a obsah některých geometrických útvarů. Kapitola 3 se zaměřuje na úlohy z aplikací obyčejných diferenciálních rovnic. Jsou v ní studovány slovní úlohy z různých životních situací, jejichž matematická formulace vede na počáteční úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu. Tyto rovnice jsou následně řešeny známými prostředky diferenciálního a integrálního počtu. Řešení většiny úloh je doplněno obrázkem s grafem znázorňujícím danou situaci.

Předpokladem k porozumění úloh nabízených v této sbírce je znalost základů integrálního počtu podle Daněčka (2006), Mayerové (2006), Samkové (2011). Předchozí osvojení si postupů diferenciálního počtu, obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu a jejich počátečních úloh v rozsahu popsaném Edwardsem (2008), Krajcem (2012), Kurzweilem (1978) je klíčem k úspěšnému dořešení úloh vytvořených pro tuto sbírku. Vzhledem k typům aplikací slovních úloh v Kapitole 3 předpokládáme dále u čtenáře sbírky logický úsudek a schopnost sestavit ze zadání ve finále mnohdy jednoduchou diferenciální rovnici, jejíž řešení je pak pouhým rutinním postupem známým z kurzu o Diferenciálních rovnicích.

Nalézti příklady, které přesně kopírují situace z reálného života a jsou zároveň spočitatelné, je poměrně obtížným úkolem. Pro potřeby práce jsou tedy některé příklady upraveny tak, abychom mohli dospět k jejich matematickému řešení, ale přitom tak, aby neztratily úzkou provázanost s reálnou situací.

Předkládaná práce může posloužit jako rozšiřující sbírka námětů pro učitele zabývající se touto oblastí matematiky nebo studentům prohlubujícím si své základní znalosti tématu a dalším zájemcům z řad odborné veřejnosti.

Práce byla vysázena systémem LaTeX, obrázky nakresleny programem GeoGebra.

Kapitola 2

Aplikační úlohy řešené pomocí integrálů

V této kapitole budeme řešit praktické úlohy vedoucí na výpočet integrálu. K jejich řešení budeme využívat známých metod integračního počtu. Jde především o integraci metodou per partes a pomocí metody substituce. Pro tyto metody je nezbytná platnost následujících vět převzatých z Mayerové (2006).

Pro neurčitý integrál

(Metoda per partes.) Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu I. Pak platí

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

pokud aspoň jeden z integrálů v předchozím vzahu existuje.

(Metoda substituce.) Nechť funkce $f(u)$ má na otevřeném intervalu J primitivní funkci $F(u)$, funkce $\varphi(x)$ má derivaci na otevřeném intervalu I a pro libovolné $x \in I$ je $\varphi(x) \in J$. Pak má složená funkce $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ na intervalu I primitivní funkci a platí

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F[\varphi(x)] + c.$$

V levém integrálu rovnosti nahradíme za funki $\varphi(x)$ proměnnou u a za výraz $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ diferenciál $\mathrm{d}u$. Můžeme tedy psát

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \varphi(x) = u \\ \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int f(u)\,\mathrm{d}u,$$

kde do výsledné pravé strany musíme dosadit původní proměnnou,
tj. $u = \varphi(x)$.

Pro určitý integrál

(Metoda per partes.) Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají na intervalu $< a, b >$, $a < b$, derivace $u'(x)$ a $v'(x)$, které jsou na tomto intervalu integrovatelné. Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Metoda substituce.) Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu $< a, b >$, $a < b$. Nechť funkce $\varphi(x)$ má derivaci $\varphi'(x)$ na intervalu $< \alpha, \beta >$, $\alpha < \beta$, která je na tomto intervalu integrovatelná. Dále nechť platí $a \leq \varphi(x) \leq b$ pro $x \in < \alpha, \beta >$ (tedy φ zobrazuje interval $< \alpha, \beta >$ do intervalu $< a, b >$). Pak platí, že

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(Mayerová, 2006)

Dodejme, že splnění předpokladů těchto vět bylo u všech uvedených příkladů ověřeno. Tuto skutečnost již u každého příladu zvlášť neopakujeme.

Zdůrazněme, že všechny funkce jsou na uvažovaných integračních oborech spojité a omezené, proto integrály existují a jsou konečné. Funkce jsou na těchto intervalech spojitě diferencovatelné, proto lze metodu per partes použít. Substituční funkce jsou na uvažovaných intervalech ryze monotónní, diferencovatelné a proto korektní pro věty o substituci.

2.1 Obsah plochy pod křivkou

Příklad 2.1.1 *Záhon připomínající obdélník má délku 9 m a šířku popsanou funkcí* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$. *Kolik konví vody na jeho rovnoměrné zalití spotřebujeme, když víme, že jedna konev nám vystačí na 1,4* m^2*?*

Inspirováno (Štěpánková, 2014)

Řešení:

Nejprve zjistíme plochu pozemku S, což je určitý integrál $\displaystyle\int_0^9 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}\,\mathrm{d}x$.

$$S = \int_0^9 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{x} \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \\ 0 \mapsto 0 \\ 9 \mapsto 3 \end{array} \right| = \int_0^3 \frac{t+1}{t+2} \cdot 2t\,\mathrm{d}t$$

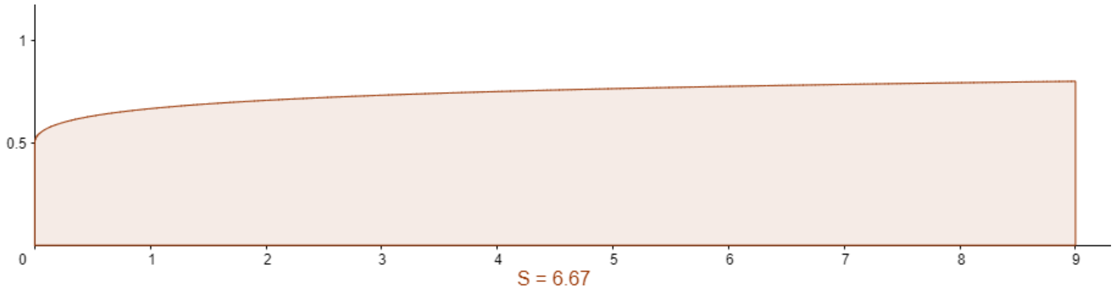
po vydělení zlomků dostaneme

$$\begin{aligned}
&= 2\left(\int_0^3 t - 1\,\mathrm{d}t + 2\int_0^3 \frac{1}{t+2}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= 2\left[\frac{t^2}{2} - t\right]_0^3 + 4\left[\ln|t+2|\right]_0^3 \\
&= 2\left(\frac{9}{2} - 3 - 0 + 0\right) + 4\ln 5 - 4\ln 2 \\
&= 2 \cdot \frac{3}{2} + 4\ln\frac{5}{2} \\
&= 3 + 4\ln\frac{5}{2} \doteq 6,67.
\end{aligned}$$

Plocha pozemku je asi $S = 6,67\, m^2$. Na její zalití budeme potřebovat

$$\frac{6,67}{1,4} \doteq 4,76.$$

Na zalití záhonku je potřeba asi 5 konví. $\triangle$



Obrázek 2.1: Záhonek; Archiv autora

Příklad 2.1.2 *Je potřeba zrestaurovat víko cembala. Jaká bude celková cena opravy, účtuje-li si restaurátor* 150 *Kč za 1 dm*^{2}*. Výška víka je dána funkcí* $f(x) = \dfrac{1}{1+3\cos^2 x}$ *a šířka je* $\dfrac{\pi}{2}$ *m.*

Inspirováno (Daněček, 2006)

<u>*Řešení:*</u>

Plocha víka je určitý integrál $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \tan x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ 0 \mapsto 0 \\ \frac{\pi}{2} \mapsto +\infty \end{array} \right| = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{1+t^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2+3}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{1}{4+t^2}\,\mathrm{d}t$$

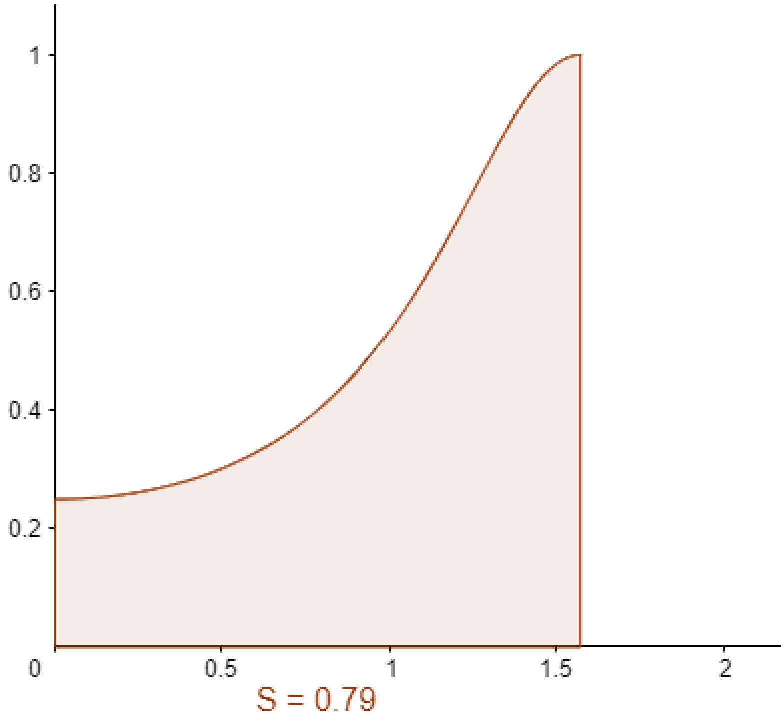
$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{4(1+(\frac{t}{2})^2)}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} u = \frac{t}{2} \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ 2u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ 0 \mapsto 0 \\ \infty \mapsto \infty \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2} 2\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\left[\arctan u\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Plocha víka je $S = \dfrac{\pi}{4} \doteq 0{,}79\,\mathrm{m}^2 = 79\,\mathrm{dm}^2$. To odpovídá ceně $79 \cdot 150 = 11850$ Kč.

Za restauraci víka zaplatíme 11850 Kč. $\triangle$



Obrázek 2.2: Víko cembala; Archiv autora

Příklad 2.1.3 *V divadle mají kulisu, kterou je potřeba natřít. Jedna strana bude zelená, druhá modrá. Kulisa je popsána grafem funkce* $f(x) = \dfrac{1}{1+3\cos^2 x}$ *na intervalu* $(0, \pi)$*. Jednotková cena modré barvy je 180 Kč za m*^{2} *a cena zelené barvy je 160 Kč za m*^{2}*. Tloušťku kulisy zanedbáváme. Kolik Kč zaplatíme za její natření?*

Inspirováno (Daněček, 2006)

<u>*Řešení:*</u>

Zjistíme plochu jedné strany kulisy. Ta je dána jako určitý integrál

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x} dx.$$

Určitý integrál je podobný integrálu z Příkladu 2.1.2, který má jen jinou horní mez. Vzhledem k symetrii funkce $f(x) = \cos^2 x$ můžeme psát

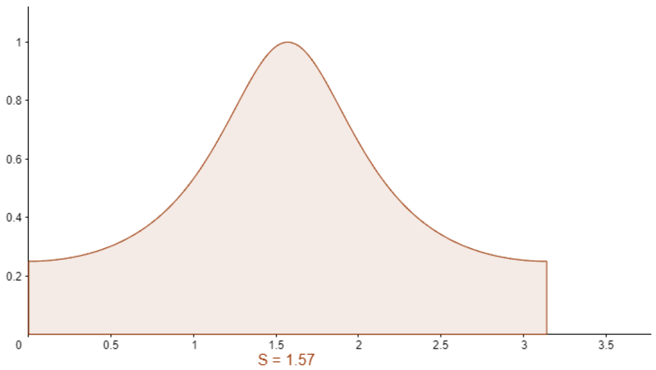
$$S = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Plocha jedné strany kulisy je $S = \frac{\pi}{2} \doteq 1,57\,\mathrm{m}^2$.

Zelená půlka bude stát $1,57 \cdot 160 = 251,2$ Kč a modrá půlka bude stát $1,57 \cdot 180 = 282,6$ Kč, dohromady

$$251,2 + 282,6 = 533,8.$$

Za natření celé kulisy zaplatíme 534 Kč. △



Obrázek 2.3: Kulisa; Archiv autora

Příklad 2.1.4 *Stojna pod U-rampu je dána funkcí* $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + 1}$ *na intervalu* $(0, \pi)$. *Je potřeba oboustranné ošetření všech 10 stojen ochrannou barvou. Kolik plechovek musíme koupit, když víme, že jedna vystačí na 1,6 m*^{2} *plochy?*

Inspirováno (Daněček, 2006)

Řešení:

Plocha jedné strany jedné stojny je určitý integrál $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{\sin x + 1}\,\mathrm{d}x$.

$$S = \int_0^\pi \frac{1}{\sin x + 1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \tan\frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} = \arctan t \\ x = 2\arctan t \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ 0 \mapsto 0 \\ \pi \mapsto \infty \\ \\ \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\ \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \\ \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \\ \\ \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \end{array} \right| = \int_0^\infty \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{2}{2t + 1 + t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{2}{t^2 + 2t + 1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\infty \frac{2}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty (t+1)^{-2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\left[\frac{(t+1)^{-2+1}}{-2+1}\right]_0^\infty = 2\left[\frac{(t+1)^{-1}}{-1}\right]_0^\infty$$

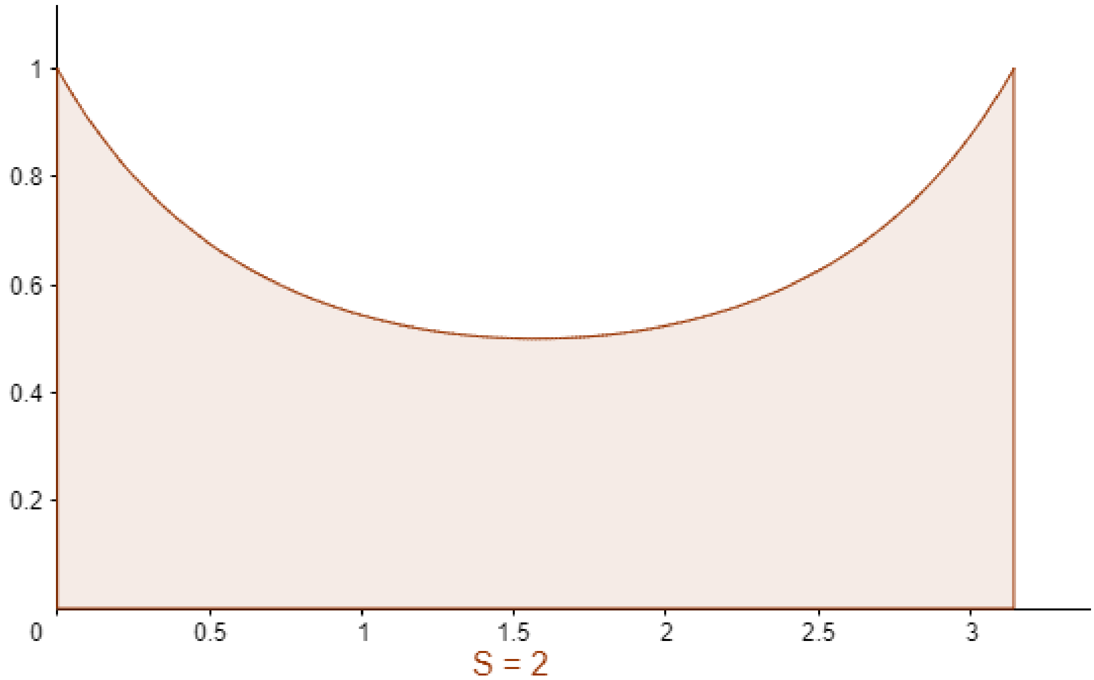
$$= -2\left[\frac{1}{t+1}\right]_0^\infty = \left[\frac{-2}{t+1}\right]_0^\infty$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-2}{t+1}\right) - \frac{-2}{1}$$

$$= 0 + 2 = 2$$

Celková plocha jedné stojny je $S = 2 \cdot 2 = 4\,\mathrm{m}^2$, plocha 10 stojen je $40\,\mathrm{m}^2$. K jejich natření budeme potřebovat $40/1,6 = 25$ plechovek.

K natření všech stojen musíme koupit 25 plechovek barvy. △



Obrázek 2.4: Stojna pod U-rampu; Archiv autora

Příklad 2.1.5 *Je třeba vyasfaltovat část opravovaného chodníku v šířce* $\frac{\pi}{3}$ *m. Druhý rozměr je popsán funkcí* $f(x) = \dfrac{\sin x + 1}{\cos x + 1}$. *Kolik kilogramů asfaltu bude potřeba k vyspravení chodníku, chceme-li položit asfaltovou vrstvu ve výšce 10 cm? Hustota asfaltu je 1300 kg/m*^{3}.

Inspirováno (Daněček, 2006)

Řešení:

Plocha opravované části chodníku je určitý integrál $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x + 1}{\cos x + 1}\,\mathrm{d}x$.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x + 1}{\cos x + 1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \tan\frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} = \arctan t \\ x = 2\arctan t \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ 0 \mapsto 0 \\ \frac{\pi}{3} \mapsto \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\ \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \\ \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \\ \\ \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\frac{2t}{1+t^2} + 1}{\frac{1-t^2}{t^2+1} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2t + 1 + t^2}{1+t^2} \cdot \frac{t^2+1}{1 - t^2 + t^2 + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{(t+1)^2}{2} \cdot 21 + t^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^2+2t+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

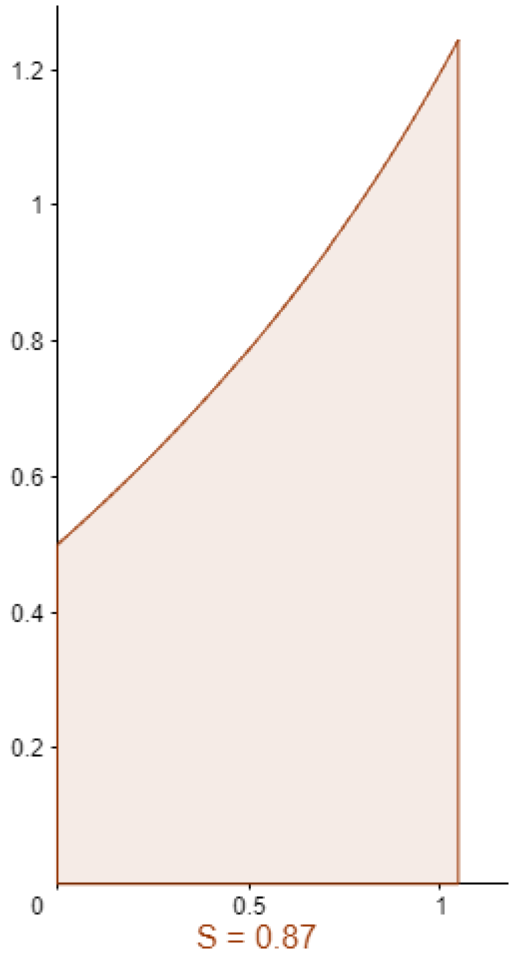
$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^2+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= [t]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \left| \begin{array}{c} u = 1 + t^2 \\ du = 2t\,\mathrm{d}t \\ 0 \mapsto 1 \frac{1}{\sqrt{3}} \mapsto \frac{4}{3} \end{array} \right| = [t]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \int_1^{\frac{4}{3}} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} + [\ln|u|]_1^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\frac{4}{3} - \ln 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\frac{4}{3}.$$

Plocha je $S = \frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\frac{4}{3} \doteq 0,87\,\mathrm{m}^2$. To při uvažované výšce 0,1 m znamená objem $V = 0,087\,\mathrm{m}^3$. Po vynásobení hustotou dostáváme $0,087 \cdot 1300 = 113,1$ kg asfaltu.

K opravě chodníku bude potřeba asi 113 kg asfaltu. $\triangle$



Obrázek 2.5: Vyasfaltování chodníku; Archiv autora

Příklad 2.1.6 *Pokud bychom bazén 10krát zmenšily v každém směru, bylo by jeho dno popsáno funkcí $f(x) = \sin\sqrt{x}$ na intervalu $(0,1)$. Určete jeho objem, když je bazén ve skutečnosti hluboký 1,6 m.*

Inspirováno (Štěpánková, 2014)

Řešení:

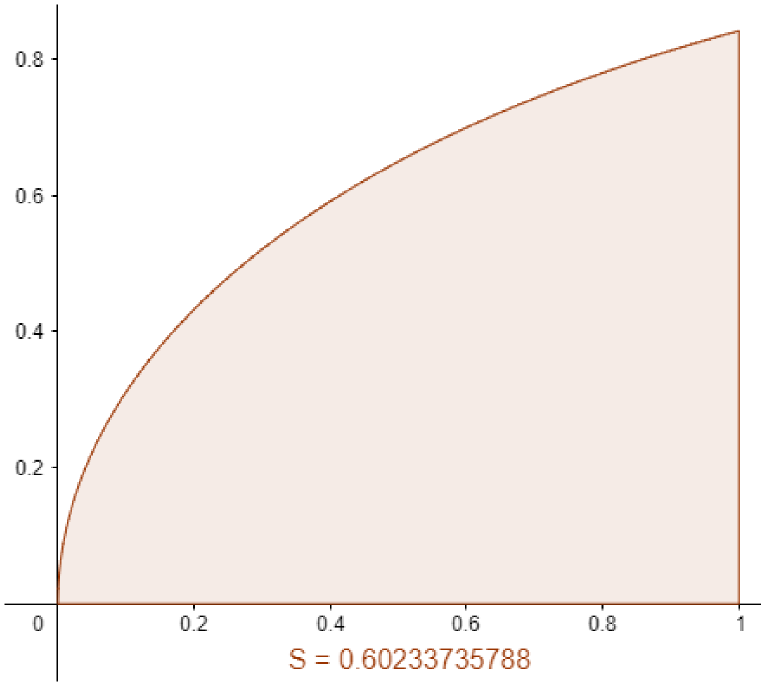
Plocha dna zmenšeného bazénu je určitý integrál $\displaystyle\int_0^1 \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
S = \int_0^1 \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{x} \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \\ 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \sin t \cdot 2t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^1 t \sin t\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{cc} u = t & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos t \end{array} \right| \\
&= 2\left([-\cos t \cdot t]_0^1 \right) + \int_0^1 \cos t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left([-\cos t \cdot t]_0^1 + [\sin t]_0^1 \right) \\
&= 2\left(-\cos 1 + 0\cos 0 + \sin 1 - \sin 0 \right) \\
&= 2\left(\sin 1 - \cos 1 \right).
\end{aligned}
$$

Plocha dna 100krát zmenšeného bazénu $S = 2(\sin 1 - \cos 1) \doteq 0,6$ m^2. Plocha dna skutečného bazénu je $100 \cdot S = 60$ m^2. Což při výšce $1,6$ m dává objem

$$V = 1,6 \cdot 100S = 160S = 96\,\mathrm{m}^3.$$

Objem bazénu je 96 m^3. $\triangle$



Obrázek 2.6: Hotelový bazén; Archiv autora

Příklad 2.1.7 *Pro slavnostní vypuštění nově vyrobené lodi z doku je potřeba nastříkat barvou 16 stojen trupu lodě. Kolik litrů barvy bude potřeba, víme-li, že jeden litr vystačí na pokrytí 3 m^2. Tvar jedné stojny je na její šířce 1 m popsán funkcí $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$.*

Inspirováno (Štěpánková, 2014)

Řešení:

Plocha jedné strany jedné stojny je určitý integrál $\displaystyle\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

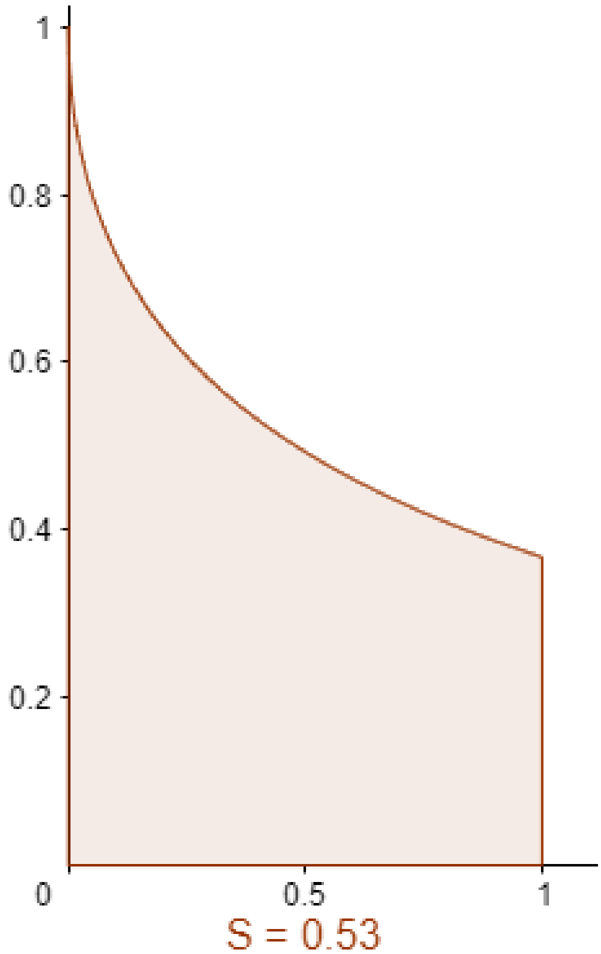
$$
\begin{aligned}
S = \int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{c} t = \sqrt{x} \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \\ 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \end{array}\right| = \int_0^1 e^{-t} 2t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^1 e^{-t} t\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{cc} u = t & v' = e^{-t} \\ u' = 1 & v = -e^{-t} \end{array}\right| \\
&= 2\left(\left[-te^{-t}\right]_0^1\right) - \int_0^1 1 \cdot (-e)^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left((-e^{-1} - 0) - \left[e^{-t}\right]_0^1\right) \\
&= 2\left(-\frac{1}{e} - e^{-1} + 1\right) \\
&= 2\left(1 - \frac{2}{e}\right).
\end{aligned}
$$

Plocha jedné strany jedné stojny je $S = 2\left(1 - \frac{2}{e}\right) \doteq 0,53\,\mathrm{m}^2$. Vzhledem k počtu 16 stojen bude potřeba natřít celkovou plochu

$$P = 32S = 32 \cdot 0,53 \doteq 16,96\,\mathrm{m}^2.$$

Na tuto akci budeme potřebovat $16,96/3 \doteq 5,65$ litrů barvy.

K natření všech stojen z obou stran bude potřeba asi 6 litrů barvy. $\triangle$



Obrázek 2.7: Stojna boku lodi; Archiv autora

Příklad 2.1.8 *Křídlo modelu historického letadla má šířku 8 dm. Obě křídla je třeba potáhnout plátnem postupně v pěti vrstvách ale pouze z vrchní strany. Kolik plátna spotřebujeme na potažení obou křídel, víme-li, že křídlo je v celé jeho šířce popsáno funkcí $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$?*

Inspirováno (Štěpánková, 2014)

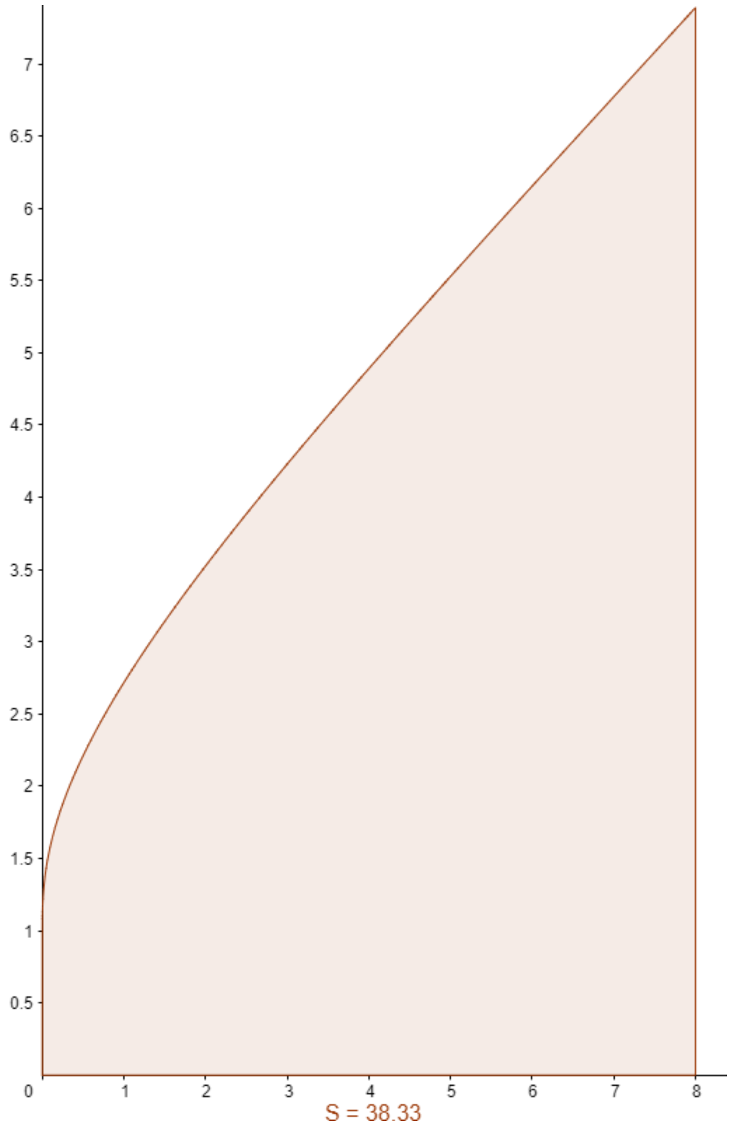
<u>*Řešení:*</u>

Potažení jednoho křídla jednou vrstvou plátna je dáno určitým integrálem $\displaystyle\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
S = \int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{c} t = \sqrt[3]{x} \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x \\ 3t^2\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \\ 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto \sqrt[3]{8} = 2 \end{array} \right| = \int_0^2 e^t \cdot 3t^2\,\mathrm{d}t \\
&= 3\int_0^2 t^2 e^t\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{cc} u = t^2 & v' = e^t \\ u' = 2t & v = e^t \end{array} \right| \\
&= 3\left(\left[t^2e^t\right]_0^2\right) - \int_0^2 2te^t\,\mathrm{d}t \\
&= 3\left[(4e^2 - 0) - \left| \begin{array}{cc} u = t & v' = e^t \\ u' = 1 & v = e^t \end{array} \right| - 2\left[te^t\right]_0^2 + 2\int_0^2 e^t\,\mathrm{d}t\right] \\
&= 3\left(4e^2 - 2(2e^2 - 0) + 2\left[e^t\right]_0^2\right) \\
&= 3\left(4e^2 - 4e^2 + 2e^2 - 2\right) \\
&= 3(2e^2 - 2) = 6e^2 - 6.
\end{aligned}
$$

Křídlo má plochu $S = 6e^2 - 6 \doteq 38,33\,\mathrm{dm}^2$. Celkvá spotřeba plátna tedy bude $2 \cdot 5 \cdot S \doteq 383,3\,\mathrm{dm}^2 = 3,833\,\mathrm{m}^2$.

K potažení křídel budou potřeba asi 4 m^2 plátna. △



Obrázek 2.8: Křídlo modelu historického letadla; Archiv autora

Příklad 2.1.9 *Po opravě terasy je potřeba zakrýt podlahu v šířce jednoho metru a v délce popsané funkcí $f(x) = \arctan x$. Bylo rozhodnuto, že se díra vybetonuje a pokryje kačírkem. Kolik kg kačírku bude potřeba koupit, předpokládáme-li, že 5 kg kačírku pokryje 0,3 m^2 plochy?*

Inspirováno (Štěpánková, 2014)

<u>*Řešení:*</u>

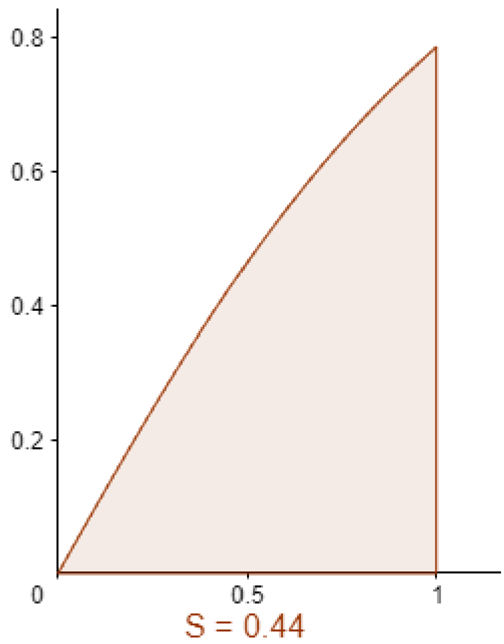
Plocha opravované části terasy je určitý integrál $\displaystyle\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
S = \int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{cc} u = \arctan x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{1+x^2} & v = x \end{array} \right| \\
&= [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \\
&= [x \arctan x]_0^1 - \left| \begin{array}{c} t = 1 + x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x \,\mathrm{d}x \\ \frac{\mathrm{d}t}{2} = x \,\mathrm{d}x \end{array} \right| \\
&= [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2t} \\
&= [x \arctan x]_0^1 - \left[\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right]_0^1 \\
&= \arctan 1 - 0 - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 1 \\
&= \arctan 1 - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Plocha je tedy $S = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} = 0,44\,\mathrm{m}^2$. Na pokrytí takovéto plochy potřebujeme

$$m = \frac{5 \cdot 0,44}{0,3} \doteq 7,33\,\mathrm{kg}.$$

K opravě bude potřeba asi 7,33 kg kačírku. △



Obrázek 2.9: Pokrytí části terasy kačírkem; Archiv autora

Příklad 2.1.10 *Je potřeba ošetřit nátěrem kýl lodi z obou stran. Předpokládejme, že je v celé své šířce π m popsán funkcí $f(x) = e^x \sin x$. Pro lepší ochranu budeme aplikovat nátěr dvakrát. Jak velkou plochu budeme natírat?*

Inspirováno (Štěpánková, 2014)

Řešení:

Plocha jedné strany kýlu je určitý integrál $I = \displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x \, \mathrm{d}x$.

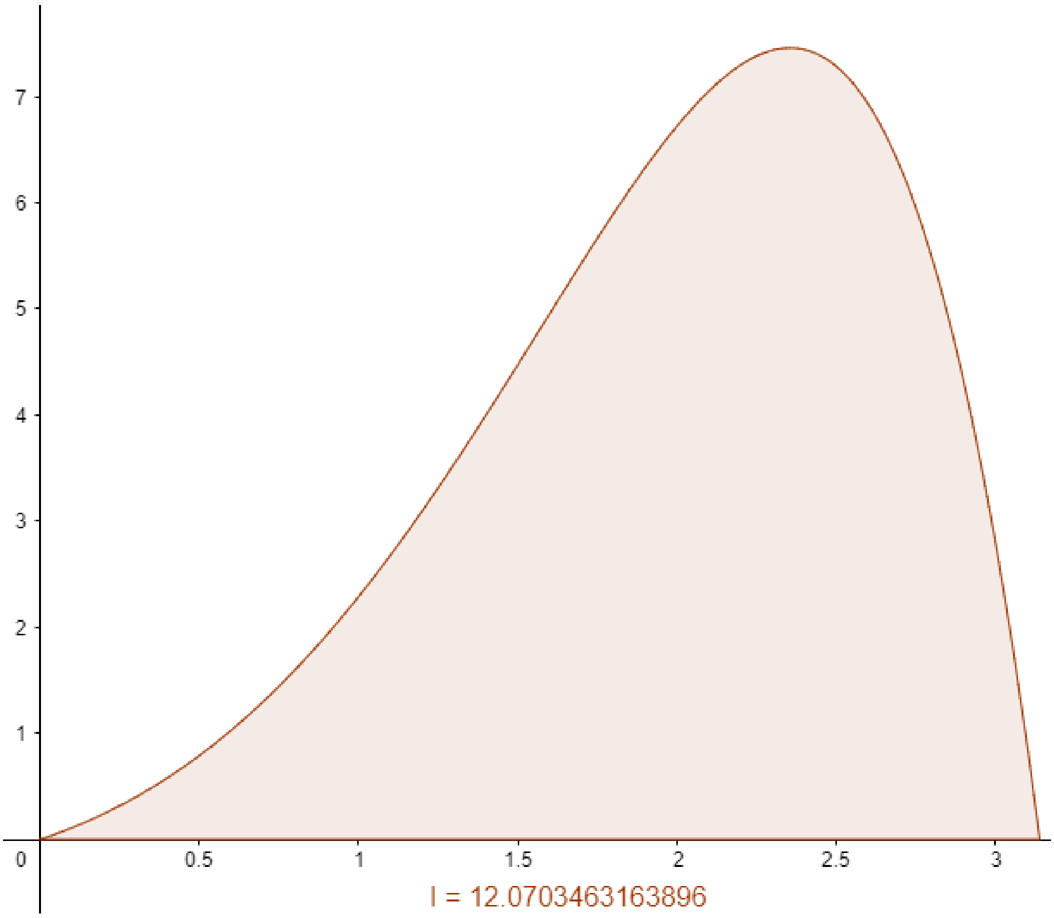
$$
\begin{aligned}
I = \int_0^\pi e^x \sin x \, \mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{ll} u = e^x & v' = \sin x \\ u' = e^x & v = -\cos x \end{array} \right| = [-e^x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \cos x \, \mathrm{d}x \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = e^x & v' = \cos x \\ u' = e^x & v = \sin x \end{array} \right| \\
&= [-e^x \cos x + e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sin x \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Zde je zřejmé, že bychom metodu per partes opakovali nekonečně mnohokrát a výsledku bychom nedosáhli. Můžeme ale integrál napsat jako rovnost

$$
\begin{aligned}
I &= [e^x(\sin x - \cos x)]_0^\pi - I \\
2I &= [e^x(\sin x - \cos x)]_0^\pi \\
I &= \frac{1}{2}\,[e^x(\sin x - \cos x)]_0^\pi \\
I &= \frac{1}{2}\left[e^\pi(0+1) - e^0(0-1)\right] \\
I &= \frac{1}{2}\,(e^\pi + 1)
\end{aligned}
$$

Plocha jedné strany kýlu je $I = \frac{1}{2}\,(e^\pi + 1) \doteq 12,07\,\mathrm{m}^2$. Na oboustranný dvojitý nátěr bude potřeba natřít $4I \doteq 4 \cdot 12,07 = 48,28\,\mathrm{m}^2$.

Celkem je potřeba natřít asi 49 m^2 plochy. $\triangle$



Obrázek 2.10: Kýl lodi; Archiv autora

Příklad 2.1.11 *Kvůli výstavbě plotu bude potřeba dokoupit část pozemku popsaného na intervalu (e, π) funkcí $f(x) = \ln x$. Kolik za pozemek zaplatíme, když jednotková cena za m^2 je 3000 Kč?*

Inspirováno (Štěpánková, 2014)

Řešení:

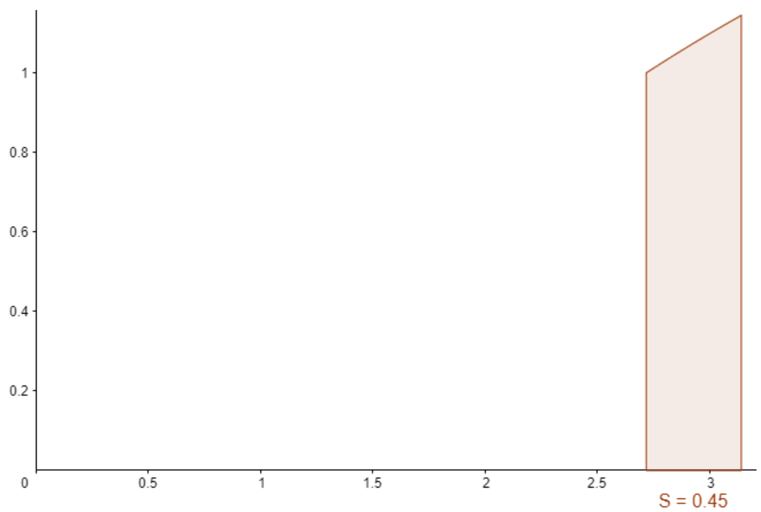
Plocha pozemku je dána určitým integrálem $\int_e^\pi \ln x \, \mathrm{d}x$.

$$S = \int_e^\pi \ln x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int_e^\pi 1 \, \mathrm{d}x$$
$$= [x \ln x - x]_e^\pi = [x(\ln x - 1)]_e^\pi$$
$$= \pi(\ln \pi - 1) - 0) = \pi(\ln \pi - 1).$$

Plocha pozemku je $S = \pi(\ln \pi - 1) \doteq 0,45\,\mathrm{m}^2$. Cena za celý pozemek bude tedy

$$0,45 \cdot 3000 = 1350.$$

Za pozemek zaplatíme asi 1350 Kč. △



Obrázek 2.11: Pozemek ke koupi; Archiv autora

2.2 Obsah obrazce omezeného křivkami

Příklad 2.2.1 *Určete obsah obrazce omezeného křivkami* $y = x^3$ *a* $y = x$.

Inspirováno (Štěpánková, 2014)

<u>*Řešení:*</u>

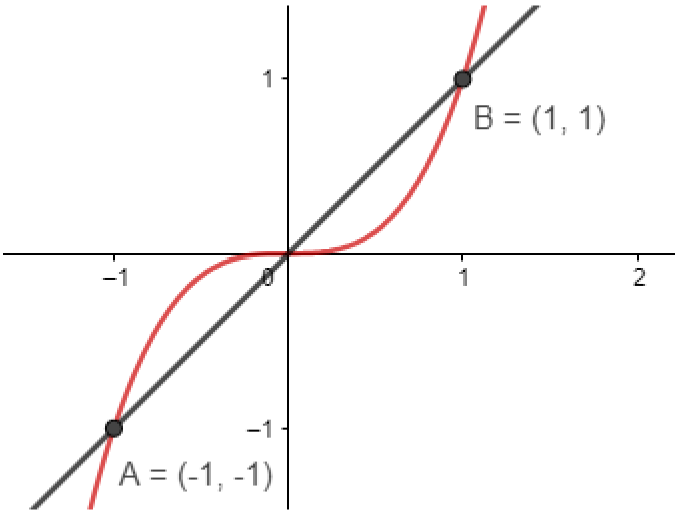
Nejdříve je nutné najít meze, musíme tedy vyřešit rovnici

$$\begin{aligned} x^3 &= x \\ x^3 - x &= 0 \\ x(x^2 - 1) &= 0 \\ x &\in \{\pm 1; 0\} \end{aligned}$$

Kořeny rovnic nám příklad rozdělí na dva symetrické integrály.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,\mathrm{d}x &= 2\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} (x - x^3)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = 2\left[0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right] = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Obsah obrazce je $S = \frac{1}{2}$ j^2. △



Obrázek 2.12: Geometrická interpretace; Archiv autora

Příklad 2.2.2 *Určete obsah obrazce omezeného křivkami* $y = \frac{1}{1+x^2}$ *a* $y = \frac{1}{2}x^2$.

Inspirováno (Štěpánková, 2014)

Řešení:

Nejdříve je nutné najít meze, musíme tedy vyřešit rovnici

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^2} &= \frac{x^2}{2} \\
2 &= x^2(1+x^2), \text{ použijeme substituci } x^2 = t \\
2 &= t(1+t) \\
t^2 + t - 2 &= 0 \\
(t+2)(t-1) &= 0 \\
t &\in \{-2; 1\}.
\end{aligned}$$

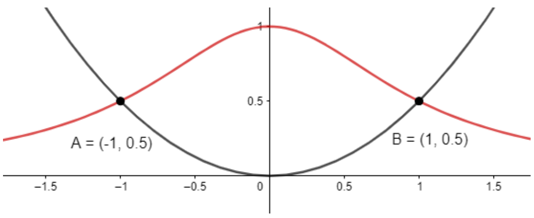
Po návratu k substituci $x^2 = t$ máme rovnici

$$\begin{aligned}
x^2 &= 1 \\
x &= \pm 1.
\end{aligned}$$

Obsah obrazce tedy spočítáme jako

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) \mathrm{d}x = \left[\arctan x - \frac{1}{6}x^3 \right]_{-1}^{1} \\
&= \left[\arctan 1 - \frac{1}{6} - \arctan(-1) + \frac{1}{6}(-1) \right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Obsah obrazce je $S = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ j^2. △



Obrázek 2.13: Geometrická interpretace; Archiv autora

2.3 Délka křivky

V následujících sekcích budeme využívat známeho vzorce pro výpočet délky křivky dané rovnicí $y = f(x)$, $x \in (a, b)$,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x,$$

případně křivky dané parametricky

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (a, b),$$

$$L = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}x.$$

(Mayerová, 2006)

Příklad 2.3.1 *Určete délku křivky dané rovnicí* $y = \ln x$ *na intervalu* $(\sqrt{3}, \sqrt{8})$.

Inspirováno (Daněček, 2006)

Řešení:

K výpočtu potřebujeme znát kvadrát derivace. Spočítejme nejprve derivaci podle x

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Následně její kvadrát

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}.$$

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \sqrt{t^2-1} \\ \mathrm{d}x = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt \\ \sqrt{3} \mapsto 2 \\ \sqrt{8} \mapsto 3 \end{array} \right|$$

$$= \int_2^3 \sqrt{\frac{t^2-1+1}{t^2-1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \int_2^3 \frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2-1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_2^3 \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_2^3 1 + \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t.$$

Tento integrál vede na parciální zlomky

$$\int_2^3 \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_2^3 \left(\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$A(t-1)+B(t+1)=1$$

Pro $t=1$ máme

$$2B=1$$
$$B=\frac{1}{2}$$

Pro $t=-1$ máme

$$-2A=1$$
$$A=\frac{-1}{2}$$

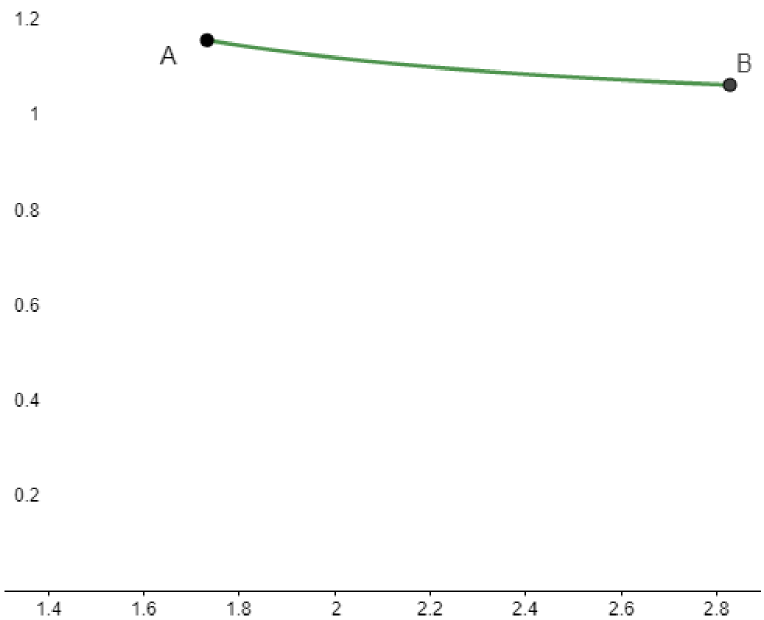
Platí tedy

$$\int_2^3 \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t=\int_2^3\left(\frac{1}{-2(t+1)}+\frac{1}{2(t-1)}\right)\mathrm{d}t=\int_2^3\left(\frac{1}{2(t-1)}-\frac{1}{2(t+1)}\right)\mathrm{d}t.$$

Po dosazení zpět do příkladu dostáváme

$$L = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}\right) \mathrm{d}t = \left[t + \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1|\right]_2^3$$
$$= \left[t + \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\right]_2^3 = 3 + \frac{1}{2}\ln\frac{2}{4} - 2 - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} = 1 + \ln\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Délka oblouku křivky je $L = 1 + \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$ j. △



Obrázek 2.14: Geometrická interpretace; Archiv autora

Příklad 2.3.2 *Určete délku křivky dané rovnicí* $y = \ln(\sin x)$ *na intervalu* $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$.

Inspirováno (Daněček, 2006)

<u>*Řešení:*</u>

K výpočtu potřebujeme znát kvadrát derivace. Spočítejme nejprve derivaci podle x

$$(\ln(\sin x))' = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Následně její kvadrát

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}.$$

$$\begin{aligned} L = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \frac{\pi}{3} \mapsto \frac{1}{2} \\ \frac{2\pi}{3} \mapsto \frac{-1}{2} \end{array} \right| \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{-1}{2}} -\frac{\mathrm{d}t}{1 - t^2} = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - t^2}. \end{aligned}$$

Tento integrál vede na parciální zlomky

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A}{1 + t} + \frac{B}{1 - t}\right)\mathrm{d}t$$

$$A(1 - t) + B(1 + t) = 1$$

Pro $t = 1$ máme

$$\begin{aligned} A \cdot 0 + 2B &= 1 \\ B &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pro $t = -1$ máme

$$2A = 1$$
$$A = \frac{1}{2}$$

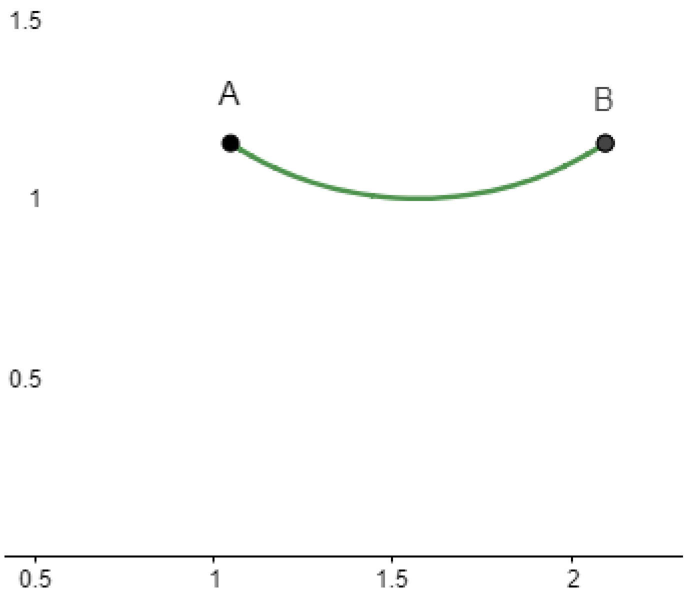
Platí tedy

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2(1-t)}\right)\mathrm{d}t$$

Po dosazení zpět do příkladu dostáváme

$$\begin{aligned}
L &= \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2(1-t)}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln|1+t|\right]_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left[-\ln|1-t|\right]_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\ln|1+t| - \ln|1-t|\right]_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} - \ln\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln 3 - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 3 = \ln 3.
\end{aligned}$$

Délka oblouku křivky je $L = \ln 3$ j. $\triangle$



Obrázek 2.15: Geometrická interpretace; Archiv autora

2.4 Úlohy s užitím vzorců obsahů, povrchů a objemů

V následující sekci budeme využívat vzorců z předchozích sekcí a vzorce pro objem a povrch rotačního tělesa daného rotací křivky $y = f(x)$, $x \in (a, b)$ kolem osy x

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x,$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 2.4.1 *Určete obsah elipsy dané rovnicí* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Inspirováno (Mayerová, 2006)

Řešení:

Bez újmy na obecnosti předpokládejme $a, b > 0$. Rovnici elipsy si můžeme upravit na $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, x \in (-a, a)$. Protože je elipsa symetrický útvar, můžeme spočítat pouze horní polovinu, výsledek vynásobíme dvěma.

$$\begin{aligned}
S = 2\int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = 2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = &\left| \begin{array}{c} x = a\sin t \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t \\ a \mapsto \frac{\pi}{2} \\ -a \mapsto \frac{-\pi}{2} \end{array} \right| \\
&= 2\frac{b}{a}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot a\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= 2b\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \cdot \cos t\,\mathrm{d}t \\
&= 2b\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2ab\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= ab\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos 2t\,\mathrm{d}t = ab\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= ab\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin(-\pi)\right] = \pi ab.
\end{aligned}$$

Obsah elipsy je $S = \pi ab$. $\triangle$

Příklad 2.4.2 *Určete délku kružnice dané rovnicemi* $y = r \cdot \cos t$ *a* $y = r \cdot \sin t$ *pro* $t \in (0, 2\pi)$, $r > 0$.

Inspirováno (Mayerová, 2006)

Řešení:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} = [rt]_0^{2\pi} = 2\pi r - 0 = 2\pi r$$

Délka kružnice je $L = 2\pi r$. $\triangle$

Příklad 2.4.3 *Určete obsah kruhu daného rovnicí $r^2 = x^2 + y^2$ pro $r > 0$.*

Inspirováno (Mayerová, 2006)

Řešení:

Rovnici obvodové kružnice daného kruhu si můžeme upravit na $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in (-r, r)$. Protože je kruh symetrický útvar, můžeme spočítat pouze horní polovinu, výsledek vynásobíme dvěma.

$$
\begin{aligned}
S = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = &\left| \begin{array}{c} x = r\sin t \\ \mathrm{d}x = r\cos t\,\mathrm{d}t \\ r \mapsto \frac{\pi}{2} \\ -r \mapsto \frac{-\pi}{2} \end{array} \right| \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t} \cdot r\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(1 - \sin^2 t)} \cdot r\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2\cos^2 t} \cdot r\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= 2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + cos2t}{2}\,\mathrm{d}t = r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos 2t\,\mathrm{d}t \\
&= r^2\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= r^2\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin(-\pi)\right] = r^2\pi.
\end{aligned}
$$

Obsah kruhu je $S = \pi r^2$. △

Příklad 2.4.4 *Určete povrch koule dané rotací křivky $x^2 + y^2 = r^2$ kolem osy x.*

Inspirováno (Mayerová, 2006)

Řešení:

Rovnici křivky (kružnice) si můžeme upravit na $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Protože je koule symetrický útvar, můžeme spočítat pouze horní polovinu, výsledek vynásobíme dvěma. K výpočtu ještě potřebujeme znát kvadrát derivace. Spočítejme nejprve derivaci podle x

$$\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)' = \frac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Následně její kvadrát

$$\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}.$$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\,[rx]_{-r}^{r} = 2\pi(r^2 + r^2) = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Povrch koule je $S = 4\pi r^2$. $\triangle$

Příklad 2.4.5 *Určete objem kužele, který rotuje kolem přímky* $y = \frac{rx}{v}$ *a kolem osy* x *na intervalu* $(0, v)$.

Inspirováno (Mayerová, 2006)

Řešení:

$$V = \pi \int_0^v \left(\frac{rx}{v}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \frac{r^2}{v^2} \int_0^v x^2 \,\mathrm{d}x = \pi \frac{r^2}{v^2} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^v = \pi \frac{r^2}{v^2} \left(\frac{1}{3}v^3\right) = \frac{\pi r^2 v}{3}.$$

Objem kužele je $V = \dfrac{\pi r^2 v}{3}$. △

2.5 Úlohy o vstřebávání léků

Příklad 2.5.1 *Po přijetí pacienta na ambulanci mu byl intravenózně podán lék v koncentraci 20 mg/kg váhy. Jak vypadá křivka vstřebávání tohoto léku do organismu pacienta, je-li koncentrace v krvi podávané látky v krvi pacienta popsána pro čas* $t \geq 0$ *funkcí* $f(t) = 20e^{-3t}$. *Předpokládejme, že funkce vstřebávání léku do organismu je dána jako funkce horní meze určitého integrálu z koncentrační funkce.*

Inspirováno (Pehrson & col., 2016) a osobní konzultace s lékařem

Řešení:

Řešením je funkce

$$F(\tau) = \int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Po dosazení za $f(t)$ máme

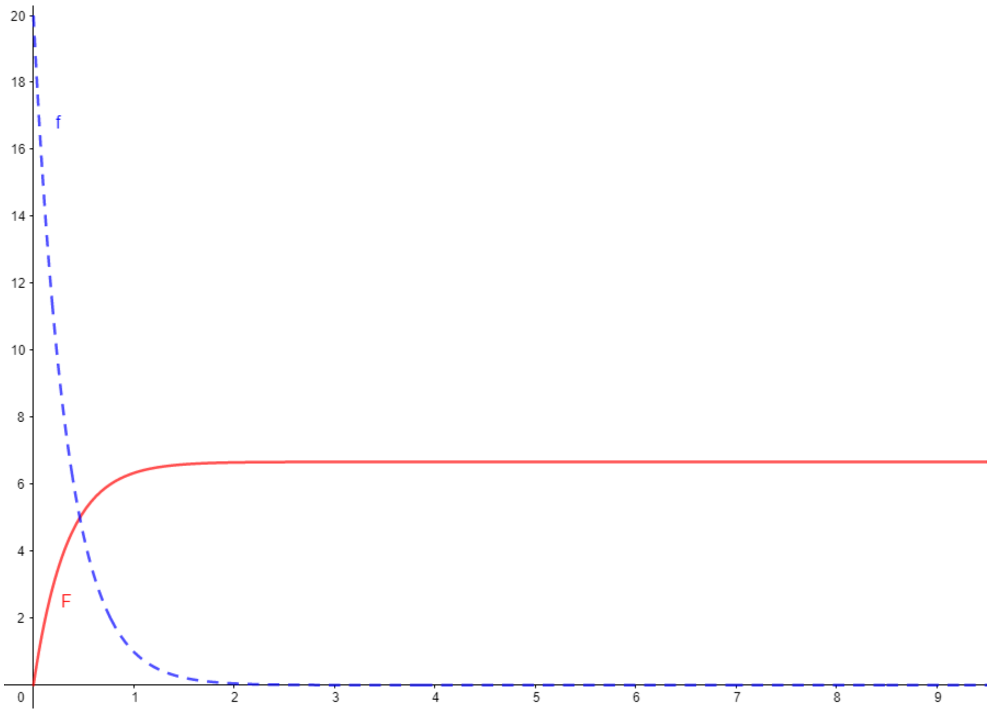
$$F(\tau) = 20\int_0^\tau e^{-3t}\,\mathrm{d}t.$$

Tento integrál budeme řešit přímou integrací, resp. jedoduchou lineární substitucí $u = -3t$.

$$\begin{aligned} F(\tau) = 20\int_0^\tau e^{-3t}\,\mathrm{d}t &= \left| \begin{array}{c} u = -3t \\ \mathrm{d}u = -3\,\mathrm{d}t \\ 0 \mapsto 0 \\ \tau \mapsto -3\tau \end{array} \right| \\ &= -\frac{20}{3}\int_0^{-3\tau} e^u\,\mathrm{d}u = -\frac{20}{3}\left[e^u\right]_0^{-3\tau} \\ &= -\frac{20}{3}(e^{-3\tau} - 1). \end{aligned}$$

Funkce vstřebávání $F(\tau)$ má tedy předpis

$$F(\tau) = \frac{20}{3}\left(1 - e^{-3\tau}\right). \quad \triangle$$



Obrázek 2.16: Průběh koncentrace (čárkovaná modrá čára) a průběh vstřebaného množství léku (plná červená čára) v závislosti na čase (vyjádřeno v hodinách).; Archiv autora

Příklad 2.5.2 *Po přijetí pacienta na ambulanci mu byl orálně podán lék. Jak vypadá křivka vstřebávání tohoto léku do organismu pacienta, je-li koncentrace v krvi podávané látky v krvi pacienta popsána pro $t \geq 0$ funkcí $f(t) = 4te^{-2t^2}$. Předpokládejme, že funkce vstřebávání léku do organismu je dána jako funkce horní meze určitého integrálu z koncentrační funkce.*

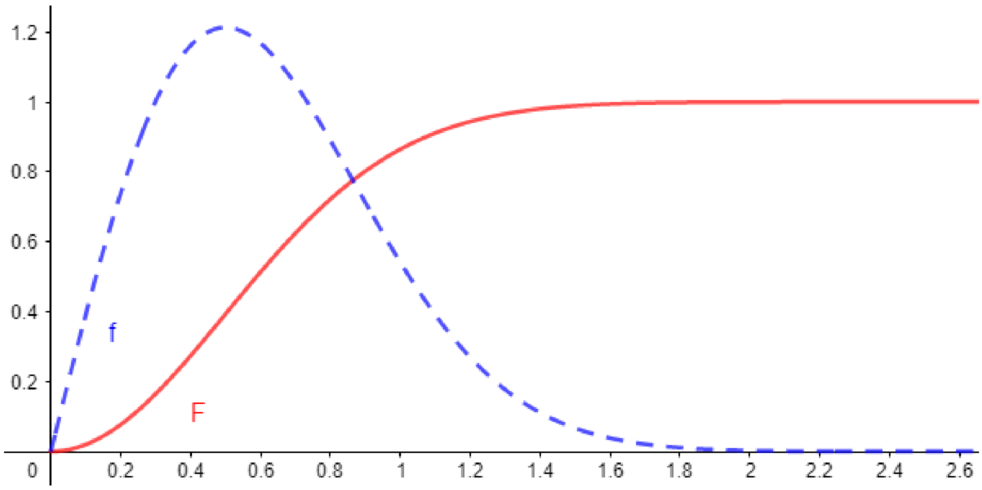
Inspirováno (Pehrson & col., 2016) a osobní konzultace s lékařem

Řešení:

Řešením je funkce
$$F(\tau) = \int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Po dosazení za $f(t)$ máme
$$F(\tau) = 4\int_0^\tau te^{-2t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Tento integrál budeme řešit pomocí substituce $u = -2t^2$. Tato substituční funkce sice není prostá na celém $\mathbb{R}$, ale na intervalu $[0, +\infty)$ prostá je (je klesající) a tedy předpoklady věty o substituci jsou splněny.

$$\begin{aligned}
F(\tau) = 4\int_0^\tau te^{-2t^2}\,\mathrm{d}t &= \left| \begin{array}{c} u = -2t^2 \\ \mathrm{d}u = -4t\,\mathrm{d}t \\ 0 \mapsto 0 \\ \tau \mapsto -2\tau^2 \end{array} \right| \\
&= -\int_0^{-2\tau^2} e^u\,\mathrm{d}u = -\left[e^u\right]_0^{-2\tau^2} \\
&= -(e^{-2\tau^2} - 1).
\end{aligned}$$

Funkce vstřebávání $F(\tau)$ má tedy předpis
$$F(\tau) = 1 - e^{-2\tau^2}. \quad \triangle$$



Obrázek 2.17: Průběh koncentrace (čárkovaná modrá čára) a průběh vstřebaného množství léku (plná červená čára) v závislosti na čase (vyjádřeno v hodinách).; Archiv autora

Příklad 2.5.3 *Po přijetí pacienta na ambulanci mu byl orálně podán lék. Jak vypadá křivka vstřebávání tohoto léku do organismu pacienta, je-li koncentrace v krvi podávané látky popsána pro $t \geq 0$ funkcí $f(t) = 2,5 \cdot t \cdot e^{-t}$. Předpokládejme, že funkce vstřebávání léku do organismu je dána jako funkce horní meze určitého integrálu z koncentrační funkce.*

Inspirováno (Pehrson & col., 2016) a osobní konzultace s lékařem

Řešení:

Řešením je funkce

$$F(\tau) = \int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Po dosazení za $f(t)$ máme

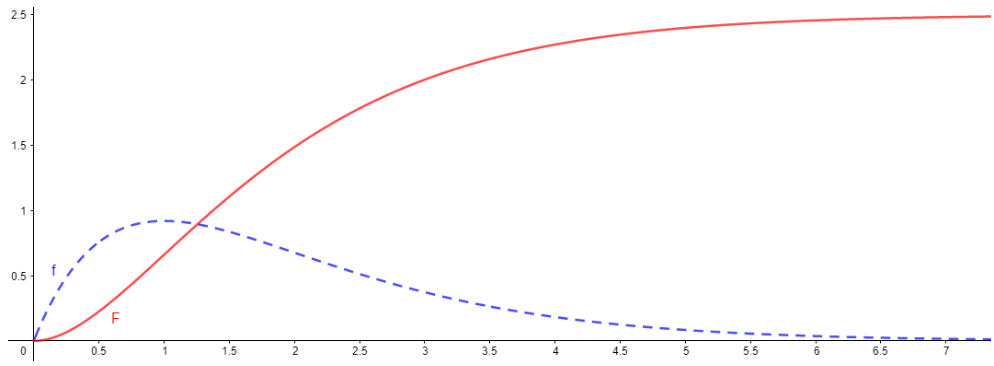
$$F(\tau) = 2,5 \int_0^\tau te^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Tento integrál budeme řešit metodou per partes jako neurčitý. Multiplikativní konstantu a obě meze doplníme v závěru integrace.

$$\begin{aligned} \int te^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left| \begin{array}{cc} u = t & v' = e^{-t} \\ u' = 1 & v = -e^{-t} \end{array} \right| \\ &= -te^{-t} + \int e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= -te^{-t} - e^{-t} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Funkce vstřebávání $F(\tau)$ má tedy předpis

$$F(\tau) = 2,5\left[-e^{-t}(t+1) + c\right]_0^\tau = -2,5e^{-\tau}(\tau + 1) + 2,5. \quad \triangle$$



Obrázek 2.18: Průběh koncentrace (čárkovaná modrá čára) a průběh vstřebaného množství léku (plná červená čára) v závislosti na čase (vyjádřeno v hodinách).; Archiv autora

Kapitola 3

Aplikace obyčejných diferenciálních rovnic

V této kapitole budeme řešit úlohy vedoucí k řešení Cauchyovy úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice. Typickým zadáním příkladů bude jednak sestavit diferenciální rovnici (prvního řádu), vyřešit ji (obvykle metodou separace proměnných), určit obecné řešení takové úlohy, pomocí zadaných počátečních podmínek určit všechny neznámé konstanty úlohy a zjistit konkrétní požadované řešení. Vzhledem k tomu, že obvykle půjde o průběh změny nějaké veličiny v čase, bude součástí zadání i úkol zjistit, kdy došlo k dotazovaným událostem specifikovaným v jednotlivých úlohách.

3.1 Praktické úlohy řešené diferenciálními rovnicemi prvního řádu

Příklad 3.1.1 *Pacientovi byla podána orálně tableta vortioxetinu. Po 2 hodinách od podání byla naměřena koncentrace v krvi 2,1 μM a v mozku 660 μmol/kg. Po 4 hodinách po podání byla naměřena koncentrace v krvi 1,45 μM a v mozku 540 μmol/kg. Předpokládejme, že koncetrace léku v krvi klesá exponenciálně a v mozku klesá kvadraticky.*

Určete rychlost poklesu koncentrace léku v krvi a v mozku. Na základě takto vypočítaných rychlostí odhadněte průběh změny koncentrace v časech 6, 8, 12, 16 a porovnejte s naměřenými skutečnými hodnotami (viz tabulka). Za jak dlouho lék zcela vymizí z mozku?
Inspirováno (Pehrson & col., 2016) a osobní konzultace s lékařem

čas od podání	t	krev	mozek
2	0	2,1	660
4	2	1,45	540
8	6	0,6	210
12	10	0,25	85
16	14	0,1	25

Naměřené hodnoty vortioxetinu v krvi a v mozku.

Řešení:

Pro zjednodušení formulace výpočtů nastavíme počáteční podmínku $t = 0$ na první údaj, který máme k dispozici, tj. 2 hodiny po podání léku. Výpočetní čas t se tak liší od času po podání o 2 hodiny.

Vyřešíme nejprve problematiku množství látky v krvi. Vzhledem k exponencionálnímu poklesu musí koncentrace $p(t)$ v čase t (měřeno v hodinách) splňovat diferenciální rovnici

$$p'(t) = -kp(t).$$

To je rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty. Vyřešíme ji pomocí charakteristického polynomu dosazením řešení ve tvaru $p(t) = e^{rt}$.

$$\begin{aligned} p' &= -kp \\ p' + kp &= 0 \\ r + k &= 0 \end{aligned}$$

$$r = -k$$
$$p = e^{-kt}.$$

Obecné řešení je násobkem tohoto prvku fundamentálního systému

$$p(t) = c_1 e^{-kt}, \quad c \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Z počátečních podmínek spočítáme konstantu c_1

$$p(0) = 2,1 = c_1 \cdot e^0$$
$$c_1 = 2,1$$

a následně také rychlost poklesu hladiny látky v krvi

$$p(2) = 1,45 = c_1 \cdot e^{2k}$$
$$e^{-2k} = \frac{1,45}{c_1}$$
$$-2k = \ln \frac{1,45}{c_1}$$
$$k = -\frac{1}{2} \ln \frac{1,45}{c_1}.$$

Dosazením číselných hodnot získáme

$$k = -\frac{1}{2} \ln \frac{1,45}{2,1} \doteq 0,19.$$

Rychlost poklesu látky v krvi odpovídá konstantě $0,19$ a průběh koncentrace je tedy dán funkcí

$$p(t) = 2,1 \cdot e^{-0,19t}.$$

Pro zjištění aproximovaných hodnot v dalších zadaných časech tyto dosadíme do zápisu konkrétního řešení

$$p(6) = 2,1 \cdot e^{-0,19 \cdot 6} \doteq 0,67$$
$$p(10) = 2,1 \cdot e^{-0,19 \cdot 10} \doteq 0,31$$
$$p(14) = 2,1 \cdot e^{-0,19 \cdot 14} \doteq 0,15.$$

Pro vstřebávání léku v mozku bude platit rovnice s kvadratickým poklesem. Koncentrace $m = m(t)$ v čase t (měřeno v hodinách) bude dána diferenciální rovnicí

$$m'(t) = -bm^2(t).$$

Tuto rovnici budeme řešit metodou separace proměnných

$$\frac{m'}{m^2} = -b$$
$$\int \frac{m'}{m^2}\,\mathrm{d}t = -b \int \mathrm{d}t$$
$$\int \frac{\mathrm{d}m}{m^2} = -bt + c$$
$$\frac{-1}{m} = -bt + c,$$

odkud dostáváme obecné řešení ve tvaru

$$m(t) = \frac{1}{bt - c}, \quad b > 0, \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \in (c/k, +\infty).$$

Dosadíme nyní do počátečních podmínek. Nejprve

$$m(0) = 660 = -\frac{1}{c},$$

z čehož vyjádříme

$$c = -\frac{1}{660} \doteq -0,001515.$$

Pro hodnotu $t = 2$ platí

$$m(2) = 540 = \frac{1}{2b - c},$$

po úpravě

$$2b - c = \frac{1}{540}$$

a tedy

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{540} + c\right) \doteq 0,0001684.$$

Koncentrace vortioxetinu v mozku je tedy přibližně popsána funkcí

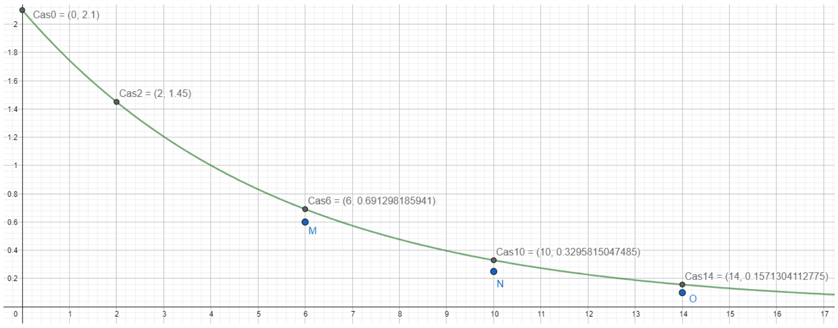
$$m(t) = \frac{1}{0,0001684t + 0,001515}.$$

Spočteme hodnoty v požadovaných časech

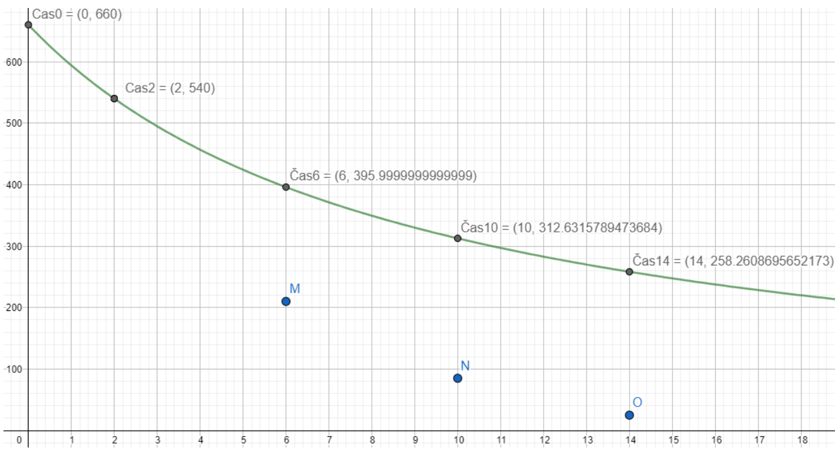
$$m(6) = \frac{1}{0,0001684 \cdot 6 + 0,001515} \doteq 396,02$$
$$m(10) = \frac{1}{0,0001684 \cdot 10 + 0,001515} \doteq 312,65$$

$$m(14) = \frac{1}{0,0001684 \cdot 14 + 0,001515} \doteq 258,27.$$

V obou případech (jak v krvi, tak v mozku) nám vyšly koncentrace větší než skutečně naměřené. V případě mozku výrazně. Znamená to, že rychlost poklesu je větší než námi vypočítaná. Dále je možné, že model pro koncentraci léku v mozku je použitelný pouze na kratším časovém intervalu než na zadaném 16 hodin od doby podání léku. $\triangle$



Obrázek 3.1: Křivka vypočítaného množství vortioxetinu v krvi v μM, na vodorovné ose je čas v hodinách. Křivka byla vypočítána na základně prvních dvou měření. Pro úplnost jsou na obrázku zobrazena i další tři měření.; Archiv autora



Obrázek 3.2: Množství vortioxetinu v mozku v μmol/kg, na vodorovné ose je čas v hodinách. Křivka byla vypočítána na základně prvních dvou měření. Pro úplnost jsou na obrázku zobrazena i další tři měření.; Archiv autora

Příklad 3.1.2 *Ve čtvrtek 22. dubna 2010 se potopila ropná plošina Deepwater Horizon. Její vrt vytvořil ropnou skvrnu připomínající kruh. Poloměr ropné skvrny roste rychlostí nepřímo úměrnou druhé mocnině poloměru. 25. dubna 2010 pokrývala skvrna plochu 1500 km*^{2}*. 30. dubna to bylo již 10 000 km*^{2}*.*

Kdyby úřady nezasáhly, za jak dlouho by ropná skrvna dosáhla na pevninu vzdálenou 100 km od plošiny?

(Přispěvatelé Wikipedie. Havárie plošiny Deepwater Horizon, 2019)

Řešení:

Označme $r(t)$ poloměr ropné skvrny v čase t (měřeno ve dnech). Položme $t = 0$ na den havárie. Změna poloměru ropné skvrny je dána diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{K}{r^2}.$$

Tu vyřešíme metodou separace proměnných

$$r^2\,\mathrm{d}r = K\,\mathrm{d}t$$
$$\int r^2\,\mathrm{d}r = \int K\,\mathrm{d}t.$$

Integrací a úpravami postupně vyjádříme obecné řešení

$$\frac{r^3}{3} = Kt + c$$
$$r(t) = \sqrt[3]{3(Kt + c)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pomocí počátečních podmínek v čase $t = 3$ a $t = 8$ zjistíme hodnoty konstant k a c. Protože počáteční podmínky jsou formulovány vzhledem k ploše, musíme je neprve přepočítat na hodnoty poloměrů. Ze známého vzorce pro obsah kruhu vyjádříme $r(3)$, resp. $r(8)$ jako

$$r(3) = \sqrt{\frac{S(3)}{\pi}} = \sqrt{\frac{1500}{\pi}}, \quad r(8) = \sqrt{\frac{S(8)}{\pi}} = \sqrt{\frac{10000}{\pi}},$$

což je přibližně $r(3) = 21,85$ km, resp. $r(8) = 56,42$ km.

Dosazením obecného řešení do těchto podmínek vzhledem k r dostáváme

$$r(3) = \sqrt[3]{3(3K+c)} = \sqrt{\frac{1500}{\pi}},$$

$$r(8) = \sqrt[3]{3(8K+c)} = \sqrt{\frac{10000}{\pi}}.$$

Tuto dvojici rovnic společně upravíme do tvaru

$$3K + c = \frac{1}{3}\left(\frac{1500}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{3.1}$$

$$8K + c = \frac{1}{3}\left(\frac{10000}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Odečtením rovnic vyjádříme

$$5K = \frac{1}{3}\left(\frac{10000}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{1500}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}},$$

následnou úpravou získáme

$$K = \frac{1}{15}\left[\left(\frac{10000}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1500}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Dosazením do (3.1) dostaneme

$$c = \frac{1}{3}\left(\frac{1500}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{15}\left[\left(\frac{10000}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1500}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\right],$$

což můžeme upravit do tvaru

$$c = \frac{8}{15}\left(\frac{1500}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{15}\left(\frac{10000}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Vypočítáním číselného výrazu získáme

$$c \doteq -30353,12, \quad k \doteq 11276,94.$$

Ropná skvrna dosáhne pevniny za čas $t = t_p$ splňující rovnici

$$r(t_p) = 100,$$

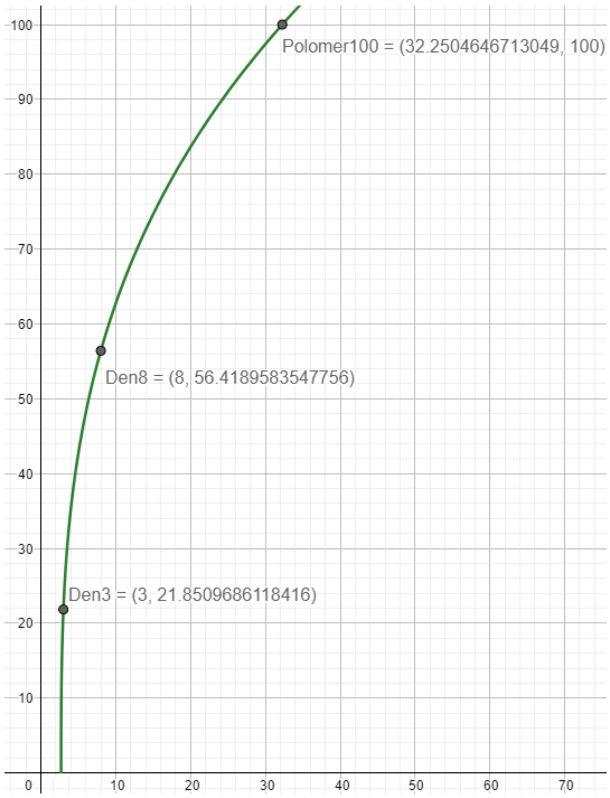
kterou vyřešíme

$$
\begin{aligned}
Kt + c &= \frac{1}{3}10^6 \\
Kt &= \frac{10^6}{3} - c \\
t &= \frac{1}{K}\left(\frac{10^6}{3} - c\right)
\end{aligned}
$$

Po dosazení dostáváme

$$
\begin{aligned}
t_p &\doteq \frac{1}{11276,94}\left(\frac{10^6}{3} + 30353,12\right) \\
t_p &\doteq 32,25.
\end{aligned}
$$

Ropná skvrna by dosáhla pevniny asi za měsíc. △



Obrázek 3.3: Poloměr v km ropné skvrny v závislosti na čase (měřeno ve dnech); Archiv autora

Příklad 3.1.3 *Dle dostupných údajů 13. ledna 2019 sledovali pracovníci lipenské přehrady tloušťku ledu. Zjistili, že z 25 cm v 10:00 hodin dopoledne se do 11:00 hodin led ztenčil na 23 cm. Bezpečná tloušťka ledu pro bruslaře je stanovena na 18 cm.*

Za jak dlouho bude bruslení zakázáno, předpokládáme-li, že led taje rychlostí nepřímo úměrnou své tloušťce? Vliv vody pod ledem zanedbáváme a teplotu okolního prostředí považujme pro jednoduchost za konstantní.

(Gabajová, 2019, data ČHMÚ)

Řešení:

Označme tloušťku ledu v čase t (měřeno v hodinách) jako $x(t)$. Počátek $t = 0$ stanovme na čas 10:00. Změnu tloušťky ledu můžeme zapsat pomocí diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{K}{x} \\ x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= K. \end{aligned}$$

Integrací postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \int xx'(t)\,\mathrm{d}t &= K\int 1\,\mathrm{d}t \\ \int x\,\mathrm{d}x &= K(t+c) \\ \frac{x^2}{2} &= K(t+c). \end{aligned}$$

Obecné řešení pak je ve tvaru

$$x(t) = \sqrt{2K(t+c)}, \quad t \in (-\infty, -c],$$

kde vzhledem k tání ledu je $K < 0$ a $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

Ze zadání nám plynou dvě počáteční podmínky v 10 a v 11 hodin

$$x(0) = 25, \qquad x(1) = 23.$$

Dosazením do první z nich dostaneme

$$2Kc = 625. \tag{3.2}$$

Ze druhé počáteční podmínky vyjádříme

$$2K(1+c) = 529.$$

Rovnice od sebe odečteme a dostaneme

$$-K = 625 - 529$$
$$K = -96.$$

Dosazením do rovnice (3.2) získáme

$$\begin{aligned} t_0 + c &= \frac{625}{2K} \\ c &= \frac{625}{2K} \\ c &= \frac{624}{-192} \\ c &= \frac{13}{-4}. \end{aligned}$$

Dostáváme tak konkrétní řešení ve tvaru

$$x(t) = \sqrt{-192\left(t - \frac{13}{4}\right)}, \quad t \leq \frac{13}{4}.$$

Z tohoto tvaru je zřejmé, že led za daných okolností kompletně roztaje za $t = 13/4$ hodiny. To je za 3 hodiny 15 minut, k čemuž dojde ve 13 hodin 15 minut.

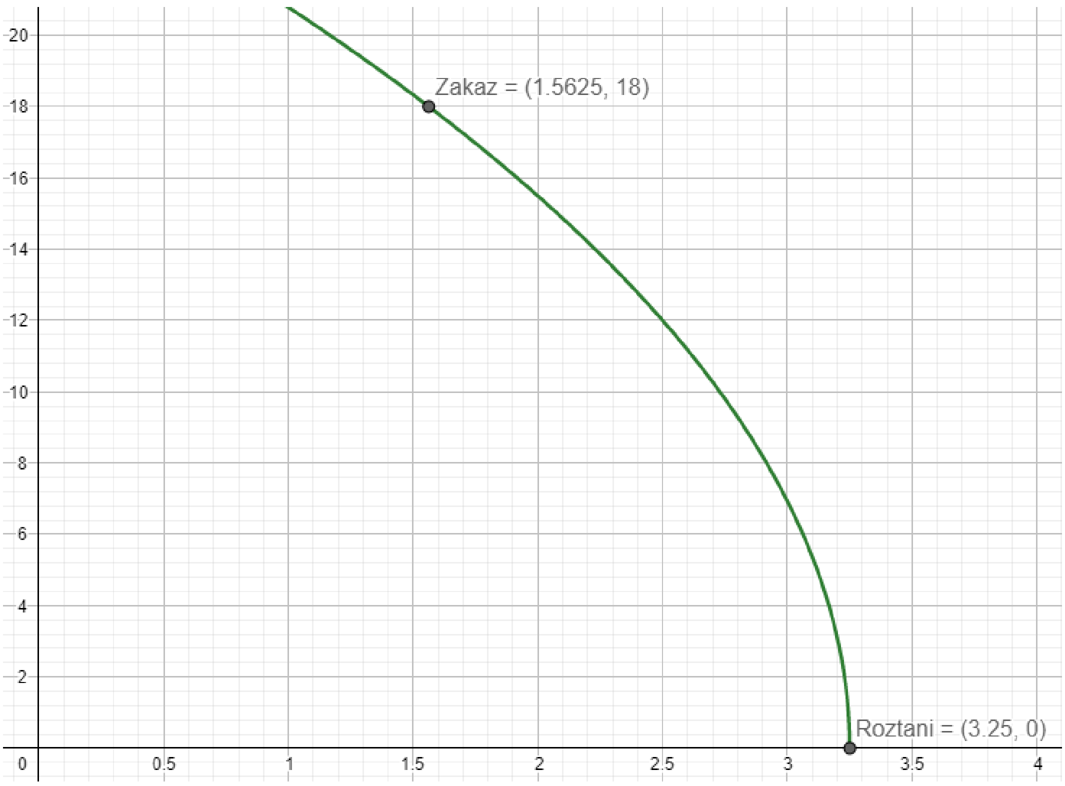
Na hranici bezpečné tloušťky $x_k = 18$ cm led roztaje za dobu t_k splňující rovnici

$$\sqrt{-192\left(t - \frac{13}{4}\right)} = 18.$$

Postupně upravujeme

$$
\begin{aligned}
-192\left(t-\frac{13}{4}\right) &= 324\\
t_k-\frac{13}{4} &= \frac{324}{-192}\\
t_k &= \frac{52}{16}-\frac{27}{16}\\
t_k &= \frac{25}{16}\\
t_k &\doteq 1,56.
\end{aligned}
$$

Zákaz bruslení bude muset být vyhlášen asi v 11:30 hodin. △



Obrázek 3.4: Tloušťka ledu v cm v závislosti na čase (měřeno v hodinách od 10:00); Archiv autora

Příklad 3.1.4 *Ve Francii mají povolený limit zkušení neprofesionální řidiči 0,5 ‰ alkoholu v krvi, řidiči hromadné dopravy a řidiči začátečníci jen 0,2 ‰. Z lidského organismu se alkohol odbourává rovnoměrně, každou hodinu se ho rozloží 10 až 15 %. Po shlédnutí fotbalového zápasu vyrazil Pierre autem ze sportovního baru domů. Ve 23:00 hodin ho zastavila policejní hlídka naměřila mu 0,45 ‰ alkoholu v krvi. Vzhledem k povolenému limitu ho pustila dál.*

Může Pierre jako řidič autobusu nastoupit na ranní směnu v 5:00 hodin ráno? Pokud ne, v kolik hodin hladina alkoholu klesne na povolený limit? Vzhledem k jeho postavě je rychlost odbourování alkoholu 10 %.

(Dittrich, 2019)

Řešení:

Označme množství alkoholu v krvi v čase t (měřeno v hodinách) jako $A = A(t)$, povolené množství alkoholu pro neprofesní řidiče jako A_N a pro profesní řidiče jako A_P. Protože se v Pierrově případě alkohol odbourává rovnoměrně a rozloží se ho 10 % za hodinu, můžeme pro jeho aktuální množství alkoholu v krvi psát diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -0,1A.$$

Postupným řešením metodou seperace proměnných dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{A'}{A} &= -0,1 \\
\int \frac{A'}{A}\,\mathrm{d}t &= \int -0,1\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{\mathrm{d}A}{A} &= -0,1t + c \\
\ln A &= -0,1t + c \\
A &= e^{-0,1t+c} \\
A &= c_1 e^{-0,1t}.
\end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice je tedy

$$A(t) = c_1 e^{-0,1t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

kde $c_1 > 0$ je libovolná konstanta.

Ze zadání nám plyne počáteční podmínka $A(0) = A_P = 0,2$, kterou jsme přiřadili okamžiku poklesu hodnoty alkoholu v krvi na povolený limit pro řidiče autobusu.
Díky ní vyjádříme konstantu c_1

$$\begin{aligned} 0,2 &= c_1 e^0 \\ 0,2 &= c_1. \end{aligned}$$

Konkrétní řešení rovnice tedy je

$$A(t) = 0,2e^{-0,1t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Pierr smí nastoupit na směnu po uplynutí doby t_N. Při jeho rychlosti odbourávání $c_1 = 0,2$ se sníží hodnota alkoholu v krvi z naměřených $A_r = 0,45$ na povolených $A_P = 0,2$ za dobu t_N. Tato doba musí splňovat rovnici

$$A(-t_N) = A_r.$$

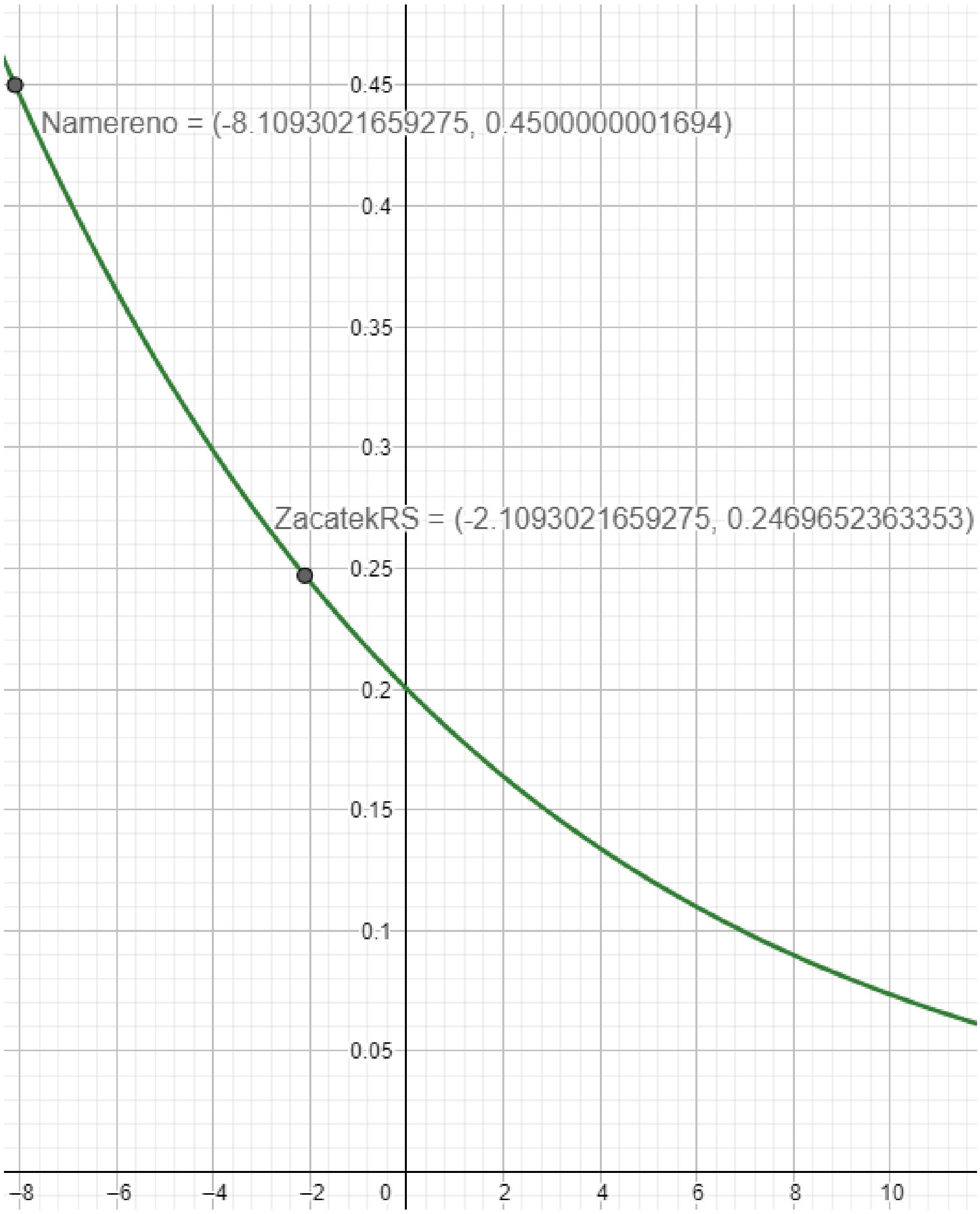
Po dosazení do (3.4) dostáváme

$$A_P e^{0,1t_N} = A_r,$$

odkud vyjádříme t_N jako

$$\begin{aligned} e^{0,1t_N} &= \frac{A_r}{A_P} \\ 0,1t_N &= \ln \frac{A_r}{A_P} \\ t_N &= 10 \ln \frac{A_r}{A_P} \\ t_N &= 10 \ln 2,25 \\ t_N &\doteq 8,1. \end{aligned}$$

Doba odbourávání je delší než zbývajících 6 hodin do nástupu na ranní směnu. Pierre musí příchod do práce odložit. Řídit autobus smí až po sedmé hodině ráno. $\triangle$



Obrázek 3.5: Množství alkoholu v krvi. Na vodorovné ose čas měřený v hodinách, počátek nastaven na povolenou hladinu k řízení autobusu.; Archiv autora

Příklad 3.1.5 *Na vyhrazené části školního pozemku osázené jehličnatými i listnatými stromy bylo vážením a výpočtem zjištěno, že na 1 m^2 spadne 8 kg jehličí a listí za rok. Na základě konzultace s odborníky z katedry botaniky stanovme, že se každý rok rozloží 20 % spadané hmoty.*

Pracovníci technických služeb místo pečlivě uklidili. Jaké množství hmoty bude na pozemku za 3, 5, 10 let? K jaké hodnotě se bude blížit množství napadané hmoty, pokud se nebudeme o školní pozemek nikdy starat?

(Katedra botaniky, 2020 a vlastní měření)

Řešení:

Označme hmotnost listí a jehličí v čase t (měřeno v letech) jako $m = m(t)$. Víme, že se každoročně rozloží 20 % listí. A proto množství spadané hmoty splňuje diferenciální rovnici

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= \text{přírůstek} - \text{úbytek}\\ \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= 8 - 0,2m\\ m' &= 8 - 0,2m.\end{aligned}$$

Jelikož se jedná o nehomogenní rovnici, vyřešíme nejprve odpovídající úlohu homogenní

$$\begin{aligned}m' + 0,2m &= 0\\ m' &= -0,2m\\ m_H(t) &= c_1 e^{-0,2t}, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

kde $c_1 > 0$ je libovolná konstanta.

Víme, že řešení nehomogenní úlohy hledáme ve tvaru

$$m(t) = m_H(t) + m_P(t).$$

Pomocí metody neurčitých koeficientů budeme hledat konstatní partikulární řešení nehomogenní rovnice $m_P(t)$. Pro $m_P = A$ je $m'_P = 0$,

$$\begin{aligned}0 + 0,2m &= 8\\ 0,2A &= 8\\ A &= \frac{8}{0,2}\\ A &= 40.\end{aligned}$$

Tím dostáváme obecné řešení nehomogenní rovnice

$$m(t) = c_1 e^{-0,2t} + 40.$$

Ze zadání nám plyne počáteční podmínka $m(0) = 0$. Díky ní vyjádříme konstantu c_1.

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + 40 \\ c_1 &= -40. \end{aligned}$$

Následně získáme konkrétní řešení rovnice

$$m(t) = -40e^{-0,2t} + 40.$$

Dále nás zajímá, kolik listí a jehličí bude na školním pozemku za 3 roky, 5 let a 10 let. V případě tří let řešíme úlohu

$$\begin{aligned} m(3) &= x \\ x &= -40e^{-0,2\cdot 3} + 40 \\ x &= -40e^{-0,6} + 40 \\ x &= -40(e^{-0,6} - 1) \\ x &\doteq 18,05. \end{aligned}$$

V případě pěti let řešíme úlohu

$$\begin{aligned} m(5) &= x \\ x &= -40e^{-0,2\cdot 5} + 40 \\ x &= -40e^{-1} + 40 \\ x &= -40(e^{-1} - 1) \\ x &\doteq 25,28. \end{aligned}$$

Pro deset let řešíme úlohu

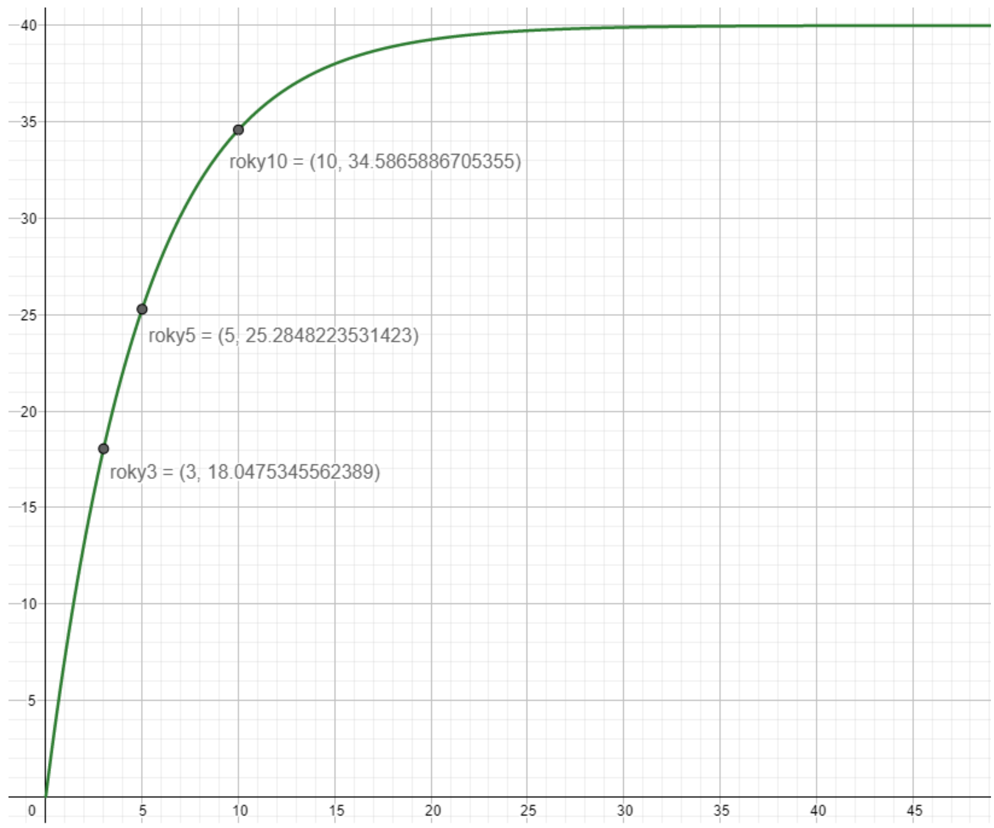
$$\begin{aligned} m(10) &= x \\ x &= -40e^{-0,2\cdot 10} + 40 \\ x &= -40e^{-2} + 40 \\ x &= -40(e^{-2} - 1) \\ x &\doteq 34,59. \end{aligned}$$

Potřebujeme-li znát, k jaké hodnotě bude množství hmoty konvergovat s rostoucím časem, musíme vypočítat limitu

$$\lim_{t\to\infty}\left(-e^{-2t}+40\right)=40,$$

protože první člen konverguje k nule.

Za tři roky bude na školním pozemku asi 18,05 kg hmoty na jeden m^2. Za pět let bude na pozemku asi 25,28 kg hmoty na jeden m^2. Za deset let bude na pozemku asi 34,59 kg hmoty na jeden m^2. S roustocím časem se bude množství hmoty přibližovat hodnotě 40 kg hmoty na jeden m^2. △



Obrázek 3.6: Množství spadané hmoty v kg na jeden m^2, na vodorovné ose čas vyjádřený v letech.; Archiv autora

Příklad 3.1.6 *Dvojice mužů našla v neděli 7. 7. 2019 u břehu Orlické přehrady utonulého muže ve věku 25 let. Přivolaná policejní hlídka změřila v 00:30 hodin teplotu oběti* $29\,°C$. *Zároveň duchaplně změřila také teplotu vody, která byla* $14\,°C$. *Patolog se na místo dostavil v 01:15 hodin a naměřil teplotu těla* $28,13\,°C$. *I on změřil teplotu Orlíku, která byla stále stejná (teplotu vody v přehradě budeme považovat za konstantní, což ráno potvrdila i vedoucí hráze).*

Kdy došlo k úmrtí, pokud předpokládáme, že zesnulý byl zdravý jedinec s teplotou těla $36,6\,°C$*? Jak se změnil zápis času úmrtí patologem, jestliže následným šetřením bylo zjištěno, že utonulý měl v inkriminovaný večer horečku* $37,5\,°C$*? Jaké by byly okolnosti smrti, kdyby se ukázalo, že zesnulý byl ještě v plné síle viděn ve 22:00 hodin na zábavě? Pro jednodnoduchost předpokládejme, že teplota těla klesá rychlostí přímo úměrnou rozdílu teploty těla a teploty okolí.*

(Data ČHMÚ.)

Řešení:

Zvolme $t = t_0 = 0$ pro dobu prvního měření v 00:30 hodin. Označme teplotu těla v čase t (měřeno v hodinách) jako $T = T(t)$. Dále označme teploty prvního měření v čase $t_0 = 0$ jako $T_0 = 29$ a teplotu měřenou patologem o 3/4 hodiny později, tj. v čase $t = t_1 = 0,75$ jako $T_1 = 28,13$. Teplotu vody označme $T_R = 14$, teplotu lidského těla $T_L = 36,6$ a teplotu při horečce $T_H = 37,5$. Protože změna teploty je přímo úměrná rozdílu teploty těla a okolní vody (s konstantou úměrnosti $k > 0$), splňuje aktuální teplota těla diferenciální rovnici

$$T'(t) = k(T_R - T(t)).$$

Jejím řešením metodou separace proměnných postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{T'}{T_R - T} &= k \\
\int \frac{T'}{T_R - T}\,\mathrm{d}t &= \int k\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{\mathrm{d}T}{T_R - T}\,\mathrm{d}t &= kt + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
-\ln|T_R - T| &= kt + c \\
\ln|T_R - T| &= -kt + c \\
T_R - T &= \pm c_1 e^{-kt}, \quad c_1 \neq 0 \\
T_R - T &= -c_2 e^{-kt}, \quad c_2 > 0 \text{ pro } T > T_R
\end{aligned}$$

$$T = T_R + c_2 e^{-kt}.$$

Obecné řešení rovnice je tedy

$$T(t) = T_R + c_2 e^{-kt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ke zjištění konstant c_2 a k bude nutné použít obou naměřených teplot. Hodnotu c_2 určíme z počáteční podmínky $T(0) = T_0$

$$\begin{aligned} T_0 &= T_R + c_2 e^0 \\ c_2 &= T_0 - T_R \\ c_2 &= 29 - 14 = 15. \end{aligned}$$

Další počáteční podmínka $T(t_1) = T_1$ nám umožní zjistit konstantu k

$$\begin{aligned} T_1 &= T_R + c_2 e^{-kt} \\ T_1 &= T_R + c_2 e^{-3k/4} \\ T_1 - T_R &= c_2 e^{-3k/4} \\ \frac{T_1 - T_R}{c_2} &= e^{-3k/4} \\ -\frac{3k}{4} &= \ln \frac{T_1 - T_R}{c_2} \\ k &= -\frac{4}{3} \ln \frac{T_1 - T_R}{c_2} \\ k &= -\frac{4}{3} \ln \frac{T_1 - T_R}{c_2} \\ k &= -\frac{4}{3} \ln \frac{28,13 - 14}{15} = -\frac{4}{3} \ln \frac{14,13}{15} \\ k &\doteq 0,08. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy konkrétní řešení rovnice

$$T(t) = 14 + 15 e^{-0,08t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Pro výpočet času úmrtí musíme nejprve zjistit, v jakém čase teplota daná funkcí (3.5) nabývala hodnoty teploty živého lidského těla. Tu budeme uvažovat nejprve pro zdravého člověka $T_L = 36,6\,°\mathrm{C}$. Řešíme tedy rovnici

$$\begin{aligned}
T_R + c_2 e^{-kt_L} &= T_L \\
c_2 e^{-kt_L} &= T_L - T_R \\
e^{-kt_L} &= \frac{T_L - T_R}{c_2} \\
-kt_L &= \ln \frac{T_L - T_R}{c_2} \\
t_L &= -\frac{1}{k} \ln \frac{T_L - T_R}{c_2} \\
t_L &= -\frac{100}{8} \ln \frac{36,6 - 14}{15} = -\frac{25}{2} \ln \frac{22,6}{15} \\
t_L &\doteq -5,12\,\mathrm{h} \doteq -5\mathrm{h}\,7\mathrm{min}.
\end{aligned}$$

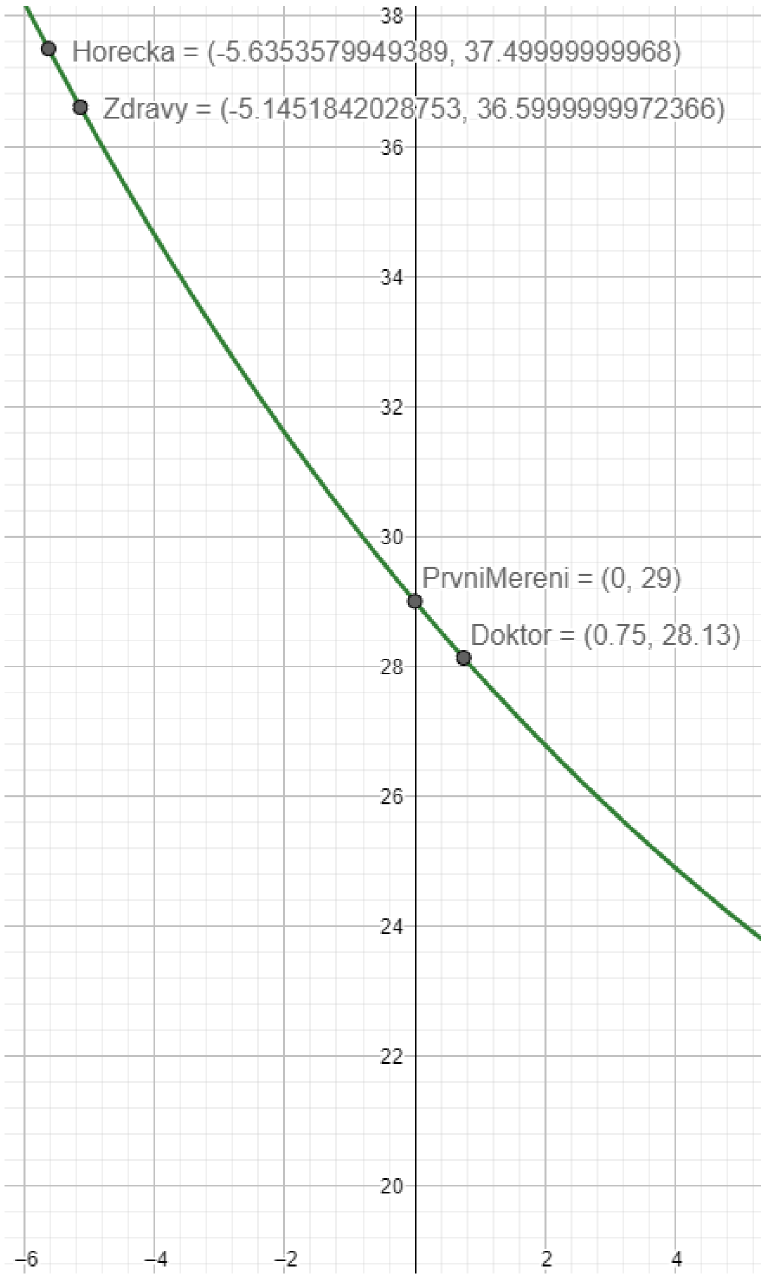
Pokud předpokládáme, že zemřelý byl zdravý, zemřel přibližně 5 hodin před prvním měřením policejní hlídkou, tedy kolem 19:30 hodin.

Analogicky zjistíme dobu úmrtí pro jedince s horečkou záměnou teploty T_L za teplotu $T_H = 37,5$.

$$\begin{aligned}
t_H &= -\frac{1}{k} \ln \frac{T_H - T_R}{c_2} \\
t_H &= -\frac{100}{8} \ln \frac{37,5 - 14}{15} = -\frac{25}{2} \ln \frac{23,5}{15} \\
t_H &\doteq -5,61\,\mathrm{h} \doteq -5\mathrm{h}\,37\mathrm{min}.
\end{aligned}$$

Předpokládáme-li, že dotyčný zemřel s horečkou, zjistíme, že doba úmrtí byla přibližně 5 hodin 37 minut před měřením policejní hlídkou. Dotyčný zemřel krátce před 19. hodinou.

Z dosud vypočítaných hodnot vyplývá, že byl-li dotyčný spatřen ještě ve 22:00 hodin živý, musely okolnosti smrti být jiné než utonutí. Tělo muselo chladnout podstatně rychleji, což nedovolovala voda v přehradě. Lze se tedy domnívat, že na místo nálezu byla mrtvola přemístěna z prostředí výrazně chladnějšího než voda v přehradě. Tuto teorii potvrdili i kriminalisté. Vyšetřování ukončili závěrem, že mrtvý zemřel po hádce a rvačce ve sklepě hostince, kde se zábava konala. △



Obrázek 3.7: Teplota naměřená mrtvole. Na vodorovné ose čas v hodinách, počátek nastaven na první měření policejní hlídkou. Jsou vyneseny hodnoty druhého měření doktorem a hodnoty zdravého člověka a člověka s horečkou.; Archiv autora

Příklad 3.1.7 *Úderem 11. hodiny vyndala babička upečenou kachnu z trouby. Kachnu pekla za stálé teploty 200 °C. Sondážním teploměrem byla 15 minut po vyndání zjištěna teplota 120 °C. Po dalších 15 minutách teplota klesla na 77 °C. Předpokládejme, že teplota kachny klesá rychlostí přímo úměrnou rozdílu teploty kachny a teploty místnosti.*

Jaká je teplota v kuchyni? (Předpokládáme, že teplota byla po celou dobu konstantní.) Za jak dlouho teplota kachny klesne na 70 °C (tj. na optimální teplotu pro podávání)?

(Vlastní data.)

Řešení:

Označme teplotu kachny v čase t (měřeno v minutách) jako $T = T(t)$ a teplotu místnosti jako T_M. Víme, že teplota kachny klesá rychlostí přímo úměrnou rozdílu teploty kachny a teploty místnosti, konstantu úměrnosti označíme $k > 0$. Teplota kachny musí splňovat diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_M),$$

kterou budeme řešit metodou separace proměnných

$$\begin{aligned}
\frac{T'}{T - T_M} &= -k \\
\int \frac{T'}{T - T_M}\,\mathrm{d}t &= -\int k\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{\mathrm{d}T}{T - T_M} &= -kt + c\ ,\ T - T_M > 0 \\
T - T_M &= c_1 e^{-kt},
\end{aligned}$$

kde $c_1 > 0$ je libovolná konstanta.
Obecné řešení rovnice má tvar

$$T(t) = c_1 e^{-kt} + T_M, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ze zadání nám plynou tři počáteční podmínky

$$T(0) = 200, \quad T(15) = 120, \quad T(30) = 77.$$

S jejich využitím získáme nelineární soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} c_1 e^{-0k} + T_M &= 200 \\ c_1 e^{-15k} + T_M &= 120 \\ c_1 e^{-30k} + T_M &= 77. \end{aligned}$$

Pro zjednodušení použijeme substituci $E_K = e^{-15k}$ a dostaneme

$$\begin{aligned} c_1 + T_M &= 200 \\ c_1 E_K + T_M &= 120 \\ c_1 E_K^2 + T_M &= 77. \end{aligned}$$

Z první rovnice soustavy vyjádříme T_M a dosadíme výraz do zbývajících dvou rovnic

$$T_M = 200 - c_1 \tag{3.6}$$
$$c_1 E_K + 200 - c_1 = 120 \tag{3.7}$$
$$c_1 E_K^2 + 200 - c_1 = 77. \tag{3.8}$$

Z rovnic (3.7), (3.8) vytkneme c_1

$$c_1(E_K - 1) = -80 \tag{3.9}$$
$$c_1(E_K^2 - 1) = -123. \tag{3.10}$$

Rovnici (3.10) rozložíme na součin

$$c_1(E_K - 1)(E_K + 1) = -123.$$

Je zřejmé, že jeho první dva členy jsou stejné jako levá strana rovnice (3.9), můžeme tedy psát

$$-80(E_K + 1) = -123.$$

Odtud postupně dostáváme

$$\begin{aligned} E_K + 1 &= \frac{-123}{-80} \\ E_K &= \frac{123}{80} - \frac{80}{80} \\ E_K &= \frac{43}{80}. \end{aligned}$$

Návratem k substituci $E_K = e^{-15k}$ zjistíme hodnotu k

$$\begin{aligned} e^{-15k} &= \frac{43}{80} \\ -15k &= \ln\frac{43}{80} \\ k &= -\frac{1}{15}\ln\frac{43}{80}. \end{aligned}$$

Z rovnice (3.9) vypočítáme konstantu c_1

$$\begin{aligned} c_1(E_K - 1) &= -80 \\ c_1 &= \frac{-55}{E_K - 1} \\ c_1 &= \frac{80}{1 - E_K} \\ c_1 &= \frac{80 \cdot 80}{37} \\ c_1 &\doteq 173. \end{aligned}$$

Využitím rovnice (3.6) lze dopočítat teplotu místnosti

$$\begin{aligned} T_M &= 200 - c_1 \\ T_M &= 27. \end{aligned}$$

Teplota místnosti je 27 $°C$.

Do schladnutí kachny na teplotu $T_P = 70\,°C$, uplyne čas t_P splňující rovnost

$$T(t_P) = c_1 e^{-kt_P} + T_M = T_P.$$

Odtud postupně vyjádříme hledaný čas

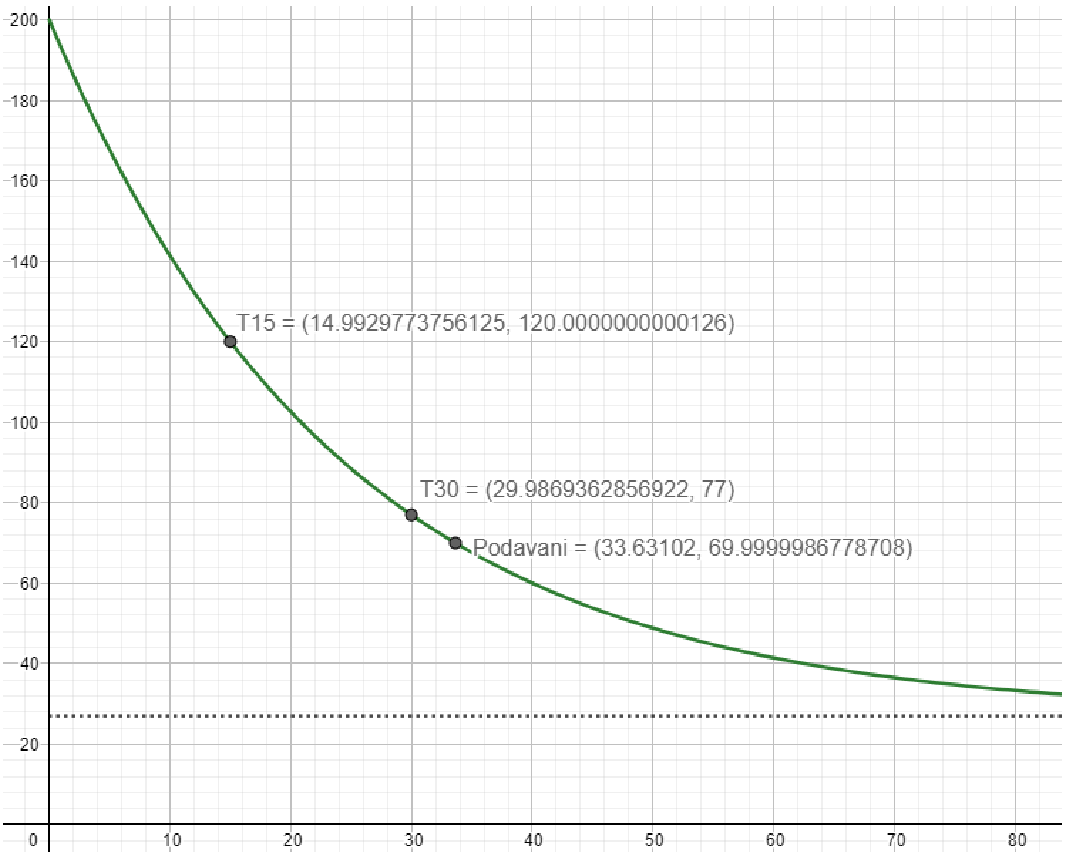
$$\begin{aligned} c_1 e^{-kt_P} &= T_P - T_M \\ e^{-kt_P} &= \frac{T_P - T_M}{c_1} \\ -kt_P &= \ln\frac{T_P - T_M}{c_1} \\ t_P &= -\frac{1}{K}\ln\frac{T_P - T_M}{c_1}, \end{aligned}$$

po dosazení dostáváme

$$t = \frac{1}{\frac{1}{15} \cdot \ln \frac{43}{80}} \cdot \ln \frac{70 - 27}{173}$$
$$t = \frac{15}{\ln \frac{43}{80}} \cdot \ln \frac{43}{173}$$

$$t \doteq 33,7.$$

Kachnu tedy můžeme začít podávat v 11 hodin 34 minut. $\triangle$



Obrázek 3.8: Teplota uvnitř kachny, na vodorovné ose čas v minutách od vyndání z trouby. Čárkovaně je vyznačena teplota místnosti.; Archiv autora

Příklad 3.1.8 *Australská národní banka vydala vloni zhruba 50 milionů bankovek s tištěnou gramatickou chybou. Chyba byla objevena půl roku od vypuštění emise do oběhu. Díky tomu je v současnosti jedna pětina z celkového počtu padesátidolarových bankovek chybná. Bylo rozhodnuto, že banka nahradí chybné bankovky novými. Předpokládá se, že každý den australské banky vymění zhruba 70 milionů bankovek. Z toho je 30 milionů bankovek právě v nominální hodnotě 50 australských dolarů.*

Za jak dlouho bude vyměněno 25 %, 50 %, 75 %, 90 % vadných bankovek? Za jak dlouho bude v oběhu jen 10 % padesátidolarových bankovek vadných?

(Stonišová, 2019)

<u>*Řešení:*</u>

Označme počet vadných bankovek v čase t (měřeno ve dnech) jako $V = V(t)$ a počet nových bankovek jako $N = N(t)$. V současnosti, tj. v $t = 0$ víme, že

$$V(0) = 50 \cdot 10^6, \quad N(0) = 0.$$

Celkový počet padesátidolarových bankovek je konstantní a roven pětinásobku $V(0)$, tedy

$$C = V(t) + N(t) = 250 \cdot 10^6.$$

Víme, že bankami proteče denně $v = 30 \cdot 10^6$ z nich. Zachycené vadné bankovky každodenně vymění za nové. Rychlost výměny závisí na aktuální hustotě vadných bankovek v celkovém počtu a je proto dána vztahem

$$v(t) = \frac{V(t)}{C} \cdot v.$$

Počet vadných bankovek v oběhu v čase t (měřeno ve dnech) je dán diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -v(t) = -\frac{v}{C} V(t).$$

Tuto rovnici budeme řešit metodou separace proměnných.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= -\frac{v}{C} V(t) \\ \int \frac{V'(t)}{V(t)} \, \mathrm{d}t &= -\int \frac{v}{C} \, \mathrm{d}t \\ \int \frac{1}{V} \, \mathrm{d}V &= -\frac{v}{C} \cdot t \\ \ln |V| &= -\frac{v}{C} \cdot t + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme obecné řešení diferenciální rovnice

$$V(t) = K_1 e^{-\frac{v}{C}t}, \quad K_1 \in \mathbb{R}.$$

Hodnotu K_1 určíme z počáteční podmínky

$$V(0) = K_1 \cdot e^0 = 50 \cdot 10^6$$

a dosazením do obecného řešení dostaneme

$$V(t) = 50 \cdot 10^6 \cdot e^{-\frac{v}{C}t} = 50 \cdot 10^6 \cdot e^{-3t/25}, \quad t \geq 0.$$

Počet vadných bankovek v oběhu bude klesat exponenciálně.

Označme poměr vyměněných vadných bankovek z celkového počtu původních vadných bankovek jako p. Čas $t = t_p$, ve kterém dojde k výměně části vadných bankovek, musí splňovat rovnici

$$\frac{V(t_p)}{V(0)} = 1 - p,$$

protože v oběhu zůstane část $(1 - p)$ vadných.

Postupným řešením vzhledem k t_p dostáváme

$$\begin{aligned} e^{-\frac{v}{C}t_p} &= \frac{(1-p)V(0)}{K_1} \\ -\frac{v}{C}t_p &= \ln \frac{(1-p)V(0)}{K_1} \\ t_p &= -\frac{C}{v} \ln \frac{(1-p)V(0)}{K_1}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že v našem případě $K_1 = V(0)$, dostáváme vzorec pro výpočet času výměny požadovaného množství vadných bankovek

$$t_p = -\frac{C}{v} \ln(1-p) = -\frac{25}{3} \ln(1-p).$$

Postupným dosazením dostáváme

$$t_{0,25} = -\frac{25}{3} \ln(1 - 0,25) = -\frac{25}{3} \ln(0,75) \doteq 2,4,$$

$$t_{0,5} = -\frac{25}{3} \ln(1 - 0,5) = -\frac{25}{3} \ln(0,5) \doteq 5,78,$$

$$t_{0,75} = -\frac{25}{3}\ln(1-0,75) = -\frac{25}{3}\ln(0,25) \doteq 11,55,$$
$$t_{0,9} = -\frac{25}{3}\ln(1-0,9) = -\frac{25}{3}\ln(0,1) \doteq 19,19.$$

Dospěli jsme k závěru, že 25 % vadných bankovek bude vyměněno za 3 dny, 50 % za 8 dní, 75 % za 15 dní, 90 % za 25 dní.

Odpověď na druhou otázku budeme řešit analogicky. Jen vznikne vydělením aktuálního počtu vadných bankovek celkovým počtem padesátidolarových bankovek

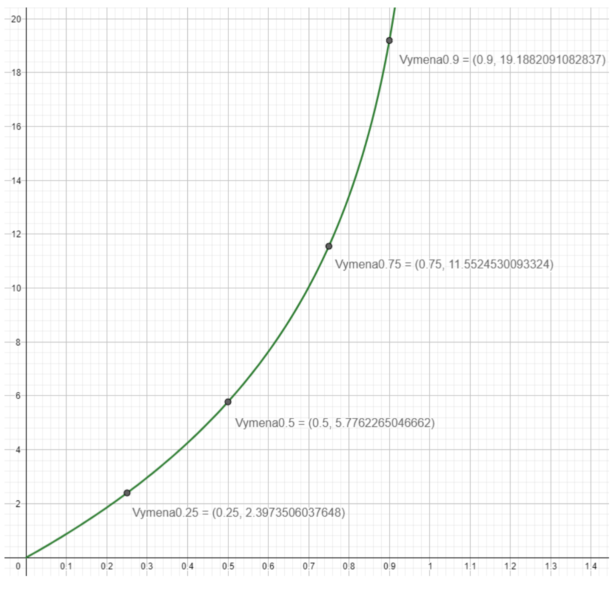
$$\frac{V(t_p)}{C} = p.$$

Analogickým postupem odtud vyjádříme

$$t_p = -\frac{C}{v}\ln\frac{pC}{K_1} = -\frac{C}{v}\ln\frac{pC}{V(0)},$$

což pro konkrétní hodnoty číselně znamená

$$t_{0,1} = -\frac{25}{3}\ln\frac{0,1\cdot 250}{50} = -\frac{25}{3}\ln 0,5 \doteq 7,4. \quad \triangle$$



Obrázek 3.9: Průběh výměny bankovek. Na vodorovné ose čas ve dnech od prvního dne výměny.; Archiv autora

Příklad 3.1.9 *Sousedův rybník Dvořiště u Obrataně má rozlohu 9,6 hektarů a předpokládanou kapacitu 1500 dospělých ryb. Před pěti lety bylo do rybníka nasazeno 50 ryb. Po prvním roce se počet ryb v rybníku zdvojnásobil.*

Kdy je dosaženo poloviční kapacity rybníku a kdy bude v rybníku 1000 ryb? Předpokládáme konstantní rychlost množení ryb.

(Český rybářský svaz, 2020)

Řešení:

Označme počet ryb v čase t (počítáno v letech) jako $p = p(t)$, nosnou kapacitu prostředí jako K a rychlost růstu jako r. Aktuální počet ryb je dán diferenciální rovnicí

$$p' = rp\left(1 - \frac{p}{K}\right),$$

kterou budeme řešit metodou separace proměnných. Postupně dostáváme

$$\frac{p'}{p\left(1 - \frac{p}{K}\right)} = r$$

$$\int \frac{p'}{p\left(1 - \frac{p}{K}\right)}\,\mathrm{d}t = \int r\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{p\left(1 - \frac{p}{K}\right)} = rt + c. \tag{3.11}$$

Integrál vlevo označme jako I

$$I = \int \frac{1}{p\left(1 - \frac{p}{K}\right)}\,\mathrm{d}p = \int \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{1 - \frac{p}{K}}\right)\mathrm{d}p$$

a budeme ho řešit pomocí parciálních zlomků

$$1 = A\left(1 - \frac{p}{K}\right) + Bp$$

s neznámými $A, B \in \mathbb{R}$.
Pro $p = 0$ máme

$$\begin{aligned} 1 &= A \cdot 1 + 0 \\ A &= 1. \end{aligned}$$

Pro $p = K$ máme

$$\begin{aligned} 1 &= A \cdot 0 + B \cdot K \\ B &= \frac{1}{K}. \end{aligned}$$

Integrál I tedy vyjádříme jako

$$\int \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{1 - \frac{p}{K}} \, \mathrm{d}p \right) = \int \frac{1}{p} \, \mathrm{d}p + \int \frac{1}{K\left(1 - \frac{p}{K}\right)} \, \mathrm{d}p = \int \frac{1}{p} \, \mathrm{d}p + \int \frac{1}{K - p} \, \mathrm{d}p =$$

$$= \ln |p| - \ln |K - p| = \ln \left| \frac{p}{K - p} \right|.$$

Zpětným dosazením do (3.11) dostáváme

$$\ln \left| \frac{p}{K - p} \right| = rt + c, \text{ pro } p \in (0, K),$$

což postupně upravíme

$$\begin{aligned} \frac{p}{K - p} &= c_1 e^{rt} \\ p &= c_1 e^{rt}(K - p) \\ 0 &= c_1 e^{rt} K - c_1 e^{rt} p - p \\ 0 &= c_1 e^{rt} K - p(c_1 e^{rt} + 1) \\ -c_1 e^{rt} K &= -p(c_1 e^{rt} + 1) \\ \frac{c_1 e^{rt} K}{c_1 e^{rt} + 1} &= p \\ \frac{K}{c_2 e^{-rt} + 1} &= p. \end{aligned}$$

Obecné řešení diferenciální rovnice je tedy

$$p(t) = \frac{K}{c_2 e^{-rt} + 1}, \quad t \geq 0.$$

Díky počáteční podmínce $p(0) = 50 =: p_0$ vyjádříme konstantu c_1

$$\frac{K}{(c_1 e^{-rt} + 1)} = 50$$

$$\frac{K}{(c_1 e^{0} + 1)} = 50$$

$$\frac{K}{(c_1 + 1)} = 50$$

$$K = 50c_1 + 50$$

$$\frac{K - 50}{50} = c_1$$

$$\frac{K - p_0}{p_0} = c_1.$$

Konkrétní řešení rovnice je tedy

$$p(t) = \frac{K}{\frac{K - p_0}{p_0} e^{-rt} + 1},$$

což lze upravit jako

$$p(t) = \frac{K}{\frac{(K - p_0)e^{-rt} + p_0}{p_0}}$$

$$p(t) = \frac{Kp_0}{p_0 + (K - p_0)e^{-rt}}.$$

Poznamenejme, že toto řešení je pro $0 < p_0 < K$ definováno na celém $\mathbb{R}$.
Víme, že počet ryb se po prvním roce zdvojnásobil, čili můžeme psát

$$p(1) = \frac{Kp_0}{p_0 + (K - p_0)e^{-r \cdot 1}} = 2p_0,$$

odkud vyjádříme koeficient růstu r

$$\frac{K}{p_0 + (K - p_0)e^{-r}} = 2$$

$$K = 2p_0 + 2(K - p_0)e^{-r}$$

$$\frac{K - 2p_0}{2(K - p_0)} = e^{-r}$$

$$\ln \frac{K - 2p_0}{2(K - p_0)} = -r$$

$$r = \ln \frac{2(K - p_0)}{K - 2p_0}$$

$$r = \ln \frac{2(1500 - 50)}{1500 - 100}$$

$$r = \ln \frac{2900}{1400}$$

$$r = \ln \frac{29}{14}.$$

Dalším úkolem bylo zjistit, kdy bude v rybníku 750 ryb. Musíme tedy vyřešit rovnici

$$\begin{aligned}
p(t) &= \frac{K}{2} \\
\frac{K}{\frac{K-p_0}{p_0}e^{-rt}+1} &= \frac{K}{2} \\
2 &= \frac{K-p_0}{p_0}e^{-rt}+1 \\
1 &= \frac{K-p_0}{p_0}e^{-rt} \\
p_0 &= (K-p_0)e^{-rt} \\
\frac{p_0}{K-p_0} &= e^{-rt} \\
\ln\frac{p_0}{K-p_0} &= -rt \\
rt &= \ln\frac{K-p_0}{p_0} \\
t &= \frac{1}{r}\ln\frac{K-p_0}{p_0} \\
t &= \frac{1}{\ln\frac{29}{14}}\ln\frac{1500-50}{50} \\
t &= \frac{1}{\ln\frac{29}{14}}\ln 29 \\
t &\doteq 4,62.
\end{aligned}$$

V rybníku bude 750 ryb asi za 4,62 roku. $\triangle$

V další části úloha zjišťuje, za jak dlouho bude v rybníku 1000 ryb. Tento počet odpovídá 2/3 kapacity rybníka. Musíme tedy vyřešit rovnici ve tvaru

$$p(t) = \frac{2K}{3}$$

$$\frac{K}{\frac{K-p_0}{p_0}e^{-rt}+1} = \frac{2K}{3}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{K-p_0}{p_0}e^{-rt}+1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{K-p_0}{p_0}e^{-rt}$$

$$\frac{p_0}{2} = (K-p_0)e^{-rt}$$

$$\frac{p_0}{2(K-p_0)} = e^{-rt}$$

$$\ln\frac{p_0}{2(K-p_0)} = -rt$$

$$rt = \ln\frac{2(K-p_0)}{p_0}$$

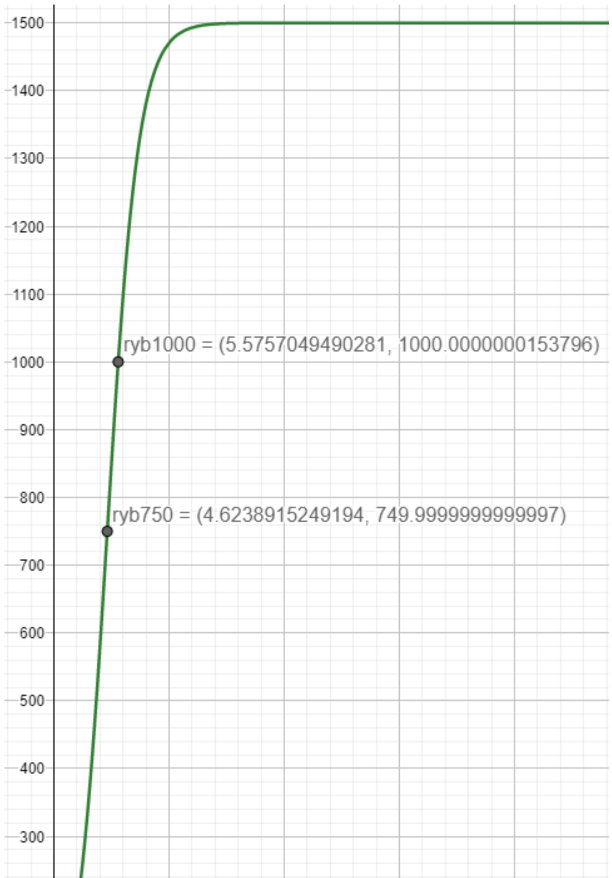
$$t = \frac{1}{r}\ln\frac{2(K-p_0)}{p_0}$$

$$t = \frac{1}{\ln\frac{29}{14}}\ln\frac{2(1500-50)}{50}$$

$$t = \frac{1}{\ln\frac{29}{14}}\ln 58$$

$$t \doteq 5,58.$$

Přibližně za 5,58 roku se v rybníku namnoží požadovaný počet ryb. △



Obrázek 3.10: Vypočítaný průběh počtu ryb v rybníku. Na vodorovné ose čas v letech od vysazení.; Archiv autora

Kapitola 4

Závěr

Tato diplomová práce měla za hlavní cíl vytvoření souboru konkrétních příkladů, kterými si uživatel sbírky může rozšířit zásobu procvičovacích úloh z oblasti integrálního počtu a diferenciálních rovnic. Zároveň byl při výběru kladen důraz na netypičnost a nestandardnost slovních úloh, se kterými se však specifické skupiny osob mohou i v běžném či pracovním životě setkat.

První část práce, s úlohami z oblasti integrálního počtu, je rozdělena do podkapitol seřazených podle vlastních kritérií. Příklady vedly k přímým výpočtům s využitím standardního aparátu řešení integrálů. Tyto úlohy jsou zajímavé především interpretací, kterou představují tvary a obsahy ploch vymezených zadáním. Neméně zajímavé jsou svým řešením úlohy využívající integrály k odvození vzorců pro obsahy obrazců, nebo povrchů či objemů základních typů těles. Úlohy poslední podkapitoly této části byly inspirovány životní zkušeností s každodenním užíváním léků osoby blízké rodiny. Proto jsem se po konzultaci s osobou z lékařského odborného prostředí ponořil do zevrubného probádání způsobu vstřebávání léčivé látky a pokusil se, na rozdíl od mnoha jiných pacientů podstupujících léčby, najít matematické řešení této poměrně běžné životní situace.

V druhé části, zaměřené na neobvyklé příklady využívající diferenciálních rovnic, jsou prezentovány výhradně slovní úlohy, u nichž bylo třeba nejprve slovní text převést do matematického jazyka a následně, povětšinou standardními metodami, vyřešit diferenciální rovnici. Velmi náročný byl výběr vhodných slovních úloh, ačkoliv běžný život přináší mnoho situací, pro které by se na první pohled nabízelo řešení zvoleným matematickým aparátem diferenciálních rovnic. Po hlubším zamyšlení jsem však dospěl k závěru, že v mnoha případech je konkrétní jev ovlivněn velkým množstvím faktorů a okolností, které nelze do výpočtu zahrnout a které by teoreticky vypočítaný výsledek značně zkreslovaly. Proto takové úlohy nebyly do sbírky úloh zařazeny. I v použitých úlohách musí být někdy přistoupeno k jisté míře idealizace běžné situace, tak, aby okolnosti odpovídaly parametrům pro použití diferenciálních rovnic.

Příklady jednotlivých okruhů diplomové práce mohou být přínosné a obohacující nejen pro studenty různých matematických oborů, ale mohou rozšířit obzory vědomostí i vyučujícím daných předmětů, nebo být zajímavým doplňkem informací pro odborníky z oboru lékařství, soudního znalectví či ochrany životního prostředí.

Psaní diplomové práce bylo rozhodně přínosem i pro mě samotného. Samostudiem odborné literatury jsem si průběžné rozšiřoval znalosti problematiky integrálního počtu a diferenciálních rovnic. Tvorba diplomové práce a promýšlení variant slovních úloh ve mně vzbudila potřebu hlubšího poznání zákonitostí a jevů z jiných oborů a profesí. Proto jsem se setkal s osobnostmi z oblasti lékařství, ústavu biologie či rybářství, které rozšířili mé, doposud velmi strohé vědomosti o léčivech, přeměně rostlinné hmoty v humus, nebo o potřebách vysazování ryb do našich stojatých vod.

Úloha o tloušťce ledu, jeho odtávání a bezpečnosti provozování zimních sportů na přehradách by v budoucnu mohla přesáhnout hranice nad rámec mojí diplomové práce a stát se podkladem pro hlubší prostudování problematiky. Mohla by se tak stát přínosem nejen pro provozovatele odpovědné za bezpečnost návštěvníků, vodohospodáře, ale i vodní záchranáře.

Literatura

[1] Český rybářský svaz, Místní organizace Pacov, Pacov, 2020.

[2] ČHMÚ, archiv dat

[3] DANĚČEK, Josef et al. Sbírka příkladů z matematiky I. 5., dopl. a opr. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. 110 s. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-7204-467-2.

[4] DITTRICH, Lukáš. *Kolik alkoholu v krvi tolerují v cizině? Nejběžnější je půl promile [online].* 2019 [cit. 2019-08-11]. Dostupné z: https://autobible.euro.cz/povolena-hladina-alkoholu-eu/

[5] EDWARDS, C a David E PENNEY. E*lementary differential equations.* 6th ed. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Prentice Hall, c2008, x, 623, I-6 p. ISBN 01-323-9730-7.

[6] GABAJOVÁ, Zuzana. *Na led na Lipně zatím ne, varují ledaři.* Českokrumlovský deník [online]. 2019, 1 [cit. 2019-03-10].

[7] Katedara botaniky, Přírodovědecká fakulta Jihočské univerzity v Českých Budějovicích, 2020.

[8] KOFROŇ, Josef. *Obyčejné diferenciální rovnice v reálném oboru.* 2. vyd. Praha: Karolinum, 2004, 285 s. Učební texty (Univerzita Karlova). ISBN 80-246-0946-0.

[9] KRAJC, Bohumil a Petr BEREMLIJSKI. *Obyčejné diferenciální rovnice.* Ostrava, Plzeň, 2012. Učební text. Technická univerzita Ostrava, Západočeská univerzita v Plzni.

[10] KŘIVAN Vlastimil. *Přednášky předmětu UMB 572 Matematická analýza IV.* Přírodovědecká fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. České Budějovice, léto 2013.

[11] KURZWEIL, Jaroslav. *Obyčejné diferenciální rovnice: úvod do teorie obyčejných diferenciálních rovnic v reálném oboru.* 1. vyd. Praha: SNTL, 1978, 418 s.

[12] MAYEROVÁ, Šárka, Jaromír KUBEN a Pavlína RAČKOVÁ. *Integrální počet funkcí jedné proměnné.* Ostrava: VŠB - Technická univerzita, 2006. ISBN 80-248-1191-x.

[13] PEHRSON, Alan L. Task & col. - *and Treatment Length–Dependent Effects of Vortioxetine on Scopolamine-Induced Cognitive Dysfunction and Hippocampal Extracellular Acetylcholine in Rats.* Journal of pharmacology and experimental therapeutics. 2016, , 11. ISSN 0022-3565.

[14] Přispěvatelé Wikipedie. *Havárie plošiny Deepwater Horizon.* In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2019-08-11]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Havárie_plošiny_Deepwater_Horizon

[15] SAMKOVÁ, Libuše. *Matematické modelování v biologických disciplínách.* V Českých Budějovicích: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 2011. ISBN 978-80-7394-300-4.

[16] SAMKOVÁ, Libuše. *Přednášky z předmětu KMA DFR Diferenciální a funkcionální rovnice.* Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. České Budějovice, zima 2015

[17] STONIŠOVÁ, Tereza. *V Austrálii kolují miliony bankovek s pravopisnou chybou.* Novinky.cz [online]. Novinky, 2019 [cit. 2020-02-15]. Dostupné z: https://www.novinky.cz/koktejl/clanek/v-australii-koluji-miliony-bankovek-s-pravopisnou-chybou-40282563

[18] ŠTĚPÁNKOVÁ, Hana. *Přednášky z předmětu KMA MA4 Matematická analýza IV.* Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. České Budějovice, zima 2014