

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta stavební

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Brno, 2021

Michal Kučera



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STAVEBNÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

**STOCHASTICKÉ DISKRÉTNÍ MODELOVÁNÍ
PORUŠOVÁNÍ BETONOVÝCH KONSTRUKCÍ**

STOCHASTIC DISCRETE MODELING OF PROGRESSIVE DAMAGE OF CONCRETE
STRUCTURES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Michal Kučera

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. MIROSLAV VOŘECHOVSKÝ,
Ph.D.

BRNO 2021



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

Studijní program	B3607 Stavební inženýrství
Typ studijního programu	Bakalářský studijní program s prezenční formou studia
Studijní obor	3647R013 Konstrukce a dopravní stavby
Pracoviště	Ústav stavební mechaniky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student	Michal Kučera
Název	Stochastické diskrétní modelování porušování betonových konstrukcí
Vedoucí práce	prof. Ing. Miroslav Vořechovský, Ph.D.
Datum zadání	30. 11. 2020
Datum odevzdání	22. 5. 2021

V Brně dne 30. 11. 2020

prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.
Vedoucí ústavu

prof. Ing. Miroslav Bajer, CSc.
Děkan Fakulty stavební VUT

ABSTRAKT

Práce se zabývá využitím deterministického modelování s vlivem nahodilosti materiálových parametrů k napodobení série experimentálních zkoušek betonových těles tvaru psí kosti při jednoosém excentrickém tahu zaměřujících se na vliv velikosti konstrukce na její mechanické vlastnosti, především na nominální pevnost. (*Size effect*). Úloha bude řešena jako úloha rovinné napjatosti pomocí dostupných diskrétních výpočetních metod.

KLÍČOVÁ SLOVA

diskrétní modelování, stochastické modelování, vliv velikosti, kvazikřehké materiály, porušování betonu

ABSTRACT

The work focuses on the use of deterministic discrete modeling with representation of spatial randomness in material parameters to simulate a series of experimental tests of concrete specimens in the shape of a dog bone, loaded in excentric uniaxial tension. The main focus is on the influence of the size of the structure on its mechanical properties, especially nominal strength (*Size effect*). The specimens are modeled as a plane stress problem using available discrete computational methods.

KEYWORDS

discrete modeling, stochastic modeling, size effect, quasi-brittle materials, damage of concrete structures

KUČERA, Michal. *Stochastické diskrétní modelování porušování betonových konstrukcí*. Brno, 2021, 43 s. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce: prof. Ing. Miroslav Vořechovský, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

Brno

.....

podpis autora

PODĚKOVÁNÍ

Především bych chtěl poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce panu prof. Ing. Miroslavu Vořechovskému, Ph.D. za odborné vedení, trpělivost a ochotu předávat mi velké množství svých poznatků a zkušeností, které mi byly oporou. Chtěl bych také poděkovat panu Ing. Janu Maškovi, Ph.D. za velkou technickou pomoc při tvorbě modelů a analýze dat. Také bych chtěl v neposlední řadě poděkovat své rodině za trpělivost a oporu.

Brno

.....

podpis autora

Obsah

Úvod	7
Cíle	8
1 Experiment	9
1.1 Geometrie zkušebních těles	9
1.2 Vybrané výsledky experimentů	10
2 Deterministické modely	12
2.1 Geometrie modelů	12
2.1.1 Úprava okrajů	13
2.2 Materiálové parametry	14
2.2.1 Kalibrace materiálových parametrů	15
2.2.2 Jednoznačnost materiálových parametrů	17
2.2.3 Vyhodnocení provedené kalibrace	18
2.3 Meze nominální pevnosti zkušebních těles	19
2.3.1 Mez stanovená MKP modely	20
2.4 Řízení a průběh zkoušky	24
2.4.1 Řízení posunu	25
2.4.2 Měření posunu	26
2.5 Výsledky	27
3 Stochastické modelování	32
3.1 Pravděpodobnostní rozdělení parametrů lokální pevnosti betonu	32
3.2 Prostorová proměnlivost jako náhodné pole	32
3.2.1 Modely s lokálním náhodným polem pevnosti	34
3.3 Kalibrace pole a výsledky	35
4 Diskuze	39
5 Závěr	40
Literatura	41
Seznam symbolů, veličin a zkratk	42
Seznam obrázků	43

Úvod

V oblasti konstrukčního a materiálového inženýrství se při studiu heterogenních kvazikřehkých kompozitů, krom konvenčně používaných spojitých metod, jako je metoda konečných prvků, již běžně používají diskrétní přístupy, které lépe vystihují některé mechanické vlastnosti těchto materiálů, jako je například nelineární změkčení, nebo energetické problémy související s heterogenitou daného materiálu.

Ukazuje se však, že u některých úloh, mají i diskrétní přístupy své limity. Například při studiu Size effectu ¹, narážíme u diskrétních modelů na jisté meze minimálních pevností, které nelze těmito modely podkročit. Ukazuje se tak, že hrubost zrn, která ovlivňuje množství energie potřebné k porušení prvku, není jediným jevem, kterým k Size effectu přispívá. Z tohoto důvodu je zaveden předpoklad, že je chování betonových konstrukcí ovlivněno také nahodilým uspořádáním materiálových parametrů po objemu konstrukce. Tímto problémem se u diskrétních prvků zabývá například článek Eliáš; Vořechovský; Skoček; Bažant [1], který je zaměřen na tříbodový ohyb diskrétně modelovaného trámce, s nahodilým uspořádáním materiálových parametrů.

Náplní této práce bude pomocí diskrétních přístupů napodobit Size effectový experiment při zkouškách jednoosého tahu, popsány v článku van Vliet; van Mier [2], který byl již napodoben v článku Vořechovský [3] pomocí konečněprvkostního softwaru ATENA. Nejdříve bude experiment napodoben diskrétními modely bez vlivu nahodilosti materiálu. Provede se odhad pevnostních mezí, kalibrace materiálu a následně několik sérií numerických zkoušek. Následně bude na tyto modely aplikováno pravděpodobnostní pole nahodilých materiálových parametrů, které bylo použito ve zmíněných pracích [3, 1]. Výsledky těchto dvou přístupů budou porovnány mezi sebou a následně se zmíněnými experimenty.

¹soubor jevů, které určitým způsobem přispívají k závislosti mechanických vlastností stavební konstrukce na konkrétních rozměrech

Cíle

- Napodobit sérii experimentálních tahových zkoušek betonového prvku tvaru psí kosti zaměřených na zkoumání vlivu velikosti zkoušeného vzorku na nominální pevnost, a to pomocí:
 - 2D diskrétního modelování opatřeného pouze geometrickou nahodilostí
 - 2D diskrétního modelování opatřeného nahodilým rozložením materiálových parametrů
- Simulované zkoušky porovnat s výsledky experimentů

1 Experiment

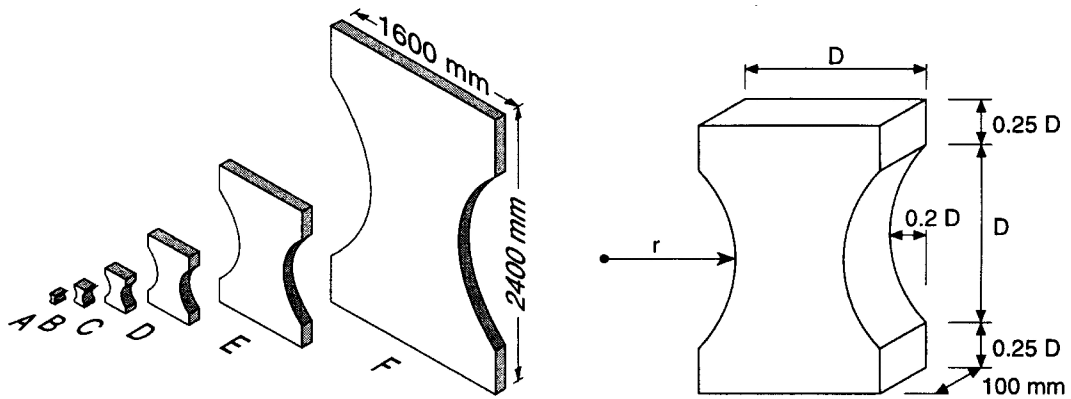
V první kapitole jsou popsána zvolená experimentální data, která sloužila jako podklad pro vytvoření numerických modelů, nastavení proměnných a provedení numerických studií. Jedná se zejména o popis geometrie zkušebních těles a dostupná data o materiálových parametrech. Detailní údaje z experimentů poslouží pro identifikaci materiálových parametrů a zpětně též jako nástroj pro validaci modelu a provedení predikcí.

V této práci bude k tomuto účelu sloužit experimentální studie [2] a disertační práce [4], ve které byly testována na tah geometricky podobná zkušební tělesa z betonu. Studie je unikátní pro svůj neobvyklý poměr velikostí zkušebních těles 1:32. Vzhledem k tomu, že se předložená práce zabývá krom modelování procesů porušování betonu i vlivem velikosti na pevnost, je zvolená experimentální studie ideální. Jedná se o pečlivě plánovaný a provedený experiment doktoranda van Vlieta na Technické univerzitě v nizozemském Delftu pod vedením uznávaného odborníka na experimenty s betonem prof. van Miera. Testovaná zkušební tělesa byla vyrobena jak z pískovce, tak z betonu a to v sérii, označené jako DRY, kde tuhnutí a tvrdnutí betonu probíhalo v laboratorních podmínkách, a v sérii připravované v klimatické místnosti, označené jako WET.

Pro účely numerického modelování v předložené práci byla vybrána série DRY. Jedná se konkrétně o sérii tahových zkoušek betonových vzorků ve tvaru psí kosti (dog bone specimens).

1.1 Geometrie zkušebních těles

Uvedená studie využívá geometrii psí kosti, která disponuje vhodným rozložením napětového pole tak, aby k porušení nedocházelo u podpor vlivem víceosého napětového pole. U všech rozměrů zkušebních těles se podařilo zvolenou geometrií dosáhnout toho, že makrotrhlina byla lokalizována do zúžené části, kde byla tělesa vystrojena zařízením k měření posunů a zpětného řízení zatěžovacího stroje. Geometrie je dána konstantní tloušťkou vzorku 100 mm, která byla použita pro všechna tělesa. Ostatní rozměry byly škálovány v závislosti na šířce D . Ta následně definuje veškeré další délkové poměry, které jsou detailně uvedeny na obrázku 1.1. Série se skládá z šesti velikostí A – F počínaje tělesem A o rozměru $D = 50$ mm. Každá další velikost zkušebního tělesa má rozměr rovný dvojnásobku předchozí velikosti. Největší těleso F má rozměr $D = 1600$ mm..

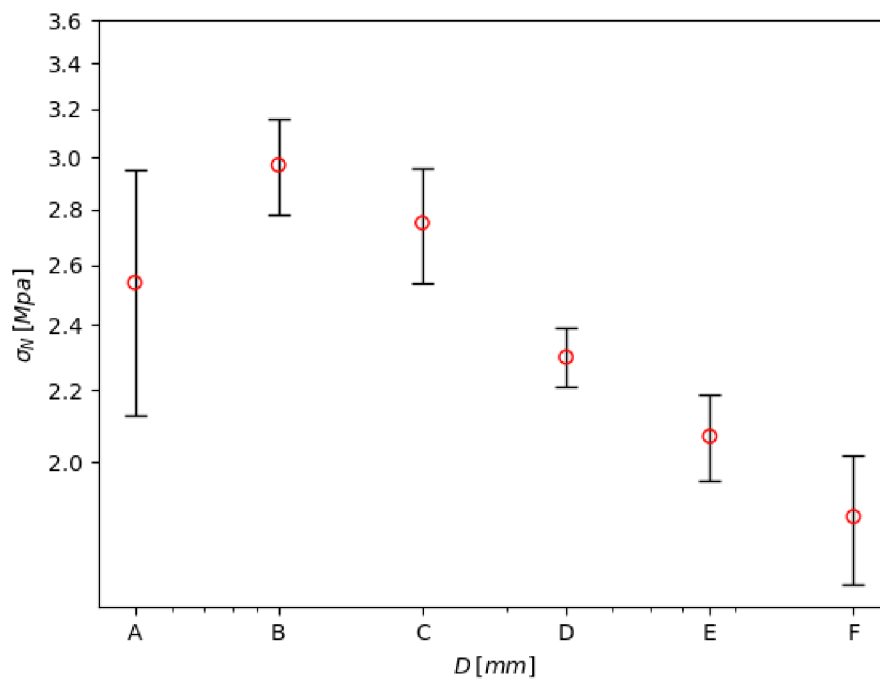


Type	A	B	C	D	E	F
D (mm)	50	100	200	400	800	1600
r (mm)	36.25	72.5	145	290	580	1160

Obr. 1.1: Geometrie modelů použitých v článku van Vliet; van Mier [2]

1.2 Vybrané výsledky experimentů

Naměřené křivky závislosti síly na řízeném posunutí a též závislost maximálního nominálního namětí na rozměru těles byly z dizertace van Vliet [4] a zmíněných článků převedeny do digitální podoby, aby mohly být snadněji porovnávány s námi získanými daty z numerických studií. Pro účely předložené práce postačí střední hodnoty a směrodatné odchylky nominálních pevností zkušebních těles (1.2) a LD diagram zkušebního tělesa velikosti B, pro kalibraci materiálových parametrů (2.2). Je potřeba poznamenat, že je nominální pevnost v experimentu definována jako maximální dosažená síla, vztažená na průřezovou plochu v polovině výšky nosníku. Stejnou definici budeme používat při následujících numerických zkouškách. Veškerá data pochází z článku van Vliet; van Mier [2].



Vzorek	A(10)	B(4)	C(7)	D(5)	E(4)	F(4)
σ_N (MPa)	2.54	2.97	2.75	2.30	2.07	1.86
	(0.41)	(0.19)	(0.21)	(0.09)	(0.12)	(0.16)

Obr. 1.2: nominálních pevností zkušebních těles

2 Deterministické modely

První typ numerického modelu, kterým se budeme zabývat, je diskretní model typu LDPM [5] jehož nahodilost spočívá pouze v náhodném uspořádání samotné geometrie modelu a nejsou do něj přidávány žádné další nahodilé jevy. Pro lepší orientaci v textu tento typ modelu nazveme jako deterministický, a to i přesto, že se nejedná o čistě deterministický model, neboť jednotlivé realizace modelu poskytují různou odpověď kvůli geometrické nahodilosti v rozmístění středů modelovaných tuhých „zrn“. Naopak model, jehož nahodilost nebude spočívat pouze v geometrickém uspořádání, budeme pro potřebu práce nazývat jako model stochastický.

Vytvoření deterministického modelu bez stochastických jevů nám umožňuje pohlízet na zdroje vlivu velikosti na pevnost oddeleně a pomůže nám odlišit samotný potenciál deterministického modelu a jeho případné limity. Podle dostupných prací, které se diskretními modely zabývají, předpokládáme, že je deterministický model schopný vystihnout jevy jako je velikost procesní zóny FPZ, šířku trhliny a vliv oslabených okrajů.

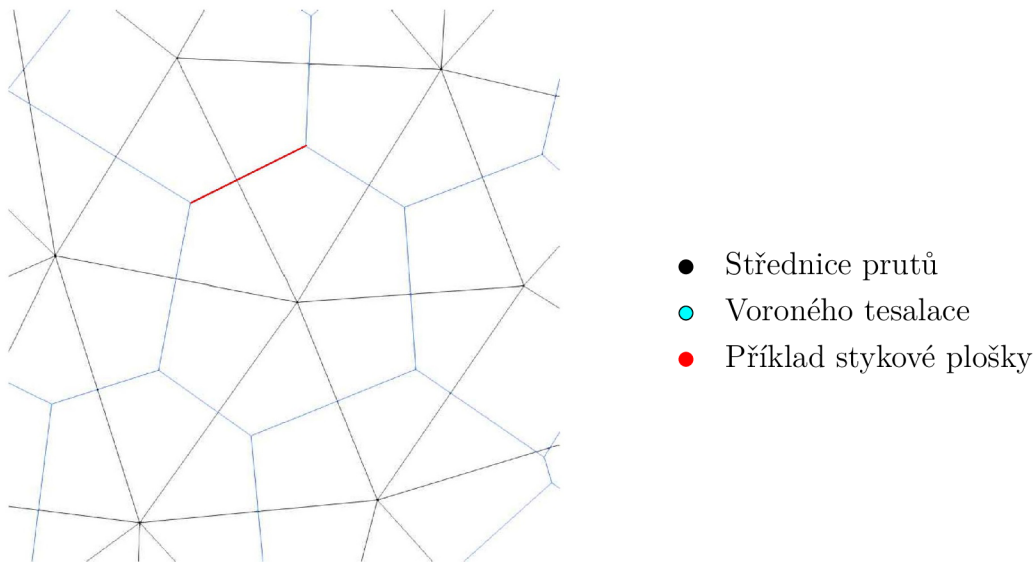
Očekáváme však, že modely nebudou schopny chování vzorků v experimentální zkoušce napodobit zcela. Zkušenosti autorů [1, 3] ukazují, že rozptyl odezvy modelu spojený s náhodným rozmístěním středů zrn v modelu je menší, než rozptyl experimentálních dat získaných se skutečným betonem. Náhodné rozmístění zrn a od toho odvinutá nahodilost v teselaci sice vede na rozptyl v rozměrech a orientací prutů, které reprezentují rozhraní mezi tuhými zrny, ale pokud se pro výpočet hodnot parametrů těchto prutů použijí deterministické materiálové parametry konstitutivního zákona, celkový rozptyl odezvy je poměrně malý.

Na základě těchto zkušeností a úvah lze očekávat, že např. nominální pevnost modelovaných těles nadměrných velikostí bude omezena spodní mezí, kterou deterministickým modelem není možné podkročit. Tomuto problému je dále věnována podkapitola 2.3.

2.1 Geometrie modelů

Pro účely práce byla vytvořena série rovinných diskretních modelů velikostí (A-F) s geometrií, která napodobuje geometrii těles, které byly použity ve dříve zmíněných experimentech [2]. Pro snížení výpočtové náročnosti modelů byla úloha pro účely práce uvažována jako rovinná, konkrétně úloha *rovinné napjatosti*.

Modely jsou generovány preprocesorem. Ten nejdříve vytvoří pomyslný obrys tvaru psí kosti, do kterého je potřeba umístit kružnice o průměru d_{\min} , které reprezentují jednotlivá zrna kameniva. Zrna jsou do geometrie generována náhodně s



Obr. 2.1: Geometrie prutových elementů

tím, že se po vložení každého zrna ověří, jestli jeho hranice neprotíná žádné ze sousedních zrn. Pokud zrno podmínku nesplňuje, je z geometrie odebráno. Prostor je dále rozdělen pomocí Voroného teselace, která v polovině spojnic středů zrn vytvoří kolmici definující stykovou plochu. Pomocí takto rozděleného prostoru jsou následně definovány prutové elementy, jejichž střednice je tvořena spojnici středů zrn. Průřez prutových elementů definuje již zmíněná styková plocha, na které jsou předepsány fyzikální vztahy mezi napětím a přetvořením materiálu. Takto provedená geometrie se nachází v místě, kde očekáváme porušení zkoušeného tělesa. V obdélníkových částech tělesa, poblíž podpor, je velikost d_{\min} vynásobená konstantou, závislou na velikosti zkoušeného vzorku. Zavedení této takzvané *hrubé diskretizace* je zvoleno s ohledem na rychlost generování modelů.

Krom samotné geometrie je nutné napodobit i okrajové podmínky. V experimentu bylo pro uchycení těles zkonstruováno unikátní zařízení pro vnášení nucené deformace tak, aby bylo umožněno volné otáčení kolem kotevních bodů na horním a dolním líci, kde je následně vnášen předepsaný posun. Pro napodobení těchto podmínek je horní a spodní okraj modelu tvořen nedeformovatelnou přímkou, která je v místě zmíněných kotevních bodů uchycena na rotačních podporách tak, aby okrajové podmínky co nejlépe napodobovaly experiment.

2.1.1 Úprava okrajů

Z článků, které se zabývají vlivem velikosti na nominální pevnost (tzv. size effect) betonu víme, že u vzorků malých velikostí dochází k poměrně výraznému poklesu je-

jich pevností oproti větším prvkům [2, 3]. To je způsobeno tím, že vrstva materiálu, která se nachází při okraji vzorku, má odlišné mechanické vlastnosti. Zdrojem této odlišnosti může být tzv. *wall effect*, tedy jev, kdy rozdělení velikostí zrn v blízkosti okraje musí být jiné, než uprostřed objemu, neboť při výrobě těles je přítomno bednění. Dalším vlivem je nerovnoměrné vysychání a smršťování, kdy průběh vysychání vrstvy pod povrchem těles je typicky odlišný od zbytku objemu. Dále může hrát roli vývin hydratačního tepla a s tím související rozdíly v teplotě během tvrdnutí: povrchová vrstva bývá chladnější díky přestupu tepla do okolí. Vzhledem k tomu, že tloušťka této vrstvy je přibližně konstantní a nezávislá na rozměrech zkušebních těles, ovlivňuje silněji tělesa menších rozměrů. Z tohoto důvodu jsou pro účely práce vytvořeny dva rozdílné typy modelů. U modelů označených $A_o - F_o$ byla středová část nosníku nejdříve nahrazena čtvercovou oblastí s délkou strany D , do které byla vygenerována síť diskretních prvků. Následně je vygenerovaná síť porovnána s obrysem tvaru psí kosti, a veškeré prutové elementy, které nespojují dvě zrna umístěná uvnitř obrysu jsou odstraněny. Obdobně byly vytvořeny oblasti s hrubou diskretizací. Tím že nebudou prutové elementy přímo kopírovat pomyslný obrys tvaru psí kosti, dojde v některých místech ke zmenšení nominální plochy. Dá se předpokládat, že právě v těchto oslabených místech může dojít k počátku šíření trhliny, a tím se sníží výsledná nominální pevnost tělesa. Takto získáme modely, které zjednodušeně napodobují vliv oslabených okrajů.

Protože však chceme mít možnost, odlišit vliv oslabených okrajů od dalších deterministických vlivů na Size effect, je potřeba vytvořit modely, u kterých bude nominální plocha, v kterémkoliv vodorovném řezu, totožná s plochou řezu tělesa psí kosti. Tyto modely budeme označovat $A_n - F_n$. U těchto modelů postupujeme obdobně jako u modelů $A_o - F_o$ s tím rozdílem, že po dokončení modelu veškeré středy zrn, nacházející se v blízkosti okraje ozrcadlíme přes kružnicovou pomyslnou hranici modelu a tyto nově vytvořené středy propojíme prutovými elementy se zbytkem modelu.

2.2 Materiálové parametry

Aby bylo možné zjištěná data z numerických zkoušek porovnávat s experimenty, je potřeba kromě geometrie zatěžovaného vzorku napodobit i materiálové parametry (dále MP). Diskretní modely, používané v této práci nám umožňují nastavovat lokální MP asociované s modelovanou *mezo-úrovní*. Jedná se tedy o parametry popisující chování jednotlivých stykových plošek mezi dvěma zrny. Konkrétně se jedná o lokální modul pružnosti v tahu E_t , lokální tahovou pevnost f_t , lomovou energii v tahu G_t , a součinitel α_0 . Na tyto parametry jsou pak navázány další parametry, jako např. lomová energie kontaktní plošky ve smyku apod. Je však důležité poznamenat,

že tyto materiálové charakteristiky nebudou přímo číselně odpovídat parametrům vzorku jako celku (homogenizované makroskopické charakteristiky spjaté s větším objemem materiálu). Proto je potřeba lokální (meziúrovňové) MP a makroskopické parametry, jako např. modul pružnosti E , Poissonovo číslo ν a pevnost materiálu, rozlišovat. V souvislosti s představeným konceptem modelování odezvy materiálu na mezoúrovni je již zřejmé, že pojem *pevnosti* jako určité maximální úrovně napětí, je problematický, neboť „pevnost“ vyjádřená maximální silou normovanou rozměry, je u heterogenních materiálu s neproporcionální závislostí síly na deformaci (s nelineární odezvou) spjatá s celou řadou jevů, jako jsou rozměry těles, nebo tvar geometrie, které ovlivňují pole napětí, viz. například habilitační práce Vořechovský [6].

2.2.1 Kalibrace materiálových parametrů

Při hledání vhodných MP, se zaměříme pouze na lokální modul pružnosti v tahu E_t , lokální tahovou pevnost f_t a lomovou energii G_t . Lokální modul pružnosti ve smyku E_s nebude nutné uvažovat, protože vztah mezi E_s a E_t je vázaný součinitelem α_0 , který je definovaný vztahem (2.1). Součinitel α_0 taktéž nebude třeba kalibrovat, jelikož je jeho hodnota odvozena od hodnoty Poissonova čísla přibližným vztahem (2.2), které je pro různé třídy betonu stejné. Součinitel α_0 bude tedy fixně stanoven konstantou 0.3.

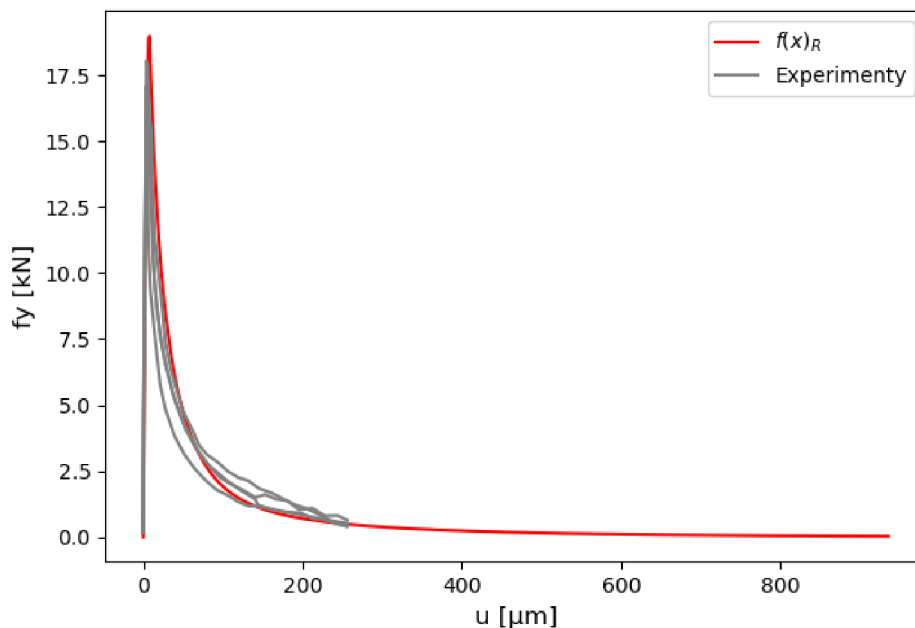
$$\alpha_0 = E_t/E_s \tag{2.1}$$

$$\nu = \frac{1 - \alpha_0}{4 + \alpha_0} \tag{2.2}$$

Dále se tedy postupuje tak, že se vybere jedna konkrétní velikost, v našem případě velikost B ($D = 100$ mm), která není silně ovlivněna prostorovou proměnlivostí materiálových parametrů, není výrazně ovlivněna oslabenými okraji a především není příliš náročná na výpočet. Pro kalibraci (identifikaci parametrů modelu) je totiž potřeba prohledat prostor vstupních parametrů, což vyžaduje vypočtení velkého počtu realizací celé zatěžovací zkoušky.

Začneme tím, že podle dat z experimentů nastavíme lokální modul pružnosti E_t . To bude poměrně jednoduché, jelikož tento parametr je jediný, který ovlivňuje sklon počáteční lineární větve diagramu. Stačí tedy nastavit E_t tak, aby sklon lineární větve odpovídal sklonu větve v experimentech. Souhlas nastaveného sklonu numerické zkoušky s experimentem vidíme na obrázku 2.2.

Přistoupíme tedy k nastavení pevnosti f_t , a lomové energii G_t . Hodnota f_t ovlivňuje pochopitelně především hodnotu F_t , tedy maximální sílu, která bude u zkoušky dosažena, zatímco hodnota G_t ovlivňuje duktilitu zkoušeného prvku, tedy množství energie, které bude u zatěžovací zkoušky disipováno v průběhu přerozdělování napětí. Na LD diagramu se množství této energie projevuje na velikostí plochy pod naměřenou křivkou. Hledání těchto parametrů však není tak jednoduché, jako u modulu pružnosti, protože lomová energie poměrně výrazně ovlivňuje i hodnotu maximální dosažené síly. To znamená, že k poměrně masivnímu přerozdělování napětí dochází již před dosažením maximální síly a houževnatost materiálu vyjádřená parametrem G_t se tedy uplatní. Obecně platí, že se F_t s rostoucí hodnotou G_t zvyšuje a naopak. Postup byl tedy zvolen takový, že byla nalezena dvojice parametrů $[f_t, G_t]$ taková, aby výsledná křivka dobře odpovídala datům v experimentu. Tuto dvojici nazveme jako referenční dvojici a LD diagram zkoušky s takto získanými materiálovými parametry označíme jako $f(x)_R$. Na obrázku 2.2 můžeme vidět porovnání $f(x)_R$ s experimenty s tím, že je vrchol funkce $f(x)_R$ přibližně o 0,1 MPa vyšší oproti experimentům, kvůli očekávanému snížení pevnosti z důvodu přirozeného oslabení okrajů. Jedná se o velikost **B**.



Obr. 2.2: Porovnání referenční zkoušky s experimenty.

2.2.2 Jednoznačnost materiálových parametrů

Problém použitého přístupu k hledání MP spočívá v tom, že takto získaná dvojice parametrů $[f_t, G_t]$ nemusí být jedinečná, protože podobně dobré shody diagramu s experimentem lze dosáhnout větším počtem kombinací parametrů $[f_t, G_t]$. Jejich vliv na odezvu totiž není izolovaný – parametry f_t a G_t současně ovlivňují stejné rysy fitovaného diagramu. Tento problém může následně způsobit nejednoznačnost získaných výsledků. Z tohoto důvodu byla v předložené práci vytvořena jednoduchá systematická studie, která spočívá v prohledání dvojic materiálových parametrů $[f_t, G_t]$ v pravidelném rastru překrývajícím odhadnuté řešení a bylo provedeno porovnávání takto získaných LD diagramů s funkcí $f(x)_R$.

Postupujeme tedy tak, že vytvoříme deset různých parametrů f_t a deset parametrů G_t a z nich následně vygenerujeme 100 různých kombinací $[f_t, G_t]$. U každé dvojice je vytvořena realizace tahové zkoušky a vzniklý LD diagram je porovnán s diagramem referenční dvojice. Pokud však chceme funkce navzájem porovnávat, je potřeba si vytvořit nějaké referenční veličiny, podle kterých budeme porovnávání provádět. Jako první zřejmý kandidát se nabízí rozdíl maximální dosažené síly ΔF definovaný vztahem (2.3), kde F_t^R je maximální síla získána z funkce $f(x)_R$ a F_t^i je síla získaná z dané realizace o indexu i .

$$\Delta F = |F_t^R - F_t^i| \quad (2.3)$$

Samotná ΔF však pro porovnání dvou LD diagramů nestačí, protože je třeba porovnat i jejich sestupnou větev. Řešením tedy bude vytvořit pomocnou funkci chyby aproximace, $g(x)$, definovanou následovně.

$$g(x) = |f(x)_R - f(x)_i| \quad (2.4)$$

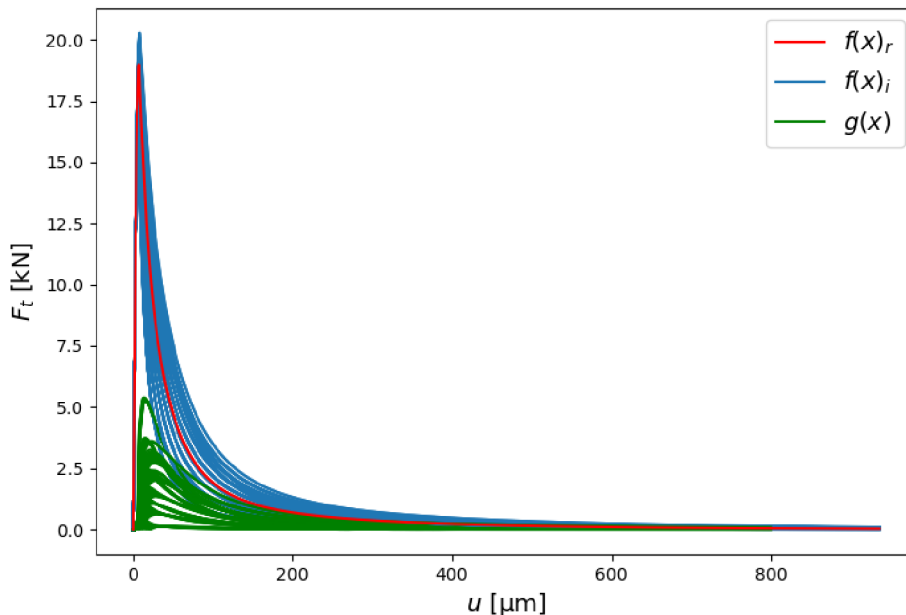
Spočtením plochy pod funkcí $g(x)$ získáme parametr, který nazveme ΔG a který bude sloužit jako další porovnávací parametr. Plochu pod křivkou spočítáme jako numerickou integraci pomocí lichoběžníkové metody. Obecný vztah je uveden zde 2.5, prakticky byla úloha počítaná pomocí modulu `scipy.integrate.trapz` v jazyce python.

$$\Delta G = \int_a^b g(x) dx \approx \sum_{k=1}^N \frac{g(x_{k-1}) + g(x_k)}{2} \Delta x_k \quad (2.5)$$

Na grafu 2.3 můžeme vidět referenční funkci $f(x)_R$, ostatní porovnávané funkce $f(x)_i$ a funkci $g(x)$ z jejichž plochy jsme získali plochu ΔG .

Pro grafické znázornění výsledků byl vytvořen graf 2.4. Červený bod znázorňuje referenční dvojici MP, zelené body znázorňují porovnávané realizace. Sytost zelených bodů reprezentuje velikost hodnoty ΔF (čím menší je ΔF , tím je daný bod sytější) a velikost bodů reprezentuje hodnotu ΔG . (čím menší je hodnota ΔG , tím je daný bod větší). Pro lepší orientaci v grafu byl definován součinitel k vztahem 2.6 kde G_R je plocha pod funkcí $f(x)_R$.

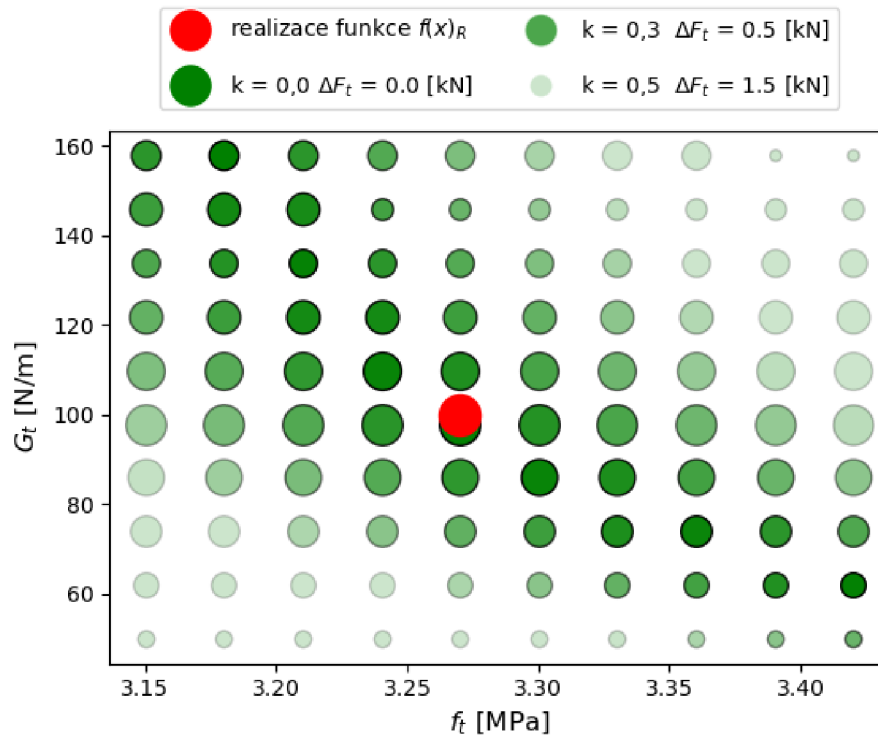
$$k = \frac{\Delta G}{G_R} \quad (2.6)$$



Obr. 2.3: Referenční funkce $f(x)_R$, ostatní porovnávané funkce $f(x)_i$ a funkce $g(x)$

2.2.3 Vyhodnocení provedené kalibrace

Podíváme-li se na grafický výstup 2.4 je patrné, že má uvedená kalibrace značné limity. Největší limitací uvedeného přístupu k hledání MP je fakt, že byla kalibrace provedena pouze na vzorku velikosti B, což pravděpodobně způsobuje, že bychom mohli najít minimálně dvě dvojice parametrů takové, které by taktéž vyhovovali experimentům a přitom by mohly vykazovat jiné chování u jiných velikostí, než je velikost B. Tento problém by se dal vyřešit tím, že bychom porovnávali na vícero velikostí současně. Tento přístup zde



Obr. 2.4: Grafický výstup studie jednoznačnosti materiálových parametrů

není použit kvůli jeho komplexnosti a také proto, že u rozměrů vzorku $D = 400$ mm a vyšších, má na výsledné chování značný vliv nahodilost materiálových parametrů a tudíž by byla následná kalibrace o to komplikovanější. Další limitací uvedeného přístupu je fakt, že se kalibrace realizovala pouze na jedné vygenerované geometrii, což bylo zvoleno, aby nebylo nutné počítat stovky realizací.

2.3 Meze nominální pevnosti zkušebních těles

Experimentální data jednoznačně ukazují snížení nominálních pevností s rostoucí velikostí těles (1.2). Data nijak neukazují, že by se pokles pevnosti zpomaloval. Jak detailně studovali autoři prací [3, 7], deterministické modely založené na nelineární metodě konečných prvků jednoznačně konvergují k dolní mezi pevnosti, která je diktována pouze tahovou pevností materiálu f_t .

Podobný trend lze očekávat i u studovaného diskrétního modelu. V deterministické verzi modelu zůstává prostor pro uplatnění pořadové statistiky, neboť numericky generované „zrna“ mají náhodné rozměry a orientaci. Lze tedy očekávat, že pokud je dán prostor pro náhodný výběr nejslabšího kontaktu pro inicializaci rozhodující trhliny (trhliny, při jejímž zformování je dosaženo maximální hodnoty síly), předpokládáme tedy pokles

průměrné pevnosti s nárůstem velikosti. To lze zdůvodnit tak, že s narůstajícím počtem kandidátů na nejslabší element klesá průměrná pevnost takového elementu. Jenomže tento efekt bude silně limitován tím, že zvolená geometrie zkušebních těles implikuje polohu trhliny přibližně v místě maximálního napětí a výběr nejslabšího kontaktu je tak značně omezen na malý počet kontaktů. Jejich velikost lze považovat za materiálovou konstantu.

Předpokládáme tedy, že deterministické diskrétní modely poskytují dolní mez nominální pevnosti, kterou nehledě na konkrétní vygenerovanou geometrii nemohou podkročit. Tato mez je diktována především lokálním parametrem tahové pevnosti f_t , který je u deterministických modelů neměnný. Částečně je pevnost také diktována lomovou energií a parametry ve smyku, neboť nejzatíženější element nemusí být orientován kolmo na globální směr tahu.

Přístupů, kterými můžeme uvedenou dolní mez stanovit je několik, v této práci jsou použity přístupy dva.

2.3.1 Mez stanovená MKP modely

Abychom mohli stanovit nepodkročitelnou mez, je potřeba brát v úvahu fakt, že napětí v horizontálním řezu prvku není rozloženo rovnoměrně, ale vznikají zde koncentrátoři napětí. Z tohoto důvodu se mez nominální pevnosti nerovná lokálnímu parametru f_t , protože ve stavu, kdy je v koncentrátorech napětí na úrovni f_t , je nominální napětí výrazně nižší. Nepodkročitelnou mez tedy stanovíme tak, že stanovíme koncentrátor napětí, kterým následně podělíme hodnotu f_t , tak získáme tíženou pevnostní mez. Koncentrátor napětí budeme počítat v nejvíce namáhaném místě a tedy uprostřed výšky při okraji vzorku.

Koncentrace napětí na excentricky zatíženém elastickém prvku tvaru psí kosti má dvě příčiny, a to vliv momentového zatížení a vliv geometrický. Tyto vlivy jsou uvedeny:

- odděleně na modelu tvaru kvádrů zatíženém excentricky (model 1) a na modelu tvaru dogbone zatíženém centricky (model 2), pomocí nichž je vypočtena přibližná hodnota koncentrátoru C3
- společně na modelu tvaru dogbone zatíženém excentricky (model 3), pomocí kterého je vypočtena přesná hodnota koncentrátoru C4

Model 1 je excentricky zatížený model tvaru kvádrů, který slouží k zachycení vlivu momentového zatížení na koncentrátor napětí označený jako C1. Vzhledem k jednoduchosti modelu je koncentrátor počítán analyticky. Geometrie modelu čteně jeho rozměrů lze najít na obrázku 2.5. Výpočet provedeme tak, že si nejdříve vyjádříme průběh napětí $\sigma_1(x)$ vyvolané normálovou silou vztahem 2.7 a napětí $\sigma_2(x)$ vyvoláno momentovým účinkem

2.8. Průběh napětí $\sigma_3(x)$ pak obdržíme součtem předchozích složek. 2.9

$$\sigma_1(x) = \frac{N}{A} = \frac{F}{bt} \quad (2.7)$$

$$\sigma_2(x) = \frac{M}{I}x = \frac{F \cdot e}{\frac{1}{12}tb^3}x \quad (2.8)$$

$$\sigma_3(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2(x) \quad (2.9)$$

Výsledný koncentrátor napětí je pak definován obecným vztahem. 2.10

$$C(x) = \frac{\sigma_3(x)}{\sigma_1(x)} = 1 + \frac{\sigma_2(x)}{\sigma_1(x)} = 1 + \frac{12e}{b^2}x \quad (2.10)$$

Protože chceme znát koncentrátor napětí při okraji prvku dosadíme za x podle vztahu 2.11. Průběhy jednotlivých napětí můžeme vidět na obrázku 2.5.

$$C_1 = C_{\left(\frac{b}{2}\right)} = 1 + \frac{12e}{b^2} \cdot \frac{b}{2} = 1,2 \quad (2.11)$$

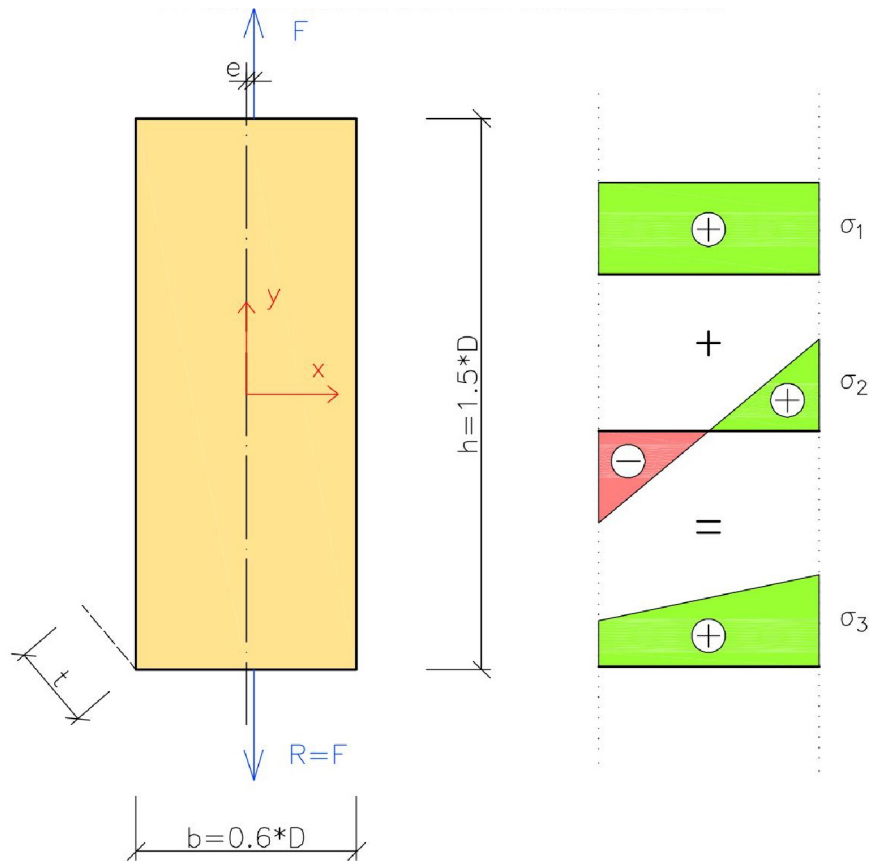
Model 2 (2.7a) je centricky zatížený model tvaru psí kosti, který slouží k zachycení vlivu zakřivených okrajů na koncentrátor napětí označený jako C2. Tento model je řešen numericky MKP systémem ATENA a byl modelován z lineárně elastického materiálu. Aby u podpor nedocházelo k lokálnímu namáhání materiálu. Jsou nad podporami vymodelovány ocelové pláty o výrazně větší tuhosti než je tuhost zatěžovaného vzorku.

Maximální reakční síla naměřená v podpoře měla hodnotu $F_R = 67,5$ kN. Při výpočtu koncentrátoru však chceme pracovat se silou jednotkovou a proto veškeré napětí, které bylo u zkoušky naměřeno, bylo touto hodnotou poděleno. Nominální napětí je tedy stanoveno vztahem 2.12. a jednotkové napětí změřené v místě koncentrátoru má hodnotu $\sigma_K = 0,0133$ MPa.

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{1,0 \cdot 10^3}{0,6 \cdot 1,6 \cdot 0,1} = 0,01042 \text{ MPa} \quad (2.12)$$

Výsledný koncentrátor napětí C_2 pak vypočteme jednoduše podle vztahu. 2.15.

$$C_2 = \frac{\sigma_K}{\sigma_N} = \frac{0,01318}{0,01042} = 1,26 \quad (2.13)$$



Obr. 2.5: Geometrie a průběh napětí modelu 1

Model 3 (2.7b) je obdoba předchozího modelu s tím rozdílem, že je zatížen excentricky, podobně jako u modelu 1. Nominální napětí, napětí v místě koncentrace a koncentrátor napětí C_3 je získán identicky, konkrétní výpočty jsou uvedeny rovnicemi 2.14

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{1,0 \cdot 10^3}{0,6 \cdot 1,6 \cdot 0,1} = 0,01042 \text{ MPa}$$

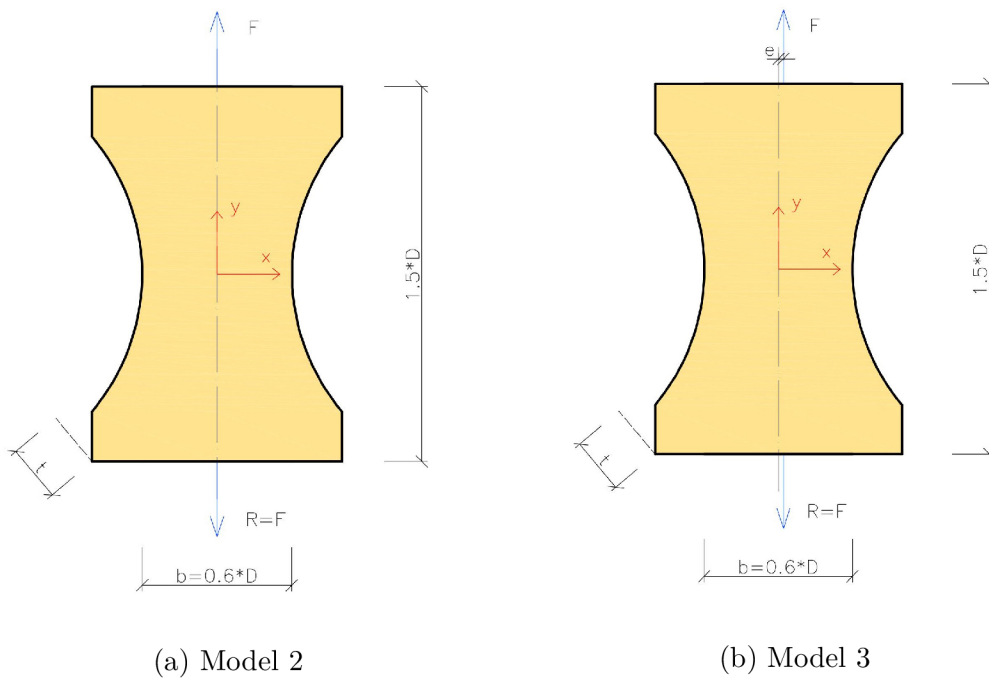
$$\sigma_K = 0,01556 \text{ MPa} \quad (2.14)$$

$$C_3 = \frac{\sigma_K}{\sigma_N} = \frac{0,01556}{0,01042} = 1,49$$

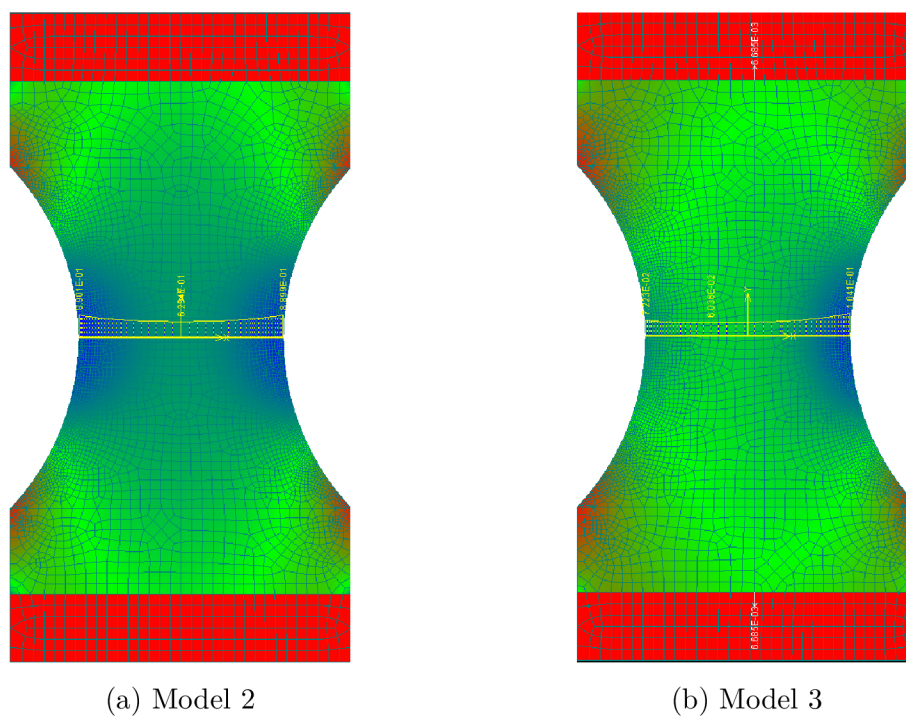
Hodnotu koncentrátoru C_3 lze nyní ověřit porovnáním s přibližnou hodnotou koncentrátoru C_4 , kterou můžeme získat vztahem.

$$C_4 = C_1 \cdot C_2 = 1,2 \cdot 1,26 = 1,54 \approx 1,49 = C_3 \quad (2.15)$$

Výslednou pevností mez, označenou získáme podílem lokální tahové pevnosti f_t s přesnější hodnotou koncentrátoru C_3 .



Obr. 2.6: Geometrie modelů



Obr. 2.7: Tahová zkouška MKP systémem ATENA

Mez stanovená diskrétními modely

Zachycení koncentrátoru napětí pomocí MKP přístupu je limitováno tím, že je velikost koncentrátoru ovlivněna hustotou sítě MKP. Ve skutečnosti je však velikost místa, do kterého se může napětí koncentrovat dána geometrií struktury vzorku a odpovídá přibližně vzdálenosti jednotlivých zrn kameniva. Z toho mimo jiné vyplývá, že velikost koncentrátoru a tedy i pevnostní mez závisí na velikosti zkoušeného vzorku. Je tedy vhodné vytvořit sérii diskrétních modelů s upravenou geometrií tak, aby bylo při zatěžování dosaženo nejnižší možné tahové pevnosti.

Víme, že kontakt mezi dvěma numerickými zrny má nejmenší pevnost a k jeho porušení je disipováno minimální množství energie v případě, pokud je namáhán pouze prostým tahem. Není totiž aktivován smykový odpor kontaktu a celková disipovaná energie se tudíž rovná pouze parametru lomové energie G_t . Pokud výslednice sil mezi zrny není kolmá na jejich stykovou plošku, aktivuje se smykový odpor kontaktu, neboť se vzájemný posun promítne do své normálové a tangenciální složky.

Aby došlo k úplnému porušení vzorku, musí se trhлина dostat přes celou jeho šířku. Energeticky je samozřejmě nejvýhodnější, aby celková délka trhliny byla co nejmenší a tím pádem aby její trajektorie byla ideálně přímá.

Z těchto důvodů byla vytvořena série diskrétních modelů velikostí A-F upravených tak, že je v nejužším místě taženého trámce připravena řada kolmých kontaktů, které tvoří prostor pro vytvoření trhliny s co nejmenší možnou délkou. Tyto kontakty jsou vzájemně rovnoběžné a jejich vzdálenost se rovná hodnotě minDist . Tahové pevnosti takto vytvořených modelů definují mez pevnosti, která bere v úvahu mimo jiné i vliv velikosti zatěžovaného vzorku na velikost koncentrátoru napětí. Očekáváme, že tato nová mez bude mít tendenci konvergovat k mezi stanovené metodou MKP. Geometrii takto získaných modelů můžeme vidět na obrázku. Pro účely práce, byl vytvořen vždy pouze jeden takový model, pro každou velikost (A-F). Důvodem je předpoklad, že se díky předem připravené trhlině prvek poruší vždy stejným způsobem a z tohoto důvodu bude mít každý takový model stejné velikosti, téměř totožnou nominální pevnost v tahu. Ukázku takto upraveného modelu můžeme vidět na obrázku 3.4c.

2.4 Řízení a průběh zkoušky

Na rozdíl od modelů s vodorovnou spárou, u kterých byla vytvořena vždy pouze jedna geometrie u každé velikosti (A-F), bylo u modelů bez spáry u každé velikosti vygenerováno několik geometrií, podle vlastností konkrétní velikosti. U větších velikostí bylo například modelů potřeba méně, kvůli předpokládané menší směrodatné odchylce pevností. Z opačného důvodu bylo u velikostí A potřeba více než 20 realizací.

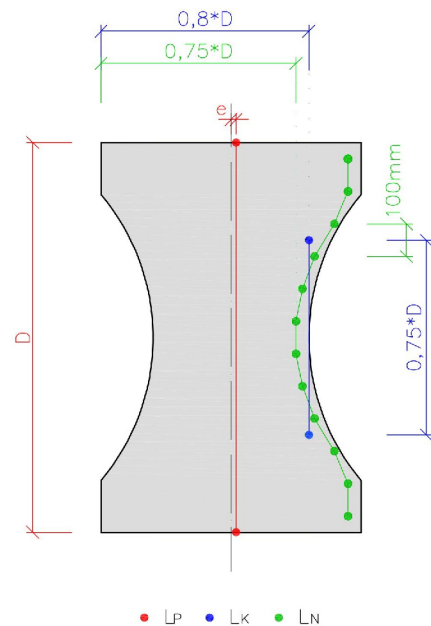
2.4.1 Řízení posunu

Vzorky byly zkoušeny za podmínek jednoosého tahu, řízeného posunem horní podpory ve směru y a to s tím, že vztah mezi posunem a krokem procesu je lineární. Důvod použití posunem řízené zkoušky je to, abychom byli schopni zaznamenat krom lineárního vzestupu zatěžovací síly do momentu dosažení nejvyšší tahové pevnosti i nelineární pokles zatěžovací síly charakteristický pro tahové zkoušky kvazikřehkých kompozitů, jako je právě beton.

Posun je zprostředkován pomocí posuvné podpory, která je umístěna s lehkou excentricitou, $e = D/500$ od podélné osy symetrie taženého prvku tak, jak bylo učiněno v experimentu [2]. Důvodem této excentricity je zajištění toho, aby se poškození objevilo vždy pouze na jedné straně vzorku a nedocházelo tak ke komplikované interakci trhlin z obou stran.

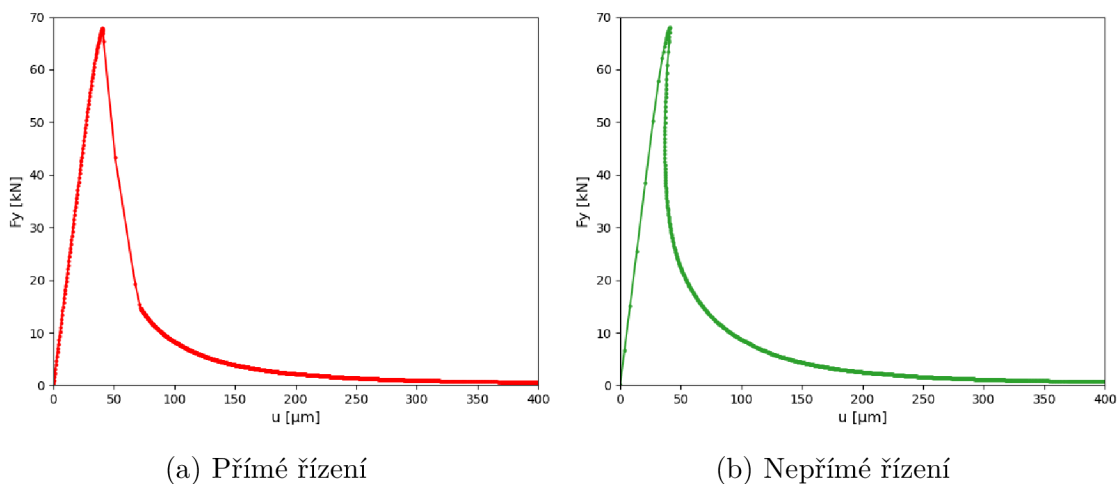
Aby bylo možné řídit závislost mezi přetvořením a zatížením, je třeba znát vzájemný posun dvojce bodů na zkoušeném vzorku. Toho je dosaženo vložením dvojce bodů do geometrie vzorku tak, aby bylo detailně zachyceno otevírání vznikající trhliny. Řízení zkoušky bylo prováděno dvěma různými přístupy, podle toho, zda se snažíme získat pouze informaci ho maximální dosažené síle, nebo jestli nás zajímá celý průběh zatěžování čteně sestupné větve. Pokud nás zajímá pouze maximální dosažená síla, používáme řízení přímé, kde jsou hodnoty posunů odečítány z bodů, umístěných přímo v podporách. Toto řešení je velice jednoduché a přímočaré, avšak u vzorků větších rozměrů začíná docházet k tomu, že po vytvoření tahové trhliny dojde k prudkému odlehčení vzdáleného materiálu a tudíž ke ztrátě napětí. Pokud jsou tedy měřky příliš vzdálené od FPZ¹, dojde v rámci jednoho kroku k prudkému poklesu měřené síly a většinou také k přerušení zkoušky. Tento jev je v odborné literatuře známý jako lokální nestabilita, anglicky *Snapback*.

Pokud nás tedy zajímá celý průběh zatěžovací zkoušky čteně sestupné části způsobené nelineárního změkčením, je třeba řídit výpočet měrkou, která bude trhlínu obepínat v těsné blízkosti. To je však problematické, protože geometrie modelů je generována náhodně a je proto nemožné předpovědět, kudy se bude trhlína propagovat a kam tedy umístit řídicí měrku. Byl tedy pro tento účel definován řetěz řídicích měrek, které svým



Obr. 2.8: Rozmístění měrek

¹FPZ je zkratka slov „fracture process zone“, česky „lomová procesní zóna“



Obr. 2.9: Porovnání diagramu se ztrátou stability (snapback instability) u velikosti D s rozdílným řízením

umístěním kopírují pravý líc geometrie psí kosti tak, aby propagovaná trhlinka byla vždy obepínána jednou z umístěných měrek. Řízení je definováno tak, aby se výpočet řídil vždy tou měrkou, která zaznamená výraznou deformaci. Tak docílíme toho že bude mít řídicí měrka dostatečně malou délku a zároveň neriskujeme, že v některé vygenerované geometrii dojde k propagaci trhliny mimo řídicí měrku.

Protože je však zachycení celého průběhu zatěžovací zkoušky výpočetně náročné, bylo tohoto postupu použito pouze u několika realizací větších velikostí (D–F). Pro získání maximální dosažené síly bylo použito řízení přímé a výpočet byl po dosažení maximální síly zastaven. Na obrázku 2.9 můžeme vidět porovnání LD diagramu velikosti D pomocí nepřímého řízení a pomocí řízení přímého, kde došlo k výraznému poklesu síly způsobeného lokální ztrátou stability. Na sestupné větvi nejsou rovnovážné body uspořádány tak, aby vnější posun pouze narůstal. Závislost síly na posunu tedy není funkce, protože nemá nejvýše jednu hodnotu síly pro dané prodloužení u . Po dosažení maximální síly musí dočasně poklesávat současně síla F_y i posun u , zatímco lokální prodloužení měrky stále neklesá. Rovněž neklesá disipovaná energie.

2.4.2 Měření posunu

Krom výše zmíněných řídicích měrek je nutné do geometrie přidat měrky, kterými budeme měřit výslední posun, který bude sloužit k utváření LD diagramů. Toho je dosaženo vložením dvojice bodů do geometrie vzorku tak, aby jejich umístění přibližně odpovídalo geometrii měrek v článku [2]. Pro naše účely nebylo však umístění měrek napodobeno zcela přesně z toho důvodu, že měrky použité v experimentu nebyly lineárně úměrné k velikosti daného vzorku. Pro naši potřebu tedy byla vytvořena kontrolní měrka, která

tuto podmínku splňuje. Měrka se nachází při pravém okraji, aby bylo detailně zachyceno otevírání vznikající trhliny. Přesné rozměry měrky jsou uvedeny na obrázku 3.1.

2.5 Výsledky

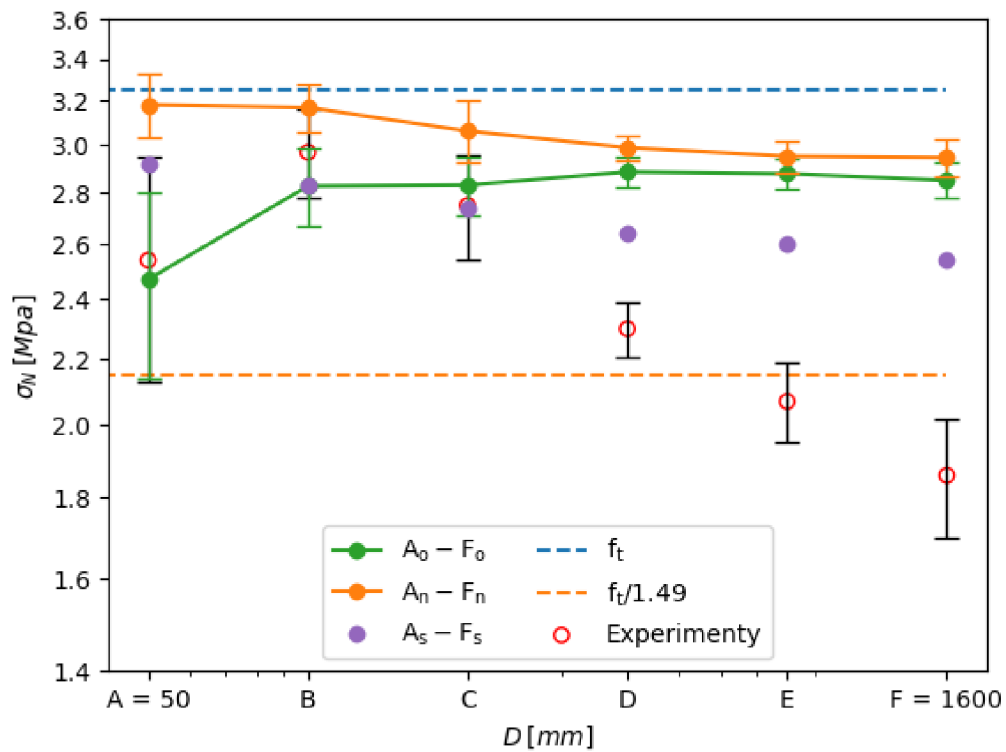
Získané výsledky zkoušení deterministických modelů jsou čteně pevnostních mezí a dat z experimentů vyneseny na grafu 2.10. V grafu je znázorněna závislost nominální pevnost a velikosti rozměru D s tím, že jsou obě osy z praktických důvodů vyneseny v logaritmickém měřítku. První, čeho si můžeme všimnout, je linie označená jako f_t . Jedná se o dříve zmíněnou lokální tahovou pevnost. Pokud tuto hodnotu podělíme součinitelem koncentrátoru C_3 , získáme minimální pevnostní mez, kterou při zachování geometrie nelze podkročit.

Další pevnostní mez je tvořena výsledky tahových zkoušek diskrétních modelů opatřených vodorovnou symetrickou spárou, označených $A_S - F_S$. Zde můžeme vidět, že minimální nominální napětí, kterého můžeme dosáhnout, je skutečně závislé na velikosti zkoušených vzorků, jak se předpokládalo, avšak je důležité zmínit, že pevnosti těchto modelů byly očekávány nižší. Takto mírný pokles pevností modelů se symetrickou spárou, jejichž porušení můžeme vidět na obrázku 3.4c, totiž omezuje i možný pokles pevností modelů bez spáry.

Nyní se zaměříme na výsledky modelů $A_n - F_n$ a $A_o - F_o$. Co se týče vzorků velikosti B , na kterých byla prováděna kalibrace materiálu, můžeme vidět, že se pevnost modelů B_n liší od experimentů výrazněji, než by po přepočtu na zatěžovací sílu odpovídalo grafu 2.2. To však bylo předpokládáno s ohledem na fakt, že byla kalibrace prováděna pouze na jedné realizaci. U vyšších velikostí dochází u obou typů modelů k poklesu nominální pevnosti na ustálenou hodnotu okolo 3 MPa což se dalo vzhledem k výsledkům modelů $A_S - F_S$ předpokládat. U velikostí $A - C$ jsou však výsledky výrazně odlišné, protože poškození okrajů u modelů $A_o - F_o$ způsobilo výrazný pevnostní pokles na hodnotu blízkou se experimentům.

Mimo samotné pevnosti je potřeba zaměřit se i na získaný rozptyl jednotlivých zkoušek. Ten se u všech modelů, krom modelu A_o pohybuje ve výrazně nižších hodnotách než rozptyl získaný v experimentech. Tento výsledek je pozitivní, protože nám dává prostor pro zvětšení rozptylu, které je očekáváno u zkoušek s nahodilými materiálovými parametry. Model A_o má rozptyl výrazně větší, na tom se pravděpodobně podílí nahodilost generování poškozených okrajů, která rozptyl přirozeně zvětšuje.

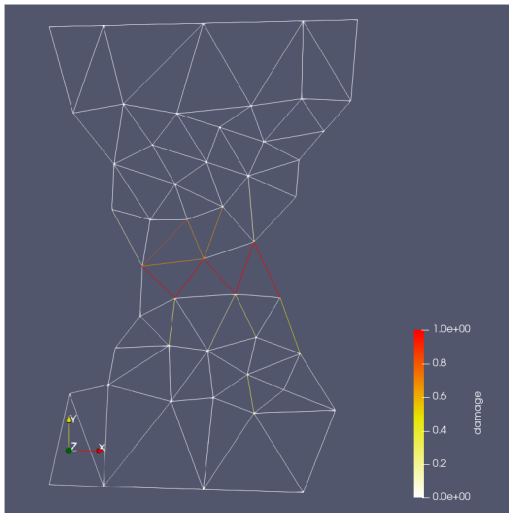
Dalším očekávaným jevem, který byl u výsledků pozorován, je fakt, že pro náš konkrétní zvolený materiál existuje určitá délka, kterou počáteční trhlinka musí mít, aby se mohla začít nekontrolovaně šířit a způsobila tak přerušení vzorku. V našem případě tato kritická délka byla změřena přibližně na hodnotu 4 cm. To se potvrdilo u každé zkoušené velikosti A – F. Tato skutečnost pro nás bude důležitá především kvůli predikci chování modelů s nahodilým polem.



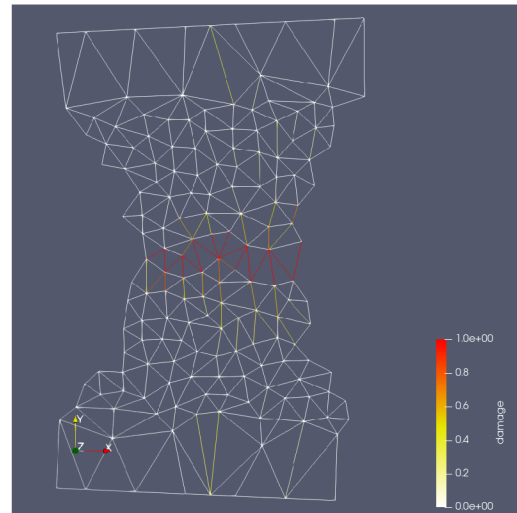
Obr. 2.10: Nominální pevnost zkušebních těles

	D [mm]	$\overline{\sigma_N}$ [MPa]	s	Počet realizací
A_n	50	3.15	0.19	13
B_n	100	3.17	0.11	25
C_n	200	3.08	0.09	21
D_n	400	2.99	0.05	15
E_n	800	2.95	0.07	7
F_n	1600	2.95	0.08	4
A_o	50	2.45	0.32	23
B_o	100	2.83	0.18	35
C_o	200	2.83	0.12	25
D_o	400	2.86	0.08	15
E_o	800	2.88	0.06	9
F_o	1600	2.83	0.06	4
A_S	50	2.92	0.0	1
B_S	100	2.83	0.0	1
C_S	200	2.74	0.0	1
D_S	400	2.64	0.0	1
E_S	800	2.6	0.0	1
F_S	1600	2.54	0.0	1

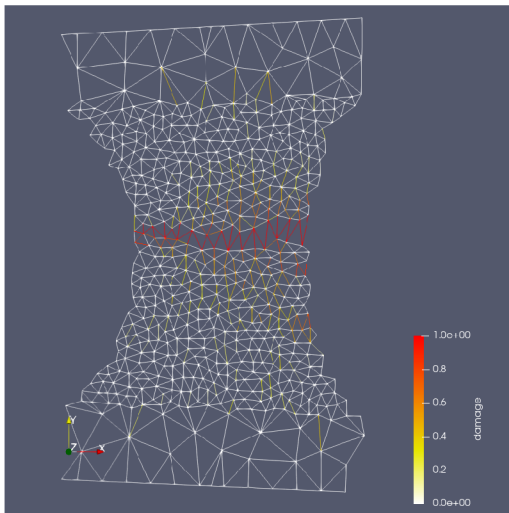
Obr. 2.11: Přehled výsledků deterministických modelů



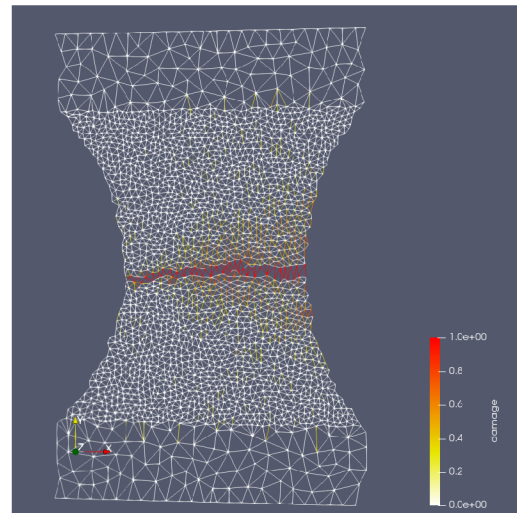
A ($D = 50$ mm)



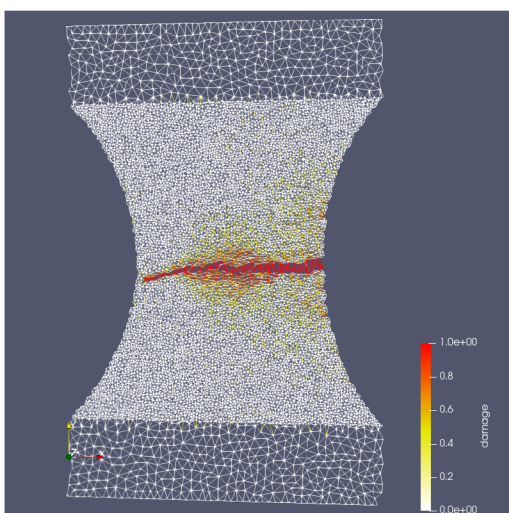
B ($D = 100$ mm)



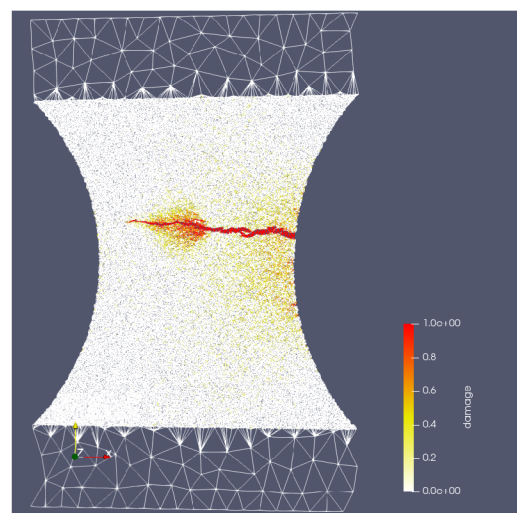
C ($D = 200$ mm)



D ($D = 400$ mm)

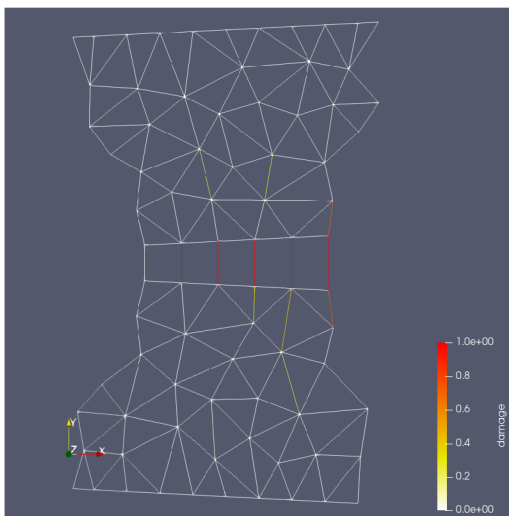


E ($D = 800$ mm)

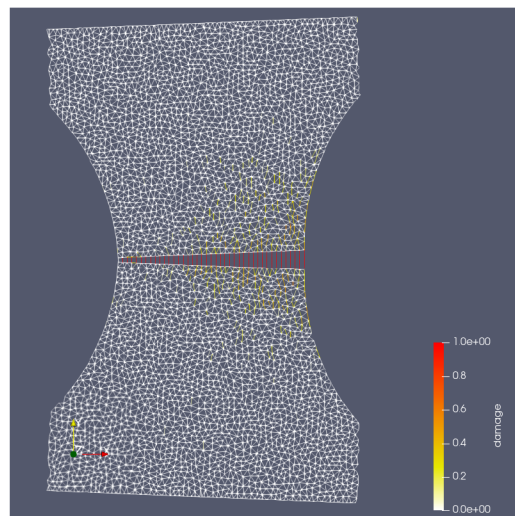


F ($D = 1600$ mm)

Obr. 2.12: Výsledky zkoušek deterministických modelů



A_S



D_S

Obr. 2.13: Výsledky zkoušek deterministických modelů se symetrickou spárou

3 Stochastické modelování

3.1 Pravděpodobnostní rozdělení parametrů lokální pevnosti betonu

Hlavní princip deterministických modelů, kterými jsme se zabývali ve stejnojmenné kapitole, spočívá v předpokladu, že je beton tvořený nedeformovatelnými zrny kameniva, a prostor mezi zrny je vyplněn deformovatelným materiálem, který má v každém svém objemu identické mechanické vlastnosti.

Pokud chceme věrně napodobovat chování betonových těles, musíme se pokusit krom geometrie napodobovat co nejvíce dalších nahodilých jevů, které se ve skutečném betonovém tělese vyskytují. O existenci těchto dalších jevů nám napovídá fakt, že podle [1, 3] deterministické modely nevykazují takový rozptyl, jaký můžeme vidět v experimentech. Toto tvrzení podporují i výsledky uvedené v této práci. Budeme tedy uvažovat, že mezoškálové materiálové charakteristiky nejsou po objemu betonového prvku konstantní, ale mají proměnlivý charakter. Tato proměnlivost se vysvětluje především proměnlivostí vstupních surovin, jejich promícháním a nerovnoměrným tvrdnutím směsi.

Důvodem, proč má různorodost materiálových vlastností vliv na snížení pevnosti těles větších rozměrů se dá stručně popsat tak, že se struktura betonu částečně chová jako kombinace sériového a paralelního systému vnitřních vazeb. Poškození dostatečného objemu struktury betonu, které je doprovázeno relativně lokalizovaným přerozdělením napětí v paralelních vazbách může vyvolat propagaci trhliny, která způsobí kolaps celé konstrukce (sériové zapojení objemů). Velké konstrukce jsou pak méně odolné, protože s ohledem na proměnlivé lokální materiálové pevnosti u nich existuje větší šance na výskyt extrémních hodnot materiálových parametrů. Jevy, kdy větší objem materiálu má statisticky menší únosnost (tedy v průměru) a typicky s menším rozptylem, říkáme statistický vliv velikosti a tento fenomén je úzce spjatý s teorií extrémních hodnot.

3.2 Prostorová proměnlivost jako náhodné pole

Nahodilost materiálových parametrů bude v modelu reprezentována proměnlivostí lokálních materiálových parametrů v tahu f_t a G_t a ve smyku f_s a G_s . Modulu pružnosti E_t a E_s zůstávají po ploše průřezu konstantní. Nahodilost parametrů f_t a G_t je zprostředkována pomocí normálně rozděleného náhodného pole, jehož klíčovým parametrem je hustota pravděpodobnosti definovaná vztahem 3.1, kde δ_g je směrodatná odchylka a μ_g střední hodnota, která se v našem případě rovná jedné. Další klíčovou složkou náhodného pole je autokorelační funkce. Ta je pro libovolnou dvojici bodů obecně dána vztahem 3.2, kde \mathbf{x}_i a \mathbf{x}_j jsou prostorové souřadnice libovolné dvojice bodů a l_c je autokorelační délka.

Samotné náhodné pole $H(\mathbf{x})$ je pak generováno pomocí KL expanze, pole je navíc připraveno tak, aby jeho funkční hodnoty mohly být odečítány v místech středů prutových elementů. Konkrétní postup a teoretický princip je uveden v článku [8].

$$f(x) = \frac{1}{\delta_g \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_g)^2}{2\delta_g^2}} \quad (3.1)$$

$$\rho_{ij} = \exp \left[\left(\frac{\|x_i - x_j\|}{l_c} \right)^2 \right] \quad (3.2)$$

Preprocesor pro náhodná pole nejdříve načte materiál určený pro diskrétní modelování. Hodnoty tohoto materiálu budou tvořit střední hodnoty nahodilých materiálových veličin. Následně pro každý prutový element načte hodnotu náhodného $H(\mathbf{x})$ a vynásobí ji střední hodnotou materiálové veličiny podle vztahu 3.3, kde \bar{X} je střední hodnota materiálové veličiny a $X(\mathbf{x})$ je hodnota konkrétní materiálové veličiny dle prutového elementu na souřadnici \mathbf{x} .

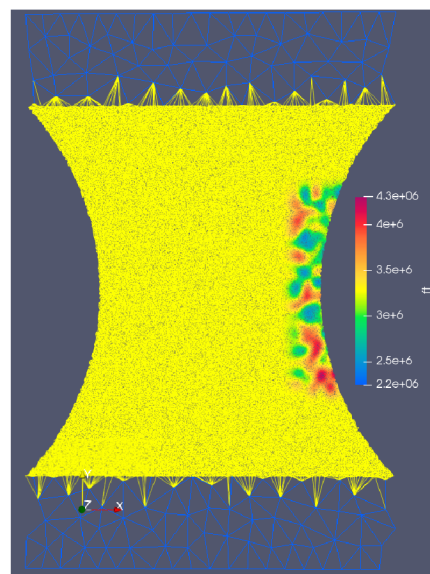
$$X(\mathbf{x}) = \bar{X} H(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

Tento postup provedeme pro veličiny f_t , f_s , s tím, že pro všechny veličiny použijeme jedno společné náhodné pole $H(\mathbf{x})$, pomocí kterého ovlivníme všechny parametry současně. Náhodné pole $H(\mathbf{x})$ je použito jako násobitel dříve deterministických parametrů f_t a f_s , které pak mají roli středních hodnot pole. Původně deterministické (střední) hodnoty lomových energií G_t a G_s byly vynásobeny čtvercem náhodného pole $H(\mathbf{x})$. Tento postup zachovává lokální Irwin-Hillerborgovu charakteristickou délku EG_t/f_t^2 jako konstantu nezávislou na poloze v modelovaném tělese. Uvedeným „randomizováním“ získáme výsledná náhodná pole pro čtyři materiálové charakteristiky, kterými jsou upraveny již vygenerované deterministické modely, použité v předchozí kapitole. Takto upravené modely budou mít v názvu označení „(rf) $[\delta_g; l_c]$ “ kde za δ_g a l_c budou dosazeny skutečné hodnoty.

3.2.1 Modely s lokálním náhodným polem pevnosti

Jak již bylo nastíněno v sekci 2.5, víme, že v okamžiku dosažení maximální síly má počáteční trhliny vždy délku cca 4 cm. Můžeme se tedy okamžik porušení představit jako pomyslný pás o šířce 4 cm, který lemují pravý okraj zkoušeného modelu. Dosažení pevnosti libovolné myšlené trhliny o délce 4 cm inicializované kdekoliv podél tohoto pomyslného pásu pak přibližně odpovídá maximální síle, kterou je zkušební těleso schopné unést. Další nárůst vnuceného prodloužení tělesa vede k jeho celkovému porušení doprovázeného poklesem síly. Lze tedy předpokládat, že právě uvedený okrajový pás je lokalita, kde se existence prostorové proměnlivosti pevnosti ve formě např. náhodného pole projeví nejvýrazněji. Na okrajový pás lze pohlížet jako na řetěz složený z objemů, jejichž pevnost je vyčerpána, pokud v nich trhlina dosáhne kritické délky. Uvedený řetěz (sériové zapojení) je pak tak únosný, jak únosný je nejslabší potenciálně rozrušený objem. Na základě této úvahy byly kromě již zmíněných modelů s nahodilým polem vytvořeny modely, které disponují lokálním nahodilým polem pouze v místě, kde je předpokládán vznik počáteční trhliny. Modely se vyskytují pouze u velikosti F a jsou označeny jako F_{loc} .

Statistický model, kterým lze úspěšně vystihnout maximální únosnost, lze popsat následovně [9, 10]. Při růstu trhliny dochází k lokálnímu přerozdělení, které lze vnímat jako lokální zprůměrování příspěvků k pevnosti z jednotlivých materiálových vazeb. Toto přerozdělení úzce souvisí s paralelním modelem vazeb v materiálu. Jakmile se vyčerpá redistribuční potenciál kteréhokoliv z vysoce napjatých takových objemů a trhlina doroste kritické délky, dojde k dosažení maximální síly zkušebního tělesa. Maximální síla tedy odpovídá nejmenší hodnotě únosnosti z celé řady potenciálních kritických trhlin rozmístěných podél vysoce zatíženého okraje (řetězu). Každá taková potenciální kritická trhlina odpovídá síle, která se rovná přibližně součtu únosnosti všech vazeb, které je nutné podél takové trhliny rozrušit.



Obr. 3.1: Model s lokálním náhodným polem

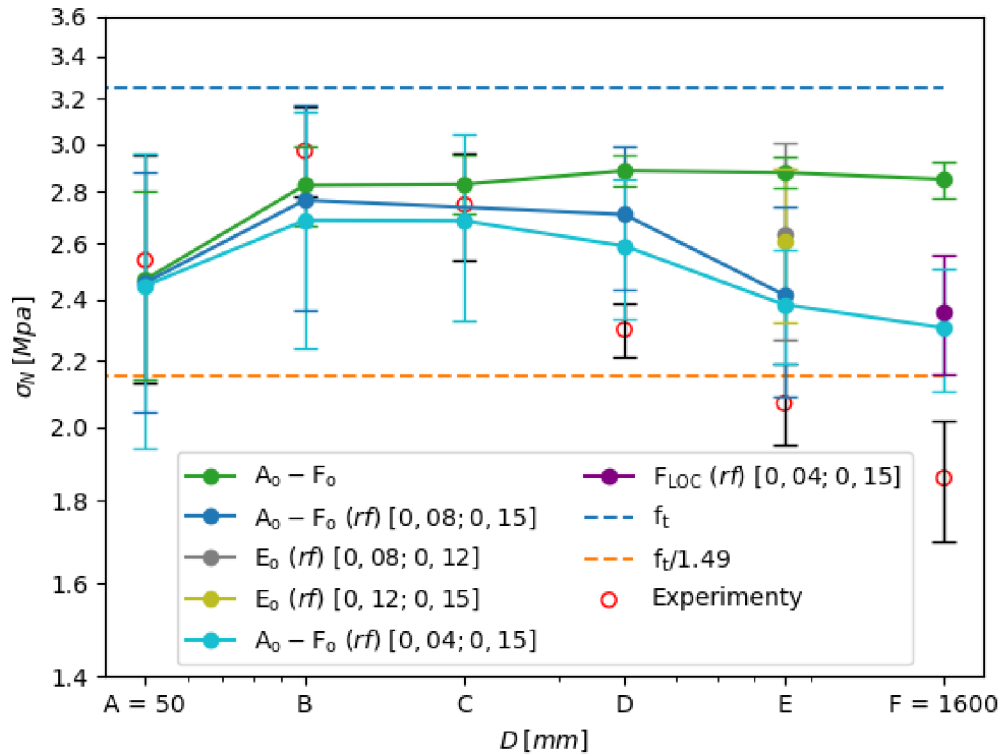
3.3 Kalibrace pole a výsledky

Aby byly získané výsledky co nejdělejší, je potřeba nastavit parametry náhodného pole $H(\mathbf{x})$ tak, aby se výsledné pevnosti co nejvíce blížily experimentům. Pokud se omezíme na normální rozdělení náhodného pole $H(\mathbf{x})$ se zadanou jednotkovou střední hodnotou a zvolený tvar autokorelační funkce, zbývají pouze dva volné parametry: směrodatná odchylka δ_g , která přímo ovlivňuje výslednou variabilitu náhodného pole a autokorelační délka l_c , která ovlivňuje prostorový dosah korelace dvou veličin vybraných z náhodného pole. Jako první možnost při volbě parametrů náhodného pole se nabízí využít parametrů, který již byly použity v článku [3]. Dvojice parametrů $[\delta_g, l_c]$ je zde stanovena na hodnoty $[0, 15; 0, 08]$. Tyto hodnoty tedy byly použity pro první sérii modelů která je značena jako A_o (rf) $[0, 15; 0, 08]$ – F_o (rf) $[0, 15; 0, 08]$. Na grafu 3.2 lze vidět, že pevnostní rozdíl mezi těmito modely u velikostí A a B s nahodilým polem a bez něj, nejsou příliš výrazné. Tento výsledek je očekávaný. Oproti rozměrům těchto těles je totiž hodnota l_c tak výrazná, že se u nich jakákoliv realizace náhodného pole jeví jako téměř konstantní, a tím pádem není vytvořen prostor pro vznik extrémních hodnot MP, ve kterých by se mohla iniciovat počáteční trhlinka dříve, než-li u deterministických modelů. Poměrně neočekávané chování však vykazují velikosti D a F. Pokles u obou velikostí, je vzhledem k experimentům výrazně nedostatečný. Navíc se u této série objevuje poměrně silný rozptyl. Je tedy na místě pokusit se dvojici parametrů $[\delta_g, l_c]$ vhodně upravit.

Pro tento účel jsou vybrány další tři dvojice parametrů náhodného pole ($[0, 15; 0, 04]$, $[0, 15; 0, 12]$, $[0, 12; 0, 08]$). Dvojice byly vybrány tak, aby z jejich výsledků bylo zřejmé, jakým způsobem se jednotlivé parametry projevují na výsledném pevnostním chování. Takový krok pomůže k lepšímu pochopení vlivu variability náhodného pole a délkového měřítka, na základě čehož budou vybrány parametry finální série. Na výběru dvojic je patrné, že byla rovnou zamítnuta verze s vyšší směrodatnou odchylkou, než je 15%. Důvodem je fakt, že již stávající rozptyl je poměrně signifikantní, tudíž by jeho další zvětšování bylo nežádoucí. U modelu se zmenšenou směrodatnou odchylkou jde vidět výrazný nárůst průměrné pevnosti. Takové chování je vzhledem k mechanismu statistického vlivu velikosti na pevnost pochopitelné, protože s větší směrodatnou odchylkou se snižuje velikost pevnostních extrémů v pomyslném pásu, ve kterém dochází ke vzniku počáteční trhliny. Nyní se zaměříme na manipulaci s veličinou l_c . Při zvětšení autokorelační délky na dvojnásobnou hodnotu, tedy 12 cm, došlo ke zvětšení nominální pevnosti téměř o 0,2 MPa. Při zmenšení hodnoty l_c o dvojnásobek však dochází k poklesu pevnosti o pouze nepatrnou hodnotu. To je pravděpodobně způsobeno právě absolutní délkou trhliny. Pokud se totiž l_c začne blížit délce počáteční trhliny, nebude již rozhodovat extrémní hodnota pevnosti v místě trhliny, ale pouze průměr všech pevností po celé její délce. Kvůli této skutečnosti nemá význam veličinu l_c dále snižovat.

I přes fakt, že dvojice parametrů $[0, 15; 0, 04]$ nevykazuje chování experimentální

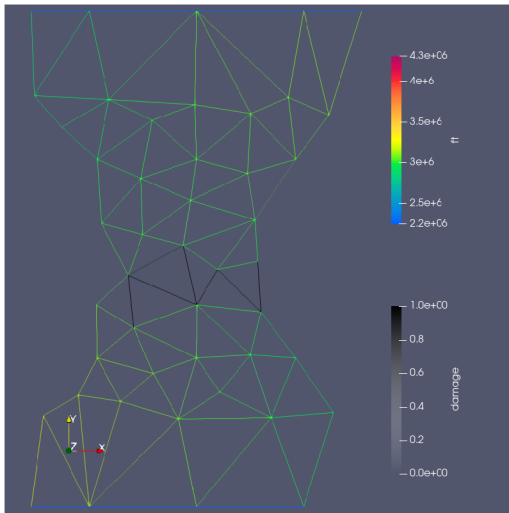
sady zcela, jedná se o nejlepší kombinaci z testovaných. Tato dvojice tedy byla použita pro finální sérii modelů s náhodným polem. Série je označena A_o (rf) [0, 15; 0, 08] – F_o rf [0, 15; 0, 08]. Na výsledcích této série na obrázku 3.2 jde vidět podobnost se sérií původní. U velikosti E však dochází v dvojité logaritmickém grafu k poměrně výraznému snížení sklonu na hodnotu okolo pevnosti 2,7 MPa u velikosti F. Tuto hodnotu potvrzují i realizace modelů F_{loc} .



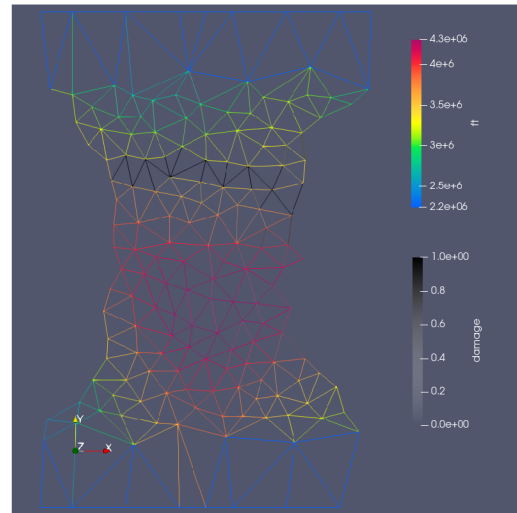
Obr. 3.2: Nominální pevnost zkušebních těles s nahodilým polem

	D [mm]	$\bar{\sigma}_N$ [MPa]	s	Počet realizací
A _o (rf) [0,08;0,15]	50	2.46	0.42	30
B _o (rf) [0,08;0,15]	100	2.77	0.40	30
D _o (rf) [0,08;0,15]	400	2.71	0.28	30
F _o (rf) [0,08;0,15]	1600	2.42	0.33	30
A _o (rf) [0,04;0,15]	50	2.48	0.51	30
B _o (rf) [0,04;0,15]	100	2.68	0.45	30
C _o (rf) [0,04;0,15]	200	2.69	0.36	30
D _o (rf) [0,04;0,15]	400	2.59	0.26	30
E _o (rf) [0,04;0,15]	800	2.38	0.2	30
F _o (rf) [0,04;0,15]	1600	2.31	0.2	30
E _o (rf) [0,08;0,12]	800	2.64	0.37	30
E _o (rf) [0,12;0,15]	800	2.61	0.28	30
F _{loc} (rf) [0,04;0,15]	1600	2.36	0.19	30

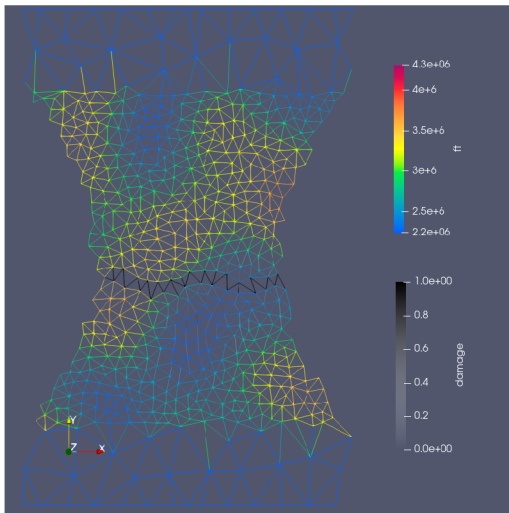
Obr. 3.3: Přehled výsledků modelů s náhodným polem



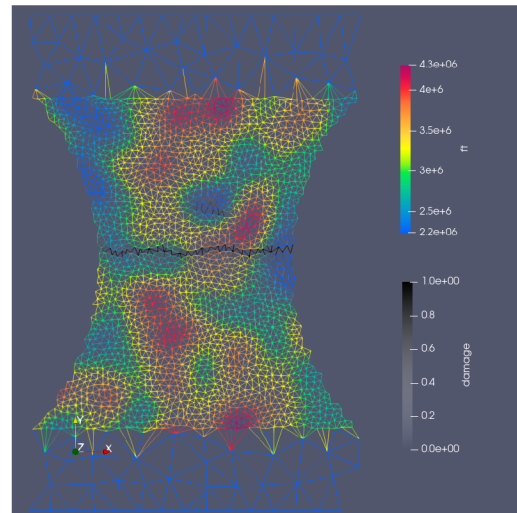
A ($D = 50$ mm)



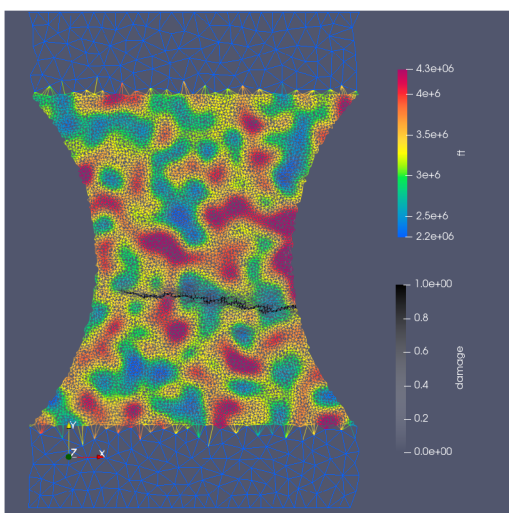
B ($D = 100$ mm)



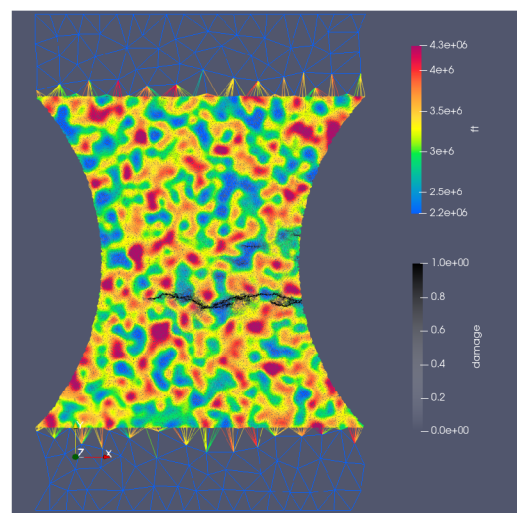
C ($D = 200$ mm)



D ($D = 400$ mm)



E ($D = 800$ mm)



F ($D = 1600$ mm)

Obr. 3.4: Výsledky zkoušek modelů s náhodným polem - vždy jedna reprezentativní realizace náhodného pole pevnosti a současně je vykreslena lokalizovaná trhlinka v pokritickém stádiu zatěžování

4 Diskuze

Při porovnání výsledků pevností diskretních modelů s výstupy z článku [3] můžeme vidět, že je námi získaný pokles pevností modelů bez náhodného pole a tudíž vliv disipace energie na size effect poměrně nevýrazný. Toto chování předpověděly už poměrně vysoké pevnosti modelů s vytvořenou vodorovnou spárou. Důvodem těchto vysokých pevností, především u velikostí A – C může být fakt, že u hrubších diskretizací dochází k tomu, že se napětí nemůže koncentrovat do dostatečně malé plochy. V budoucnu, by k ověření tohoto předpokladu bylo vhodné vytvořit sérii velikostí větších rozměrů než je velikost F s vodorovnou spárou, u kterých by se dalo ověřit, jestli se jejich pevnost při vzrůstající hodnotě D snižuje až na hodnotu blízkou $ft/1.49$.

U stochastických modelů se jako poměrně problematické jeví výrazné rozptyly, které u experimentů nejsou pozorovány. Snižování rozptylů pevností pro jednotlivé velikosti by bylo možné dosáhnout pomocí zmenšení lokálního rozptylu náhodného pole. Ovšem je třeba mít na paměti, že tento lokální rozptyl přímo ovlivňuje sklon pravou asymptoty průměrné pevnosti, tedy určuje, jak silný bude statistický vliv velikosti v případě, že vliv přerozdělení napětí na únosnost lze zanedbat (konstrukce alespoň $10\times$ větší, než velikost lomové procesní zóny). Dalším problémem je změna sklonu na logaritmickém grafu u velikosti E, protože z hlediska vlivu nahodilosti pevností k tomuto chování není důvod. Nabízí se tedy otázka, jestli je příčinou deterministický, nebo stochastický vliv a jestli podobné chování můžeme očekávat i u větších velikostí. V tomto ohledu je tedy vytvořen prostor pro budoucí šetření. Dalším krokem v budoucí práci je sestavení analytického modelu inspirovaného prací [9], tedy modelu, který by pouze se znalostí délky trhliny odpovídající maximální síle mohl pro jakékoliv parametry náhodného pole pevnosti rovnou předpovědět statistiku nominální pevnosti pro libovolnou velikost zkušebního tělesa.

5 Závěr

Bylo vytvořeno několik sérií zatěžovacích zkoušek deterministických modelů a několik sérií modelů s diskrétní reprezentací materiálové struktury s aplikací pole náhodných materiálových parametrů. Materiálové a geometrické vlastnosti těchto modelů byly přizpůsobeny potřebě napodobení série experimentů zaměřených na vliv velikosti betonových těles [2]. Výsledky byly s experimenty porovnány a diskutovány. Práce však přináší řadu otázek a podnětů k další práci, které vyžadují budoucí zkoumání.

Literatura

1. ELIÁŠ, J.; VOŘECHOVSKÝ, M.; SKOČEK, J.; BAŽANT, Z. Stochastic discrete meso-scale simulations of concrete fracture: Comparison to experimental data. *Engineering Fracture Mechanics*. 2015, roč. 135, s. 1–16. ISSN 0013-7944. Dostupné z DOI: 10.1016/j.engfracmech.2015.01.004.
2. VAN VLIET, M. R.; VAN MIER, J. G. Experimental investigation of size effect in concrete and sandstone under uniaxial tension. *Elsevier Ltd*. 2000, s. 165–188.
3. VOŘECHOVSKÝ, M. Interplay of size effects in concrete specimens under tension studied via computational stochastic fracture mechanics. *International Journal of Solids and Structures (Elsevier)*. 2007, roč. 44, č. 9, s. 2715–2731. ISSN 0020-7683. Dostupné z DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.08.019.
4. VAN VLIET, M. R. *Experimental investigation of size effect in concrete and sandstone under uniaxial tension*. 2000. Disertační práce. Delft University of Technology.
5. CUSATIS, G.; PELESSONE, D.; MENCARELLI, A. Lattice Discrete Particle Model (LDPM) for failure behavior of concrete. I: Theory. *Elsevier Ltd*. 2011, s. 881–890.
6. VOŘECHOVSKÝ, M. *Stochastic Computational Mechanics of Quasibrittle Structures*. 2007. Disertační práce. Brno University of Technology.
7. VOŘECHOVSKÝ, M.; SADÍLEK, V. Computational modeling of size effects in concrete specimens under uniaxial tension. *International Journal of Fracture*. 2008, roč. 154, č. 1-2, s. 27–49. Dostupné z DOI: 10.1007/s10704-009-9316-9.
8. VOŘECHOVSKÝ, M. Simulation of simply cross correlated random fields by series expansion methods. *Structural safety*. 2008, roč. 30, č. 4, s. 337–363. ISSN 0167-4730. Dostupné z DOI: 10.1016/j.strusafe.2007.05.002.
9. VOŘECHOVSKÝ, M.; ELIÁŠ, J. Fracture in random quasibrittle media: II. Analytical model based on extremes of averaging process. *Engineering Fracture Mechanics*. 2020, roč. 235, s. 107155. ISSN 0013-7944. Dostupné z DOI: 10.1016/j.engfracmech.2020.107155.
10. ELIÁŠ, J.; VOŘECHOVSKÝ, M. Fracture in random quasibrittle media: I. Discrete meso-scale simulations of load capacity and fracture process zone. *Engineering Fracture Mechanics*. 2020, roč. 235, s. 107160. ISSN 0013-7944. Dostupné z DOI: 10.1016/j.engfracmech.2020.107160.

Seznam symbolů, veličin a zkratk

D	proměnná šířka vzorků
$LDPM$	Lattice Discrete Particle Model
FPZ	Procesní zóna
<i>Snapback</i>	Prudký pokles měřené síly způsobený odlehčením materiálu vzdáleného od trhliny
E	Globální modul pružnosti.
E_t	Lokální modul pružnosti v tahu na stykové plošce mezi dvěma zrny.
E_s	Lokální modul pružnosti ve smyku na stykové plošce mezi dvěma zrny.
f_t	Lokální tahová pevnost na stykové plošce mezi dvěma zrny.
f_s	Lokální smyková pevnost na stykové plošce mezi dvěma zrny.
G_t	Lokální lomová energie v tahu na stykové plošce mezi dvěma zrny.
G_s	Lokální lomová energie ve smyku na stykové plošce mezi dvěma zrny.
α_0	Součinitel definující vztah mezi E_t a E_s
ν	Poissonovo číslo.
F_t	Maximální dosažená síla
F_t^R	Maximální dosažená síla u referenční realizace
F_t^i	Maximální dosažená síla realizace o indexu i
ΔF	Rozdíl dosažených sil
ΔG	Parametr charakterizující změnu sestupné větve LD diagramu
MP	Materiálové parametry
$f(x)_R$	Funkce LD diagramu referenční dvojice MP
G_R	Plocha pod křivkou $f(x)_R$
$A_0 - F_0$	Zkoušená tělesa s oslabenými okraji
$A_n - F_n$	Zkoušená tělesa s neoslabenými okraji
d_{\min}	Minimální vzdálenost spojnic prutových elementů
δ_g	Směrodatná odchylka normálního rozdělení
μ_g	Střední hodnota normálního rozdělení
ρ_{ij}	Korelační funkce
l_c	Autokorelační délka
$H(\mathbf{x})$	Náhodné pole
\bar{X}	Střední hodnota
F_{loc}	Model s lokálním náhodným polem

Seznam obrázků

1.1	Geometrie modelů použitých v článku van Vliet; van Mier [2]	10
1.2	nominálních pevností zkušebních těles	11
2.1	Geometrie prutových elementů	13
2.2	Porovnání referenční zkoušky s experimenty.	16
2.3	Referenční funkce $f(x)_R$, ostatní porovnávané funkce $f(x)_i$ a funkce $g(x)$	18
2.4	Grafický výstup studie jednoznačnosti materiálových parametrů	19
2.5	Geometrie a průběh napětí modelu 1	22
2.6	Geometrie modelů	23
2.7	Tahová zkouška MKP systémem ATENA	23
2.8	Rozmístění měrek	25
2.9	Porovnání diagramu se ztrátou stability (snapback instability) u velikosti D s rozdílným řízením	26
2.10	Nominální pevnost zkušebních těles	28
2.11	Přehled výsledků deterministických modelů	29
2.12	Výsledky zkoušek deterministických modelů	30
2.13	Výsledky zkoušek deterministických modelů se symetrickou spárou	31
3.1	Model s lokálním náhodným polem	34
3.2	Nominální pevnost zkušebních těles s nahodilým polem	36
3.3	Přehled výsledků modelů s náhodným polem	37
3.4	Výsledky zkoušek modelů s náhodným polem - vždy jedna reprezentativní realizace náhodného pole pevnosti a současně je vykreslena lokalizovaná trhлина v pokritickém stádiu zatěžování	38