

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ENERGETICKÝ ÚSTAV  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
ENERGY INSTITUTE

ŘEŠENÍ TURBULENTNÍHO DVOUFÁZOVÉHO PROUDĚNÍ METODOU  
LARGE EDDY SIMULATION  
LARGE EDDY SIMULATION OF TURBULENT TWO-PHASE FLOW

DIZERTAČNÍ PRÁCE  
DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Ing. JAROSLAV VOLAVÝ

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

prof. Ing. MIROSLAV JÍCHA, CSc.

BRNO 2013

## **Abstrakt**

Disertační práce se věnuje problematice numerických simulací vícefázového proudění, zvláště pak predikci pohybu disperzní fáze (částic) unášené proudem. Pro popis pohybu systému tekutina-částice je použit Euler-Lagrangeův přístup. To znamená, že tekutina je považována za kontinuum a pro popis jejího pohybu je použit Eulerův přístup, zatímco částice jsou uvažovány jako hmotné body a jejich pohyb je popsán pomocí přístupu Lagrangeova. Pro vyřešení pohybu nosné fáze je použita moderní metoda Large Eddy Simulation. Byla provedena série simulací zpětného proudu za schodem s částicemi a byla sledována modulace turbulence částicemi. Koncentrace částic v proudu je dostatečně vysoká, aby se projevil vliv částic na nosný proud. Turbulence na vstupu do domény je reprezentována pomocí vyvinutého schématu pro generaci turbulence na vstupu. Dále je v práci zkoumán vliv anizotropního rozkladu subgridní energie na pohyb částic.

## **Summary**

Doctoral thesis deals with the numerical simulations of two-phase flows, especially with prediction of movement of dispersed phase (particles) carried by fluid. The Euler-Lagrange approach was applied for description of the system fluid-particles. It means that the fluid is considered to be continuum and its movement is described using Euler approach. Particles are regarded as mass points and their movement is solved using Lagrangian approach. The Large Eddy Simulation method was adopted for solution of the fluid flow. The series of simulations of the backward-facing step flow laden with particles were performed. The concentration of the particles in the flow was high enough for consideration of the influence of particles on the turbulence of the carrier phase. The developed scheme for generation of turbulence on the inlet is applied. The influence of anisotropic decomposition of subgrid energy on movement of particles was studied in the frame of this work.

## **Klíčová slova**

Large Eddy Simulation, turbulence na vstupu, dvoufázové proudění, modulace turbulence

## **Keywords**

Large Eddy Simulation, inlet boundary condition, two-phase flow, turbulence modulation

VOLAVÝ, J. *Řešení turbulentního dvoufázového proudění metodou Large Eddy Simulation*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 98 s. Vedoucí disertační práce prof. Ing. Miroslav Jícha, CSc.

### **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že jsem dizertační práci *Řešení turbulentního dvoufázového proudění metodou Large Eddy Simulation* vypracoval samostatně pod vedením školitele prof. Ing. Miroslava Jíchy, CSc. s pomocí materiálů uvedených v seznamu použitých zdrojů.

V Brně 12.6. 2013

Ing. Jaroslav Volavý

### **Poděkování**

Rád bych na tomto místě poděkoval všem, kteří mě v průběhu studia podporovali. Zejména pak svému školitelovi prof. Ing. Miroslavu Jíchovi, Csc. za odborné vedení a cenné rady a podněty. Dále pak děkuji svým rodičům, bez jejichž podpory by bylo mé studium jen těžko realizovatelné. Nesmím také opomenout své kolegy v kanceláři Jana Fišera a Stanislava Knotka, jež trpělivě snášeli mé neustálé dotazy týkající se ať už odborné, nebo formální strany práce. Dík patří také Matěji Formanovi za pomoc s OpenFOAMem. Bez jeho pomoci bych se v kódu jen těžko zorientoval.

Děkuji!

Ing. Jaroslav Volavý

---

# Obsah

---

<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>Cíle dizertační práce</b>	<b>5</b>
<b>1 Large Eddy Simulation</b>	<b>6</b>
1.1 Úvod do turbulence	6
1.1.1 Základní rovnice proudění	7
1.1.2 Měřítko turbulence	7
1.1.3 Energetická kaskáda	10
1.2 Modelování turbulence	11
1.2.1 Direct Numerical Simulation	11
1.2.2 Reynolds-Averaged Navier-Stokes	12
1.2.3 Large Eddy Simulation	13
1.3 LES: Subgridní modely	14
1.3.1 Smagorinského model	16
1.3.2 Dynamický Smagorinského model	16
1.3.3 Lokalizovaný dynamický Smagorinského model	19
1.3.4 Jednorovnicový model	20
1.3.5 Model podobnosti měřítek	21
1.3.6 Model přibližné dekonvoluce	21
1.4 Shrnutí	23
<b>2 Generace turbulence na vstupu pro LES</b>	<b>24</b>
2.1 Úvod	24
2.2 Vliv reprezentace turbulence na vstupu na charakter proudění	25
2.3 Přehled metod pro generaci turbulence na vstupu	27
2.3.1 Metody recyklace rychlosti	27
2.3.2 Syntetická turbulence	29
2.3.3 Buzení turbulence	31
2.4 Schéma na generaci turbulence na vstupu	32
2.4.1 Definice	32
2.4.2 Testovací případ	33
2.4.3 Výsledky pro $Re_\tau = 110$	36
2.4.4 Výsledky pro $Re_\tau = 395$	38
2.4.5 Efektivita schématu buzení turbulence	39
2.4.6 Shrnutí	41

<b>3 Pohyb částic</b>	<b>43</b>
3.1 Úvod	43
3.1.1 Klasifikace vícefázového proudění	43
3.2 Model pohybu částic	45
3.2.1 Metody popisu pohybu částic	45
3.3 Síly působící na částice	46
3.3.1 Odporová síla	47
3.3.2 Saffmanova síla	49
3.3.3 Magnusova síla	50
3.4 Relaxační čas částice	51
3.5 Interakce nosné fáze s částicemi	53
3.5.1 One-way coupling	54
3.5.2 Two-way coupling	54
3.5.3 Four-way coupling	54
3.6 Modulace turbulence částicemi	55
3.6.1 Experimentální výzkum	55
3.6.2 DNS simulace	56
3.6.3 LES simulace	57
3.7 Zpětný proud za schodem	58
3.7.1 Experiment	58
3.7.2 Model	59
3.7.3 Posloupnost výpočtu	61
3.7.4 Výsledky jednofázového proudění	65
3.7.5 Výsledky dvoufázového proudění pro $90\ \mu\text{m}$ částice	68
3.7.6 Výsledky dvoufázového proudění pro $150\ \mu\text{m}$ částice	71
3.7.7 Úprava subgridního modelu	75
3.7.8 Shrnutí	76
3.8 Vliv anizotropie turbulence v blízkosti stěny	78
3.8.1 Matematický model a testovací případ	78
3.8.2 Výsledky	79
3.8.3 Shrnutí	82
<b>Závěr</b>	<b>83</b>
<b>Seznam použitých zdrojů</b>	<b>85</b>
<b>Publikace autora</b>	<b>91</b>
<b>Seznam použitých symbolů a zkratk</b>	<b>93</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>97</b>
<b>Seznam tabulek</b>	<b>98</b>

---

# Úvod

---

Jedním z nejzajímavějších problémů dynamiky tekutin je řešení turbulentního proudění s přítomností disperzní fáze v hlavním proudu. S tímto typem proudění se můžeme setkat v mnoha průmyslových aplikacích, např. v chemickém průmyslu, v uhelných elektrárnách při dopravě uhelného prachu do kotle, při predikci znečištění vzduchu a jiné. Zejména v těchto odvětvích je nutná přesná predikce pohybu a depozice částic, aby byla zajištěna správná funkce zařízení a nedocházelo k havarijním situacím. Pokud chceme s dostatečnou přesností určit pohyb disperzní fáze (částic), tak je velmi důležité správně vyřešit proudění a turbulenci nosné fáze, neboť ta ovlivňuje transport a depozici částic ze všeho nejvíce.

Turbulence nosné fáze je ovlivněna mnoha faktory. Jedním z nejvýznamnějších faktorů je geometrie oblasti, v níž se proudění odehrává. Téměř ve všech případech dvoufázového proudění jsou přítomny v doméně stěny. Je tedy třeba věnovat značnou pozornost přístěnné oblasti. Dalším z faktorů může být přítomnost samotné disperzní fáze. V případech, kdy koncentrace částic v proudu není velká, můžeme uvažovat pouze tzv. *one-way coupling*. To znamená, že proud ovlivňuje pohyb částic a sám není přítomností částic nikterak dotčen (“proud o částicích neví”). Překročí-li objemový podíl mezní hodnotu, pak už přítomnost částic v proudu z hlediska modifikace proudu není zanedbatelná a tudíž musíme použít *two-way coupling* (proud ovlivňuje pohyb částic a naopak). V tomto případě dochází k modulaci turbulence způsobené přítomností částic. Vystává otázka, jak je turbulence modulována a jak tuto modulaci zahrnout do výpočetních kódů řešících dvoufázové proudění.

Jak již bylo řečeno, pro správnou simulaci pohybu disperzní fáze je esenciálně důležitá správná reprezentace nosné fáze. Volba metody pro simulaci nosné fáze je tedy kritická. V posledních letech doznala metoda Large Eddy Simulation značného pokroku a ukazuje se, že tato metoda je velmi perspektivní a schopná vysoké přesnosti simulace jednofázového proudění za cenu rozumných výpočetních nákladů. Jeví se tedy jako velmi vhodné použít pro simulaci nosné fáze právě tuto metodu.

Disertační práce je zaměřena na řešení proudění tekutiny pomocí metody Large Eddy Simulation a následný transport částic. Práce je rozdělena do tří tematických kapitol. První kapitola je věnována teoretickému popisu metody Large Eddy Simulation. Dříve než je představena hlavní myšlenka této metody, tak jsou uvedeny základní vlastnosti turbulentního proudu, zejména existence širokého spektra délkových a časových měřítek a přenos energie mezi těmito měřítky, tak zvaná energetická kaskáda. Bez uvedení těchto pojmů by hlavní myšlenka metody LES nebyla tak zřetelná. Další část této kapitoly se věnuje popisu subgridních modelů. Tyto modely slouží k modelování vlivu nejmenších turbulentních útvarů, jenž byly pomocí operace filtrace odseparovány a nejsou v simulaci řešeny přímo.

Druhá kapitola se zabývá jedním z problémů, který vystává při použití metody LES pro řešení turbulentního proudění, a to správnou reprezentací turbulence na vstupu do domény. Na příkladu zpětného proudu za schodem je ukázáno, že různé přístupy k popisu turbulence na vstupu dávají zcela odlišné výsledky. Kapitola obsahuje rešerši problematiky generace turbulence na vstupu do domény. Jsou představeny různé metody, jak se s tímto problémem vypořádat.

Hlavní část této kapitoly sestává z představení přístupu k tomuto problému vyvinutého v rámci disertační práce. Vyvinutý přístup pro generaci turbulence na vstupu do domény je kombinací použití předběžné simulace a buzení turbulence. Pomocí tohoto přístupu je odsimulován proud mezi dvěma paralelními deskami pro dvě různá Reynoldsova čísla a výsledky porovnány s DNS daty.

Třetí a poslední kapitola je zaměřena na vícefázové proudění, zejména pak na transport disperzní fáze tekutinou. Pro řešení pohybu částic lze použít buď Eulerův nebo Lagrangeův přístup. V disertační práci je aplikován přístup Lagrangeův. Tento přístup používá pro rozřešení pohybu částic pohybové rovnice pro částice, jež jsou výsledkem silového působení na částici. Proto je tedy věnována značná pozornost i silám, které působí na částice unášené proudem. Další část této kapitoly je věnována modulaci turbulence částicemi. Při vyšších koncentracích částic v proudu nastává ovlivnění nosné fáze částicemi. Vyvstává tedy otázka, jak je proud ovlivněn. Za tímto účelem byla provedena série simulací zpětného proudu za schodem s částicemi a byl sledován vliv částic na turbulenci nosné fáze. Pro simulaci nosné fáze je použita metoda LES. Na základě výsledků byla navržena úprava modelu, konkrétně zahrnutí vlivu částic do subgridního modelu. Poslední část této kapitoly obsahuje studii vlivu subgriních měřítek proudu na transport částic. Je zde představen model, jež bere tento vliv v potaz. Tento model používá anizotropní rozklad subgridní energie do jednotlivých směrů.



---

## Cíle dizertační práce

---

Hlavním cílem dizertační práce je přispět k hlubšímu porozumění turbulentního proudu s přítomností částic simulovaného metodou Large Eddy Simulation a interakci plyn-částice zahrnující modulaci turbulence částicemi. Byl zkoumán transport částic a jejich vliv na turbulenci nosné fáze. Dále byla provedena studie vlivu subgridních měřítek na pohyb částic a jejich následnou depozici v přístěnné oblasti. Rámcově lze cíle dizertační práce rozdělit do tří skupin:

1. Vyvinutí a implementace schématu buzení umělé turbulence
2. Zahrnutí vlivu modulace turbulence způsobenou přítomností částic v proudu pro přesnější reprezentaci turbulence nosné fáze
3. Zahrnutí vlivu anizotropie turbulence v blízkosti stěny k přesnější predikci depozice částic u stěny

ad 1) V rámci dizertační práce bylo vyvinuto schéma buzení turbulence. Existující schémata buzení turbulence se nejvíce jako vhodná, protože jsou většinou navržena ve spektrálním prostoru a proto nejsou pro běžné případy proudění s komplexní geometrií vhodná. Navržené schéma pracuje ve fyzikálním prostoru a jedná se o kombinaci předběžné simulace a buzení turbulence. Pro buzení turbulence je použit Ornstein-Uhlenbeckův proces. Použití navrženého schématu buzení turbulence inicializuje přechod do turbulence a umožňuje rychlejší vývin turbulence, což vede k redukci výpočetního času.

ad 2) Do pohybových rovnic popisující pohyb nosné fáze byl přidán člen zohledňující přítomnost disperzní fáze v proudu. Taktéž byl modifikován Smagorinského subgridní model. Smagorinského konstanta je závislá na koncentraci částic. Takto modifikovaný model byl použit pro simulaci zpětného proudu za schodem s částicemi. Modifikovaný subgridní model dává lepší výsledky než model neupravený.

ad 3) Jelikož se ukazuje, že izotropický rozklad turbulentní kinetické energie v blízkosti stěn vede k nadhodnocování depozice částic u stěny, byl do výpočtů zahrnut i vliv anizotropie turbulence. Jedním ze způsobů, jak anizotropii zahrnout, je anizotropický rozklad subgridní kinetické energie do směrů podélných se stěnou a do směru kolmého na stěnu.

## Large Eddy Simulation

---

### 1.1 Úvod do turbulence

V reálném světě se setkáváme s mnoha případy turbulentního proudění. Turbulentní proudění můžeme v přírodě pozorovat třeba na kouři vycházejícího z komína, na proudění vody v potoce či řece nebo na prachu zviřeném větrem. Toto jsou viditelné příklady turbulence, ale turbulence je vlastně všude okolo i v nás, jen není tak dobře pozorovatelná. To je případ obtékání různých těles vzduchem nebo jiným médiem, proudění vzduchu v dýchacích cestách, potrubích či kanálech a mnoho jiných. Turbulence hraje velice významnou roli i v průmyslových odvětvích, například v leteckém, automobilovém, chemickém nebo potravinářském průmyslu. Zejména v těchto odvětvích je důležité umět turbulentní proudění nejen dobře popsat, ale nejlépe ho i co nejpřesněji predikovat. Ale nejprve si řekněme některé důležité vlastnosti turbulence.

Podat přesnou definici turbulence je velmi obtížné, ale mnoho vědců a inženýrů se shodne na některých důležitých rysech turbulence. Pro lepší představu si tyto významné vlastnosti turbulence ilustrujeme na výše zmíněném případě kouře vycházejícího z komína.

Asi si nejdříve všimneme nepravidelného chaotického pohybu. Turbulentní proudění vykazuje výrazné a nepravidelné změny rychlosti jak v prostoru tak i v čase. Popsat toto chování deterministicky pomocí funkce v prostorových a časových souřadnicích je proto naprosto nemožné. Náhodnost však můžeme popsat statisticky, čehož využívají některé metody řešení turbulentního proudění.

Další velice významnou vlastností turbulence je difuzivita celého procesu, tedy vlastnost umožňující transportovat a míchat tekutinu výrazně efektivněji než v případě laminárního proudění. Už první pokusy provedené Osbornem Reynoldsem v roce 1883 odhalily tuto vlastnost. Tento pokus spočíval ve vypouštění barviva do středu trubky, kterou proudila voda, a následného pozorování chování barviva. Zpozoroval, že v některých případech je barvivo daleko více radiálně rozptýlováno. Rozptýl barviva způsobilo právě turbulentní proudění. Na základě těchto pokusů pak stanovil jeden z nejvýznamnějších bezrozměrných parametrů charakterizující režim proudění, tzv. Reynoldsovo číslo. Reynoldsovo číslo je obecně definováno jako  $Re = \mathcal{U}\mathcal{L}/\nu$ , kde  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{L}$  jsou charakteristická rychlost a délka proudu a  $\nu$  je kinematická viskozita kapaliny. V případě proudění potrubím by  $\mathcal{U}$  byla střední rychlost proudu a  $\mathcal{L}$  průměr potrubí. Je-li v tomto případě Reynoldsovo číslo menší než zhruba 2300, můžeme proudění považovat za laminární, jinak je proudění turbulentní.

Vraťme se zpět k našemu případu kouře vycházejícího z komína. Dalším jevem spojeným s turbulencí, který můžeme pozorovat, je široké spektrum měřítek turbulentního proudu. V turbulentním proudu můžeme nalézt struktury (víry) s měřítkem rovným až velikosti výstupního otvoru, které se postupně rozpadají na stále menší a menší útvary. Dochází ke složitému procesu, kdy je energie postupně transportována z oblasti velkých měřítek do oblasti malých měřítek,

při kterých dochází k disipaci energie na teplo. Celý tento proces se nazývá energetická kaskáda (viz dále).

### 1.1.1. Základní rovnice proudění

Abychom mohli začít simulovat proudění, musíme mít nějaký matematický model, který proudění popisuje. Tento model je tvořen Navierovými-Stokesovými rovnicemi. Navier-Stokesovy rovnice, pojmenované po Claude-Louis Navierovi a George Gabriel Stokesovi, je sada rovnic, které popisují pohyb tekutin jako jsou třeba kapaliny a plyny. Tyto rovnice říkají, že změna hybnosti části tekutiny je výsledkem změny tlaku a disipačních vazkých sil působících uvnitř tekutiny. Viskózní síly vznikají vzájemnou interakcí molekul v tekutině a udávají, jak moc je daná tekutina vazká. Tedy tyto rovnice představují dynamickou rovnováhu sil působících v každé dané části tekutiny.

Dříve než uvedeme detailní popis Navierových-Stokesových rovnic, budeme muset udělat několik předpokladů o námi uvažované tekutině. Je důležité, aby tekutina neobsahovala žádná *prázdná místa*, jako jsou třeba bublinky nebo rozpuštěný plyn. Také nebudeme uvažovat směsi kapalin. Další nepostradatelný předpoklad je, že všechna pole, která nás zajímají a která chceme vyšetřovat (tj. tlakové, rychlostní a teplotní pole), jsou diferencovatelná, tj. nepřipouštíme změny skupenství.

Odvození Navierových-Stokesových rovnic vychází ze zákona zachování hmoty, hybnosti a energie. Z důvodu prostorové náročnosti zde toto odvození provádět nebudeme. Kompletní a podrobné odvození těchto rovnic lze nalézt např. v [7],[42].

Vektorový zápis Navierových-Stokesových rovnic pro nestlačitelnou Newtonovskou kapalinu má tvar:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1.2)$$

kde  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$  značí rychlostní pole,  $\rho$  je hustota kapaliny,  $\mu$  dynamická viskozita kapaliny a  $p$  je tlak. Navierovy-Stokesovy rovnice ve složkovém zápisu:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (1.3)$$

$\nu = \mu/\rho$  je kinematická viskozita kapaliny.

### 1.1.2. Měřítko turbulence

Přestože okamžité rychlostní pole  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  má náhodný a nepředvídatelný charakter, je naštěstí možné zavést různé statistické veličiny popisující toto pole, například průměrné hodnoty. Turbulence je sice děj náhodný, ale korelovaný. To znamená, že hodnota rychlosti v určitém bodě (čase) je částečně závislá na hodnotách rychlosti v jeho blízkém okolí. Tato skutečnost poukazuje na existenci měřítek statistické korelace. K tomu je zapotřebí zadefinovat některé veličiny.

Abychom byli schopni získat některé statistické informace o toku, je nutné rozložit okamžitou rychlost  $\mathbf{u}$  na součet průměrné rychlosti  $\bar{\mathbf{u}}$  a flukтуаční složky  $\mathbf{u}'$  v čase:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \quad (1.4)$$

kde  $\mathbf{u}'$  je náhodná složka pohybu. Na výše zmíněnou operaci lze pohlížet také jako na separaci měřítek, ale o tom bude pojednáno více v další kapitole. Dále se pro lepší názornost omezme

na případ proudění s fluktuacemi rychlosti  $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$  pouze v jednom směru. Potom je prostorově-časová korelační funkce dána takto:

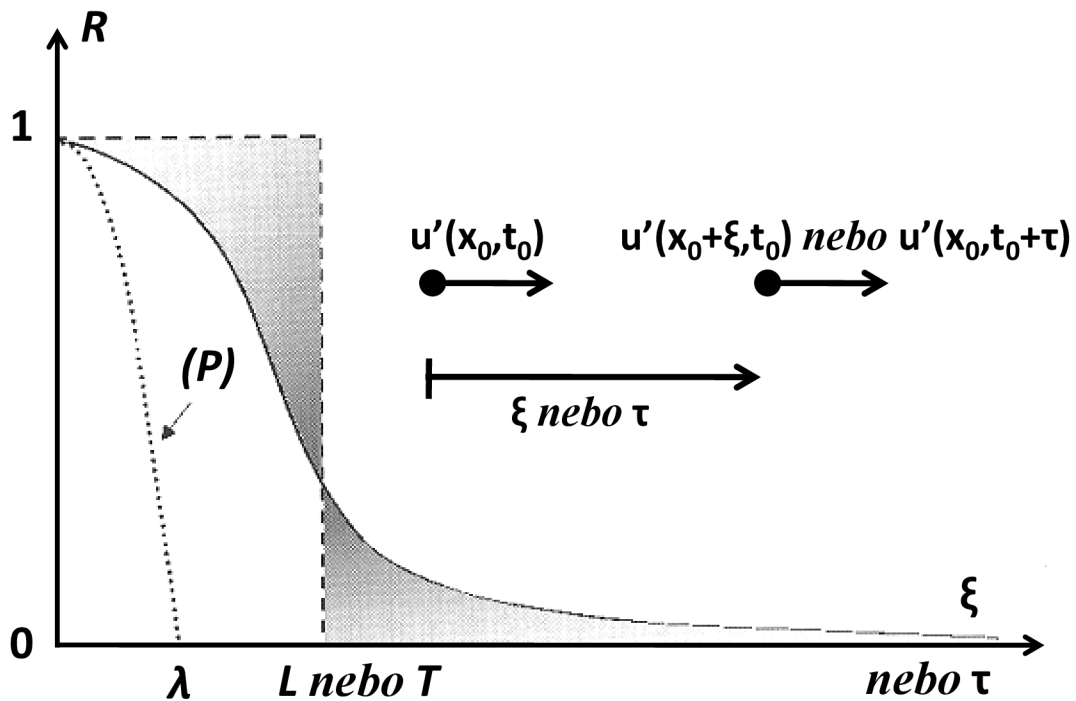
$$R(x, x', t, t') = \frac{\langle u'(x, t)u'(x', t') \rangle}{\langle u'(x, t)u'(x, t) \rangle}, \quad (1.5)$$

$\langle \rangle$  značí zprůměrování. V případě homogenního statisticky stacionárního proudu mohou být autokorelační funkce (v prostoru a čase) vyjádřeny jako:

$$R(\xi, t_0) = \frac{\langle u'(x, t_0)u'(x + \xi, t_0) \rangle}{\langle u'(x, t_0)u'(x, t_0) \rangle}, \quad (1.6)$$

$$R(x_0, \tau) = \frac{\langle u'(x_0, t)u'(x_0, t + \tau) \rangle}{\langle u'(x_0, t)u'(x_0, t) \rangle}, \quad (1.7)$$

kde  $\xi = x' - x$ ,  $\tau = t' - t$  a  $x_0$  (respektive  $t_0$ ) značí danou lokaci (daný okamžik). Typický tvar těchto autokorelačních funkcí je zobrazen na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Tvar autokorelační funkce rychlosti a Taylorovo měřítko. Převzato z [67].

Nyní už můžeme zadefinovat integrální měřítko proudu. Integrální prostorové a časové měřítko proudu (v literatuře někdy též označována jako *Taylorova makro-měřítka*) je dáno [67]:

$$L = \int_0^\infty R(\xi, t) d\xi, \quad (1.8)$$

$$T = \int_0^\infty R(x, \tau) d\tau. \quad (1.9)$$

Integrální prostorové měřítko  $L$  udává velikost oblasti, ve které jsou rychlosti znatelně korelovány, tj. velikost velkých vírů nesoucích většinu energie turbulentního pohybu. Podobně

integrální časové měřítko  $T$  udává délku intervalu, přes který je korelace rychlosti významná, tj. doba jednoho obratu víru.

Dalším významným délkovým měřítkem je Taylorovo mikroměřítko. K autokorelační funkci můžeme sestavit osculační parabolu definovanou jako  $\mathcal{R} = 1 - \frac{\xi^2}{\lambda^2}$  při  $\xi \rightarrow 0$ . Pak můžeme definovat Taylorovo mikroměřítko  $\lambda(t)$  jako:

$$\left( \frac{\partial^2 R(\xi, t)}{\partial \xi^2} \right)_{\tau=0} = -\frac{2}{\lambda^2(t)}. \quad (1.10)$$

$\lambda$  je nazýváno mikroměřítkem proto, že je definováno pomocí zakřivení v počátku rychlostní autokorelační funkce, tedy závisí na nejmenších vírech [67]. Taylorovo mikroměřítko je charakteristickým délkovým měřítkem gradientu rychlosti.

Nicméně, velikost nejmenších vírů přítomných v proudu je ještě menší než Taylorovo mikroměřítko  $\lambda(t)$ . Označme rychlostní, délkové a časové měřítko nejmenších turbulentních struktur jako  $v_K$ ,  $L_K$  a  $\tau_K$ . Abychom získali vyjádření pro  $L_K$  předpokládejme, že při malých měřítkách jsou difuzní a konvekční člen v rovnováze. Aproximujeme-li konvekční člen  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \approx v_K^2/L_K$  a difuzní člen  $\nu \nabla^2 \mathbf{u} \approx \nu v_K/L_K^2$ , získáme:

$$Re_K = \frac{v_K L_K}{\nu} = 1. \quad (1.11)$$

Použitím definice pro disipaci energie  $\varepsilon = 2\nu S_{ij} S_{ij}$  ( $S_{ij} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$ ) a dimenzionální analýzy dostaneme přibližný odhad disipace energie:

$$\varepsilon \approx \frac{\nu}{\tau_K^2}. \quad (1.12)$$

Zkombinujeme-li vztah (1.12) s dalším výrazem  $v_K = L_K / \tau_K$ , dostaneme:

$$\tau_K = \left( \frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad L_K = \frac{\nu^{\frac{3}{4}}}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}, \quad v_K = (\nu \varepsilon)^{\frac{1}{4}}. \quad (1.13)$$

Měřítko  $v_K$ ,  $L_K$  a  $\tau_K$  jsou nazývána *Kolmogorova mikroměřítko turbulence*. Tato měřítko jsou charakteristická pro nejmenší turbulentní útvary (víry), při nichž dochází k disipaci energie na teplo.

Jelikož se výše zmíněná měřítko početně velice obtížně zjišťují a před simulací, kdy nemáme o proudu dostatek informací k jejich zjištění za pomoci výše zmíněných vztahů, existují odhady těchto měřítek. Označme si

$$Re_L = \frac{u_0 L}{\nu} \quad (1.14)$$

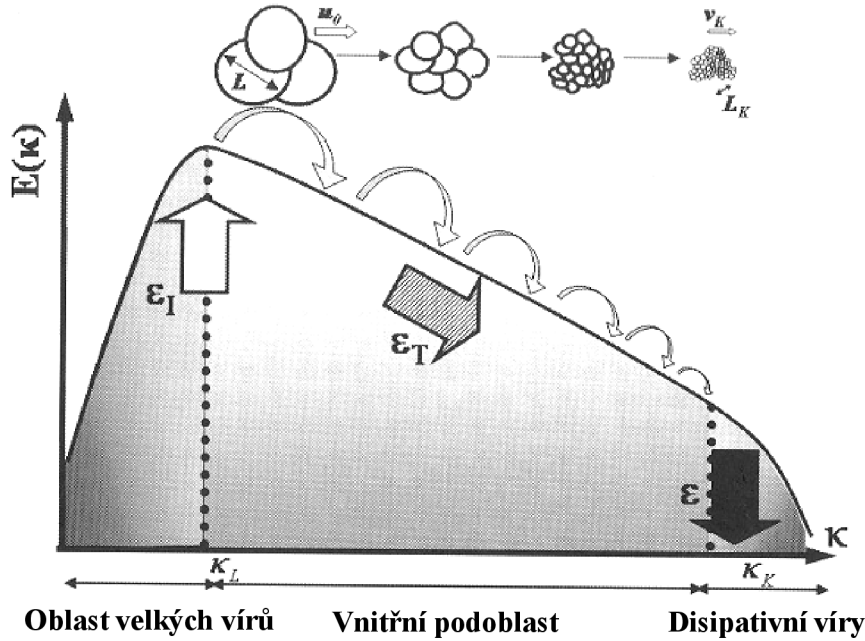
jako Reynoldsovo číslo charakterizující největší měřítko turbulence. Pak lze měřítko turbulence odhadnout:

$$\frac{L_K}{L} \approx Re_L^{-\frac{3}{4}}, \quad \frac{\lambda}{L} \approx Re_L^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{L_K}{\lambda} \approx Re_L^{-\frac{1}{4}}. \quad (1.15)$$

Ze vztahů (1.15) lze vypočítat, že Taylorovo mikroměřítko leží někde mezi Kolmogorovým mikroměřítkem  $L_K$  a integrálním délkovým měřítkem  $L$ . Dále tyto vztahy ukazují na fakt, že v turbulentním proudu se nachází široké spektrum různě velkých turbulentních útvarů různých měřítek. První vztah (1.15) napovídá, že šířka tohoto spektra roste s Reynoldsovým číslem. Jinými slovy řečeno, hlavní rozdíl mezi dvěma proudy se stejným délkovým měřítkem ale jiným Reynoldsovým číslem je velikost nejmenších vírů.

### 1.1.3. Energetická kaskáda

Jednou z nejpůvodnějších charakteristických vlastností turbulence je koncept energetické kaskády. Podle tohoto konceptu je turbulentní kinetická energie tvořena nějakou externí silou nebo hydrodynamickými nestabilitami. Tato energie je většinou generována v oblasti velkých měřítek, typicky v řádu integrálního délkového měřítka turbulentních fluktuací. Posléze je tato energie transformována pomocí nevazkého nelineárního mechanismu do malých měřítek, ve kterých dochází díky vazkému disipačnímu procesu k přeměně této energie na teplo. Na obrázku 1.2 je tento mechanismus graficky vyjádřen v energetickém spektru  $E(\kappa)$ ,  $\kappa$  je vlnové číslo ( $\kappa \approx 1/\text{poloměr vřvu}$ ). Můžeme zde rozlišit tři různé regiony.



Obrázek 1.2: Znázornění energetické kaskády. Obě osy jsou v logaritmických souřadnicích. Převzato z [67].

První region je tvořen největšími vřvy v proudu. Zde dochází ke generaci turbulentní kinetické energie z hlavního proudu. Tato měřítka jsou spojena s průměrným polem a jsou závislá na produkčním mechanismu (externí síly, hydrodynamické nestability). Z důvodu rozmanitosti generace turbulence nemá tato oblast žádný univerzální charakter. Energie je generována při integrálním délkovém měřítku  $L$ . Za předpokladu, že energii obsahující vřvy se rozpadají při časovém měřítku obratu vřvu, pak rychlost, se kterou energie vstupuje do kaskády, je:

$$\varepsilon_I \approx \frac{u_0^2}{L/u_0} = \frac{u_0^3}{L} \quad (1.16)$$

a tato veličina není závislá na viskozitě.

Druhá oblast je oblast přechodových délkových měřítek  $l$ , nazývána též vnitřní podoblast, přičemž  $L_K \ll l \ll L$ . V této oblasti dochází k transportu turbulentní kinetické energie z velkých měřítek do měřítek menších. K transportu dochází nelineární interakcí mezi jednotlivými měřítky bez ohledu na viskozitu a mechanismus generace energie. Rozsah této oblasti je závislý na Reynoldsově číslu. V tomto regionu jsou jen dvě důležité veličiny: délkové měřítko  $\kappa = 1/l$  a průměrná rychlost disipace turbulentní energie  $\varepsilon_T$ . Protože energie je transferována beze ztrát,

$\varepsilon_T$  zůstává konstantní a je rovna průměrné rychlosti disipace energie (za podmínky statistické stacionarity):

$$\varepsilon_T \approx \varepsilon_I. \quad (1.17)$$

Energetické spektrum této vnitřní podoblasti, často nazývané jako Kolmogorův zákon nebo Kolmogorovo spektrum, má tvar [85]:

$$E(\kappa) = K_0 \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}, \quad (1.18)$$

kde  $K_0$  je Kolmogorova konstanta nabývající hodnot 1,4 - 1,7.

Poslední region obsahuje nejmenší měřítko, pro něž viskózní děje nabývají na důležitosti a kde je kinetická energie disipována na teplo. Rychlost disipace v nejmenších vírech je  $\varepsilon = 2\nu S_{ij}S_{ij}$  ( $S_{ij} = \partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i$ ). Jelikož energie je transformována beze ztrát, dostáváme:

$$\frac{u_0^3}{L} \approx \nu \frac{v_K^2}{L_K^2}. \quad (1.19)$$

Z tohoto vztahu můžeme v kombinaci se vztahem  $\frac{v_K L_K}{\nu} = 1$  identifikovat Kolmogorovo mikroměřítko.

Základní fyzikální mechanismus zodpovědný za tento transport energie směrem do oblasti malých měřitek je deformování (protahování) vírů. Když vír prodělá takovou deformaci podél své osy rotace, dojde v tomto směru k jeho protažení. V nestlačitelném proudění vede tato změna ke zmenšení poloměru víru, objem zabraný vírem se nemění. Viskozita v tomto mechanismu nehraje žádnou roli, je proto přirozené předpokládat, že úhlová hybnost víru je vůči této operaci invariantní. Tedy musí nutně dojít k nárůstu osové složky vířivosti. V důsledku toho došlo k transportu kinetické energie do nižších měřitek, protože poloměr víru se zmenšil.

## 1.2 Modelování turbulence

Simulace proudění vlastně spočívá ve vyřešení Navierových-Stokesových rovnic s příslušnými počátečními a okrajovými podmínkami. Turbulence situaci však výrazně komplikuje. Proto vznikly metody, jak k turbulenci přistupovat. Buď ji můžeme počítat přímo, což je početně neskutečně nákladné (viz další kapitola), nebo můžeme turbulenci modelovat. V minulosti bylo vyvinuto mnoho přístupů. Vznikla řada modelů založená na tzv. Reynoldsově zprůměrování, kdy rozložíme rychlost na složku v čase průměrnou a fluktuální (podobně jako při konstrukci korelační funkce rychlosti) a tu posléze dosadíme do Navierových-Stokesových rovnic. Ty pak řešíme pro neznámé v čase průměrné rychlosti. Neuzavřené členy posléze modelujeme. Tento přístup se nazývá RANS (zkratka z anglického Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations). Další přístup, na který se pak zaměříme, je technika zvaná Large Eddy Simulation. I ta je založena na zprůměrování rychlosti, ale na zprůměrování objemovém.

### 1.2.1. Direct Numerical Simulation

Metoda Direct Numerical Simulation (zkráceně DNS) spočívá v přímém řešení Navierových-Stokesových rovnic s ohledem na předepsané okrajové podmínky, v jejich rozřešení až do nejmenších měřitek včetně Kolmogorova měřítka. Každá DNS simulace představuje jednu realizaci daného případu proudění. Přístup k řešení turbulentního proudění metodou DNS nebyl až do sedmdesátých let minulého století možný, protože neexistovaly dostatečně výkonné počítače, které by byly schopny zpracovat obrovská množství dat, což je, jak dále uvidíme, pro metodu DNS nutné. Koncepčně je tento přístup k řešení turbulence nejjednodušší a když je použit, dosahuje vysoké přesnosti a detailnosti výsledků, které nemůže konkurovat žádná jiná metoda. Je to ovšem za cenu enormních výpočetních nároků.

Řešení nestacionárních Navierových-Stokesových rovnice metodou DNS vyžaduje rozřešení všech měřítek od integrálního délkového měřítka  $L$  až po Komogorovo mikroměřítka  $L_K$ . Jinými slovy vzdálenost dvou sousedních výpočetních bodů (buněk) nesmí přesáhnout hodnotu  $L_K$ . Tedy počet bodů výpočetní sítě  $N_{xyz}$  potřebných pro trojdimenzionální DNS simulaci je úměrný [85]:

$$N_{xyz} \approx Re_L^{\frac{9}{4}}. \quad (1.20)$$

Časové měřítka nejmenších vírů udává mez pro maximální povolenou velikost časového kroku. Abychom dostali dostatečně přesné řešení v čase, tak se žádná částice kapaliny nesmí během jednoho časového kroku přemístit dále než je vzdálenost výpočetních uzlů. Minimální počet časových kroků  $N_t$  pro simulaci jedné otočky víru trvající  $T$  je:

$$N_t \approx \frac{T}{\Delta t} \approx \frac{T}{L_K/u_0} \approx \frac{T}{L/u_0} Re_L^{\frac{3}{4}}. \quad (1.21)$$

Za předpokladu, že procesorový čas vyžadovaný numerickým algoritmem použitým k řešení je úměrný počtu početních operací, pak výpočetní náklady simulace se škálují podle:

$$\text{výpočetní čas} \propto N_{xyz} \cdot N_t \propto \tilde{C} \cdot Re_L^3, \quad (1.22)$$

kde  $\tilde{C}$  představuje náklady algoritmu vyjádřené v [s/bod sítě/iterace], což závisí jak na náročnosti numerického řešiče tak na rychlosti počítače. Dále jsou-li ve výpočetní doméně přítomny nějaké stěny, pak je třeba rozřešit i přístěnné turbulentní útvary, tím pádem se stane závislost na Reynoldsově číslu ještě výraznější. Řešení většiny případů proudění, s nimiž se můžeme v průmyslu nebo v přírodě setkat, je bohužel pro velmi vysoké požadavky na výkon počítačů metodou DNS nemožné.

### 1.2.2. Reynolds-Averaged Navier-Stokes

Asi v současnosti nejpoužívanějším přístupem, kterak simulovat turbulentní proudění, je použit metodu *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (zkratka RANS, někdy se lze setkat i s názvem Reynolds-Averaged Numerical Simulation). Základním kamenem této metody je tak zvané Reynoldsovo průměrování a následný rozklad řešených veličin na složku v čase průměrnou a fluktuací:

$$u(t) = \bar{u} + u'(t), \quad (1.23)$$

přičemž platí:

$$\bar{u} = \int_0^T u(t) dt \quad \text{a} \quad \overline{u'} = 0. \quad (1.24)$$

Reynoldsovo průměrování je pak aplikováno na Navier-Stokesovy rovnice. Ty jsou posléze řešeny pro v čase průměrné veličiny. Výsledkem RANS simulace je tedy v čase průměrná rychlost, tlak, teplota a tak dále.

Bohužel v důsledku Reynoldsova průměrování se v Navier-Stokesových rovnicích objeví členy, jež není možno vyjádřit pomocí počítaných proměnných. Jedná se o průměrovaný součin fluktuací složek rychlosti vzniklý z konvektivního členu. Aby byl systém řešitelný, je třeba tyto členy uzavřít, tj. vyjádřit pomocí počítaných proměnných. Za tímto účelem vznikla celá řada RANS turbulentních modelů. Asi nejnámější jsou modely  $k - \epsilon$  a  $k - \omega$  a jejich varianty [85]. Jedná se o tak zvané dvourovnicové modely turbulence. Turbulence je reprezentována turbulentní kinetickou energií  $k$  a specifickou disipací  $\epsilon$ , respektive turbulentní frekvencí vírů  $\omega$ . Z těchto veličin je pak možno dopočítat měřítka turbulence.



### 1.2.3. Large Eddy Simulation

Při řešení proudění metodou Large Eddy Simulation (zkráceně LES) jsou velké víry reprezentovány přímo, zatímco malé víry jsou modelovány. Co se týká výpočetních nákladů, pak metoda LES leží někde mezi metodami RANS a DNS. Vznik této metody byl motivován nedostatky každé z těchto metod. Protože turbulentní útvary velkých měřítek jsou reprezentovány přímo, lze od metody LES očekávat větší přesnost a věrohodnost než od metody RANS pro případy proudění, v nichž jsou útvary velkých měřítek silně nestacionární, například proudění okolo oblých těles, kde dochází k separaci a protahování vírů.

Jak bylo ukázáno výše, metoda DNS je velice výpočetně náročná. Náročnost této metody roste zhruba s třetí mocninou Reynoldsova čísla. Většina výpočetního výkonu se spotřebuje na rozřešení velice malých disipativních vírů. Avšak většina energie a anizotropie turbulence je obsažena převážně ve velkých vírech. Metoda LES právě tyto velké víry, které jsou ovlivněny geometrií a tudíž nejsou univerzální, reprezentuje explicitně a vliv turbulentních vírů nejmenších měřítek, jenž mají až na výjimky univerzální charakter, modeluje. Nedochozí k přímé reprezentaci malých vírů. Metoda LES je tedy o poznání méně náročná a neklade tak vysoké nároky na výpočetní techniku jako metoda DNS.

Hlavní myšlenka metody LES spočívá v separaci energií obsahujících vírů velkých měřítek od malých disipativních vírů. Velké víry jsou pak řešeny explicitně, zatímco vliv malých vírů se modeluje. Separace měřítek se provede pomocí filtrace. Na rychlostní pole se aplikuje filtr typu dolní propust. Po této filtraci velká měřítka, tj. nízké prostorové frekvence, zůstanou zachována a útvary malých měřítek (vysoké prostorové frekvence) se tímto odstraní. Rychlostní pole se tedy rozloží na součet přefiltrované složky a flukтуаční složky rychlosti:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t), \quad (1.25)$$

kde:

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{G} * \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \Delta) \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (1.26)$$

je přefiltrovaná složka rychlosti oprostěná od vysokých frekvencí. Operátor  $*$  je operátor konvoluce. Funkce  $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \Delta)$  se nazývá *jádrum konvoluce (filtru)*. Pro tuto funkci musí platit normalizační podmínka:

$$\int \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \Delta) d\mathbf{r} = 1. \quad (1.27)$$

Ve většině případů funkce  $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \Delta)$  nezávisí na  $\mathbf{x}$ .

Velmi důležitým parametrem ovlivňující přesnost simulace je šířka filtru  $\Delta$ . Velikost tohoto parametru definuje velikost oblasti malých měřítek, která budou modelována. Čím větší tato šířka bude, tím větší bude oblast malých měřítek odseparovaných od původního pole rychlosti. Naopak budeme-li šířku filtru snižovat, pak budeme zvyšovat přesnost simulace až do mezního případu, kdy dosáhne velikosti Kolmogorova délkového mikroměřítka. V tom případě bude oblast odseparovaných měřítek zanedbatelně malá a LES simulace nám přejde v simulaci DNS. Velikost šířky filtru  $\Delta$  většinou bývá stejná jako rozměr buňky výpočetní sítě. Nemá smysl volit šířku filtru menší než rozměr buňky.

Nejčastěji používané filtry pro třídídimenzionální LES simulace turbulentního proudění jsou zejména [45]:

- Box filtr:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \Delta) = \begin{cases} 1/\Delta^3 & \text{pro } |\mathbf{r}| \leq \Delta/2 \\ 0 & \text{pro } |\mathbf{r}| > \Delta/2 \end{cases} \quad (1.28)$$

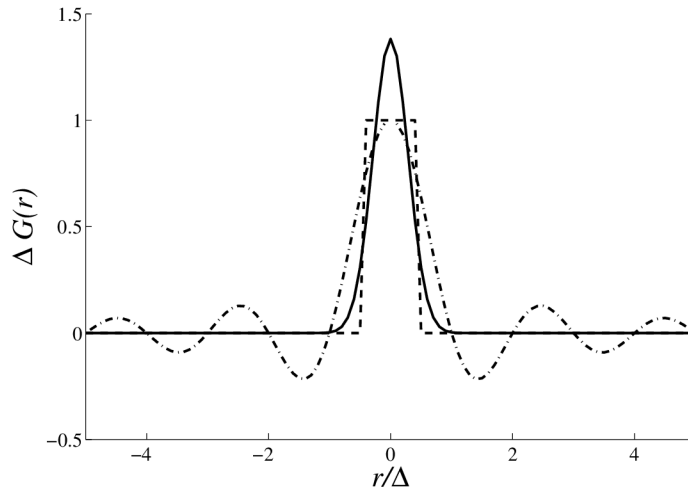
- Gaussův filtr:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \Delta) = \left( \frac{6}{\pi\Delta^2} \right)^{1/2} \exp\left( -\frac{6|\mathbf{r}|^2}{\Delta^2} \right) \quad (1.29)$$

- Ostrý spektrální filtr:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \Delta) = \prod_{i=1}^3 \frac{\sin(r_i/\Delta)}{r_i} \quad (1.30)$$

Box filtr je používán v řešičích turbulentního proudění založených na metodě konečných objemů. Gaussův a ostrý spektrální filtr jsou používány spíše ve vědeckých pracích. Často nachází uplatnění ve spektrálních kódech, tj. které pracují s veličinami popisující proudění rozloženými do Fourierovy řady. Grafické znázornění jader  $\mathbf{G}$  těchto tří nepoužívanějších filtrů je na obrázku 1.3.



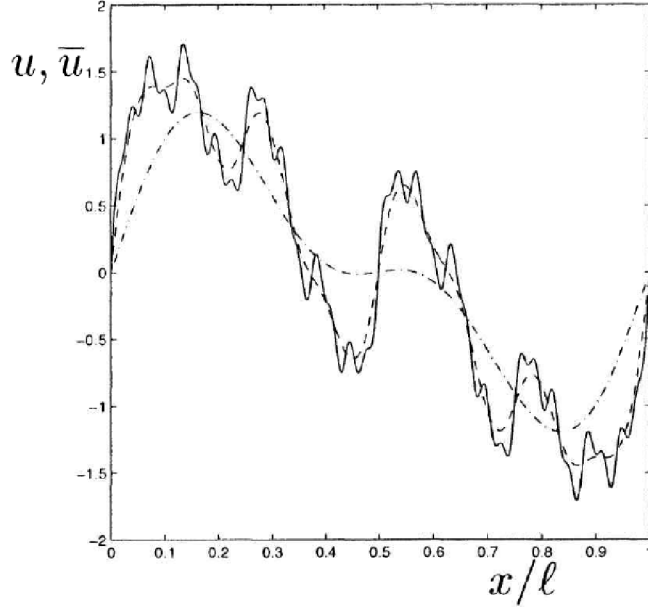
Obrázek 1.3: Filtry používané v LES: čárkovaná čára: Box filtr, plná čára: Gaussův filtr, čerchovaná čára: ostrý spektrální filtr. Převzato z [58]

Na obrázku 1.4 vidíme, co se stane s referenčním signálem, pokud na něj aplikujeme box filtr s různými šířkami filtru. Na tomto obrázku si lze všimnout, že čím je šířka filtru větší, tím více se signál vyhladí, tj. bude potlačeno více malých prostorových frekvencí.

Rozložení rychlosti na filtrovanou část a fluktuální složku hodně připomíná metodu RANS, kde je rychlost podobně rozložena na složku průměrnou v čase a fluktuální. Jestliže v RANS platilo, že  $\bar{\bar{u}} = \bar{u}$  a  $\bar{u}' = 0$ , tak pro případ filtrace tyto vztahy neplatí. To je vidět už z definice filtrace. Dále je dobré si uvědomit, že i přístup RANS představuje separaci měřítek, ale tato separace je provedena pro časová měřítka, kdežto v LES separujeme prostorová měřítka.

### 1.3 LES: Subgridní modely

V předchozí kapitole jsme si představili koncepci separace prostorových frekvencí pomocí operace filtrace (konvoluce), což je jedním ze základních kamenů metody Large Eddy Simulation. V této kapitole uvedeme další nedílnou součást metody LES a to sice tu, jak reprezentovat odseparované útvary malých prostorových měřítek. Pokud bychom tak neučinili, chyběl by nám v naší simulaci správný mechanismus disipace energie, což je vzhledem k faktu, že chceme co nejrealnější simulaci, nepřípustné. Jak bylo zmíněno výše, tato nejmenší měřítka se nepočítají přímo, ale modelují pomocí tzv. *subgridních modelů*. Přívlástek subgridní tyto modely nesou proto, že reprezentují útvary vysokých prostorových frekvencí, které nejsme schopni postihnout rozlišením (velikostí) výpočetní sítě.



Obrázek 1.4: Filtrovaný referenční signál (plná čára) pomocí box filtru s šířkou filtru  $\ell/16$  (čárkovaná čára) a  $\ell/4$  (čerchovaná čára). Převzato z [22]

Nejprve je třeba přefiltrovat rovnice popisující proudění. Pro větší přehlednost a názornost je zde uvedme znovu a ve složkovém tvaru. Uvažujme nestlačitelnou kapalinu. Rovnice kontinuity:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.31)$$

a pohybové rovnice:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (1.32)$$

Nyní na ně aplikujme operátor filtrace. Na něj ovšem musíme mít nějaké požadavky. Jádru filtru  $\mathbf{G}$  nesmí záviset na prostorové proměnné  $\mathbf{x}$ . Tento předpoklad je velmi důležitý, jelikož nám dovoluje zaměnit operaci filtrace a derivace (časové i prostorové). Tento fakt přímo plyne z definice filtrace. Pokud by  $\mathbf{G}$  bylo závislé na  $\mathbf{x}$ , pak by tato záměna nebyla možná. Filtrovaná rovnice kontinuity:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.33)$$

Filtrované pohybové rovnice:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (1.34)$$

Na levé straně (1.34) stojí člen obsahující  $\bar{u}_i \bar{u}_j$ . Tento člen představuje problém, protože ho nejsme schopni vyjádřit pomocí námi počítaných proměnných  $\bar{u}_i$ . Proto přičteme k pravé i levé straně (1.34) výraz  $\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i \bar{u}_j)$ . Dostaneme:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1.35)$$

kde

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (1.36)$$

je *tenzor subgridních napětí*. Tento tenzor v sobě zahrnuje vliv malých měřítek. Nejsme schopni ho vyjádřit explicitně, tudíž musíme přistoupit k jeho modelování (aproximaci). V minulosti vznikla celá řada subgridních modelů.

### 1.3.1. Smagorinského model

První subgridní model pro metodu Large Eddy simulation navrhl v roce 1963 Smagorinsky [73]. Vycházel z předpokladu, že nejmenší víry v proudu je možno považovat za izotropické a tudíž by bylo možno aplikovat Boussinesqovu hypotézu [6] pro popis efektu nerozřešených vírů. Smagorinsky ve svém modelu uvažuje, že subgridní tenzor napětí je úměrný tenzoru napětí počítaného pomocí rozřešených rychlostí  $\bar{S}_{ij}$ :

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} = -2\nu_t\bar{S}_{ij}, \quad (1.37)$$

Konstanta úměrnosti mezi těmito dvěma tenzory je kinematická subgridní viskozita  $\nu_t$ :

$$\nu_t = (C_S\Delta)^2|\bar{S}| \quad (1.38)$$

a  $\bar{S}_{ij}$  je tenzor napětí počítaný z rozřešené oblasti proudu:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right), \quad (1.39)$$

přičemž  $|\bar{S}| = |2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}|^{1/2}$ .

Subgridní viskozita  $\nu_t$  je závislá na Smagorinského konstantě  $C_S$ . Hodnota této konstanty byla stanovena z teoretické analýzy rychlosti rozpadu izotropických turbulentních vírů ve vnitřní oblasti energetického spektra. Konstanta  $C_S$  nabývá hodnot  $C_S = 0.17 - 0.24$ . Rozsah hodnot této konstanty naznačuje, že neexistuje žádná univerzální hodnota použitelná pro všechny možné případy proudění. Smagorinského konstanta je závislá na případě proudění. Toto je zásadní nevýhoda tohoto jinak velmi jednoduchého modelu.

Často tento model bývá ještě doplněn o tlumení subgridního napětí v blízkosti stěn. Jelikož subgridní turbulentní fluktuace musí být u stěny nulové, tedy musí být nulová i subgridní viskozita. Z toho důvodu se subgridní viskozita  $\nu_t$  vynásobí výrazem

$$f_\mu = 1 - \exp(1 - y^+/26), \quad (1.40)$$

který nulovost u stěny zaručí [53].

### 1.3.2. Dynamický Smagorinského model

Podstatnou nevýhodu Smagorinského modelu v podobě závislosti na neuniverzální konstantě se snaží odstranit dynamické modifikace Smagorinského modelu. Při použití těchto modelů nemusíme dopředu zadávat hodnotu Smagorinského konstanty, ta je průběžně počítána v průběhu výpočtu. Odtud pochází název dynamické modely. Děje se tomu však za podstatného zesložitění původně velmi jednoduchého modelu a s tím souvisejícím vzrůstem výpočetního času.

Jako první představil dynamickou modifikaci Smagorinského modelu v roce 1991 Germano [21]. Tento model je založen na algebraické identitě mezi subgridními napětími získanými pomocí dvou filtrů o různých šířkách a rozřešenými turbulentními napětími.

Nejprve aplikujme na rovnici (1.34) další operátor testovacího filtru  $\tilde{G}$  s větší šířkou filtru než má původní filtr. Šířku  $\tilde{G}$  označme  $\tilde{\Delta}$ . Obyčejně se volí  $\tilde{\Delta} = 2\Delta$ . Po druhé filtraci Navierových-Stokesových rovnic získáme:

$$\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{u}_i\tilde{u}_j) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2\tilde{u}_i}{\partial x_k\partial x_k} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1.41)$$

kde tenzor subgridních napětí má nyní tvar:

$$T_{ij} = \widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j. \quad (1.42)$$

Nyní uvažujme rozřešený tenzor turbulentních napětí  $\mathcal{L}_{ij}$  definovaný jako:

$$\mathcal{L}_{ij} = \widetilde{u_i \tilde{u}_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j. \quad (1.43)$$

Tento tenzor se v literatuře nazývá Leonardův tenzor napětí. Rozřešená turbulentní napětí  $\mathcal{L}_{ij}$  reprezentují příspěvky do Reynoldsova tenzoru napětí z oblasti délkových měřítek nacházející se mezi šířkou testovacího filtru a šířkou filtru původního. Vztahy (1.36), (1.42) a (1.43) splňují následující vztah

$$\mathcal{L}_{ij} = T_{ij} - \widetilde{\tau_{ij}}, \quad (1.44)$$

který dává do souvislosti subgridní napětí získaná pomocí testovacího a původního filtru. Pošimněme si, že tenzor  $\mathcal{L}_{ij}$  lze spočítat přímo (explicitně).

Identita definovaná vztahem (1.44) může být výhodně použita pro odvození přesného subgridního modelu. V případě dynamického Smagorinského modelu slouží výše uvedená identita k přesnějšímu stanovení Smagorinského konstanty, která bude lépe charakterizovat a vystihovat okamžitý stav proudu.

Pro další odvozování uvažujme, že funkční forma modelů určených k výpočtu subgridních napětí pro původní filtr  $\tau_{ij}$  a testovací filtr  $T_{ij}$  má společné parametrické vyjádření pro oba subgridní tenzory napětí. Použijme standardní Smagorinského model s tím zobecněním, že Smagorinského konstanta je teď funkcí prostoru a času. Dále ještě předpokládejme, že prostorové změny této konstanty nejsou veliké, tudíž zůstane aplikováním testovacího filtru téměř nedotčena. Získáme

$$\tau_{ij} - (\delta_{ij}/3)\tau_{kk} = -2C_S \Delta^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \quad (1.45)$$

pro původní filtr a

$$T_{ij} - (\delta_{ij}/3)T_{kk} = -2C_S \tilde{\Delta}^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} \quad (1.46)$$

pro filtr testovací, přičemž

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad |\tilde{S}| = \sqrt{2 \tilde{S}_{mn} \tilde{S}_{mn}},$$

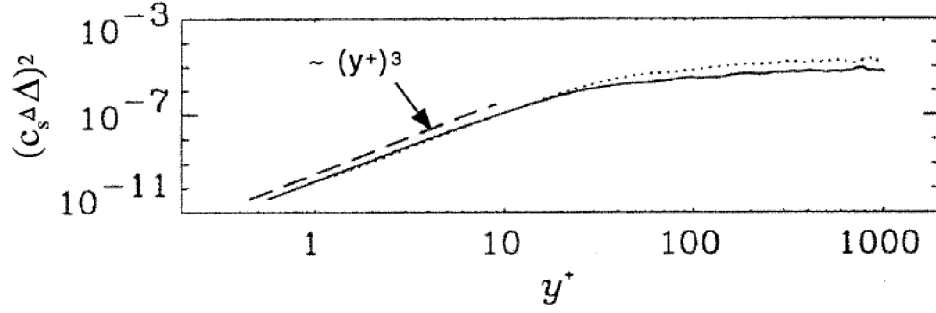
$\Delta$  je charakteristická šířka původního filtru  $G$  a  $\tilde{\Delta}$  je šířka testovacího filtru  $\tilde{G}$ . Dosadíme nyní vztahy (1.45) a (1.46) do (1.44) a zúžme výsledný tenzor tenzorem  $\bar{S}_{ij}$ . Dostaneme

$$\mathcal{L}_{ij} \bar{S}_{ij} = -2C_S \left( \tilde{\Delta}^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} \bar{S}_{ij} - \Delta^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \right). \quad (1.47)$$

Z tohoto výrazu už v principu lze hodnotu konstanty  $C_S$  spočítat. Ovšem výraz v závorce může nabývat nulové hodnoty, což učiní  $C_S$  neurčitou. *A priori* testy pro případ turbulentního proudu kanálem ukázaly, že toto je právě případ, kdy se výraz v závorce stává nulový. Tento nedostatek odstraníme tak, že výrazy na obou stranách (1.47) zprůměrujeme přes nějakou část objemu. Pro případ proudu kanálem provedeme zprůměrování v rovinách paralelních se stěnou kanálu, tj. ve směru izotropie turbulence. Konstanta  $C_S$  tak bude závislá pouze na čase a vzdálenosti od stěny:

$$C_S(y, t) = -\frac{1}{2} \frac{\langle \mathcal{L}_{kl} \bar{S}_{kl} \rangle}{\tilde{\Delta}^2 \langle |\tilde{S}| \tilde{S}_{mn} \tilde{S}_{mn} \rangle - \Delta^2 \langle |\bar{S}| \bar{S}_{pq} \bar{S}_{pq} \rangle}, \quad (1.48)$$

$\langle \rangle$  značí zprůměrování.



Obrázek 1.5: Škálování dynamické Smagorinského konstanty v přístěnné oblasti v proudě kanálem s  $Re_\tau = 1050$ . Plná a čárkovaná čára jsou výsledky simulací s různým rozlišením. Převezato z [50].

Výše uvedený postup pro získání Smagorinského konstanty byl upraven modifikací, kterou navrhl Lilly [41]. Pro výpočet Smagorinského konstanty použil metodu nejmenších čtverců. Dosazením vztahů (1.45) a (1.46) do (1.44) získáme:

$$\mathcal{L}_{ij} - (\delta_{ij}/3)\mathcal{L}_{kk} = 2C_S M_{ij}, \quad (1.49)$$

kde

$$M_{ij} = -\tilde{\Delta}^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} + \Delta^2 |\widetilde{S}| \widetilde{S}_{ij}. \quad (1.50)$$

Rovnice (1.49) je vlastně soustava pěti algebraických nezávislých rovnic pro jednu neznámou  $C_S$ . Není možné stanovit konstantu  $C_S$  tak, aby bylo všech pět rovnic splněno. Je možno ji ale určit tak, aby byla chyba vzniklá přeurčeností soustavy minimální. Definujeme  $Q$  jako kvadrát chyby (1.49):

$$Q = (\mathcal{L}_{ij} - (\delta_{ij}/3)\mathcal{L}_{kk} - 2C_S M_{ij})^2. \quad (1.51)$$

Nyní hledáme takové  $C_S$ , které minimalizuje (1.51), tedy musí být splněna podmínka  $\partial Q / \partial C_S = 0$ . Provedením této derivace snadno získáme vzorec pro Smagorinského konstantu:

$$C_S = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_{ij} M_{ij}}{M_{ij}^2}. \quad (1.52)$$

Uvedený vztah skutečně reprezentuje minimum chybové funkce  $Q$ , neboť lze snadno ukázat, že  $\partial^2 Q / \partial C_S^2 > 0$ . Dále stojí za zmínku, že v (1.52) nevystupuje izotropická část z (1.49), protože pro případ nestlačitelného proudění platí  $\tilde{S}_{ii} = 0$ . Bohužel i v tomto postupu se objevuje komplikace v podobě nulového jmenovatele (1.52), což způsobuje značné nestability výpočtu. Tedy i Lilly navrhuje zprůměrovat čítec i jmenovatel přes určitý objem výpočetní domény, nejlépe ve směru izotropie turbulence:

$$C_S = \frac{1}{2} \frac{\langle \mathcal{L}_{ij} M_{ij} \rangle}{\langle M_{ij}^2 \rangle}. \quad (1.53)$$

Tím však částečně ztrácíme výhodu v lokálním určení Smagorinského konstanty.

Výsledky mnoha LES simulací (např. [50], [19]) ukazují, že dynamický Smagorinského model dosahuje větší přesnosti výpočtu v porovnání s DNS simulacemi než standardní Smagorinského model. Vykazuje i lepší chování v blízkosti stěn než Smagorinského model při použití stěnových funkcí.

### 1.3.3. Lokalizovaný dynamický Smagorinského model

Při odvozování dynamického Smagorinského modelu se dopouštíme jisté matematické nekonzistence. Pro získání vztahů (1.47) nebo (1.49) vycházíme z předpokladu malých prostorových změn konstanty  $C_S$  a tudíž ji můžeme považovat za téměř invariantní vůči testovací filtraci. Tento předpoklad není nijak odůvodněný a je v kontrastu s požadavkem na lokálnost  $C_S$ . Další nedostatek dynamického Smagorinského modelu je nestabilita způsobená nulovostí jmenovatelů (1.52). To bylo odstraněno zprůměrováním přes směry, ve kterých lze považovat turbulenci proudu za izotropní. Neříká nám nic o tom, jak přistupovat k proudu bez směru izotropie. Z těchto důvodů upravil Ghosal a kol. [23] stávající dynamický model tak, aby tyto nedostatky vymizely.

Nejprve si napíšeme Leonardův tenzor napětí a dosadíme do něj vztahy pro subgridní napětí pro původní a testovací filtr. Tentokrát ale nechme Smagorinského konstantu pod filtrací. Dostaneme:

$$\mathcal{L}_{ij} - (\delta_{ij}/3)\mathcal{L}_{ij} = \alpha_{ij}C - \widetilde{\beta_{ij}C}, \quad (1.54)$$

kde

$$\alpha_{ij} = -2\widetilde{\Delta}^2|\widetilde{S}|\widetilde{S}_{ij}, \quad \beta_{ij} = -2\Delta^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij}. \quad (1.55)$$

Podobně jako Lilly [41] definujeme chybu nesplnění (1.54):

$$E_{ij}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_{ij} - (\delta_{ij}/3)\mathcal{L}_{ij} - \alpha_{ij}C + \widetilde{\beta_{ij}C}. \quad (1.56)$$

V nějakém daném bodě  $\mathbf{x}$  závisí  $E_{ij}$  na hodnotách funkce  $C$  v bodech nacházejících se v blízkém okolí daného bodu. Proto není možné minimalizovat součet kvadrátů reziduí  $E_{ij}E_{ij}$  lokálně, protože změna hodnoty  $E_{ij}E_{ij}$  v jednom bodě vyvolá změnu reziduí v okolních bodech. Nicméně metodu nejmenších čtverců můžeme zobecnit pro případ globálního hledání minima reziduí. Funkce  $C$ , která nejlépe splní integrální rovnice (1.54) je taková funkce, která minimalizuje:

$$\mathcal{F}[C] = \int E_{ij}(\mathbf{x})E_{ij}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (1.57)$$

$\mathcal{F}[C]$  je funkcionál funkce  $C$  a integrujeme přes celou výpočetní oblast. Pro minimalizaci tohoto funkcionálu se nejprve napíše Eulerova-Langrangeova rovnice a ta se posléze vyřeší, podrobnosti v původní práci [23].

Ghosal a kol. ukázali, že pro případ izotropní turbulence nebo turbulentního proudu s alespoň jedním směrem izotropie má jeho model stejnou podobu jako modely, které navrhl Germano a kol. [21] nebo Lilly [41]. Dále se však věnují odvození modelu pro obecný případ proudu bez směru izotropie. Pro tento případ dostali:

$$C(\mathbf{x}) = \left[ f(\mathbf{x}) + \int \mathcal{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y})C(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right]_+, \quad (1.58)$$

kde  $[\ ]_+$  značí kladnou část a

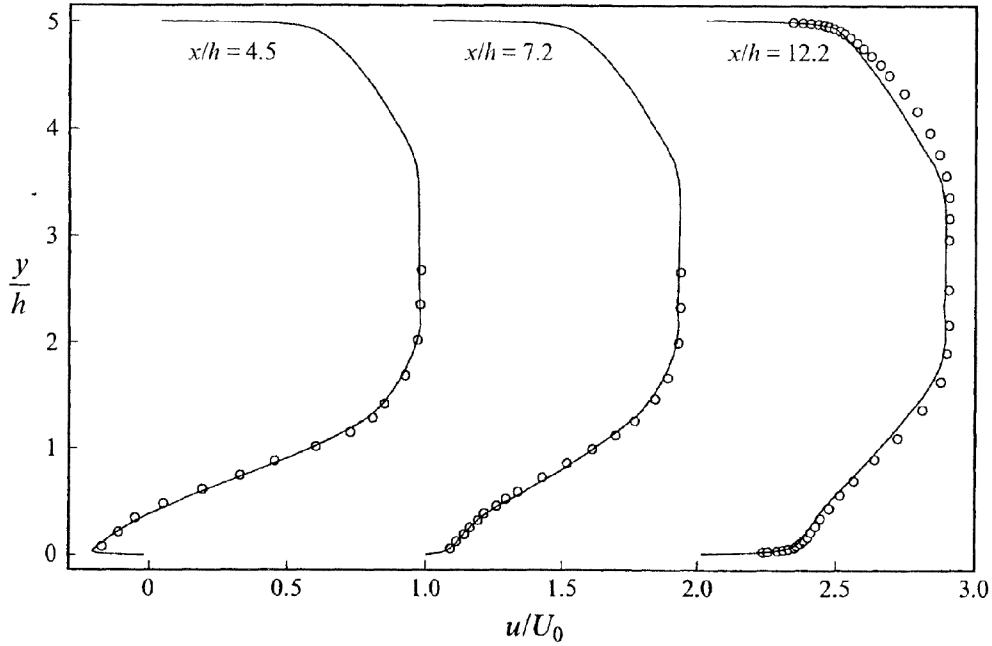
$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha_{kl}(\mathbf{x})\alpha_{kl}(\mathbf{x})} \left[ \alpha_{ij}(\mathbf{x})\mathcal{L}_{ij}(\mathbf{x}) - \beta_{ij} \int \mathcal{L}_{ij}(\mathbf{y})G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \, d\mathbf{y} \right], \quad (1.59)$$

$$\mathcal{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{K}_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{K}_A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \mathcal{K}_S(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\alpha_{kl}(\mathbf{x})\alpha_{kl}(\mathbf{x})}, \quad (1.60)$$

$$\mathcal{K}_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha_{ij}(\mathbf{x})\beta_{ij}(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (1.61)$$

$$\mathcal{K}_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \beta_{ij}(\mathbf{x})\beta_{ij}(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \int G(\mathbf{z}, \mathbf{x})G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{z}. \quad (1.62)$$

Lokalizovaný dynamický model byl testován na několika případech turbulentního proudění. Pro případ buzené i volně tlumené izotropní turbulence vykazuje tento model velice dobrou shodu s experimentálními daty. Pro testování chování tohoto modelu pro případ turbulence bez směru izotropie byl zvolen případ zpětného proudu za schodem s Reynoldsovým číslem 28000. Přítomnost stěn a masivní separace proudu za schodem poskytuje ideální případ pro test schopností modelu vypořádat se s prouděním s komplexní geometrií. Průměrné rychlosti v podélném směru jsou též v dobré shodě s experimentálními výsledky, viz obrázek 1.6. Model též přesně predikuje vzdálenost za schodem, kde dochází k opětovnému přilnutí proudu.



Obrázek 1.6: Průměrné rychlostní profily po proudu za schodem: – LES s lokalizovaným Smagorinského modelem, ○ experimentální data; převzato z [23].

### 1.3.4. Jednorovnicový model

Další ze skupiny subgridních modelů používající koncepci turbulentní vizkozity pro zahrnutí vlivu turbulence je tzv. *jednorovnicový model* (z anglického subgrid kinetic energy model) [52]. V tomto modelu se řeší dodatečná rovnice pro subgridní kinetickou energii. Subgridní kinetická energie je definována jako:

$$k_{sgs} = \frac{1}{2}(\overline{u_i u_i} - \bar{u}_i \bar{u}_i). \quad (1.63)$$

Všimněme si, že tuto energii nelze spočítat přímo, proto se pro ni musí napsat rovnice, jejímž vyřešením subgridní kinetickou energii získáme. Rovnice má tvar:

$$\frac{\partial k_{sgs}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k_{sgs}}{\partial x_i} = -\tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_c \frac{k_{sgs}^{3/2}}{\Delta} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_k}{\sigma_k} \frac{\partial k_{sgs}}{\partial x_i} \right). \quad (1.64)$$

V této rovnici na pravé straně stojí postupně členy produkce, disipace a difuze subgridní kinetické energie. Tenzor subgridních turbulentních napětí je pak modelován pomocí:

$$\tau_{ij} = -2\nu_k \bar{S}_{ij} + \frac{2}{3} k_{sgs} \delta_{ij}, \quad (1.65)$$



kde subgridní viskozita je rovna  $\nu_k = C_k \sqrt{k_{sgs}} \Delta$ . Konstanty  $C_k$ ,  $C_c$  a  $\sigma_k$  se volí, v [52] jsou použity hodnoty  $C_k = 0.05$ ,  $C_c = 1.0$  a  $\sigma_k = 1.0$ .

### 1.3.5. Model podobnosti měřítek

Předchozí skupina modelů modelovala účinky turbulence za pomoci tzv. turbulentní viskozity, pro jejíž vyjádření byl použit některý ze zmíněných modelů. Následující modely nevycházejí z Boussinesqovy aproximace.

V roce 1980 představil svůj subgridní model Bardina [3]. Model pojmenoval model podobnosti měřítek. Při odvození svého modelu vycházel z předpokladu invariance turbulentních měřítek a faktu, že turbulentní struktury různých měřítek jsou si podobné. Této podobnosti doslova použil pro svůj model.

Hlavní myšlenka modelu podobnosti měřítek pro metodu Large-Eddy Simulation je ta, že turbulentní struktury měřítek menších než je šířka filtru  $\Delta$  jsou podobné strukturám měřítek o trochu větších než  $\Delta$ . Za tohoto předpokladu můžeme vyjádřit tenzor subgridních napětí následovně:

$$\tau_{ij} = C_{sim}(\widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j). \quad (1.66)$$

kde operátor vlnka reprezentuje operátor druhé filtrace, nyní s šířkou filtru  $\gamma\Delta$ , kde  $\gamma \geq 1$ . Konstanta  $C_{sim}$  je konstanta podobnosti. Výraz v závorce ve vztahu (1.66) představuje turbulentní napětí pro měřítko od  $\Delta$  do  $\gamma\Delta$ .

A priori testy, které provedl Bardina a kol. za použití Gaussovského a box filtru, vykazují vysokou míru korelace mezi napočítanými a reálnými turbulentními napětími, typicky kolem 80%. Avšak když model podobnosti měřítek v této podobě použili pro různé simulace, tak se ukázalo, že model je málo disipativní, tj. velice podhodnocuje disipaci energie v oblasti nejmenších měřítek, což následně vede k nerealistickým výsledkům. Pro překonání tohoto nedostatku přidali do vyjádření turbulentního napětí (1.66) disipační Smagorinského člen. Výsledný model je:

$$\tau_{ij} = C_{sim}(\widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) - 2(C_S \Delta)^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij}. \quad (1.67)$$

Často bývá tento modifikovaný model podobnosti měřítek v literatuře označován jako smíšený model.

V předešlých letech se vyskytlo mnoho modifikací modelu podobnosti měřítek. Většinou se ale jedná o alternativní volbu parametru  $\gamma$  nebo konstanty  $C_{sim}$ . Zang a kol. [90] upravil smíšený model použitím dynamického Smagorinského modelu. Na případu recirkulačního proudu ukázal, že tento model dosahuje velmi dobrých výsledků. V simulaci turbulentní směšovací vrstvy, kterou realizoval Vreman a kol. [82], dosáhl smíšený model podobnosti měřítek nejlepších výsledků mezi šesti subgridními modely.

### 1.3.6. Model přibližné dekonvoluce

Další postup, jak přistupovat k reprezentaci turbulentních subgridních napětí, navrhl Stolz a Adams [77]. Vyvinuli proceduru, která se snaží aproximovat původní nefiltrované rychlosti z filtrovaných za pomoci inverzního filtru. Následně jsou tyto zrekonstruované rychlosti použity pro výpočet subgridního napětí. Inverzní filtr je vyjádřen pomocí několika prvních členů jeho polynomického rozvoje do nekonečné řady. Tím získáme aproximaci inverzního filtru. Vzniklý model nazvali model přibližné dekonvoluce (z ang. approximate deconvolution model, zkráceně ADM).

Ukažme si nyní, jak je model přibližné dekonvoluce zkonstruován. Pro větší přehlednost a lepší souvislost napíšeme znovu přefiltrované Navierovy-Stokesovy rovnice a rovnici kontinuity:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial u_i u_j}}{\partial x_j}. \quad (1.68)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.69)$$

Výraz na pravé straně (1.68) je neuzavřený člen subgridních napětí. Připomeňme též definici filtrovaných rychlostí  $\bar{\mathbf{u}}(x)$ :

$$\bar{\mathbf{u}} = G * \mathbf{u}. \quad (1.70)$$

Jak již bylo řečeno, model přibližné dekonvoluce se snaží uzavřít systém tvořený Navierovými-Stokesovými rovnicemi a příslušnými okrajovými podmínkami tak, že se získá aproximace původní nefiltrované rychlosti z rychlosti filtrované. Ty se následně použijí pro výpočet subgridního napětí.

Aproximace původní nefiltrované rychlosti je dána následující konvolucí:

$$u_i^* = Q_N * \bar{u}_i, \quad (1.71)$$

kde  $Q_N$  je aproximace inverzního filtru k filtru s jádrem  $G$ . Aproximace inverzního filtru má tvar:

$$Q_N = \sum_{\nu=0}^N (I - G)^\nu \approx G^{-1}, \quad (1.72)$$

kde  $I$  je operátor identity. Tento vzorec pro vyjádření inverzního filtru k filtru  $G$  byl poprvé využit v oblasti numerické analýzy obrazu pro rekonstrukci spektrálních čar. Použitím (1.72) mohou být rekonstruované rychlosti  $u_i^*$  spočteny takto:

$$\begin{aligned} u_i^* &= Q_N * \bar{u}_i = \bar{u}_i + (\bar{u}_i - \bar{\bar{u}}_i) + (\bar{u}_i - 2\bar{\bar{u}}_i + \bar{\bar{\bar{u}}}_i) + \dots \\ &= 3\bar{u}_i - 3\bar{\bar{u}}_i + \bar{\bar{\bar{u}}}_i + \dots \end{aligned}$$

Autoři modelu přibližné dekonvoluce doporučují ve vztahu (1.72) použít parametr  $N = 5$ .

Vraťme se zpět k tenzoru subgridních napětí. Nyní máme vyjádřeny aproximace rychlostí a můžeme je tedy dosadit do vyjádření tohoto tenzoru. Získáme:

$$\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} - \overline{\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}} \approx \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} - \overline{\frac{\partial u_i^* u_j^*}{\partial x_j}}. \quad (1.73)$$

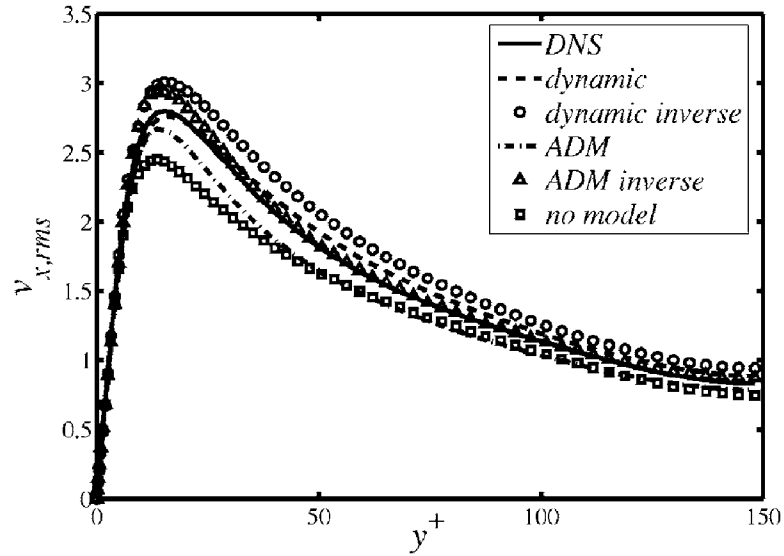
Nyní už je člen subgridního napětí uzavřen, tj. vyjádřen pomocí  $\bar{u}_i$ .

Avšak i poté, co použijeme výše uvedený model, zůstanou nejmenší měřítká turbulence nedostatečně reprezentována, zvláště co se týká disipace energie. Z toho důvodu je třeba dodat do Navierových-Stokesových rovnic relaxační člen, který tento neduh odstraní. Výsledný systém má tvar:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \overline{\frac{\partial u_i^* u_j^*}{\partial x_j}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} = -\chi_u (I - Q_N * G) * \bar{u}_i, \quad (1.74)$$

přičemž parametr  $\chi_u$  je dynamicky počítán tak, aby energie v nejmenších měřítkách zůstala konstantní v čase.

Model přibližné dekonvoluce byl nejprve testován na případě volně tlumené izotropní turbulence v původní práci Stolz a Adams [77]. Model prokázal neobyčejné kvality ve shodě s DNS daty. Při významně menších výpočetních nákladech dosáhl lepších výsledků, než běžně používaný dynamický model. Stolz a kol. [78] pak model upravili pro použití i na případy, kdy jsou ve výpočetní oblasti přítomny stěny. Přítomnost stěny je zohledněna speciální volbou filtru použitého pro filtraci Navierových-Stokesových rovnic. Tuto úpravu udělali pro případ proudu kanálem. I pro tento případ dává model přibližné dekonvoluce vynikající výsledky. Kuerten [36] použil model přibližné dekonvoluce pro případ dvoufázového proudění, kdy jsou částice unášeny hlavním proudem kanálem. I zde posloužil model velmi dobře a jeho použitím byla dosažena vysoká přesnost predikce turbulentních statistik částic. Bohužel úprava pro přítomnost stěn ve výpočetní oblasti pro případy s komplexní geometrií by byla velice komplikovaná a nebyla dosud realizována. To znamená, že model přibližné dekonvoluce je aplikovatelný pouze pro teoretický výzkum turbulence bez možnosti použít ho pro technické a průmyslové aplikace.



Obrázek 1.7: Podélné fluktuace rychlosti částic se Stokesovým číslem 1, srovnání subgridních modelů. Převzato z [36].

## 1.4 Shrnutí

V předchozích kapitolách byla představena metoda pro řešení turbulentního vazkého proudění Large Eddy Simulation. Tato metoda se jeví jako perspektivní a poskytující velice přesné výsledky za cenu výrazně nižších výpočetních nákladů než metoda Direct Numerical Simulation, která je v současné době považována za nejvěrohodnější metodu sloužící k predikci chování tekutiny a dosahující výsledků reálných experimentů. Metoda Large Eddy Simulation je založena na myšlence separace turbulentních útvarů malých prostorových měřítek, pro jejichž exaktní simulaci by bylo třeba mnoho výpočetového času. Tato odseparovaná měřítko jsou místo toho pouze modelována. Za tímto účelem byla v minulosti vyvinuta celá řada tzv. *subgridních modelů*. V této práci jsou představeny nejvýznamnější subgridní modely. Každý uvedený model má své výhody a nevýhody a jeho užití závisí na konkrétních podmínkách, které chceme simulovat.

Vzhledem k dobrým výsledkům dosahovaných metodou Large Eddy Simulation se jeví jako vhodné použít tuto metodu pro simulaci tekuté (nosné) fáze při dvofázovém proudění, kdy druhá fáze je tvořena disperzními částicemi či kapičkami. Pohyb disperzní fáze je velmi závislý na turbulenci nosné fáze a je tedy třeba věnovat značnou pozornost predikci turbulence nosné fáze.

# Generace turbulence na vstupu pro LES

---

## 2.1 Úvod

Problémy spojené s použitím metody Large Eddy Simulation pro řešení turbulentního proudění byly diskutovány v předešlých kapitolách. Dalším úskalím je správná specifikace okrajových podmínek, zvláště pak okrajové podmínky pro vstup tekutiny do domény. Předepsaná rychlost by měla být konzistentní s vybraným turbulentním modelem.

Při použití RANS metod pro řešení proudění je většinou dostatečné, když je rychlost na vstupu charakterizována rychlostním profilem a příslušnými turbulentními veličinami. Korektnost použití tohoto přístupu byla ukázána v práci [13]. V této práci bylo demonstrováno, že RANS řešení není příliš ovlivněno specifikací turbulentních charakteristik na vstupu do domény. RANS modely vykazují univerzální asymptotické chování nezávislé na specifikaci turbulence na okrajové podmínce vstupu, alespoň pro jednoduchá smyková proudění.

V případech, kdy je použito metod DNS nebo LES a proudění na vstupu je turbulentní, je situace se specifikováním turbulence na vstupu více problematická. Ve většině případů jsou pouze k dispozici souhrnné statistiky popisující proud na vstupu, například hmotnostní tok, profil rychlosti a turbulentní kinetické energie. Velice často známe pouze hmotnostní nebo objemový tok. Tento způsob popisu proudu na vstupu je v případě LES nebo DNS nedostačující.

Rychlost generovaná okrajovou podmínkou na vstupu do domény pro LES nebo DNS by měla být tvořena časově proměnným signálem reprezentující turbulenci na vstupu. Nejlepším způsobem, jak tohoto chování docílit, je provést simulaci proudového pole před vstupem do domény, kterou vyšetřujeme, například prodloužením vstupní část. Tímto způsobem poskytneme nejvěrohodnější popis turbulence na vstupu do domény. Bohužel aplikace tohoto přístupu je omezena faktem, že rostou výpočetní nároky jak na techniku tak i čas. Tudíž vznikla snaha o vyvinutí přístupu, který bude s dostatečnou přesností turbulenci na vstupu aproximovat.

Ne vždy je však nutné předepisovat turbulenci na vstupu. Výjimky tvoří případy, kdy je rychlost na vstupu ustálená a nejsou přítomny žádné fluktuace, například když je proudění na vstupu do domény laminární [61], [27]. V těchto případech jsou generovány rozruchy, které jsou posléze superponovány na laminární profil, a tím je spuštěn mechanismus přechodu do turbulentního proudění. Nejsou tedy třeba žádné rychlostní fluktuace na vstupu. Avšak tato metoda nemůže být použita v případech, kdy očekáváme turbulentní režim proudění už na vstupu do domény, protože simulace přechodu do turbulence by byla velmi nákladná. Z důvodu redukce výpočetních nákladů tedy požadujeme, aby vstup do domény byl co nejbližší oblasti, kterou vyšetřujeme.

## 2.2 Vliv reprezentace turbulence na vstupu na charakter proudění

Demonstrujeme si důležitost vlivu správné reprezentace turbulence na vstupu do domény na příkladu zpětného proudu za schodem. Geometrie oblasti, výpočetní síť a parametry proudění budou specifikovány podrobněji v další části disertační práce, v tomto místě se spokojíme se stručnou charakteristikou. Geometrie vychází z experimentální práce [17]. Jedná se o zpětný schod s expanzním faktorem 5:3 (poměr výšky po rozšíření k výšce před rozšířením). Výška náběžného kanálu před rozšířením je 40 mm, délka náběžného kanálu je 120 mm. Reynoldsovo číslo na vstupu je 13 800.

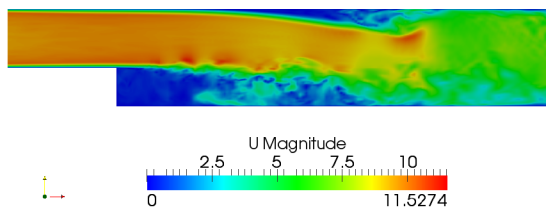
Byly testovány tři přístupy:

Case A: Rovnoměrný rychlostní profil na vstupu do výpočetní domény. Nejsou přítomny žádné fluktuace.

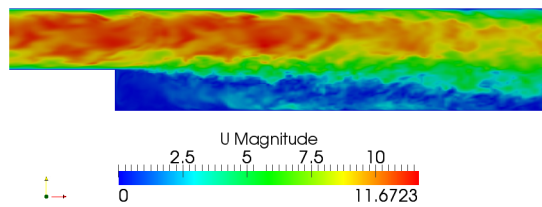
Case B: Rychlostní profil plně vyvinutého turbulentního proudění na vstupu do výpočetní domény. Nejsou přítomny žádné fluktuace

Case C: Plně vyvinuté turbulentní proudění na vstupu do domény. Rychlost je proměnná v čase i prostoru. Postup pro dosažení takovéto reprezentace turbulence na vstupu bude popsán v kapitole 2.4

Na obrázku 2.1 je znázorněna velikost okamžité rychlosti v podélném řezu kanálem pro případ A – rovnoměrný rychlostní profil. Z obrázku je patrné, že fluktuace rychlosti jsou generovány až po odseparování proudu za odtokovou hranou. Nepřítomnost rychlostních fluktuací dále vede k formaci separační bubliny na horní stěně domény. To je způsobeno faktem, že dochází k proudění ve směru nepříznivého tlakového spádu ( $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ ) a tento tlakový spád destabilizuje mezní vrstvu, která je v tomto okamžiku ještě laminární, a dochází k jejímu odtržení. Další důsledek chybějících fluktuací je jiný tvar recirkulační oblasti za schodem. Pro případ turbulentního rychlostního profilu na vstupu (Case B) je situace obdobná. Také dochází ke vzniku separační bubliny na horní straně kanálu.



Obrázek 2.1: Okamžitá rychlost pro rovnoměrný rychlostní profil (Case A)

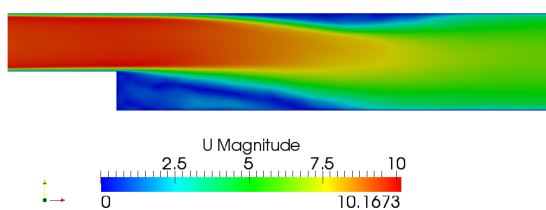


Obrázek 2.2: Okamžitá rychlost pro plně vyvinuté proudění na vstupu (Case C)

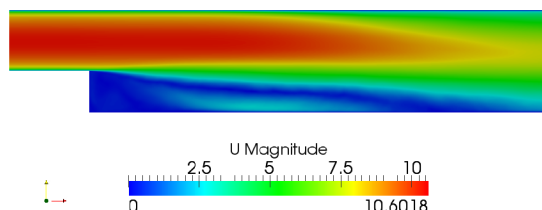
Velikost okamžité rychlosti pro plně vyvinuté turbulentní proudění na vstupu (Case C) v podélném řezu kanálem je na obrázku 2.2. Proudění má úplně jiný charakter než předešlé případy. Nedochozí k formaci separační bubliny na horní straně kanálu. To je důsledkem faktu, že pro tento případ proudění je mezní vrstva už v režimu turbulentním a je méně náchylná na různé destabilizační vlivy.

Rychlost průměrovaná v čase po dobu 1s pro případy A a C je na obrázcích 2.3 a 2.4. I na těchto obrázcích je velice dobře patrný rozdílný charakter proudění.

Na obrázku 2.5 jsou rychlostní profily podélné složky rychlosti ve vzdálenosti  $x/H = 2$  pro výše zmíněné přístupy. Počátek souřadného systému je umístěn do středu odtokové hrany. Rovnoměrný rychlostní profil na vstupu dává nerealistické výsledky. Z plochosti profilu v oblasti  $y/H > 0$  lze usuzovat, že délka náběžného kanálu není dostatečná pro dosažení turbulentního

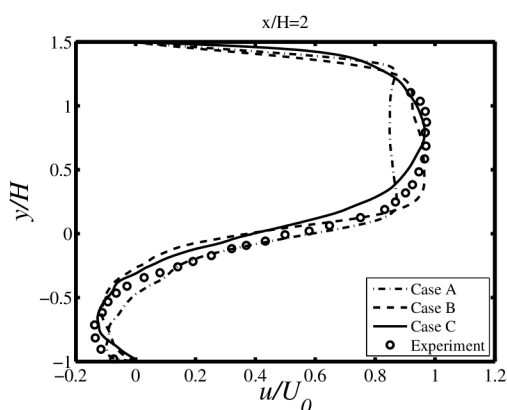
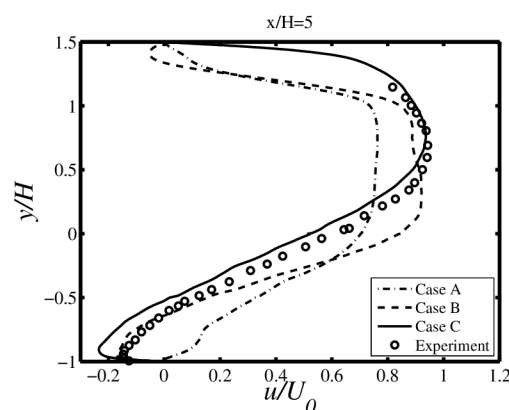


Obrázek 2.3: Průměrná rychlost pro rovnoměrný rychlostní profil (Case A)

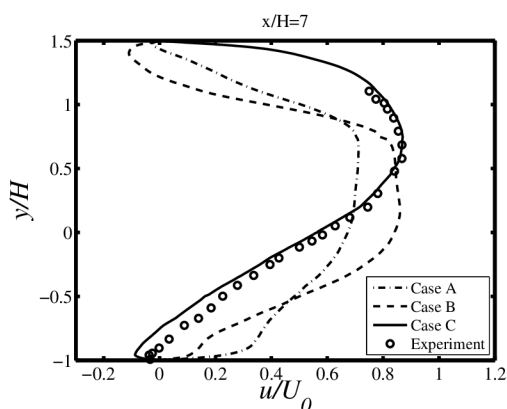
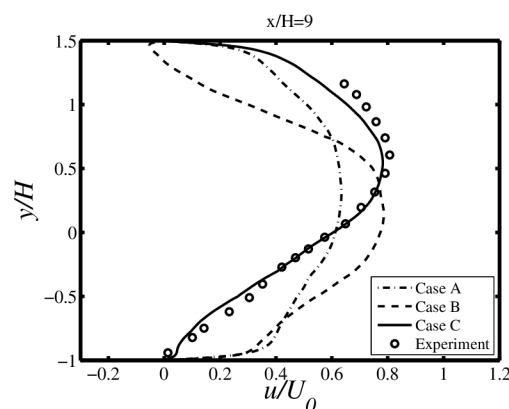


Obrázek 2.4: Průměrná rychlost pro plně vyvinuté proudění na vstupu (Case C)

profilu rychlosti. Rychlostní profily ve větší vzdálenosti za schodem ( $x/H=5$ ) jsou na obrázku 2.6. Negativní hodnoty rychlosti a výrazná deformace profilu v horní části grafu indikují, že zde došlo ke vzniku separační bubliny. Pro případ A už také došlo k opětovnému přilnutí proudu za schodem.


 Obrázek 2.5: Rychlostní profil ve vzdálenosti  $x/H = 2$  za schodem

 Obrázek 2.6: Rychlostní profil ve vzdálenosti  $x/H = 5$  za schodem

Rychlostní profily ve vzdálenostech  $x/H = 7$  a  $x/H = 9$  jsou na obrázcích 2.7 a 2.8. Příklad B také nepredikuje pozici bodu opětovného přilnutí správně.


 Obrázek 2.7: Rychlostní profil ve vzdálenosti  $x/H = 7$  za schodem

 Obrázek 2.8: Rychlostní profil ve vzdálenosti  $x/H = 9$  za schodem

Z provedené studie sledující vliv reprezentace turbulence na vstupu do domény na charakter proudění vyplývá, že se tomuto problému musí věnovat náležitá pozornost. Je zde ilustrováno, že různé přístupy k okrajové podmínce pro rychlost na vstupu vedou k diametrálně odlišným výsledkům. V případě použití rovnoměrného a turbulentního profilu na vstupu dochází v důsledku chybějících rychlostních fluktuací ke vzniku separační bubliny na horní straně domény. Také bod opětovného přilnutí je predikován velmi nepřesně. Pouze přístup, kde je už na vstupu plně vyvinuté turbulentní proudění dává dostatečně přesné výsledky.

Bohužel v praxi v mnoha případech nemáme informaci o míře turbulence na vstupu do oblasti, ve které vyšetřujeme proudění. Mnohdy je znám pouze objemový nebo hmotnostní tok tekutiny na vstupu do oblasti a další informace o proudu chybí. V některých případech může docházet například i ke šroubovitému pohybu tekutiny, který vzniká po průchodu tekutiny kolen či jiným ohybem. Je pak na uvážení uživatele, jak velkou část přívodu tekutiny do oblasti v simulace zahrne.

## 2.3 Přehled metod pro generaci turbulence na vstupu

V předešlé kapitole byla demonstrována nutnost správné reprezentace turbulence na vstupu do domény při použití metody Large Eddy Simulation pro řešení problémů mechaniky tekutin. Na případě zpětného proudu za schodem bylo ukázáno, že i v takto geometricky jednoduchém případě je závislost proudového pole na okrajové podmínce velmi výrazná. Následující podkapitoly obsahují rešerši metod přístupu k okrajové podmínce pro vstup pro LES.

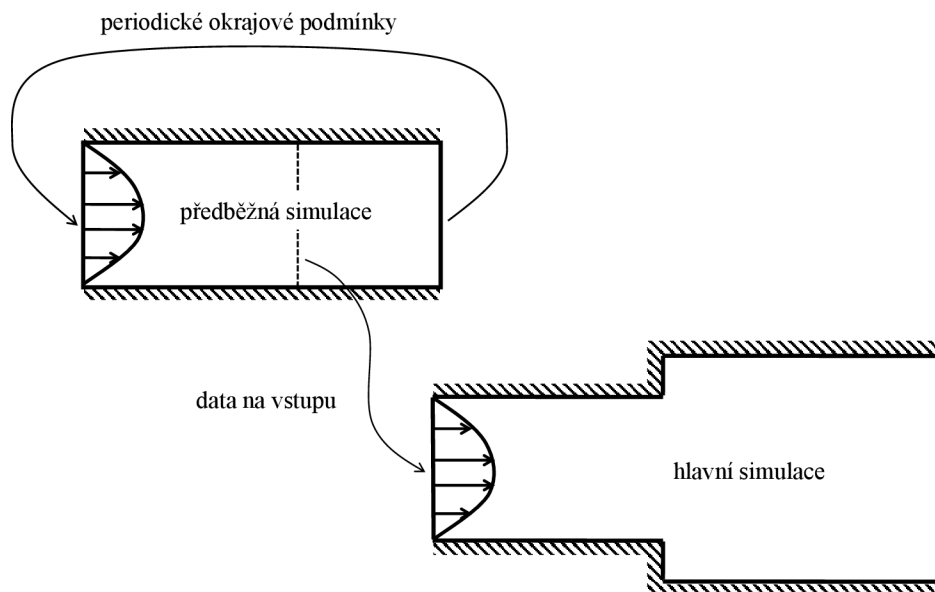
### 2.3.1. Metody recyklace rychlosti

Asi nejpřesnější metodou, jak popsat rychlostní fluktuace plně vyvinutého turbulentního proudění pro metodu Large Eddy Simulation nebo Direct Numerical Simulation, je provedení tak zvané předběžné simulace (z anglického precursor simulation). Jediný účel této simulace je poskytnout hlavní simulaci přesnou informaci o rychlosti na vstupu do výpočetní oblasti. Je-li možno považovat proudění v přívodním potrubí/části tekutiny do domény za plně vyvinuté turbulentní, dá se tohoto faktu využít a předběžnou simulaci lze provést pouze na omezené části přívodu s periodickými okrajovými podmínkami. Tento předpoklad není až tak omezující, protože ve většině případů vnitřního proudění (proudění potrubím či kanálem) tento režim ve skutečnosti nastává. Informace o proudu jsou pak v předběžné simulaci přenášeny z roviny výstupu na rovinu vstupu, a tedy předběžná simulace si generuje svoje vlastní vstupní data.

Schéma znázorňující myšlenku a použití předběžné simulace pro generaci turbulence na vstupu je na obrázku 2.9. Předběžná simulace sestává z prodloužené vstupní části do domény. Ve směru proudu jsou předepsány periodické okrajové podmínky. Dále je v předběžné simulaci definována rovina kolmá na směr proudu. Z této roviny je posléze přenášena rychlost na vstup do hlavní simulace a tato rychlost je použita jako okrajová podmínka pro hlavní simulaci.

Výše představený přístup byl použit v práci [31]. Z předběžné simulace, jež měla podobu kanálu s periodickými okrajovými podmínkami, byla extrahována rychlost, která byla předepsána na vstup do rovinného difuzoru. Pro řešení proudění byla použita metoda Large Eddy Simulation. Další příklad použití tohoto přístupu ke generaci turbulence na vstupu je možné najít v práci [18], kde je takto řešen případ zpětného proudu za schodem. Breuer a Rodi [8] použili předběžnou simulaci periodického kanálu se čtvercovým průřezem pro generování vstupních dat pro simulaci 180° kolena pomocí LES. Aksevoll a Moin [2] použili simulaci dvou koaxiálních trubek s periodickými okrajovými podmínkami pro generaci dat pro vstupní sekci do koaxiální spalovací komory.

Předběžná simulace nevyžaduje žádný speciální typ okrajové podmínky, stačí předepsat periodické okrajové podmínky ve směru proudu. Je však nutné věnovat značnou pozornost inicial-



Obrázek 2.9: Schéma použití předběžné simulace pro generaci turbulence na vstupu pro simulaci

izaci proudu tak, aby v průběhu předběžné simulace bylo dosaženo plně vyvinutého turbulentního proudění. Například Rogers a Moser [63] nebo Kim a kol. [33] použili k inicializaci průměrný rychlostní profil plus pár nestabilních Fourierových módů.

Jak už bylo zmíněno výše, tento postup pro generaci dat na vstupu do domény je možno použít pouze v případech, kdy předpokládáme plně vyvinuté turbulentní proudění na vstupu.

Další metodu, jak generovat okrajovou podmínku pro rychlost na vstupu do domény pomocí předběžné simulace pro LES nebo DNS, navrhl Schluter a kol. [71]. Na základě předběžné simulace je vytvořena databáze rychlosti. Tato databáze sestává z okamžité rychlosti v rovinách. Předběžná simulace je provedena s periodickými okrajovými podmínkami ve směru proudu. Z této databáze jsou posléze vyextrahovány fluktuace rychlosti a tyto fluktuace jsou dále transformovány tak, aby splňovaly požadované statistiky. Transformace se řídí vztahem:

$$u_{i,LES}(t) = \bar{u}_{i,RANS} + (u_{i,DB}(t) - \bar{u}_{i,DB}(t)) \frac{\sqrt{u'^2_{i,RANS}}}{\sqrt{u'^2_{i,DB}}}, \quad (2.1)$$

kde spodní index LES značí rychlost předepsanou na vstupu v hlavní simulaci, index RANS značí požadované statistiky proudu a DB hodnotu z databáze. Výhodou této metody je, že pomocí vytvořené databáze můžeme její transformací dle uvedeného vztahu rekonstruovat rychlost a její fluktuace s požadovanými statistikami. Keating a kol. [32] použili tuto metodu pro generování okrajové podmínky pro LES simulaci proudu kanálem s Reynoldsovým číslem  $Re = 6\,900$ , přičemž použili databázi založenou na simulaci proudu kanálem s hodnotou Reynoldsova čísla  $Re = 2\,280$ . Tedy jednoduchou transformací lze použít databázi vzniklou při určitém Reynoldsově čísle pro více případů s různým Reynoldsovým číslem. Zásadní nevýhodou této metody je, že vytvořenou databázi lze použít pouze pro případy se stejnou geometrickou konfigurací vstupní části do domény.



### 2.3.2. Syntetická turbulence

Metody pro generaci turbulence na vstupu do domény, které nepoužívají předběžnou simulaci či databázi vzniklou z předběžné simulace, generují turbulenci pomocí nějakých stochastických procesů. Tyto stochastické procesy využívají generátory náhodných čísel ke konstrukci náhodného signálu rychlosti, který představuje turbulenci. Tyto metody se nazývají metody generace syntetické turbulence (z angl. synthetic turbulence methods).

Metody generace syntetické turbulence jsou založeny na myšlence zrekonstruování signálu rychlosti ze známých statistik proudu. Často se jedná o statistiky nižších řádů, jako je například průměrná rychlost, turbulentní kinetická energie atd. Avšak takto zrekonstruovaný signál je pouze hrubou aproximací skutečné turbulence. Turbulentní statistiky vyšších řádů, například korelace v prostoru nebo v čase, složky Reynoldsova tenzoru napětí atd. nejsou zpravidla zohledněny při generaci vstupního signálu rychlosti. Taky je třeba, aby syntetická turbulence generovaná okrajovou podmínkou měla správnou strukturu. Turbulentní proudění se totiž skládá ze širokého spektra délkových a časových měřítek, které záleží na typu proudu. Není-li správně vygenerována struktura turbulentních vírů a jejich dynamika, pak dochází k tomu, že se takto vygenerovaná turbulence musí po nějaký úsek (vzdálenost či čas) vyvíjet, aby dosáhla fyzikálně správného stavu.

V minulosti byla navržena celá řada metod generace syntetické turbulence. Tyto metody lze rozdělit do dvou skupin podle toho, zda se aplikují ve fyzikálním prostoru, nebo prostoru Fourierově. Metody aplikované ve fyzikálním prostoru se pak nazývají algebraické metody, respektive metody spektrální.

#### Algebraické metody

Algebraické modely pracují na principu transformace náhodných čísel. Nejprve je vygenerována množina náhodných čísel a ta je posléze transformována tak, aby splnila požadavky kladené na základě statistik turbulentního proudu. Nejprůchoďejší přístup, jak generovat syntetickou turbulenci, je vygenerovat množinu náhodných čísel, jež se řídí normovaným Gaussovým rozdělením  $N(0,1)$  s průměrnou hodnotou  $\mu = 0$  a rozptylem  $\sigma = 1$ . Tato množina je dále naškálována tak, aby výsledné fluktuace měly správnou hodnotu turbulentní kinetické energie  $k$ . Takto vzniklé fluktuace jsou pak přičteny k požadovanému průměrnému rychlostnímu profilu. Vzniklý signál reprezentující turbulenci na vstupu má pak tvar:

$$u_i = U_i + r_i \sqrt{\frac{2}{3}k}, \quad (2.2)$$

kde  $r_i$  je realizace náhodné veličiny s rozdělením pravděpodobnosti  $N(0, 1)$ . Realizace probíhá nezávisle pro každou složku rychlosti v každém bodě a každém časovém kroku. Tato procedura vygeneruje signál rychlosti se zadaným průměrným rychlostním profilem  $U_i$  a zadanou turbulentní kinetickou energií  $k$ . Bohužel nevýhoda tohoto velice jednoduchého přístupu je, že vzájemné korelace jednotlivých rychlostních složek jsou nulové. Takto vygenerovaný signál rovněž neosahuje žádná délková či časová měřítka.

Vylepšení této metody tak, aby byly jednotlivé složky rychlosti vzájemně korelovány, navrhl Lund a kol. [43]. Metodu upravili tak, že složky vygenerované rychlosti jsou už vzájemně korelované. V případech, kdy je znám Reynoldsovův tenzor napětí  $R_{ij}$ , může být tento tenzor použit pomocí Choleského rozkladu pro konstrukci turbulentního signálu:

$$u_i = U_i + r_j a_{ij}, \quad (2.3)$$

kde  $a_{ij}$  je:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \sqrt{R_{11}} & 0 & 0 \\ R_{21}/a_{11} & \sqrt{R_{22} - a_{21}^2} & 0 \\ R_{31}/a_{11} & (R_{32} - a_{21}a_{31})/a_{22} & \sqrt{R_{33} - a_{31}^2 - a_{32}^2} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Pomocí této procedury lze vygenerovat náhodný signál rychlosti, jejíž složky jsou vzájemně korelované a splňují Reynoldsův tenzor napětí. To je ovšem pouze za předpokladu, že náhodná veličina  $r_i$  splňuje podmínky  $\langle r_i r_j \rangle = \delta_{ij}$  a  $\langle r_i \rangle = 0$ . Tyto podmínky jsou splněny v případě, jestliže se náhodná veličina  $r_i$  řídí normovaným náhodným rozdělením  $N(0, 1)$ .

Výše představené stochastické metody pro generaci syntetické turbulence bohužel nejsou schopny zachytit korelaci rychlosti ani v prostoru ani čase. V reálných případech turbulentního proudění je přenos energie mezi měřítky dle energetické kaskády iniciován v oblasti velkých měřítek, která nesou většinu energie. V případě rychlosti vygenerované dle výše uvedených postupů je ovšem energie nesená proudem rovnoměrně rozdělena napříč celým spektrem, a tedy malá měřítka nesou více energie než ve skutečnosti. Při těchto malých měřítkách (Kolmogorovo měřítko) dochází k disipaci energie a energie vygenerovaná těmito metodami velmi rychle disipuje. Lund a kol. [43] ukázali, že v případech s prostorově vyvíjející se mezní vrstvou dochází k laminarizaci proudu, pro nějž byla použita uvedená stochastická metoda pro generaci rychlosti na vstupu do domény. Glaze a Frankel [24] provedli simulaci proudu z kruhové výustky za použití zmíněné metody. I v tomto případě došlo k rychlému vymizení vygenerovaných fluktuací vlivem disipace energie v oblasti malých prostorných měřítek. Aider a Danet [1] dále zjistili, že použití stochastického přístupu ke generování rychlostních fluktuací na vstupu má nepříznivý vliv na tvar separační bubliny v simulaci zpětného proudu za schodem. Velikost separační bubliny byla v této simulaci nadhodnocena.

Další metodu pro generaci rychlosti na vstupu pro LES spadající do kategorie syntetické turbulence navrhli Klein a kol. [34]. Představili stochastickou metodu, která odstraňuje nedostatek již zmíněných stochastických metod a to chybějící korelace rychlosti v prostoru a čase. Korelace rychlosti je dosaženo přefiltrováním náhodného signálu. Signál fluktuace rychlosti je definován jako konvoluce signálu náhodného a digitálního filtru typu dolní propust. Jednorozměrný rychlostní signál je pak:

$$u'(j) = \sum_{k=-N}^N b_k r(j+k), \quad (2.5)$$

kde  $b_k$  jsou konstanty filtru,  $N$  představuje šířku filtru a  $r_{j+k}$  je náhodná veličina generovaná v bodě  $(j+k)$  řídicí se rozdělením  $N(0,1)$ . Výsledná korelace rychlosti pak bude záviset na volbě filtru:

$$\langle u'(j)u'(j+m) \rangle = \sum_{k=-N+m}^N b_k b_{k-m}. \quad (2.6)$$

Tato procedura je rozšířena o časovou závislost generované syntetické turbulence v rovině (yz). Je vygenerováno trojrozměrné náhodné pole  $r_m(i, j, k)$  pro každou složku rychlosti označenou indexem  $m$ . Indexy  $i, j$  a  $k$  reprezentují čas  $t$  a souřadnici ve směru osy  $y$  a  $z$ . Trojdimenzionální filtr  $b_{ijk}$  je získán konvolucí tří jednodimenzionálních filtrů  $b_{ijk} = b_i \cdot b_j \cdot b_k$ . Tento filtr je pak aplikován na náhodné pole  $r_m(i, j, k)$  ve třech dimenzích  $t, y$  a  $z$  a tím se získá fluktuace rychlosti:

$$u'_m(j, k) = \sum_{i'=-N_x}^{N_x} \sum_{j'=-N_y}^{N_y} \sum_{k'=-N_z}^{N_z} b_{i'j'k'} r_m(i', j+j', k+k'). \quad (2.7)$$

Kdyby bylo cílem generovat pouze homogenní turbulenci, pak by tato procedura tímto krokem končila. Jelikož obecně turbulence na vstupu je nehomogenní, tak rychlostní signál na vstupu je dále transformován pomocí rovnice (2.3), aby byl splněn požadavek na střední hodnotu rychlosti a profil Reynoldsova tenzoru napětí.

Pro přesnou reprodukci fluktuací se správnou korelací by měly být koeficienty filtru  $b_k$  spočteny inverzí rovnice (2.6). Poněvadž korelace rychlosti nejsou ve většině případů proudění známy, Klein a kol. [34] použil Gaussův filtr závislý na jediném parametru a to na integrálním délkovém měřítku  $L$ .

### Spektrální modely

Následující kapitola se krátce věnuje spektrálním metodám. Tyto metody používají dekompozici signálu do Fourierových módů. Poprvé byla Fourierova dekompozice pro generaci syntetické turbulence použita v práci [35]. Proudové pole bylo iniciováno trojdimenzionální homogenní a izotropickou turbulencí pro studii difuze pasivního skaláru. Poněvadž rychlostní signál je homogenní ve třech směrech v prostoru, tak může být rozložen do Fourierova prostoru jako:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.8)$$

kde  $\mathbf{k}$  je trojdimenzionální vlnové číslo. Každému komplexnímu Fourierově koeficientu je dána velikost spočtená z předepsaného izotropického trojdimenzionálního spektra  $E(|\mathbf{k}|)$  a náhodná fáze  $\Theta_{\mathbf{k}}$  z intervalu  $[0, 2\pi]$ . Výsledné syntetické rychlostní pole má pak tvar:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{E(|\mathbf{k}|)} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \Theta_{\mathbf{k}})}. \quad (2.9)$$

Tato metoda byla často využívána pro inicializaci rychlostního pole ve studiích dočasného rozpadu homogenní izotropické turbulence [62].

Tuto metodu upravili Lee a kol. [40] pro použití ke generaci okrajové podmínky na vstupu. Předpokládali, že proud se vyvíjí ve směru osy  $x$  a ve směru os  $y$  a  $z$  je turbulence homogenní. Rychlostní signál může být tedy rozložen do Fourierových módů jak je definováno rovnicí (2.8) s Fourierovými koeficienty z energetického spektra předepsaného pomocí frekvence a dvou příčných vlnových čísel. Takto upravenou metodu použili Lee a kol. [39] pro předepsání rychlosti na vstupu v simulaci zpětného proudu za schodem.

Bohužel se vyskytlo pár problémů spojených s použitím této modifikované metody. V případech, kdy výpočetní síť není rovnoměrná na vstupu, není možné použít rychlou Fourierovu transformaci ve směru kolmém na stěnu. To přináší značné výpočetní náklady spojené s výpočtem inverzní Fourierovy transformace. Další komplikace souvisí s použitím konstantního izotropického energetického spektra napříč mezní vrstvou. Tento fakt způsobí to, že se proud musí dodatečně po nějakou vzdálenost vyvíjet, aby získal správné turbulentní statistiky.

#### 2.3.3. Buzení turbulence

Tato podkapitola krátce pojedná o schématech buzení turbulence. Schéma pro buzení turbulence může mít dvojí funkci. Buď zabránit postupnému rozpadu turbulence, nebo urychlit přechod do plně vyvinutého turbulentního proudění. První případ se používá hlavně při studiu homogenní izotropické turbulence. Druhý případ se používá např. v kombinaci s metodou generace syntetické turbulence pro rychlejší vývin turbulence.

V minulých letech bylo vyvinuto mnoho schémat pro buzení turbulence. Eswaren a Pope [15] navrhli stochastické schéma buzení turbulence operující ve spektrálním prostoru. Hlavní myšlenka spočívá v generaci dodatečné síly, která je následně přidána do pohybových rovnic.

Síla je generována pouze pro určitý rozsah vlnových čísel. Síla je získána realizací nezávislých stochastických Ornstein-Uhlenbeckových procesů. Overholt a Pope [56] naopak navrhli deterministické schéma buzení turbulence ve spektrálním prostoru. Malým vlnovým číslem je dodána dodatečná energie. Tato energie závisí na rychlosti a vstupních parametrech schématu buzení. Toto schéma dává lepší reprezentaci energii obsahujících vírů a menší statistickou variabilitu veličin než schémata stochastická. Výše uvedená schémata byla navržena pro použití ve spektrálním prostoru a tudíž je nutno daný problém do spektrálního prostoru převést. To je ve většině případů velice obtížné či dokonce nemožné. Proto byla snaha vyvinout schéma buzení turbulence ve fyzikálním prostoru. Lundgren [44] navrhl takzvané lineární schéma buzení turbulence. Do pohybových rovnic přidal člen, který je přímo úměrný rychlosti. Ukázalo se, že toto schéma dosahuje stejných kvalit jako spektrální schémata buzení turbulence [64].

## 2.4 Schéma na generaci turbulence na vstupu

V této kapitole bude popsána metoda ke generaci turbulence na vstupu pro metodu Large Eddy Simulation navržena v této práci. Nejprve bude představen matematický popis této metody. Správná funkčnost metody je pak demonstrována na jednoduchém případě proudění mezi dvěma paralelními deskami. Výsledky simulací jsou porovnány s DNS daty.

### 2.4.1. Definice

Metoda pro generaci rychlosti na vstupu do domény navržené v této práci je částečně založena na myšlence metod recyklace rychlosti. Dříve než je řešena hlavní simulace, je provedena simulace předběžná. Předběžná simulace sestává z prodloužené vstupní části do domény hlavní simulace. Předběžná simulace má předepsány periodické okrajové podmínky ve směru proudu. Aby došlo k rychlejšímu přechodu do plně vyvinutého turbulentního proudění, je použito v předběžné simulaci buzení turbulence.

Schéma buzení turbulence vyvinuté v rámci této práce je aplikováno ve fyzikálním prostoru. V rovině vstupu do výpočetní domény je definováno několik bodů. V těchto bodech je následně generována přídatná budící síla. Síla je generována v každém časovém kroku a tato síla je pak přidána do momentových rovnic. Síla je generována pomocí Ornstein-Uhlenbeckova procesu [29]. Ornstein-Uhlenbeckův proces je stochastický difuzní proces generován Langevinovou rovnicí, který dává rozumnou aproximaci pro modelování rychlostních fluktuací [59]. Nicméně, Ornstein-Uhlenbeckův proces zde není použit ke generování rychlostních fluktuací, jak bylo použito v práci [30]. Tento přístup vede k lokálnímu porušení rovnice kontinuity v místě generování fluktuací. Místo toho je v této práci použit ke generování budící síly, jež je posléze zahrnuta do pohybových rovnic.

Generace budící síly je řízena rovnicí (2.10):

$$F_i^m(t + \Delta t) = F_i^m(t) - F_i^m(t) \frac{\Delta t}{T_{OU}} + \left( \frac{2\sigma_{OU}^2 \Delta t}{T_{OU}} \right)^{1/2} \xi(t), \quad (2.10)$$

kde  $\Delta t$  je časový krok simulace,  $T_{OU}$  a  $\sigma_{OU}$  jsou dva vstupní parametry procesu.  $T_{OU}$  charakterizuje integrální časové měřítko procesu,  $\sigma_{OU}$  udává variabilitu (rozptyl procesu). Funkce  $\xi(t)$  je náhodná veličina s normovaným Gausovým rozdělením (nulová střední hodnota, jednotkový rozptyl). Jednotlivé body, v nichž se budící síla generuje, jsou označeny indexem  $m$ . Index  $i$  odpovídá složkám budící síly. Síla generovaná v jednom bodě je nezávislá na silách generovaných v bodech ostatních. Složky budící síly jsou taky na sobě nezávislé. Tedy počet realizací Ornstein-Uhlenbeckova procesu je trojnásobný, než je počet bodů, v nichž je síla generována.

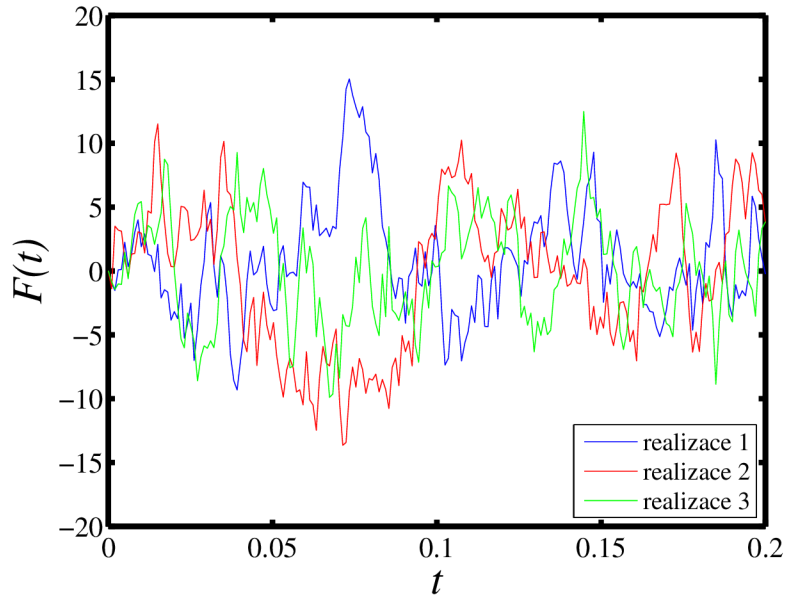
Nabízí se otázka, zda by nemohla být pro generaci budící síly použita pouze náhodná funkce  $\xi(t)$ . Z hlediska energetického spektra turbulence to však není vhodné. Signál generovaný funkcí

$\xi(t)$  je vysokofrekvenční signál a tudíž se maximum energetického spektra nachází v oblasti vysokých frekvencí. Při vysokých frekvencích dochází v turbulentním proudění k disipaci energie, a tedy energie dodaná budící silou by byla rychle disipována bez požadovaného účinku. Naproti tomu energetické spektrum Ornstein-Uhlenbeckova procesu má tvar:

$$E(\omega) = \frac{(2/\pi)\sigma_{OU}^2 T_{OU}}{1 + T_{OU}^2 \omega^2}, \quad (2.11)$$

kde  $\omega$  je frekvence. Tedy maximum energetického spektra leží v oblasti malých frekvencí. Další výhodou Ornstein-Uhlenbeckova procesu je, že se jedná o proces korelovaný, což je vlastnost, kterou turbulentní proudění také vykazuje.

Podívejme se na definici budící síly trochu podrobněji. Druhý, deterministický člen rovnice (2.10) způsobuje relaxaci síly směrem k nule při časovém měřítku  $T_{OU}$ . Třetí, difuzní člen přidává náhodný přírůstek s nulovou střední hodnotou a rozptylem  $(2\sigma_{OU}^2 \Delta t / T_{OU})^{1/2}$ . Ukázka tří realizací Ornstein-Uhlenbeckova procesu pro parametry  $T_{OU} = 0,01$  a  $\sigma_{OU} = 5$  je zobrazena na obrázku 2.10.



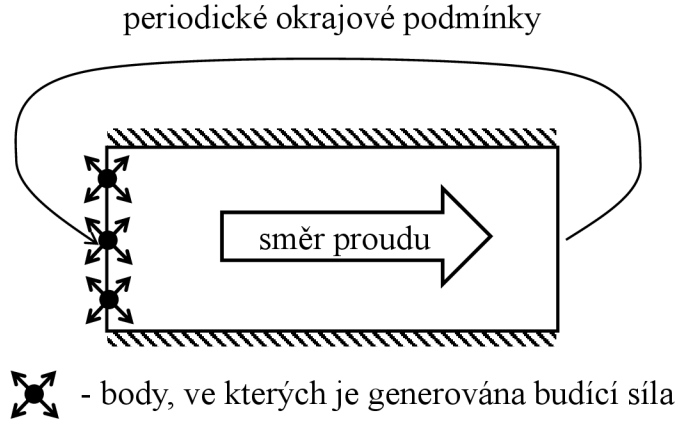
Obrázek 2.10: Realizace Ornstein-Uhlenbeckova procesu

Navržené schéma buzení turbulence má dva vstupní parametry:  $T_{OU}$  a  $\sigma_{OU}$ . Nyní vyvstává otázka, jak tyto parametry zvolit. Z definice procesu [59] se časové měřítko procesu  $T_{OU}$  má rovnat hodnotě integrálního časového měřítka proudu. Rozptyl procesu  $\sigma_{OU}$  se položí roven střední rychlosti. Odhadnout časové měřítko proudu bez hlubší znalosti proudu je docela obtížný úkol. Jednou z možností je použít hrubé odhady tohoto měřítka na základě rychlosti proudění a hydraulického průměru. Parametr  $\sigma_{OU}$  se dle definice procesu [59] položí roven střední rychlosti proudu.

Schéma předběžné simulace pro generování turbulence na vstupu navržené v této práci je na obrázku 2.11.

#### 2.4.2. Testovací případ

Výše navržené schéma pro buzení turbulence bylo otestováno na případu proudění mezi dvěma paralelními deskami. Simulace byla koncipována jako předběžná simulace před simulací hlavní.



Obrázek 2.11: Schéma předběžné simulace s buzením turbulence

Účelem této simulace bylo zjistit, zda navržené schéma buzení turbulence dává dobré výsledky, tj. zda urychluje přechod do plně vyvinutého turbulentního proudění a zda výsledný turbulentní proud vykazuje správné statistiky.

### Popisující rovnice

Pro větší přehlednost a ucelenost textu zde znovu uvedeme rovnice popisující proudění, jež jsou následně řešeny. Proudění je řešeno metodou Large Eddy Simulation. Soustava rovnic popisující proudění tedy sestává z filtrované rovnice kontinuity (2.12) a filtrovaných momentových rovnic (2.13):

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i. \quad (2.13)$$

Do rovnice (2.13) byla přidána dodatečná síla  $F_i$ , která má za úkol budit turbulenci. Tato síla je definována dle vztahu (2.10). Ve skutečnosti se jedná o trojrozměrné silové pole. Toto pole má nenulové hodnoty pouze v pozicích bodů, v nichž dochází k buzení turbulence.

Pro vyhodnocení tensoru subgridních napětí byl použit standardní Smagorinského model:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2\nu_t \bar{S}_{ij}. \quad (2.14)$$

Takto navržené schéma buzení turbulence bylo implementováno do programu OpenFOAM verze 1.7-x, konkrétně do řešiče  `pisoFoam` .

### Testovací případ

Jak již bylo zmíněno, navržené schéma buzení turbulence bylo testováno na případě proudění mezi dvěma paralelními deskami. Proud je v plně vyvinutém turbulentním režimu proudění. Tento typ proudění je homogenní ve směru po proudu i ve směru příčném na směr proudění. Statistiky proudu jsou tedy závislé pouze na vzdálenosti od stěny. Geometrická konfigurace a parametry proudění vychází z DNS simulace plně vyvinutého turbulentního proudění, jejíž výsledky jsou k dispozici [28]. Konkrétní konfigurace pak vychází z volby poloviny výšky kanálu  $\delta = 0,01 \text{ m}$  a kinematické viskozity  $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

## Proud kanálem

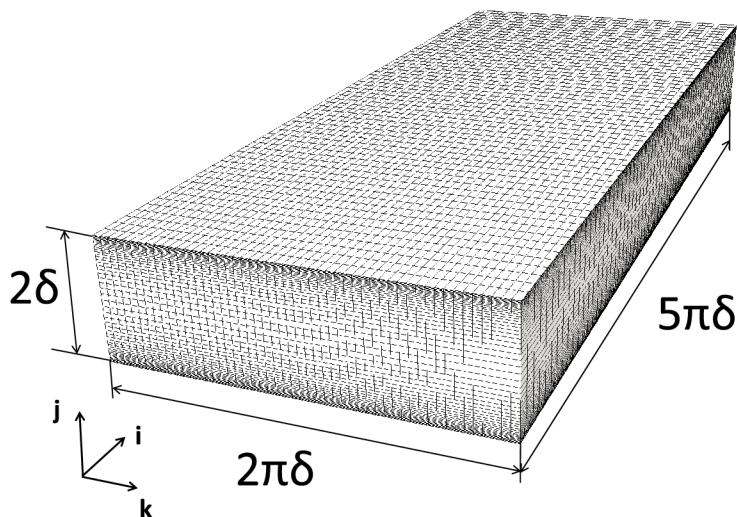
Ověření funkčnosti schématu bylo provedeno pro dva proudy s různým Reynoldsovým číslem. Nejprve byla uskutečněna simulace proudění s Reynoldsovým číslem založeným na třetí rychlosti  $Re_\tau = 110$  a potom pro vyšší rychlost proudění s  $Re_\tau = 395$ .

Tabulka 2.1: Parametry proudění kanálem

	nízké $Re$	vysoké $Re$
$Re_\tau$	110	395
$Re_m$	3220	13925
třetí rychlost $u_\tau$	0,055 m/s	0,2 m/s
střední rychlost $u_m$	1,61 m/s	6,96 m/s

Rozměry kanálu jsou:  $5\pi\delta$  ve směru proudu,  $2\delta$  ve směru kolmém na stěny a  $2\pi\delta$  ve směru příčném na proud. Pro danou kinematickou viskozitu  $\nu = 10^{-5}m^2s^{-1}$  je Reynoldsovo číslo založené na střední rychlosti  $Re_m = 3220$  pro  $Re_\tau = 110$  a  $Re_m = 13925$  pro  $Re_\tau = 395$ . Parametry proudění, pro které byly simulace provedeny, jsou souhrnně uvedeny v tabulce 3.1.

Výpočetní síť sestává z  $60 \times 50 \times 50$  buněk ve směru po proudu, kolmém a příčném na proud. Ve směru po proudu je dělení oblasti rovnoměrné. Stejně je tomu tak i ve směru příčném. Ve směru kolmém dochází ke zjemnění výpočetní sítě směrem ke stěně, aby byla splněna podmínka  $y^+ = yu_\tau/\nu \approx 1$ . Velikost buněk ve směru po proudu a proti proudu je  $\Delta x^+ = 28$  a  $\Delta z^+ = 13$ . Rozměry oblasti a výpočetní síť jsou zobrazeny na obrázku 2.12.

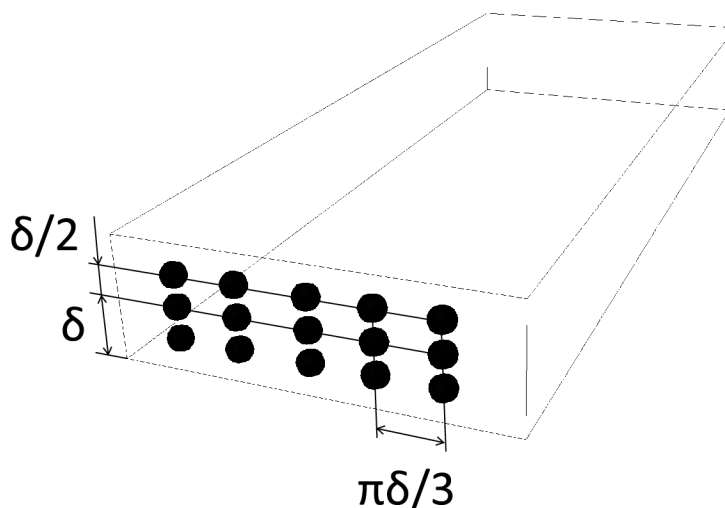


Obrázek 2.12: Geometrie a síť pro simulaci proudu kanálem

Okrajové podmínky byly definovány následovně. V pozicích  $y = 0$  a  $y = 2\delta$  byla definována okrajová podmínka stěny, tj. nulová rychlost. Ve směru po proudu byla dle definice schématu buzení turbulence definována periodická okrajová podmínka. Ve směru příčném na proud byla rovněž definována periodická okrajová podmínka.

Jako počáteční podmínka pro rychlost bylo použito pole rychlosti o konstantní hodnotě. Jediná nenulová složka tohoto pole je složka ve směru proudu o velikosti střední rychlosti. Pro

rychlejší přechod do turbulentního režimu proudění bylo použito navržené schéma buzení turbulence. Je tedy nutno nadefinovat body, v nichž se bude generovat dodatečná budící síla. Bylo nadefinováno celkem 15 bodů ve třech horizontálních řadách. Řady jsou od sebe vzdáleny  $\delta/2$ , přičemž prostřední řada je umístěna doprostřed výšky kanálu ( $y = \delta$ ). Vzdálenost mezi jednotlivými sloupci bodů je  $\pi\delta/3$ . Prostřední sloupec se nachází v polovině šířky kanálu ( $z = \pi\delta$ ). Pozice bodů, v nichž dochází ke generaci budící síly, je zachycena na obrázku 2.13.



Obrázek 2.13: Lokace bodů, v nichž dochází k buzení turbulence

Simulace byly provedeny v programu OpenFOAM veze 1.7-x. Pro řešení byl použit řešič pisoFoam, jenž používá PISO algoritmus pro řešení Navier-Stokesových rovnic. Diskretizaci konvektivních i difuzních členů byla provedena pomocí centrálních diferencí druhého řádu přesnosti. Pro integraci v čase bylo použito Crank-Nicolsonovo schéma druhého řádu přesnosti.

Posloupnost provedení simulací je následovná. Nejprve byl napočítán krátký, 0,1 s trvajících časový úsek proudění. V tomto časovém úseku došlo k inicializaci a přechodu do turbulentního režimu proudění. Po této fázi simulace pokračoval výpočet po dobu 1 s pouze s tím rozdílem, že bylo aktivováno průměrování rychlostního a tlakového pole v čase. Důvodem, proč nebylo průměrování aktivováno hned od samotného začátku simulace, je fakt, že simulace vycházela z nerealistické počáteční podmínky a časový průměr by byl po velice dlouhý časový interval touto počáteční podmínkou ovlivněn. Po 0,1 s bylo proudění považováno za statisticky stacionární, a tedy má smysl aktivovat časové průměrování ke zjištění turbulentních statistik proudu.

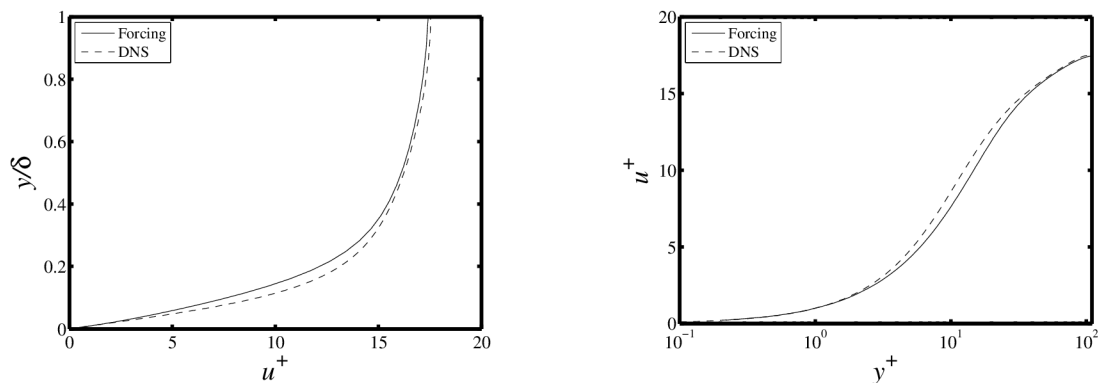
### 2.4.3. Výsledky pro $Re_\tau = 110$

V následujících podkapitolách jsou prezentovány výsledky testovací simulace. Nejprve jsou uvedeny výsledky pro nízké Reynoldsovo číslo  $Re_\tau = 110$ , potom pro vysoké Reynoldsovo číslo  $Re_\tau = 395$ . V grafech jsou výsledky LES simulace reprezentovány plnou čarou a DNS data čarou čárkovanou.

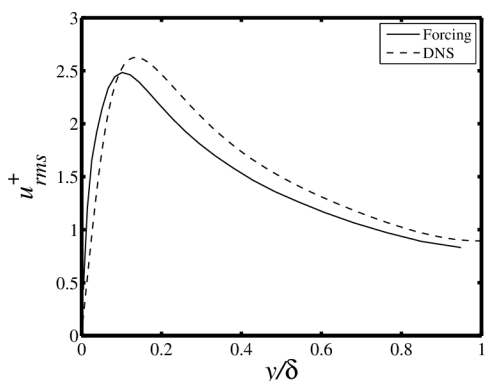
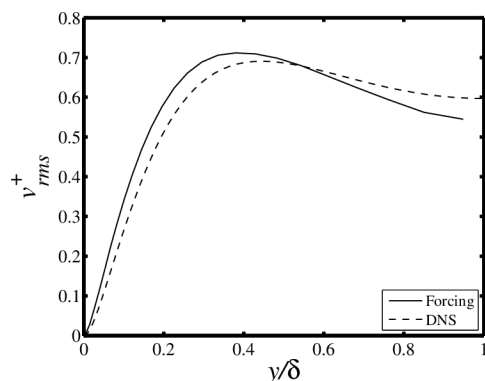
Střední rychlost pro simulaci o nízkém Reynoldsově čísle je  $u_m = 1,61 \text{ m/s}$ . Integrální časové měřítko bylo odhadnuto přibližně na 0,0125 s. Parametry schématu buzení turbulence jsou tedy  $T_{OU} = 0,0125$  a  $\sigma_{OU} = 1,61$ .

Graf na obrázku 2.14 ukazuje profil podélné složky rychlosti napříč kanálem. V grafu je použita bezrozměrná rychlost  $u^+ = u/u_\tau$ . Rychlostní profil je symetrický podle roviny  $y = \delta$  s tolerancí 0,5%. Je tedy zobrazena pouze polovina rychlostního profilu. Lze si povšimnout, že LES simulace s použitím schématu buzení turbulence lehce podhodnocuje rychlost v přístěnné




 Obrázek 2.14: Rychlostní profil napříč kanálem pro  $Re_\tau=110$ 

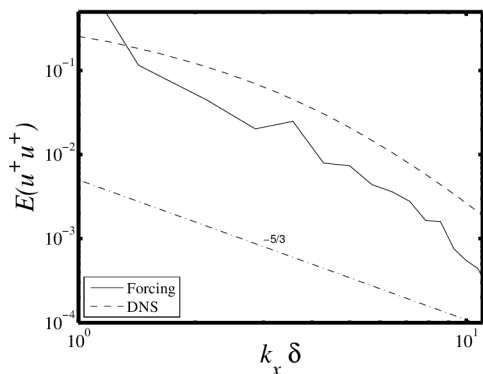
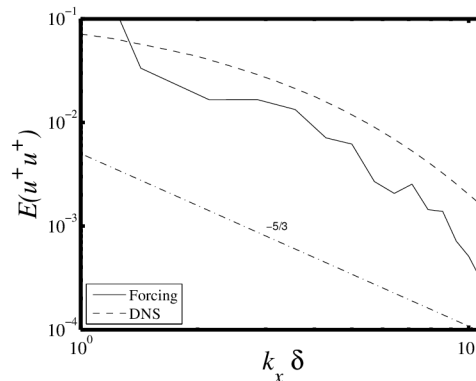
oblasti. Rychlost je podhodnocena pouze v laminární podvrstvě  $y^+ < 11$ . V logaritmické části je rychlost predikována přesně.


 Obrázek 2.15: Fluktuace podélné složky rychlosti pro  $Re_\tau=110$ 

 Obrázek 2.16: Fluktuace složky rychlosti kolmé na stěnu pro  $Re_\tau=110$ 

Obrázky 2.15 a 2.16 ukazují fluktuace podélné a na stěnu kolmé složky rychlosti po výšce kanálu. Shoda s DNS daty není tak dobrá, jako v případě průměrné rychlosti. Rozdíly jsou výraznější. V přístěnné oblasti jsou fluktuace rychlosti nadhodnocovány. Sklon křivek je větší než je tomu v případě DNS simulace. Maximální hodnota fluktuace podélné složky rychlosti je v případě LES simulace  $u_{rms}^+ = 2,48$ , zatímco maximum predikováno DNS má hodnotu  $u_{rms}^+ = 2,63$ . Chyba v odhadu maximální fluktuace podélné složky rychlosti je 5,7%. Poloha maxima má různou hodnotu pro LES a DNS. Pro LES simulaci, maximální hodnota leží ve vzdálenosti  $y/\delta = 0,102$  od stěny. V případě DNS simulace je maximum umístěno v poloze  $y/\delta = 0,13$ . Dále od stěny ( $y/\delta > 0,1$ ) je fluktuace podélné rychlosti podhodnocena. Sklon křivek reprezentující LES a DNS data je skoro stejný v této oblasti.

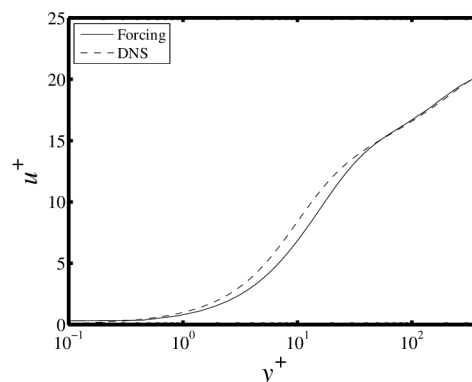
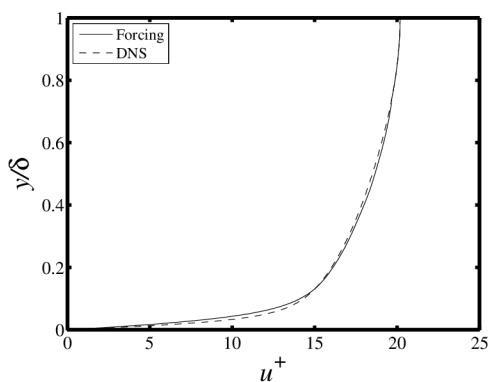
Fluktuace složky rychlosti kolmé na stěnu je rovněž nadhodnoceno v přístěnné oblasti ( $y/\delta < 0,5$ ). Maximální hodnota této fluktuace je vyšší pro LES simulaci ( $max(v_{rms}^+) = 0,712$  v pozici  $y/\delta = 0,38$  pro LES a  $max(v_{rms}^+) = 0,691$  v pozici  $y/\delta = 0,44$  pro DNS). Ve střední části kanálu je velikost na stěnu kolmé fluktuace rychlosti predikovaná LES simulací podhodnocena.

Obrázky 2.17 a 2.18 znázorňují energetické spektrum ve směru po proudu ve vzdálenostech od stěny  $y/\delta = 0,5$  a  $y/\delta = 1$ . Je zde patrná dobrá shoda ve tvaru spektra s výsledky DNS simulace. Hodnoty jsou podhodnocovány LES simulací.


 Obrázek 2.17: Energetické spektrum v  $y/\delta = 0.5$  pro  $Re_\tau = 110$ 

 Obrázek 2.18: Energetické spektrum v  $y/\delta = 1$  pro  $Re_\tau = 110$ 

#### 2.4.4. Výsledky pro $Re_\tau = 395$

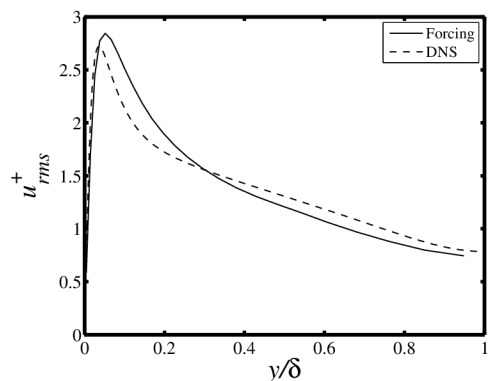
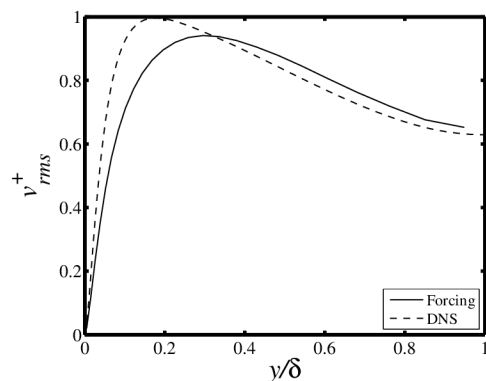
Střední rychlost pro simulaci o nízkém Reynoldsově čísle je  $u_m = 6,96 \text{ m/s}$ . Integrovaný časový měřítko bylo odhadnuto přibližně na 0,0028s. Parametry schématu buzení turbulence jsou tedy  $T_{OU} = 0,0028$  a  $\sigma_{OU} = 6,96$ .


 Obrázek 2.19: Rychlostní profil napříč kanálem pro  $Re_\tau = 400$ 

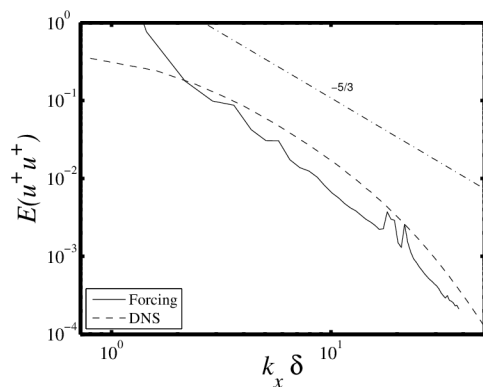
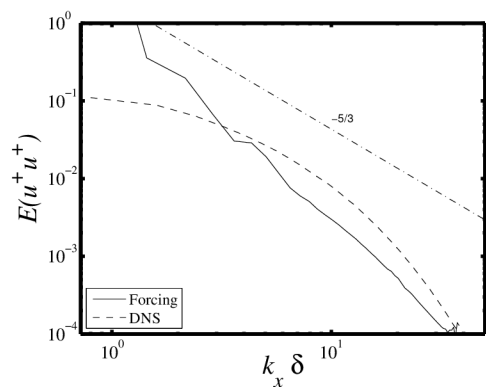
Profil podélné složky rychlosti pro vysoké Reynoldsovo číslo je na obrázku 2.19. Nastává podobná situace jako v případě proudění s nízkým Reynoldsovým číslem. Lze si povšimnout, že LES simulace s použitím schématu buzení turbulence lehce podhodnocuje rychlost v přístěnné oblasti. Rychlost je podhodnocena pouze v laminární podvrstvě  $y^+ < 11$ . V logaritmické části je rychlost predikována přesně.

Fluktuace podélné a na stěnu kolmé složky rychlosti po výšce kanálu pro vysoké Reynoldsovo číslo jsou znázorněny v grafech na obrázcích 2.20 a 2.21. Shoda LES a DNS simulace je i v tomto případě dobrá. Fluktuace podélné složky rychlosti  $u_{rms}^+$  je nadhodnocena v blízkosti stěny. V oblasti dále od stěny ( $y/\delta > 0,3$ ) je tato statistika podhodnocena. Fluktuace podélné složky rychlosti nabývá maxima  $\max(u_{rms}^+) = 2,844$  at  $y/\delta = 0,05$  pro LES simulaci, zatímco v DNS simulaci je  $\max(u_{rms}^+) = 2,721$  v pozici  $y/\delta = 0,036$ .

Opačná situace je v případě fluktuací složky rychlosti kolmé na stěnu  $v_{rms}^+$ . V přístěnné oblasti jsou tyto fluktuace podhodnoceny, v ostatní části jsou nadhodnoceny. Křivka průběhu fluktuací složky rychlosti kolmé na stěnu po výšce kanálu pro LES nemá tak výrazný vrchol jako pro DNS simulaci ( $\max(v_{rms}^+) = 0,941$  v pozici  $y/\delta = 0,295$  pro LES a  $\max(v_{rms}^+) = 0,996$  v pozici  $y/\delta = 0,179$  pro DNS).


 Obrázek 2.20: Fluktuace podélné složky rychlosti pro  $Re_\tau=395$ 

 Obrázek 2.21: Fluktuace složky rychlosti kolmé na stěnu pro  $Re_\tau=395$ 

Energetické spektrum ve vzdálenosti od stěny  $y/\delta = 0,5$  a  $y/\delta = 1$  pro vysoké Reynoldsovo číslo je zobrazeno v grafech na obrázcích 2.22 a 2.23. Shoda mezi LES simulací a DNS daty je v tomto případě dobrá. Sklon energetického spektra je předpovězen dostatečně přesně. Hodnota energetického spektra je podhodnocena pro vyšší vlnová čísla v obou dvou vzdálenostech od stěny.

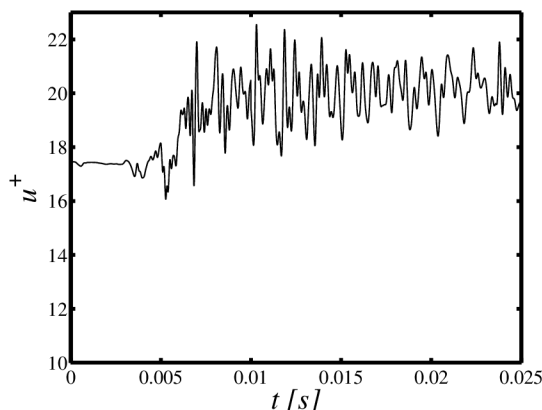

 Obrázek 2.22: Energetické spektrum v  $y/\delta = 0,5$  pro  $Re_\tau=395$ 

 Obrázek 2.23: Energetické spektrum v  $y/\delta = 1$  pro  $Re_\tau=395$ 

### 2.4.5. Efektivita schématu buzení turbulence

V předešlé kapitole byla demonstrována činnost navrženého schématu buzení turbulence na případu proudění kanálem a výsledky simulací byly porovnány s DNS daty. Ukázalo se, že navržené schéma buzení turbulence je schopno iniciovat přechod do turbulence a výsledný turbulentní proud má správné charakteristiky. Další fakt, který je třeba určit, je efektivita navrženého schématu buzení turbulence.

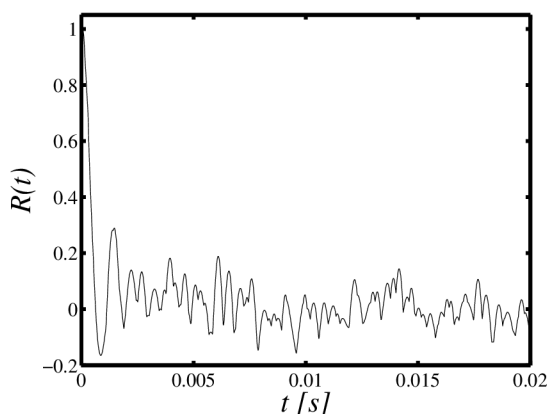
Na obrázku 2.24 je znázorněn průběh podélné složky rychlosti v čase pro případ proudění s vysokým Reynoldsovým číslem. Časový záznam byl pořízen v bodě umístěném v geometrickém středu kanálu. Z tohoto průběhu lze vypořadovat, že od času  $t = 0,015s$  se charakter křivky téměř nemění. Od této chvíle lze proud tedy prohlásit za statisticky stacionární (časové průměr a rozptyl je konstantní v čase) a můžeme ho považovat za plně vyvinutý turbulentní proud. Na základě tohoto faktu lze konstatovat, že k přechodu do plně turbulentního režimu proudění

dochází už po jednom průchodu proudícího média kanálem.



Obrázek 2.24: Závislost podélné složky rychlosti na čase v bodě umístěném do geometrického středu kanálu pro  $Re_\tau = 395$

Dále byla provedena simulace bez použití navrženého schématu buzení turbulence. Jejím účelem bylo stanovení faktoru urychlení přechodu do plně vyvinutého turbulentního proudění pro navržené schéma buzení turbulence. V této simulaci byly použity úplně stejné počáteční i okrajové podmínky, jaké byly použity v předchozí simulaci, pouze bylo deaktivováno buzení turbulence. Bohužel v případě simulace bez buzení turbulence k žádnému přechodu do turbulentního režimu proudění nedošlo. Proud zůstal laminární i po mnoha průchodech média kanálem a nebyly vygenerovány žádné fluktuace. Stejnou zkušenost s tímto problémem má i mnoho dalších uživatelů programu OpenFOAM. Speciální postup musí být aplikován pro dosažení plně vyvinutého turbulentního proudění. Jedním z těchto postupů je například vygenerování speciální počáteční podmínky pro rychlost s rozruchy, které se časem vyvinou v turbulentní proud [72]. Navržené schéma buzení turbulence lze tedy považovat za další možnost, jak tento nedostatek překonat.



Obrázek 2.25: Časový korelační koeficient rychlosti v bodě uprostřed kanálu

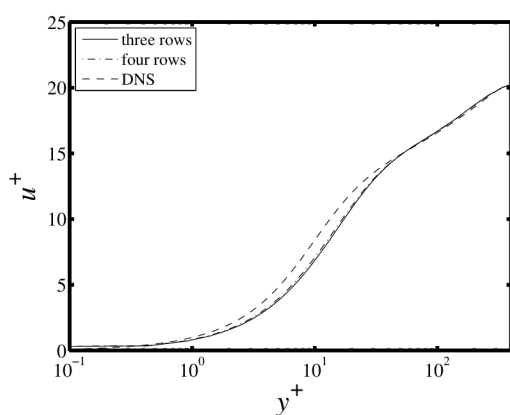
Obrázek 2.25 ukazuje časový korelační koeficient spočtený z časového záznamu průběhu podélné složky rychlosti. Rychlost byla monitorována v bodě uprostřed kanálu. Monitorování rychlosti bylo započato v okamžiku dosažení plně vyvinutého turbulentního režimu proudění.

Pomocí tohoto grafu lze spočítat integrální časové měřítko dle vztahu:

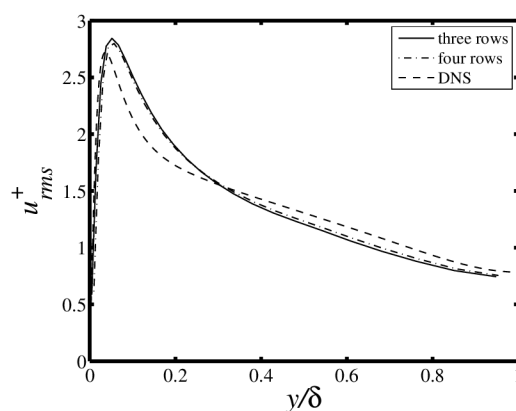
$$T = \int_0^{\infty} R(t) dt. \quad (2.15)$$

Pokud provedeme tento integrál pro funkci  $R(t)$  znázorněnou na obrázku 2.25, získáme hodnotu integrálního časového měřítka  $T = 0.0035 s$ . Odhadovaná hodnota časového měřítka, která byla použita jako vstupní parametr pro schéma buzení turbulence, byla rovna  $T_{OU} = 0.0028 s$ , což se jeví být dostatečně přesným odhadem integrálního časového měřítka proudu.

Další důležitou otázkou, kterou je třeba zodpovědět, je vliv počtu bodů, v nichž je generována dodatečná budící síla. Byla provedena další simulace proudění kanálem s vysokým Reynoldsovým číslem. Jediný rozdíl oproti dříve provedené simulaci je rozdílný počet bodů, ve kterých je generována budící síla. Namísto tří řad po pěti bodech byly použity čtyři řady po pěti bodech. Celkový počet budících bodů je tedy dvacet.



Obrázek 2.26: Rychlostní profil v kanále pro  $Re_{\tau}=400$  a různý počet budících bodů



Obrázek 2.27: Fluktuace podélné složky rychlosti pro  $Re_{\tau}=400$  a různý počet budících bodů

Na obrázku 2.26 je zobrazen rychlostní profil pro simulaci s dvaceti budícími body. Z grafu je patrné, že výsledek simulace se čtyřmi řadami budících bodů je skoro totožný s výsledkem se třemi řadami budících bodů. Jediná oblast, kde se výsledky nepatrně odlišují, je v přechodové podvrstvě. Podobné chování lze vidět na grafu znázorňujícím podélné fluktuace rychlosti (obrázek 2.27).

Z těchto faktů lze usoudit, že zvyšující se počet budících bodů nemá zásadní vliv na přesnost simulace. Navržené schéma buzení tedy přechod do turbulentního režimu proudění pouze inicializuje a urychlí, ale jakmile je tohoto režimu dosaženo, pak budící body ztrácí vliv a proud už dále neovlivňují. Toto je možný důvod shodných výsledků simulací se třemi a čtyřmi řadami budících bodů.

#### 2.4.6. Shrnutí

V této kapitole byla představena metoda pro generaci turbulence na rovině vstupu tekutiny do domény pro metodu Large Eddy Simulation. Správný popis turbulence na vstupu je jedním z problémů použití metody LES. Bylo ukázáno, že různé způsoby reprezentace turbulence na vstupu do domény mohou mít v některých případech zcela zásadní vliv na výsledky simulace.

Schéma generace turbulence na vstupu do domény vyvinuté v rámci této práce je kombinací předběžné simulace pro generaci turbulence a metody buzení turbulence. Schéma buzení turbulence se ukázalo jako nezbytné pro inicializaci přechodu do turbulentního režimu proudění

a jeho urychlení. Bez použití schématu buzení turbulence a rovnoměrné rychlosti jako počáteční podmínky pro předběžnou simulaci se sice v kanálu vyvinul rychlostní profil, ale nebyly přítomny žádné fluktuace rychlosti. Proudění bylo stále laminární. Toto chování lze vysvětlit následovně. Ve skutečnosti probíhá proces přechodu do turbulence tak, že v proudě vznikají místa lokálních nestabilit (tak zvané turbulentní skvrny), která se dále propagují a postupně prolínají. V DNS výpočtech jsou tyto nestability zastoupeny například zaokrouhlovací chybou. Při použití metody LES však dochází k filtraci (lokální prostorové průměrování) a jakmile se takovéto místo nestability objeví, tak je právě díky filtraci potlačeno. Skvrna turbulence je totiž místo s vysokou prostorovou frekvencí a použití filtru typu dolní propust (viz kapitola 1.2.3) toto místo eliminuje. Je tedy nutno aplikovat jiný mechanismus pro inicializaci pro přechod do turbulence.

## Pohyb částic

### 3.1 Úvod

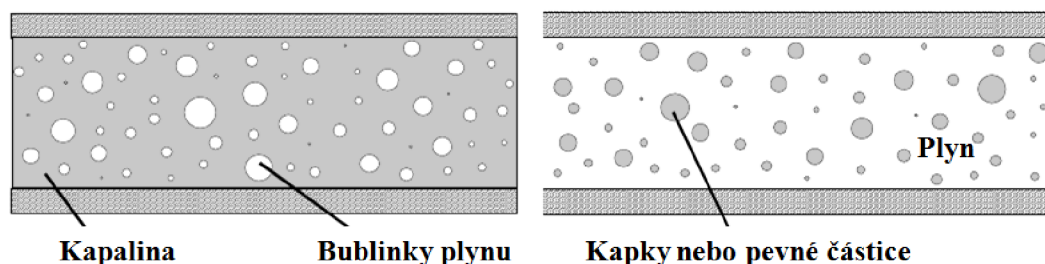
Po mnoho let byl návrh a konstrukce systému zahrnující vícefázové proudění založen pouze na empirických poznatcích. S postupem času docházelo k rozvoji a vývoji stále více sofistikovanějších měřících metod a technik, které přispěly k hlubšímu porozumění tohoto typu proudění a přispěly k odvození základních vztahů a fundamentálních parametrů. Rozvoj výpočetní techniky a s ním spojený nárůst výpočetního výkonu dovolil vývoj numerických metod určených pro simulaci vícefázových systémů. V poslední době toto odvětví prochází rychlým vývojem a numerické simulace se stávají mocným efektivním pomocníkem při návrhu nových prvků a systémů.

#### 3.1.1. Klasifikace vícefázového proudění

Vícefázovým prouděním je myšleno proudění zahrnující více fází. Fází se myslí skupenství média a může být plynné, kapalně nebo tuhé. Při vícefázovém proudění dochází k transportu a pohybu směsi těchto fází. V následujících odstavcích budou stručně popsány jednotlivé kombinace transportovaných fází, jež se v průmyslových aplikacích vyskytují nejčastěji.

#### Disperzní a odseparované fáze

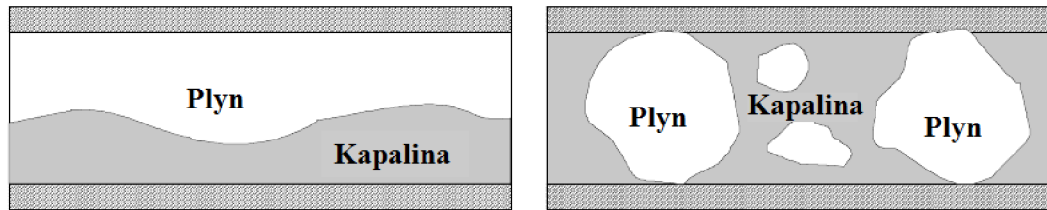
Proud s přítomností disperzní fáze je takový proud, kdy jedna fáze je tvořena diskrétními prvky, například pevné částice, bublinky plynu v kapalině a tak dále. Jednotlivé prvky disperzní fáze nejsou nikterak propojeny.



Obrázek 3.1: Schématické znázornění proudu s disperzní fází

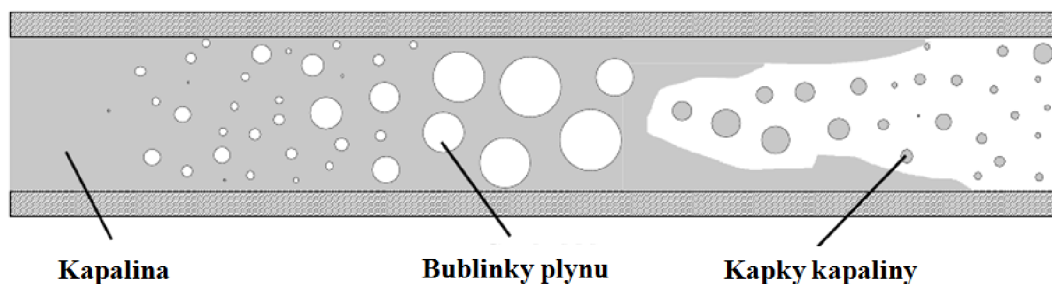
V proudu s odseparovanými fázemi je vždy zřetelná hranice na kontaktu jednotlivých fází. V daném bodu v prostoru se pak může nacházet pouze jedna fáze. Příklad proudění s navzájem odseparovanými fázemi je například proudění vzduchu nad vodní hladinou či filmem. Do tohoto

případu by se dal zahrnout i případ proudění dvou vzájemně nemísitelných kapalin. Takový systém je sice tvořen složkami se stejnou fází, ale vlastnosti proudu s odseparovanými fázemi tento systém splňuje. Příklad proudění dvou nemísitelných kapalin je například olejový film na vodní hladině.



Obrázek 3.2: Schématické znázornění proudu s odseparovanými fázemi

V některých případech dochází k postupnému přechodu z jednofázového proudění do proudění s oddělenými fázemi a následnému proudění s disperzní fází. K tomuto přechodovému jevu dochází například v parních generátorech nebo bojlerch. Voda je teplými stěnami ohřívána a postupně dochází ke vzniku malých bublinek páry. Bublínky páry postupně narůstají, dochází k jejich koalescenci a proud přejde do režimu s odseparovanými fázemi.



Obrázek 3.3: Schématické znázornění s přechodem do disperzní fáze

### Proud plyn-kapalina

Tato kombinace vícefázového proudění se objevuje v průmyslových aplikacích velmi často. Jedná se o transport bublinek v kapalině nebo naopak kapiček v plynu. Příkladem transportu kapiček v plynu je například atomizace kapaliny ve sprejích a jejich následné šíření. Tato aplikace je důležitá pro spalování kapalných paliv, kde kvalita spalování záleží mimo jiné i na kvalitě atomizace. Další aplikací je nanášení materiálu na různé povrchy pomocí spreje.

### Proud plyn-pevná fáze

Tímto typem proudění se uvažuje transport pevných částic plynem. Tato kategorie zahrnuje pneumatický transport částic. Příklady tohoto typu proudu lze nalézt v uhelných elektrárnách při dopravě uhelného prachu do spalovací komory a jeho následného rozptýlení ve spalovací komoře. Šíření prachu a jiných nečistot v prostředí spadá také do této kategorie. Často je středem zájmu zjištění, kde dochází k depozici částic a jestli nehrozí zanesení nebo dokonce ucpání nějakého prvku.



## Proud kapalina-pevná fáze

V zásadě se jedná o podobný typ proudu jako je proud plyn-pevná fáze, ale s tím rozdílem, že nosná fáze je nyní ve skupenství kapalném. Problém zahrnující tento typ proudu je například šíření nečistot ve vodních tocích.

Jelikož je tato disertační práce zaměřena na problematiku transportu částic, tak se další část práce bude věnovat pouze systému plyn/kapalina–disperzní fáze. Řešení dalších typů vícefázového proudění je natolik specifické a odlišné, že vyžaduje jiný přístup k řešení.

## 3.2 Model pohybu částic

Pro numerické simulace transportu a pohybu disperzní fáze nosnou (kapalnou či plynnou) fází je nutné sestavit matematický model popisující chování tohoto systému. Matematický model popisující pohyb nosné fáze a metody k jeho řešení byl podán v předchozích kapitolách. Následující kapitoly budou věnovány popisu pohybu disperzní fáze.

### 3.2.1. Metody popisu pohybu částic

Existují dva obecné přístupy k numerickým simulacím pohybu částic unášených plynem či kapalinou. Jedná se o Eulerův a Lagrangeův přístup. Každý přístup má své výhody a nevýhody odvislé od charakteru zkoumaného proudění.

#### Eulerův přístup

Při použití Eulerova přístupu jsou částice považovány za druhou tekutinu, která se chová jako kontinuum a s vlastnostmi analogickými s tekutinou. Jsou sestaveny rovnice pro průměrné vlastnosti částic, například hustota částic na jednotkový objem směsi a tak dále. Tyto rovnice jsou posléze řešeny společně s rovnicemi popisující pohyb nosné fáze. Tento přístup je vhodný pro simulace s velkými koncentracemi částic v proudu. V případě, že pro popis nosné fáze je použit také Eulerův přístup, pak se tento přístup k řešení vícefázového systému označuje jako Euler-Eulerův přístup. Více informací o tomto přístupu lze nalézt v [10].

#### Lagrangeův přístup

Druhou možností, jak pospat a řešit pohyb disperzních částic v proudu, je použití Lagrangeova přístupu. Pro každou částici je sestavena pohybová rovnice, která je v průběhu výpočtu řešena společně s rovnicemi popisujícími pohyb nosné fáze. Vyřešením pohybové rovnice pro částici získáme polohu částice v závislosti na čase (trajektorii) a derivací polohy podle času lze získat rychlost a zrychlení částice.

Pohybová rovnice pro částici je sestavena pomocí druhého Newtonova zákona:

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{v}, \quad (3.1)$$

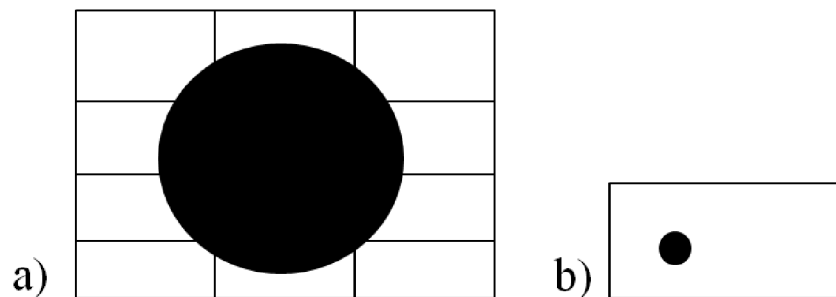
$$m_p \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \quad (3.2)$$

$$I_p \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \sum \mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \quad (3.3)$$

kde  $\mathbf{x}_p$  je poloha částice,  $\mathbf{v}$  je rychlost částice,  $\mathbf{u}$  je rychlost tekutiny v pozici částice,  $m_p$  je hmotnost částice a  $\sum \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)$  je výslednice všech sil působících na částici. Síly, které mohou na

částici působit, jsou popsány a kvantifikovány v následující kapitole. V případech, kdy rotace částice má výrazný vliv na její pohyb (viz například Saffmanova či Magnusova síla), je třeba řešit zároveň s pohybovými rovnicemi i rovnici pro rotaci částice (3.3). Změna vektoru rotace  $\boldsymbol{\omega}$  je pak dána celkovým silovým momentem  $\sum \mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)$  působící na částici a momentem setrvačnosti částice  $I_p$ .

V zásadě přesné určení sil působících na částici a vyřešení pohybu částic vyžaduje detailní znalost rychlosti nosné fáze kolem každé částice, viz obrázek 3.4 a). Pro použití takového přístupu je však nutné na povrchu částice předepsat okrajovou podmínku ulpívání a doplnit tak globální okrajové podmínky. Síla působící na částici se pak získá například integrací tlakového pole přes povrch částice. V současné době je i přes nárůst výpočetního výkonu nemožné tímto přístupem řešit problémy zahrnující transport částic, s nimiž se lze běžně setkat. Počet částic, které lze takto simulovat v jednoduchých geometriích je řádu  $O(10^3)$ , což je hodnota řádově nižší, než počet transportovaných částic v průmyslových aplikacích. Tento přístup musí být často použit v DNS výpočtech proudu s částicemi, neboť mnohdy rozměr výpočetní sítě je menší než rozměr částic. Jedním ze způsobů, jak reprezentovat částice v proudu v této situaci, je použití metody Immersed Boundary Method [57].



Obrázek 3.4: Velikost částice v porovnání s výpočetní buňkou: a) plně rozřešené pole kolem částice, b) bodová reprezentace částice

Pro to, aby byly simulace pohybu disperzní fáze proveditelné, je třeba redukovat požadavek na detailní znalost rychlostního pole kolem částice. Místo toho, aby byla částice uvažována jako další část domény se svou okrajovou podmínkou, je částice považována za hmotný bod a síly na ni působící jsou určeny částečně pomocí empirických vztahů, viz obrázek 3.4 b). Pomocí tohoto přístupu lze odsimulovat pohyb i velkého množství částic, řádově až  $O(10^9)$ .

### 3.3 Síly působící na částice

Pro správné vyřešení pohybu částice je nezbytné určit síly, které na částice v proudu působí. Spektrum sil, které mohou na částice působit, je velmi široké. Může se jednat o síly, které jsou způsobeny interakcí částice s tekutinou (například síla odporová, Saffmanova, Magnusova, tlaková, Bassetova, virtuální a jiné). Dále to mohou být síly od různých polí, v nichž se částice nachází (například síla gravitační, elektrostatická či magnetická). Někdy je nutné uvažovat i vzájemné silové působení částic mezi sebou (van der Wallsova síla). Za přítomnosti teplotního gradientu může nabývat na důležitosti síla termoforezní. V případě transportu velmi malých částic je mnohdy nutno uvažovat i sílu Brownovu. Zahrnutí všech těchto sil do simulací a jejich vyhodnocení klade velké výpočetní nároky na výkon i čas. Je proto nutné identifikovat dominantní síly působící na částice, jež budou mít na pohyb částic velký vliv, a síly, jež je možno pro jejich malý vliv v simulaci zanedbat. Popis výše zmíněných sil lze nalézt v [11], [10], [74].

### 3.3.1. Odporová síla

Nejdůležitější síla, která působí na částice nesené tekutinou, je odporová síla (z anglického drag force). Tato síla je většinou dominantní silou působící na částice a musí být uvažována skoro ve všech případech zahrnující transport disperzní fáze. Odporová síla sestává ze dvou složek: třecí a tlaková. Třecí složka je vyvolána zbrzděním tekutiny na povrchu částice a tlaková složka souvisí se strukturou úplavu vzniklým za částicí při jejím pohybu v tekutině. Většinou se vliv těchto dvou složek zohledňuje v jednom koeficientu a to v součiniteli odporu. Odporovou sílu lze vyjádřit jako:

$$\mathbf{F}_D = \frac{1}{2} C_D A_p \rho_f (\mathbf{u} - \mathbf{v}) |\mathbf{u} - \mathbf{v}|, \quad (3.4)$$

kde  $C_D$  je výše zmíněný součinitel odporu, jenž souvisí s tvarem částice,  $A_p$  je průmět plochy částice do roviny kolmé na relativní rychlost částice,  $\rho_f$  je hustota tekutiny, v níž se částice nachází,  $\mathbf{u}$  je rychlost tekutiny v pozici částice a  $\mathbf{v}$  je aktuální rychlost částice. Za povšimnutí stojí, že když je relativní rychlost částice ( $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ) nulová, tak na ni nepůsobí síla odporu prostředí. Operátor  $|\cdot|$  značí velikost vektoru.

Částice mohou nabývat obecně různých tvarů například koule, elipsoidu, válce a tak dále. Poskytnout matematický model pohybu zahrnující obecný tvar částice je mimo rámec této práce a proto se dále omezíme pouze na částice kulové. Pro kulovou částici bude průmět do všech směrů stejný a to  $A_p = \pi/4 d_p^2$ . Použijme tento výraz v rovnici (3.4) a dosaďme takto upravené vyjádření odporové síly do druhého Newtonova pohybového zákona. Získáme:

$$m_p \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{2} C_D \frac{\pi d_p^2}{4} \rho_f (\mathbf{u} - \mathbf{v}) |\mathbf{u} - \mathbf{v}|, \quad (3.5)$$

kde  $m_p$  je hmotnost částice a  $d_p$  je poloměr částice. Zdefinujme si nyní Reynoldsovo číslo částice jako:

$$Re_p = \frac{\rho_f d_p}{\mu} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|. \quad (3.6)$$

Jedná se tedy o Reynoldsovo číslo založené na relativní rychlosti částice a poloměru částice. Pohybovou rovnici popisující pohyb částice (3.5) lze při použití Reynoldsova čísla částice upravit na tvar:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{18\mu}{\rho_p d_p^2} \frac{C_D Re_p}{24} (\mathbf{u} - \mathbf{v}). \quad (3.7)$$

#### Součinitel odporu kulové částice

Obecně je odporový součinitel závislý na tvaru částice, její orientaci vůči okolnímu proudu a na dalších parametrech jako například Reynoldsovo číslo, Machovo číslo, intenzita turbulence a tak dále. Jak již bylo zmíněno výše, zabýváme se pouze kulovými částicemi.

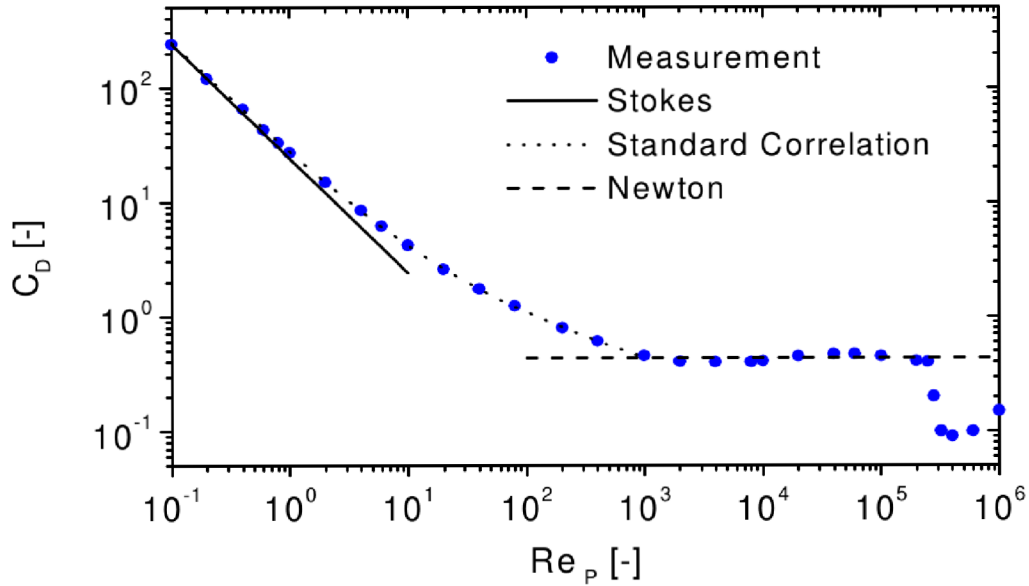
Na obrázku 3.5 je zobrazen průběh velikosti součinitele odporu pro kulovou částici v závislosti na Reynoldsově čísle částice. Je zde možno identifikovat různé režimy pohybu částic, které jsou spojeny s charakteristickými rysy proudění kolem koule.

Na malé částice ( $Re_p < 0,5$ ) mají dominantní vliv vazké třecí síly. Není zde pozorován žádný úplav za částicí. Analytické vyjádření součinitele odporu částice pro tato Reynoldsova čísla lze najít v práci [76]:

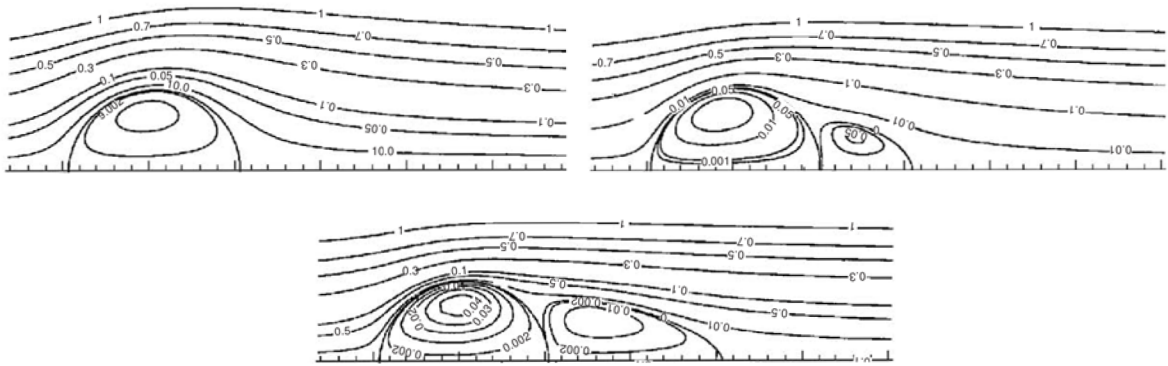
$$C_D = \frac{24}{Re_p}. \quad (3.8)$$

Tento režim bývá často označován jako Stokesův režim.

Další režim je takzvaný režim přechodový ( $0,5 < Re_p < 1000$ ). Kolem Reynoldsova čísla částice zhruba 24 se začíná proud okolo částice odseparovávat. Nejprve se jedná o symetrickou separaci proudu, jež se se zvětšujícím Reynoldsovým číslem stává při  $Re_p \approx 150$  periodickou. Na



Obrázek 3.5: Závislost velikosti součinitele odporu na Reynoldsově čísle částice. Převzato z [74]

Obrázek 3.6: Proudnice kolem částice pro  $Re_p = 10, 100$  a  $500$ . Převzato z [11]

obrázku 3.6 jsou vykresleny proudnice kolem částice pro Reynoldsova čísla částice  $Re_p = 10, 100$  a  $500$ . Mnoho korelací bylo navrženo pro tento nelineární režim, která vystihují experimentální data s větší či menší přesností [10], [9]. Jedna z nejčastěji používaných korelací je dle Schillera a Neumanna [70], která vystihuje průběh odporového součinitele až do  $Re_p = 1000$  dostatečně přesně:

$$C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15Re_p^{0.687}) = \frac{24}{Re_p} f_D \quad (3.9)$$

Často bývá tato korelace označována jako standardní korelace odporového součinitele.

Při proudění s Reynoldsovým číslem částice větším než  $1000$  je proud okolo částice plně turbulentní a úplav a vírová struktura za částicí se téměř nemění až do kritického Reynoldsova čísla. Tento fakt se projeví tím, že odporový součinitel je zhruba konstantní a nabývá hodnoty:

$$C_D \approx 0,44. \quad (3.10)$$

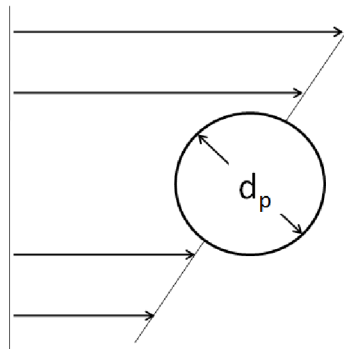
Tento režim se označuje jako Newtonův režim.

Při kritickém Reynoldsově čísle ( $Re_p \approx 2,5 \cdot 10^5$ ) nastává prudký pokles hodnoty odporového součinitele. Tento pokles je způsoben přechodem mezní vrstvy okolo částice z laminárního do turbulentního režimu. Toto způsobí zmenšení velikosti úplavu za částicí.

V nadkritickém režimu ( $Re_p > 2,5 \cdot 10^5$ ) dochází k opětovnému kontinuálnímu vzrůstu součinitele odporu. Tento režim pohybu částic však skoro vůbec nenastává, tudíž tento režim není relevantní.

### 3.3.2. Saffmanova síla

Saffmanova síla je způsobená rozdílným rozložením tlaku na částici vzniklým rotací částice v proudu. Rotace částice je následkem nenulovosti gradientu rychlosti, jak je ukázáno na obrázku 3.7. Vyšší rychlost na vrchní straně částice vyvolává lokální pokles tlaku a zvýšený tlak na dolní straně s nižší rychlostí způsobí vznik dynamické vztlakové síly (angl. lift force). Saffman [66] analyzoval tuto sílu pro nízká Reynoldsova čísla a odvodil vztah pro číselné vyjádření této síly:



Obrázek 3.7: Částice ve smykovém proudu

$$\mathbf{F}_{Saff} = 1.61\mu_f d_p |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \sqrt{Re_G}, \quad (3.11)$$

kde  $Re_G$  je smykové Reynoldsovo číslo definováno jako:

$$Re_G = \frac{d_p^2}{\nu_f} \frac{du}{dy}. \quad (3.12)$$

Tento parametr může být uvažován jako Reynoldsovo číslo založené na rychlostní diferencii mezi spodní a vrchní částí částice. Rovnici (3.11) lze přepsat do formy:

$$\mathbf{F}_{Saff} = 1.61 d_p^2 (\mu_f \rho_f)^{\frac{1}{2}} |\boldsymbol{\omega}_f|^{-\frac{1}{2}} [(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times \boldsymbol{\omega}_f], \quad (3.13)$$

kde

$$\boldsymbol{\omega}_f = \nabla \times \mathbf{u} \quad (3.14)$$

je rotace rychlosti tekutiny.

Je možno si povšimnout, že v případě pozitivní relativní rychlosti směřuje dynamická vztlaková síla směrem k vyšším rychlostem tekuté fáze. V případě negativní relativní rychlosti má tato síla směr k nižší rychlosti.

Saffmanova analýza je založena na předpokladu, že Reynoldsovo číslo částice  $Re_p$  je mnohem menší než smykové Reynoldsovo číslo založené na diferencii rychlosti:

$$Re_r \ll \sqrt{Re_G} \quad (3.15)$$

a že obě tato čísla jsou menší než jedna. McLaughlin [48] rozšířil Saffmanovu analýzu pro Reynoldsovo číslo částice větší než smykové Reynoldsovo číslo a zjistil, že pro tyto případy velikost dynamické vztlakové síly prudce klesá. Mei [49] použil numerické výsledky, které získali Dandy a Dweyer [12], a na jejich základě navrhl empirické vyjádření korekce Saffmanovy síly v závislosti na  $Re_p$  a  $Re_G$ :

$$F_L/F_{Saff} = (1 - 0.3314\beta^{1/2})\exp\left(-\frac{Re_p}{10}\right) + 0.3314\beta^{1/2} \quad \text{pro } Re_p \leq 40 \quad (3.16)$$

$$= 0.0524(\beta Re_p)^{1/2} \quad \text{pro } Re_p > 40 \quad (3.17)$$

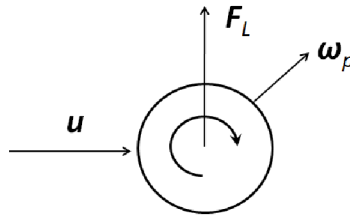
kde

$$\beta = \frac{d_p}{2|\mathbf{u} - \mathbf{v}|} |\omega_f|, \quad 0.005 < \beta < 0.4 \quad (3.18)$$

Mei [49] dále ukázal, že výše uvedená empirická korekce vystihuje McLaughlinovy výsledky [48] s dostatečnou přesností.

### 3.3.3. Magnusova síla

Magnusonova síla je vztlaková síla vzniknuvší na základě rotace částice v proudu. Na obrázku 3.8 je schématicky znázorněno působení této síly na rotující částici s rotací  $\omega_p$  v proudu o rychlosti  $\mathbf{u}$ . Rotace částice nemusí být nutně způsobená nenulovým gradientem rychlosti, viz Saffmanova síla, ale rotaci může částice získat po kolizi s jinou částicí nebo po nárazu do stěny. Rotace částice vyvolává deformaci proudového pole v okolí částice, dochází k posunu bodu stagnace a vzniku tlakové difference na částici.



Obrázek 3.8: Magnusova síla působící na rotující částici v proudu

Rubinow a Keller [65] odvodili analytické vyjádření Magnusovy síly pro malé částice s Reynoldsovým číslem menší než jedna jako:

$$\mathbf{F}_{Mag} = \frac{\pi}{8} d_p^3 \rho_f \left[ \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} - \omega_p \right) \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}) \right], \quad (3.19)$$

kde  $\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}$  je lokální rotace tekutiny a  $\omega_p$  je rotace částice. Lze si povšimnout, že Magnusova síla bude nulová, jestliže rotace částice je stejná jako lokální rotace tekutiny.

Vzorec pro výpočet Magnusonovy síly může být rozšířen koeficientem rotace pro použití pro částice s vyšším Reynoldsovým číslem [10]:

$$\mathbf{F}_{Mag} = \frac{1}{2} \rho_f \frac{\pi}{4} d_p^2 C_{LR} |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \left( \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times \omega_r}{|\omega_r|} \right), \quad (3.20)$$

kde  $\omega_r$  je relativní rotace částice vzhledem k rotaci tekutiny daná jako:

$$\omega_r = \omega_p - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}. \quad (3.21)$$

K původnímu vztahu (3.19) platného pro částice s malým Reynoldsovým číslem se lze dostat volbou koeficientu rotace:

$$C_{LR} = \frac{d_p |\boldsymbol{\omega}_r|}{|\mathbf{u} - \mathbf{v}|} = \frac{Re_R}{Re_p}, \quad (3.22)$$

kde

$$Re_R = \frac{\rho_f d_p^2 |\boldsymbol{\omega}_r|}{\mu_f}. \quad (3.23)$$

Pro výpočet koeficientu rotace pro částice s  $Re_p < 140$  lze použít empirický vztah [55]:

$$C_{LR} = 0,45 + \left( \frac{Re_R}{Re_p} - 0,45 \right) (exp)(-0,05684 \cdot Re_R^{0,4} \cdot Re_p^{0,3}). \quad (3.24)$$

### 3.4 Relaxační čas částice

Odezva částice nebo kapky na změnu rychlosti či teploty okolní kapaliny je velice důležitá veličina dovolující definici bezrozměrného parametru charakterizující pohyb částice v proudu. Relaxační čas částice se vztahuje ke schopnosti částice reagovat na změnu rychlosti proudu. Odvoďme nyní vztah, podle něhož lze relaxační čas částice spočítat, a demonstrovme jeho vlastnosti. Pohybová rovnice pro kulovou částici, na níž působí pouze síla odporu prostředí má tvar:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{18\mu}{\rho_p d_p^2} \frac{C_D Re_p}{24} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (3.25)$$

při použití Reynoldsova čísla částice. Zadejme relaxační čas částice  $\tau_p$  jako:

$$\tau_p = \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu}. \quad (3.26)$$

Lze si povšimnout, že velké těžké částice budou mít relaxační čas větší než malé lehké částice. Lehké částice tedy budou rychleji reagovat na změny rychlosti nosné fáze. Dále uvažujme, že částice se pohybuje ve Stokesově režimu, tj. faktor  $C_D Re_p/24$  se blíží k jedničce. Pak lze rovnice (3.25) zjednodušit na tvar:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\tau_p} (\mathbf{u} - \mathbf{v}). \quad (3.27)$$

Tato rovnice má analytické řešení pro zjednodušený případ konstantní rychlosti nosné tekutiny  $\mathbf{v}$  a rychlost částice  $\mathbf{u}$  je v čase  $t = 0$  nulová. V tomto případě lze vyjádřit rychlost částice v závislosti na čase jako:

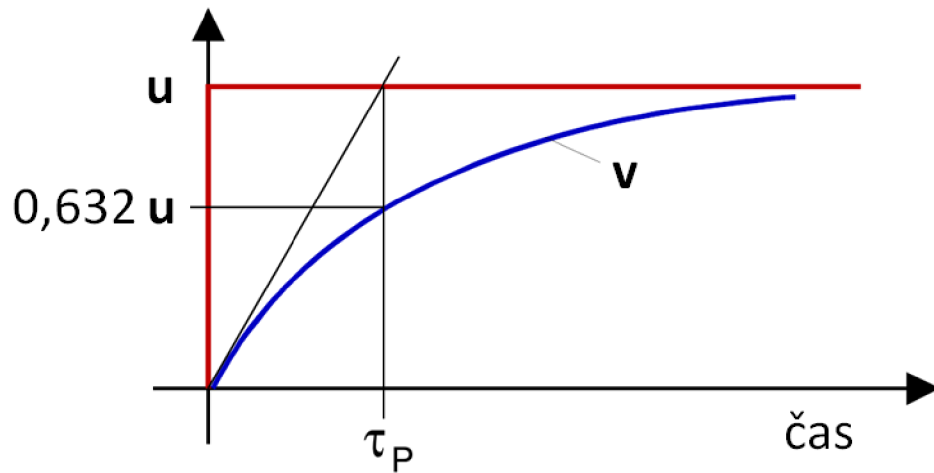
$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right) \right). \quad (3.28)$$

Z této rovnice lze odvodit, že relaxační čas částice je doba potřebná pro dosažení rychlosti částice  $\mathbf{u}$  na 63,2% rychlosti tekutiny  $\mathbf{v}$ . Grafické znázornění významu relaxačního času částice je na obrázku 3.9.

Relaxační čas částice lze pomocí časového měřítka proudu bezrozměrnit. Výsledný parametr se nazývá Stokesovo číslo. Stokesovo číslo je poměr relaxačního času částice a časového měřítka proudu:

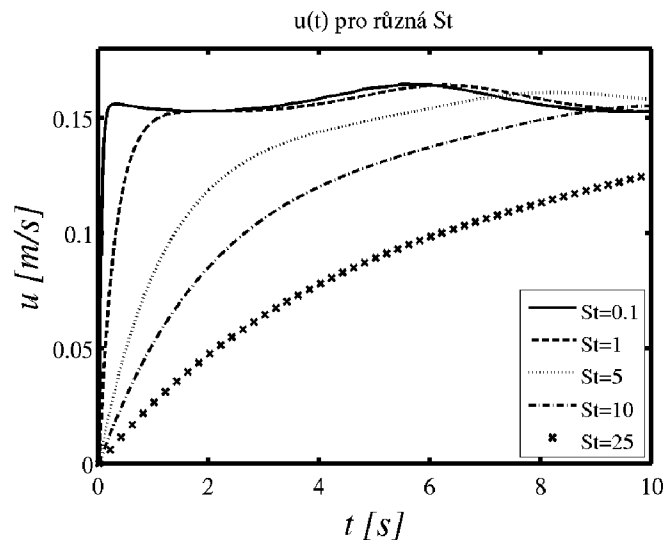
$$St = \frac{\tau_p}{\tau_f}. \quad (3.29)$$

Při pohybu částic v turbulentním poli se běžně používá integrální časové měřítko turbulence pro výpočet Stokesova čísla. Toto měřítko charakterizuje velké, energii obsahující víry.



Obrázek 3.9: Grafické znázornění relaxačního času částice

Pro detailnější studii vlivu Stokesova čísla na pohyb částice byla provedena simulace pohybu různě velkých částic v turbulentním poli. Jako případ turbulentního proudění byl zvolen proud mezi dvěma paralelními deskami s Reynoldsovým číslem  $Re = 13\,500$ . Do středu kanálu byly postupně umístěny různě velké částice a pak byl po dobu deseti sekund sledován vývoj rychlosti každé částice v čase. Hustota částic je  $1000\text{ kg/m}^3$ . Poloměry částice byly voleny postupně  $0,04865\text{ mm}$ ,  $0,15385\text{ mm}$ ,  $0,34401\text{ mm}$ ,  $0,48650\text{ mm}$  a  $0,76923\text{ mm}$ , což pro dané podmínky odpovídá Stokesovým číslům  $0,1$ ,  $1$ ,  $5$ ,  $10$  a  $25$ . Počáteční rychlost každé částice je nulová. To umožňuje sledovat, jak jsou různě velké částice postupně zrychlovány proudem.



Obrázek 3.10: Srovnání průběhu rychlosti v čase pro různě velké částice

Na obrázku 3.10 je vyobrazena závislost rychlosti částice umístěné do turbulentního pole na čase. Částice s nejnižším Stokesovým číslem  $St = 0,1$  je téměř ihned urychlena na rychlost nosného proudu a velmi rychle reaguje na změnu proudu. Oproti tomu největší částice s  $St = 25$  nabývá rychlost pozvolna a není fluktuacemi rychlosti skoro vůbec ovlivněna.



### 3.5 Interakce nosné fáze s částicemi

Vzájemnou interakcí mezi jednotlivými fázemi při vícefázovém proudění rozumíme vzájemnou výměnu rozličných veličin mezi fázemi. Jednotlivé fáze si mezi sebou mohou například předávat hmotu (například vypařování kapek unášených plynem), tepelnou energii (rozdílné teploty fází), hybnost a podobně. V dalším textu se omezíme pouze na výměnu hybnosti mezi disperzní a nosnou fází.

Při transportu disperzní fáze může docházet k několika režimům, co se týká vzájemného ovlivnění pohybu fází. Může dojít pouze k ovlivnění pohybu částic okolní tekutinou, aniž by byl pohyb tekutiny částicemi výrazně narušen. Tento režim se nazývá tak zvaný *one-way coupling*. V dalším režimu, *two-way coupling*, už je ovlivnění nosné fáze částicemi tak výrazné, že nemůže být zanedbáno. Při posledním režimu, nazývaném *four-way coupling*, už hrají významnou roli i vzájemné kolize částic.

Parametr rozhodující o tom, který z režimů vzájemného ovlivnění disperzní a nosné fáze nastane, je koncentrace disperzní fáze, potažmo podíl vzdálenosti mezi částicemi a průměru částic. Systém disperzní-nosná fáze lze rozdělit do dvou skupin. Označme si průměrný čas mezi vzájemnými kolizemi částic jako  $\tau_c$  a  $\tau_p$  jako relaxační čas částice, viz rovnice (3.26). Pak pomocí podílu  $\tau_p/\tau_c$  lze rozdělit proud typu disperzní-nosná fáze na řídký a hustý.

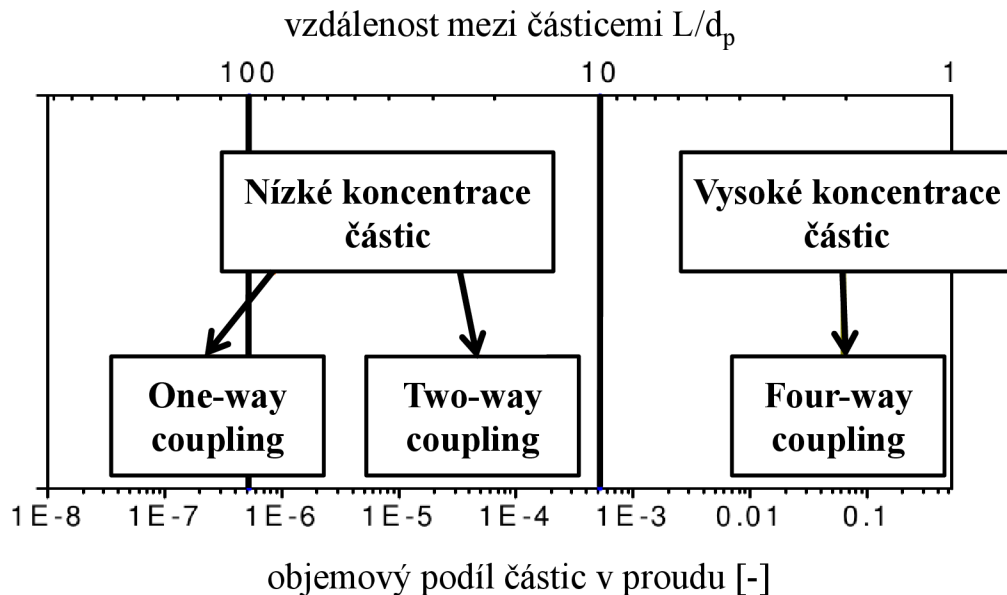
V řídkém proudu je koncentrace částic nízká a platí:

$$\tau_p < \tau_c \rightarrow \frac{\tau_p}{\tau_c} < 1, \quad (3.30)$$

zatímco v hustém proudu při vysokých koncentracích platí:

$$\tau_p > \tau_c \rightarrow \frac{\tau_p}{\tau_c} > 1. \quad (3.31)$$

Přehled režimů vzájemného ovlivnění fází při vícefázovém proudění typu tekutina-částice je na obrázku 3.11. Popišme si nyní jednotlivé režimy detailněji.



Obrázek 3.11: Interakce nosné a disperzní fáze v závislosti na koncentraci disperzní fáze. Převzato z [74]

### 3.5.1. One-way coupling

Při velmi nízkých koncentracích částic v proudu, kdy objemový podíl částic nepřesáhne hodnotu zhruba  $\alpha_p < 10^{-6}$ , lze vliv částic na nosnou fázi zanedbat. Vzájemné kolize částic také nastávají pouze ojediněle a nemusí být uvažovány. Z hlediska numerických simulací tento fakt znamená, že pro rozřešení pohybu nosné fáze nemusíme do modelu popisující její pohyb zahrnout vliv částic. V případech ustáleného proudění lze vyřešení pohybu částic provést až ve fázi zpracování výsledků (post-processing). Tento přístup je nazýván v odborné literatuře jako metoda trajektorií (z anglického *trajectory method* [10]). V případech použití metody RANS pro vyřešení pohybu nosné fáze, kdy jsou řešením v čase průměrné veličiny, je metoda trajektorií plně aplikovatelná. Vliv turbulentních fluktuací je do pohybu částic zahrnut pomocí *eddy life-time* modelu, který navrhl Yuu a kol. [89] a vylepšil Gosman a Ioannides [26] pro model turbulence  $k - \epsilon$ . Vliv turbulence je přidán generováním rychlostních fluktuací na základě turbulentní kinetické energie  $k$  a specifické disipace  $\epsilon$ .

Při řešení časově neustáleného proudění nelze použít metodu trajektorií pro určení pohybu částic. Musí být použita *discrete element method* [10]. Řešení pohybu částic probíhá simultánně s řešením nosné fáze. Při použití metody LES pro nosnou fázi je nutno použít tento přístup, neboť LES simulace je ze své podstaty vždy časově neustálená.

### 3.5.2. Two-way coupling

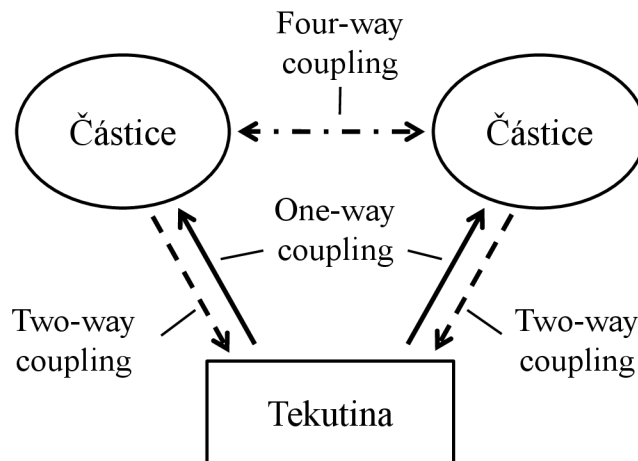
Přesáhne-li objemový podíl částic v proudu hodnotu  $\alpha_p > 10^{-5}$ , pak už vliv částic na proud nelze zanedbat. Při těchto koncentracích už dochází k ovlivnění nosné fáze disperzní fází. K vzájemným kolizím částice sice dochází častěji než v případě, kdy lze použít *one-way coupling*, ale jelikož čas mezi jednotlivými kolizemi částic je větší než relaxační čas částice a tudíž dominantní vliv na pohyb částice má interakce s tekutinou, tak mohou být vzájemné kolize částic zanedbány. Z pohledu turbulence může docházet vlivem přítomnosti částic v proudu buď k jejímu tlumení nebo buzení. Této problematice je věnována kapitola 3.6.

### 3.5.3. Four-way coupling

V režimu hustého proudu, kdy objemový podíl v proudu přesáhne hodnotu  $\alpha_p > 10^{-3}$ , už nelze zanedbat vliv vzájemných kolizí mezi částicemi. Frekvence srážek částic je vysoká a čas mezi nimi je menší než relaxační čas částice. To se dá interpretovat tak, že dříve než je částice ovlivněna okolní tekutinou, tak dojde ke srážce s jinou částicí. Na pohyb částic mají tedy dominantní vliv kolize s ostatními částicemi.

V numerických simulacích lze přistupovat ke kolizím dvojmým přístupem. První přístup je deterministický. Kolize částice se určuje na základě jejich trajektorií a průměru částic. V průběhu řešení jsou tedy přesně identifikovány pozice, kde ke kolizi dojde. Tento přístup je ovšem velmi výpočetně náročný a s rostoucím počtem částic jen velmi těžko aplikovatelný [79]. Druhý přístup je stochastický. Je založen na pravděpodobnosti kolizí, jež byla odvozena v teorii plynů pro mezimolekulární srážky. Tato metoda je nazývána jako *Direct Simulation Monte Carlo method* (DSMC). Pro vyhodnocení, zda nastane kolize či nikoli, je sledován pouze redukovaný počet částic a dle jejich vzájemné relativní rychlosti, poloměru a dalších parametrů je určena pravděpodobnost srážek [80].

Na obrázku 3.12 jsou schematicky znázorněny interakce mezi jednotlivými fázemi ve vícefázovém proudění typu nosná-disperzní fáze.



Obrázek 3.12: Schéma interakcí v systému nosná-disperzní fáze

### 3.6 Modulace turbulence částicemi

Tato kapitola je věnována problematice modulace turbulence částicemi. Jedná se tedy o přístup *two-way coupling*. Jak již bylo řečeno, při vyšších koncentracích částic dochází k ovlivnění nosné fáze fází disperzní. Vystává otázka, jak je nosná fáze ovlivněna. Z hlediska turbulence nosné fáze může dojít buď ke zvýšení míry turbulence vlivem přítomnosti disperzní fáze anebo naopak k tlumení. Následující podkapitoly obsahují rešerši jak experimentálního tak i numerického výzkumu provedeného v této oblasti.

#### 3.6.1. Experimentální výzkum

V minulých letech bylo provedeno hodně experimentálních prací zabývajících se problematikou modulace turbulence částicemi. Přehled těchto prací poskytuje Gore a Crowe [25]. Udělali přehled dostupných experimentálních dat zahrnující systémy plyn/pevná fáze, plyn/kapalina, kapalina/pevná fáze a kapalina/plyn v trubkách a tryskách. Jako hlavní parametr vhodný k rozhodnutí, zda je turbulence částicemi tlumena nebo buzena, určili poměr průměru částic a délkového měřítka turbulence. Zjistili, že pokud je tento poměr menší než 0,1, pak dochází k tlumení turbulence, při vyšším poměru je turbulence buzena. Práce se však nezabývá kvantitativními změnami turbulence, pouze udává, na kterých parametrech může změna intenzity turbulence záviset (3.32):

$$\% \text{změna intenzity} = f \left( \frac{\rho_p}{\rho}, \frac{\rho L \bar{U}}{\mu}, \frac{\rho U_R d_P}{\mu}, \frac{l_e}{d_P}, \frac{\sqrt{u'^2}}{U_R}, \phi \right). \quad (3.32)$$

Studii, jejímž cílem bylo i kvantitativní určení změny intenzity turbulence vlivem přítomností částic v proudu, provedli Kulick a kol. [38]. Uskutečnili řadu měření ve vertikálním kanálu plně vyvinutého turbulentního proudění obsahující částice. Částice v kanálu jsou rovnoměrně rozmístěny a měření byla provedena pro různé druhy částic a pro různé hmotnostní podíly částic až do 0,8. Zjistili, že rychlostní profil částic napříč kanálem je relativně plochý ve srovnání s rychlostním profilem nosné fáze. Tato skutečnost je způsobená silným příčným míchacím mechanismem. Rychlostní profil nosné fáze se nezměnil. Fluktuační rychlosti částic ve směru proudu

se ukázala být větší než ve směru příčném. Stupeň utlumení turbulence roste se Stokesovým číslem a hmotnostním podílem částic. Dále pomocí spektra turbulence ukázali, že turbulence je tlumena více v oblasti vysokých frekvencí. Se snižující se frekvencí už není útlum tak výrazný.

Fessler a Eaton [17] se zabývali experimentálním výzkumem modulace turbulence částicemi na složitější geometrii. Studovali změny turbulence na případu vertikálního zpětného proudu za schodem. Ve svém experimentu použili skleněné částice o průměru  $90\ \mu\text{m}$  a  $150\ \mu\text{m}$  a měděné částice o průměru  $70\ \mu\text{m}$ . Hmotnostní podíl částic v proudu činil až 40%. Zjistili, že míra utlumení turbulence částicemi roste se zvyšujícím se počtem částic v proudu. Kapitola 3.7 vychází z této práce a v této kapitole bude realizována numerická simulace tohoto experimentu.

### 3.6.2. DNS simulace

V posledních letech se metody Direct Numerical Simulation a Large Eddy Simulation ukázaly být velmi mocným nástrojem pro řešení dvoufázového proudění. Bylo provedeno hodně studií týkajících se two-way couplingu a modulace turbulence.

Squires a Eaton [75] provedli DNS simulaci buzené izotropní turbulence s částicemi. Ukázali, že těžší částice, jež hůře reagují na změnu proudu, mají rovnoměrnější rozložení než lehčí částice, tudíž způsobují více homogenní modifikace turbulentních veličin než lehké částice. Lehké částice mají tendence se shlukovat v oblastech vysokého smykového napětí a nízké vířivosti. Dospěli k závěru, že přídatný zdrojový člen v momentových rovnicích zohledňující vliv částic na nosnou tekutinu působí jako propad pro kinetickou energii turbulence. Disipace turbulence vzrostla díky přítomnosti malých částic a roste se zvyšujícím se hmotnostním podílem částic.

DNS simulace volně tlumené izotropní turbulence s částicemi realizovali Elghobashi a Truesdell [14]. Použili částice, jejichž relaxační čas je zhruba roven Kolmogorově časovému měřítku ( $\tau_p \approx \tau_K$ ). Ukázali, že za nepřítomnosti jiných působících sil (gravitace) částice předávají svůj moment hybnosti vysokým vlnovým číslům nosné látky, tudíž zvyšují obsah energie v malých měřítkách. Toto je doprovázeno zvýšením viskózní disipace a tudíž zvýšením přenosu energie z velkých měřítek proudu do malých měřítek (energetická kaskáda). V závislosti na počáteční rychlosti částic se může turbulentní kinetická energie zvýšit, ale pak dochází k jejímu rychlejšímu poklesu než v případě absence částic.

Ferrante a Elghobashi [16] na případu volně tlumené turbulence studovali mechanismy, jakými různě velké částice modifikují turbulenci.

Pohyb nosné fáze je popsán Navierovými-Stokesovými rovnicemi a rovnicí kontinuity. Navierovy Stokesovy rovnice použité v [14] a [16] mají tvar:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j u_i) = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i, \quad (3.33)$$

rovnice kontinuity:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (3.34)$$

Poslední člen v rovnici (3.33) je člen, který zohledňuje přítomnost částic v proudu.

$$f_i = \sum_{n=1}^N f_{n,i}. \quad (3.35)$$

Tento člen je roven záporně vzatým silám působícím na částice,  $f_{n,i}$  je  $i$ -tá složka síly působící na  $n$ -tou částici. Tyto síly vystupují v pohybových rovnicích popisujících pohyb částice. Uvažujeme-li pouze odporovou a gravitační sílu, pak tyto rovnice mají tvar [16]:

$$m_p \left( \frac{dv_i}{dt_p} \right) = m_p \frac{(u_i - v_i)}{\tau_p} + (m_p - m_f) g_i. \quad (3.36)$$

Síla  $f_{n,i}$  je rovna pravé straně rovnice (3.36).

### 3.6.3. LES simulace

Podobnou studii jako je [75] provedl Boivin a kol. [5]. Jedná se o LES simulaci buzené izotropní turbulence s částicemi. Použili částice, jejichž relaxační časy jsou velmi blízké Kolmogorově časovému měřítku, a různé hmotnostní podíly částic. Pro simulaci použili široké spektrum subgridních modelů. Nejprve provedli sérii *a priori* testů, při nichž přefiltrovali DNS data a následně pomocí subgridního modelu dopočítali disipaci a tzv. *backscatter* (přenos energie z oblasti malých měřítek do oblasti velkých měřítek, který se může v proudě vyskytnout). Tyto testy ukázaly, že nejvhodnější se jeví být dynamický smíšený model (kombinace dynamického modelu počítajícího turbulentní viskozitu a scale-similarity modelu). Výsledky tohoto modelu si jsou hodně blízké s DNS daty. U dynamického Smagorinského modelu vyzorovali, že se zvyšujícím se hmotnostním podílem částic v proudě roste hodnota Smagorinského konstanty  $C_S$ . Výsledky *a posteriori* testů tyto závěry potvrdili.

Velmi podrobnou studii proudění částic kanálem řešeným metodou Large Eddy Simulation poskytuje Yamamoto a kol. [87]. Tato práce nestuduje pouze vliv částic na proud (turbulenci), ale do výpočtů jsou zahrnuty i vzájemné kolize částic. Simulace byla provedena na případě proudění částic vertikálním kanálem, jenž bylo experimentálně zkoumané Kulickem a kol. [38]. Ukázal, že vzájemné kolize částic hrají nezanedbatelnou roli při tomto druhu proudění. V práci jsou uvedeny výsledky jak pro *two-way coupling*, tak i pro *four-way coupling* (vzájemné kolize částic). Vliv přítomnosti částic a jejich vliv na okolní proud je modelován podobně jako v [14] a [16]. Do Navierových-Stokesových rovnic se přidal zdrojový člen rovnající se záporně vzatým silám působících na částice. Tento člen je přidán do Navier-Stokesových rovnic, které jsou posléze přefiltrovány. Jako subgridní model by použit Smagorinského model s použitím Van Driestova tlumení, které zajistí nulovost Smagorinského konstanty na stěně:

$$\nu_{sgs} = (C_s f_s \Delta_s)^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, \quad (3.37)$$

kde  $C_S$  je Smagorinského konstanta,  $f_s = 1 - \exp(-y^+/25)$  je Van Driestova tlumící funkce a  $\Delta_s$  šířka filtru. Modulace turbulence částicemi není v subgridním modelu zahrnuta. Co se týče Lagrangeových pohybových rovnic pro částice, tak do nich jsou zahrnuty mimo odporové a gravitační síly také síla Magnusova a Saffmanova. Magnusova síla je způsobena rotací částice a Saffmanova síla je způsobena nenulovostí rychlostního gradientu kolem částice. Při proudění kanálem má Saffmanova síla své opodstatnění, protože v blízkosti stěny vzhledem k podmínce ulpívání není gradient rychlosti nulový.

Na rozdíl od výše zmíněných LES simulací (Boivin [5] a Yamamoto [87]), které vliv částic na proud modelují jenom pomocí přidavného členu do NS rovnic, je vliv částic zahrnut i do subgridního modelu. Takto upraven je Smagorinského model a dynamický Smagorinského model. Upravený Smagorinského model:

$$\nu_{sgs} = (C_s \Delta_s)^2 |\bar{S}| (1 + C_p \bar{\phi}_p), \quad (3.38)$$

hodnota konstanty  $C_p$  byla stanovena 0,9 na základě experimentálních výsledků. Veličina  $\bar{\phi}_p$  je hmotnostní podíl částic v proudě.

Další studii proudě vertikálním kanálem s částicemi provedl Vreman a kol. [83]. Objemový podíl částic v proudě byl roven 1,3%, což je hodnota relativně vysoká v kontextu moderních LES simulací dvoufázového proudění při použití Lagrangeova přístupu k popisu pohybu částic. Pro takto vysoké koncentrace bylo nutné i zahrnout vliv vzájemných kolizí částic do simulace. Výsledky ukázaly, že přítomnost disperzní fáze v proudě s tak vysokou koncentrací způsobí zploštění rychlostního profilu. Z porovnání výsledků získaných pomocí two-way a four-way couplingu vyplynulo, že zanedbání vzájemných kolizí částic má výrazný vliv na výsledné turbulentní statistiky proudě a tedy musí být uvažovány.

### 3.7 Zpětný proud za schodem

Numerické simulace zpětného proudu za schodem s částicemi jsou popsány v této kapitole. V rámci disertační práce byla provedena série simulací zpětného proudu za schodem s částicemi. Simulace byly provedeny pro různé druhy částic a různé koncentrace částic v proudu. Simulace jsou provedeny při použití *two-way couplingu*.

Zpětný proud za schodem je dobrý testovací případ pro verifikaci a validaci různých modelů transportu tekutiny, zejména pak turbulentních modelů. Geometricky se jedná o velice jednoduchou doménu sestávající z kanálu, jež se skokově rozšiřuje ve směru proudu. Proudění v této doméně má však velmi složitý charakter [81]. V místě náhlého rozšíření dochází k separaci proudu a vzniká směšovací vrstva. Na spodní straně za náhlým rozšířením pak dochází k opětovnému přilnutí proudu. Predikce bodu znovupřilnutí je velice náročný úkol z hlediska numerických simulací a turbulentních modelů. V některých případech může dokonce vznikat takzvaná separační bublina na horní straně domény [4].

#### 3.7.1. Experiment

Numerické simulace zpětného proudu za schodem s částicemi provedenými v rámci této disertační práce vychází z experimentální studie *Turbulence modification by particles in a backward-facing step flow*, kterou provedli Fessler a Eaton [17]. Výsledky simulací jsou porovnány s experimentálními daty uvedenými v jejich práci. Tato podkapitola obsahuje stručný popis experimentu, zejména partií, které jsou nutné pro realizaci numerické simulace. Detailní informace je možno nalézt v původní práci.

Geometrie oblasti sestává z kanálu 40 mm vysokého, jež se skokově na jedné straně rozšiřuje na 66,7 mm. Expanzní faktor (poměr výšky před rozšířením a po rozšíření) vychází tedy 5:3. Rozdíl výšek udává výšku shodu 26,7 mm. Délka náběžného kanálu před rozšířením je 5,2 m. Tato vzdálenost byla zvolena dostatečně dlouhá proto, aby došlo k ustálení proudu a k jeho přechodu do plně vyvinutého turbulentního proudění.

Reynoldsovo číslo proudu v náběžném kanále založené na půlce výšky kanálu 20 mm a osově rychlosti 10,5 m/s je 13 800. Po rozšíření je Reynoldsovo číslo rovno 18 400 (založeno na výšce schodu 26,7 mm a osově rychlosti 10,5 m/s). Parametry proudění jsou shrnuty v tabulce 3.1.

Tabulka 3.1: Parametry proudu

Proud náběžným kanálem		Zpětný proud za schodem	
Výška kanálu, $h$	40 mm	Výška schodu, $H$	26,7 mm
Osová rychlost, $U_0$	10,5 m/s	Expanzní faktor	5:3
$Re_h = \frac{U_0 h}{\nu}$	13 800	$Re_H = \frac{U_0 H}{\nu}$	18 400
$u_\tau$ , třecí rychlost	0,5 m/s	$\tau_f$ , Integrovaný časové měřítko, $5H/U_0$	12,7 ms
Kolmogorovo měřítko, $\eta$	170 $\mu\text{m}$		

Jako disperzní fáze v proudu byly použity tři druhy částic. Jedná se o skleněné částice o průměru 90  $\mu\text{m}$  a 150  $\mu\text{m}$  a měděné částice o průměru 70  $\mu\text{m}$ . Hustota skleněných částic je 2500 kg/m<sup>3</sup> a měděných 8800 kg/m<sup>3</sup>. Relaxační čas částice spočtený dle (3.26) vychází 61ms pro 90  $\mu\text{m}$  skleněné částice, 167 ms pro 150  $\mu\text{m}$  skleněné částice a 130 ms pro 70  $\mu\text{m}$  měděné částice. Tedy 90  $\mu\text{m}$  skleněné částice by měly nejlépe reagovat na změnu okolního proudu a být proudem více ovlivněny. Vlastnosti částic jsou uvedeny v tabule 3.2.

Tabulka 3.2: Vlastnosti částic

Poloměr částice [ $\mu\text{m}$ ]	90	150	70
Materiál částice	sklo	sklo	měd
Hustota [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]	2500	2500	8800
Relaxační čas dle (3.26) [ms]	61	167	130

Experiment byl proveden pro hmotnostní podíly částic v proudu o hodnotě 20% a 40%. Uvažujeme-li hustotu vzduchu  $1,2\text{kg}/\text{m}^3$ , pak objemový podíl skleněných částic v proudu vychází zhruba  $9,6 \cdot 10^{-5}$  pro 20% hmotnostní podíl a  $1,92 \cdot 10^{-4}$  pro 40% hmotnostní podíl. Pro takto vysoké objemové koncentrace částic v proudu by už mělo dojít k ovlivnění proudu částicemi.

Ještě je nutno zmínit se o orientaci domény. Aby byl potlačen vliv gravitace na pohyb částic a zabránilo se jejich usazování, byla doména umístěna vertikálně. Proudění probíhá tedy ve směru působení gravitačního zrychlení. Experiment byl proveden pro dostatečně vysokou rychlost proudu a částic a už nedochází k dalšímu urychlení vlivem gravitace. V dalších částech této práce je doména a proudění v ní zobrazovány v horizontálním uspořádání z důvodu lepšího využití místa.

### 3.7.2. Model

Pro řešení pohybu vzduchu (nosné fáze) byla použita metoda Large Eddy Simulation. Pohyb vzduchu je popsán pohybovými rovnicemi (3.39) a rovnicí kontinuity:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - f_i, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.40)$$

Proudění nosné fáze je považována za nestlačitelné. V tomto případě se jedná o proudění při relativně malých rychlostech ( $\text{Ma} < 0.04$ ). Stlačitelnost hraje důležitou roli až při rychlostech vyšších ( $\text{Ma} > 0.3$ ). Materiálové vlastnosti vzduchu byly určeny při teplotě  $20^\circ\text{C}$ . V původním článku popisující experiment, ze kterého simulace vycházejí, není žádná zmínka ani o materiálových vlastnostech ani o podmínkách, při kterých byl experiment proveden. Hodnota  $20^\circ\text{C}$  se jeví jako reálná, avšak může se od skutečnosti drobně lišit. Tlak vzduchu byl uvažován  $101\,325\text{ Pa}$ . Při těchto podmínkách je hustota vzduchu  $\rho = 1,2\text{ kg}/\text{m}^3$  a kinematická viskozita  $\nu = 1,526 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ .

Poslední člen v rovnici (3.39) je tak zvaný *coupling* člen. Pomocí tohoto členu je zahrnut vliv částic na nosnou fázi. Velikost tohoto členu je určena pomocí principu akce a reakce. Kapalina působí na částici nějakou silou a dle akce a reakce stejnou silou působí i částice na kapalinu. Coupling člen je tedy roven záporně vzaté síle působící na částice a je definován jako:

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{x}_n} f_{n,i}, \quad (3.41)$$

kde  $\delta_{\mathbf{x}, \mathbf{x}_n}$  je Diracovo delta:

$$\delta_{\mathbf{x}, \mathbf{x}_n} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n). \quad (3.42)$$

$\mathbf{x}_n$  je pozice  $n$ -té částice. Tato přídatná síla má tedy nenulovou hodnotu pouze v místech, kde se nachází částice, všude jinde je nulová. Pohyb částic je popsán Lagrangeovým přístupem. Pro každou částici je sestavena na základě Newtonova druhého pohybového zákona pohybová rovnice. Mezi síly působící na částice byly zahrnuty pouze síla odporová a gravitační. Pro vyhodnocení odporového součinitele částice byla použita standardní korelace pro částice s Reynoldsovým číslem větším než jedna, viz vztah 3.9. Pohybová rovnice pro  $n$ -tou částici má tvar:

$$\frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}_n, t) - \mathbf{v}_n}{\tau_p} (1 + 0.15\text{Re}_p^{0,687}), \quad (3.43)$$

kde  $\mathbf{v}_n$  je rychlost  $n$ -té částice,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_n, t)$  rychlost kapaliny v pozici částice  $\mathbf{x}_n$ ,  $\tau_p = \rho_p d_p^2 / (18\rho_f \nu)$  je relaxační čas částice.

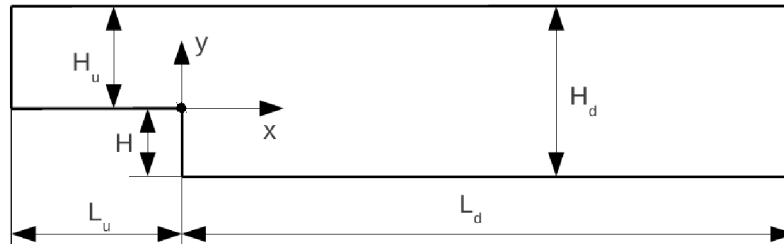
Pro výpočet tenzoru subgridních napětí  $\tau_{ij}$  byl použit Smagorinského model:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} = -2\nu_t \bar{S}_{ij}, \quad \nu_t = (C_S \Delta)^2 |\bar{S}|, \quad (3.44)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.45)$$

kde  $|\bar{S}| = |2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}|^{1/2}$ .

### Výpočetní doména a síť



Obrázek 3.13: Výpočetní doména

Tabulka 3.3: Rozměry výpočetní oblasti

Výška kanálu $H_u$	40 mm
Délka kanálu $L_u$	120 mm (3 $H_u$ )
Výška schodu $H$	26,7 mm
Výška za schodem $H_d$	66,7 mm
Délka za schodem $L_d$	540 mm (14 $H$ )
Expanzní faktor	5:3 ( $H:H_d$ )

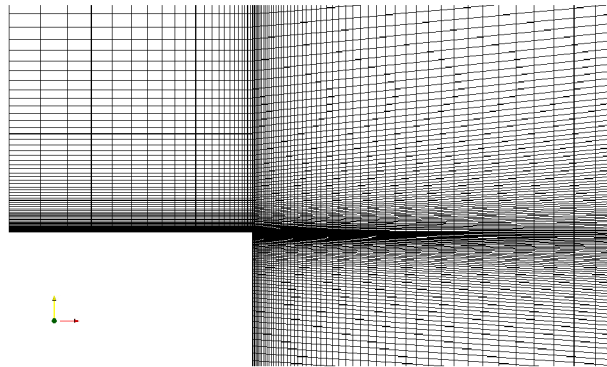
Před generováním výpočetní sítě bylo pro potřeby simulace nutné učinit omezení oblasti, na níž byl proveden experiment. Poměr šířky domény k výšce schodu byl na experimentální geometrii 17:1. Takto široká oblast byla zvolena z důvodu eliminace vlivu bočních stěn. Uprostřed



šířky domény už není proud bočními stěnami ovlivněn a lze tedy výsledné statistiky proudu považovat za dvojdimenzionální. Z hlediska numerických simulací pomocí Large Eddy Simulation je takto velká šířka domény komplikující faktor. Výpočet nelze provést na jednoduché dvourozměrné síti. Turbulence je děj ze své podstaty trojrozměrný. Metoda Large Eddy Simulation na rozdíl od metody RANS, která skoro celé energetické spektrum modeluje, řeší turbulenci přímo s výjimkou nejmenších měřítek (tj. většina energetického spektra je rozřešena výpočetní sítí) a omezení do dvou dimenzí by způsobilo značnou nepřesnost simulace.

Rozřešení proudění v celé experimentální doméně by vyžadovalo výpočetní síť s velice mnoho buňkami potřebnými pro pokrytí celé domény a s nutným zjemněním směrem k bočním stěnám. Z toho důvodu bylo přistoupeno k simulaci pouze výseku o šířce 120 mm. Na bocích výpočetní domény pak byly předepsány periodické okrajové podmínky. Nastavení simulace odpovídá konfiguraci nekonečně široké domény a tedy bez vlivu bočních stěn.

Pro potřeby simulace byla vytvořena hexahedrální výpočetní síť. Pro tvorbu sítě byl použit generátor sítě *blockMesh*, jež je součástí balíku OpenFOAM. Jedná se o blokově strukturovanou výpočetní síť. Směrem ke stěnám se síť zjemňuje za účelem splnění podmínky  $y^+ \approx 1$ , která je nutná pro přesné rozřešení přístěnné oblasti. Kvůli zjemnění sítě na straně schodu dochází k proniknutí zjemnění i do prostoru volného proudu a to má pak za následek prudký nárůst maximálního Courantova čísla. Oblast směšovací vrstvy je taktéž dostatečně rozřešena v důsledku přechodu z jemné sítě u stěny náběžného kanálu do prostoru za schodem. Detail výpočetní sítě v blízkosti odtokové hrany je na obrázku 3.14.



Obrázek 3.14: Detail výpočetní sítě na odtokové hraně

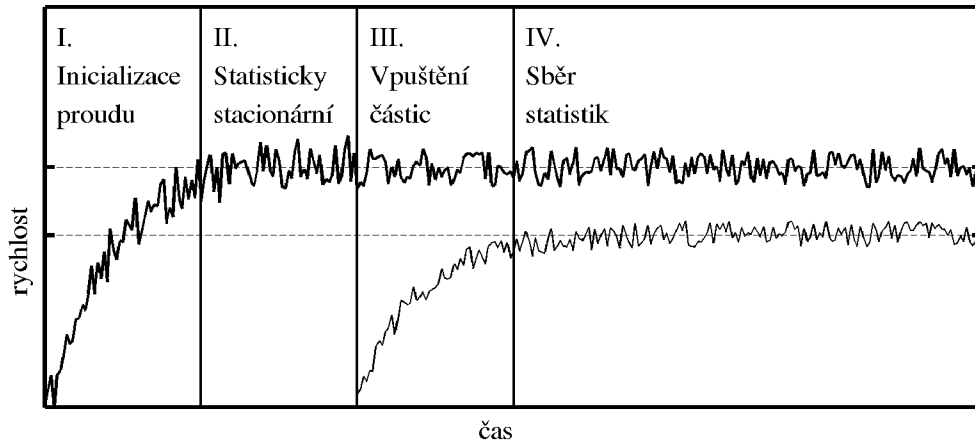
Výpočetní síť sestává celkově z 2 340 000 hexahedrálních buněk. U stěny je splněna podmínka  $y^+ < 1$ . Od stěny dále velikost buněk ve směru kolmém na stěnu postupně roste s expanzním faktorem 1,06. Zjemnění buněk ve směru po proudu v náběžném kanále k odtokové hraně probíhá s expanzním faktorem 1,13. Maximální velikost buňky je ve směru po proudu  $\Delta x^+ \approx 28$  a ve směru příčném  $\Delta z^+ \approx 13$ .

### 3.7.3. Posloupnost výpočtu

V této podkapitole bude popsána posloupnost řešení zpětného proudu za schodem s částicemi, a jak byly získány jednotlivé výsledky. Detailní popis postupu vyhodnocování výsledných statistik proudu s částicemi je nezbytný pro zpracovávání výsledků získaných pomocí metody LES. Metoda LES řeší vždy neustálené proudění. Na rozdíl od metody RANS, kdy je výsledkem v čase průměrné pole rychlosti, tlaku a jiných veličin a turbulence je reprezentována např. polem turbulentní kinetické energie a specifické disipace ( $k-\epsilon$  model) nebo frekvencí vírů ( $k-\omega$  model), je nutné turbulentní statistiky získat časovým průměrováním okamžité rychlosti v průběhu výpočtu. Vzájemné porovnání okamžitých rychlostí nemá valný smysl, protože tato charakteris-

tika v sobě neobsahuje informaci o průměrné hodnotě a její variabilitě. Volba časového intervalu, po který budou počítány statistiky proudu, má velice zásadní vliv na statistiky samotné, ale také i na dobu potřebnou pro samotný výpočet.

Posloupnost výpočtu lze rozdělit do několika fází. Na obrázku 3.15 je schematicky znázorněn průběh rychlosti v čase v jednotlivých fázích výpočtu.



Obrázek 3.15: Schématické znázornění posloupnosti výpočtu

### Fáze 0: Předběžná simulace

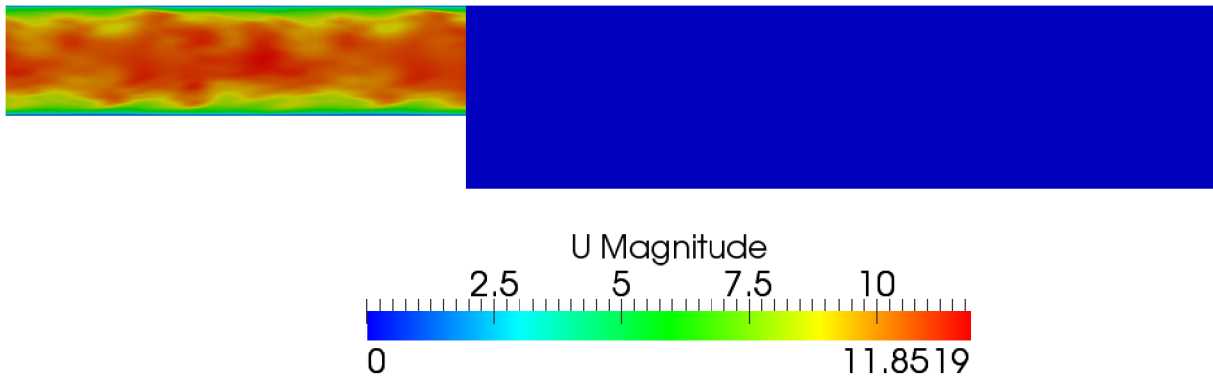
Před samotným výpočtem zpětného proudu za schodem s částicemi byla provedena simulace pouze náběžného kanálu. Simulace byla provedena s periodickými okrajovými podmínkami ve směru po proudu a při použití schématu buzení turbulence představeného v kapitole 2.4. Jediným účelem této simulace bylo získání plně vyvinutého turbulentního proudění v této části domény.

### Fáze I: Inicializace proudu

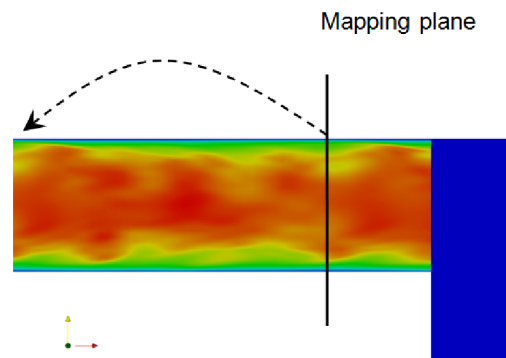
Poté, co byla ukončena fáze 0, začala fáze inicializace proudu. V tuto chvíli už bylo přistoupeno k simulaci zpětného proudu za schodem. Okamžité rychlostní pole plně vyvinutého turbulentního proudu v náběžném kanálu získané ve fázi 0 bylo přeneseno do geometrie zpětného schodu. Za schodem byla ponechána rychlost nulová. Takto vzniklé pole bylo použito jako počáteční podmínka pro výpočet. Počáteční rychlostní pole (velikost rychlosti) je zobrazeno na obrázku 3.16.

Dále je nutné, aby na vstupu do domény zpětného proudu za schodem byla generována turbulence. Jak je ukázáno v kapitole 2.2, správná reprezentace turbulence na vstupu do domény má zásadní vliv na výsledný charakter proudu. Z toho důvodu byla ve vzdálenosti 80 mm za vstupem do domény nadefinována rovina, ze které je rychlost přenášena zpět na vstup. Toto nastavení je tedy ekvivalentní použití předběžné simulace pro generaci turbulence na vstupu, jak je prezentováno na obrázku 2.9. Rovina, ze které se přenáší rychlost zpět na vstup, má stejnou roli jako periodické okrajové podmínky v případě předběžné simulace. Přenášení rychlosti z roviny za vstupem do domény zpět na vstup je schematicky znázorněno na obrázku 3.17.

Průměrování a výpočet rychlostních fluktuací byly v této fázi vypnuty. V této fázi dochází k vývinu proudu z počáteční podmínky a přechodu proudu do statisticky ustáleného stavu. Začne-li sběr statistik v době, kdy proud ještě není dostatečně vyvinut a nedosáhl statisticky stacionárního stavu (tj. stavu, kdy jsou už statistiky proudu v čase neměnné), tak by došlo



Obrázek 3.16: Počáteční podmínka pro rychlost



Obrázek 3.17: Schéma přenosu rychlosti z roviny za inletem zpět na inlet

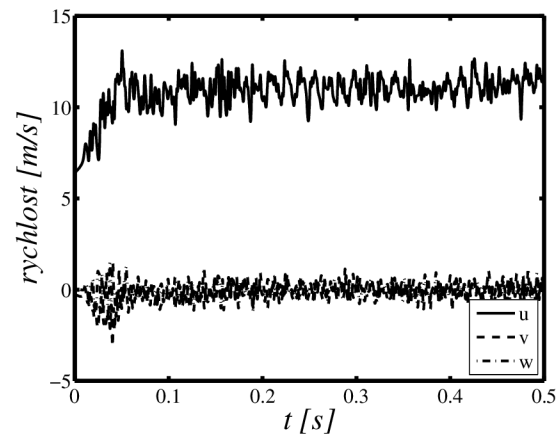
k výraznému ovlivnění statistik proudu a výpočet by musel běžet velmi dlouhou dobu, aby vymizel vliv této přechodové fáze ve výsledných statistikách.

Tato fáze trvala 0,5 s. Po této době přešel proud do statisticky stacionárního stavu. Na obrázku 3.18 je znázorněn vývin jednotlivých složek rychlosti v čase po dobu prvních 0,5 sekundy z počáteční podmínky zobrazené na obrázku 3.16. Jedná se o záznam rychlosti v bodě o souřadnicích (0,0534; 0,02; 0)m. Tento bod je umístěn ve vzdálenosti  $x/H = 2$  od schodu a ve výšce odpovídající polovině výšky náběžného kanálu. Z obrázku je patrné, že do statisticky ustáleného stavu proud přešel už po 0,1 s. Po této době záznam rychlosti v čase už nevykazuje žádné trendy a dochází pouze k “oscilaci” kolem průměrné hodnoty. Obdobné chování bylo pozorováno ve více bodech nacházejících se ve výpočetní doméně.

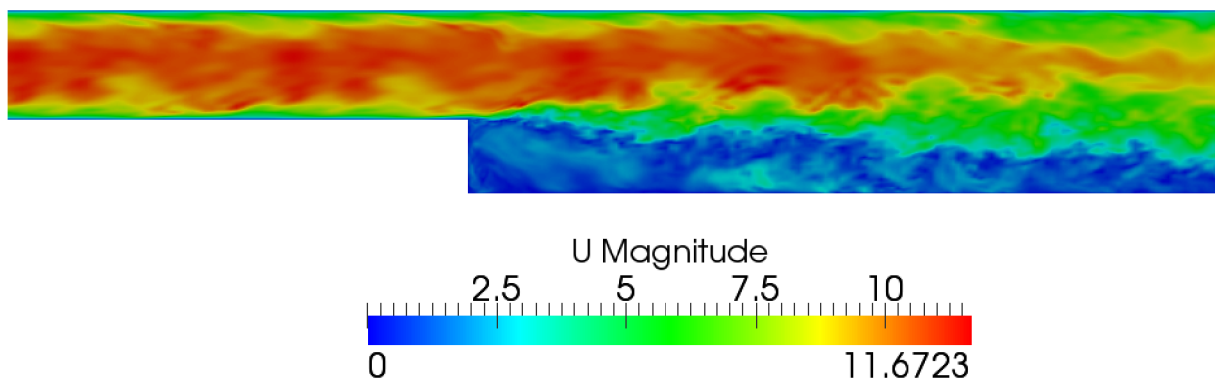
## Fáze II: Statisticky stacionární proud

V této fázi je už proud ve statisticky stacionárním stavu a může začít sběr statistik. Okamžitá rychlost v jednom okamžiku v této fázi je na obrázku 3.19. Proud už je plně vyvinut v celé oblasti. Částice v této fázi v proudu přítomny nejsou.

V rámci této fáze bylo odsimulováno 1,5 s proudění. Po tuto dobu byla počítána průměrná rychlost v čase a rozptyl rychlosti. V průběhu výpočtu byl sledován vývoj těchto statistik v čase. Po určité době došlo k jejich ustálení a dále se už nemění. V tuto chvíli byla tato fáze ukončena.



Obrázek 3.18: Vývoj rychlosti po dobu 0.5s



Obrázek 3.19: Plně vyvinutý zpětný proud za schodem

Vývoj průměrné rychlosti v čase v bodě o poloze  $x/H = 2$  a  $y/H = 0.75$  je zobrazen na obrázku 3.20. Je patrné, že 1,5 s simulace je dostatečná doba pro ustálení průměrné rychlosti a rozptylu. Sice ještě dochází k drobným výchyilkám, ale ty už nejsou významné.

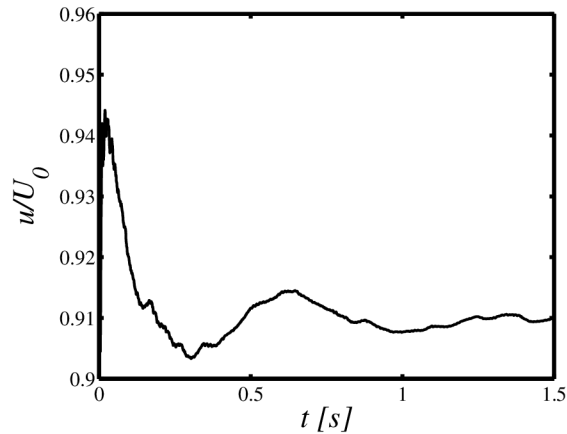
### Fáze III: Vpuštění částic

Předchozí fáze zahrnovaly pouze jednofázové proudění vzduchu doménou. Po ukončení sběru statistik jednofázového proudění jsou do domény vpuštěny částice. Částice vstupují do domény na rovině vstupu. Vstupní pozice jsou určeny rovnoměrně náhodně v rovině vstupu. Počáteční rychlost částice byla identická s hodnotou rychlosti vzduchu v poloze částice.

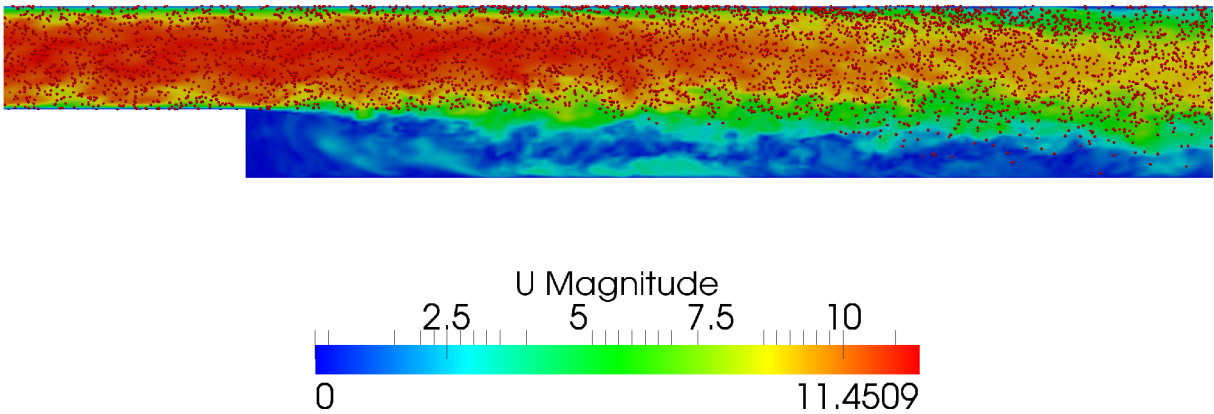
### Fáze IV: Sběr statistik dvoufázového proudu

V této fázi dochází k sběru statistik proudu s částicemi. Počáteční konfigurace na začátku této fáze je vyobrazena na obrázku 3.21. Průměrování rychlosti bylo aktivováno a simulace běžela po dobu 1,5 s.

Celkově bylo provedeno šest simulací s částicemi – dva typy částic (průměr  $90 \mu\text{m}$  a  $150 \mu\text{m}$  skleněné částice a tři různé hmotnostní podíly částic v proudu). Fáze 0, I a II jsou pro všechny



Obrázek 3.20: Vývoj průměrné rychlosti v čase



Obrázek 3.21: Počáteční stav simulace s částicemi

simulace stejné, nejsou závislé na částicích, a tedy tyto fáze byly realizovány pouze jednou. Fáze III a IV byly provedeny pro každou simulaci s částicemi zvlášť.

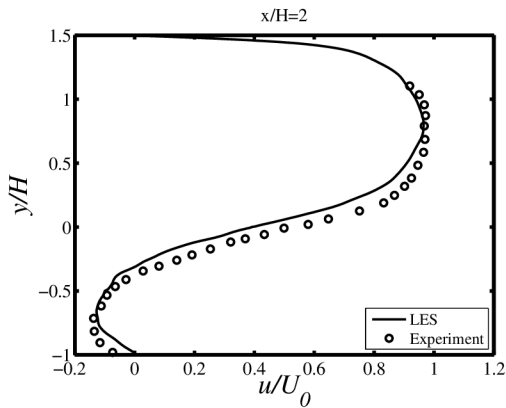
#### 3.7.4. Výsledky jednofázového proudění

Výsledky jednofázového zpětného proudu za schodem jsou prezentovány v této kapitole. Statistiky proudu jsou získány ve fázi II, kdy je proud už ve statisticky stacionárním stavu. Průměrné rychlosti a fluktuace rychlosti byly získány časovým průměrováním a výpočtem rozptylu aktuálního rychlostního pole po časový interval o délce 1,5s.

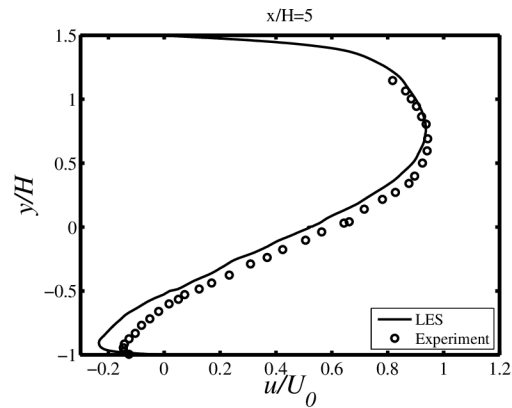
Na obrázcích 3.22 až 3.25 jsou vyobrazeny rychlostní profily v různé vzdálenosti od schodu. Plná čára reprezentuje výsledek LES simulace bez částic. Experimentální výsledky jsou znázorněny pomocí kroužků.

Na obrázku 3.22 je rychlostní profil ve vzdálenosti  $x/H = 2$  za schodem. Shoda LES simulace a experimentu je velice dobrá. Maxima i minima podélné složky rychlosti jsou předpověděny velice přesně. Jen je zde patrný mírný posun proudu směrem k horní straně domény. Tento posun je patrný i na rychlostním profilu v pozici  $x/H = 5$  za schodem (obrázek 3.23). V horní části

domény ( $y/H > 0$ ) je rychlost z LES simulace velmi blízko výsledkům experimentu. V úplavu už tak dobrá shoda nenastává. Dochází zde k nadhodnocení rychlosti zpětného proudu.

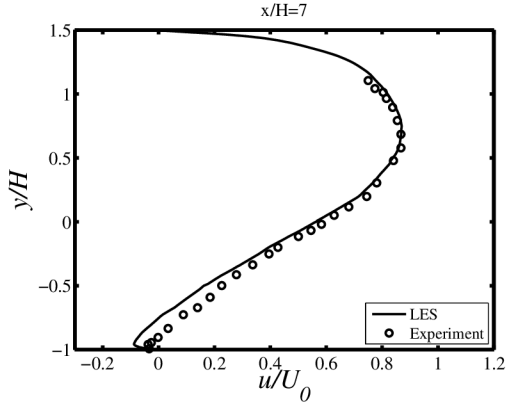


Obrázek 3.22: Rychlostní profil v pozici  $x/H = 2$  za schodem

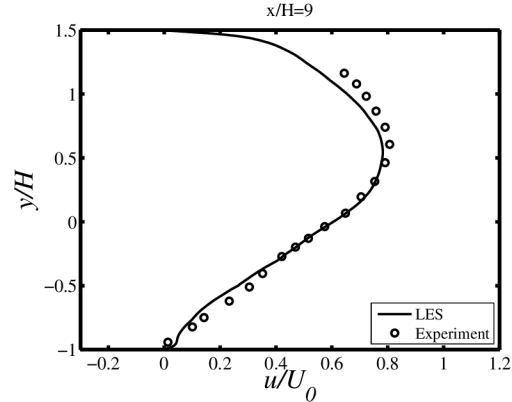


Obrázek 3.23: Rychlostní profil v pozici  $x/H = 5$  za schodem

Pozice  $x/H = 7$  (obrázek 3.24) je už velmi blízko k bodu opětovného přilnutí proudu na spodní stěnu domény. Podélná složka rychlosti zde dosahuje už skoro nulové hodnoty. Rychlost zpětného proudu z LES simulace je i zde větší než v experimentu. Tento fakt se projeví tím, že pozice opětovného přilnutí proudu bude LES simulací nadhodnocena. Je to přímý následek posunu proudu směrem k horní straně domény, k němuž došlo v předchozí části domény. V pozici  $x/H = 9$  za schodem je už proud přilnut (kladná rychlost po celé výšce). I zde je patrná velmi dobrá shoda LES simulace a experimentu.



Obrázek 3.24: Rychlostní profil v pozici  $x/H = 7$  za schodem

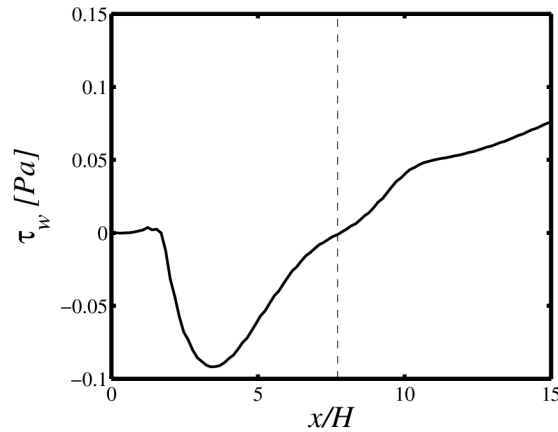


Obrázek 3.25: Rychlostní profil v pozici  $x/H = 9$  za schodem

Na obrázku 3.26 je zobrazen průběh smykového napětí na spodní stěně domény. Toto napětí je definováno jako:

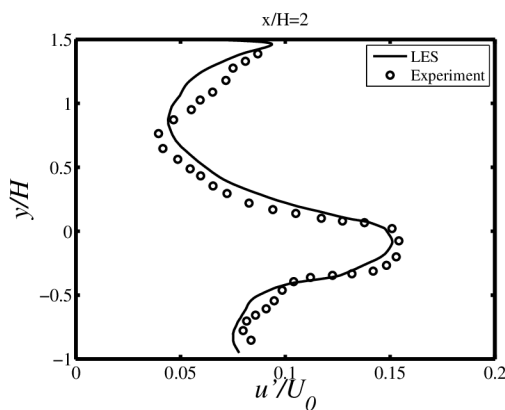
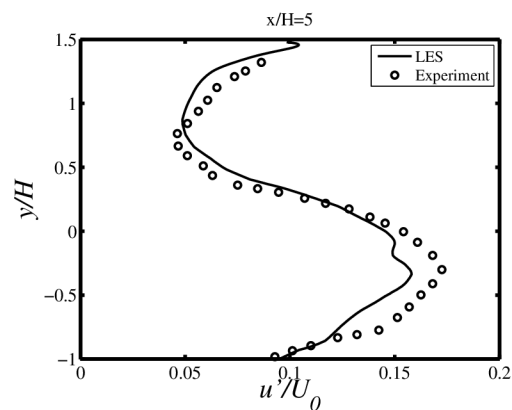
$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.46)$$

Do tohoto vzorce byla za rychlost  $u$  dosazena v čase průměrná podélná složka rychlosti. V místě, kde je smykové napětí na stěně rovno nule, dochází k opětovnému přilnutí proudu na stěnu. Průběh smykového napětí na spodní stěně nabývá nulové hodnoty v pozici  $x/H = 7,71$ . V článku popisující experiment je uvedena hodnota pozice bodu opětovného přilnutí  $x/H = 7,4$ . Předpověděná hodnota ze simulace se od hodnoty zjištěné experimentálně liší o 4,2%.

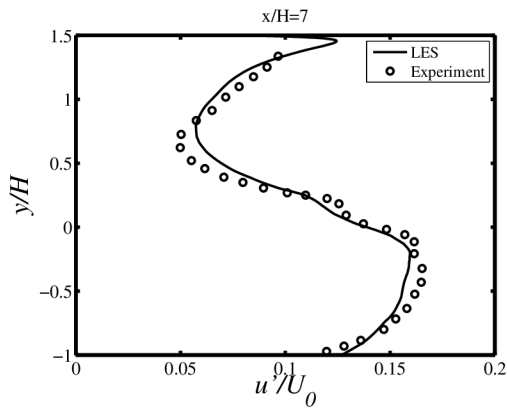


Obrázek 3.26: Průběh smykového napětí na stěně za schodem

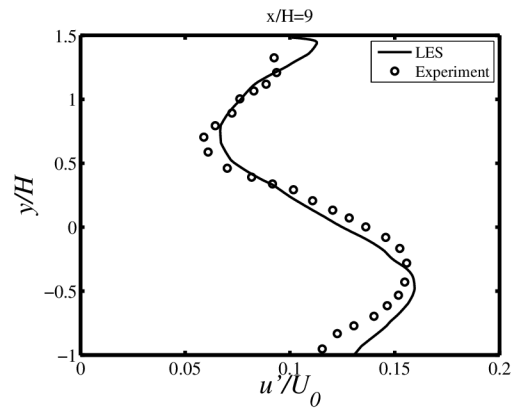
Fluktuace podélné složky rychlosti po výšce kanálu po rozšíření jsou znázorněny na obrázcích 3.27 až 3.30. Ve všech sledovaných pozicích  $x/H = 2, 5, 7$  a  $9$  je patrná dobrá kvalitativní shoda LES simulace s experimentem. Na grafu fluktuace rychlosti v pozici  $x/H = 2$  (obrázek 3.27) je možno pozorovat jiný tvar lokálních minim a maxim. Zatímco v experimentu nastává minimum fluktuace podélné složky rychlosti ve výšce  $y/H = 0,8$ , tak výška minima z LES simulace je  $y/H = 0,95$  a průběh křivky minimum nemá tak výrazný ohyb jak v případě experimentu. Podobný trend je možno pozorovat i v ostatních pozicích.

Obrázek 3.27: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 2$  za schodemObrázek 3.28: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 5$  za schodem

Na obrázcích 3.27, 3.28 a 3.29 pro pozice  $x/H = 2, 5$  a  $7$  je opět patrný odklon osy proudu směrem k horní stěně výpočetní oblasti. Tento jev byl už pozorován v grafech průběhu průměrné podélné složky rychlosti po výšce kanálu. Tento odklon může být způsoben nadhodnocením míry turbulence proudů v simulaci. V případě, kdy nejsou v proudě obsaženy žádné fluktuace, tj. proud lze považovat za laminární (viz podkapitola 2.2), dochází k výrazně jinému charakteru proudů. Proud je daleko více sklopen k spodní straně kanálu za schodem. Na protější straně dochází i ke vzniku separační bubliny. Je-li proud v náběžném kanále plně turbulentní, tak k výraznému odklonu nedochází. Je to způsobeno právě přítomností rychlostních fluktuací v proudě. Z teorie mezních vrstev vyplývá, že turbulentní mezní vrstva je daleko méně náchylná k separaci při proudění v nepříznivém tlakovém gradientu ( $\partial p/\partial x > 0$ ) než vrstva laminární



Obrázek 3.29: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 7$  za schodem



Obrázek 3.30: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 9$  za schodem

[88]. V turbulentní mezní vrstvě má výrazný vliv příčný míchací mechanismus, který tuto vrstvu stabilizuje. Na základě těchto skutečností se lze tedy domnívat, že jiný odklon proudu v LES simulaci je způsoben nadhodnocením rychlostních fluktuací. Na obrázcích 3.27, 3.28 a 3.29 můžeme pozorovat nadhodnocení rychlostních fluktuací v horní části regionu.

Na základě zde prezentovaných výsledků lze říci, že přesnost výsledků LES simulace jednofázového zpětného proudu za schodem je dostatečná. Nyní lze tedy přistoupit k simulaci proudu s částicemi.

### 3.7.5. Výsledky dvoufázového proudění pro $90\ \mu\text{m}$ částice

V následujících podkapitolách jsou uvedeny výsledky simulací proudu s částicemi. Nejprve budou prezentovány výsledky pro proud s přítomností  $90\ \mu\text{m}$  skleněných částic a potom výsledky pro proud se  $150\ \mu\text{m}$  skleněnými částicemi.

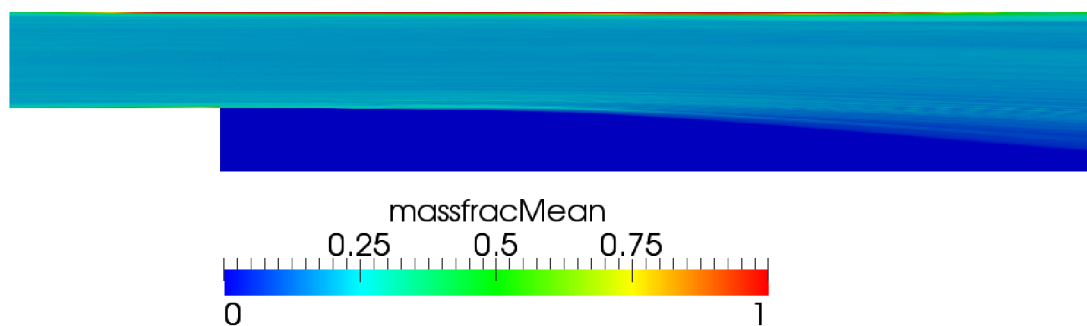
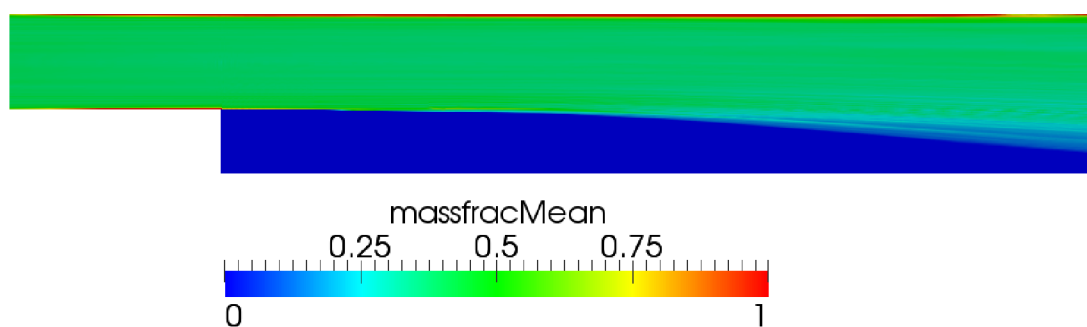
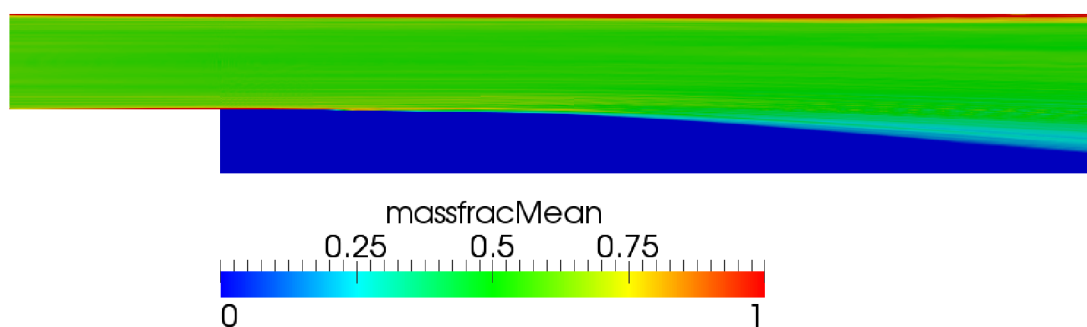
Ve fázi II simulace proudu byly zjištěny statistiky proudu bez částic. Následují fáze simulace proudu s částicemi.

Ve fázi III jsou do domény vpuštěny částice. Částice do domény vstupují na rovině vstupu. Počáteční pozice částice je určena rovnoměrně náhodně na rovině vstupu. Vstup do domény má obdélníkový tvar. Byla tedy vygenerována dvě náhodná čísla v rozmezí délky a výšky vstupního průřezu a tato byla použita k oby vstupní pozice částice. Generace náhodných čísel probíhala při použití rovnoměrného rozložení. Rychlost vstupující částice byla inicializována na hodnotu rychlosti tekutiny v pozici částice. Jakmile první částice opustily doménu, tak byla fáze III ukončena.

Sběr statistik proudu s částicemi probíhá ve fázi IV. Tato fáze trvá stejně jako fáze II, ve které probíhal sběr statistik proudu bez částic, 1,5 s. Po tomto časovém okamžiku byla počítána v čase průměrná rychlost a rozptyl rychlosti.

Na obrázcích 3.31 až 3.33 je zobrazeno pole v čase průměrného hmotnostního podílu  $\phi$   $90\ \mu\text{m}$  částic v proudu pro hodnoty hmotnostních podílu  $\phi = 20\%$ ,  $40\%$  a  $60\%$ . Na těchto obrázcích je patrné, že  $90\ \mu\text{m}$  skleněné částice nejsou výrazně ovlivněny unášejícím vzduchem. Lze si povšimnout, že většina částic je v hlavním proudu. Do úplavu vzniklým za schodem se dostane pouze velmi omezené množství částic. Vyobrazení hmotnostního podílu pro vyšší koncentrace má stejný charakter, pouze se zvyšuje hodnota hmotnostního podílu. Dále je patrný postupný nárůst koncentrace částic v blízkosti horní strany domény. Jedním z možných vysvětlení tohoto jevu je tak zvaná turboforeze (z anglického turbophoresis). Vlivem tohoto jevu dochází k pohybu částic v turbulentním proudu směrem ke stěnám. Bylo ukázáno, že tento



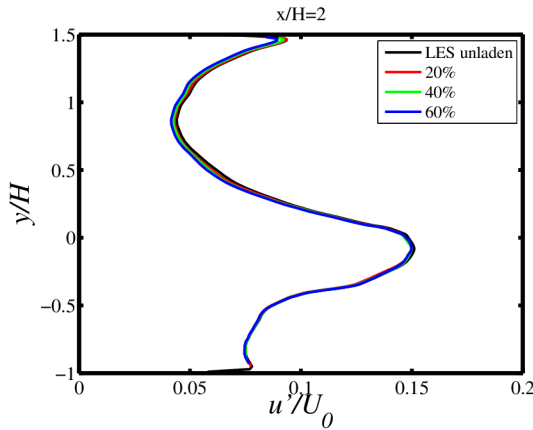
Obrázek 3.31: Průměrný hmotnostní podíl  $90\ \mu\text{m}$  částic v proudu pro  $\phi=20\%$ Obrázek 3.32: Průměrný hmotnostní podíl  $90\ \mu\text{m}$  částic v proudu pro  $\phi=40\%$ Obrázek 3.33: Průměrný hmotnostní podíl  $90\ \mu\text{m}$  částic v proudu pro  $\phi=60\%$ 

jev je možno pozorovat i při numerických simulacích proudu s částicemi pomocí metod DNS a LES [37].

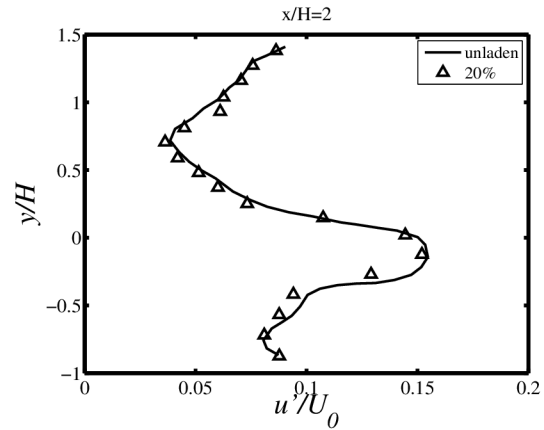
Co se týká v čase průměrného rychlostního pole proudu s částicemi, tak to není vlivem přítomnosti částic v proudu ovlivněno. Tento fakt je plně v souladu s experimentálními studiemi

a i numerickými simulacemi [38], [17], [87], [83].

Míra turbulence je však částicemi ovlivněna. Na obrázcích 3.34 až 3.41 je zobrazen profil fluktuace podélné složky rychlosti napříč kanálem v pozicích za schodem  $x/H = 2, 5, 7$  a  $9$ . Graf vlevo obsahuje výsledek LES simulace, vpravo je pro porovnání výsledek experimentu. Výsledek LES simulace a experimentu není uveden v jednom grafu z důvodu zhoršení přehlednosti a názornosti grafu obsahujícího větší množství křivek. Přímé porovnání těchto veličin proudu bez částic bylo provedeno v předchozí kapitole, a jelikož tato statistika není přítomností částic ovlivněna natolik, aby se zásadně změnil její charakter, tak je i z tohoto důvodu od přímého porovnání LES simulace a experimentu upuštěno.



Obrázek 3.34: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 2$  za schodem s  $90\mu\text{m}$  částicemi - LES simulace

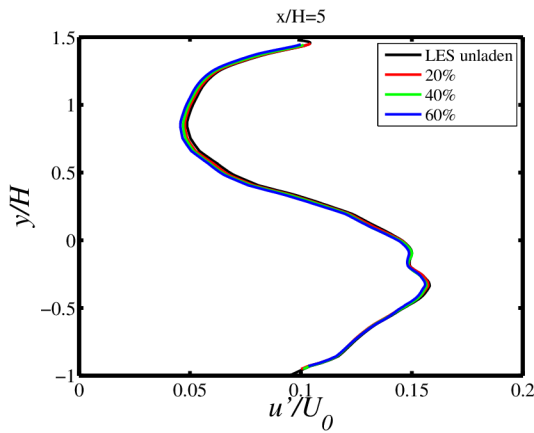


Obrázek 3.35: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 2$  za schodem s  $90\mu\text{m}$  částicemi - experiment

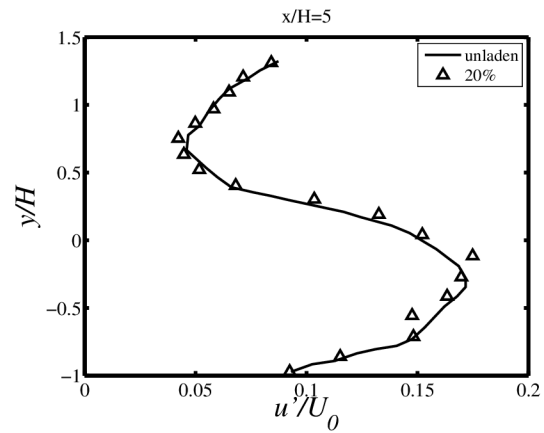
Na dvojici obrázků 3.34 a 3.35 je srovnání fluktuace podélné složky rychlosti proudu s přítomností  $90\mu\text{m}$  skleněných částic o hmotnostních podílech 20%, 40% a 60%. Bohužel v článku popisující experiment jsou uvedena data pouze pro hmotnostní podíl částic v proudu 20%. Data pro vyšší koncentrace částic uvedena nejsou. Na výsledku LES simulace je vliv částic malý, ale patrný. V horní části domény  $y/H > 0$  dochází k mírnému tlumení turbulence. S rostoucí koncentrací částic v proudu roste i míra utlumení. Ve výšce  $y/H = 0,85$  je míra utlumení turbulence rovna zhruba 2% pro 60% hmotnostní podíl částic v proudu. V dolní části domény není turbulence nikterak ovlivněna. Zřejmě je to způsobeno faktem, že se do této oblasti nedostanou skoro žádné částice. Bohužel ze srovnání s experimentem nelze usuzovat žádné závěry. K tlumení turbulence zde dochází v části regionu  $0 < y/H < 0,75$  a pak ještě v úplavu  $-0,75 < y/H < -0,25$ .

V pozici  $x/H = 5$  za schodem opět dochází k tlumení turbulence pouze v horní části domény, kde se pohubuje většina částic. Ve zbylé části turbulence ovlivněna není. Experimentální data také vykazují jistou míru tlumení turbulence v horní části, ale na rozdíl od LES simulací nedochází k tlumení turbulence po celou horní část  $y/H > 0$ . Je ovšem třeba brát v potaz, že tlumení turbulence je pro tento typ a koncentraci částic velmi malé a statistická variabilita výsledků experimentu může být větší a tudíž lze jen stěží rozlišit nepřesnost měření a míru utlumení turbulence. V oblasti směšovací vrstvy dochází naopak k nárůstu intenzity turbulence. Tento jev simulace nepostihla.

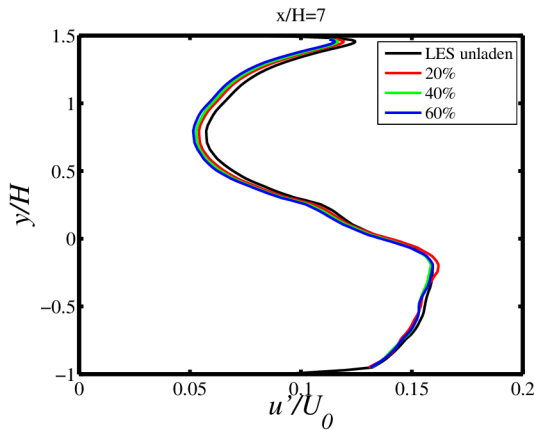
Pro pozice  $x/H = 7$  a  $x/H = 9$  (obrázky 3.38 až 3.41) platí podobná situace jako pro předešlé pozice. V LES simulacích dochází k tlumení turbulence v horní části regionu, úplav zůstává nedotčen. Ve vzdálenosti  $x/H = 9$  za schodem je oblast tlumení turbulence částicemi větší ( $y/H > -0,2$ ). Výsledky experimentu také naznačují, že v horní části domény je turbulence mírně potlačena. Ve směšovací vrstvě je turbulence opět buzena. V LES simulaci pro pozici  $x/H = 7$  a koncentraci částic 20% je možno pozorovat v místě  $y/H \approx -0,1$  lokální nárůst



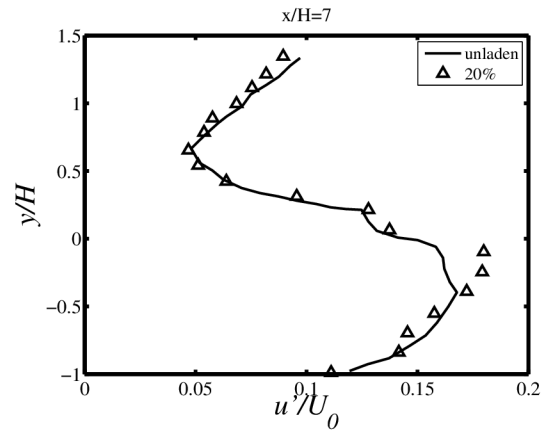
Obrázek 3.36: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 5$  za schodem s  $90\mu\text{m}$  částicemi - LES simulace



Obrázek 3.37: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 5$  za schodem s  $90\mu\text{m}$  částicemi - experiment



Obrázek 3.38: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 7$  za schodem s  $90\mu\text{m}$  částicemi - LES simulace



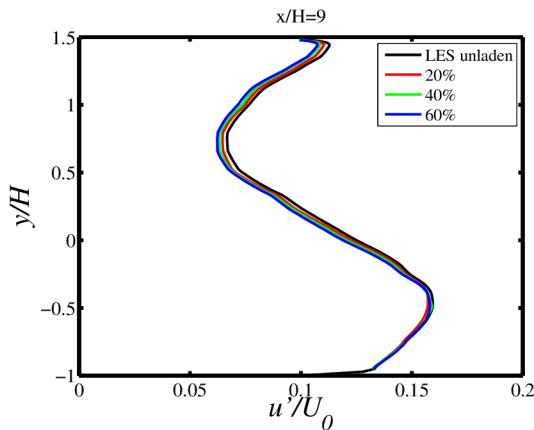
Obrázek 3.39: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 7$  za schodem s  $90\mu\text{m}$  částicemi - experiment

intenzity turbulence, ale v jiných pozicích ani pro jiné koncentrace se tento nárůst nevyskytuje, tudíž to nelze prohlásit za trend.

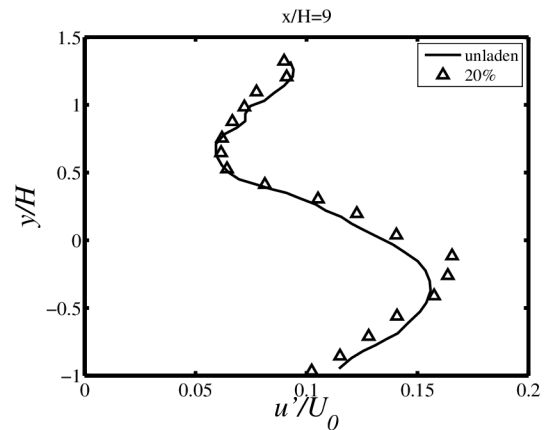
Výsledky LES simulací s  $90\mu\text{m}$  skleněnými částicemi vykazují určitou míru modulace turbulence. Turbulence je částicemi tlumena. Tlumení není výrazné, ale s rostoucí koncentrací částic v proudu vykazuje trend a míra utlumení roste. Ze srovnání s experimentem pro tento typ částic se nedá mnoho vyvozovat. Je to z důvodu statistické variability dat a uvedení výsledků pouze pro koncentraci částic 20%. Experimentální data naznačují, že turbulence je tlumena v horní části kanálu. V oblasti směšovací vrstvy dochází k částečnému nárůstu intenzity turbulence. Tento jev se v simulacích neprojevil.

### 3.7.6. Výsledky dvoufázového proudění pro $150\mu\text{m}$ částice

Na obrázcích 3.42 až 3.44 je zobrazeno pole v čase průměrného hmotnostního podílu  $150\mu\text{m}$  částic v proudu pro hodnoty hmotnostních podílů  $\phi = 20\%$ ,  $40\%$  a  $60\%$ . Je zde možno pozorovat odlišné chování než v případě  $90\mu\text{m}$  částic.  $150\mu\text{m}$  skleněné částice mají Stokesovo číslo větší než  $90\mu\text{m}$  částice ze stejného materiálu. Tedy budou hůře reagovat na změny rychlosti nosného

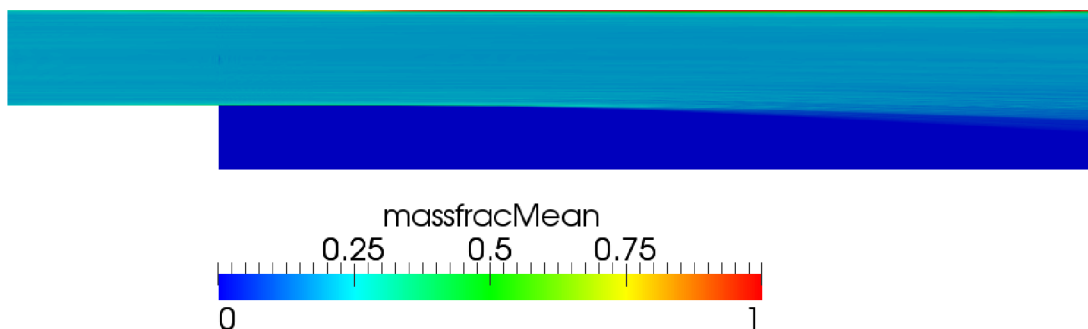


Obrázek 3.40: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 9$  za schodem s  $90\mu\text{m}$  částicemi - LES simulace



Obrázek 3.41: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 9$  za schodem s  $90\mu\text{m}$  částicemi - experiment

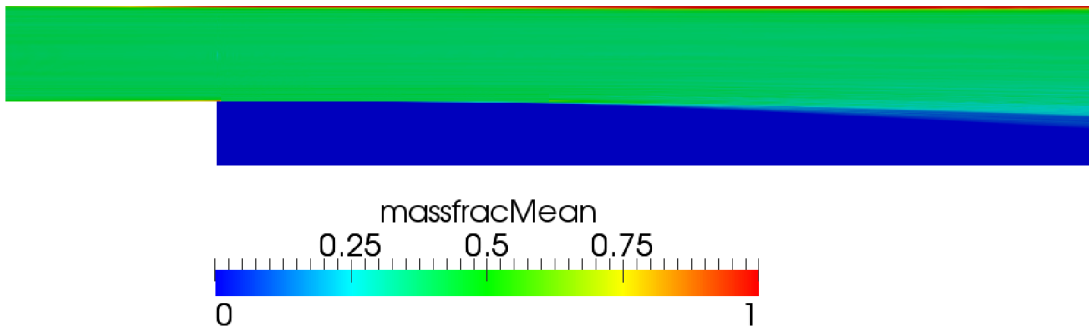
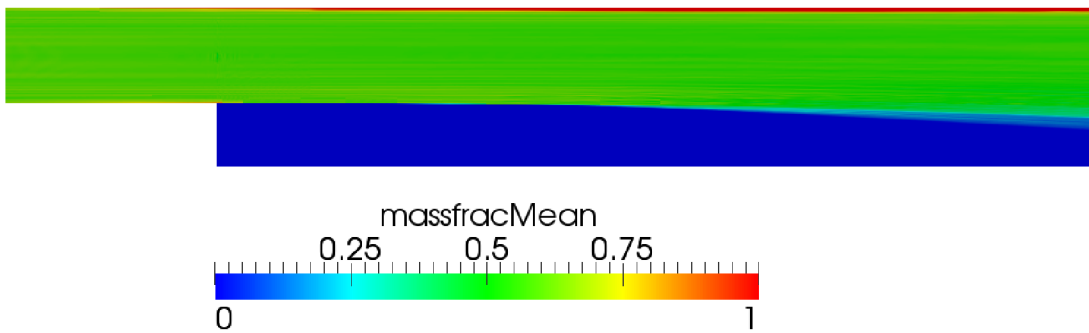
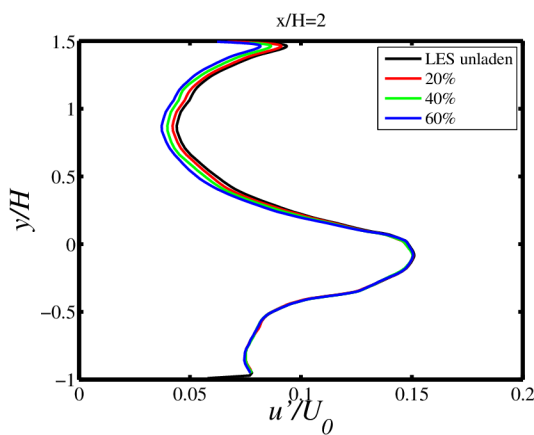
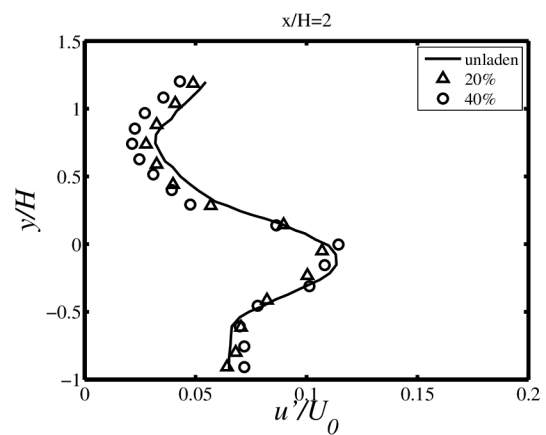
proudu. To se projeví tak, že trajektorie velkých  $150\mu\text{m}$  částic se budou ještě výrazněji odlišovat od proudnic. Na obrázcích 3.42 až 3.44 je možno pozorovat menší odklon částic od osy proudu (horní strany) než v případě  $90\mu\text{m}$  částic. Rostoucí koncentrace částic v proudu má vliv opět pouze na hodnotu pole hmotnostního podílu, nikoliv však na tvar. Dále je zase patrný nárůst koncentrace částic u stěn.



Obrázek 3.42: Průměrný hmotnostní podíl  $150\mu\text{m}$  částic v proudu pro  $\phi=20\%$

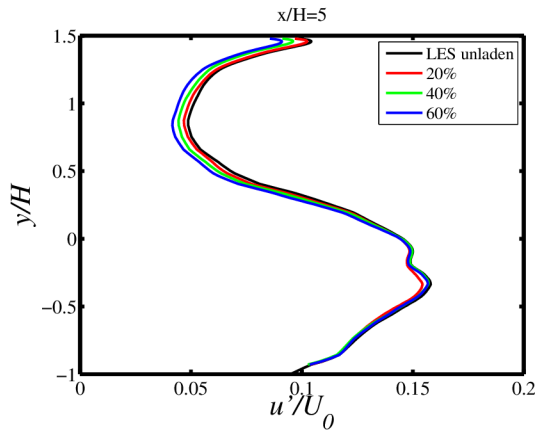
Přítomnost částic nemá vliv na v čase průměrné rychlostní pole ani v případě větších  $150\mu\text{m}$  částic. Rychlostní profily jsou takřka stejné jako v případě jednofázového proudění.

Na dvojici obrázků 3.45 a 3.46 je srovnání fluktuace podélné složky rychlosti proudu s přítomností  $150\mu\text{m}$  skleněných částic o hmotnostních podílech 20%, 40% a 60% v pozici  $x/H = 2$  za schodem. Experimentální data jsou pro tento typ částic dostupná pro hmotnostní podíly 20% a 40%. LES simulace se  $150\mu\text{m}$  částicemi vykazují kvalitativně obdobné chování jako s  $90\mu\text{m}$  částicemi. Turbulence je tlumena v horní části domény ( $y/H > 0$ ), v oblasti úplavu zůstává neovlivněna. S rostoucí koncentrací částic v proudu míra utlumení turbulence roste. Tento trend je nyní zachycen i experimentálními výsledky. Tedy oba typy částic vykazují kvalitativně stejnou modulaci turbulence. V čem se jednotlivé typy částic liší, tak je míra modulace turbulence. Zatímco  $90\mu\text{m}$  částice mají pouze malý vliv na fluktuace rychlosti i pro 60% koncentraci, vliv  $150\mu\text{m}$  částic je daleko větší. V případě  $90\mu\text{m}$  částic se od sebe fluktuace rychlosti v proudu

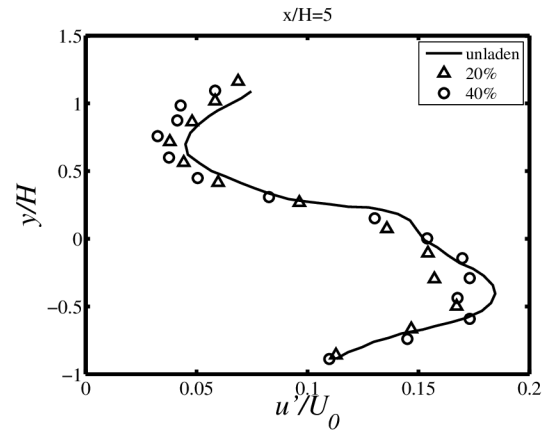

 Obrázek 3.43: Průměrný hmotnostní podíl  $150 \mu\text{m}$  částic v proudu pro  $\phi=40\%$ 

 Obrázek 3.44: Průměrný hmotnostní podíl  $150 \mu\text{m}$  částic v proudu pro  $\phi=60\%$ 

 Obrázek 3.45: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 2$  za schodem s  $150 \mu\text{m}$  částicemi - LES simulace

 Obrázek 3.46: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 2$  za schodem s  $150 \mu\text{m}$  částicemi - experiment

bez částic a s částicemi lišily zhruba o 2%, za přítomnosti  $150 \mu\text{m}$  tento rozdíl činí už skoro 8%. Rostoucí míra tlumení turbulence se Stokesovým číslem částice pozorována v LES simulacích

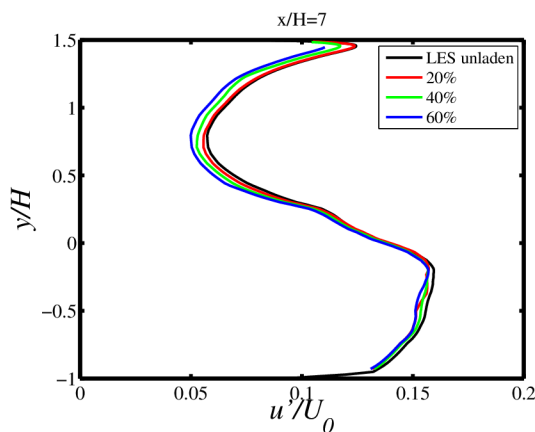
proudu s částicemi je v souladu s experimentálními studiemi i numerickými simulacemi [38], [75].



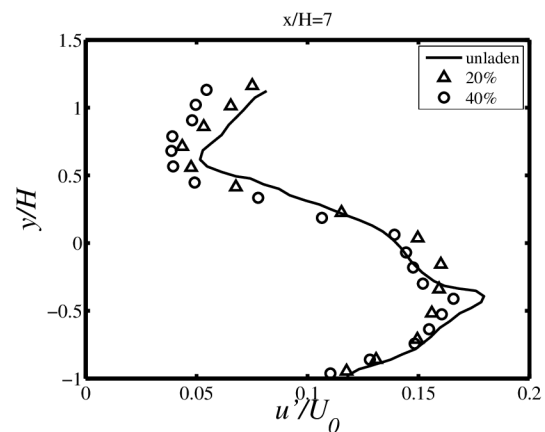
Obrázek 3.47: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 5$  za schodem s  $150\mu\text{m}$  částicemi - LES simulace



Obrázek 3.48: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 5$  za schodem s  $150\mu\text{m}$  částicemi - experiment

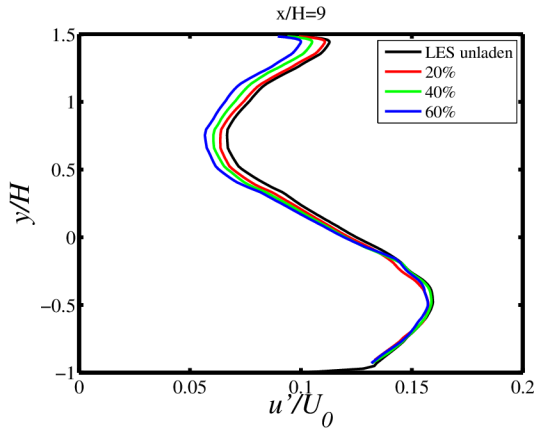


Obrázek 3.49: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 7$  za schodem s  $150\mu\text{m}$  částicemi - LES simulace

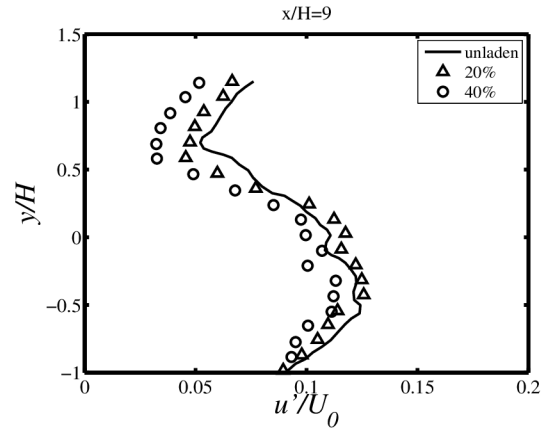


Obrázek 3.50: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 7$  za schodem s  $150\mu\text{m}$  částicemi - experiment

Obrázky 3.47 až 3.50 porovnávají výsledek LES simulace a experimentu v pozicích  $x/H = 5$  a  $x/H = 7$  za schodem. Výsledky jsou hodně podobné už dříve prezentovaným výsledkům. K tlumení turbulence opět dochází jen v oblasti hlavního proudu. Tedy tam kde je přítomna většina částic. V pozici  $x/H = 7$  je patrné ovlivnění rychlostních fluktuací i v dolní části domény ( $y/H < 0$ ). Tlumení turbulence v této oblasti však nevykazuje s rostoucím hmotnostním podílem žádné trendy. Tato odchylka může být způsobena nedostatečnou ustáleností v čase průměrné hodnoty rozptylu rychlosti. Blízko této oblasti dochází k opětovnému přilnutí proudu k spodní stěně kanálu. Tento bod není stacionární, jeho pozice se v čase mění. V čase průměrné statistiky mohou v tomto místě tedy vykazovat horší vlastnosti týkající se jejich ustálení v čase. I výsledky experimentu jsou v tomto místě nejednoznačné. V případě výsledků jednofázového proudění je v oblasti ( $y/H \approx -0,5$ ) lokálně zvýšená hodnota fluktuace rychlosti. Spíše to vypadá na chybu měření než charakteristiku proudu. Ani z výsledků proudění s částicemi se nedají vyvozovat jednoznačné závěry.



Obrázek 3.51: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 9$  za schodem s  $150\mu\text{m}$  částicemi - LES simulace



Obrázek 3.52: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 9$  za schodem s  $150\mu\text{m}$  částicemi - experiment

V pozici  $x/H = 9$  za schodem (obrázek 3.51 a 3.52) se jen potvrzují předchozí domněnky. Turbulence je tlumena pouze v místech, kde se nachází částice. V této pozici lze pozorovat odlišnost LES simulace od experimentu. V experimentu dochází k modulaci turbulence napříč celou výškou kanálem. V oblasti  $y/H < 0,2$  je turbulence částicemi o hmotnostním podílu 20% buzena, ale při větší koncentraci částic 40% je naopak tlumena. Ve zbylé části oblasti je už turbulence pouze tlumena a to pro obě koncentrace částic v proudu. Pokles fluktuace rychlosti je daleko výraznější pro koncentraci částic 40%. V LES simulaci k podobnému chování nedochází. Turbulence je pouze tlumena, k žádnému nárůstu nedochází. Také je možné si povšimnout, že míra útlumu turbulence nosné fáze nedosahuje úrovně vykazované experimentem. Ve výšce  $y/H = 0,75$  dochází v LES simulaci k útlumu o zhruba 8,5% vlivem přítomnosti částic s koncentrací 40%, zatímco v experimentu je tento útlum přibližně 40%.

### 3.7.7. Úprava subgridního modelu

Z uvedených výsledků simulací zpětného proudu za schodem s částicemi lze usoudit, že numerický model vykazuje kvalitativní shodu s provedeným experimentem. Míra útlumu turbulentní kinetické energie roste se zvyšující se koncentrací částic a se zvětšujícím se Stokesovým číslem částic. Bohužel kvantitativní shoda s experimentem už tak dobrá není. Turbulence je částicemi tlumena méně v numerické simulaci než v experimentu. Toto chování je dobře patrné na obrázcích 3.51 a 3.52. Nabízí se tedy otázka, jak vylepšit chování numerického modelu a zvýšit míru tlumení turbulence vlivem přítomnosti částic.

Jedním ze způsobů, jak docílit většího útlumu turbulence v LES simulaci s částicemi, je zahrnutí vlivu částic do subgridního modelu. Subgridní model slouží v zásadě k disipaci turbulentní kinetické energie, k níž dochází k oblasti malých měřítek (Kolmogorovo měřítko). V LES simulaci jsou tato měřítka odseparována pomocí filtrace a jejich vliv je tedy nutno modelovat. Právě k tomuto účelu byly navrženy subgridní modely. Poněvadž se ukazuje, že i částice slouží jako propad turbulentní kinetické energie, jeví se jako vhodné zahrnout vliv částic do subgridního modelu.

Pro úpravu byl vybrán základní Smagorinského subgridní model. Subgridní viskozita je upravena na tvar:

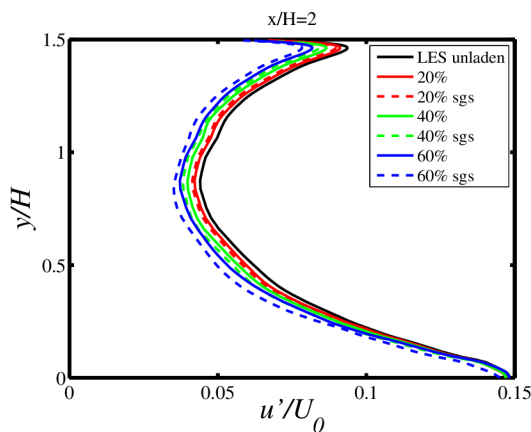
$$\nu_{sgs} = (C_s \Delta_s)^2 |\bar{S}| (1 + C_p \phi_p), \quad (3.47)$$

kde  $\phi_p$  je hmotnostní podíl částic v proudu (viz například obrázek 3.42). Hodnota konstanty konstanty  $C_p$  je dle [20] 0,9. Vlivem přítomnosti částic v určité části domény dojde k lokálnímu

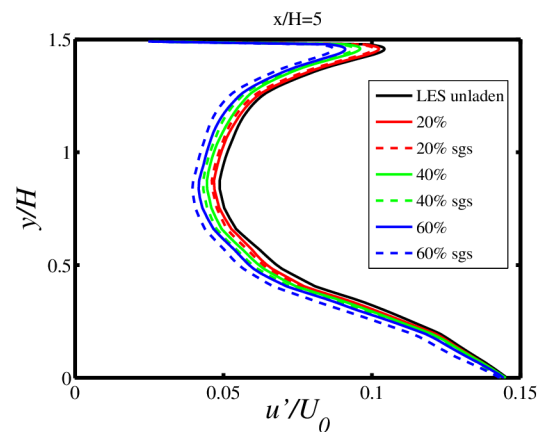
nárůstu hodnoty subgridní viskozity a tedy v této oblasti by měla být intenzivnější disipace turbulentní kinetické energie.

Takto upravený Smagorinského subgridní model byl implementován do programu OpenFOAM. Pomocí tohoto modelu byl odsimulován případ zpětného proudu za schodem. Simulace byly provedeny pouze pro  $150\ \mu\text{m}$  skleněné částice. Pro skleněné částice s průměrem  $90\ \mu\text{m}$  simulace provedeny nebyly. Je to z toho důvodu, že tyto částice mají pouze malý vliv na nosný proud (výsledek simulace) a výsledky experimentu jsou nejednoznačné.

Na obrázcích 3.53 a 3.54 je zobrazena fluktuace podélné složky rychlosti v pozicích  $x/H = 2$  a  $x/H = 5$  za schodem. Vzhledem k tomu, že v oblasti, kde se nenachází skoro žádné částice, ani v tomto případě tato statistika ovlivněna není, tak jsou kvůli lepší názornosti zobrazeny výsledky pouze pro horní část domény  $y/H > 0$ . Lze si povšimnout, že zahrnutí vlivu částic do subgridního modelu má pozitivní vliv na výsledky. Dochází k většímu útlumu turbulence částicemi. V experimentu dochází v bodě  $x/H = 2$  a  $y/H = 0.75$  k útlumu turbulence o 34% pro 40% hmotnostní podíl částic v proudu, zatímco v případě LES simulace je míra útlumu v případě s nemodifikovaným subgridním modelem 15% a 19% s upraveným subgridním modelem. Útlum turbulence je stále podhodnocen, ale shoda s experimentem je větší s použitím subgridního modelu zohledňující přítomnost částic v proudu. V místě  $x/H = 5$  je situace obdobná. Ve výšce  $y/H = 0.75$  je rozdíl ve fluktuaci podélné složky rychlosti proudu bez částic a s 40% podílem částic 28%, zatímco LES simulace vykazuje útlum o 14% s původním subgridním modelem a 19% s upraveným.



Obrázek 3.53: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 2$  za schodem s  $150\ \mu\text{m}$  částicemi - LES simulace s modifikovaným subgridním modelem



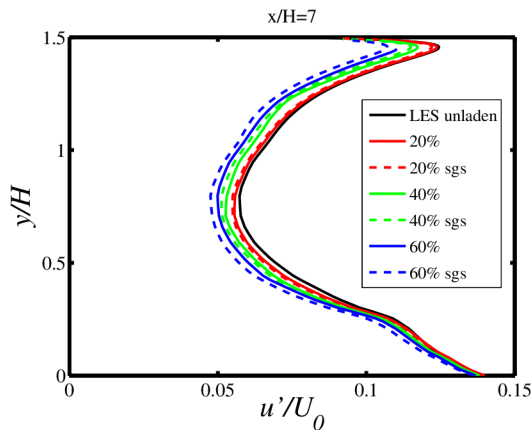
Obrázek 3.54: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 5$  za schodem s  $150\ \mu\text{m}$  částicemi - LES simulace s modifikovaným subgridním modelem

Ve vzdálenosti za schodem  $x/H = 7$  a  $x/H = 9$  vykazují výsledky stejný charakter jako ve vzdálenostech předchozích. Zahrnutí vlivu částic do subgridního modelu má pozitivní vliv na výsledky simulace. Ovšem zase platí, že míra útlumu turbulence predikovaná LES simulací není tak výrazná jako v experimentu.

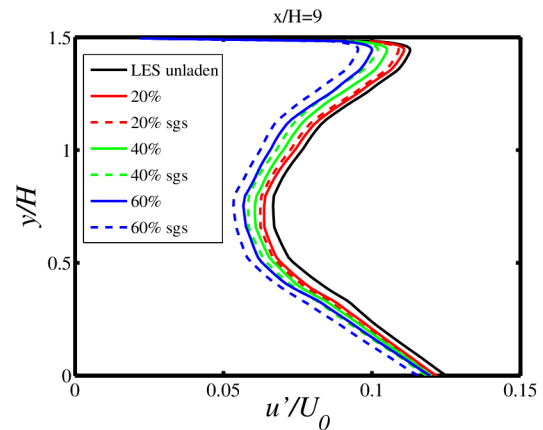
### 3.7.8. Shrnutí

V této podkapitole byla popsána simulace proudu s částicemi provedená v rámci dizertační práce. Nosná fáze je řešena metodou LES a pohyb částic je popsán Lagrangeovým přístupem. Pro simulaci byl vybrán případ zpětného proudu za schodem, k němuž jsou k dispozici i experimentální data [17]. Bohužel popis experimentu není úplný, některé informace nutné pro realizaci numerické simulace chybí. Jedná se například o materiálové vlastnosti vzduchu. Ty byly pro potřebu





Obrázek 3.55: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 7$  za schodem s  $150\mu\text{m}$  částicemi - LES simulace s modifikovaným subgridním modelem



Obrázek 3.56: Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici  $x/H = 9$  za schodem s  $150\mu\text{m}$  částicemi - LES simulace s modifikovaným subgridním modelem

simulace stanoveny pro vzduch o teplotě  $20^\circ\text{C}$  a normálním barometrickém tlaku. Zde mohlo nastat drobné odchylení se od reality a při posuzování přesnosti simulace je třeba brát tento fakt v potaz. Další odchylka mohla nastat při reprezentaci proudu na vstupu do domény. V článku je uvedeno pouze sdělení, že proud na vstupu je v režimu plně vyvinutého turbulentního proudění s osovou rychlostí  $10,5\text{ m/s}$ . Další informace uvedeny nejsou. Z toho důvodu byl v numerické simulaci použit přístup pro generaci plně turbulentního proudění na vstupu do domény vyvinutý v rámci této dizertační práce, který je popsán v kapitole 2.4. Ale i přes tyto nedostatky je přesnost LES simulace proudu bez částic dostatečná a bylo přistoupeno k simulaci proudu s částicemi.

Simulace byly provedeny pro skleněné částice o průměru  $90\mu\text{m}$  a  $150\mu\text{m}$ . Hmotnostní podíl částic v proudu je 20%, 40% a 60%. Při těchto koncentracích by už měl být výrazný vliv částic na proud. Výsledky simulace jsou v souladu s předchozími studii zabývajícími se modulací turbulence částicemi. Částice mají tendenci tlumit turbulenci. To je způsobeno tím, že částice si berou energii nutnou pro jejich pohyb z turbulentních vírů a to se projeví jako pokles turbulentní kinetické energie. Míra útlumu turbulence roste se zvyšující se koncentrací částic. Pro  $90\mu\text{m}$  částice je srovnání s experimentem nejednoznačné, neboť výsledky experimentu jsou uvedeny pouze pro koncentraci 20% a z výsledků experimentu se nedá usoudit, jak je turbulence těmito částicemi ovlivněna. V případě  $150\mu\text{m}$  částic je patrná dobrá kvalitativní shoda LES simulací s experimentálními daty. I zde je nutné brát v potaz, že mohlo dojít k odchylce nastavení LES simulace od experimentu. V LES simulaci jsou částice rozloženy rovnoměrně na rovině vstupu, kdežto v experimentu mohla být distribuce částic v této rovině jiná.

Míra útlumu je však simulací podhodnocena. Z toho důvodu byla realizována úprava subgridního modelu. Do subgridního modelu byl zahrnut vliv částic. Byl modifikován Smagorinského subgridní model. Hodnota Smagorinského konstanty byla vynásobena výrazem závislým na koncentraci částic. Upravený model vykazuje drobné zlepšení výsledků. Modifikovaný subgridní model ale zohledňuje pouze koncentraci částic v proudu. Jelikož míra tlumení turbulence je závislá i na Stokesově čísle částice, další možná modifikace modelu by mohla zohledňovat i tuto závislost. Ale určení takovéto závislosti vyžaduje detailnější a velice přesné výsledky experimentu.

### 3.8 Vliv anizotropie turbulence v blízkosti stěny

V této kapitole bude pojednáno o vlivu anizotropie turbulence v blízkosti stěny. Výsledky v ní uvedené získal autor práce během své stáže na Technické univerzitě Eidhoven u Dr. Kuertena.

Správný přístup k reprezentaci turbulence u stěny v numerických simulacích proudu s částicemi je velice důležitý. V blízkosti stěn dochází k depozici částic nejen díky různým silám (například gravitační, Saffmanově a další), ale depozice částic u stěny je také velmi ovlivněna turbulentní difuzí. Z tohoto důvodu je třeba věnovat přístěnné oblasti značnou pozornost a náležitě přístěnnou oblast rozřešit.

Dalším důležitým faktorem je interakce částice s turbulencí proudu. V RANS simulacích, kdy je řešením v čase průměrné pole rychlosti a jiných veličin a turbulence je reprezentována pomocí turbulentní kinetické energie, je nutno zpětně zrekonstruovat fluktuace rychlosti, protože ty budou mít značný vliv na pohyb částic. Vliv turbulentních fluktuací je do pohybu částic zahrnut pomocí *eddy life-time* modelu, který navrhl Yuu a kol. [89] a vylepšil Gosman a Ioannides [26] pro model turbulence  $k - \epsilon$ . Vliv turbulence je přidán generováním rychlostních fluktuací na základě turbulentní kinetické energie  $k$  a specifické disipace  $\epsilon$ . Tento model používá rovnoměrný rozklad turbulentní kinetické energie do všech směrů, a to i v blízkosti stěny. Takový rozklad lze použít v dostatečné vzdálenosti od stěny, kde je turbulence izotropní. U stěny ovšem turbulence izotropní není. Ukazuje se, že použití rovnoměrného rozkladu turbulentní kinetické energie u stěny vede k nadhodnocování míry depozice částic u stěn [47]. Wittig a kol. [86] navrhli tři funkce, podle nichž probíhá rozklad turbulentní kinetické energie do různých směrů v blízkosti stěn. Wang a Squires [84] navrhli model, jenž řeší dodatečnou transportní rovnici za účelem získání rychlostních fluktuací v blízkosti stěny.

V LES simulacích je situace jiná. Výsledkem LES simulace není v čase průměrná rychlost, jak tomu je v RANS simulacích, ale nestacionární filtrované rychlostní pole. Toto rychlostní pole v sobě zahrnuje fluktuace jednotlivých složek rychlosti. Není tedy třeba žádný model pro jejich rozklad do různých směrů. Toto pole v sobě ovšem nezahrnuje nejmenší prostorová měřítká (subgridní měřítká). O tato měřítká bylo rychlostní pole zbaveno operací filtrace, jenž je jednou ze základních myšlenek metody LES. V případě transportu velkých těžkých částic s velkým Stokesovým číslem lze vliv subgridních měřítek zanedbat. Velké těžké částice hůře reagují na změny rychlosti okolní tekutiny a nejsou těmito měřítky ovlivněny. Pohyb malých částic může být těmito měřítky ovlivněn. Vystává tedy otázka, jak tento vliv na pohyb částic zahrnout do modelu.

#### 3.8.1. Matematický model a testovací případ

Vliv subgridních měřítek na pohyb částic byl přidán do programu řešícího turbulentní proudění mezi dvěma paralelními deskami. Tento program je vyvíjen na Technické univerzitě Eidhoven. Pro řešení nosné fáze je použita metoda LES s použitím modelu přibližné dekonvoluce coby subgridního modelu (viz. kapitola 1.3.6). Model přibližné dekonvoluce používá zpětně zrekonstruovanou rychlost z rychlosti filtrované pro výpočet tenzoru subgridního napětí:

$$\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} - \overline{\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}} \approx \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i^* u_j^*}{\partial x_j}, \quad (3.48)$$

kde

$$u_i^* = Q_N * \bar{u}_i, \quad (3.49)$$

je zrekonstruovaná rychlost za pomoci aproximace inverzního filtru

$$Q_N = \sum_{\nu=0}^N (I - G)^\nu \approx G^{-1}. \quad (3.50)$$

Pro popis pohybu částic je použit Lagrangeův přístup. Jako jediná síla působící na částici je uvažována síla odporová. Vzhledem k malé koncentraci částic je aplikován pouze přístup *one-way coupling*. Pohybová rovnice pro  $j$ -tou částici má tvar:

$$\frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}_j, t) - \mathbf{v}_j}{\tau_p} (1 + 0.15\text{Re}_p^{0.687}), \quad (3.51)$$

Rychlost tekutiny v místě částice je získána pomocí:

$$u_i = \bar{u}_i + X \sqrt{u_i^{*2} - \bar{u}_i^2}, \quad i = x, y, z, \quad (3.52)$$

kde  $X$  je náhodná veličina s normálním Gausovým rozdělením  $N(0,1)$ . Poslední člen v rovnici 3.52 tedy zastupuje vliv subgridních měřítek na pohyb částic. Výraz pod odmocninou není nic jiného než aproximace subgridní kinetické energie  $i$ -té složky rychlosti. Je zde tedy i zohledněn vliv anizotropie subgridní kinetické energie v blízkosti stěny.

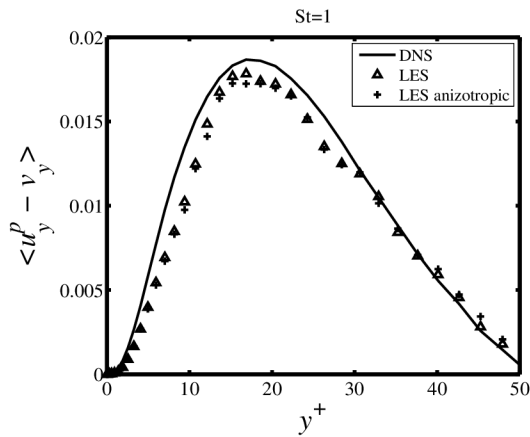
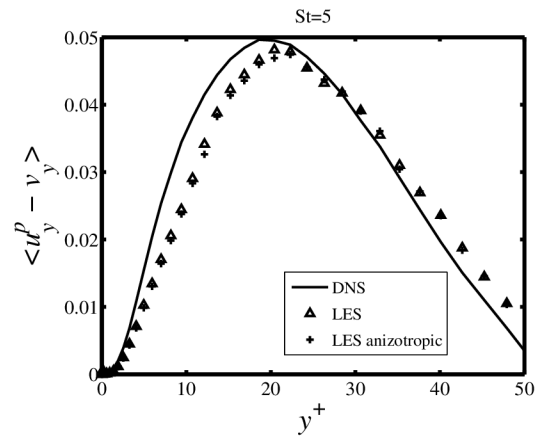
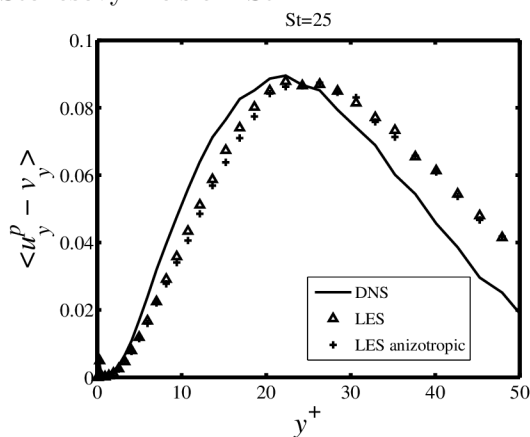
Transport a depozice částic při použití výše uvedeného modelu byla zkoumána na případě proudění kanálem. Práce vychází ze studie “Subgrid modeling in particle-laden channel flow” provedené dr. Kuertenem [36]. Výpočty byly provedeny pomocí LES řešiče vyvinutého a používaného na pracovišti v Eindhoven. Kanál má rozměry  $4\Pi \times 2 \times 2\Pi$  (délka  $\times$  výška  $\times$  šířka). Ve směru osy  $x$  a  $z$  je nastavena periodická okrajová podmínka, pro  $y=0$  a  $y=2$  je definována pevná stěna. Simulace byly provedeny ve spektrálním prostoru, výpočetní síť sestávala z 33 Čebyševových módů ve směru kolmém ke stěně, 32 Fourierových módů v podélném směru a 64 Fourierových módů v příčném směru. Reynoldsovo číslo založené na třetí rychlosti  $u_\tau$  (“friction velocity”) bylo  $Re_\tau=150$ , střední Reynoldsovo číslo  $Re_m=2400$ . Simulace byly provedeny pro různé částice s poloměry  $1,02 \cdot 10^{-3}$  m,  $2,28 \cdot 10^{-3}$  m a  $5,10 \cdot 10^{-3}$  m, což odpovídá Stokesovým číslům 1, 5 a 25. Stokesovo číslo je v tomto případě definováno jako  $St = \tau_p^+ = \tau_p u_\tau^2 / \nu$ . Částice mají hustotu  $\rho_p / \rho_f = 769.23$ . Počet částic v kanále je 100 000, Částice jsou na počátku v kanále rozmístěny náhodně rovnoměrně. Přefiltrovaná pole rychlosti a tlaku byla použita jako počáteční podmínka pro LES simulace.

### 3.8.2. Výsledky

V této podkapitole jsou srovnány výsledky simulace proudu s částicemi bez a se započtením vlivu subgridních měřítek na pohyb částic. V grafech jsou výsledky bez uvažování tohoto vlivu označeny jako LES a reprezentovány trojúhelníky. V tomto případě je vypuštěn poslední člen z rovnice 3.52. Výsledky se zahrnutím vlivu subgridních měřítek jsou označeny jako LES anizotropie a reprezentovány křížky.

Na obrázcích 3.57 až 3.59 je zobrazena na stěnu kolmá v čase průměrná relativní rychlost částic. Špičaté závorky značí časové průměrování. Pro  $y^+ < 25$  je tato veličina podhodnocena oběma LES simulacemi pro všechny typy částic. Lepší shodu s DNS daty vykazuje model pohybu částic bez zahrnutí vlivu subgridních měřítek, rozdíl proti modelu s uvažováním tohoto vlivu není však výrazný. V těchto obrázcích je možno dále odhalit, čím je způsobena turboforeze (migrace částic unášených turbulentním proudem směrem ke stěně). Relativní rychlost částic v přístěnné oblasti nabývá nenulových hodnot a výsledná relativní rychlost směřuje směrem ke stěně. Tento fakt má za následek zvýšenou koncentraci částic u stěny. Dále je možno pozorovat odlišné hodnoty relativní rychlosti pro různé typy částic. Relativní rychlost roste s rostoucím Stokesovým číslem. Lze proto tedy předpokládat, že koncentrace částic u stěny bude pro částice se Stokesovým číslem  $St = 25$  vyšší než pro částice s nižším Stokesovým číslem.

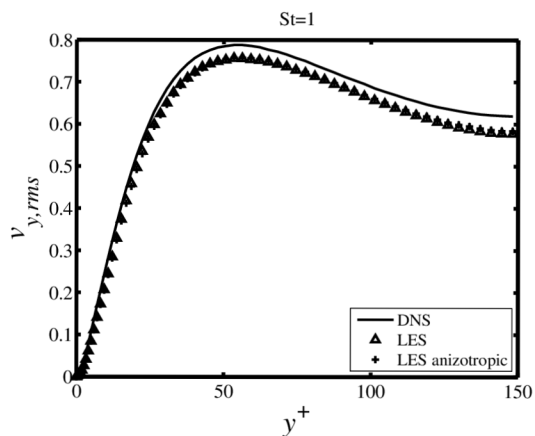
Fluktuace normálové složky rychlosti částic jsou zobrazeny na obrázcích 3.60 až 3.62. I zde jsou výsledky LES simulací bez a se zohledněním vlivu subgridních měřítek na pohyb částic velice blízké. V oblasti s  $y^+ < 50$  jsou výsledky prakticky totožné pro všechny typy částic.

Obrázek 3.57: Relativní rychlost částic se Stokesovým číslem  $St = 1$ Obrázek 3.58: Relativní rychlost částic se Stokesovým číslem  $St = 5$ Obrázek 3.59: Relativní rychlost částic se Stokesovým číslem  $St = 25$ 

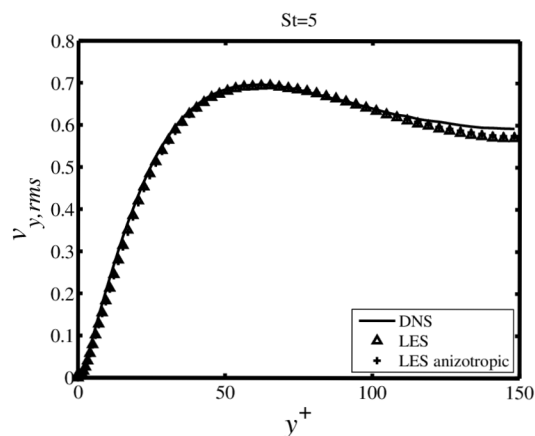
K drobným odchylkám dochází až s rostoucí vzdáleností od stěny blízkosti středu kanálu. Pro částice se Stokesovým číslem 1 a 5 vykazuje lepší výsledků model zohledňující vliv subgridního napětí. Shoda s DNS daty je nepatrně lepší pro tento model.

Obrázky 3.63 až 3.65 zobrazují vývoj koncentrace částic u stěny v čase. Koncentrace u stěny byla vyhodnocena následovně. Kanál byl po výšce rozdělen na 40 stejně velkých podoblastí. Koncentrace v přístěnné oblasti odpovídá počtu částic nacházejících se v krajních podoblastech. Dále byla koncentrace normována tak, aby platilo že koncentrace je rovna 1 v případě rovnoměrného rozdělení částic.

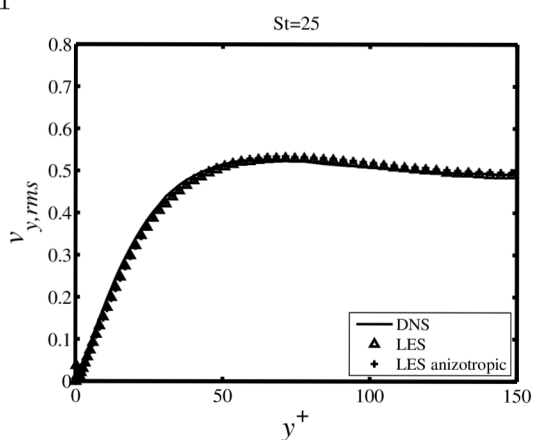
Na vývoji koncentrace částic v čase lze jasně vidět, že LES simulace s i bez zahrnutí vlivu subgridních měřítek nadhodnocuje koncentraci částic v přístěnné oblasti oproti DNS simulaci. Toto tvrzení platí pro všechny typy částic kromě částic se Stokesovým číslem 25. Pro tyto částice je koncentrace u stěny při použití modelu se zahrnutím subgridního napětí v časovém okamžiku  $1,1 \cdot 10^4 < t^+ < 1,7 \cdot 10^4$  mírně podhodnocena. Pro částice se Stokesovým číslem 1 a 5 se dá říci, že vykazuje lepší výsledků co se týče koncentrace částic u stěny. Zejména pak pro částice se Stokesovým číslem 5 a v čase  $t^+ > 1,2 \cdot 10^4$  nastává velice dobrá shoda s DNS simulací. Další jev, který lze na obrázcích 3.63 až 3.65 pozorovat, je zvyšující se koncentrace částic u stěny s rostoucím Stokesovým číslem. Tento jev nastává kvůli vyšší relativní rychlosti částic směrem ke stěně pro větší Stokesova čísla.



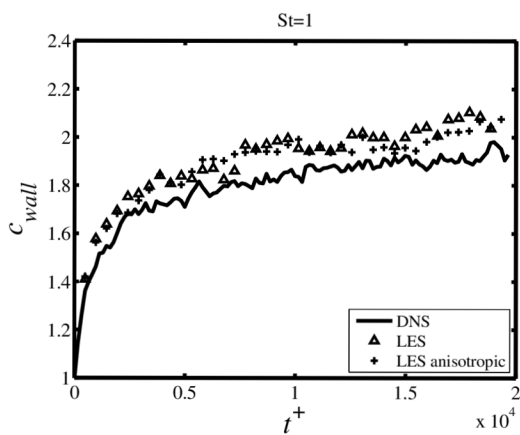
Obrázek 3.60: Fluktuační normální složky rychlosti částic se Stokesovým číslem  $St = 1$



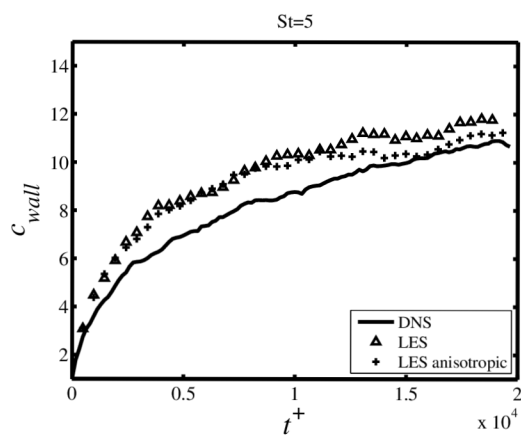
Obrázek 3.61: Fluktuační normální složky rychlosti částic se Stokesovým číslem  $St = 5$



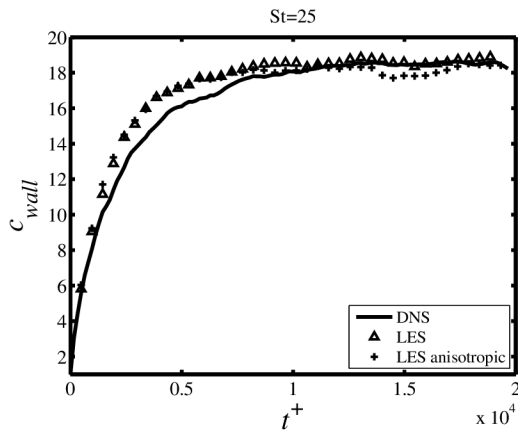
Obrázek 3.62: Fluktuační normální složky rychlosti částic se Stokesovým číslem  $St = 25$



Obrázek 3.63: Koncentrace částic se Stokesovým číslem  $St = 1$  u stěny



Obrázek 3.64: Koncentrace částic se Stokesovým číslem  $St = 5$  u stěny



Obrázek 3.65: Koncentrace částic se Stokesovým číslem  $St = 25$  u stěny

### 3.8.3. Shrnutí

V LES simulacích není třeba řešit problém rozkladu turbulentní kinetické energie pro získání vlivu rychlostních fluktuací na pohyb částic, které je nutné provést v RANS simulacích. Řešením LES simulace je totiž nestacionární pole rychlosti, z nichž lze jednotlivé složky rychlosti přímo zjistit. Výsledná rychlost je ale zbavena v důsledku filtrace vysokých prostorových frekvencí, tj. malých měřítek. V případě transportu částic s velkým Stokesovým číslem nemají tato měřítka na vliv pohyb částic. Tyto částice totiž hůře reagují na změnu rychlosti okolní tekutiny a tudíž na jejich pohyb tato měřítka nemají zásadní vliv. V případě lehkých částic je situace jiná.

Byl navržen model, jenž bere v potaz vliv subgridních měřítek na pohyb částic. K rychlosti tekutiny v pozici částice se přičte stochastický člen. Tento člen je úměrný turbulentní subgridní energii dané složky rychlosti. Takto modifikovaná rychlost je posléze použita v Lagrangeově pohybové rovnici popisující pohyb částice. Navržený model byl otestován na případu proudění tekutiny mezi dvěma paralelními deskami (kanálem). Pro simulaci byly použity částice se Stokesovým číslem 1, 5 a 25. Výsledky LES simulací s a bez zahrnutí vlivu subgridních měřítek na pohyb částic jsou si velice blízké. Co se týká predikce koncentrace částic u stěny, tak lepší shodu s DNS daty vykazuje model zohledňující subgridní měřítka a jejich vliv na pohyb částic.

---

## Závěr

---

Řešení turbulentního proudění s částicemi je komplikovaný a náročný problém. Nejprve je nutno správně rozřešit pohyb nosné fáze, protože pohyb disperzní fáze na něm bude přímo závislý. Proto je volba metody určené pro rozřešení pohybu nosné fáze esenciální pro numerické simulace zahrnující vícefázové proudění. Metoda Large Eddy Simulation se jeví jako vhodná. Metoda LES je dobrý kompromis mezi dosahovanou přesností simulace a výpočetními nároky. Disertační práce je proto zaměřena právě na toto téma.

Použití metody LES pro řešení turbulentního vazkého proudění však v sobě skrývá četná úskalí. Je třeba věnovat pozornost výpočetní síti. Výpočetní síť by neměla obsahovat náhlé změny rozměrů buněk. Další omezující faktor je rozřešení přístěnné oblasti. Ke správnému rozřešení mezní vrstvy je třeba, aby u stěny byla splněna podmínka  $y^+ \approx 1$ . Tento požadavek velmi často vede k prudkému nárůstu počtu výpočetních buněk a tedy zvyšuje nároky kladené na výpočetní techniku a prodlužuje čas nutný pro simulaci. Další omezení se týká turbulence samotné. Jelikož metoda LES řeší velké energetické víry přímo (jsou rozřešeny výpočetní sítí) a tyto víry jsou obecně trojrozměrné útvary, je nutno řešit proudění trojdimenzionálně a to i v případech, které by bylo možno zjednodušit na dvourozměrné.

Asi největší rozdíl metody LES od metody RANS je forma výsledků. Zatímco řešením proudění metodou RANS jsou v čase průměrná pole popisující proud, výsledek metody LES je tvořen veličinami nestacionárními, okamžitými. V čase průměrné hodnoty veličin je nutno získat průměrováním, obdobně pak fluktuace těchto polí v čase. Časové průměrování je většinou nutné provést po několik desítek až stovek tisíc časových kroků. Tento fakt způsobí, že LES výpočty jsou velmi časově náročné a napočítání například jedné sekundy děje si kolikrát vyžádá týdny až měsíce reálného času. Obzvláště je nutno věnovat zvýšenou pozornost časovému intervalu, po který probíhá sběr statistik. Špatně zvolený interval může zvýšit dobu potřebnou pro ustálení statistik proudu nebo vést k zavádějícím výsledkům. Je proto vhodné sledovat v průběhu výpočtu hodnoty průměrných veličin a jejich vývoj v čase. Až dojde k jejich ustálení, je možno výpočet ukončit.

Další velice závažný problém při použití metody LES je správná interpretace turbulence na vstupu do domény. Ukazuje se, že v některých případech má způsob reprezentace turbulence na vstupu výrazný vliv na charakter proudění. Je tedy nutno věnovat zvýšenou pozornost i tomuto problému. Za tímto účelem bylo vyvinuto schéma, jak docílit správné reprezentace plně vyvinutého turbulentního proudění na vstupu. Vyvinuté schéma je kombinací předběžné simulace a buzení turbulence. Toto schéma bylo otestováno na případě proudu mezi dvěma paralelními deskami. Shoda s DNS daty je dobrá. Dále bylo toto schéma použito pro simulaci zpětného proudu za schodem. I zde vykazuje schéma dostatečně přesné výsledky.

Po zvládnutí simulace jednofázového proudění je možno přejít k simulaci proudění vícefázového. Pro popis pohybu disperzní fáze lze použít dva přístupy: Lagrangeův nebo Eulerův. Při použití Eulerova principu jsou částice považovány za další kontinuum a jejich pohyb se řídí pohybovou rovnicí, jež je řešena společně s nosnou fází. Další přístup je přístup Lagrangeův. Zde je pohyb každé částice řešen individuálně. Pohyb částice je popsán pohybovou rovnicí, která

není nic jiného než druhý Newtonův pohybový zákon. Jelikož se tedy jedná o silovou rovnováhu, je nutno nejprve určit síly působící na částice a tyto síly následně kvantifikovat. Správné určení sil působících na částice má zcela zásadní vliv na jejich pohyb. Při vysokých koncentracích částic v proudu je nutno i uvažovat ovlivnění nosné fáze částicemi, případně zahrnout vzájemné kolize částic.

Byla provedena studie zkoumající vliv přítomnosti částic na nosnou fázi, zejména pak na její turbulenci. Byl zkoumán případ zpětného proudu za schodem s přítomností skleněných částic o průměru  $90\ \mu\text{m}$  a  $150\ \mu\text{m}$ . Hmotností podíl částic v proudu byl zvolen 20%, 40% a 60%. Ukázalo se, že částice mají zanedbatelný vliv na průměrné pole rychlosti. Rychlostní profil v doméně zůstal nezměněn. Na turbulenci však částice vliv mají. Částice mají tendenci tlumit turbulenci. V simulacích je možno pozorovat pokles turbulentní kinetické energie nosné fáze. Tento pokles roste s rostoucí koncentrací částic. Další parametr ovlivňující míru modulace turbulence je Stokesovo číslo částice. Částice s velkým Stokesovým číslem způsobují větší útlum turbulence než částice s malým Stokesovým číslem. Tato pozorování jsou v souladu se studii dvoufázového proudění. Ukázalo se, že pokles míry turbulence nosné fáze je v simulaci podhodnocen. Z toho důvodu byl upraven Smagorinského subgridní model tak, že je v něm zohledněna přítomnost částic v proudu. Smagorinského konstanta je závislá na koncentraci částic. Takto upravený model je více disipativní a dává lepší výsledky.

Dále byl v disertační práci zkoumán vliv subgridních měřítek na pohyb částic. Ve většině LES simulací transportu částic tekutinou je tento vliv zanedbán. V případech částic s velkým Stokesovým číslem je zanedbání tohoto vlivu oprávněné. Na pohyb částic s malým Stokesovým číslem už mohou mít subgridní měřítka vliv. Byl upraven model pohybu částic tak, aby tento vliv zohledňoval. Do pohybové rovnice částice byl přidán stochastický člen, jenž je přímo úměrný aproximaci subgridní kinetické energie dané složky rychlosti. Je tedy v tomto modelu zohledněna i anizotropie subgridní kinetické energie. Modifikovaný model byl odzkoušen na případu proudění mezi dvěma paralelními deskami s částicemi. Modifikovaný model lépe předpovídá statistiky částic, což následně vede k přesnější predikci koncentrace částic v přístěnné oblasti, zejména pro částice s Stokesovým číslem  $St = 5$ . Tato část práce vznikla během autorovy stáže na Technické univerzitě Eidhoven.

V dizertační práci je popsáno řešení pohybu systému sestávajícího z nosné a disperzní práce. Pro simulaci nosné fáze je použita metoda LES, pohyb částic je popsán Lagrangeovým přístupem. Za hlavní přínosy práce lze považovat:

- vyvinutí schématu pro generaci turbulence na vstupu
- popis a následné použití metody LES pro simulaci vícefázového proudění
- zahrnutí vlivu částic na nosnou fázi a úprava subgridního modelu zohledňující přítomnost částic v proudu
- anizotropní rozklad subgridní kinetické energie a její zahrnutí do modelu pohybu částic

Většina výpočtů provedených v rámci disertační práce probíhala ve volně přístupném programu OpenFOAM. OpenFOAM se ukázal být silným nástrojem při řešení daného problému. Oproti komerčním programům určených pro CFD úlohy má tu výhodu, že jeho kód je přístupný a plně modifikovatelný, takže bylo možno provést navržené úpravy. Provedení navržených modelů a úprav ovšem vyžaduje dobrou orientaci a znalost kódu.



---

## Seznam použitých zdrojů

---

- [1] Aider, J-L, Danet, A.: Large-eddy simulation study of upstream boundary conditions influence upon a backward-facing step flow. *Comptes Rendus Mecanique*, 334(7), pp. 447–453, 2006.
- [2] Akselvoll K., Moin, P.: Large-eddy simulation of turbulent confined coannular jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 315, pp. 387–411, 1996.
- [3] Bardina, J., Ferziger, J. H., Reynolds, W. C.: Improved subgrid scale models for large-eddy simulation, *Am. Inst. Aeronaut. Astronaut. Pap.* pp. 80-1357, 1980.
- [4] Barton, I.E.: Laminar flow over a backward-facing step with a stream of hot particles, *Int. Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 18, Issue 4, pp. 400-410, 1997.
- [5] Boivin, M., Simonin, O., Squires, K. D.: On the prediction of gas-solid flows with two-way coupling using large eddy simulation, *Phys. Fluids*, Vol. 12, No. 8, 2000.
- [6] Boussinesq, J.: Théorie de l'Écoulement Tourbillant, *Mem. Présentés par Divers Savants Acad. Sci. Inst. Fr.*, Vol. 23, pp. 46-50, 1877.
- [7] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B.: *Mechanika kontinua*, Academia, ISBN 80-200-0772-5, 2000.
- [8] Breuer, M., Rodi, W.: Large-eddy simulation of turbulent flow through a straight square duct and a 180° bend. In P. Voke, R. Kleiser, and J. Chollet, editors, *Direct and Large Eddy Simulation I*, volume 26 of *Fluid Mechanics and its Applications*, pp. 273–285, Munich, Germany, 2007.
- [9] Clift, R., Grace, J.R., Weber, M.: *Bubbles, Drops and Particles*, Academic Press, New York, ISBN 0-12-176950-X, 1978.
- [10] Crowe, C., Sommerfeld, M., Tsuji, A.: *Multiphase flow with droplets and particles*, CRC Press, Boca Raton, ISBN 0-8493-9469-4, 1998.
- [11] Crowe, C.: *Multiphase flow handbook*, Taylor and Francis, Boca Raton, ISBN 0-8493-1280-9, 2006.
- [12] Dandy, D.S., Dwyer, H.A.: A sphere in shear flow at finite Reynolds number: effect of particle lift, drag and heat transfer, *Journal of Fluid Mechanics*, 216, 381, 1990.
- [13] Davidson, L., Billson, M.: Hybrid RANS-LES using synthetized turbulence for forcing at the interface. In P. Neittaanmaki, T. Rossi, S. Korotov, E. Onate, J. Periaux, and D. Knorzer, editors, *ECCOMAS*, 2004.

- 
- [14] Elghobashi, S., Truesdell, G. C.: On the two-way interaction between homogeneous turbulence and dispersed solid particles. I: Turbulence modification, *Phys. Fluids A*, Vol. 5, No. 7, 1993.
- [15] Eswaran V., Pope, S.B.: An examination of forcing in direct numerical simulations of turbulence, *Comput. Fluids*, vol. 16, no. 3, pp. 257-278, 1998.
- [16] Ferrante, A., Elgobashi, S.: On the physical mechanism of two-way coupling in particle-laden isotropic turbulence, *Phys. Fluids*, Vol. 15, No. 2, 2003.
- [17] Fessler, J.R., Eaton, J.K.: Turbulence modification by particles in a backward-facing step flow. *J. Fluid Mech.* 394, pp. 97-117, 1999.
- [18] Friedrich, R., Arnal, M.: Analysing turbulent backward-facing step flow with the lowpass-filtered Navier-Stokes equation. *Journal of Wind Engineering and its Applications*, 35, pp. 101-128, 1990.
- [19] Fureby, C., Tabor, G., Weller, H. G., Gosman, A. D.: A comparative study of subgrid scale models in homogeneous isotropic turbulence, *Phys. Fluids*, Vol. 9, No. 5, 1997.
- [20] García, J.: Study of the turbulence modulation in particle-laden flow using LES, Annual Research briefs, Centre for turbulence Research, 2001.
- [21] Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., Cabot, W. H.: A dynamic subgrid scales eddy viscosity model, *Phys. Fluids A*, Vol. 3, No. 7, pp. 1760-1765, 1991.
- [22] Geurts, B. J.: Elements of direct and large eddy simulation, Edwards, Philadelphia, ISBN 1-930217-07-2, 2004.
- [23] Ghosal, S., Lund, T. S., Moin, P., Akselvoll, K.: A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows, *J. Fluid Mech.*, Vol. 286, pp. 229-255, 1995.
- [24] Glaze, D.J., Frankel, H.: Stochastic inlet conditions for large-eddy simulation of a fully turbulent jet. *AIAA Journal*, 41(6), pp. 1064-1073, 2003.
- [25] Gore, R. A., Crowe, C. T.: Modulation of Turbulence by a Dispersed Phase, *Trans. ASME I: J. Fluid Eng.* 113, 1991.
- [26] Gosman, A.I., Ioannides, E.: Aspects of computer simulation of liquid-fueled combustors, AIAA Paper 81-0323, 1981.
- [27] Grinstein, R.R., Gutmark, E.J., Parr, T.P., Hanson-Parr, D.M., Obeysekare, U.: Streamwise and spanwise vortex interaction in an axysymmetric jet. a computational and experimental study. *Physics of Fluids*, 8(6):1515-1524, 1996.
- [28] Iwamoto, K., Suzuki, Y., Kasagi, N.: Database of fully developed channel flow, Internal report (<http://www.thtlab.t.u-tokyo.ac.jp/DNS/ILR-0201.pdf>), University of Tokyo, Japan, 2002.
- [29] Jacobsen, M.: Laplace and the Origin of the Ornstein-Uhlenbeck Process. *Bernoulli*, Vol. 2, No. 3., s. 271- 286, 1996.
- [30] Jakubik, T.: Measurements and numerical simulations of ambient-turbulence effects on diesel-fuel sprays, [disertační práce], Brno VUT FSI, 2005.

- 
- [31] Kaltenbach, H.J., Fatica, M., Mittal, R., Lund, T.S., Moin, P.: Study of flow in a planar asymmetric diffuser using large eddy simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, pp. 151–185, 1999.
- [32] Keating, A., Piomelli, U., Balaras, E., Kaltenbach, H.J.: A priori and a posteriori test of inflow conditions for large-eddy simulation. *Physics of Fluids*, 16, 2004.
- [33] Kim, J., Moin, P., Moser, R.: Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 177, pp. 133–166, 1987.
- [34] Klein, M., Sadiki, A., Janicka, J.: A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large-eddy simulations, *Journal of Computational Physics*, 186, pp. 652–665, 2003.
- [35] Kraichnan, R.H.: Diffusion by a random velocity field, *Physics of Fluids*, 13(1), pp. 22–31, 1969.
- [36] Kuerten, J.G.M.: Subgrid modeling in particle-laden channel flow, *Phys. Fluids* 18, 2006.
- [37] Kuerten, J.G.M., van Esch, B.P.M., van Kemenade, H.P., Brouwers, J.J.H.: The effect of turbulence on the efficiency of the rotational phase separator, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 28(4), 630-637, 2007.
- [38] Kulick, J. D., Fessler, J. R., Eaton, J. K.: Particle response and turbulence modification in fully developed channel flow, *J. Fluid Mech.*, vol. 277, 1994.
- [39] Le, H., Moin, P., Kim, J.: Direct numerical simulation of turbulent flow over backward-facing step. *Journal of Fluid Mechanics*, 330, pp. 349–373, 1997.
- [40] Lee, S., Lele, S.K., Moin, P.: Simulation of spatially evolving turbulence and the applicability of Taylor’s hypothesis in compressible flow. *Physics of Fluids A*, 4(7), s. 1521–1530, 1992.
- [41] Lilly, D. K.: A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method, *Phys. Fluids A*, Vol. 4, 1992.
- [42] Lukáčová-Medvid’ová, M.: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*. Akademické nakladatelství CERM, Brno, ISBN 80-214-2511-3, 2003.
- [43] Lund, T., Wu, X., Squires, D.: Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations. *Journal of Computational Physics*, 140, pp. 233–258, 1998.
- [44] Lundgren, T.S.: Linearly forced isotropic turbulence, *Annual Research Briefs (Center for Turbulence Research)*, Stanford, s. 461-473, 2005.
- [45] Versteeg, H. K., Malalalasekera, W.: *Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*, Pearson Education Limited, Essex, ISBN 978-0-13-127498-3, 2007.
- [46] Mandø, M., Lightstone, M.F., Rosendahl, L., Yin, C., Sørensen, H.: Turbulence modulation in dilute particle-laden flow, *Int. J. Heat and Fluid Flow* 30, 2009.
- [47] Matida, E.A., Nishino, K., Torii, K.: Statistical simulation of particle deposition on the wall from turbulent dispersed flow, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, vol. 21, 389-402, 2000.
- [48] McLaughlin, J.B.: Inertial migration of small sphere in linear shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 224, 261, 1991.

- 
- [49] Mei, R.: An approximate expression for the shear lift on a spherical particle at finite Reynolds number, *Int. Journal of Multiphase Flow*, 18, 145, 1987.
- [50] Meneveau, C., Katz, J.: Scale-invariance and turbulence models for Large eddy simulation, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32, pp. 1-32, 2000.
- [51] Meneveau, C., Lund, T. S., Cabot, W. H.: A Lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence, *J. Fluid Mech.*, Vol. 319, pp. 353-385, 1996.
- [52] Menom, S., Yeung, P. K., Kim, W. W.: Effect of subgrid models on the computed interscale energy transfer in isotropic turbulence, *Computers & Fluids*, Vol. 25, No. 2, pp. 165-180, 1996.
- [53] Moin, P., Kim, J.: Numerical investigations of turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 118, pp. 341-377, 1982.
- [54] Nasr, H., Ahmadi, G.: The effect of two-way coupling and inter-particle collisions on turbulence modulation in a vertical channel flow, *Int. J. Heat and Fluid Flow* 28, 2007.
- [55] Oesterlé, B., Dinh Tri, B., Vial, J.L.: Measurements of lift and torque on a rotating sphere at intermediate reynolds numbers, *Mechanics Research Communications*, Volume 18, Issues 2-3, s. 145-150, 1991.
- [56] Overholt, M., Pope, S.B.: A deterministic forcing scheme for direct numerical simulations of turbulence, *Comput. Fluids*, vol. 27, no. 1, s. 11-22, 1998.
- [57] Peskin, C.S.: The fluid dynamics of heart valves: Experimental, theoretical and computational methods, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 14, 235, 1982.
- [58] Pope, S. B.: *Turbulent Flows*, Cambridge University Press, Cambridge, ISBN 0 521 59886 9, 2000
- [59] Pope, S. B.: *Turbulent Flows*, Cambridge University Press, Cambridge, ISBN 0-521-59886-9, 2000
- [60] Pozorski, J., Luniewski, M.: Analysis of SGS Particle Dispersion Model in LES of Channel flow, *Quality and Reliability of Large-Eddy Simulations*, Springer, pp. 331-342, 2008
- [61] Rai, M.M., Moin, P.: Direct numerical simulation of transition and turbulence in a spatially evolving boundary layer. *Journal of Computational Physics*, pp. 109-169, 1993.
- [62] Rogallo, R.S.: Numerical experiments in homogeneous turbulence. Nasa TM-81315, 1981.
- [63] Rogers, M.M., Moser, R.: The three dimensional evolution of a plane mixing layer: the Kelvin-Helmholtz roll-up. *Journal of Fluid Mechanics*, 243, pp. 183-226, 1992.
- [64] Rosales C., Meneveau, C.: Linear forcing in numerical simulations of isotropic turbulence: Physical space implementations and convergence properties, *Phys Fluids* 17, 2005.
- [65] Rubinow, S.I., Keller, J.B.: The traverse force on spinning sphere moving in a viscous fluid, *Journal of FLuid Mechanics*, 11, 447, 1961.
- [66] Saffman, H.G.: The lift on small sphere particles in a slow shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 31, 624, 1968.
- [67] Sagaut, P., Deck, S., Terracol, M.: *Multiscale and Multiresolution Approaches in Turbulence*, Imperial College Press, London, ISBN 1-86094-650-X, 2006

- 
- [68] Sankaran, V., Menon, S.: LES of spray combustion in swirling flows, *J Turbulence*, Vol. 3, N11, 2002.
- [69] Shotorban, B., Mashayek, F.: A stochastic model for particle motion in large-eddy simulation *J Turbulence*, Vol. 7, N18, 2006.
- [70] Schiller, L., Neumann, A.: *Über die grundlegenden Berechnungen bei der Schwerkraftaufbereitung*, Ver. Deut. Ing., 77, 318, 1933.
- [71] Schluter, J.U., Pitsch, H., Moin, P.: Large-eddy simulation inflow conditions for coupling with Reynolds-averaged flow solvers. *AIAA Journal*, 42(3), pp. 478–484, 2004.
- [72] Schoppa, W., Hussain, F.: Coherent structure generation in near-wall turbulence. *Journal of fluid Mechanics*, 453, pp. 57-108, 2002.
- [73] Smagorinsky, J.: General circulation experiments with the primitive equations, *Mon. Weather Rev.*, Vol. 91, No. 3, pp. 99-164, 1963.
- [74] Sommerfeld, M., Wachen, van B., Oliemans, R.: *Best Particle Guidelines*, ERCOFTAC, version 20-08-2007, 2007.
- [75] Squires, K. D., Eaton, J. K.: *Particle response and turbulence modification in isotropic turbulence*, *Phys. Fluids A*, Vol. 2, No. 7, 1990.
- [76] Stokes, G.G.: On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, *Trans. Camb. Phil. Soc.* 9, Part II, 1851.
- [77] Stolz, S., Adams, N. A.: An approximate deconvolution procedure for large-eddy simulation, *Phys. Fluids*, Vol. 11, No. 7, pp. 1699-1701, 1999.
- [78] Stolz, S., Adams, N. A., Kleiser, L.: An approximate deconvolution model for large-eddy simulation with application to incompressible wall-bounded flows, *Phys. Fluids*, Vol. 13, No. 4, pp 997-1015, 2001.
- [79] Tanaka, T., Tsuji, Y.: Numerical simulations of gas-solid two-phase flow in a vertical pipe: on the effect of inter-particle collisions, *ASME FED Vol.* 121, 123, 1991.
- [80] Tanaka, T., Yonemura, S., Kiribayashi, K., Tsuji, Y.: Cluster formation and particle-induced instability in gas-solid flows predicted by the DSMC method, *JSME Int. J.*, 39, 239, 1996.
- [81] Thomas, F.O.: Structure of Mixing Layers and Jets, *Appl. Mech. Rev.* 44(3), 119-153, 1991.
- [82] Vreman, B., Geurts, B., Kuerten, H.: Large-eddy simulation of the turbulent-mixing layer, *J. Fluid. Mech.*, Vol. 339, pp. 357-390, 1997.
- [83] Vreman B., Geurts, B.J., Deen, N.G., Kuipers, J.A.M., Kuerten, J.G.M.: Two- and Four-way coupled Euler-Lagrangian Large-Eddy Simulation of turbulent particle-laden channel flow, *Flow Turbulence Combust*, 82, 2009.
- [84] Wang, Q., Squires, K.D.: Large Eddy Simulation of particle deposition in a vertical turbulent channel flow, *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 22, 667-683, 1996.
- [85] Wilcox, D. C.: *Turbulence Modeling for CFD*, DWC Industries, Anaheim, ISBN 0-9636051-5-1, 2000.
- [86] Wittig, S., Wang, Y., James, P.W.: On the effect of anisotropy on the turbulence dispersion and deposition of small particles, *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 25, 551-558, 1999.

- [87] Yamamoto, Y., Potthoff, M., Tanaka, T., Kajishima, T., Tsuji, Y.: *Large Eddy Simulation of turbulent gas-particle flow in a vertical channel: effect of considering inter-particle collisions*, J. Fluid Mech., vol. 442, 2001.
- [88] Young, A.D.: *Boundary layer theory*, Blackwell scientific Publications Ltd., London, ISBN 0-930403-57-6, 1989.
- [89] Yuu, S., Yasujouchi, N., Hirosawa, Y., Jotaki, T.: *Particle diffusion in a dust laden round jet*, AIChE Journal, 24, 509, 1978.
- [90] Zang, Y., Street, R. L., Koseff, J.: *A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flow*, Phys. Fluids A, Vol. 5, pp. 3186-3196, 1993.

---

## Publikace autora

---

- [I] VOLAVÝ, J.; FORMAN, M.; JÍCHA, M.: Turbulence modulation by particles in Large Eddy Simulation of backward-facing step, *Journal of Physics: Conference Series*, Vol.2011, (2011), No.318, pp.1-7, ISSN 1742-6588, IOP Publishing Ltd.
- [II] VOLAVÝ, J.; FORMAN, M.; JÍCHA, M.: Influence of the turbulence representation at the inlet on the downstream flow pattern in LES of backward-facing step, *Experimental fluid mechanics 2011: Conference proceedings*, pp.485-489, ISBN 978-80-7372-784-0, (2011), Technical university of Liberec
- [III] VOLAVÝ, J.; FORMAN, M.; JÍCHA, M.: Large Eddy Simulation: subgrid-scale models, *Acta Technica ČSAV*, Vol.2011, (2011), No.3, pp.271-280, ISSN 0001-7043, Institute of Thermomechanics AS CR
- [IV] VOLAVÝ, J.; JÍCHA, M.: Large Eddy Simulation of backward facing step, 30, *Setkání kateder mechaniky tekutin a termomechaniky*, pp.269-272, ISBN 978-80-7372-747-5, (2011), Technická univerzita v Liberci
- [V] VOLAVÝ, J.; FORMAN, M.; JÍCHA, M.: The effect of turbulence anisotropy on particle deposition in particle-laden channel flow, *Engineering Mechanics 2011*, pp.663-666, ISBN 978-80-87012-33-8, (2011), Academy of Sciences of the Czech Republic
- [VI] VOLAVÝ, J.; FORMAN, M.; JÍCHA, M.: Large eddy simulation of turbulent particle-laden channel flow considering turbulence modulation by particles, *Experimental Fluid Mechanics 2010*, pp.824-828, ISBN 978-80-7372-670-6, (2010), Technical University of Liberec
- [VII] VOLAVÝ, J.; FORMAN, M.; JÍCHA, M.: New Inlet Boundary Condition Treatment for Large Eddy Simulation, *Colloquium Fluid Dynamics 2010*, pp.37-38, ISBN 978-80-87012-27-7, (2010), Institute of thermomechanics, AS CR
- [VIII] VOLAVÝ, J.; FORMAN, M.; JÍCHA, M.: Turbulence Forcing Scheme In Physical Space Based On Ornstein-Uhlenbeck Process, *CFD 2010*, pp.564-564, ISBN 978-989-96778-0-7, (2010), Eccomas
- [IX] VOLAVÝ, J.; FORMAN, M.; JÍCHA, M.: Subgrid Modeling In Large Eddy Simulation, *Engineering Mechanics 2010*, pp.169-170, ISBN 978-80-87012-26-0, (2010), Institute of Thermomechanics, AS CR
- [X] VOLAVÝ, J.; KUERTEN, J.G.M.: Large Eddy Simulation of particle laden channel flow: Subgrid modeling in particle equation of motion, *Particle-Based Methods: Fundamentals and Applications*, pp.208-211, ISBN 978-84-96736-82-5, (2009), CIMNE

- [XI] VOLAVÝ, J.; KUERTEN, J.G.M.: The effect of subgrid scales on motion of particles in particle-laden channel flow, *Colloquium Fluid Dynamics Proceedings*, pp.55-56, ISBN 978-80-87012-21-5, (2009), Institute of Thermodynamics AS CR
- [XII] VOLAVÝ, J.; FORMAN, M.; JÍCHA, M.: Vliv volby interpolačního schéma na transport částic při proudění kanálem, *Strojárstvo/Strojírenství*, Vol.2009, (2009), No.6, pp.283-284, ISSN 1335-2938, Media ST s.r.o.
- [XIII] VOLAVÝ, J.; JÍCHA, M.; FORMAN, M.: Buzení turbulence při proudění kanálem užitím Osnsteinova-Uhlenbeckova procesu, XXVII. Setkání kateder mechaniky, pp.371-374, ISBN 978-80-7043-666-0, (2008), Západočeská universita v Plzni



---

## Seznam použitých symbolů a zkratek

---

Symbol	Jednotka	Popis
$C_D$	-	odporový součinitel
$C_{sim}$	-	konstanta podobnosti měřítek
$C_S$	-	Smagorinského konstanta
$\mathbf{G}$	-	jádro filtru
$F$	$\text{m.s}^{-2}$	budící síla
$H$	m	výška schodu
$k_{sgs}$	$\text{m}^2.\text{s}^{-2}$	subgridní kinetická energie
$K_0$	-	Kolmogorova konstanta
$\mathcal{L}$	m	charakteristická délka
$\mathcal{L}_{ij}$	$\text{m}^2.\text{s}^{-2}$	Leonardův tenzor napětí
$L$	m	integrální délkové měřítko
$L_K$	m	Kolmogorovo délkové měřítko
$N_t$	-	počet časových kroků
$N_{xyz}$	-	počet bodů výpočetní sítě
$p$	Pa	tlak
$Q_N$	-	aproximace filtru $\mathbf{G}$
$R$	-	korelační funkce
$Re$	-	Reynoldsovo číslo
$Re_K$	-	Kolmogorovo Reynoldsovo číslo
$Re_m$	-	Reynoldsovo číslo založené na střední rychlosti
$Re_p$	-	Reynoldsovo číslo částice
$Re_\tau$	-	Reynoldsovo číslo založené na třetí rychlosti
$S_{ij}$	$\text{s}^{-1}$	tenzor napětí
$St$	-	Stokesovo číslo
$\bar{S}_{ij}$	$\text{s}^{-1}$	filtrovaný tenzor napětí
$t$	s	čas
$T$	s	integrální časové měřítko
$T_{OU}$	s	časové měřítko OU procesu
$\mathcal{U}, u_0$	$\text{m.s}^{-1}$	charakteristická rychlost
$\mathbf{u}$	$\text{m.s}^{-1}$	vektor rychlosti
$\mathbf{v}$	$\text{m.s}^{-1}$	vektor rychlosti částice
$\bar{\mathbf{u}}$	$\text{m.s}^{-1}$	fitrovaná rychlost
$\mathbf{u}'$	$\text{m.s}^{-1}$	fluktuační rychlosti
$u_i$	$\text{m.s}^{-1}$	složka vektoru rychlosti
$u_\tau$	$\text{m.s}^{-1}$	třetí rychlost
$v_K$	$\text{m.s}^{-1}$	Kolmogorovo měřítko rychlosti
$x_i$	m	prostorová proměnná
$y^+$	-	bezrozměrná vzdálenost od stěny

## Řecká písmena

---

$\alpha$	-	objemový podíl částic v proudu
$\delta$	m	polovina výšky kanálu
$\delta_{ij}$	-	Kroneckerovo delta
$\Delta$	m	šířka filtru
$\Delta x^+$	-	velikost výpočetní buňky ve směru po proudu
$\Delta z^+$	-	velikost výpočetní buňky ve směru příčném
$\epsilon$	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$	disipace energie
$\kappa$	$\text{m}^{-1}$	vlnové číslo
$\lambda$	m	Taylorovo mikroměřítko
$\nu$	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	kinematická viskozita
$\nu_t$	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	turbulentní kinematická viskozita
$\nu_{sgs}$	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	subgridní kinematická viskozita
$\mu$	$\text{Pa} \cdot \text{s}^{-1}$	dynamická viskozita
$\rho$	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	hustota
$\sigma_{OU}$	-	rozptyl OU procesu
$\tau_{ij}$	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	tenzor subgridních napětí
$\tau_K$	s	Kolmogorovo časové měřítko
$\tau_p$	s	relaxační čas částice
$\phi$	-	hmotnostní podíl částic v proudu
$\xi$	-	náhodná veličina s rozdělením $N(0,1)$

---

---

## Seznam obrázků

---

1.1	Tvar autokorelační funkce rychlosti a Taylorovo měřítko. Převzato z [67]. . . . .	8
1.2	Znázornění energetické kaskády. Obě osy jsou v logaritmických souřadnicích. Převzato z [67]. . . . .	10
1.3	Filtry používané v LES: čárkovaná čára: Box filtr, plná čára: Gaussův filtr, čerchovaná čára: ostrý spektrální filtr. Převzato z [58] . . . . .	14
1.4	Filtrovaný referenční signál (plná čára) pomocí box filtru s šířkou filtru $\ell/16$ (čárkovaná čára) a $\ell/4$ (čerchovaná čára). Převzato z [22] . . . . .	15
1.5	Škálování dynamické Smagorinského konstanty v přístěnné oblasti v proudu kanálem s $Re_\tau = 1050$ . Plná a čárkovaná čára jsou výsledky simulací s různým rozlišením. Převzato z [50]. . . . .	18
1.6	Průměrné rychlostní profily po proudu za schodem: – LES s lokalizovaným Smagorinského modelem, o experimentální data; převzato z [23]. . . . .	20
1.7	Podélné fluktuace rychlosti částic se Stokesovým číslem 1, srovnání subgridních modelů. Převzato z [36]. . . . .	23
2.1	Okamžitá rychlost pro rovnoměrný rychlostní profil (Case A) . . . . .	25
2.2	Okamžitá rychlost pro plně vyvinuté proudění na vstupu (Case C) . . . . .	25
2.3	Průměrná rychlost pro rovnoměrný rychlostní profil (Case A) . . . . .	26
2.4	Průměrná rychlost pro plně vyvinuté proudění na vstupu (Case C) . . . . .	26
2.5	Rychlostní profil ve vzdálenosti $x/H = 2$ za schodem . . . . .	26
2.6	Rychlostní profil ve vzdálenosti $x/H = 5$ za schodem . . . . .	26
2.7	Rychlostní profil ve vzdálenosti $x/H = 7$ za schodem . . . . .	26
2.8	Rychlostní profil ve vzdálenosti $x/H = 9$ za schodem . . . . .	26
2.9	Schéma použití předběžné simulace pro generaci turbulence na vstupu pro simulaci . . . . .	28
2.10	Realizace Ornstein-Uhlenbeckova procesu . . . . .	33
2.11	Schéma předběžné simulace s buzením turbulece . . . . .	34
2.12	Geometrie a síť pro simulaci proudu kanálem . . . . .	35
2.13	Lokace bodů, v nichž dochází k buzení turbulence . . . . .	36
2.14	Rychlostní profil napříč kanálem pro $Re_\tau=110$ . . . . .	37
2.15	Fluktuace podélné složky rychlosti pro $Re_\tau=110$ . . . . .	37
2.16	Fluktuace složky rychlosti kolmé na stěnu pro $Re_\tau=110$ . . . . .	37
2.17	Energetické spektrum v $y/\delta = 0.5$ pro $Re_\tau=110$ . . . . .	38
2.18	Energetické spektrum v $y/\delta = 1$ pro $Re_\tau=110$ . . . . .	38
2.19	Rychlostní profil napříč kanálem pro $Re_\tau=400$ . . . . .	38
2.20	Fluktuace podélné složky rychlosti pro $Re_\tau=395$ . . . . .	39
2.21	Fluktuace složky rychlosti kolmé na stěnu pro $Re_\tau=395$ . . . . .	39
2.22	Energetické spektrum v $y/\delta = 0.5$ pro $Re_\tau=395$ . . . . .	39
2.23	Energetické spektrum v $y/\delta = 1$ pro $Re_\tau=395$ . . . . .	39

2.24	Závislost podélné složky rychlosti na čase v bodě umístěném do geometrického středu kanálu pro $Re_\tau = 395$ . . . . .	40
2.25	Časový korelační koeficient rychlosti v bodě uprostřed kanálu . . . . .	40
2.26	Rychlostní profil v kanále pro $Re_\tau=400$ a různý počet budících bodů . . . . .	41
2.27	Fluktuace podélné složky rychlosti pro $Re_\tau=400$ a různý počet budících bodů . . . . .	41
3.1	Schématické znázornění proudu s disperzní fází . . . . .	43
3.2	Schématické znázornění proudu s odseparovanými fázemi . . . . .	44
3.3	Schématické znázornění s přechodem do disperzní fáze . . . . .	44
3.4	Velikost částice v porovnání s výpočetní buňkou: a) plně rozřešené pole kolem částice, b) bodová reprezentace částice . . . . .	46
3.5	Závislost velikosti součinitele odporu na Reynoldsově čísla částice. Převzato z [74] . . . . .	48
3.6	Proudnice kolem částice pro $Re_p = 10, 100$ a $500$ . Převzato z [11] . . . . .	48
3.7	Částice ve smykovém proudu . . . . .	49
3.8	Magnusova síla působící na rotující částici v proudu . . . . .	50
3.9	Grafické znázornění relaxačního času částice . . . . .	52
3.10	Srovnání průběhu rychlosti v čase pro různě velké částice . . . . .	52
3.11	Interakce nosné a disperzní fáze v závislosti na koncentraci disperzní fáze. Převzato z [74] . . . . .	53
3.12	Schéma interakcí v systému nosná-disperzní fáze . . . . .	55
3.13	Výpočetní doména . . . . .	60
3.14	Detail výpočetní sítě na odtokové hraně . . . . .	61
3.15	Schématické znázornění posloupnosti výpočtu . . . . .	62
3.16	Počáteční podmínka pro rychlost . . . . .	63
3.17	Schéma přenosu rychlosti z roviny za inletem zpět na inlet . . . . .	63
3.18	Vývoj rychlosti po dobu $0.5s$ . . . . .	64
3.19	Plně vyvinutý zpětný proud za schodem . . . . .	64
3.20	Vývoj průměrné rychlosti v čase . . . . .	65
3.21	Počáteční stav simulace s částicemi . . . . .	65
3.22	Rychlostní profil v pozici $x/H = 2$ za schodem . . . . .	66
3.23	Rychlostní profil v pozici $x/H = 5$ za schodem . . . . .	66
3.24	Rychlostní profil v pozici $x/H = 7$ za schodem . . . . .	66
3.25	Rychlostní profil v pozici $x/H = 9$ za schodem . . . . .	66
3.26	Průběh smykového napětí na stěně za schodem . . . . .	67
3.27	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 2$ za schodem . . . . .	67
3.28	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 5$ za schodem . . . . .	67
3.29	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 7$ za schodem . . . . .	68
3.30	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 9$ za schodem . . . . .	68
3.31	Průměrný hmotnostní podíl $90\mu m$ částic v proudu pro $\phi=20\%$ . . . . .	69
3.32	Průměrný hmotnostní podíl $90\mu m$ částic v proudu pro $\phi=40\%$ . . . . .	69
3.33	Průměrný hmotnostní podíl $90\mu m$ částic v proudu pro $\phi=60\%$ . . . . .	69
3.34	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 2$ za schodem s $90\mu m$ částicemi - LES simulace . . . . .	70
3.35	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 2$ za schodem s $90\mu m$ částicemi - experiment . . . . .	70
3.36	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 5$ za schodem s $90\mu m$ částicemi - LES simulace . . . . .	71
3.37	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 5$ za schodem s $90\mu m$ částicemi - experiment . . . . .	71

3.38	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 7$ za schodem s $90\mu\text{m}$ částicemi - LES simulace	71
3.39	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 7$ za schodem s $90\mu\text{m}$ částicemi - experiment	71
3.40	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 9$ za schodem s $90\mu\text{m}$ částicemi - LES simulace	72
3.41	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 9$ za schodem s $90\mu\text{m}$ částicemi - experiment	72
3.42	Průměrný hmotnostní podíl $150\mu\text{m}$ částic v proudu pro $\phi=20\%$	72
3.43	Průměrný hmotnostní podíl $150\mu\text{m}$ částic v proudu pro $\phi=40\%$	73
3.44	Průměrný hmotnostní podíl $150\mu\text{m}$ částic v proudu pro $\phi=60\%$	73
3.45	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 2$ za schodem s $150\mu\text{m}$ částicemi - LES simulace	73
3.46	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 2$ za schodem s $150\mu\text{m}$ částicemi - experiment	73
3.47	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 5$ za schodem s $150\mu\text{m}$ částicemi - LES simulace	74
3.48	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 5$ za schodem s $150\mu\text{m}$ částicemi - experiment	74
3.49	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 7$ za schodem s $150\mu\text{m}$ částicemi - LES simulace	74
3.50	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 7$ za schodem s $150\mu\text{m}$ částicemi - experiment	74
3.51	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 9$ za schodem s $150\mu\text{m}$ částicemi - LES simulace	75
3.52	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 9$ za schodem s $150\mu\text{m}$ částicemi - experiment	75
3.53	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 2$ za schodem s $150\mu\text{m}$ částicemi - LES simulace s modifikovaným subgridním modelem	76
3.54	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 5$ za schodem s $150\mu\text{m}$ částicemi - LES simulace s modifikovaným subgridním modelem	76
3.55	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 7$ za schodem s $150\mu\text{m}$ částicemi - LES simulace s modifikovaným subgridním modelem	77
3.56	Fluktuace podélné složky rychlosti v pozici $x/H = 9$ za schodem s $150\mu\text{m}$ částicemi - LES simulace s modifikovaným subgridním modelem	77
3.57	Relativní rychlost částic se Stokesovým číslem $St = 1$	80
3.58	Relativní rychlost částic se Stokesovým číslem $St = 5$	80
3.59	Relativní rychlost částic se Stokesovým číslem $St = 25$	80
3.60	Fluktuace normálové složky rychlosti částic se Stokesovým číslem $St = 1$	81
3.61	Fluktuace normálové složky rychlosti částic se Stokesovým číslem $St = 5$	81
3.62	Fluktuace normálové složky rychlosti částic se Stokesovým číslem $St = 25$	81
3.63	Koncentrace částic se Stokesovým číslem $St = 1$ u stěny	81
3.64	Koncentrace částic se Stokesovým číslem $St = 5$ u stěny	81
3.65	Koncentrace částic se Stokesovým číslem $St = 25$ u stěny	82

---

## Seznam tabulek

---

2.1	Parametry proudění kanálem . . . . .	35
3.1	Parametry proudu . . . . .	58
3.2	Vlastnosti částic . . . . .	59
3.3	Rozměry výpočetní oblasti . . . . .	60