



Pedagogická  
fakulta  
Faculty  
of Education

Jihočeská univerzita  
v Českých Budějovicích  
University of South Bohemia  
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích  
Pedagogická fakulta  
Katedra matematiky

## DIPLOMOVÁ PRÁCE

# Derivace v aplikačních úlohách sbírka řešených příkladů

**Vedoucí práce**

RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

**Vypracoval**

Bc. Tomáš Sekal

České Budějovice 2015

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma „derivace v aplikačních úlohách – sbírka řešených příkladů“ jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .....

## **Abstrakt**

Tématem této diplomové práce je vytvoření sbírky řešených příkladů na téma derivace v aplikačních úlohách. Zaměřuje se tedy především na úlohy z každodenních situací, fyzikálních problémů a úloh z technických oborů. Příklady jsou řazeny od nejjednodušších ke složitějším. U každého příkladu je uveden postup řešení ilustrovaný náčrty daných situací vytvořených v programu Google SketchUp a GeoGebra, popř. 3D grafy jednotlivých funkcí vytvořených pomocí matematického programu Maple. V samotném úvodu je poskytnuta „první pomoc“ v podobě návodu na řešení tohoto druhu příkladů.

## **Abstract**

The theme of this diploma thesis is to create a collection of exercises on the differentiation in application tasks. It focuses primarily on tasks of everyday situations, physical problems and problems from technical disciplines. Examples are sorted from easy to advanced ones. For each example there is a solution procedure illustrated with sketches of the situation created in majority with Google SketchUp and GeoGebra, eventually 3D graphs of each function created using mathematical program Maple. In the very introduction of this theses is given "first aid" in the form of manual to solve this kind of exercises.

# Obsah

I	Úvod .....	4
II	Teoretická část - „manuál“ .....	6
	Obecný zápis funkce dvou proměnných .....	6
	Definice derivace .....	7
	Tečna a směrnice .....	7
	Definice tečny a směrnice .....	8
	Pravidlo řetězení .....	8
	Implicitní derivování .....	8
	Diferenciální rovnice .....	9
	Vyšetřování lokálních extrémů .....	10
	1) Nutná podmínka existence extrému .....	10
	2) Druhé parciální derivace .....	10
	3) Hessián .....	10
	4) ... kde Hessián nepomůže .....	11
III	Praktická část - sbírka příkladů .....	12
	Rovinné útvary .....	13
	1. příklad – Rovnoběžník: při daném $o$ max. $S$ .....	13
	2. příklad – Rychlost rozšiřování spáleniště .....	15
	3. příklad – Oplocování pozemku .....	16
	Objemy & povrchy .....	21
	4. příklad – Povrch krychle: abs. a rel. chyba .....	21
	5. příklad – Obdélníkový papír: odstříhnutí rohů .....	23
	6. příklad – Kvádr vepsaný do rotačního válce .....	26
	7. příklad – Vodní nádrž: min. povrch .....	29
	8. příklad – Teplotní roztažnost: změna objemu .....	32
	Náklady & výdeje .....	34
	9. příklad – Reklama: investice pro max. zisk .....	34
	10. příklad – Elektrické vedení: pořizovací náklady .....	36
	11. příklad – Průmyslový závod: nejlevnější doprava do města .....	40
	12. příklad – Nejvhodnější cesta: migrace ptactva .....	44
	Kapaliny & výtoky .....	50
	13. příklad – Rychlost růstu hladiny v nádrži .....	50
	14. příklad – Pokles hladiny v nádrži tvaru polokoule .....	53
	15. příklad – Výtok kapaliny stěnou nádoby .....	55
	Fyzikální zákony .....	60
	16. příklad – Propustnost mostu .....	60
	17. příklad – Chladnutí čaje .....	66
	18. příklad – Radioaktivní rozpad .....	70
	19. příklad – Barometrická rovnice .....	74
	20. příklad – Myšlenkový průlet kamene Zemí .....	75
	21. příklad – Nabíjení kondenzátoru .....	77
	22. příklad – Akumulátor: max. výkon .....	80
	Další fyzikální úlohy .....	84
	23. příklad – Lod'ka a molo: rychlost při tažení .....	84
	24. příklad – Balicí automat .....	88
	25. příklad – Závěsný most: tvar řetězu .....	92
	Matematické úlohy .....	94
	26. příklad – Číslo 24: rozložení na součet $\rightarrow$ max. součin .....	94
	27. příklad – Najděte lok. extrémy: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(x^2 + y^2)$ .....	97
	Literatura .....	104

# I Úvod

Vážení čtenáři,

do rukou se Vám dostala diplomová práce na téma „Derivace v aplikačních úlohách – sbírka řešených příkladů“, která jak název napovídá obsahuje řešené příklady z oblastí fyziky, techniky a každodenních situací, při kterých je zapotřebí (nebo je to alespoň jednou z možností) využití diferenciálního počtu jedné nebo i více proměnných. Mezi ně patří tyto příklady, se kterými se na následujících stranách setkáte – výpočet rozměrů nádob tak, aby při maximálním objemu byly náklady na výrobu minimální; minimální pořizovací náklady elektrického vedení; maximální zisk z prodeje v závislosti na investici do reklamy; nejpohodlnější cesta migrace ptactva; rychlost rozšiřování spáleniště; rychlost růstu hladiny kapaliny v nádrži; rychlost taženého objektu přes kladku; propustnost mostu; odvození rozpadového zákona, Newtonova zákona chladnutí a barometrické rovnice; odvození pohybové rovnice mechanického oscilátoru a další. Tato práce je určena zejména studentům vysokých škol, kteří se zabývají studiem matematiky anebo fyziky, ale i ostatním zájemcům o matematiku a přírodní vědy. Především by tato práce měla sloužit jako cvičebnice - nikoli učebnice – a ukázka, že diferenciální počet není samoučelný, ale má široké spektrum využití v praxi, pro ty, kteří již prošli teoretickým výcvikem diferenciálního počtu a maticové algebry.

V úvodu této práce naleznete zjednodušený postup, jakýsi manuál, na řešení příkladů v této práci obsažených. Po jeho prostudování budete tedy schopni řešit příklady naprosto samostatně. Nicméně u každého příkladu je uveden postup řešení, ilustrovaný obrázky – tam, kde je to nezbytné – z programu Google SketchUp, popř. v dnešní době stále více populární Geogebra. Program Google SketchUp je volně stažitelný (v základní verzi) 3D rýsovací program, který se těší obrovské popularitě na poli 3D modelování, architektonických výkresů a náčrtů. Stejně tak GeoGebra je mnohými opěvována pro svoji dynamičnost při rýsování rovinném, ale v nejnovější verzi již i prostorovém. Je rovněž softwarem volně stažitelným pro nekomerční použití. Příklady, které to vyžadují, jsou doplněny grafy funkcí vytvořenými v matematickém programu Maple. Program Maple je využíván na mnoha vysokých školách (nejen) v České republice. Umí nalézt extrémy a limity funkce jedné a více proměnných,

symbolicky derivovat, integrovat funkce, řešit lineární a nelineární rovnice, soustavy nerovnic, obyčejné a parciální diferenciální rovnice a jejich soustavy a také zobrazit jejich geometrickou reprezentaci a to jak ve 2D, tak v případě funkcí dvou proměnných ve 3D. Pomocí různých příkazů umí Maple zjednodušit a upravit výrazy a tak si správnost řešení můžeme ověřit.

Příklady, které zde najdete, jsem čerpal hlavně z literatury [20], [15], [16] a také [24], [19], [7], [1], [2].

Na závěr mi dovolu, abych vám popřál příjemné a inspirativní chvíle strávené nad touto „knihou“. Doufám, že příklady v této práci vám, kromě trénování šedých buněk, rozšíří obzory na poli diferenciálního počtu a prohloubí vztah k matematice nebo i fyzice obecně.

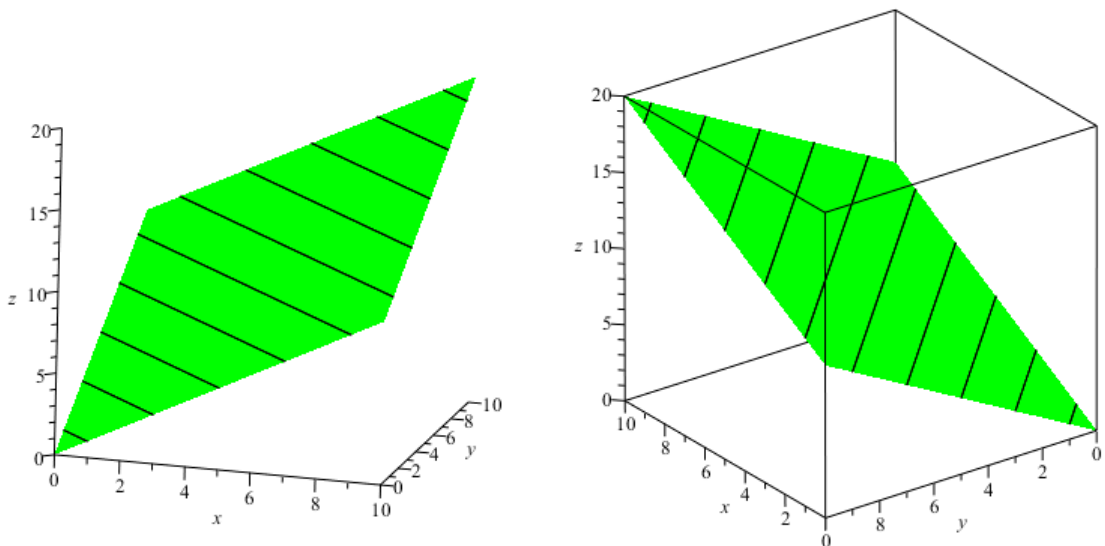
## II Teoretická část - „manuál“

V této kapitole, jak jsem již naznačil v úvodu, se krátce pověnujeme teoretické části problému, tzn. „jak na to.“ Celý postup, který jsem rozdělil do 4 částí, je uveden níže. Tento postup jsem co nejvíce zjednodušil. Jako zdroj informací jsem využil literaturu [4], [11], [12], [23].

### Obecný zápis funkce dvou proměnných:

$$z = f(x, y) \quad D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

Grafickou interpretací (grafem) takové funkce je plocha v prostoru (analogie 3D zobrazování) o souřadnicích  $[x, y, z]$ . Pro ilustraci viz následující graf funkce  $f(x, y) = x + y$ , jejíž zobrazením je rovina procházející počátkem souřadného systému.



Označme nyní  $X = [x, y]$ . Maximální a minimální hodnotu funkce 2 proměnných  $f(X)$  pro body  $X$  z množiny  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  nazýváme extrémů funkce v množině  $V$ . Nabývá-li funkce svého maxima (minima) v bodě  $C \in V$ , pak pro všechna  $X \in V$  platí  $f(X) \leq f(C)$  ( $f(X) \geq f(C)$ ), tj. označíme-li  $X = C + \bar{h}$ , pak  $\Delta f(C) \leq 0$  ( $\Delta f(C) \geq 0$ ), a to pro všechna  $\bar{h}$  taková, aby body  $C + \bar{h}$  ležely ve  $V$ .

Nechť  $V$  je okolí bodu  $C$  z definičního oboru  $D_f$  o poloměru  $\delta > 0$ . Říkáme: nechť  $C \in D_f$  je takový bod, že existuje kolem něho tak malé okolí, že pro všechna  $|\bar{h}| < \delta$  je  $\Delta f(C) \leq 0$  ( $\Delta f(C) \geq 0$ ); potom bod  $C$  nazýváme **lokální maximum** (minimum). [23]

**Definice derivace:**

Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$ , kterou označujeme  $f'(x_0)$ , je definována předpisem

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

To můžeme vyjádřit ve zkrácené formě jako

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{d y}{d x}, \quad (2)$$

kde ovšem

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \quad (3)$$

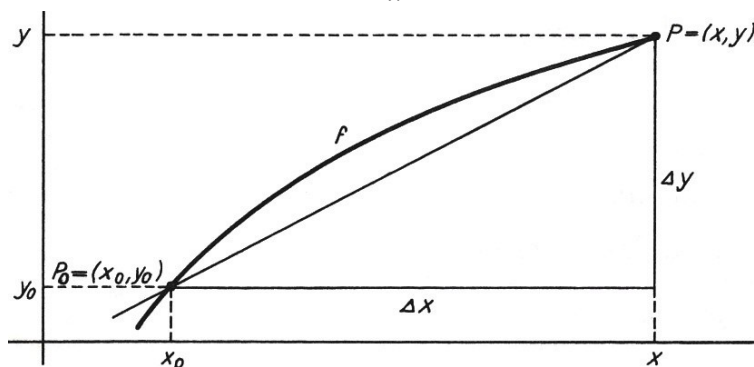
Jestliže funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  derivaci (tj. jestliže uvedená limita existuje), říkáme, že funkce  $f$  je v  $x_0$  derivovatelná. Je-li funkce  $f$  derivovatelná v každém bodě dané množiny, říkáme, že je na této množině derivovatelná. Není-li třeba množinu specifikovat, nebo pokud je zřejmé ze souvislosti, o kterou množinu jde, říkáme stručně, že  $f$  je derivovatelná funkce.

Proces nalezení derivace se nazývá derivování. Studium derivací se zabývá tzv. diferenciální počet.

Derivace  $f'(x_0)$  se také nazývá okamžitá změna velikosti  $f(x)$  vzhledem k  $x$  v bodě  $x_0$ . ([11], s. 97)

**Tečna a směrnice:**

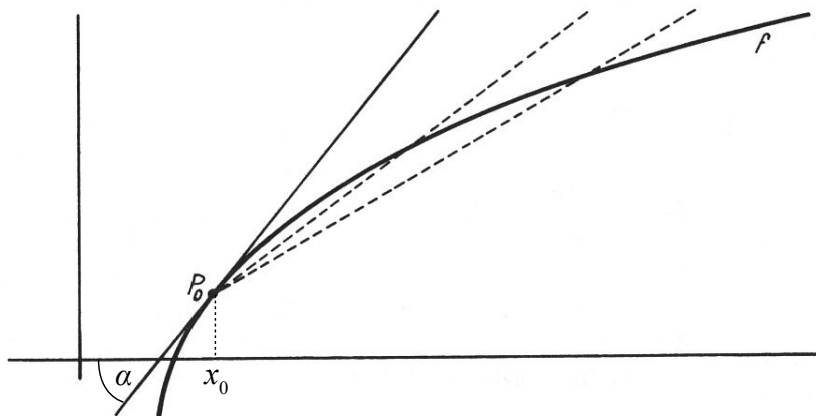
Nechť  $f$  je funkce a  $P_0 = (x_0, y_0)$  bod jejího grafu. Co rozumíme směrnicí grafu  $f$  v bodě  $P_0$ ? Co rozumíme tečnou ke grafu v bodě  $P_0$ ? Je-li  $P = (x, y)$  libovolný jiný bod na grafu, určují body  $P$  a  $P_0$  přímkou. Nechť  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$  (viz obr. níže převzatý z [11]). Směrnice přímky  $PP_0$  je  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ . ([11], s. 99)





### Definice tečny a směrnice:

Tečna ke grafu funkce  $f$  v bodě  $P_0 = (x_0, y_0)$  je přímka procházející bodem  $P_0$  se směrnici  $f'(x_0)$  (viz obr. níže převzatý z [11]). Číslo  $f'(x_0)$  se také nazývá směrnice grafu funkce  $f$  v bodě  $P_0$ . ([11], s. 99). A podle Z. Horského [13] je  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ .



A ještě se nám v některých příkladech bude hodit:

### Pravidlo řetězení:

Nechť funkce  $g$  je derivovatelná v bodě  $x$  a funkce  $f$  derivovatelná v bodě  $g(x)$ . Pro  $h(x) = f(g(x))$  platí  $h'(x) = f'(g(x)) g'(x)$ . ([11], s. 118)

Stručně

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}. \quad (4)$$

### Implicitní derivování:

Uvažujme rovnici

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (y > 0), \quad (5)$$

kterou bychom museli vyřešit pro  $y$ , abychom ji mohli derivovat. Uveďme jednodušší postup. Všimněme si, že pravá strana rovnice je konstantní funkce 1. Tedy:

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0,$$

odkud

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (y > 0). \quad (6)$$

Tento postup se nazývá implicitní derivování. Jak naznačuje příklad, který jsme právě uvedli, je tento postup obzvláště vhodný v případech, ve kterých se vyskytují racionální exponenty.

Implicitní derivování lze kombinovat s pravidlem řetězení vzhledem k dalším proměnným. Předpokládejme, že v (5) jsou  $x$  a  $y$  derivovatelné funkce další proměnné  $t$ . Pak můžeme v (5) přímo derivovat:

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0,$$

takže

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt} \quad (y > 0). \quad (7)$$

([11], s. 124)

### Diferenciální rovnice:

Diferenciální rovnice je rovnice obsahující  $x$  (nezávisle proměnnou),  $y$  (závisle proměnnou) a některé derivace  $y$ . Vyřešit dif. rovnici znamená najít funkci  $\varphi$  takovou, že  $y = \varphi(x)$  vyhovuje dané rovnici.

Obecná diferenciální rovnice prvního řádu má tvar

$$y' = f(x, y). \quad (8)$$

Příklady diferenciálních rovnic jsou  $y' = x$ ,  $y' = y$ . První je triviální: Řešení je  $y = \int x dx$ . Podobně libovolná rovnice tvaru  $y' = f(x)$  má řešení:  $y = \int f(x) dx$ . Naproti tomu rovnice  $y' = ky$ , kde  $k$  je konstanta, vyžaduje zvláštní techniku. ([11], s. 576)

Jedná se o tzv. *separaci proměnných*:

$$\frac{y'}{y} = k, \quad (9)$$

což můžeme rovněž přepsat pomocí diferenciálů jako

$$\frac{dy}{dx} \frac{1}{y} = k \rightarrow dy \frac{1}{y} = k dx \rightarrow \int \frac{1}{y} dy = k \int dx \rightarrow \ln y = kx + \ln C.$$

Po úpravě

$$\ln y - \ln C = kx \rightarrow \ln \frac{y}{C} = kx \rightarrow e^{\ln \frac{y}{C}} = e^{kx} \rightarrow$$

$$\boxed{y = C e^{kx}}. \quad (10)$$

Samotné vyšetřování lokálních extrémů probíhá následovně (převzato z [2]):

### 1) Nutná podmínka existence extrému

Jako první musíme vyšetřit tzv. „nutnou podmínku existence extrému“. Řekněme, že funkce  $f$  má v bodě  $(x_0, y_0)$  lokální extrém. **Existují-li** v bodě  $(x_0, y_0)$  parciální derivace prvního řádu, pak jsou rovny nule. Musí tedy platit:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Řešením této soustavy rovnic získáme souřadnice  $x_i$  a  $y_j$  stacionárních bodů  $A_1, A_2, \dots, A_n$  kde  $A_k = [x_i, y_j]$ . Jsou to body „podezřelé“ z extrému.

Anebo pokud parciální derivace prvního řádu neexistují, musíme k vyšetření použít postup uvedený na konci kapitoly.

### 2) Druhé parciální derivace

Nyní potřebujeme zjistit, jestli skutečně v nalezených stacionárních bodech jsou lokální extrémy a jaké. K tomu budeme potřebovat druhé parciální derivace podle  $x$ , podle  $y$  a smíšenou derivaci (jelikož smíšené derivace v bodech, ve kterých jsou spojitě, jsou si rovny, stačí nám jen jedna z nich):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dots$$

### 3) Hessián

Dalším krokem v cestě za nalezením extrémů je Hessián nebo-li determinant Hessovy matice. Při jeho sestavení využijeme druhé parciální derivace z předchozího kroku a poskládáme je do matice takto:

$$\det H_f = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

A nyní pro každý stacionární bod vypočítáme determinant tak, že dosadíme souřadnice bodu do každé proměnné v Hessiánu. Podle hodnoty determinantu rozhodneme takto:

- $\det H_f > 0 \rightarrow$  lokální extrém
- $\det H_f = 0 \rightarrow$  nemůžeme tímto způsobem rozhodnout
- $\det H_f < 0 \rightarrow$  sedlový bod

V případě, že  $\det H_f > 0$ , potřebujeme ještě zjistit, jestli se jedná o lokální minimum nebo maximum. O tom rozhodneme podle znaménka druhé parciální derivace podle  $x$ . Jestliže:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \rightarrow$  jedná se o lokální minimum
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \rightarrow$  pak se jedná o lokální maximum

Pomocí tohoto návodu můžeme zjistit počet a typ extrémů zadané funkce. Ovšem jen v těch případech, ve kterých  $\det H_f \neq 0$ . Vraťme se proto ještě k situaci kdy  $\det H_f = 0$  a jak si poradit tam, ...

#### 4) ... kde Hessián nepomůže

Jediná možnost je využít samotné definice extrému (str. 7 dole). Tzn. že budeme zjišťovat pomocí velmi malých přírůstků  $|\bar{h}|$  znaménko  $\Delta f$  ve vyšetřovaném bodě (označme jej např.  $C = [x_0, y_0]$ ). Hledáme tedy následující

$$(\Delta f)_C = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0).$$

Bude-li toto znaménko stejné pro přírůstky ve směru osy  $x$  i  $y$ , jedná se o extrém. Pokud budou všechny přírůstky kladné (záporné), hovoříme o lokálním minimu (maximu) funkce  $f$  v bodě  $C$ .

Nyní jste tedy vybaveni aparátem, se kterým se můžete vrhnout na to hlavní – příklady. V další kapitole najdete všechny možné příklady z různých vědních oborů, od těch nejjednodušších až po ty složitější (nebo jen zdlouhavější).

### III Praktická část - sbírka příkladů

Příklady jsou rozděleny do 7 tematických celků (v tomto pořadí):

- Rovinné útvary
- Objemy & povrchy
- Náklady & výdeje
- Kapaliny & výtoky
- Fyzikální zákony
- Další fyzikální úlohy
- Matematické úlohy

Výčet jednotlivých příkladů najdete v obsahu této diplomové práce.

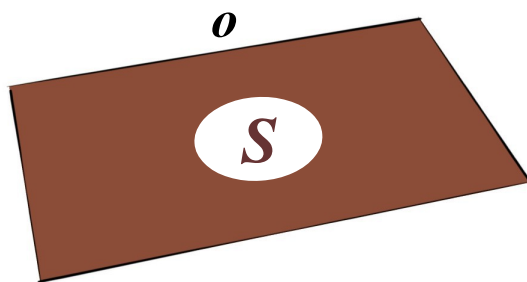
V každém celku jsou příklady řazeny (pokud možno) dle jejich obtížnosti (pokud tedy hledáte výzvu, tak hledejte právě na koncích těchto celků). Na druhou stranu, co je pro jednoho výzvou, jinému může připadat triviální. Tedy řazení podle obtížnosti je, dle mého názoru, subjektivní záležitostí.

Veškeré příklady, u kterých byla převzata zadání nebo zadání spolu s řešením jsou zapsány k odpovídajícímu prameni v části „Literatura“ na konci práce. Převzetí zadání nebo zadání i s řešením je rovněž vyznačeno.

# Rovinné útvary

## 1. příklad

Najděte pravoúhlý rovnoběžník, který má při daném obvodu maximální obsah.



Každý rovnoběžník má protilehlé strany stejně dlouhé, proto jeho obvod lze zapsat jako  $o = 2 \cdot (a + b)$  a obsah  $S = a \cdot b$ . V obou vztazích nám vystupují dvě nezávislé proměnné  $a$ ,  $b$ , proto ze vztahu pro

obvod jednu z nich vyjádříme, např.  $a$  a dosadíme do vztahu pro obsah, protože  $o$  ten nám jde – má být maximální.

$$o = 2 \cdot (a + b) = 2a + 2b \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{o}{2} - b.$$

Po dosazení dostaneme

$$S = \left( \frac{o}{2} - b \right) \cdot b = \frac{ob}{2} - b^2.$$

Na závěr ještě můžeme předchozí vztah přepsat jako funkční závislost; obvod  $o$  je ze zadání konstantní.

$$S(b) = \frac{ob}{2} - b^2.$$

A jelikož hledáme takovou hodnotu  $b$ , pro kterou je  $S$  maximální, jedná se o vyšetřování globálního extrému, na které máme již zaběhnutý aparát – derivaci.

### 1) První derivace

$$S'(b) = \frac{o}{2} - 2b$$

### 2) Druhá derivace

$$S''(b) = -2$$

### 3) Vyhodnocení derivací

$$S'(b) = 0 \Leftrightarrow \frac{o}{2} - 2b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{o}{4}$$

Nalezli jsme stacionární bod  $b = \frac{o}{4}$ , zjistíme tedy zda-li v něm nastává maximum, jak doufáme, nebo minimum.

$$S''\left(\frac{o}{4}\right) = -2 < 0.$$

Druhá derivace je zde záporná (stejně tak, jako ve všech ostatních bodech), proto v bodě  $b = \frac{o}{4}$  nastává skutečně maximum. To, jestli se jedná o globální maximum, musíme vyšetřit pomocí limity v krajních bodech definičního oboru.

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} S(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{ob}{2} - b^2 = \infty - \infty = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b \cdot (o - 2b)}{2} = \frac{\infty \cdot (-\infty)}{2} = -\infty,$$

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} S(b) = \lim_{b \rightarrow -\infty} \frac{ob}{2} - b^2 = -\infty - \infty = -\infty.$$

Skutečně se jedná o globální maximum. Našli jsme jednu délku strany rovnoběžníka, dopočítejme ještě tu druhou – dosazením do vztahu pro obvod

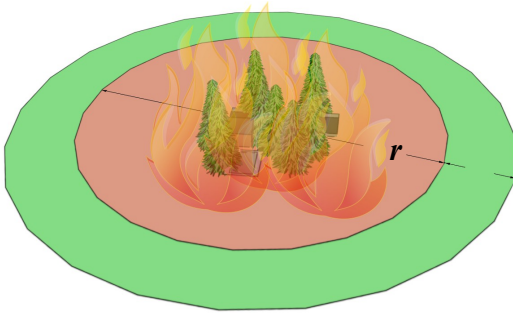
$$o = 2 \cdot (a + b) = 2a + \frac{o}{2} \Leftrightarrow a = \frac{2o - o}{2} \Leftrightarrow a = \frac{o}{4}.$$

Závěr zní: „Dostáváme tedy rozměry rovnoběžníka  $a = \frac{o}{4}$ ,  $b = \frac{o}{4}$ . Očividně se tím pádem jedná o čtverec.“

## 2. příklad

Rychlost rozšiřování spáleniště:

Oheň se v suché pláni šíří do stále většího kruhu. Poloměr kruhu roste rychlostí 2 m/min. Jak rychle roste plocha zasažená ohněm, jestliže poloměr spáleniště je 30 m?



Ze zadání víme, jakou rychlostí se nám mění poloměr kruhu, který představuje plochu spálenou ohněm. To znamená, že poloměr je funkcí času  $r = r(t)$ . Nás ale zajímá jakou rychlostí roste samotná plocha.

Obsah kruhu je  $S = \pi r^2$ . Tento obsah je ale rovněž funkcí času, tedy  $S = S(t)$ . Rychlost rozšiřování označme  $v$ . Z fyziky víme, že rychlost je rovna změně dráhy v čase, tedy  $v = \frac{dr}{dt} = 2$  m/min ([25], s. 100).

Úplně stejným způsobem se můžeme dopracovat k rychlosti, kterou se mění velikost nějaké plochy. Tuto rychlost označme  $w$ . Je to opět změna, ale tentokrát plochy v čase, tedy  $w = \frac{dS}{dt}$ . To, co jsme teď zapsali jako rychlost, je ale z matematického hlediska derivace. Tak ji proved'me. Plochu ovšem nemůžeme derivovat podle času, protože v tomto vztahu nevystupuje. Zderivujme ji proto podle poloměru  $r$ .

$$\frac{dS}{dr} = \pi 2r,$$

$$dS = \pi 2r dr.$$

Celou rovnici teď vydělme proměnnou  $dt$

$$\frac{dS}{dt} = \pi 2r \frac{dr}{dt}.$$

Na levé straně jsme si právě „uměle vyrobili“ onu hledanou rychlost rozšiřování plochy  $w$ . Nyní stačí pouze dosadit za proměnné  $r = 30$  m a  $\frac{dr}{dt} = 2$  m/min.

$$w = \frac{dS}{dt} = \pi 2r \frac{dr}{dt} = \pi \cdot 2 \cdot 30 \cdot 2 = 377 \text{ m}^2/\text{min}.$$

Rychlost, jakou se rozšiřuje plocha zasažená ohněm je 377 m<sup>2</sup>/min.

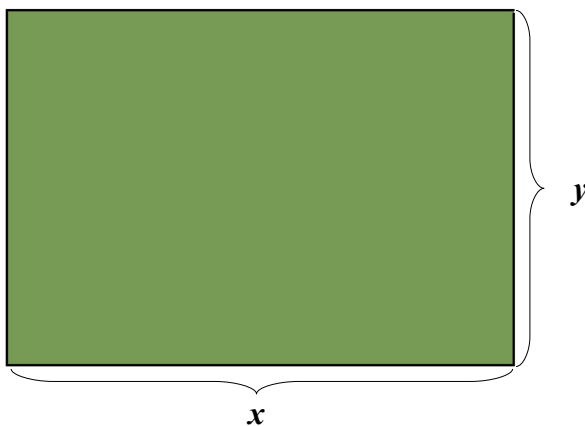


### 3. příklad

Oplocování pozemku:

Pletivem délky  $l$  je nutno oplotit pozemek obdélníkového tvaru.

- a) Určete, jaký tvar pozemku je vhodné oplotit tak, aby oplocená plocha byla co největší.
- b) Určete jaký tvar pozemku je optimální, pokud plot bude jenom ze tří stran (čtvrtá strana je například skála a oplocení zde není nutné).



a) Označme si jednu stranu obdélníka  $x$ , obvod  $l$ , potom druhá strana bude mít rozměr  $y = \frac{l-2x}{2}$ .

Obsah obdélníka

$$S_a = x \cdot \frac{l-2x}{2}.$$

Poněvadž je zadán požadavek na maximalizaci této veličiny, hledáme v podstatě globální maximum funkce

$$S_a(x) = x \cdot \frac{l-2x}{2}.$$

Ještě drobná úprava před derivováním

$$S_a(x) = x \cdot \frac{l}{2} - x^2.$$

#### 1) Nutná podmínka

$$S_a'(x) = \frac{l}{2} - 2x$$

$$S_a'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{l}{2} - 2x = 0$$

Z této podmínky dostaneme stacionární bod  $x = \frac{l}{4}$ .

#### 2) Druhá derivace

$$S_a''(x) = -2$$

#### 3) Vyhodnocení derivací

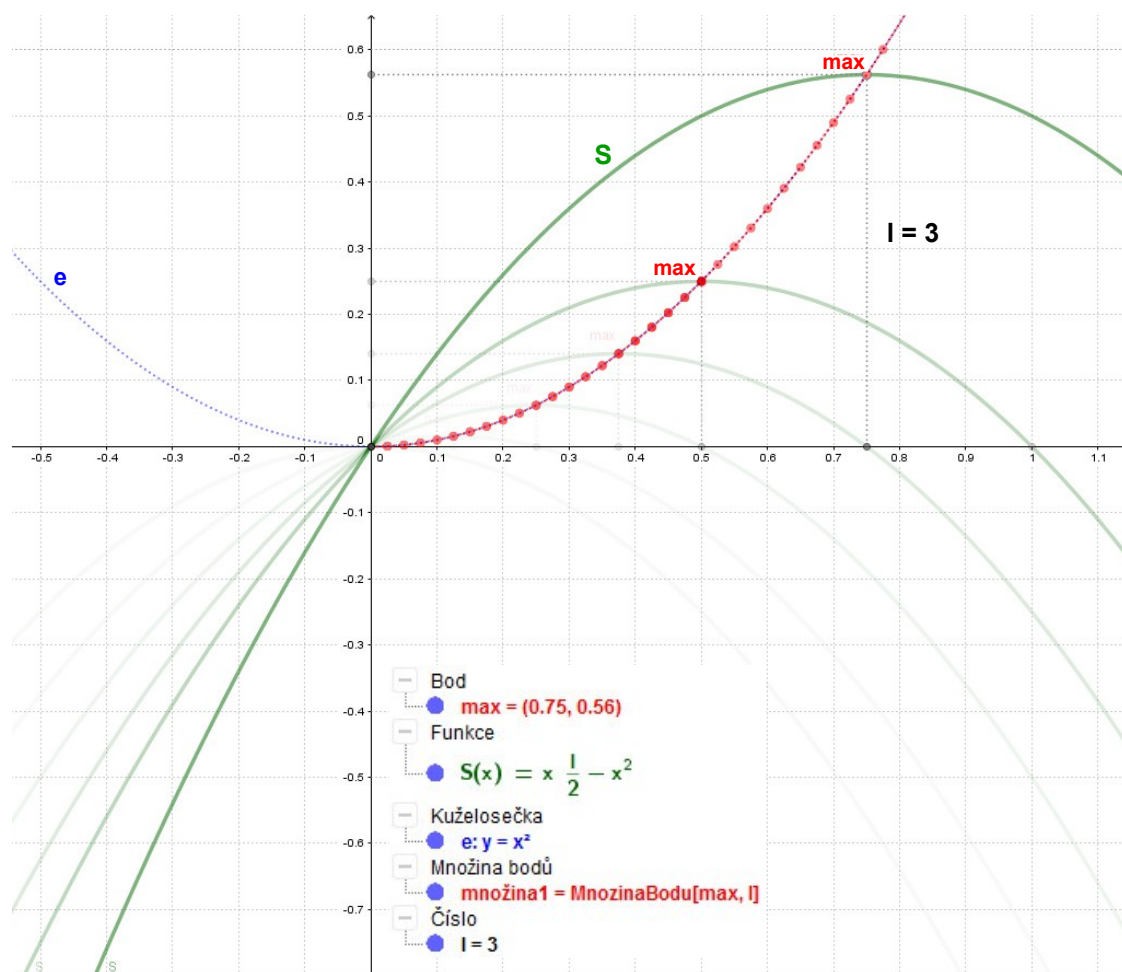
$$S_a''\left(\frac{l}{4}\right) = -2 < 0 \rightarrow \text{lokální maximum}$$

To je sice hezké, že v bodě  $\frac{l}{4}$  je skutečně maximum, ale pouze lokální. Nás zajímá, jestli je zároveň i globálním maximum (potřebujeme si být jisti, že neexistuje žádné další maximum, které by nabývalo větších hodnot, než to, které jsme sami objevili). Toho dosáhneme jednoduše prověřením limit funkce  $S_a(x)$  v  $\pm \infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{l}{2} - x^2 = x^2 \left( \frac{l}{2x} - 1 \right) = \infty^2(0 - 1) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} S_a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{l}{2} - x^2 = -\infty - \infty = -\infty.$$

Zjistili jsme, že hodnoty funkce  $S_a(x)$  se blíží  $-\infty$ , tedy funkce je v obou nekonečnách monotónní, proto nemůže nastat žádný další extrém. Situaci si ještě pro vizuální kontrolu můžeme znázornit graficky (např. v programu GeoGebra).



Z obrázku je vidět, že se jedná o funkci kvadratickou, která má maximum ve svém

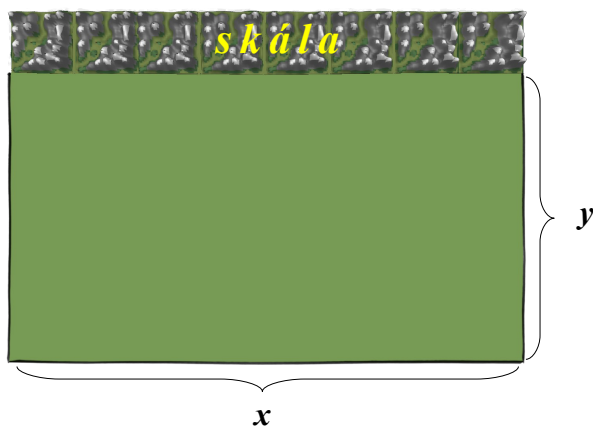
vrcholu. Její tvar se mění v závislosti na parametru  $l$  a s ním se mění i souřadnice maxima. Jen pro zajímavost jsou v grafu vyneseny (červeně) pozice maxim v závislosti na změnách parametru  $l$ . Vidíme, že množina všech těchto maxim vyhovuje rovnici  $y = x^2$ , což je opět kvadratická funkce jejímž grafem je parabola.

Nalezli jsme tedy rozměr  $x = \frac{l}{4}$  strany  $x$  obdélníka, pro který bude jeho obsah maximální. Dopočítáme ještě druhou stranu

$$y = \frac{l - 2 \cdot \frac{l}{4}}{2} = \frac{l}{4}.$$

Jak vidno oba rozměry jsou totožné, a proto se nejedná o obdélník, ale čtverec. Pozemek bude mít co největší obsah v případě, že bude čtvercového tvaru.

b) Jedná se o podobný případ jako v předcházející úloze. Tentokrát ovšem chceme



oplotit pouze 3 strany obdélníka. Bude závěr stejný jako v prvním případě, kdy jsme zjistili, že pozemek musí být čtvercového půdorysu? Nebo se budou rozměry pozemku výrazně lišit? Pojďme to zjistit.

Pokud si opět jednu stranu obdélníka označíme  $x$  (nejlépe tu, která je naproti skále), můžeme sousedící stranu  $y$  vyjádřit jako  $y = \frac{l-x}{2}$ . Opět zapíšeme plochu pozemku součinem sousedních stran, tedy vztahem

$$S_b = x \cdot \frac{l-x}{2}.$$

Poněvadž je zadán požadavek na maximalizaci této veličiny, hledáme v podstatě globální maximum funkce

$$S_b(x) = x \cdot \frac{l-x}{2}.$$

Tento extrém opět vyšetříme pomocí derivací, ale ještě než s tím začneme, si celou rovnici upravme, aby se nám lépe derivovala.

$$S_b(x) = x \cdot \frac{l}{2} - x^2 \cdot \frac{1}{2}$$

**1) Nutná podmínka**

$$S_b'(x) = \frac{l}{2} - x$$

$$S_b'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{l}{2} - x = 0$$

Z této podmínky dostaneme stacionární bod  $x = \frac{l}{2}$ .

**2) Druhá derivace**

$$S_b''(x) = -1$$

**3) Vyhodnocení derivací**

$$S_b''\left(\frac{l}{2}\right) = -1 < 0 \rightarrow \text{lokální maximum}$$

Nalezli jsme jeden z rozměrů obdélníka  $x = \frac{l}{2}$  a je již zřejmé, že od první úlohy se výsledek liší. Dopočítejme ještě druhý rozměr.

$$y = \frac{l - \frac{l}{2}}{2} = \frac{l}{4}$$

Kupodivu rozměr  $y$  vyšel stejně jako v předchozí úloze. Nicméně v tomto případě nebude tvar pozemku čtvercový, ale bude to obdélník o stranách  $x = \frac{l}{2}$  a  $y = \frac{l}{4}$ .

Opět bychom mohli celou situaci znázornit v grafickém softwaru, ale už jen při pohledu na rovnici  $S_b(x)$  je vidět, že se jedná opět o kvadratickou funkci. Situace je tedy velmi podobná. Nicméně kontrolu, jestli se v bodě  $x = \frac{l}{2}$  nachází globální maximum a ne pouze lokální, provést musíme.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S_b(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{l-x}{2} = \infty \cdot (-\infty) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} S_b(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{l-x}{2} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty.$$

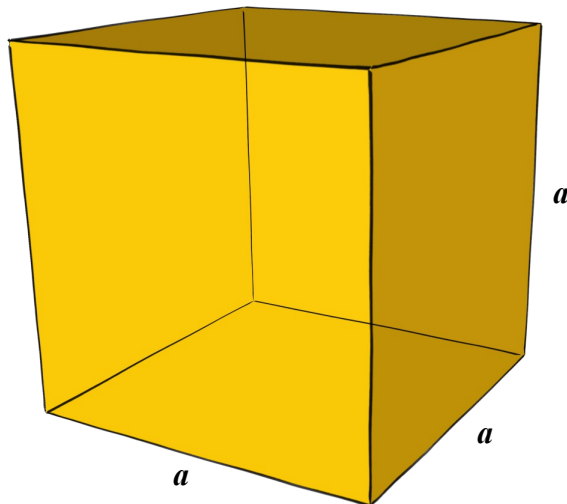
Závěrem:

- a) Pozemek bude mít maximální obsah při rozměrech odpovídajících stranám čtverce  $x = y = \frac{l}{4}$ .
- b) Při oplocování pouze tří stran, plochu pozemku maximalizujeme v případě, že jeho rozměry budou  $x = \frac{l}{2}$  a  $y = \frac{l}{4}$ .

# Objemy & povrchy

## 4. příklad

Vypočítejte povrch  $S$  krychle a jeho absolutní a relativní chybu, jestliže víte, že naměřená hodnota hrany  $a$  a její absolutní chyba jsou  $a = 8 \text{ cm} \pm 1 \text{ mm}$ .



Nejprve si označme všechny neznámé a známé veličiny:

- $a = 8 \text{ cm}$  ... hrana krychle,
- $da = 1 \text{ mm}$  ... abs. chyba velikosti hrany  $a$ ,
- $S$  ... povrch krychle,
- $dS$  ... absolutní chyba velikosti povrchu  $S$ ,
- $\delta$  ... relativní chyba velikosti povrchu  $S$ .

V dalším kroku spočítáme povrch krychle z naměřené hodnoty

$$S = 6a^2 = 6 \cdot 8^2 = 384 \text{ cm}^2.$$

Absolutní chybu vypočítáme pomocí první derivace.

### 1) První derivace

$$S'(a) = 12a \tag{1}$$

Derivaci, jak známo, můžeme také přepsat jako poměr diferenciálů.

$$S'(a) = \frac{dS}{da}$$

$$dS = S'(a) \cdot da \tag{2}$$

V tuto chvíli dosadíme (1) do (2) a získáme

$$dS = 12a \cdot da.$$

Nyní již stačí pouze dosadit hodnoty  $a$ ,  $da$  a vypočítat absolutní chybu velikosti povrchu krychle  $S$ .

$$dS = 12 \cdot 8 \cdot 0,1 = 9,6 \text{ cm}^2 \doteq 10 \text{ cm}^2.$$

## 2) Vyhodnocení derivace

Tedy zjistili jsme, že povrch krychle a jeho absolutní chyba je  $S = (384 \pm 10) \text{ cm}^2$ .

Ještě dopočítáme chybu relativní, která více vypovídá o přesnosti měření.

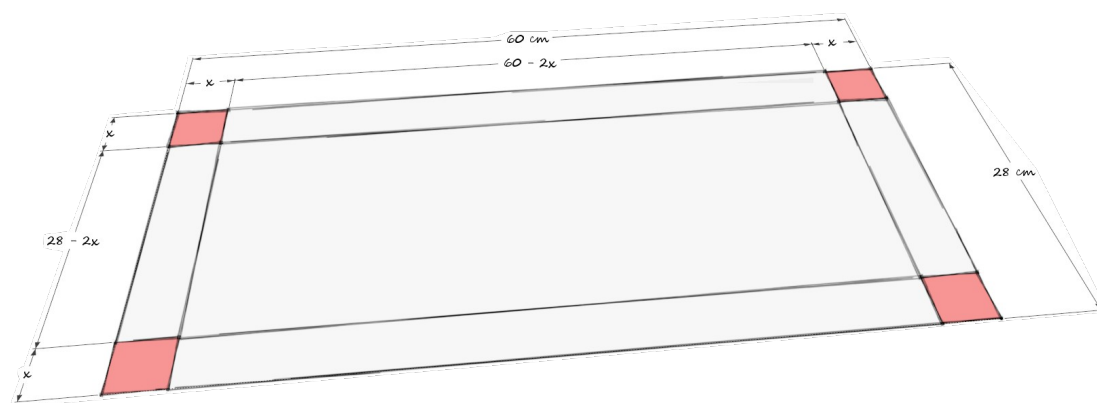
$$\delta = \frac{dS}{S} = \frac{12a \cdot da}{6a^2} = 2 \frac{da}{a} = 2 \cdot \frac{0,1}{8} = 0,025 = 2,5\%.$$

Relativní odchylka povrchu kvádrů  $\delta$  je 2,5 %.

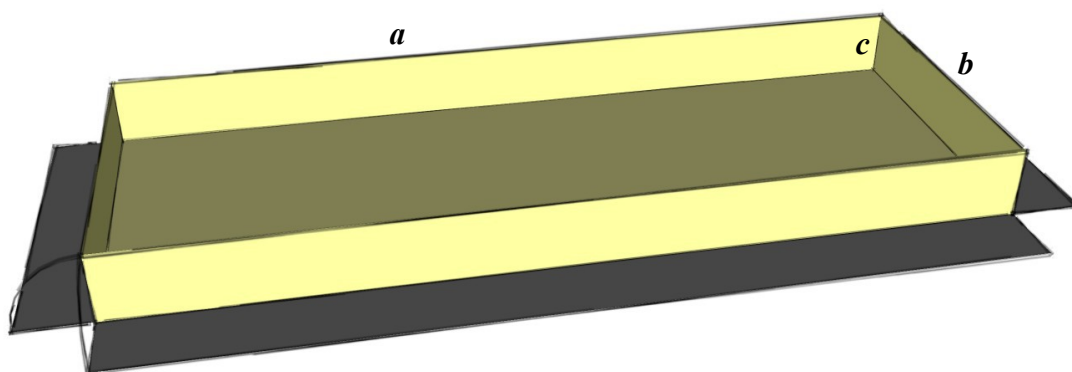
## 5. příklad

Tvrký papír tvaru obdélníku má rozměry 60 x 28 cm. V rozích se odstříhnou stejné čtverce a zbytek se ohne do tvaru otevřené krabice. Jak dlouhá musí být strana odstřižených čtverců, aby objem krabice byl co největší?

Neznámou délku hrany čtverečku si označíme např.  $x$ . Dále proto rozměry krabice po odstřížení rohových čtverců budou vypadat tak, jak jsou vyznačeny v obrázku níže.



Protože požadavkem je, aby byl objem krabice co možná největší, vyjádříme si jej. Krabice má tvar kvádra a je bez víka, tzn. bez horní podstavy (viz obrázek níže).



Nicméně vztah pro objem zůstává nezměněný  $V = abc$ . A dále dosadíme rozměry uvedené v obrázku nahoře

$$V = (60 - 2x) \cdot (28 - 2x) \cdot x.$$

Po roznásobení a sečtení dostaneme vztah pro objem, který je funkcí délky hrany čtverečku, který chceme odstříhnout

$$V(x) = 4x^3 - 176x^2 + 1680x.$$



Jak již bylo řečeno, požadavkem je, aby tento objem byl co největší, tedy maximální, proto další postup je „klasikou“ v hledání lokálního resp. globálního extrému.

### 1) První derivace

$$V'(x) = 12x^2 - 352x + 1680$$

### 2) Druhá derivace

$$V''(x) = -352 + 24x$$

### 3) Vyhodnocení derivací

Nutná podmínka existence extrému zní stále stejně, a to

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 352x + 1680 = 0.$$

Po vydělení celé rovnice čtyřmi dostaneme kvadratickou rovnici ve tvaru

$$3x^2 - 88x + 420 = 0,$$

vypočítáme její diskriminant  $D = 2704 \rightarrow \sqrt{D} = 52$ . A dosadíme do vztahu pro výpočet kořenů kvadratické rovnice

$$x_{1,2} = \frac{88 \pm 52}{6} = \frac{44 \pm 26}{3} = \begin{cases} x_1 = \frac{70}{3} = 23\frac{1}{3}, \\ x_2 = \frac{18}{3} = 6. \end{cases}$$

Po dosazení obou hodnot  $x_1, x_2$  do některého ze vztahů pro délky stran krabice, např.  $b = 28 - 2x$  zjistíme, že pouze hodnota  $x_2 = 6$  vyhovuje. Mějme na paměti, že  $a, b, c$  jsou veličiny délkové míry, a proto musí být všechny kladné. Po dosazení hodnoty  $x_1$  je tento předpoklad porušen. Nyní ještě musíme ověřit jestli v bodě  $x_2 = 6$  je naše hledané maximum pro objem.

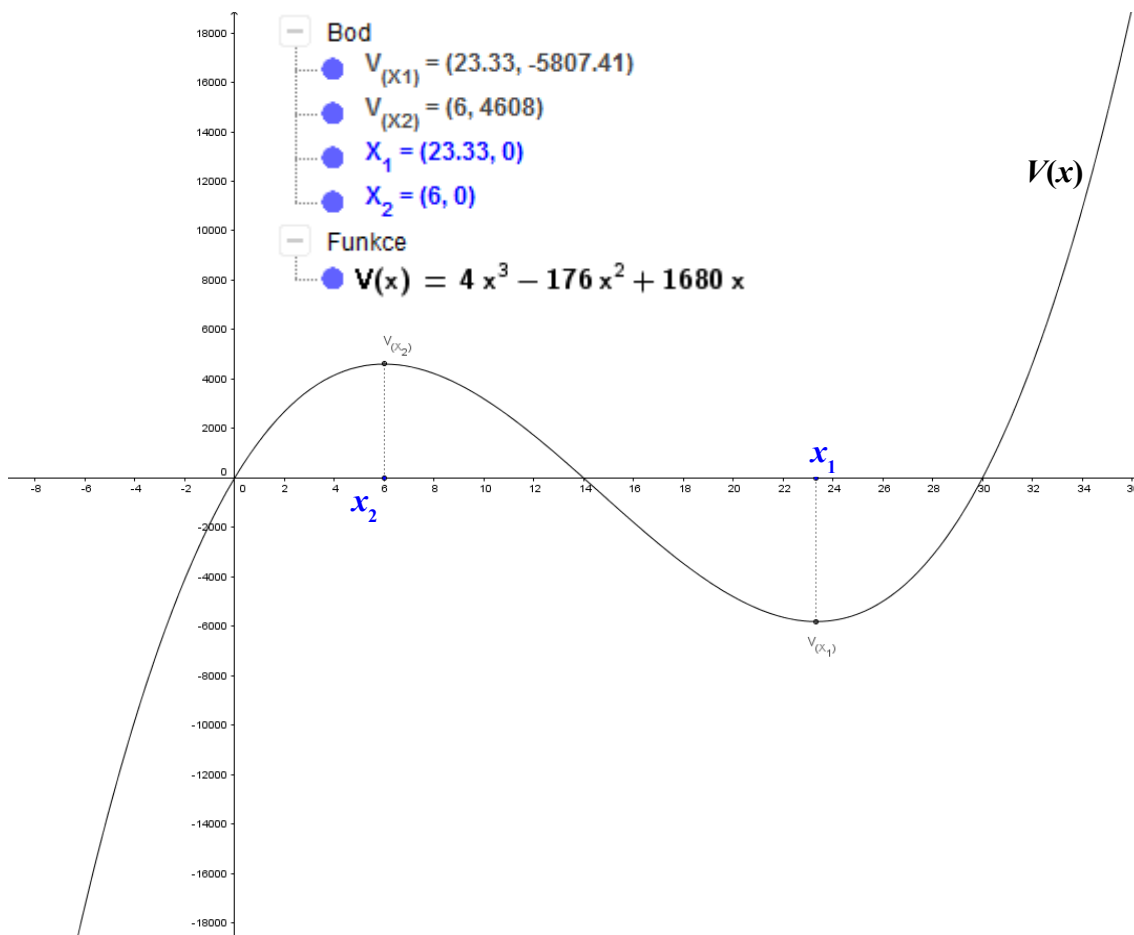
$$V''(6) = -352 + 24 \cdot 6 = -208 < 0$$

Naše prosby byly vyslyšeny a druhá derivace potvrdila maximální hodnotu funkce  $V(x)$  v bodě  $x = 6$ . Ovšem jedná-li se o globální maximální hodnotu, musíme vyšetřit pomocí limity v krajních bodech definičního oboru.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 - 176x^2 + 1680x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \left(4 - \frac{176}{x} + \frac{1680}{x^2}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 - 176x^2 + 1680x = -\infty - (-\infty)^2 + (-\infty) = -\infty.$$

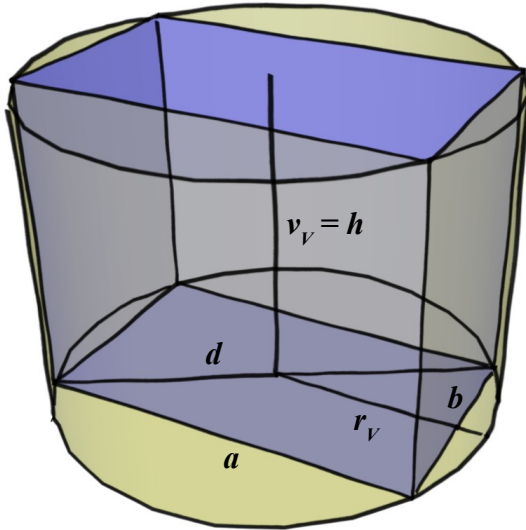
Tedy neexistuje funkční hodnota větší než v bodě  $x = 6$ , ve které by funkce  $V(x)$  nabývala maxima. Tento závěr si ještě ověříme graficky (viz následující obrázek).



Závěr tedy bude znít: „Krabice bude mít maximální objem právě tehdy, když v rozích odstrihneme čtverečky o velikosti 6 x 6 cm.“

## 6. příklad

Určete rozměry kvádru, který je vepsán do rotačního válce s poloměrem podstavy  $2\sqrt{2}$  a výškou 4 tak, aby zaujímal co největší objem.



Nejprve si označíme všechny potřebné rozměry obou těles:  $r_V = 2\sqrt{2}$ ,  $v_V = h = 4$ ,  $d = 2r = 4\sqrt{2}$ .

Objem kvádru  $V = \max. = a \cdot b \cdot h$ .

Výšku  $h$  kvádru tedy známe ze zadání, bude totožná s výškou válce. Potřebujeme zjistit zbývající dva rozměry  $a$ ,  $b$ .

Jedné proměnné bychom se ale potřebovali zbavit tak, abychom dostali objem  $V$  jako funkci jedné proměnné – buďto  $a$  nebo  $b$ .

Ze zadání jsme zatím nepoužili jeden známý rozměr  $d$ . Pokusme se tedy dát do vztahu  $a$ ,  $b$ , a  $d$ . Z Pythagorovy věty pro podstavu kvádru plyne

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= d^2, \\ a^2 + b^2 &= 32. \end{aligned}$$

tím dostaneme do vztahu obě naše neznámé

$$b = \sqrt{32 - a^2}.$$

A po dosazení do vzorce pro objem kvádru

$$V = a \sqrt{32 - a^2} \cdot 4.$$

Nyní, protože hledáme rozměry kvádru, pro které je  $V$  co největší, budeme hledat globální maximum funkce:

$$V(a) = 4a \sqrt{32 - a^2}.$$

### 1) První derivace

$$\begin{aligned} V'(a) &= 4 \sqrt{32 - a^2} + 4a \cdot (-2a) \cdot \frac{1}{2} (32 - a^2)^{-\frac{1}{2}} = 4 \sqrt{32 - a^2} + 4a \cdot \frac{1}{\sqrt{32 - a^2}} = \\ &= 4 \cdot \left( \sqrt{32 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{32 - a^2}} \right) = 4 \cdot \left( \frac{32 - a^2}{\sqrt{32 - a^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{32 - a^2}} \right) = 4 \cdot \frac{32 - 2a^2}{\sqrt{32 - a^2}} \end{aligned}$$

## 2) Druhá derivace

$$\begin{aligned} V''(a) &= [(128 - 8a^2) \cdot (32 - a^2)^{-\frac{1}{2}}]' = -16a \cdot (32 - a^2)^{-\frac{1}{2}} + (128 - 8a^2) \cdot \\ &\quad \cdot \left[ (-2a) \cdot (32 - a^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right] = (128 - 8a^2) \cdot a \cdot (32 - a^2)^{-\frac{3}{2}} - \\ &\quad - 16a \cdot (32 - a^2)^{-\frac{1}{2}} = (128a - 8a^3) \cdot \frac{1}{\sqrt{(32 - a^2)^3}} - 16a \cdot \frac{1}{\sqrt{32 - a^2}} = \\ &= \frac{128a - 8a^3}{\sqrt{(32 - a^2)^2 \cdot (32 - a^2)}} - \frac{16a}{\sqrt{32 - a^2}} = \frac{128a - 8a^3 - 16a \cdot (32 - a^2)}{(32 - a^2) \cdot \sqrt{32 - a^2}} = \\ &= \frac{128a - 8a^3 - 512a + 16a^3}{(32 - a^2) \cdot \sqrt{32 - a^2}} = \frac{8a^3 - 384a}{\sqrt{(32 - a^2)^3}} \end{aligned}$$

## 3) Vyhodnocení derivací

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow 32 - 2a^2 = 0$$

$$a^2 = 16 \rightarrow a_{1,2} = \pm 4$$

Jelikož ale proměnná  $a$  reprezentuje rozměry tělesa, v našem případě kvádrů, klademe si podmínku  $a > 0$ . Tedy dostáváme pouze jediné možné řešení  $a_1 = 4$ .

Dosadíme do vztahu pro druhou derivaci.

$$\begin{aligned} V''(4) &= 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{4^2 - 48}{\sqrt{(32 - 4^2)^3}} = \frac{2 \cdot 4^2 \cdot (4^2 - 4^2 \cdot 3)}{\sqrt{16^3}} = \frac{2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 \cdot (1 - 3)}{\sqrt{4^6}} = -\frac{4^5}{4^3} = \\ &= -16 < 0 \end{aligned}$$

Z předchozího plyne, že funkce  $V(a)$  nabývá v bodě  $a_1 = 4$  svého maxima. To, zda se jedná o maximum globální, musíme zjistit vyšetřením krajních bodů definičního oboru pomocí limity.

Je zřejmé, že platí  $32 - a^2 \geq 0$ , protože pod odmocninou nesmí být záporné číslo (v případě, že se pohybujeme v  $\mathbb{R}$ , což je přesně náš případ) a z toho

$$-\sqrt{32} \leq a \leq \sqrt{32}.$$

Tedy definiční obor funkce  $V(a)$  je

$$D_V = \langle -\sqrt{32}; \sqrt{32} \rangle.$$

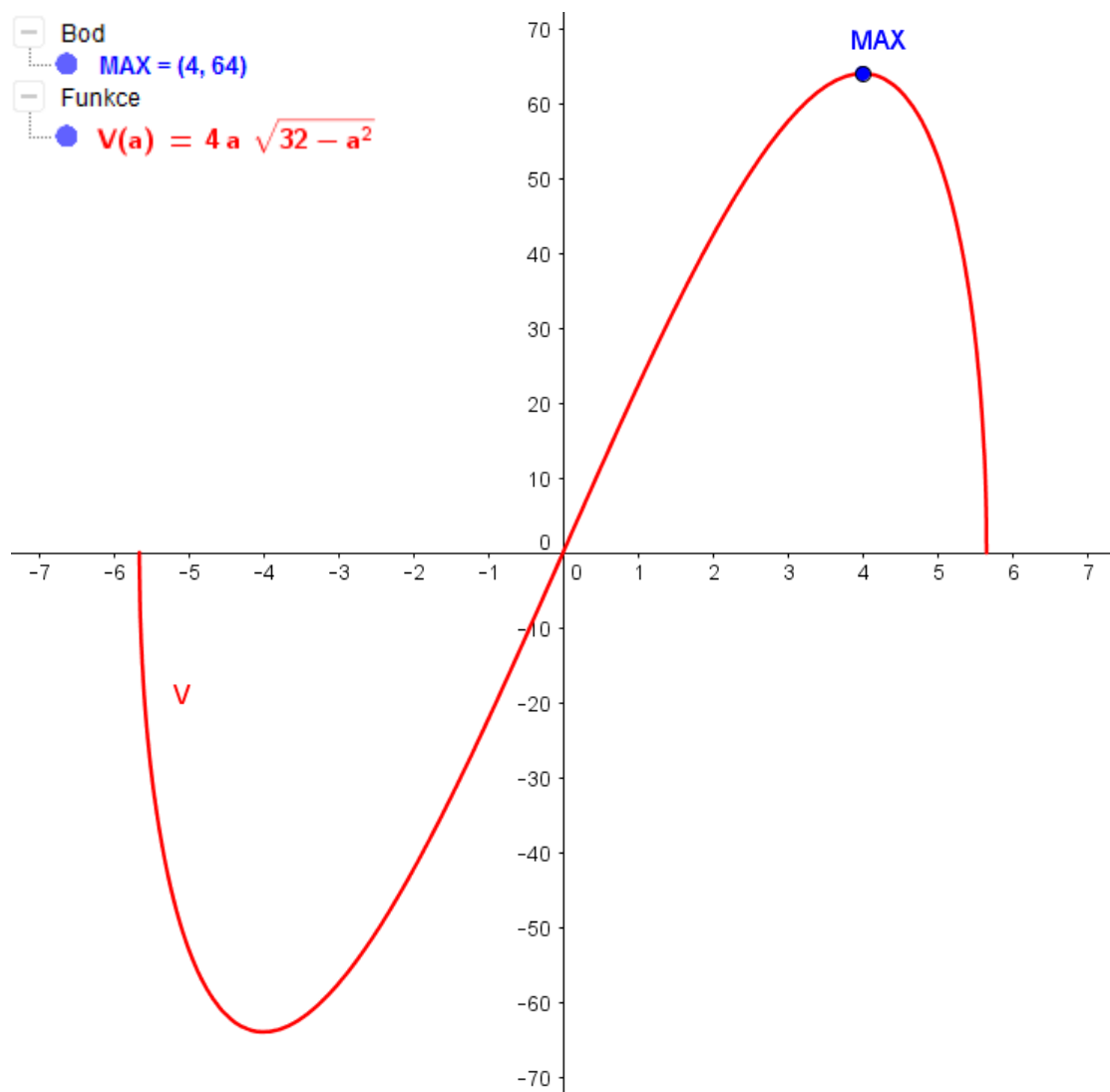
Krajní body jsou očividně  $-\sqrt{32}$ ;  $+\sqrt{32}$ . Pojďme je vyšetřit.

$$\lim_{a \rightarrow -\sqrt{32}^+} V(a) = \lim_{a \rightarrow -\sqrt{32}^+} 4a \cdot \sqrt{32 - a^2} = 4(-\sqrt{32}) \cdot \sqrt{32 - (-\sqrt{32}^+)^2} = -4\sqrt{32} \cdot \sqrt{0^+} = 0,$$

$$\lim_{a \rightarrow \sqrt{32}^-} V(a) = \lim_{a \rightarrow \sqrt{32}^-} 4a \cdot \sqrt{32 - a^2} = 4\sqrt{32} \cdot \sqrt{32 - (\sqrt{32}^-)^2} = 4\sqrt{32} \cdot \sqrt{0^+} = 0.$$

Tedy vidíme, že v krajních bodech funkce  $V(a)$  vyšších hodnot než v námi nalezeném bodě  $a_1$  nenabývá. Proto bod  $a_1 = 4$  je zároveň maximem globálním.

Na následujícím obrázku je znázorněn graf funkce  $V(a)$ , ze kterého je daná situace zřejmá (měřítko  $x : y = 1 : 10$ ).

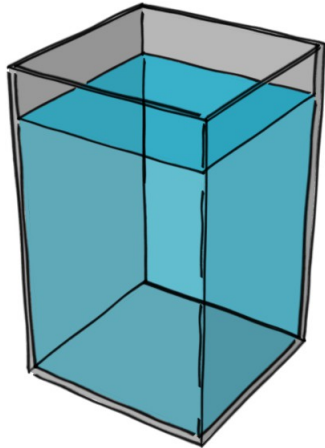


Na závěr určíme ještě velikost strany  $b = \sqrt{32 - 4^2} = 4$ .

Hledaný kvádr má tudíž rozměry  $a = b = h = 4$ . Jinými slovy je to **krychle**.

## 7. příklad

Určete rozměry pravouhlé vodní nádrže tvaru kvádrů o objemu  $32 \text{ m}^3$  tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.



Rozměry nádrže si označíme  $a, b, c$ .

Objem kvádrů je  $V = a \cdot b \cdot c$ .

Ze zadání příkladu plyne  $a \cdot b \cdot c = 32$ ,

po úpravě dostaneme  $c = \frac{32}{a \cdot b}$ .

Pro povrch dna a stěn bude platit  $S = a \cdot b + 2 \cdot c \cdot (a + b)$ .

Když nyní rovnici  $c = \frac{32}{a \cdot b}$  dosadíme do rovnice pro

povrch dna a stěn, dostaneme rovnici o dvou proměnných

$$S(a, b) = a \cdot b + \frac{64}{a \cdot b} \cdot (a + b).$$

Po roznásobení

$$S(a, b) = a \cdot b + \frac{64}{a} + \frac{64}{b}.$$

A nyní už máme vše připraveno na náš klasický postup. Upozorníme zde ještě na to, že hledáme globální minimum funkce  $S(a, b)$ , protože chceme co nejmenší povrch. Rozdíl mezi lokálním a globálním extrémem je pouze ten, že při hledání globálního extrému funkce musíme zahrnout i „hranice“ definičního oboru a jejich limity popř. funkční hodnoty porovnat s hodnotami ve stac. bodech. Tzn. že budeme muset vypočítat limitu v krajních bodech definičního oboru.

Ještě bychom měli určit definiční obor funkce. Z rovnice výše je vidno, že  $a, b$  nesmí být nulové. Dále je zřejmé, že obě proměnné nesmí být záporné, jelikož zastupují délkovou míru (rozměr). Tedy definiční obor bude vypadat takto

$$D_S = \{a, b \in \mathbb{R}^2; a > 0 \wedge b > 0\}.$$

### 1) Nutná podmínka

Jako vždy spočítáme nejdříve parciální derivace prvního řádu.

$$\frac{\partial S}{\partial a} = b - \frac{64}{a^2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = a - \frac{64}{b^2}$$

Dostáváme, jako už tradičně, soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$b - \frac{64}{a^2} = 0$$

$$a - \frac{64}{b^2} = 0$$

Obě rovnice ještě upravíme.

$$a^2 b = 64$$

$$a b^2 = 64$$

Nyní například ze druhé rovnice vyjádříme proměnnou  $a$ , dosadíme ji do první rovnice a dostaneme

$$\frac{64^2}{b^4} \cdot b = 64 \quad \rightarrow \quad b^3 = 64.$$

Z toho vyplývá, že  $b = 4$ . Nyní ještě z první rovnice dopočítáme proměnnou  $a$ . Získáme tak

$$a^2 = \frac{64}{4} \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{32} \quad \rightarrow \quad a = \pm 4.$$

Záporný výsledek nás ale nezajímá, protože proměnná  $a$  zastupuje délkovou míru či-li  $a \in (0; +\infty)$ . Proto  $a = 4$ .

Dostáváme tedy stacionární bod  $A_1 = [4; 4]$ .

## 2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = \frac{128}{a^3}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = \frac{128}{b^3}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 1$$

## 3) Hessián

$$\det H_f = \begin{vmatrix} \frac{128}{a^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{b^3} \end{vmatrix}$$

$$\det H_f(A_1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Bod  $A_1$  je tedy lokálním minimem, ale je i globálním? O tom se přesvědčíme

vypočtením limit v krajních bodech definičního oboru ( $0$  a  $+\infty$ ).

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (a_0, 0^+)} S(a,b) = \lim_{(a,b) \rightarrow (a_0, 0^+)} ab + \frac{64}{a} + \frac{64}{b} = a_0 \cdot 0^+ + \frac{64}{a_0} + \frac{64}{0^+} = +\infty,$$

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (0^+, b_0)} S(a,b) = \lim_{(a,b) \rightarrow (0^+, b_0)} ab + \frac{64}{a} + \frac{64}{b} = 0^+ \cdot b_0 + \frac{64}{0^+} + \frac{64}{b_0} = +\infty,$$

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (+\infty, +\infty)} S(a,b) = \lim_{(a,b) \rightarrow (+\infty, +\infty)} ab + \frac{64}{a} + \frac{64}{b} = (+\infty) \cdot (+\infty) + \frac{64}{+\infty} + \frac{64}{+\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (a_0, +\infty)} S(a,b) = \lim_{(a,b) \rightarrow (a_0, +\infty)} ab + \frac{64}{a} + \frac{64}{b} = a_0 \cdot (+\infty) + \frac{64}{a_0} + \frac{64}{+\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (+\infty, b_0)} S(a,b) = \lim_{(a,b) \rightarrow (+\infty, b_0)} ab + \frac{64}{a} + \frac{64}{b} = (+\infty) \cdot b_0 + \frac{64}{+\infty} + \frac{64}{b_0} = +\infty,$$

$$S(4,4) = 4 \cdot 4 + \frac{64}{4} + \frac{64}{4} = 48.$$

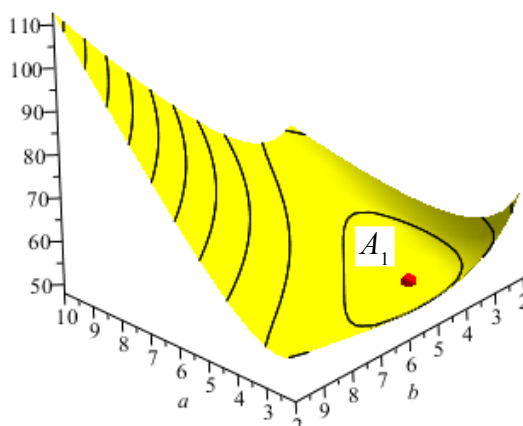
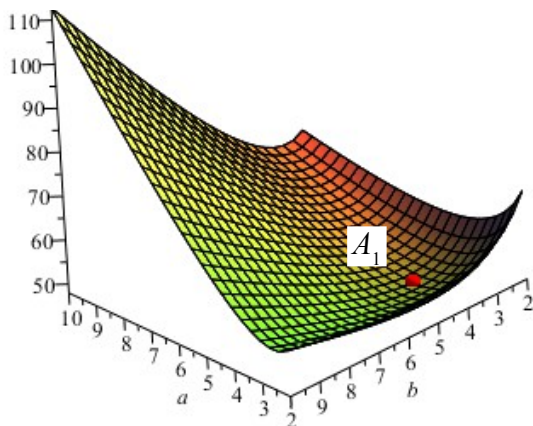
Nejmenší hodnota je 48. Tedy v bodě  $[4; 4]$  leží globální minimum funkce  $S$ . A konec konců je to vidět i z obrázků dole.

#### 4) Závěr

$A_1 = [4; 4]$ : ostré lokální i globální minimum.

Nyní ještě z rovnice pro objem dopočítáme třetí rozměr  $c = 2$ .

Dospěli jsme tedy k závěru, že při rozměrech nádrže  $4 \times 4 \times 2$  m bude její povrch nejmenší. Tedy např. na její výrobu se spotřebuje co nejmenší možné množství materiálu.

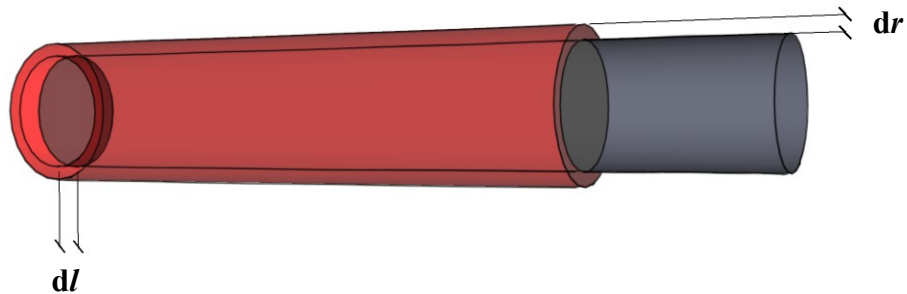




## 8. příklad

Změna objemu vlivem teplotní roztažnosti:

Kovová tyč o průměru 6 cm a délce 40 cm je zahřívána. Vlivem teplotní roztažnosti roste délka rychlostí 0,0005 cm/min. a průměr 0,0002 cm/min. Jak rychle roste objem tyče?



Ač by se mohlo zdát, že v tuto chvíli stačí „zabrousit“ do učebnic fyziky a najít si vztah pro teplotní objemovou roztažnost ( $V = V_0 \cdot (1 + \beta \Delta T)$ , [25], str. 231), nebude to takto jednoduché. Nejde nám totiž o to spočítat, o kolik se změní hodnota objemu tyče v závislosti na teplotním rozdílu. Navíc ze zadání ani nevíme o kolik se změnila teplota materiálu, ze které je tyč vyrobena.

Jde nám o to zjistit o kolik se změní objem tyče každou sekundu nebo každou minutu, hodinu... tedy obecně za jednotku času.

Tyč má tvar válce, a proto její objem, pokud použijeme označení z obrázku výše, bude popisovat vztah  $V = \pi r^2 l$ .

Rychlost, jakou se mění délka tyče je z fyzikálního hlediska změna délky v čase, zapsáno matematicky  $v_l = \frac{dl}{dt}$  ([25], str. 100). Rychlost, kterou se mění poloměr tyče bude změna poloměru v čase, tedy  $v_r = \frac{dr}{dt}$ . Veličina, kterou hledáme bude definována naprosto stejně  $v_V = \frac{dV}{dt}$ . Nicméně, podobně jako v příkladu č. 10, nemáme ve vztahu pro objem zastoupen čas, proto také nemůžeme derivovat objem podle času. Budeme to muset „obejít“ a zderivovat objem podle obou proměnných  $r, l$  odděleně.

$$\frac{dV_1}{dr} = 2\pi r l$$

$$\frac{dV_2}{dl} = \pi r^2$$

Oba vztahy upravíme.

$$dV_1 = 2\pi r l dr$$

$$dV_2 = \pi r^2 dl$$

Nyní oba vztahy vydělíme proměnnou  $dt$ , takže na levých stranách dostaneme naši hledanou proměnnou  $v_V = \frac{dV}{dt}$ .

$$\frac{dV_1}{dt} = 2\pi r l \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \pi r^2 \frac{dl}{dt}$$

To, co jsme získali jsou dva vztahy. První vztah nám ukazuje závislost rychlosti změny objemu na rychlosti změny poloměru, druhý ukazuje závislost na rychlosti změny délky tyče. Pokud bychom v tuto chvíli dosadili a oba vztahy vypočítali číselně, pak celková změna rychlosti objemu bude dána součtem těchto dílčích. Čili změna celková je rovna součtu změn dílčích. Pojdme tedy nejdříve, než budeme dosazovat konkrétní čísla, tuto skutečnost zapsat obecně.

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi r l \frac{dr}{dt} + \pi r^2 \frac{dl}{dt}$$

Teď teprve dosadíme konkrétní údaje ze zadání a vypočítáme.

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi \cdot 3 \cdot 40 \cdot 0,0001 + \pi \cdot 3^2 \cdot 0,0005 \doteq 0,0754 + 0,0141 \doteq 0,0895 \text{ cm}^3/\text{min}.$$

Zjistili jsme, že objem válcové tyče roste v závislosti na čase (nikoliv na teplotě) rychlostí  $0,0895 \text{ cm}^3/\text{min}$ .

# Náklady & výdeje

## 9. příklad

Bylo zjištěno, že zisk z prodeje závisí na investicích do reklamy vztahem

$f(a) = -a^2 + 200a + 80$ ;  $0 < a < 150$ , kde  $a$  je investice v tis. Kč. Určete částku, kterou je třeba investovat do reklamy, aby byl zisk z prodeje maximální.



Postup u tohoto příkladu je očividný, hledáme globální maximum a využijeme při tom opět derivaci. Navíc v textu je přímo zadána funkční závislost zisku  $f$  na investici do reklamy  $a$ , takže máme práci o to snazší – nemusíme ji vymýšlet.

### 1) První derivace

$$f'(a) = -2a + 200$$

### 2) Druhá derivace

$$f''(a) = -2$$

### 3) Vyhodnocení derivací

Potřebujeme opět získat nějaký bod, který bychom mohli vyšetřit pro jeho extrémnost. K tomu nám dopomůže nutná podmínka existence extrému.

$$f'(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2a + 200 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 100$$

Dosazením této hodnoty do druhé derivace zjistíme, o jaký druh extrému se jedná

$$f''(100) = -2 < 0.$$

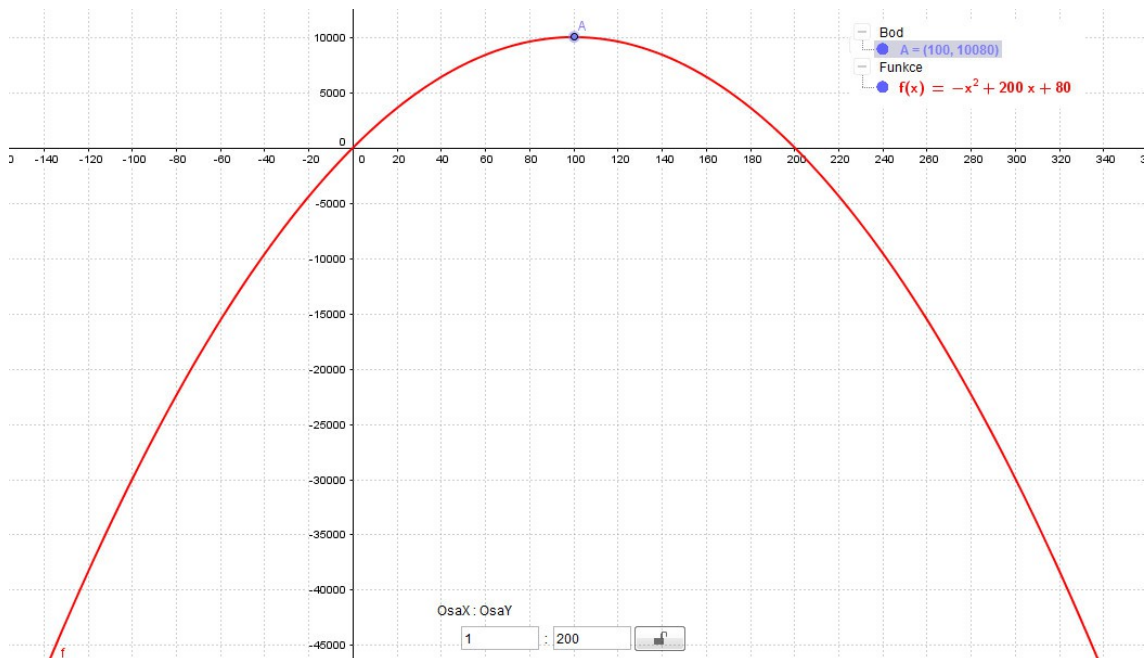
Vidíme, že druhá derivace je záporná, tudíž v bodě  $a = 100$  nastává globální maximum ( $f(a)$  je kvadratická fce, která obecně má vždy jeden extrém – viz obrázek na další straně – pokud není její definiční obor ohraničen). Analyticky bychom předchozí tvrzení dokazovali pomocí limity v krajních bodech definičního oboru, tedy

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} -a^2 + 200a + 80 = \lim_{a \rightarrow +\infty} a^2 \cdot \left( -1 + \frac{200}{a} + \frac{80}{a^2} \right) = -\infty,$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} f(a) = \lim_{a \rightarrow -\infty} -a^2 + 200a + 80 = -\infty.$$

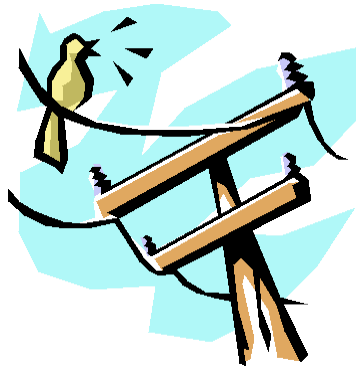
Závěr zní: „Při investici 100.000 Kč do reklamy budou zisky z prodeje maximální.“ Snadno můžeme hodnotu zisků dopočítat prostým dosazením do  $f(a)$  a vyjde nám číslo 10.080.000 Kč. Stejný závěr můžeme usoudit z následujícího obrázku.

*Poznámka:* Nezapomínejme, že hodnota  $a$  i hodnoty uvedené na obrázku jsou v tisících korun.



## 10. příklad

Požizovací náklady elektrického vedení jsou závislé na průřezu  $S$  vedení a na ztrátách elektrického proudu ve vedení vztahem  $y = k_1 S + \frac{k_2}{S}$ , kde  $k_1, k_2$  jsou kladné konstanty. Určete průřez  $S$  tak, aby pořizovací náklady byly co možná nejnižší. Spočítejte velikost tohoto průřezu pro  $k_1 = 10 \text{ Kč/mm}^2$ ,  $k_2 = 2\,500 \text{ Kč} \cdot \text{mm}^2$ .



V textu máme již přímo zadanou rovnici, již je vyjádřena závislost ztrát  $y$  elektrického proudu na průřezu  $S$  vedení

$$y(S) = k_1 S + \frac{k_2}{S}.$$

Požadavkem, aby „náklady byly co možná nejnižší“ rozumějme kritérium volající po minimální hodnotě nákladů spojených s výstavbou a provozem elektrického vedení. Hledáme tedy globální minimum výše uvedené funkce  $y(S)$ .

### 1) První derivace

$$y'(S) = k_1 + k_2 \cdot (-1) \cdot S^{-2} = k_1 - \frac{k_2}{S^2}$$

### 2) Druhá derivace

$$y''(S) = -k_2 \cdot (-2) \cdot S^{-3} = 2 \frac{k_2}{S^3}$$

### 3) Vyhodnocení derivací

Nutná podmínka existence extrému zní

$$y'(S) = 0 \Leftrightarrow k_1 - \frac{k_2}{S^2} = 0.$$

Z tohoto vztahu vyjádříme  $S$ .

$$k_1 S^2 = k_2$$

$$S = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

Nyní musíme ještě ověřit, zda-li se skutečně jedná o minimum, a to dosažením do druhé derivace.

$$y''\left(\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\right) = 2 \frac{k_2}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^3} = 2k_2 \frac{1}{\frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}} = 2k_2 \frac{1}{\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}} \cdot \frac{k_1}{k_2} = 2 \cdot \frac{k_1}{\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}} = 2 \cdot \frac{\oplus}{\sqrt{\oplus}} > 0$$

Ze zadání máme předem určeno, že konstanty  $k_1, k_2$  jsou kladné, proto jsou oba výrazy v čitateli i jmenovateli v předposledním kroku kladné, tudíž celý výraz je kladný. Z toho plyne že v bodě  $S = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$  funkce  $y$  nastává globální minimum a tedy náklady na výstavbu elektrického vedení budou minimální právě tehdy, když průřez drátů  $S$  bude roven  $\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$ .

V poslední části dopočítáme hodnotu tohoto průřezu pro  $k_1 = 10 \text{ Kč/mm}^2$ ,  $k_2 = 2\,500 \text{ Kč} \cdot \text{mm}^2$ . Prostým dosazením dostaneme

$$S = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} = \sqrt{\frac{2\,500}{10}} \doteq 15,8 \text{ mm}^2.$$

V odborném časopise ELEKTRO č. 5/2010 je na str. 42-43 tato problematika rozvedena do hloubky v článku nesoucím název *Ekonomická optimalizace průřezu silových kabelů nn* [9]. Zájemci tento výňatek naleznou na adrese: <http://www.odbornecasopisy.cz/elektro/casopis/tema/ekonomicka-optimalizace-prurezu-silovych-kabelu-nn-10408>, kde ovšem některé rovnice a grafy chybí. Plná verze článku ve formátu PDF je potom zde: <http://www.odbornecasopisy.cz/res/pdf/41161.pdf>.

Já zde uvedu jen vzorce vztahující se k našemu příkladu. Prvním z nich, který autor článku Ing. Ivo Faltus uvádí až v závěru článku, je vztah pro celkové náklady na vedení

$$N_c = N_k + N_z,$$

kde  $N_k$  jsou pořizovací náklady,  $N_z$  jsou provozní náklady.

Pořizovací náklady  $N_k$  jsou postiženy vztahem

$$N_k = C_k \cdot l \cdot S,$$

kde  $C_k \dots$  je cena kabelu za 1 m délky vztažená k 1 mm<sup>2</sup> průřezu fázového vodiče

(Kč · m<sup>-1</sup> · mm<sup>-2</sup>),

$l$  ... délka vedení (m),

$S$  ... průřez jedné fáze vedení (mm<sup>2</sup>).

Všimněme si podobnosti mezi tímto vztahem pro  $N_k$  a prvním sčítancem v našem vztahu pro  $y(S)$ . Konstanta  $k_1$  bude tedy zahrnovat

$$k_1 = C_k \cdot l.$$

Skutečně cena kabelu je konstantní a zrovna tak je délka vedení (zanedbáme-li změnu délky vlivem teplotní roztažnosti, která bude vzhledem k celkové délce vedení tak jako tak zanedbatelná).

Provozní náklady  $N_z$  jsou dány budoucími náklady na elektrické ztráty ve vedení. Současná hodnota nákladů na ztráty, tedy provozních nákladů, za ekonomickou životnost vedení:

$$N_z = 3 \cdot 0,001 \cdot \varrho_{45} \cdot \frac{l}{S} \cdot I_p^2 \cdot T \cdot C_w \cdot \frac{B}{1 + \frac{i}{100}},$$

kde  $\varrho_{45}$  ... je měrný elektrický odpor vodičů vedení při 45 °C ( $\Omega \cdot \text{mm}^2 \cdot \text{m}^{-1}$ ),

$I_p$  ... výpočtový (maximální soudobý) proud tekoucí vedením v prvním roce (A),

$T$  ... doba plných ztrát za rok (h · rok<sup>-1</sup>),

$C_w$  ... cena jedné kWh elektrické energie (Kč · kW<sup>-1</sup> · h<sup>-1</sup>),

$B$  ... součinitel zahrnující nárůst zatížení, ceny el. energie za dobu ekonomické životnosti vedení a diskontní sazbu,

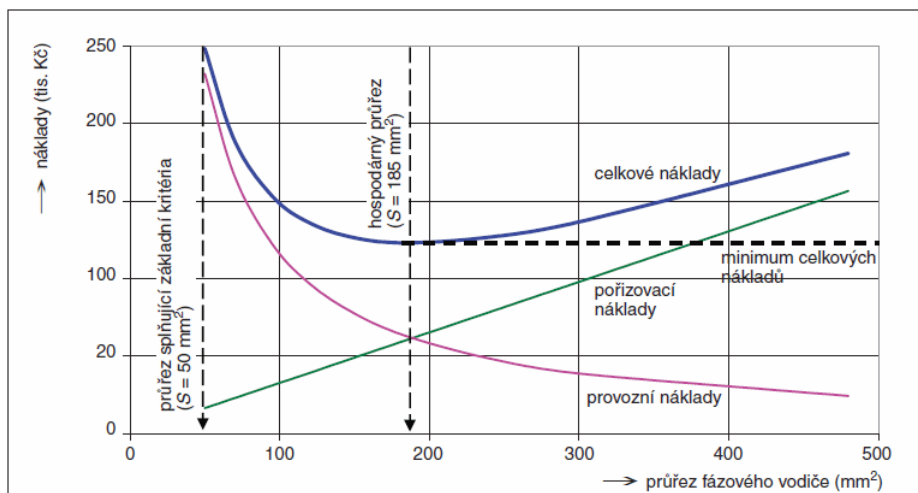
$i$  ... diskontní sazba (%) – vyjadřuje časovou hodnotu peněz; v případě nedostatku přesnějších informací lze uvažovat  $i = 5$  %.

Opět si všimněme podobnosti mezi vztahem pro  $N_z$  a druhým sčítancem v našem vztahu pro  $y(S)$ . Konstanta  $k_2$  bude proto obsahovat

$$k_2 = 3 \cdot 0,001 \cdot \varrho_{45} \cdot l \cdot I_p^2 \cdot T \cdot C_w \cdot \frac{B}{1 + \frac{i}{100}}.$$

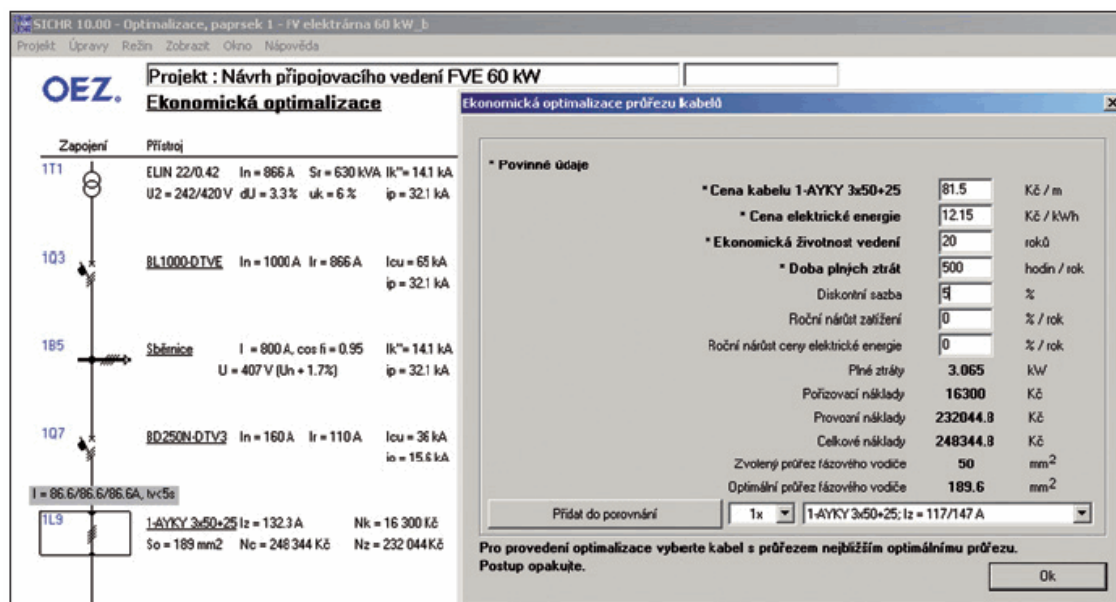
Celá problematika, která není předmětem této práce, je daleko složitější – další vztahy pro výpočty jednotlivých veličin je možno nalézt ve výše zmiňovaném článku.

Autor článku uvádí, že nejsou výjimkou případy, kdy se optimalizací průřezu sníží celkové náklady na vedení o více než 50 %. Příklad závislosti je na obr. 1 (převzat z [9]).



Obr. 1. Příklad závislosti nákladů na průřezu vedení

Na následujícím obrázku uvádí autor hodnoty parametrů z praxe, jedná se o přípojku fotovoltaické (PV) elektrárny (obr. 2 – převzat z [9]).



Obr. 2. Ekonomická optimalizace průřezu přípojovacího vedení PV elektrárny pomocí programu SicHR

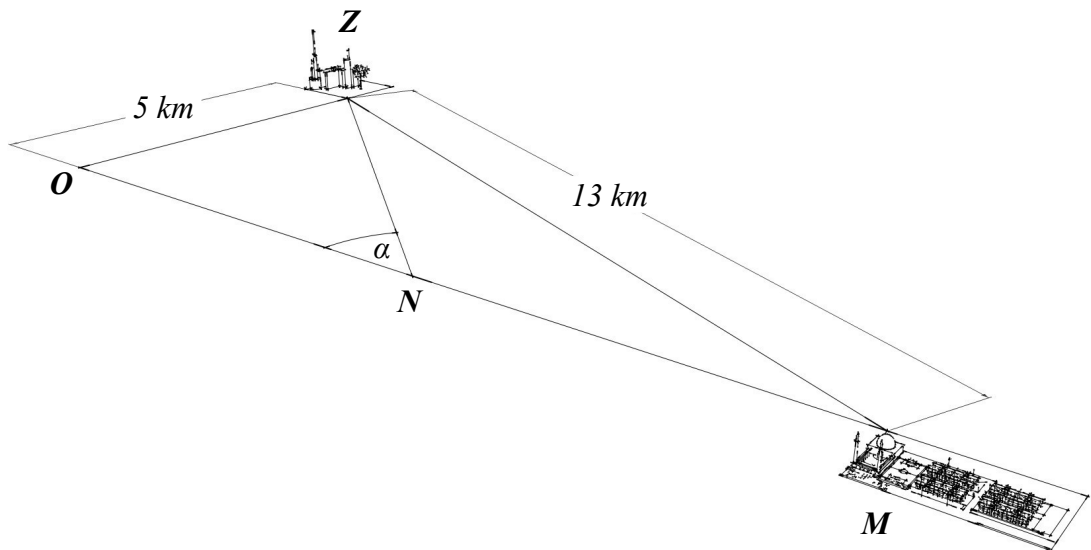
Pro závěsné přípojky domácností se většinou používají kabely o průřezu 10 (Al) nebo 16 mm<sup>2</sup> (AlFe). Navíc dle ČSN 33 2000-5-54 je u vodiče PEN povolen i průřez 6 mm<sup>2</sup> (Cu) a 10 mm<sup>2</sup> (Al).

Pro podzemní přípojky je minimální průřez 16 mm<sup>2</sup> (Al), při odbočení T-spojkou 25 mm<sup>2</sup> (Al). [17]



## 11. příklad

Průmyslový závod Z je vzdálený 5 km od silnice vedoucí do města M. Vzdálenost závodu Z od města M je 13 km. Určete, pod jakým úhlem  $\alpha$  je třeba vybudovat cestu k silnici, aby doprava materiálu ze Z do M byla co nejlevnější. Předpokládané náklady na přepravu 1 t materiálu na 1 km jsou po silnici 5 Kč a po vybudované cestě 3x větší.



Nejprve zjistíme, jaká je vzdálenost míst O a M.

$$|OM| = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ km.}$$

Tedy, kdybychom vybuvovali cestu pod úhlem  $90^\circ$  k silnici, byla by celková trasa ZOM dlouhá  $5 + 12 = 17$  km a celkové náklady na přepravu  $5 \cdot 15 + 12 \cdot 5 = 135$  Kč/t. Takto bychom mohli pro každý úhel – dejme tomu pro jednoduchost s přesností na jednotky stupňů – vypočítat přepravní náklady, výsledky zanést do grafu a z něj snadno vyčíst „kde zhruba“ je celková hodnota nákladů minimální. Nejenže by to bylo dost pracné, ale i nepřesné.

Pojďme tedy raději nalézt vztah – funkční závislost – která by vystihovala délku trasy ZNM a zároveň, aby v této závislosti vystupovala naše neznámá  $\alpha$ . Potom již stačí nalézt standardním způsobem globální minimum dané funkce.

Vyjáďřeme nejdříve délky jednotlivých částí trasy  $|ZNM| = |ZN| + |NM|$ , s tím, že část NM vyjádříme pomocí již dříve vypočítané trasy OM jako  $|OM| - |ON|$ :

$$\sin \alpha = \frac{5}{|Z N|}, \quad \cotg \alpha = \frac{|O N|}{5}.$$

$$|Z N| = \frac{5}{\sin \alpha}, \quad |O N| = 5 \cdot \cotg \alpha.$$

Potom část NM bude mít délku

$$|N M| = |O M| - |O N| = 12 - 5 \cdot \cotg \alpha.$$

A teď konečně můžeme vyjádřit celkovou cenu za dopravu na trase ZNM jako funkci úhlu  $\alpha$ .

$$y(\alpha) = |Z N| \cdot 15 + |N M| \cdot 5,$$

$$y(\alpha) = \frac{5}{\sin \alpha} \cdot 15 + (12 - 5 \cdot \cotg \alpha) \cdot 5,$$

$$y(\alpha) = \frac{75}{\sin \alpha} + 60 - 25 \cotg \alpha.$$

### 1) První derivace

$$y'(\alpha) = -\frac{75 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - 25 \cdot \left( -\frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) = \frac{25}{\sin^2 \alpha} \cdot (1 - 3 \cos \alpha)$$

### 2) Druhá derivace

$$y''(\alpha) = \frac{-75 \cdot (-\sin \alpha) \cdot \sin^2 \alpha - (25 - 75 \cos \alpha) \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^4 \alpha}$$

Tady můžeme ze všech členů vytknout člen  $\sin \alpha$  a zkrátit se jmenovatelem a dále upravit až na tvar

$$y''(\alpha) = \frac{75 \cdot \sin^2 \alpha - 50 \cos \alpha + 150 \cos^2 \alpha}{\sin^3 \alpha}.$$

### 3) Vyhodnocení derivací

Opět jako u drtivé většiny příkladů, které se řeší tímto postupem, je první na řadě nutná podmínka existence extrému, která nám poskytne stacionární bod(y) – tj. bod(y) „podezřelý“ z extrému.

$$y'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{25}{\sin^2 \alpha} \cdot (1 - 3 \cos \alpha) = 0$$

$$1 - 3 \cos \alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3} \begin{array}{l} \longrightarrow \alpha_1 \doteq 70^\circ 30' \\ \searrow \alpha_2 \doteq 289^\circ 30' \end{array}$$

Je jasné, že výsledek  $\alpha_2$  nemá pro náš případ smysl. I kdybychom se rozhodli postavit cestu opačným směrem od města, úhel by stejně musel ležet v rozpětí  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Navíc, jak vidno z grafu níže, se jedná o maximum. Jediným správným řešením tedy zůstává  $\alpha_1 \doteq 70^\circ 30'$ . Nicméně stále nevíme, jestli pro tento úhel budou náklady skutečně minimální. To zjistíme dosazením  $\alpha_1$  do druhé derivace

$$y''(70^\circ 30') = \frac{75 \cdot \frac{8}{9} - 50 \cdot \frac{1}{3} + 150 \cdot \frac{1}{9}}{0,838} = \frac{\frac{200}{3}}{0,838} \doteq 79,555 > 0.$$

Druhá derivace je kladná, tudíž v bodě  $\alpha_1 \doteq 70^\circ 30'$  nastává lokální minimum. Zda-li se jedná i o minimum globální zjistíme tím, že vyšetříme limitně krajní body definičního oboru.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} y(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left( \frac{75}{\sin \alpha} + 60 - 25 \cotg \alpha \right) = \infty - \infty = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left( \frac{75}{\sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} + 60 - 25 \cotg \alpha \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left( \frac{75 \cotg \alpha}{\cos \alpha} + 60 - 25 \cotg \alpha \right) = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \cotg \alpha \cdot \left( \frac{75}{\cos \alpha} - 25 \right) + 60 = +\infty \cdot 50 + 60 = +\infty, \end{aligned}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} y(\alpha) = \frac{75}{0^+} + 60 - 25 \cdot (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi^+} y(\alpha) = \frac{75}{0^-} + 60 - 25 \cdot (+\infty) = -\infty - \infty = -\infty,$$

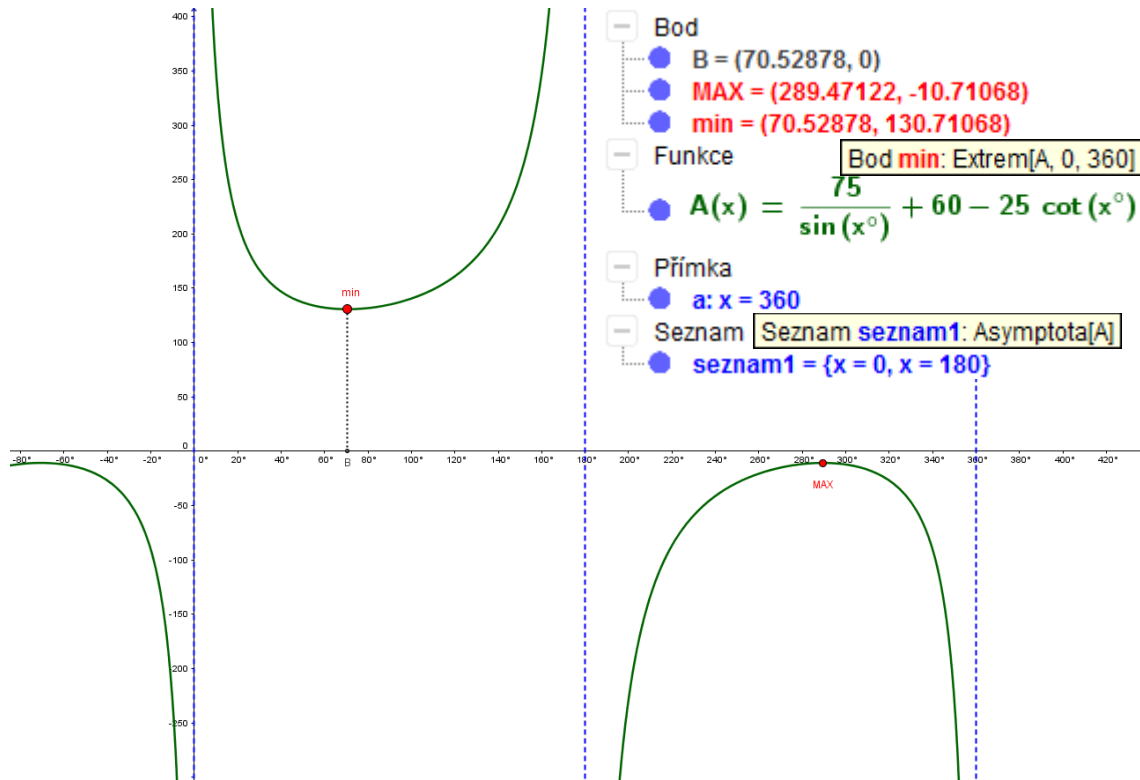
$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^-} y(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^-} \left( \frac{75}{\sin \alpha} + 60 - 25 \cotg \alpha \right) = \frac{75}{0^-} + 60 - 25 \cdot (-\infty) = -\infty + \infty = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^-} \left( \frac{75}{\sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} + 60 - 25 \cotg \alpha \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^-} \left( \frac{75 \cotg \alpha}{\cos \alpha} + 60 - 25 \cotg \alpha \right) = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^-} \cotg \alpha \cdot \left( \frac{75}{\cos \alpha} - 25 \right) + 60 = -\infty \cdot 50 + 60 = -\infty. \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že jiné lokální minimum než to, které jsme našli, neexistuje. Tudíž bod  $\alpha_1 \doteq 70^\circ 30'$  je zároveň minimem globálním.

Z toho plyne, že pokud vystavíme cestu pod tímto úhlem vzhledem k silnici, náklady na její realizaci jistě nebudou menší, než kdybychom ji postavili pod pravým úhlem a jistě nebudou větší než kdyby daná cesta spojovala přímo závod (Z) a město (M), nicméně z dlouhodobého hlediska se vyplatí, protože přepravní náklady budou minimální.

Závěr tedy zní: „*Při vybudování cesty pod úhlem 70° 30' vzhledem k silnici budou náklady na přepravu ze závodu (Z) do města (M) minimální.*“

Na následujícím grafu je vynesena funkce  $y(\alpha)$ .



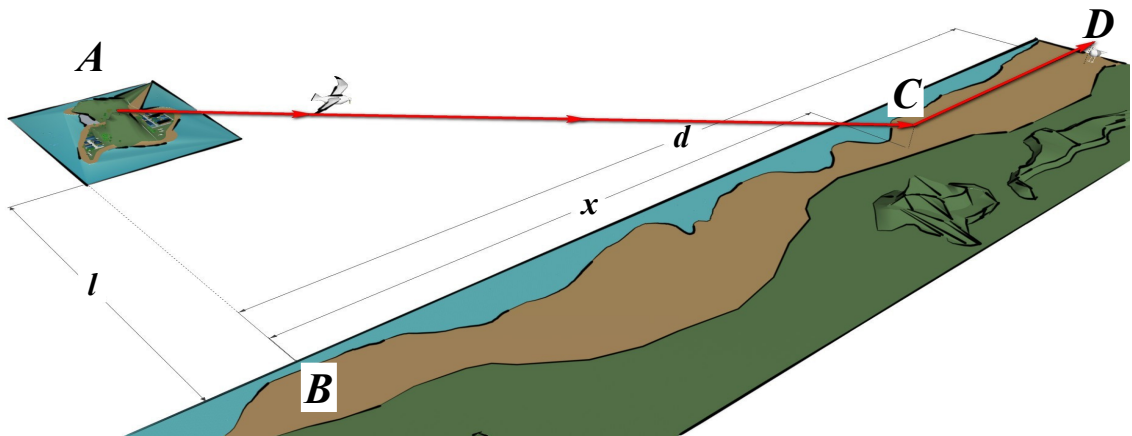
## 12. příklad

Nejpohodlnější cesta:

Ornitologové zjistili, že některé druhy ptáků neradi létají ve dne nad velkými vodními plochami. Předpokládá se, že pro let nad vodou je třeba větší výdej energie než nad pevninou, protože nad pevninou ptáky nadnáší stoupající teplý vzduch. Pták s tímto druhem chování byl vypuštěn z ostrova vzdáleného 5 km od pobřeží (bod B) a cílem jeho letu je bod D. Pták instinktivně volí nejméně energeticky náročnou cestu, letí nejprve do bodu C a poté pokračuje k bodu D. Vzdálenost bodů B a D je 13 km.

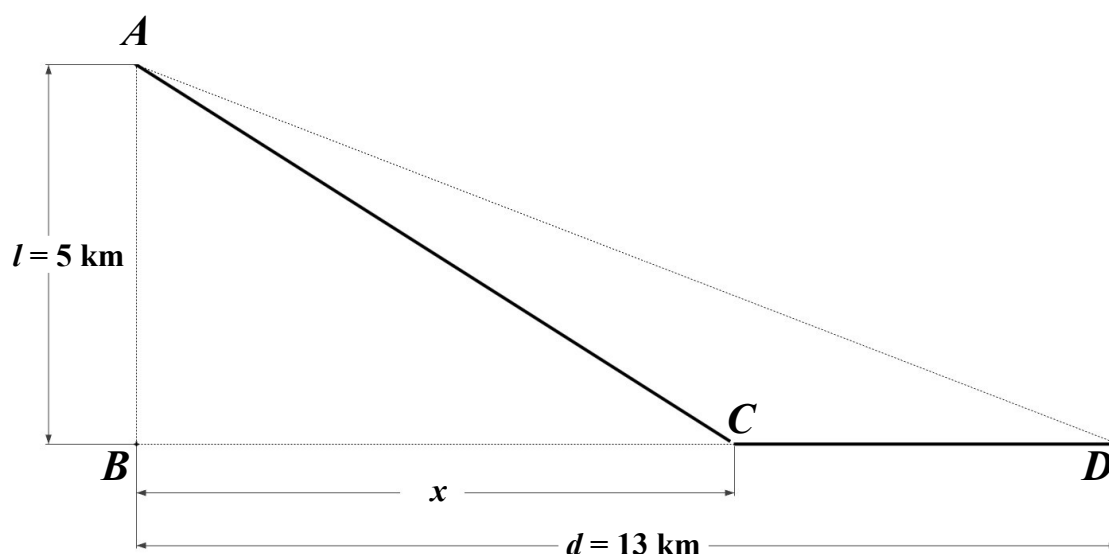
Určete:

- pokud obecně platí, že pro zdolání vzdálenosti 1 km je nad vodou nutno vydat 1,4 krát více energie než pro let nad pevninou, určete polohu bodu C, ve kterém pták odbočí.
- pokud ornitologové pozorují, že některé druhy ptáků odbočují 4 km od bodu B, kolikrát je pro tento druh ptáků namáhavější let nad vodou než nad pevninou?
- kolikrát musí být namáhavější let nad vodou, aby se ptákům vyplatilo letět přímou cestou?



Možná trochu paradoxně, vzhledem k „mlhavému“ zadání, se jedná o relativně jednoduchý příklad. Nejtěžším úkolem je nalézt rovnici, které by popisovala to, co je slovně vyjádřeno v zadání. Celý text zadání se točí kolem energetického výdeje při denním letu nad otevřenou vodní plochou. Proto hledáme rovnici, která tuto bilanci popisuje v závislosti na dráze letu, resp. na délce její trajektorie.

Než s tím začneme, ukažme si (pokud to není dostatečně zřejmé z předchozího obrázku) na zjednodušeném schématu, všechny známé a neznámé údaje.



Nyní by již mělo být vidět, že délka letu ptáků je součtem vzdáleností AC a CD. Jak to ale souvisí s energetickým výdejem? Ze zadání je jasné, že nad vodou je výdej energie vyšší než nad pevninou. Kolikrát? Podle zadání v úloze a) 1,4 krát. Čili dostáváme zde jakousi konstantu úměrnosti, označme ji  $k$ . Tato konstanta se týká pouze trasy AC. Na zbytku trasy CD je již výdej normální. Energetický výdej bude úměrný délce trasy. Sestavme proto rovnici energetického výdeje na trase ACD jako

$$E = k \cdot \sqrt{l^2 + x^2} + (d - x). \quad (1)$$

Pro úsek AC jsme použili Pythagorovu větu a úsek CD jsme vyjádřili jako  $d - x$ . V této rovnici je jedinou neznámou  $x$ , vše ostatní jsou konstanty.

Nyní, poněvadž v úloze a) se nás ptají na polohu bodu C, ve kterém ptáci odbočí podél pobřeží, takovou, aby byl jejich energetický výdej co nejmenší, budeme hledat minimum funkce

$$E(x) = k \cdot \sqrt{l^2 + x^2} + d - x. \quad (2)$$

### 1) První derivace

$$E'(x) = k \cdot \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} - 1$$

## 2) Druhá derivace

$$\begin{aligned} E''(x) &= k \cdot \left[ 1 \cdot (l^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} + x \cdot 2x \cdot (l^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right] = \\ &= k \cdot \left[ (l^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2 \cdot (l^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}} \right] = \frac{k}{\sqrt{l^2 + x^2}} - \frac{k \cdot x^2}{\sqrt{(l^2 + x^2)^3}} \end{aligned}$$

## 3) Vyhodnocení derivací

První derivaci položíme rovnu nule (nutná podmínka existence extrému)

$$E'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \cdot \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} - 1 = 0. \quad (3)$$

Po vynásobení jmenovatelem a drobných úpravách se dostaneme na tvar

$$k^2 x^2 = l^2 + x^2. \quad (4)$$

A nyní jednotlivé úlohy ze zadání:

a)

Hledáme polohu bodu C, tedy vlastně jeho vzdálenost od bodu B ve směru BD. Ta je ve vztahu (4) zastoupena proměnnou  $x$ .

Členy, kde vystupuje  $x^2$  dáme na jednu stranu

$$k^2 x^2 - x^2 = l^2,$$

vytkneme  $x^2$  a osamostatníme

$$x^2 = \frac{l^2}{k^2 - 1}.$$

Poslední úpravou – odmocněním celé rovnice – dostaneme vztah pro vzdálenost  $x$

$$x = \frac{l}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Dosadíme hodnoty ze zadání  $k = 1,4$ ;  $l = 5$  km

$$x = \frac{5}{\sqrt{(1,4)^2 - 1}} \doteq 5,1 \text{ km.}$$

Jsme hotovi? Téměř, ještě potřebujeme ověřit, že se skutečně jedná o minimální hodnotu. Toho dosáhneme dosazením hodnoty  $x = 5,1$  do druhé derivace

$$E''(5,1) = \frac{1,4}{\sqrt{5^2 + 5,1^2}} - \frac{1,4 \cdot 5,1^2}{\sqrt{(5^2 + 5,1^2)^3}} = \frac{1,4}{7,1} - \frac{36,4}{364,3} = 0,197 - 0,099 = 0,098 > 0.$$

Vidíme, že druhá derivace je kladná, z čehož plyne, že v bodě  $x = 5,1$  nastává pro funkci  $E(x)$  globální minimum.

Závěr tedy bude znít: „Ptáci odbočí 5,1 km od bodu B.“

Zamysleme se nad jednou věcí: jak se bude měnit úhel  $\sphericalangle BCA$  v závislosti na vzdálenosti  $l$  ostrova od pevniny? Spočítejme tento úhel pro současnou situaci

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{x} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{5,1} \rightarrow \alpha = 44,43^\circ.$$

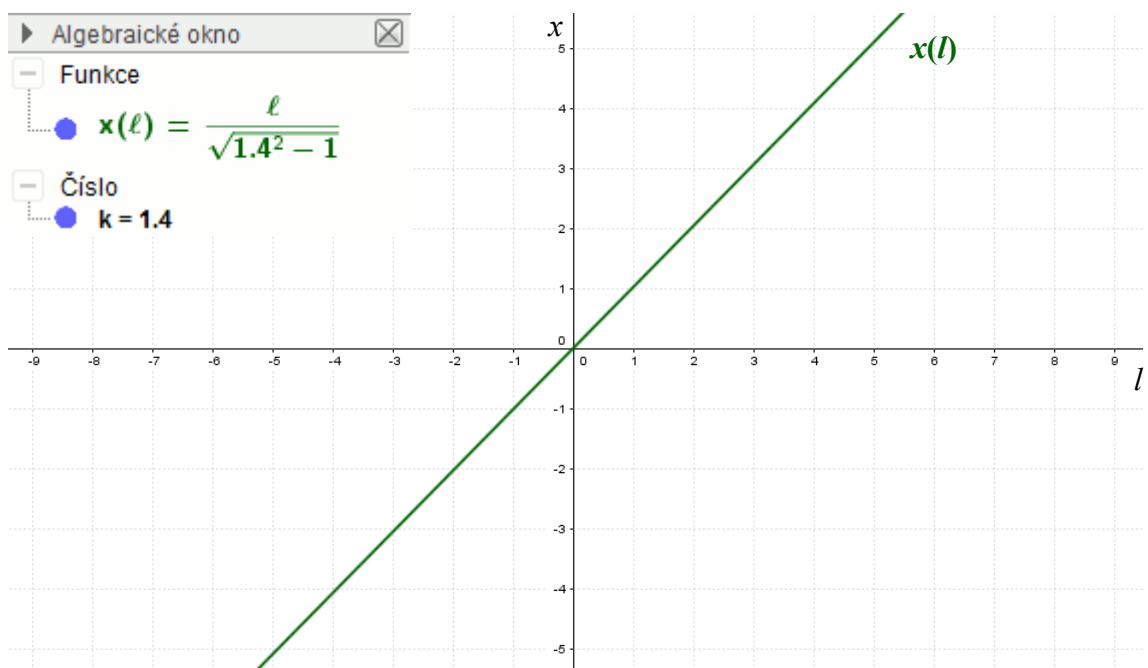
Nyní situaci pozměňme, vzdálenost  $l$  zvětšíme na 12 km. Dopočítáme příslušnou vzdálenost  $x$

$$x = \frac{12}{\sqrt{(1,4)^2 - 1}} \doteq 12,24 \text{ km.}$$

A znovu spočítáme odpovídající úhel

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{x} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{12,24} \rightarrow \alpha = 44,43^\circ.$$

Vidíme, že úhel je pořád konstantní, což nás vede k závěru, že ptáci létají směrem k pevnině pod stále stejným úhlem neohledně na vzdálenost ostrova od pevniny. Vše bude jasné při pohledu na následující graf, který znázorňuje průběh funkce  $x$  v závislosti na proměnné  $l$ .





Jedná se o obyčejnou lineární závislost, tedy o kolik se změní proměnná  $l$ , o tolik se změní i  $x$ .

b)

Opět vyjdeme z (4), tentokrát se nás ale ptají na konstantu  $k$ , kterou musíme ze vztahu vyjádřit

$$k = \frac{\sqrt{l^2 + x^2}}{x}.$$

Nyní již stačí pouze dosadit. Všechny potřebné údaje známe:  $l = 5$  km;  $x = 4$  km.

$$k = \frac{\sqrt{5^2 + 4^2}}{4} \doteq 1,6$$

Závěrem: „*Pokud by ptáci odbočovali již ve 4km vzdálenosti od bodu B, energetická náročnost jejich cesty by vzrostla na 1,6ti násobek.*“

c)

Vyjdeme ze stejného vzorce jako v b) s tím rozdílem, že vzdálenost  $x = d = 13$  km;  $l = 5$  km.

$$k = \frac{\sqrt{5^2 + 13^2}}{13} \doteq 1,07$$

Závěr: „*Aby se ptákům vyplatilo letět přímou cestou z A do D, musela by být energetická náročnost letu nad vodní plochou pouze 1,07 násobkem náročnosti letu nad pevninou.*“

Jistě jste si všimli, že z fyzikálního pohledu zde není úplně vše v pořádku. Mluvím o rovnici (1)

$$E = k \cdot \sqrt{l^2 + x^2} + (d - x),$$

kteřou jsme sestavovali jako první. Proměnná  $E$  zastupuje *energii*, proto by její jednotkou měl být J [Joule], tj. po rozepsání v jednotkách SI  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  ([25], str. 151). Vidíme však, že na pravé straně máme samé délkové veličiny jejichž základní jednotkou je m [metr]. Chybí nám zde ještě jedna konstanta úměrnosti, jejíž jednotkou bychom bilanci na levé i pravé straně vyvážili. Označme ji např.  $m$ , její jednotkou bude  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Teď již jednotky na obou stranách souhlasí

$$E = m \cdot \left( k \cdot \sqrt{l^2 + x^2} + (d - x) \right) \quad (5)$$

$$[J] = ([\text{kg}][\text{m}][\text{s}]^{-2}) \cdot \underbrace{\left( [-] \cdot \sqrt{[\text{m}]^2 + [\text{m}]^2} + ([\text{m}] - [\text{m}]) \right)}_{[\text{m}]}$$

$$[\text{kg}][\text{m}]^2[\text{s}]^{-2} = ([\text{kg}][\text{m}][\text{s}]^{-2}) \cdot [\text{m}]$$

$$[\text{kg}][\text{m}]^2[\text{s}]^{-2} = ([\text{kg}][\text{m}]^2[\text{s}]^{-2})$$

Proč tedy v naší rovnici tato konstanta nevystupuje? Jednoduše proto, že by nám pouze zkomplikovala práci. Nám nejde o to přímo hodnotu energie vypočítat, ale pouze zjistit, pro které hodnoty  $x$  je nejmenší. Protože se jedná o konstantní veličinu, která násobí celou pravou stranu tak, jak je vidět v prvním řádku (5), můžeme ji z rovnice (1) odstranit s vědomím, že skutečná hodnota energie  $E$  bude  $m$ -krát větší (nebo menší v případě  $m < 1$ ). *Poloha extrémů dané funkce  $E(x)$  v kartézské soustavě vzhledem k souřadné ose  $x$  se nezmění.* Toto tvrzení snadno dokážeme při pohledu na první derivaci ve chvíli, kdy bychom ji položili rovnu nule (jako při ověřování nutné podmínky existence extrému)

$$E'(x) = m \cdot \left( k \cdot \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} - 1 \right) \rightarrow m \cdot \left( k \cdot \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} - 1 \right) = 0.$$

Nyní můžeme celou rovnici vydělit  $m$  a dostaneme naprosto totožný tvar jako u rovnice (4). Vizuálně si předchozí tvrzení můžeme ověřit např. v programu GeoGebra, nakreslením libovolné funkce  $f(x)$  (např. polynom 3. řádu) a jejích „druhů“, kteří se budou lišit právě v konstantě  $m$  takto:  $g_1(x) = m_1 \cdot f(x)$ ,  $g_2(x) = m_2 \cdot f(x)$ , ... . Příkazem Extrem[] si necháme vykreslit extrémy všech funkcí. Minima proložíme jednou přímkou, maxima druhou. Vidíme, že všechny minima leží v jedné přímce, stejně tak maxima.

Druhá možnost by byla celou rovnici konstantou  $m$  vydělit, čímž bychom dostali

$$\frac{E}{m} = k \cdot \sqrt{l^2 + x^2} + (d - x).$$

Levou stranu bychom substituovali např. za  $E_m$  a dále počítali s touto novou veličinou. Rovnice (2) by pak vypadala v podstatě naprosto stejně, takto

$$E_m(x) = k \cdot \sqrt{l^2 + x^2} + d - x.$$

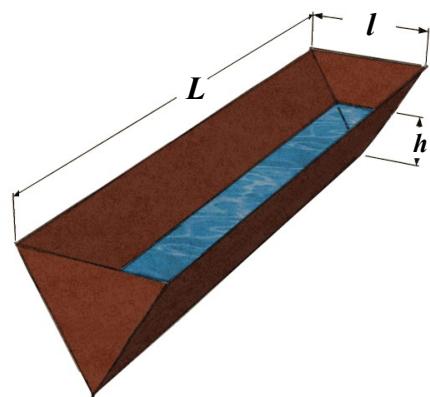
S tím rozdílem, že již na levé straně nemáme „čistou“ energii  $E$ , ale její hodnotu dělenou energetickou konstantou  $m$ , což pro účely tohoto příkladu na věci nic nemění.

# Kapaliny & výtoky

## 13. příklad

Rychlost s jakou roste hladina v nádrži:

Koryto na vodu má průřez rovnostranného trojúhelníku o straně 20 cm a je dlouhé 0,8 m. Přitéká do něj voda rychlostí 15 cm<sup>3</sup>/min. Hloubka vody v korytě (měřeno uprostřed, kde je hloubka největší) je 8 cm. Jak rychle roste (stoupá) hladina?



Vypišme si nejprve údaje, které ze zadání známe:

- $l = 20$  cm,
- $L = 80$  cm,
- $h = 8$  cm,
- $v_V = 15$  cm<sup>3</sup>/min.

Ještě se pozastavme nad rychlostí přítoku vody. Tato rychlost vyjadřuje změnu objemu vody v čase, tedy můžeme psát

$$v_V = \frac{dV}{dt}.$$

Naši hledanou rychlost, kterou se mění výška hladiny v závislosti na čase, si označme  $v_h$ . Z předešlé věty plyne, že tato rychlost bude vyjádřena vztahem ([25], s. 100)

$$v_h = \frac{dh}{dt}.$$

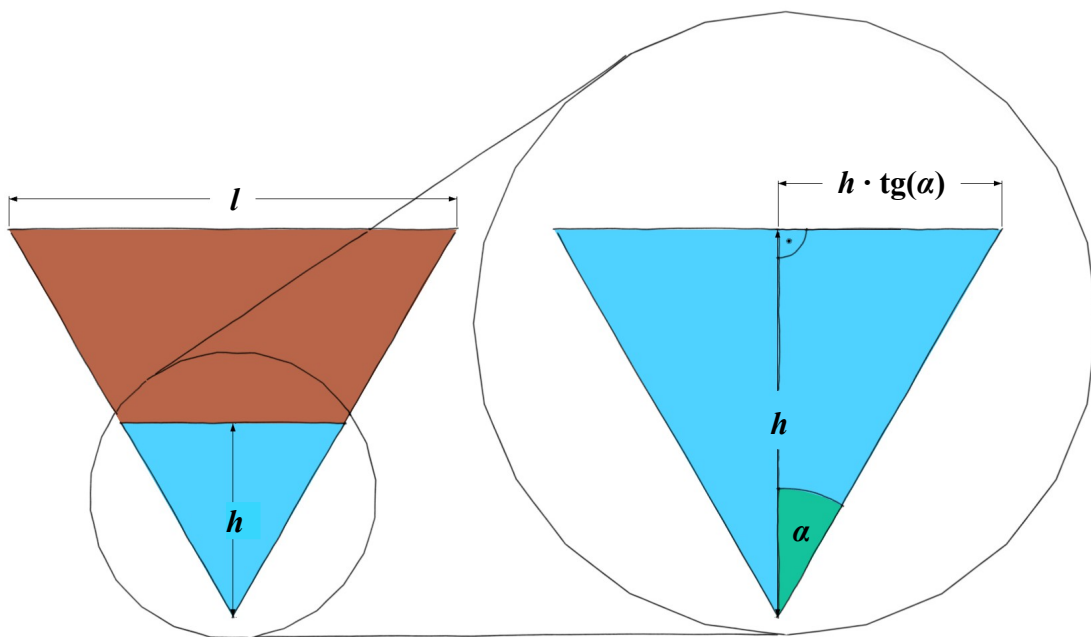
Potřebujeme tedy najít vztah mezi *objemem* a *výškou hladiny* vody v korytě, resp. mezi *rychlostmi* jejich změny. Při pohledu na obrázek výše je zřejmé, že z matematického hlediska má koryto tvar trojbokého hranolu. Za předpokladu, že koryto není nějakým způsobem nakloněno k jedné straně, ale stojí „rovně“ (tedy tak, že rovina tvořená horní obdélníkovou podstavou s rozměry  $L \times l$ , je rovnoběžná s vodní hladinou), je jeho objem dán obecně vztahem

$$V = S_p \cdot v_p,$$

kde  $S_p$  je obsah podstavy (v našem případě je to rovnostranný trojúhelník),  $v_p$  je výška kolmá k této podstavě (v našem případě odpovídá délce koryta  $L$ ).

Pro další úvahy si ještě načrtneme příčný řez korytem (viz další stranu). Z náčrtku je vidět, že  $S_p$  můžeme vyjádřit jako

$$S_p = \frac{2h \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot h}{2} = h^2 \operatorname{tg} \alpha.$$



Tedy vztah pro objem vody v korytě bude vypadat následovně

$$V = h^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot L.$$

Nyní tento výraz zderivujeme. Ale pozor! Musíme derivovat pouze podle těch proměnných, které se mění. V našem případě se mění pouze výška hladiny  $h$ , délka koryta  $L$  zůstává neměnná (konstantní)! Pojďme tedy derivovat podle  $h$ .

$$\frac{dV}{dh} = 2h \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot L$$

Po vynásobení rovnice  $dh$  a vydělení  $dt$  dostaneme na levé straně tvar, který odpovídá rychlosti změny objemu vody v korytě

$$\frac{dV}{dt} = 2h \frac{dh}{dt} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot L.$$

Všimněme si, že to, co jsme si na začátku předsevzali, to se nám v tuto chvíli podařilo splnit, tedy získali jsme vztah mezi rychlostmi změny *objemu* a *hladiny* vody v

korytě. Teď již zbývá pouze rovnici upravit na žádoucí tvar

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{2h \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot L}$$

Ještě můžeme rovnici zjednodušit dosazením našich zástupných proměnných  $v_h$  a  $v_V$  na tvar

$$v_h = \frac{v_V}{2h \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot L}$$

Hodnoty proměnných  $v_V$ ,  $h$ ,  $L$  známe. Známe rovněž velikost úhlu  $\alpha = 30^\circ$  (jedná se o rovnostranný trojúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou  $60^\circ$ ). Zbývá už jen dosadit

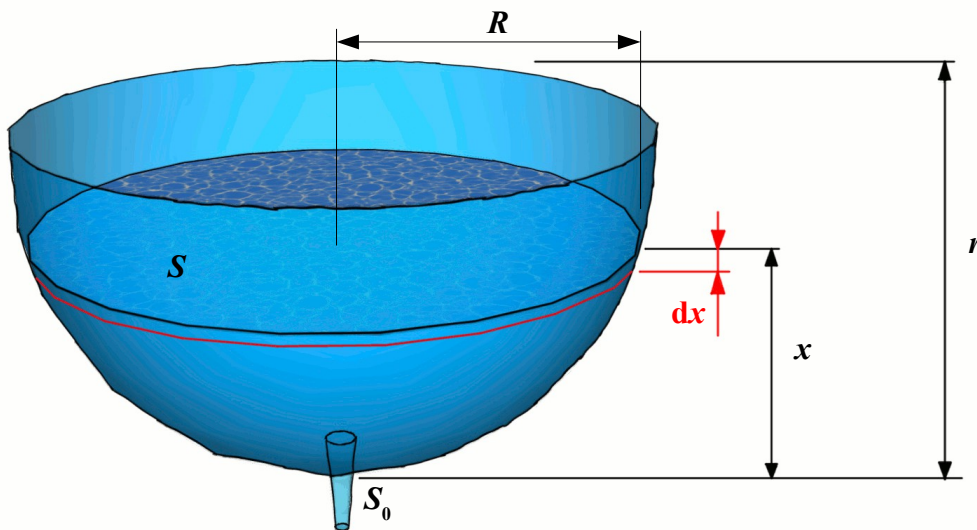
$$v_h = \frac{15}{2 \cdot 8 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot 80} \doteq 0,02 \text{ cm/min} \doteq 1,2 \text{ cm/hod.}$$

Závěrem můžeme konstatovat, že rychlost, jakou stoupá hladina vody v korytě, je 1,2 cm/hod.

## 14. příklad

Výtok kapaliny z nádoby:

Nádoba tvaru polokoule o poloměru  $r = 10$  cm je zcela naplněná kapalinou. Ve dně nádoby je otvor o průřezu  $S_0 = 4$  mm<sup>2</sup>. Za jakou dobu po uvolnění otvoru klesne hladina kapaliny o polovinu poloměru, jestliže koeficient zúžení vytékajícího proudu kapaliny je  $k = 0,6$ ?



Nechť je výška hladiny kapaliny v počátečním časovém okamžiku  $t = 0$  rovna  $r$ . Víme, že rychlost výtoku kapaliny v okamžiku, kdy výška její hladiny je rovna  $x$ , je určena Torricelliho vztahem  $v_1 = \sqrt{2gx}$  ([5], str. 198). Uvažujeme-li koeficient zúžení vytékajícího kapalinového proudu  $k$ , pak je rychlost  $v$  určena vztahem  $v = k\sqrt{2gx}$ . V nekonečně malém časovém intervalu  $\Delta t$  můžeme výtok kapaliny považovat za rovnoměrný.

Za dobu  $\Delta t$  vyteče výškovým otvorem element sloupce kapaliny, jehož výška je  $v \Delta t$  a plošný průřez  $S_0$ , což má za následek snížení hladiny kapaliny v nádobě o  $-\Delta x$ . V důsledku těchto úvah dostáváme

$$k S_0 \sqrt{2gx} \Delta t = -S \Delta x,$$

kde  $S$  je okamžitý plošný průřez hladiny kapaliny.

Pak pro nekonečně malé intervaly  $dt, dx$  dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{k S_0 \sqrt{2gx}}{S},$$

kde  $S = \pi R^2 = \pi [r^2 - (r - x)^2] = \pi (2rx - x^2)$  (viz obr.). Po dosazení za  $S$  a separaci proměnných dostaneme

$$dt = -\frac{\pi}{k S_0 \sqrt{2g}} \frac{2rx - x^2}{\sqrt{x}} dx.$$

Po integraci máme

$$t = \frac{\pi}{k S_0 \sqrt{2g}} \left( \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} r x^{\frac{3}{2}} \right) + C.$$

Počáteční podmínky: v čase  $t = 0$  je  $x = r$ , a tím  $C = \frac{14}{15} \frac{\pi}{k S_0 \sqrt{2g}} r^{\frac{5}{2}}$ , takže

$$t = \frac{\pi x \sqrt{x}}{k S_0 \sqrt{2g}} \left( \frac{2}{5} x - \frac{4}{3} r \right) + \frac{14}{15} \frac{\pi}{k S_0 \sqrt{2g}} r^2 \sqrt{r}.$$

Pro  $x = \frac{r}{2}$  dostáváme

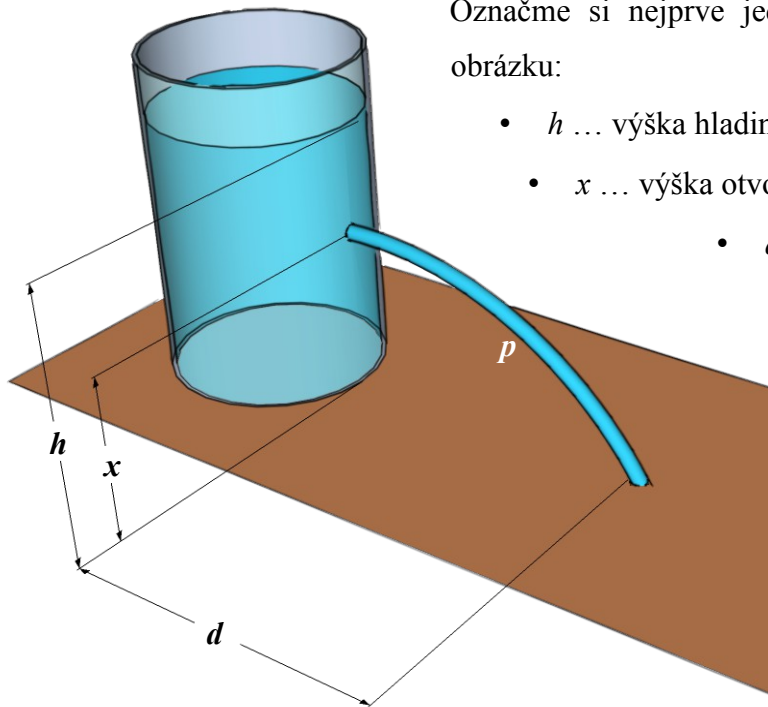
$$t = \frac{\pi}{2 k S_0 \sqrt{g}} \frac{28\sqrt{2} - 17}{30} r^2 \sqrt{r}.$$

Pro dané hodnoty:

hladina klesla o polovinu původní hodnoty za  $t = 8$  min 18 s.

## 15. příklad

V nádobě je  $H_2O$  ve výšce  $h$ . Určete výšku otvoru, který vytvoříme ve stěně nádoby tak, aby kapalina dostříkovala co nejdál.



Označme si nejprve jednotlivé vzdálenosti podle obrázku:

- $h$  ... výška hladiny vody v nádobě,
- $x$  ... výška otvoru ode dna nádoby,
- $d$  ... vzdálenost od paty nádoby, do které voda dostříkne.

Ze zadání opět, tak jako ve většině ostatních příkladů v této práci, vyčteme, že veličina, kterou jsme si označili  $d$  má být

co největší, tedy maximální. Je zřejmé, že velikost této veličiny se bude měnit v závislosti na výšce otvoru, tzn. na veličině  $x$ . Hledáme proto funkční závislost mezi veličinami  $d$  a  $x$ , respektive předpis funkce  $d(x)$ .

Ještě než se do toho pustíme, položme si otázku – na jaké *fyzikální* veličině bude záviset to, do jaké vzdálenosti voda dostříkne? Je to to samé, jako ptát se na čem závisí délka hodu oštěpaře při konstantním úhlu odhodu. Nebo na čem závisí vzdálenost, do které doletí kulička „cvrnknutá“ z okraje stolu. Odpověď na sebe nenechá dlouho čekat, protože je zřejmé, že onou hledanou veličinou je rychlost. Rychlost, kterou bude atlet oštěp odhazovat, kterou udělíme cvrnknutím kuličky na stole nebo kterou bude vytékat voda z otvoru v nádobě. Jak vyjádříme matematicky tuto rychlost?

Pomůžeme si jinou dobře známou fyzikální veličinou – energií. Po vytvoření otvoru u naší nádoby začne docházet k přeměnám energie. Potenciální energie kapaliny ve výšce otvoru se začne měnit na kinetickou energii vytékající kapaliny. Tedy v místě



otvoru platí ([5] ,s. 195)

$$E_p = E_k . \quad (1)$$

Vyjádřeme tyto energie nejdříve pro tuhé těleso ([5] ,s. 106, 110).

$$E_p = m g h$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Pro kapalně těleso, jakým voda uzavřená v nádobě je, platí podobné vztahy. S tím rozdílem, že místo *hmotnosti* (hmotnost  $m$  té části kapaliny, která se nachází nad vodorovnou hladinou, ve které se nachází otvor, se bude měnit v závislosti na vzdálenosti otvoru od volné hladiny kapaliny; tedy dostali bychom další závislost  $m(h-x)$ ) použijeme *hustotu* kapaliny nebo též *objemovou hmotnost*, jak se této veličině dříve říkalo, protože hustota vlastně vyjadřuje hmotnost látky o jednotkovém objemu (její základní jednotkou je  $\text{kg/m}^3$ ). Přepíšme tedy výše uvedené vztahy.

$$E_p = \rho g (h - x)$$

$$E_k = \frac{1}{2} \rho v^2$$

Podle vztahu (1) jsou tyto energie v místě výtoku kapaliny v rovnováze.

$$E_p = E_k$$

$$\rho g (h - x) = \frac{1}{2} \rho v^2$$

Z tohoto vztahu již jsme schopni rychlost výtoku kapaliny vyjádřit.

$$2 \rho g (h - x) = \rho v^2$$

$$v = \sqrt{2 g (h - x)} \quad (2)$$

Vztah (2) tedy vyjadřuje rychlost, kterou kapalina z otvoru vytéká. To je pro nás pouze „přestupní stanice“, protože nás zajímá vzdálenost  $d$ , do které kapalina dostříkne.

Vraťme se k příkladu s kuličkou, kterou cvrkneme ze stolu na zem. Z fyzikálního hlediska se jedná o vrh vodorovný, který můžeme rozložit na dva pohyby: a) ve směru vodorovné osy je to *posuvný pohyb*; b) ve směru svislé osy *volný pád*. Složením těchto dvou pohybů získáme vodorovný vrh. Jinými slovy, částici vody (stejně tak, jako ocelové nebo jiné kuličky), která právě opustila otvor v nádobě, je jedno, jestli urazí trajektorii vodorovného vrhu, kterou je v ideálním případě parabola (na obrázku ozn. **p**) nebo postupně vykoná pohyb posuvný a po tom volným pádem spadne do místa, kde

se traktorie  $p$  stýká s podložkou (je možno i opačně – nejdříve volný pád, a pak posuvný pohyb – obě možnosti jsou ekvivalentní). Pojďme tedy obě složky vodorovného vrhu vyjádřit:

- horizontální složka (*posuvný [translační] pohyb*) ([5], s. 35):  $d = v \cdot t$ , (3)

- vertikální složka (*volný pád*) ([5], s. 50):  $x = \frac{1}{2} g t^2$ . (4)

V první z uvedených složek (3) je veličina  $d$  ta, která nás zajímá, a kterou chceme uvést do vztahu s veličinou  $x$ . Rychlost  $v$  jsme si již vyjádřili ve vztahu (2) a čas  $t$  teď získáme ze vztahu (4).

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}} \quad (5)$$

Nyní oba vztahy (2) a (5) dosadíme do (3) a získáme funkční závislost vzdálenosti  $d$  na výšce otvoru  $x$ .

$$d(x) = \sqrt{2g(h-x)} \cdot \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

Vidíme skutečně, že jediná proměnná je  $x$ ;  $h$  je konstanta a  $g$  je tíhové zrychlení, které je pro danou zeměpisnou šířku též konstantní. Ještě provedme finální úpravu – tíhové zrychlení nám vypadne – na tvar

$$d(x) = 2 \cdot \sqrt{x(h-x)}. \quad (6)$$

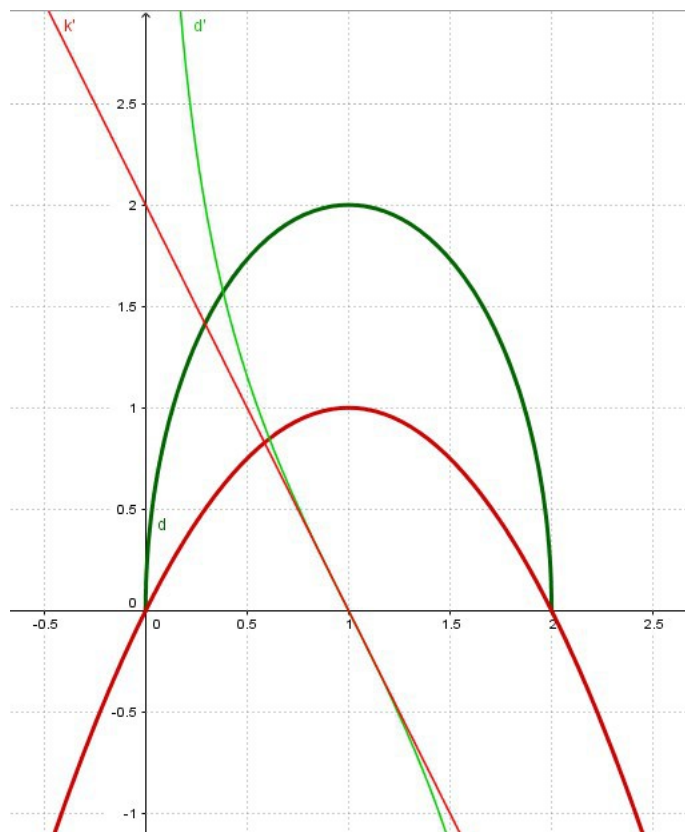
Tuto funkci nyní chceme maximalizovat, tedy hledáme globální maximum  $d(x)$ . Můžeme ji derivovat přímo v tomto tvaru anebo si ji můžeme zjednodušit. Ale pouze tak, aby daná úprava neovlivnila výsledek. Ze tvaru (6) je vidět, že se jedná o kvadratickou funkci pod odmocninou. Co kdybychom „vyňali“ tuto vloženou kvadratickou funkci a odmocninu „zahodili“? Změnilo by se znaménko derivace?

Označme si nejprve tuto vyjmutou funkci

$$k(x) = x \cdot (h - x) \quad (7)$$

Mnohem názorněji bude celá problematika patrná z následujícího obrázku vytvořeného v GeoGebře (na obrázku  $k(x)$  je ona vyňatá kvadratická funkce;  $k'$  je její derivace;  $d'$  je derivace naší  $d(x)$ ; konstanta  $h$  je implicitně nastavena na hodnotu 2 čistě z důvodu větší názornosti).

- Funkce
  - $d(x) = 2 \sqrt{x(2-x)}$
  - $d'(x) = \frac{2-2x}{\sqrt{x(2-x)}}$
  - $k(x) = x(2-x)$
  - $k'(x) = -2x+2$
  - $l(x) = 2x(2-x)$
  - $l'(x) = -4x+4$
- Číslo
  - $h = 2$



Vidíme, že kořeny obou rovnic  $d(x)$  i  $k(x)$  jsou totožné, je zachován průběh obou funkcí, pouze funkční hodnoty fce  $k(x)$  jsou poloviční oproti  $d(x)$ . Z definice derivace víme, že hodnota derivace v bodě  $X$  je rovna tangente úhlu, který svírá tečna ke grafu dané funkce vedená bodem  $X$  se souřadnou osou  $x$  ([13], s. 157). Goniometrická funkce tangens mění znaménko při přechodu úhlu  $90^\circ$  směrem vzhůru z kladného na záporné. Tedy i derivace podle předchozí definice se bude chovat stejně. Při pohledu na obrázek je vidět, že derivace  $d'(x)$  a  $k'(x)$  jsou obě klesající, tudíž znaménka obou derivací budou shodná a hlavně obě protínají osu  $x$  v tomtéž bodě. Jinými slovy, mají obě stejné kořeny. Proto ve chvíli, kdy obě první derivace položíme rovnu nule, obě derivace budou dávat shodný výsledek. Pojdme toho využít.

### 1) První derivace

$$k(x) = x \cdot (h - x) = hx - x^2$$

$$k'(x) = h - 2x$$

$$k'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h - 2x = 0$$

Z této podmínky dostaneme stacionární bod

$$x = \frac{h}{2}.$$

## 2) Druhá derivace

$$k''(x) = -2 < 0 \rightarrow \text{lokální maximum}$$

## 3) Vyhodnocení derivací

Zjistili jsme, že ve stacionárním bodě  $x = \frac{h}{2}$  se nachází lokální maximum funkce  $k(x)$  a zároveň, jak jsme viděli z grafu, funkce  $d(x)$ . Prověřme ještě, že se skutečně jedná o jediné maximum (i když z grafu je to patrné).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} hx - x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{h}{x} - 1 \right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} hx - x^2 = -\infty - \infty = -\infty.$$

Výsledek není nijak překvapivý, nicméně jsme analyticky potvrdili, že neexistuje žádná další lokální extrémní hodnota, kterou by mohla funkce  $k(x)$  potažmo  $d(x)$  nabývat.

Závěr: „Otvor je potřeba udělat ve výšce  $x = \frac{h}{2}$ , tedy přesně v polovině výšky vodní hladiny tak, aby vzdálenost, do které voda dostříkne byla co největší.“

Na úplný konec ještě pro zajímavost dopočítejme, jaká tato maximální vzdálenost bude.

$$d_{max} = 2 \cdot \sqrt{\frac{h}{2} \cdot \left( h - \frac{h}{2} \right)} = 2 \cdot \frac{h}{2} = h$$

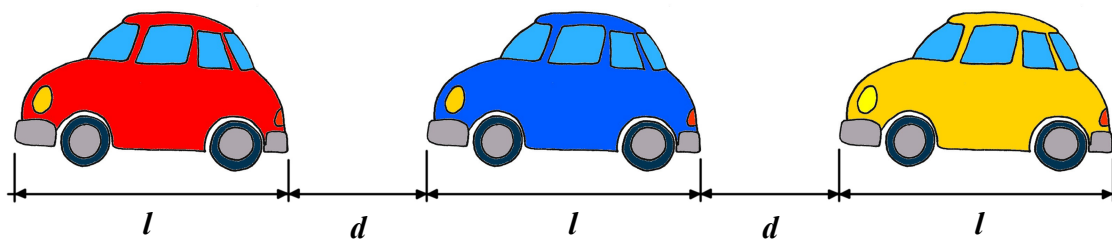
Voda dostříkne až do vzdálenosti stejné jako je výška hladiny vody v nádobě.

# Fyzikální zákony

## 16. příklad

Propustnost mostu:

Auta jedou přes most dlouhý 3 km. Každé auto je dlouhé 3,5 m a pro bezpečné zastavení musí udržovat od předchozího auta vzdálenost  $d$ . Brzdná dráha auta jedoucího rychlostí  $v$  je (v metrech) přibližně  $0,06 v^2$ . Pokud předpokládáme  $d = 0,03 v^2$  (odstup aut je polovina brzdné dráhy), najděte rychlost, při které přes most přejeđe co nejvíce aut.



Opět příklad, ve kterém máme za úkol nalézt velikost rychlosti něčeho, tentokrát automobilu. Rychlost vyjadřuje, jak už nesčetněkrát zaznělo v předchozích několika příkladech, změnu. V tomto případě je to rychlost pohybu, tedy změna uražené dráhy za nějaký časový úsek. Zapsáno matematicky je  $v = \frac{ds}{dt}$  ([25], s. 100).

Vypišme si v tuto chvíli údaje ze zadání, které známe:

- $m = 3$  km,
- $l = 3,5$  m,
- $s_B = 0,06v^2$  (brzdná dráha)
- $d = 0,03v^2$ ,
- $v = ?$

Vzdálenost  $d$  aut jedno od druhého je zadána jako konstanta krát kvadrát rychlosti

$$d = k \cdot v^2,$$

kde  $v$  je naše hledaná rychlost pohybu automobilů a  $k$  je jakási konstanta úměrnosti. Zahrňme tento údaj do našeho seznamu:

- $k = 0,03$ .

Ještě než se budeme pokoušet najít vztah mezi těmito veličinami, které v seznamu vystupují, objasněme si, co to vlastně je *propustnost* a na čem závisí. Propustnost mostu je jednoduše množství dopravních prostředků, které přejedou daný most za jednotku času. Čím více prostředků přejede most za stejnou dobu, tím je propustnost mostu vyšší. Tedy propustnost bude tím vyšší, čím se prostředky budou pohybovat rychleji. Pozor, toto tvrzení má ale jistá omezení. Pokud budou auta jezdit příliš rychle, budou se nutně zvětšovat rozestupy mezi nimi ( $d = 0,03v^2$ ). Při vysokých rychlostech tedy začne propustnost opět klesat. Naopak, pokud pojedou auta v malých rozestupech, nutně musí jejich rychlost být nízká tak, aby splňovala podmínku  $d = 0,03v^2$ . Proto bude propustnost opět klesat. Tedy hledáme jistý kompromis mezi rychlostí a rozestupy aut.

Ještě jednou zopakujeme definici pojmu propustnost: „*Propustnost je počet objektů prošlých určitým místem za jednotku času.*“ Zkusme tedy vyjádřit tento čas. Postavme těsně k přednímu nárazníku červeného auta na obrázku stojan s pohybovým čidlem a stopkami. Další auto (za červeným) je modré a musí k čidlu ujet vzdálenost  $s = l + d$ .

Jaký čas potřebuje na ujetí této dráhy? Z klasického zákona kinematiky hmotného bodu

$$t = \frac{l + d}{v}.$$

Po dosazení  $d = k \cdot v^2$  do vztahu dostaneme

$$t = \frac{l + k \cdot v^2}{v}.$$

Netřeba snad dodávat, že požadujeme, aby tento čas byl co nejkratší. Tedy hledáme globální minimum funkce jedné proměnné  $v$

$$t(v) = \frac{l + k \cdot v^2}{v},$$

kde  $l$ ,  $k$  jsou konstanty. Celou rovnici můžeme ještě poupravit, aby se nám lépe derivovala

$$t(v) = l v^{-1} + k \cdot v.$$

Po zderivování této upravené rovnice získáme tvar

$$t'(v) = l \cdot (-1) \cdot v^{-2} + k.$$

Vyšetříme nutnou podmínku existence extrému (viz kapitolu II – teoretický úvod) tak, že položíme první derivaci rovnu nule.

$$l \cdot (-1) \cdot v^{-2} + k = 0.$$

Po drobných úpravách se dostaneme až na tvar

$$v = \sqrt{\frac{l}{k}}.$$

Jak jsme již řekli o pár odstavců výše,  $l$ ,  $k$  jsou konstanty, tudíž nám nic nebrání v tom, abychom tuto rychlost vypočítali.

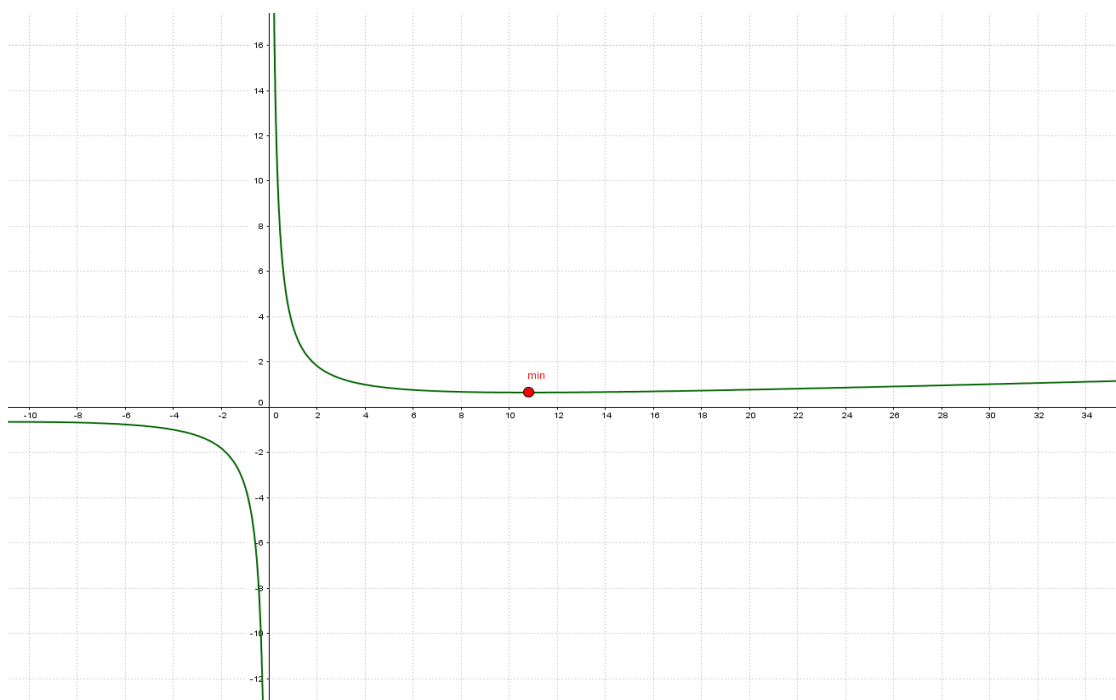
$$v = \sqrt{\frac{3,5}{0,03}} = 10,8 \text{ m/s} \doteq 39 \text{ km/h}$$

Našli jsme tzv. stacionární bod, neboli bod podezřelý z extrému. Slovíčko „podezřelý“ má zde doslovný význam. Proto, abychom si mohli být jisti, že  $v \doteq 39 \text{ km/h}$  je skutečně optimální rychlost, při které bude čas  $t$ , za který každé následující auto dorazí k našemu pomyslnému čidlu, *minimální*, musíme tento závěr ověřit. A to pomocí derivace druhého řádu

$$t''(v) = (l \cdot (-1) \cdot v^{-2} + k)' = l \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot v^{-3} = 2l v^{-3},$$

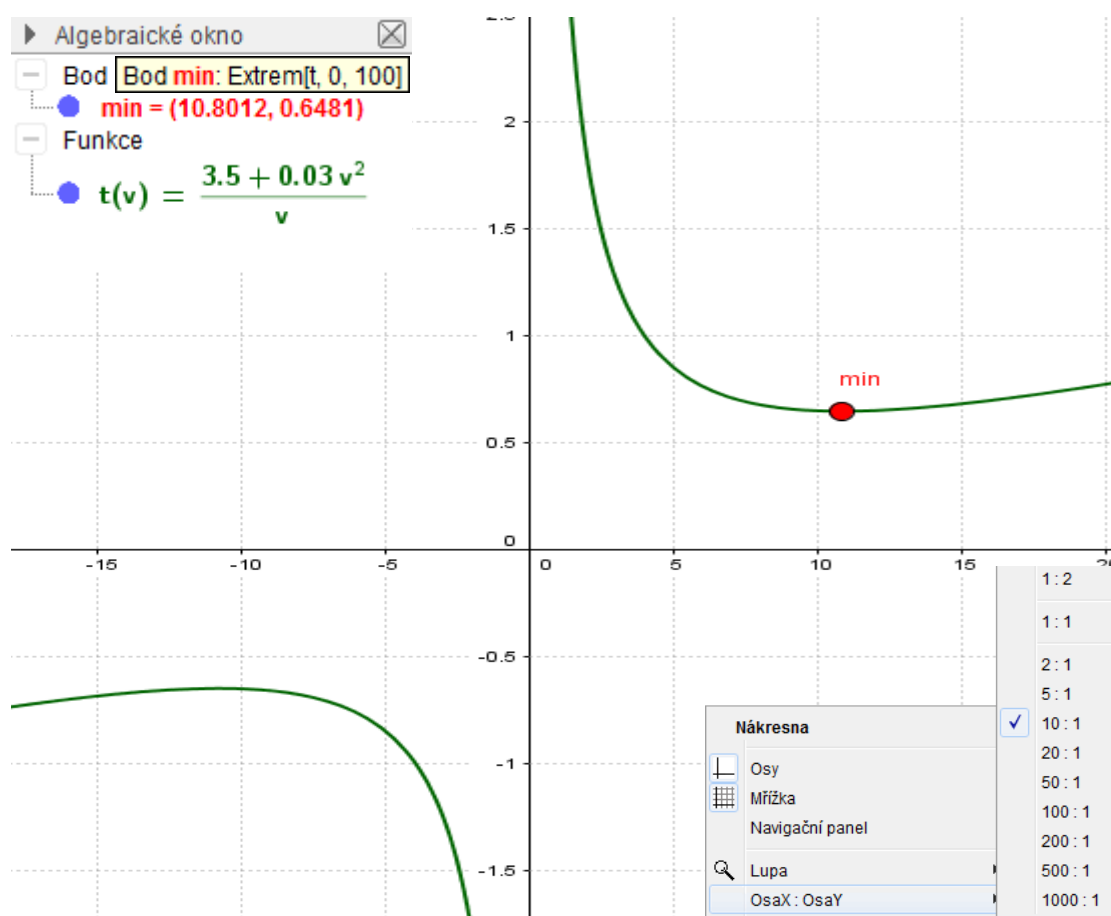
$$t''(39) = 2 \cdot 3,5 \cdot 10,8^{-3} = 5,5 \cdot 10^{-3} > 0.$$

Druhá derivace v bodě  $v \doteq 39 \text{ km/h}$  je větší než nula, tím pádem v tomto bodě nastává lokální minimum. Koneckonců si můžeme funkci  $t(v)$  nakreslit pomocí některého počítačového softwaru, např. GeoGebry.



Z tohoto grafu by se mohlo zdát, že je to „klasická“ hyperbola. Klasická hyperbola se v  $x = \pm \infty$  blíží k nule. Ta ale přece nemá žádný extrém! Tak, jak je možné, že jsme jej početně našli? Z následujícího grafu bude vše zřejmé. Poměr měřítek souřadných os si nastavíme tak, aby jeden dílek na ose  $y$  odpovídal 10 (nebo i více) dílkům osy  $x$ , tedy  $x : y = 10 : 1$ .

Z grafu vidíme, že se jedná o hyperbolu, která se ovšem v nekonečnu neblíží nule, ale naopak se od ní vzdaluje. To proto, že jejími asymptotami nejsou souřadné osy  $x$ ,  $y$  jak jsme zvyklí. Ale jsou pootočené o jistý kladný úhel (proti směru hodinových ruček).



To, že se jedná o lokální min. je vidět z předchozích dvou grafů. Zda-li máme co dočinění i s minimem globálním, potvrďme analyticky – dopočítejme limity v krajních bodech definičního oboru.

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} t(v) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{l + k v^2}{v} = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{l}{v} + k v = 0 + \infty = +\infty,$$



$$\lim_{v \rightarrow 0^+} t(v) = \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{l + k v^2}{v} = \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{l}{v} + k v = \frac{l}{0^+} + 0^+ = +\infty,$$

$$\lim_{v \rightarrow 0^-} t(v) = \lim_{v \rightarrow 0^-} \frac{l + k v^2}{v} = \lim_{v \rightarrow 0^-} \frac{l}{v} + k v = \frac{l}{0^-} + 0^- = -\infty,$$

$$\lim_{v \rightarrow -\infty} t(v) = \lim_{v \rightarrow -\infty} \frac{l + k v^2}{v} = \lim_{v \rightarrow -\infty} \frac{l}{v} + k v = 0 - \infty = -\infty.$$

Potvrzeno početně i graficky, závěr zní: „Rychlost, při které přes most přejeđe největší možné množství aut je  $v \doteq 39$  km/h.“

Jen pro zajímavost zkusme dopočítat jaký při této rychlosti bude odstup aut  $d$ .

$$d = 0,03 v^2 = 0,03 \cdot 10,8^2 = 3,49 \text{ m}$$

Vidíme, že je naprosto stejný jako délka samotného auta.

Na závěr se ještě zastavme u onoho koeficientu 0,06 ve vztahu pro brzdnu dráhu  $0,06 v^2$ . Brzdná dráha obecně se vypočítá jako

$$s_B = v_0^2 \cdot \frac{1}{2 f g}, \quad (1)$$

kde  $v_0$  je počáteční rychlost, ze které vozidlo brzdí,  $f$  je součinitel smykového tření,  $g$  je tíhové zrychlení. Tento vztah se dá odvodit z myšlenky, že se jedná o rovnoměrně zpomalený přímočarý pohyb, pro jehož dráhu z kinematiky platí ([5], s. 47)

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} a t^2. \quad (2)$$

Počáteční dráha  $s_0$  je v našem případě nulová a čas, za který automobil zastaví označme  $t_B$ . Odtud pro brzdnu dráhu

$$s_B = v_0 t_B - \frac{1}{2} a t_B^2. \quad (3)$$

V čase  $t_B$ , kdy automobil úplně zastaví, je jeho rychlost

$$v = v_0 - a t_B = 0.$$

Odtud čas brzdění  $t_B = \frac{v_0}{a}$ . Tento čas nyní dosadíme do vztahu (3) a získáme

$$s_B = \frac{v_0^2}{2a}. \quad (4)$$

V tuto chvíli si musíme uvědomit další věc z dynamiky hmotného bodu a to, že při brzdění jediná síla, která má vliv na brzdnu dráhu, je síla smykového tření ([5], s. 86)

$$F_t = f \cdot F_n,$$

kde  $f$  je součinitel smykového tření,  $F_n$  je síla působící na těleso kolmo k podložce.

Proto můžeme pro vodorovnou podložku rovněž psát

$$F_t = f \cdot F_G = f m g, \quad (5)$$

kde  $F_G = m g$  je tíhová síla ([5], s. 75). Při plné aplikaci brzd bude tedy síla způsobující zpomalování vozidla, nazvěme ji brzdou silou, podle 2. Newtonova zákona ([5], s. 73)

$F_B = m a$  rovna právě této třecí síle, tedy platí

$$\begin{aligned} F_B &= F_t, \\ m a &= f m g. \end{aligned}$$

Po zkrácení dostáváme

$$a = f g. \quad (6)$$

Tedy fyzikální interpretace (6) říká, že velikost zrychlení (nebo chceme-li v našem případě zpomalení) nezávisí na hmotnosti tělesa, ale pouze na materiálech, ze kterých jsou vyrobeny těleso a podložka a na jejich opracování – tyto materiálové vlastnosti jsou zahrnuty v součiniteli  $f$ , a na velikosti tíhového zrychlení  $g$ . Vztah (6) nyní dosadíme do (4) a získáme tak vztah (1), který jsme chtěli odvodit

$$s_B = v_0^2 \cdot \frac{1}{2 f g}.$$

Jak vidno ze zadání, bude platit

$$\frac{1}{2 f g} = 0,06.$$

Spočítejme nyní součinitel smykového tření  $f$ .

$$f = \frac{1}{2 \cdot 0,06 \cdot g} = \frac{1}{2 \cdot 0,06 \cdot 9,8} \doteq 0,85$$

Hodnota 0,85 odpovídá podle MFCHT ([21], s. 282) přibližně smykovému tření mezi gumou a betonem (0,7-0,8). Guma na suchém asfaltu by měla koeficient roven 0,55.

## 17. příklad

Stojí-li v místnosti sklenice s horkým čajem, ubývá z ní teplo rychlostí, která je přímo úměrná rozdílu mezi teplotou čaje  $T$  a teplotou v místnosti  $T_0$  (kterou pro jednoduchost pokládejme za konstantní). Koeficient této úměrnosti značme  $k$ .

- Najděte rovnici, která by popisovala průběh chladnutí, tedy funkční vztah mezi teplotou čaje  $T$  (nebo obecně kapaliny) a teplotou v místnosti  $T_0$  (obecně okolní teplotou).
- Určete za jak dlouhou dobu bude mít čaj  $30\text{ }^\circ\text{C}$ , když víte, že na počátku měření ihned po zalití měl teplotu  $100\text{ }^\circ\text{C}$  a teplota vzduchu v místnosti byla  $20\text{ }^\circ\text{C}$ . Dále víme, že po uplynutí 25 minut od zalití klesla teplota čaje na  $50\text{ }^\circ\text{C}$ .



Nejprve si musíme uvědomit, co vlastně hledáme a mít představu o tom, jaký zhruba výsledek očekáváme. Pokud bychom očekávali, že teplota čaje bude klesat konstantní rychlostí, potom vztah, který by tuto závislost popisoval, bude mít tvar lineární funkce, tedy  $T(t) = k \cdot t + T_0$ . Což je ovšem holý nesmysl, když si uvědomíme, že pro  $k < 0$  bude graf této funkce přímka

klesající do nekonečna. Tedy nezávisle na okolní teplotě by čaj chladl stále stejným tempem pod hranici této okolní teploty a stále dál. Z vlastní zkušenosti víme, že teplota čaje by se po nějaké době měla ustálit na hodnotě stejné jako je teplota vzduchu v místnosti. Tudíž limita naší funkce, kterou hledáme, by měla být rovna právě této hodnotě. Taková funkce, aby zároveň její limita byla vlastní číslo a zároveň aby protínala osu  $y$  (jinými slovy, aby v čase  $t = 0$  byla hodnota  $y$  rovněž vlastní číslo, v našem případě rovna hodnotě počáteční teploty čaje) je pouze jedna. Exponenciální funkce je funkcí, která všechny tyto prerekvizity splňuje.

Pojďme k samotnému řešení. Ze zadání víme, že rychlost chladnutí – označme ji prozatím  $v_{\Delta T}$  – je přímo úměrná rozdílu  $T_0 - T$ . Koeficient této úměrnosti je  $k$ . Tedy dostáváme rovnici

$$v_{\Delta T} = k \cdot (T_0 - T).$$

Rychlost chladnutí vyjadřuje změnu teploty  $T$  v čase  $t$ . Můžeme proto psát

$$v_{\Delta T} = \frac{dT}{dt}.$$

Získali jsme diferenciální rovnici

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T_0 - T).$$

Je to obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu, kterou vyřešíme pomocí separace proměnných. Připomeňme si, že výraz  $\frac{dT}{dt}$  je vlastně roven první derivaci  $T'(t)$ . Provedeme tedy separaci a získáme

$$dT \frac{1}{T - T_0} = -k \cdot dt.$$

Provedeme integraci

$$\int \frac{1}{T - T_0} dT = -k \int dt$$

a získáme rovnici

$$\ln|T - T_0| = \ln C - kt.$$

Pravá a levá strana rovnice se rovnají právě tehdy, když se rovnají jejich exponenciály. Navíc ještě předpokládejme, že platí  $T > T_0$ , aby se skutečně jednalo o chladnutí. V opačném případě by šlo o oteplování neboli ohřev.

$$e^{\ln(T - T_0)} = e^{\ln C - kt}$$

Tento tvar můžeme upravit ještě dále na

$$\begin{aligned} T - T_0 &= C e^{-kt}, \\ T &= T_0 + C e^{-kt}. \end{aligned} \tag{1}$$

Vidíme, že tato rovnice má nekonečně mnoho řešení v závislosti na konstantě  $C$ . Z počáteční podmínky, že v čase  $t = 0$  je počáteční teplota  $T_p$ , dopočítáme partikulární řešení

$$\begin{aligned} T_p &= T(0), \\ T_p &= T_0 + C e^{-k \cdot 0}, \\ C &= T_p - T_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Různé hodnoty  $C$  budou odpovídat různým funkcím, resp. různým tvarům jedné a téže exponenciální funkce, které popisují chladnutí čaje s různou počáteční teplotou.

Celá konstanta  $C$  vyjadřuje rozdíl mezi počáteční teplotou čaje a teplotou okolí. Můžeme tedy psát ([8], vztah (10))

$$T = T_0 + (T_p - T_0) e^{-kt}. \quad (3)$$

Po úpravě

$$T = T_0 + T_r e^{-kt}, \quad (4)$$

kde  $T_r = T_p - T_0$  je teplotní rozdíl počáteční teploty čaje  $T_p$  a teploty okolí  $T_0$ .

Konstanta  $k$  se bude lišit pro každý případ a její hodnota závisí na vlastnostech látky, u které průběh chladnutí sledujeme, zejména na tepelné kapacitě ([8], vztah (10)). Můžeme ji určit využitím (4) osamostatněním exponenciálního členu

$$\frac{T - T_0}{T_p - T_0} = e^{-kt}.$$

Celou rovnici zlogaritmuje

$$\ln e^{-kt} = \ln \left( \frac{T - T_0}{T_p - T_0} \right)$$

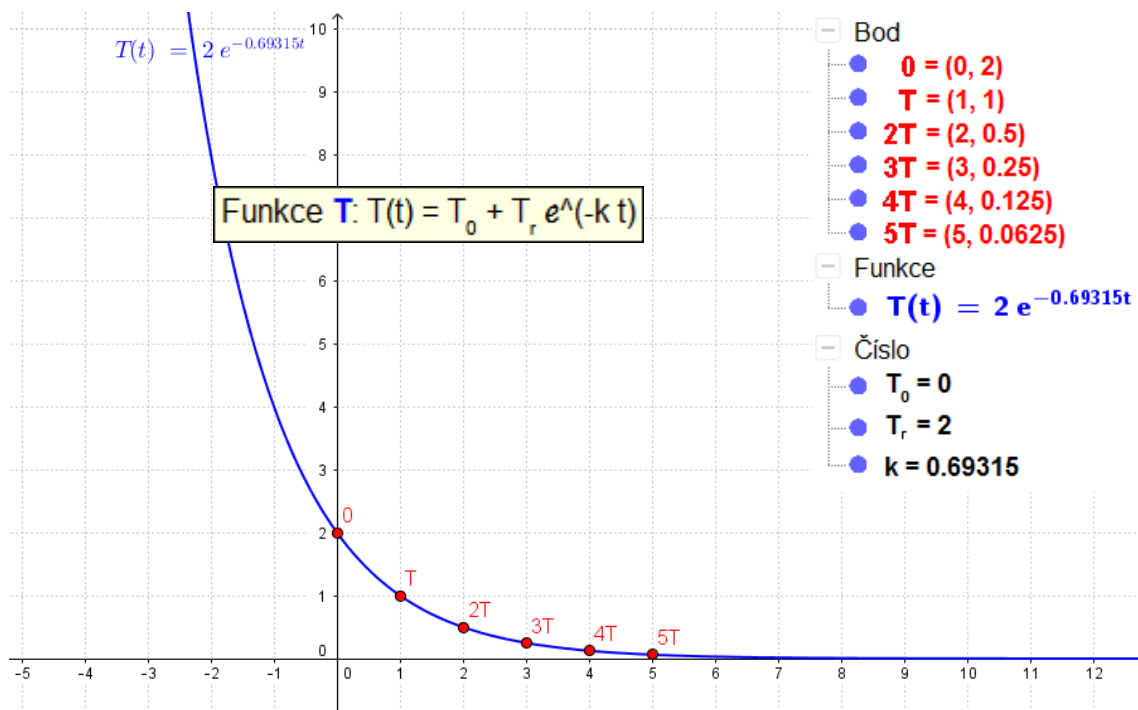
a dostaneme

$$-k t = \ln \left( \frac{T - T_0}{T_p - T_0} \right).$$

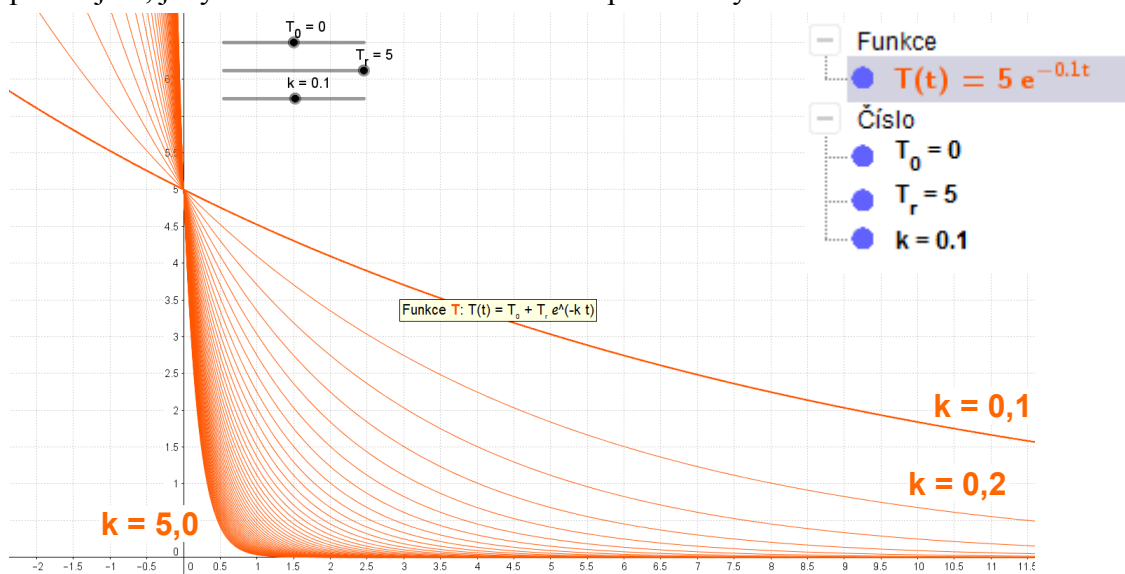
A odtud již

$$k = - \frac{\ln \left( \frac{T - T_0}{T_p - T_0} \right)}{t}. \quad (5)$$

Podobně jako u rozpadového zákona, kde za stejný časový úsek se rozpadne vždy polovina zbývajících jader atomů – zde bude platit, že za stejnou dobu teplota čaje klesne vždy o polovinu předchozího poklesu. Jinými slovy teplota látky (čaje) se bude v pravidelných časových intervalech zmenšovat na polovinu předchozí hodnoty. Názorněji je vše vidět na následujícím obrázku.



Výše znázorněná exponenciální funkce má konstantu  $k = \ln 2 \doteq 0,69315$ . Ještě se podívejme, jaký vliv má konstanta  $k$  na tvar exponenciály.

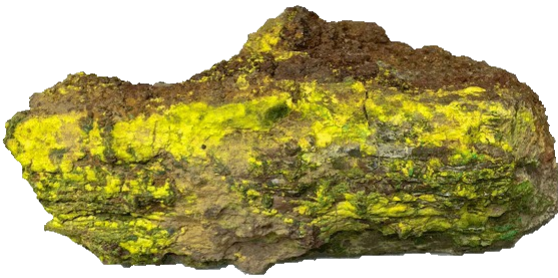


Vidíme, že se zvětšující se konstantou  $k$  je graf exponenciály strmější, tedy daná látka odevzdává teplo okolí rychleji, což odpovídá průběhu chladnutí u látek s menší tepelnou kapacitou, jako jsou např. kovy.

## 18. příklad

Radioaktivní rozpad:

Rychlost rozpadu prvku radium je přímo úměrná jeho hmotnosti. Určete, kolik procent hmotnosti  $m_0$  radia se rozpadne za 200 let, jestliže víte, že poločas rozpadu radia je 1590 let.



Označme si:

- $v_{\Delta m}$  rychlost rozpadu,
- $m$  hmotnost,
- $\lambda$  konstantu úměrnosti.

Rychlost rozpadu radia v tomto případě vyjadřuje změnu hmotnosti prvku v čase, tedy můžeme psát

$$v_{\Delta m} = \frac{dm}{dt}.$$

Podle zadání je pak tato rychlost přímo úměrná hmotnosti radia, tedy rovnice má tvar

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda \cdot m.$$

Mínus před konstantou  $\lambda$  je z toho důvodu, že přepokládáme s přibývajícím časem úbytek hmotnosti radia. Provedeme separaci proměnných.

$$\frac{dm}{m} = -\lambda \cdot dt$$

Dostali jsme obyčejnou diferenciální rovnici se separovanými proměnnými, kterou v tuto chvíli stačí pouze zintegrovat.

$$\int \frac{1}{m} dm = - \int \lambda \cdot dt$$

$$\ln|m| = -\lambda t + \ln C$$

Provedeme trik, kterým si další postup výrazně ulehčíme. Namísto výrazu  $-\lambda t$  můžeme z definice logaritmické a exponenciální funkce psát  $\ln e^{-\lambda t}$ . Proto

$$\ln|m| = \ln e^{-\lambda t} + \ln C.$$

Absolutní hodnotu můžeme bez výčitek odstranit, protože proměnná  $m$  zastupuje

hmotnost prvku, tudíž musí platit  $m \geq 0$ . Rovnici upravíme podle pravidla: „Součet logaritmů rovná se logaritmu součinu jejich argumentů.“

$$\ln|m| = \ln(C \cdot e^{-\lambda t})$$

Celou rovnici odlogaritmuje a dostaneme tvar

$$m = C \cdot e^{-\lambda t}. \quad (1)$$

Dosadíme počáteční podmínku v čase  $t = 0$  je  $m = m_0$  a získáme

$$m_0 = C \cdot e^{-\lambda \cdot 0} \rightarrow$$

$$m_0 = C.$$

Tedy integrační konstanta  $C$  v rovnici (1) je vlastně rovna počáteční hmotnosti radia  $m_0$ . Ještě ale potřebujeme určit velikost konstanty úměrnosti  $\lambda$ . To provedeme z doplňující podmínky:  $t = T \rightarrow m = \frac{m_0}{2}$ , kde  $T$  je označení pro poločas rozpadu daného prvku (v našem případě radia). Dosadíme do rovnice (1) a dostaneme

$$\frac{m_0}{2} = m_0 \cdot e^{-\lambda T}.$$

A dále upravíme na tvar

$$e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}.$$

Nyní potřebujeme získat konstantu  $\lambda$  osamocenou na jedné straně, to provedeme sérií úprav. Nejprve celou rovnici zlogaritmuje

$$\ln e^{-\lambda T} = \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Po odstranění logaritmu na levé straně dostaneme

$$-\lambda T = \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Nyní podle pravidla pro logaritmování: „Rozdíl logaritmů se rovná logaritmu podílu jejich argumentů,“ tuto rovnici upravíme.

$$-\lambda T = \ln 1 - \ln 2$$

Ze střední školy víme, že platí  $\ln 1 = 0$ , dosadíme.

$$\lambda T = \ln 2$$

Z této rovnice získáme dobře známý tvar

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}. \quad (2)$$



Získali jsme hodnotu „konstanty“  $\lambda$ . Slovo konstanta je záměrně v uvozovkách, protože když se na výraz (2) podíváme, vystupuje v něm proměnná  $T$  zastupující poločas rozpadu daného prvku, která má pro každý prvek různou hodnotu.

V tento okamžik bychom mohli říci, že jsme hotovi a *rozpadový zákon*, jak se mu jinak také říká, psát ve tvaru ([27], s. 102, 103)

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda t}; \lambda = \frac{\ln 2}{T}. \quad (3)$$

Pojďme se ale ještě pokusit tyto dva vztahy spojit do jednoho a zároveň jej zjednodušit jak jen to bude možné. Dosadíme  $\lambda$  do (1) a zároveň již namísto konstanty  $C$  pišme  $m_0$ .

$$m = m_0 \cdot e^{\frac{-\ln 2}{T} t}$$

V tuto chvíli bude opět nezbytné provést několik úprav. První z nich bude zlogaritmovat celou rovnici

$$\ln m = \ln \left( m_0 \cdot e^{\frac{-\ln 2}{T} t} \right).$$

Opět použijeme pravidlo pro součet logaritmů.

$$\ln m = \ln m_0 + \ln \left( e^{\frac{-\ln 2}{T} t} \right)$$

$$\ln m = \ln m_0 + \left( \frac{-\ln 2}{T} t \right) \cdot \ln e$$

$$\ln m = \ln m_0 + \left( -\frac{t}{T} \right) \cdot \ln 2$$

Nyní opět využijeme „trik“, který říká, že  $k \cdot \ln x = \ln x^k$ .

$$\ln m = \ln m_0 + \ln \left( 2^{\frac{-t}{T}} \right)$$

V tento okamžik dáme opět výrazy na pravé straně rovnice dohromady pomocí již několikrát zmiňovaného pravidla pro součet logaritmů.

$$\ln m = \ln \left( m_0 \cdot 2^{\frac{-t}{T}} \right)$$

A na závěr celou rovnici odlogaritmuje a dostaneme tvar

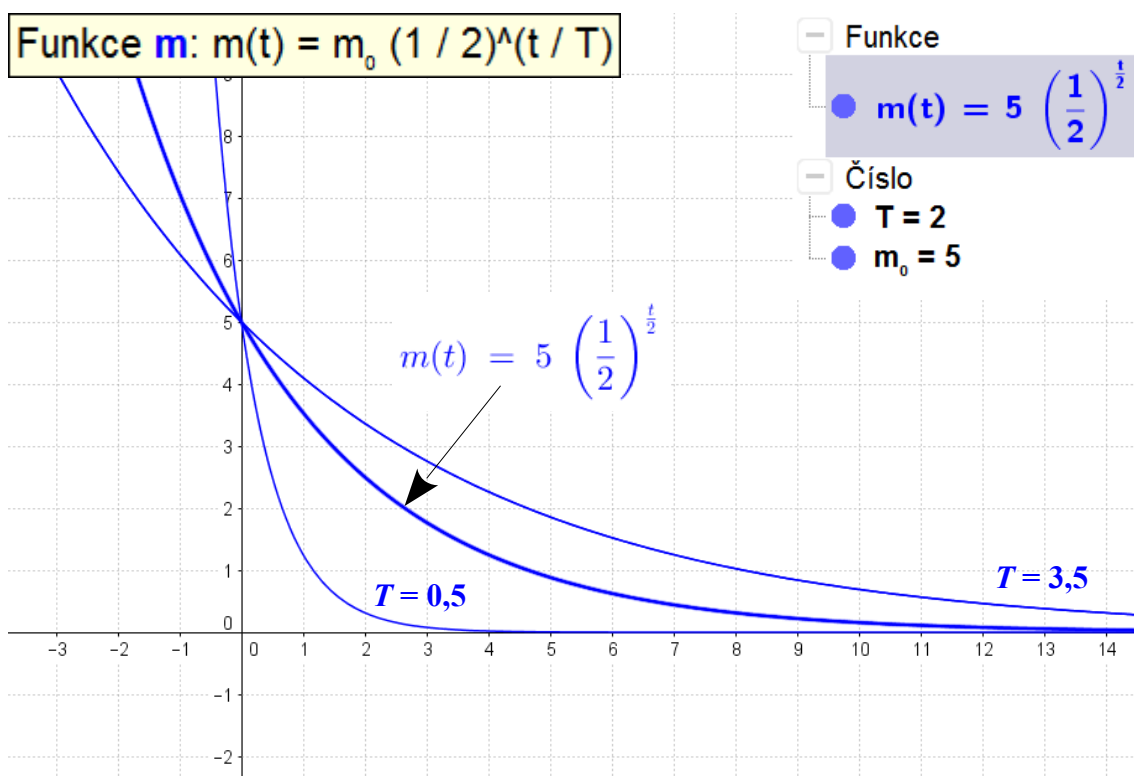
$$m = m_0 \cdot 2^{\frac{-t}{T}},$$

který ještě dopravíme na hezčí tvar, odstraněním záporné mocniny a přepsáním rovnice jako předpisu funkce

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}. \quad (4)$$

Toliko obecná část, ve které jsme si odvodili vztah (4) pro úbytek hmotnosti radioaktivního prvku ([27], s. 102), kterému se říká *rozpadový zákon* a vyučuje se již na středních školách.

Ještě než se vrhneme na konkrétní počítání, které máme ze zadání provést, pojďme se podívat, jak vypadá graf takovéto funkce .



Na grafu výše je počáteční hmotnost  $m_0 = 5$  kg a poločas rozpadu je 2 s. Tvar exponenciály určuje právě doba, za kterou se rozpadne polovina jader atomů daného prvku. Čím je  $T$  menší, tím bude exponenciála strmější. Průsečík s osou  $y$  má pak na svědomí počáteční hmotnost  $m_0$  prvku.

A nyní zpět k našemu příkladu. Otázka byla: „Kolik procent prvku radium se rozpadne za 200 let?“

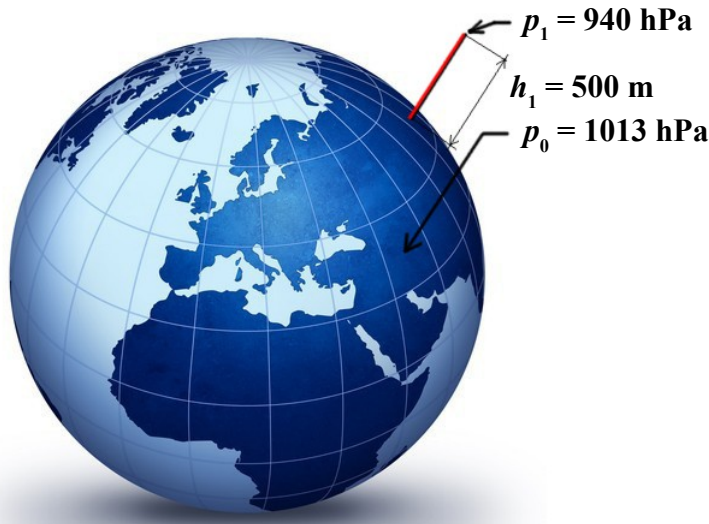
$$\frac{m}{m_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{200}{1590}} \doteq 0,9165 \doteq 91,7\%$$

A odpověď zní: „Po 200 letech se přemění (rozpadne) 8,3 % prvku radium.“

## 19. příklad

Barometrická rovnice:

Určete závislost atmosférického tlaku na výšce nad hladinou moře, jestliže víte, že tlak na hladině moře je  $p_0 = 1013$  hPa a ve výšce  $h_1 = 500$  m nad hladinou moře je tlak  $p_1 = 940$  hPa. Předpokládejme, že vzduch má všude stejnou teplotu.



Protože teplota vzduchu je ve všech místech stejná, platí  $pV = \text{konst.}$  ([3], s. 83). Tento zákon (Boyleův-Mariottův) lze přepsat do tvaru  $\frac{p_0}{p} = \frac{V}{V_0} = \frac{\rho_0}{\rho}$ , kde  $p$ ,  $\rho$  jsou hodnoty ve výšce  $h$ . Dále budeme předpokládat, že ve vrstvě o tloušťce  $dh$  je hustota

konstantní. Tento vztah vyžaduje jiný fyzikální výklad – autoři řešení zde odkazují na práci Vybíral, B.: *Mechanika ideálních plynů*. Pro úbytek tlaku v této vrstvě pak dostáváme  $dp = -\rho g dh$  ([10], str. 540). Z Boyleova-Mariottova zákona víme, že platí  $\rho = \frac{\rho_0}{p_0} p$ . Po dosazení do vztahu pro  $dp$  dostaneme

$$dp = -\frac{\rho_0}{p_0} p g dh.$$

Po separaci proměnných a integraci obdržíme

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dh, \ln p = -\frac{\rho_0}{p_0} g h + \ln C.$$

Po odlogaritmování  $p = C e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g h} = C e^{-kh}$ , kde  $k = \frac{\rho_0}{p_0} g$ .

Okrajové podmínky: ve výšce  $h = 0$  je tlak  $p_0$ , z čehož  $C = p_0$ , a tedy  $p = p_0 e^{-kh}$ .

Konstantu  $k$  určíme pomocí druhé podmínky, tj. ve výšce  $h = 500$  m je tlak 940 hPa:

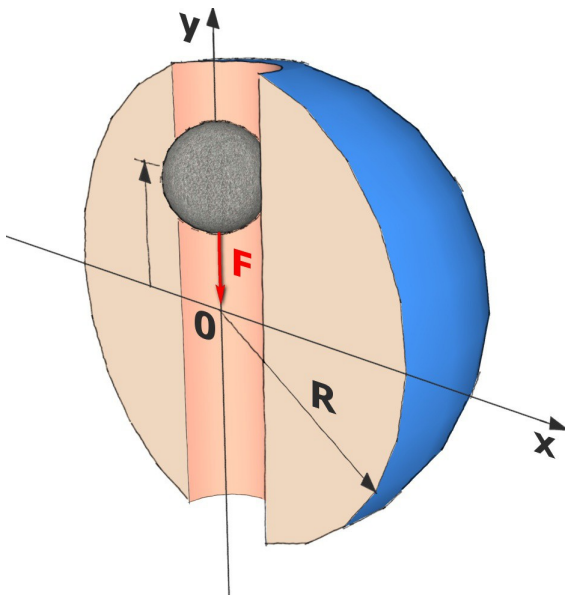
$$k = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = 0,00015.$$

Hledaná závislost je tedy  $p = 1013 e^{-0,00015h}$  hPa.

## 20. příklad

Myšlenkový průlet kamene Zemí:

Předpokládejme, že středem Země vede úzký kanál. Kámen padající kanálem je přitahován středem Země silou, která je přímo úměrná vzdálenosti kamene od středu (viz Poznámka 2 na konci řešení úlohy). Za jakou dobu  $\tau$  proletí kámen celou Zemí?



V libovolné časovém okamžiku na kámen působí přitažlivá síla o velikosti  $F$ , která je přímo úměrná vzdálenosti  $y$  kamene od středu Země, tj.  $F = -k \cdot y$  (síla  $F$  a okamžitá výchylka  $y$  mají navzájem opačný směr).

Použitím 2. Newtonova pohybového zákona ([22]; [10], s. 123)

$$m y'' = -k y,$$

po úpravě

$$y'' + \frac{k}{m} y = 0.$$

Označíme-li  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , pak  $y'' + \omega^2 y = 0$ . Řešení má tvar  $y = R \sin(\omega t + \varphi_0)$ , kde  $\varphi_0$

určíme z počátečních podmínek:

v čase  $t = 0$  je  $y = R$ ,  $F = m g$ .

Postupně dostáváme  $R = R \sin \varphi_0$ , odkud  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ . Z podmínky v čase  $t = 0$  je  $F = m g$

dostáváme  $m g = -k \cdot (-R)$ , čili  $\frac{k}{m} = \frac{g}{R} = \omega^2$ .

Hledaná doba průletu je tedy  $\tau = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}$ .

Pro dané hodnoty je  $\tau = \pi \sqrt{\frac{6377 \cdot 10^2}{9,81}} \text{ s} \doteq 42,3 \text{ min.}$

*Poznámka 1*

Úlohu je opět možno řešit i přímým použitím charakteristické rovnice tak jako v předchozích případech (vyzkoušejte si).

*Poznámka 2*

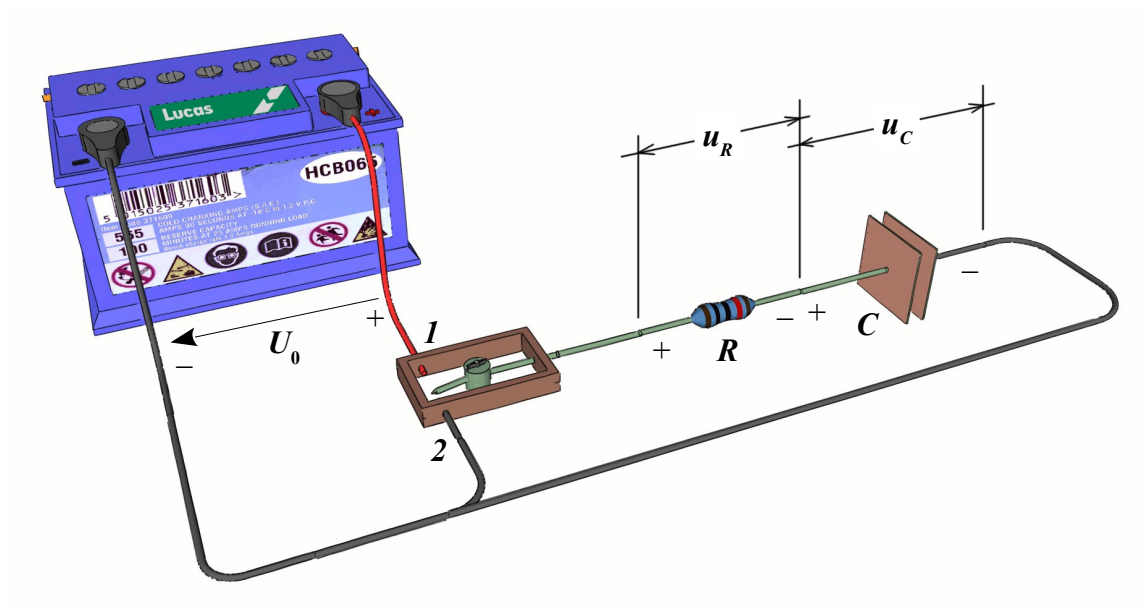
Vztah, že síla působící „uvnitř Země“ na těleso silou, která je přímo úměrná vzdálenosti tělesa od středu Země, platí za předpokladu, že uvažujeme buď, že Země je homogenní koule, nebo reálnější situaci, že Země má středově souměrně rozloženou hustotu.

Po průletu Zemí bude kámen ve svém pohybu pokračovat dál. Za stejného předpokladu jako v předchozí úvaze bude na kámen „vně Země“ působit síla daná Newtonovým gravitačním zákonem ve tvaru pro dva hmotné body, tj. působící síla je nepřímo uměrná druhé mocnině vzdálenosti středů Země a kamene. Sami si promyslete, jak bude probíhat další pohyb kamene.

## 21. příklad

Nabíjení kondenzátoru:

Kondenzátor o kapacitě  $C$  připojíme v čase  $t = 0$  ke zdroji napětí  $U_0$ . Nabíjíme jej přes rezistor o odporu  $R$ . Jaký je časový průběh proudu a napětí na kondenzátoru?



Zapojením spínače do polohy 1 (viz obr.) připojíme obvod na zdroj o napětí  $U_0 = \text{konst.}$  Podle 2. Kirchhoffova zákona platí ([6], s. 25)

$$u_R + u_C - U_0 = 0. \quad (1)$$

Po dosazení za  $u_R = Ri$  ([6], s. 15),  $u_C = \frac{q}{C}$  ([18], s. 41) do (1) dostaneme

$$Ri + \frac{q}{C} - U_0 = 0. \quad (2)$$

Zderivujeme-li rovnici (2), dostaneme

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0. \quad (3)$$

Užitím vztahu  $i = \frac{dq}{dt}$  ([18], s. 51) můžeme rovnici (3) upravit na tvar

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0.$$

Po separaci proměnných, integraci a odlogaritmování dostáváme:

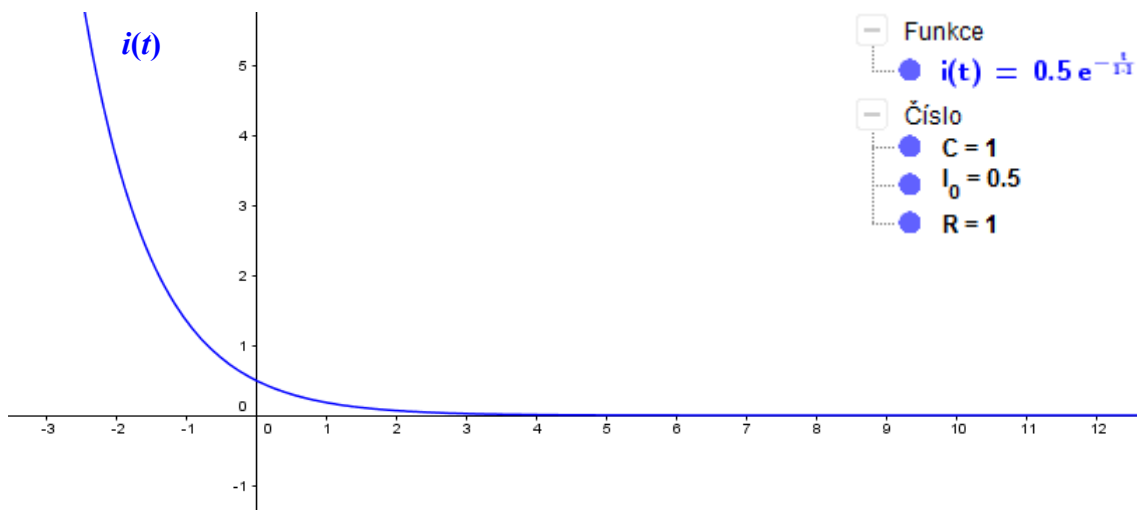
$$\frac{di}{i} = -\frac{1}{RC} dt, i = K_1 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (4)$$

kde  $K_1$  je integrační konstanta, kterou určíme z počátečních podmínek. V čase  $t = 0$  je napětí na kondenzátoru  $u_C = 0$  (kondenzátor není nabitý) a proud protékající obvodem je  $I_0$ .

Podle (2) je  $R I_0 = U_0$ , odkud  $I_0 = \frac{U_0}{R}$ , podle (4) je  $I_0 = K_1$ . Pak

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (5)$$

Na následujícím obrázku je znázorněn průběh proudu v obvodu.



Průběh napětí na kondenzátoru  $u_C$  je dán vztahem  $u_C = \frac{1}{C} q$ , po derivaci

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{C} i = \frac{1}{C} I_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Po separaci proměnných a integraci

$$du_C = \frac{1}{C} I_0 e^{-\frac{t}{RC}} dt,$$

$$u_C = \frac{1}{C} \frac{U_0}{R} \cdot (-RC) e^{-\frac{t}{RC}} + K_2,$$

$$u_C = -U_0 e^{-\frac{t}{RC}} + K_2. \quad (6)$$

1 Odhalena chyba v řešení: autorovi zde uniklo znaménko  $\ominus$  před proměnnou  $U_0$ . To mělo potom za následek chybný tvar (6) a tím pádem převrácený graf exponenciály.

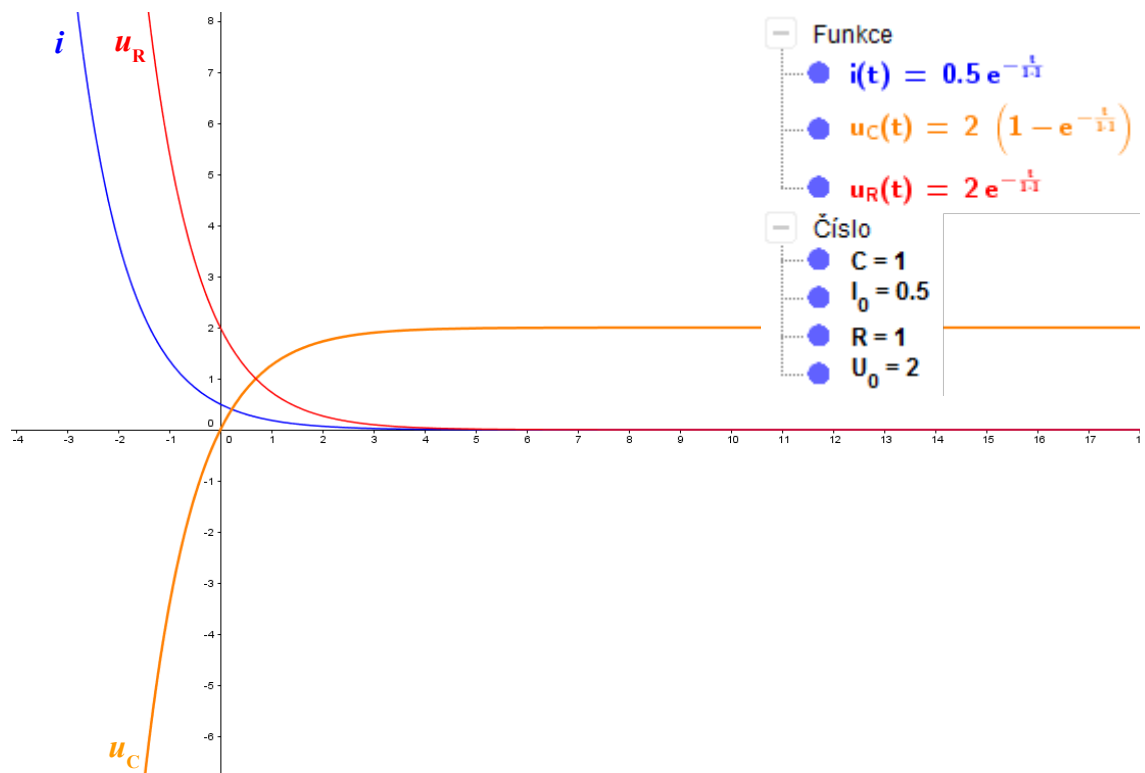
Integrační konstantu  $K_2$  určíme z počátečních podmínek: v čase  $t = 0$  je  $u_C = 0$ , po dosazení do (6) dostaneme:  $0 = -U_0 + K_2$ , odkud  $K_2 = U_0$ .

Po dosazení za  $K_2$  do (6) dostaneme

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} - U_0,$$

$$u_C = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right). \quad (7)$$

Vidíme, že průběh napětí na kondenzátoru  $C$  má exponenciální průběh ([31], slide 3), jak potvrzuje následující graf.



Z grafu je dále patrné, že napětí  $u_R$  na rezistoru má přesně opačný průběh než-li napětí  $u_C$  na kondenzátoru. Vztah pro napětí  $u_R$  se dá snadno získat použitím Ohmova zákona ([6], s. 15)  $u_R = R i$  z čehož

$$u_R = R I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

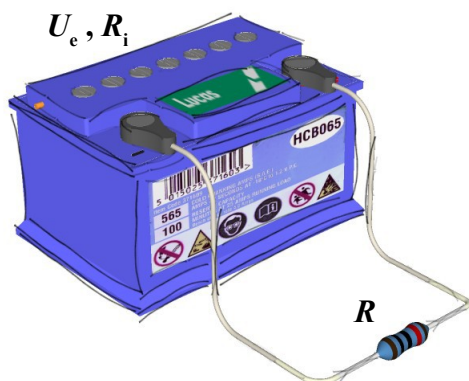
a po úpravě

$$u_R = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (8)$$



## 22. příklad

Akumulátor má elektromotorické napětí  $U_e$  a vnitřní odpor  $R_i$ . Jaký vnější odpor  $R$  je nutno zapojit, chceme-li ve vnějším proudovém okruhu získat největší výkon. Určete tento maximální výkon.



Uveďme nejprve na pravou míru všechny údaje ze zadání a přiřaďme jim fyzikální interpretaci:

$U_e$  ... elektromotorické napětí (napětí nezátíženého zdroje) [*konst.*]

$R_i$  ... vnitřní odpor zdroje (celkový odpor všech spojů a součástí uvnitř zdroje) [*konstanta*]

$R$  ... neznámý odpor rezistoru, který chceme zjistit [*proměnná*]

$R + R_i$  ... celkový odpor obvodu (právě na něm závisí, jak velký proud bude obvodem protékat)

V zadání se po nás chce, aby výkon byl maximální v závislosti na velikosti odporu vnějšího připojeného rezistoru, proto budeme hledat funkční závislost výkonu  $P$  na odporu  $R$ .

Ještě než se do toho pustíme, dovolte mi malou vsuvku. Tento příklad, pokud by to bylo možné a měli bychom zadány konkrétní hodnoty jednotlivých veličin, by se dal řešit empiricky. Tím způsobem, že bychom ke zdroji (akumulátoru) připojili proměnný rezistor (reostat nebo potenciometr), měnili bychom jeho odpor a při každé změně zaznamenali hodnotu napětí na akumulátoru a velikost proudu  $I$  protékajícího obvodem. Poté bychom, podle známého vztahu ze základní školy  $P = U \cdot I$  ([18], s. 78), vypočítali pro jednotlivé naměřené hodnoty velikost výkonu  $P$  (který se v tomto případě přemění na teplo) a zanesli je do  $V$ - $A$  grafu. Ze tvaru křivky, která by vznikla spojením jednotlivých bodů bychom byli schopni určit hodnotu proudu  $I$ , pro který je výkon  $P$  maximální. A z něj potom i hodnotu odporu  $R$ .

Vraťme se ale k našemu obecněji zadanému příkladu. Vzorec, ze kterého vyjdeme jsem již uvedl v odstavci výše, nyní do něj potřebujeme dostat veličiny ze zadání a

zbavit se neznámé  $I$ . K tomu využijeme Ohmův zákon pro uzavřený obvod ([18], s. 71)

$$I = \frac{U_e}{R + R_i}.$$

Potom

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = R \cdot \left( \frac{U_e}{R + R_i} \right)^2 = \frac{R \cdot U_e^2}{(R + R_i)^2}.$$

Přepíšme ještě předchozí vztah jako funkci a uveďme jej do tvaru

$$P(R) = U_e^2 \cdot \frac{R}{(R + R_i)^2}. \quad (1)$$

Nyní již můžeme přistoupit k samotnému hledání extrému klasickou procedurou.

### 1) První derivace

$$P'(R) = U_e^2 \cdot \frac{(R + R_i)^2 - 2R \cdot (R + R_i)}{(R + R_i)^4}$$

Po roznásobení a sečtení se dostaneme na tvar

$$P'(R) = U_e^2 \cdot \frac{R_i^2 - R^2}{(R + R_i)^4} = U_e^2 \cdot \frac{(R_i - R) \cdot (R_i + R)}{(R + R_i)^4} = U_e^2 \cdot \frac{R_i - R}{(R + R_i)^3}.$$

### 2) Druhá derivace

$$P''(R) = U_e^2 \cdot \frac{(-1) \cdot (R + R_i)^3 - 3(R_i - R) \cdot (R + R_i)^2}{(R + R_i)^6}$$

V čitateli můžeme vytknout závorku  $(R + R_i)^2$  a zkrátit se jmenovatelem. Po sečtení zbylých členů v čitateli se dostaneme na tvar

$$P''(R) = U_e^2 \cdot \frac{2R - 4R_i}{(R + R_i)^4}.$$

### 3) Vyhodnocení derivací

Jako u všech příkladů na vyšetřování extrémů je potřeba ověřit platnost nutné podmínky existence extrému

$$P'(R) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U_e^2 \cdot \frac{R_i - R}{(R + R_i)^3} = 0.$$

Tato rovnost nastává ve dvou případech. Buďto když je  $U_e^2 = 0$  nebo  $R_i - R = 0$ . Pojďme se na oba případy podívat podrobněji.

- 1)  $U_e^2 = 0 \dots$  toto řešení nehledáme, protože při nulovém elektromotorickém napětí nepoteče obvodem žádný proud, tudíž výkon bude rovněž nulový.
- 2)  $R_i - R = 0 \rightarrow R = R_i \dots$  tento závěr je již pravděpodobněji ten, který hledáme, protože tvrdí, že obvod bude poskytovat maximální výkon ve chvíli, kdy připojíme zátěž stejné velikosti, jako je velikost vnitřního odporu zdroje.

Nemůžeme si ale být stoprocentně jistí, že se jedná o maximum (také by to mohlo být minimum), proto ověříme tuto hypotézu dosazením do druhé derivace

$$P''(R_i) = U_e^2 \cdot \frac{2R_i - 4R_i}{(R_i + R_i)^4} = U_e^2 \cdot \frac{-2R_i}{(2R_i)^4} = U_e^2 \cdot \frac{-1}{8R_i^3} = \ominus^2 \cdot \frac{\ominus}{8\ominus^3} = \ominus < 0.$$

Protože  $U_e$  a  $R_i$  jsou kladné konstanty, dojdeme k závěru, že druhá derivace  $P$  v bodě  $R_i$  je záporná, tudíž v něm nastává lokální maximum. O tom, zda-li je i maximum globálním, se přesvědčíme výpočtem limit v krajních bodech definičního oboru

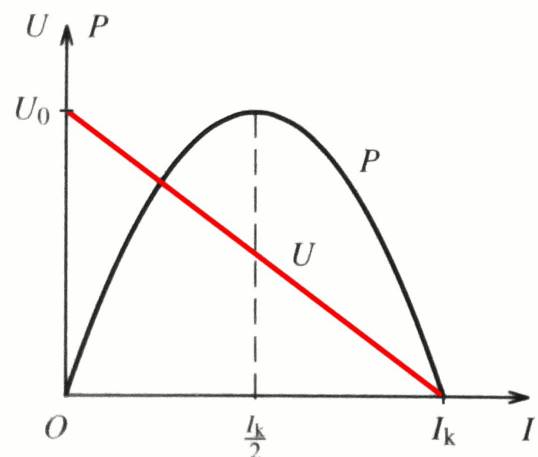
$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} P(R) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} U_e^2 \cdot \frac{R}{(R + R_i)^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} U_e^2 \cdot \frac{R}{R^2 \left(1 + \frac{R_i}{R}\right)^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} U_e^2 \cdot \frac{1}{R \left(1 + \frac{R_i}{R}\right)^2} = \\ &= U_e^2 \cdot \frac{1}{+\infty \cdot (1 + 0)^2} = 0, \end{aligned}$$

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} P(R) = \lim_{R \rightarrow -\infty} U_e^2 \cdot \frac{R}{(R + R_i)^2} = \lim_{R \rightarrow -\infty} U_e^2 \cdot \frac{1}{R \left(1 + \frac{R_i}{R}\right)^2} = U_e^2 \cdot \frac{1}{-\infty \cdot (1 + 0)^2} = 0.$$

Závěr tedy zní: „Maximálního výkonu v obvodu dosáhneme připojením vnějšího rezistoru o velikosti odporu  $R$  rovnému velikosti vnitřního odporu  $R_i$  zdroje – v audiovizuální technice se tomuto jevu říká *impedanční přizpůsobení*.“

Na obrázku vpravo ([18], s. 79) vidíme závislost výkonu na velikosti proudu v obvodu. Z grafu je vidět, že maximálního výkonu dosáhneme v případě, že

$$I = \frac{I_k}{2} = \frac{U_e}{2R_i}.$$



V takovém případě

$$\frac{U_e}{R + R_i} = \frac{U_e}{2R_i} \rightarrow R = R_i.$$

Účinnost přeměny energie v elektrickém obvodu je podle O. Lepila [18]

$$\eta = \frac{W}{W_z} = \frac{UQ}{U_e Q} = \frac{U}{U_e}.$$

Pomocí Ohmova zákona pro uzavřený obvod ji můžeme vyjádřit jako

$$\eta = \frac{RI}{(R + R_i)I} = \frac{R}{R + R_i}.$$

Účinnost obvodu při maximálním výkonu je tedy

$$\eta(P_{\max}) = \frac{R_i}{2R_i} = 50\%.$$

Jednoduché elektrické obvody, např. v kapesní svítilně, v automobilu apod., jsou navrženy tak, aby se dosáhlo kompromisu mezi maximální účinností a maximálním výkonem. ([18], str. 79)

To ještě není všechno, druhým úkolem bylo tento maximální výkon vypočítat. Toho dosáhneme prostým dosazením do funkční závislosti (1), kterou jsme odvodili hned v úvodu tohoto příkladu.

$$P_{\max}(R_i) = U_e^2 \cdot \frac{R_i}{(R_i + R_i)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{U_e^2}{R_i}. \quad (2)$$

V tomto případě bude závěr znít takto: „*Velikost maximálního výkonu v obvodu je rovna hodnotě  $\frac{1}{4} \cdot \frac{U_e^2}{R_i}$ .*“

Na úplný konec zauvažujme, jaká bude situace v klasické 12V autobaterii. Vnitřní odpor plně nabitě baterie se pohybuje okolo 0,001  $\Omega$  [14]. Spočtěme tedy tento okamžitý maximální výkon

$$P_{\max}(R_i) = \frac{1}{4} \cdot \frac{12^2}{0,001} = 36\,000 \text{ W} = 36 \text{ kW}.$$

Pro srovnání výkon obyčejné varné konvice se pohybuje okolo 2 kW, mixéru kolem 0,25 kW, motocyklu 3-15 kW, osobního automobilu 40-100 kW, lokomotivy 3000-4000 kW. ([28], s. 16)

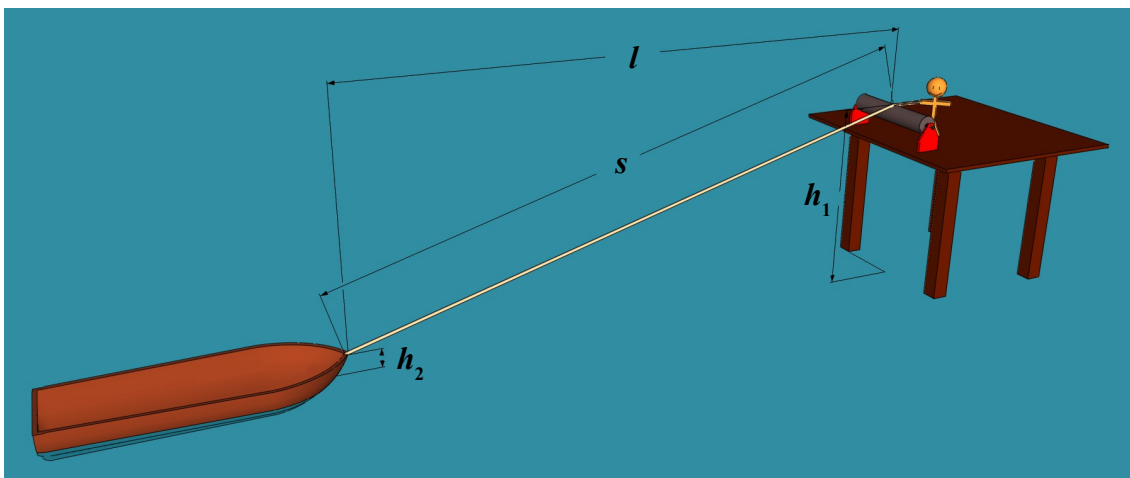
S postupem času, jak se bude autobaterie vybíjet, bude se její vnitřní odpor zvětšovat a tím pádem dle (2) maximální výkon klesat.

## Další fyzikální úlohy

### 23. příklad

Rychlost taženého objektu:

Muž na molu přitahuje přes kladku loď na laně. Lano je uvázáno na přídě 40 cm nad hladinou. Rychlost lana je 1 m/s. Loď je 7 m od mola, vrch kladky je 3 m nad hladinou vody. Jak rychle se loď blíží k molu?



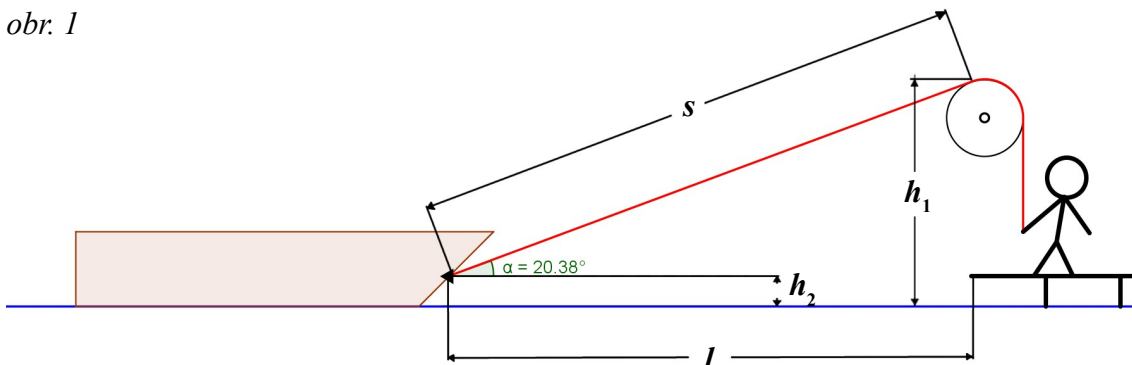
Nejprve si podle obrázku vypíšme údaje, které známe:

- $l = 7 \text{ m}$  (vzdálenost loďky od mola),
- $h_1 = 3 \text{ m}$  (vzdálenost vrchu kladky od hladiny vody),
- $h_2 = 40 \text{ cm}$  (výška úvazu lana na loďce od hladiny vody),
- $v_s = 1 \text{ m/s}$  (rychlost lana),
- $v_l = ?$  (rychlost loďky).

Tak jako v předchozích dvou příkladech i zde nás zajímá velikost rychlosti, tentokrát ve vodorovném směru. Rychlost obecně můžeme považovat za poměr dráhy  $l$  a času  $t$ , za který tuto dráhu loďka urazí, tedy  $v_l = \frac{dl}{dt}$  ([25], s. 100). Rychlost lana, kterou známe, můžeme rovněž psát jako  $v_s = \frac{ds}{dt}$ . Hledáme tedy nějaký vztah mezi délkou lana a vzdáleností loďky od břehu. Respektive to, co nás doopravdy zajímá je vztah mezi rychlostmi, kterými se tyto dvě veličiny mění. Což, jak uvidíme, spolu úzce souvisí.

Udělejme si ještě, pro větší názornost, náčrtek celé situace.

obr. 1



Nyní už si snadno všimneme, že délky  $s$ ,  $l$  a výška  $h_1 - h_2$  spolu tvoří pravoúhlý trojúhelník, ve kterém  $s$  je jeho přeponou. Pomocí Pythagorovy věty můžeme délky všech jeho tří stran vyjádřit jedním vztahem (jednou závislostí).

$$s^2 = l^2 + (h_1 - h_2)^2$$

Výšky  $h_1$ ,  $h_2$  zůstávají konstantní. Zato vzdálenosti  $s$  a  $l$  se mění – zmenšují se tak, jak je loďka přitahována ke břehu. Změna, jak jsme si již řekli, je vyjádřena derivací. Nebo řečeno lépe – derivace vyjadřuje nějakou změnu veličiny. Pojďme tedy naši rovnici zderivovat podle proměnných  $s$  a  $l$ . Nyní můžeme provést tzv. *implicitní derivaci* (princip je vysvětlen v kapitole II – teoretická část na str. 9)

$$2s \frac{ds}{dt} = 2l \frac{dl}{dt}$$

Osamostatníme výraz, který nás zajímá, tj.  $v_l = \frac{dl}{dt}$ .

$$\frac{dl}{dt} = \frac{s}{l} \cdot \frac{ds}{dt}$$

Hodnotu proměnné  $s$  ze zadání neznáme, mohli bychom si ji dopočítat z pythagorovy věty číselně a dosadit. Nebo si ji vyjádříme a dosadíme obecně.

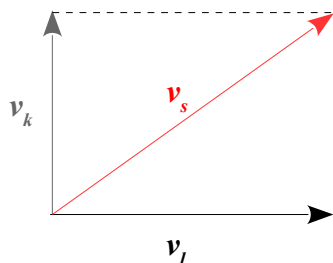
$$\frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{l^2 + (h_1 - h_2)^2}}{l} \cdot \frac{ds}{dt}$$

Nyní jsme již schopni za všechny proměnné dosadit a vypočítat hledanou veličinu.

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{7^2 + (3 - 0,4)^2}}{7} \cdot 1 \doteq 1,067 \text{ m/s}$$

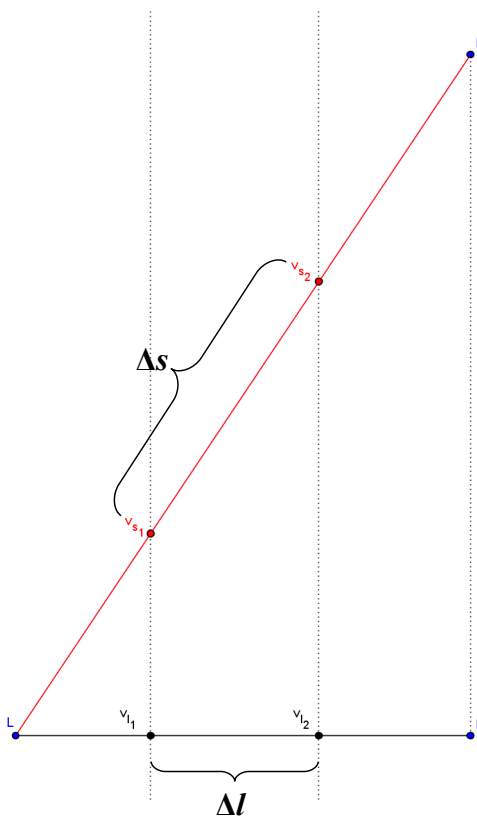
Závěr zní: „Rychlost, kterou se pohybuje loďka směrem k molu je 1,067 m/s.“

Tedy rychlost ve směru vodorovném je větší než rychlost, kterou je taháno lano. Tento závěr by mohl někomu přijít nesmyslný, protože když si vzpomeneme na základní školu a skládání rychlostí, měla by naše situace vypadat nějak následovně.

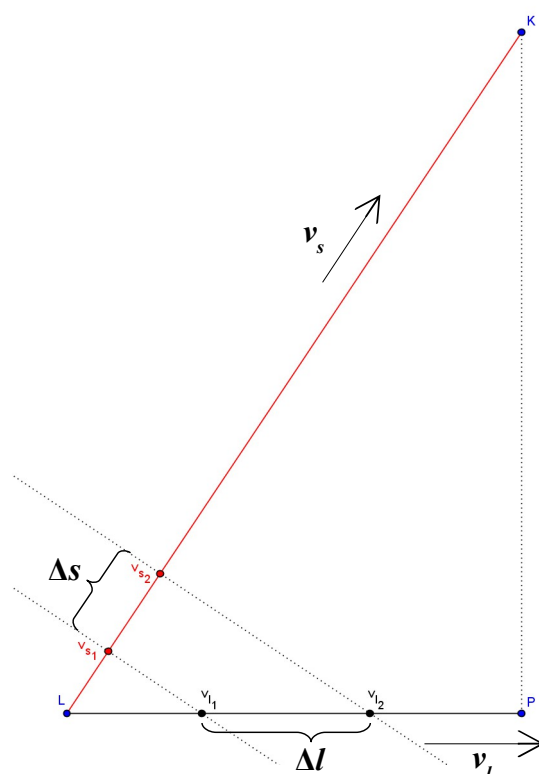


Tedy rychlost lana  $v_s$  by měla být vyšší než rychlost loďky  $v_l$ . Ovšem tato úvaha je mylná, protože  $v_s$  a  $v_l$  jsou dvě rozdílné rychlosti, tedy jedna nemůže být výslednicí druhé a naopak.

O poznání správnější úvaha by byla následující. Představme si dva body – jeden pohybující se na laně, které táhne loďku; druhý se pohybuje po vodní hladině. Lépe si celou situaci představíme z následujícího obrázku (☞ PLK záměrně neodpovídá skuteč-



nosti, aby lépe vynikl dráhový rozdíl  $\Delta s > \Delta l$ ). Oba body jsou spojeny přímkou kolmou k vodní hladině. Oba body proto dorazí do „cíle“ (body K a P) za stejnou dobu a to znamená, že bod pohybující se po delší dráze se nutně musí pohybovat rychleji. Opět je tato úvaha nesprávná neb v tomto případě uvažujeme bod  $v_{l_1}$  závislý od bodu  $v_{s_1}$ . Tak to ale v našem příkladu není. Není pravda, že lano se pohybuje v závislosti na pohybu loďky. Je to přesně naopak – rychlost loďky je závislá na rychlosti pohybu lana. Musíme tedy naši úvahu, ještě poupravit. A to následovně.



Teď už je pohyb bodu  $v_{s_1}$  odvislý od pohybu bodu  $v_{l_1}$ . A když se na obrázek podíváme pod správným úhlem, uvidíme pravoúhlý trojúhelník  $L v_{s_1} v_{l_1}$  popř.  $L v_{s_2} v_{l_2}$ . Úhel  $\sphericalangle PLK = \alpha$  také známe, resp. jsme schopni si jej dopočítat. Já se zde odvolám na program GeoGebra, který naměřil velikost  $\alpha = 20,38^\circ$  (viz obr. 1). A s použitím goniometrické funkce **cos** dopočítáme velikost rychlosti loďky následovně

$$\cos \alpha = \frac{v_s}{v_l} \rightarrow v_l = \frac{v_s}{\cos \alpha} \rightarrow v_l = \frac{1}{\cos 20,38^\circ} \doteq 1,067 \text{ m/s.}$$

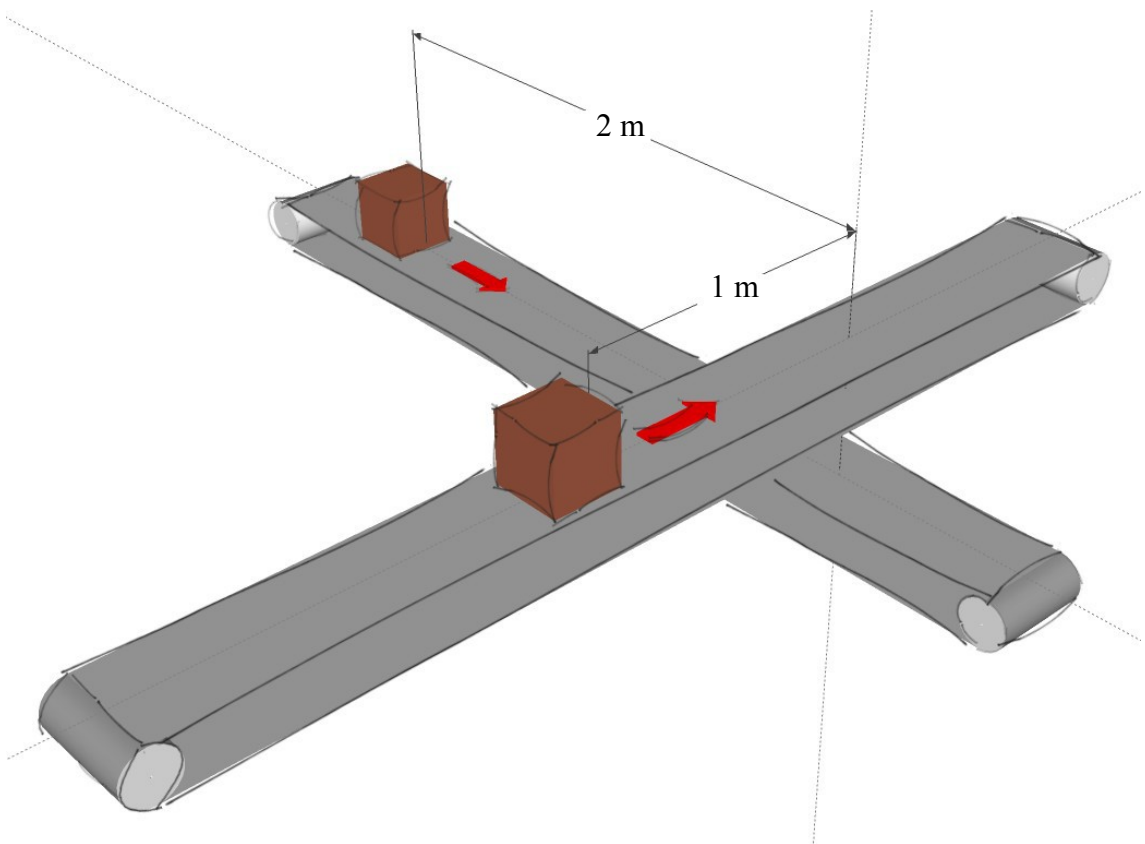
Takže závěr je stejný, leč k cíli jsme se dobrali jinou cestou.



## 24. příklad

Dva pracovní prvky balícího automatu se pohybují po různoběžných, přímých a navzájem kolmých drahách stálou rychlostí  $v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  směrem k průsečíku drah. V čase  $t_0 = 0 \text{ s}$  je jeden pracovní prvek vzdálen od průsečíku drah 1 m, druhý 2 m. Určete:

- čas  $t$  v sekundách, ve kterém bude vzdálenost pracovních prvků balícího automatu nejmenší,
- minimální vzdálenost pracovních prvků balícího automatu  $d$  v metrech.



Tak, jak je vyobrazeno na nákrese výše, si můžeme celou scénu představit. Oba prvky se pohybují stejnou rychlostí  $v$ , každý je ale jinak vzdálen od průsečíku jejich drah.

V prvním úkolu máme zjistit časový okamžik, ve kterém budou oba prvky v co nejkratší vzdálenosti od sebe. To znamená, že potřebujeme najít závislost mezi vzdáleností prvků  $d$  od sebe a časem  $t$ . Ve chvíli, kdy budeme tento časový údaj znát, jsme schopni velice snadno odpovědět na druhou otázku, poněvadž vzdálenost obou

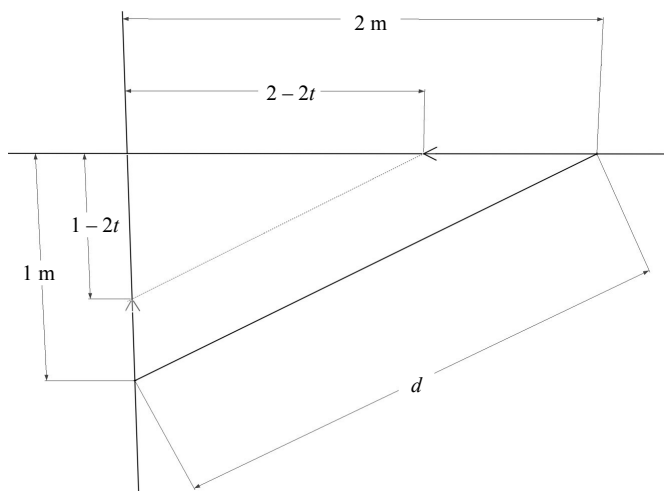
pracovních prvků je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku, jehož délky odvěsen ovšem závisí právě na časovém okamžiku  $t$ , ve kterém se oba prvky nachází v minimální vzdálenosti od sebe.

Pojďme tedy popořadě.

a) Nejprve se pokusíme nalézt onu (funkční) závislost mezi  $d$  a  $t$ . Ze zadání známe rychlost  $v$  obou prvků a jejich vzdálenosti od průsečíku jejich drah  $s_{01} = 1$  m,  $s_{02} = 2$  m. Tyto dvě fyzikální veličiny spolu souvisí známým vztahem  $s = v \cdot t$  ([5], s. 35), kde jedinou neznámou je právě hledaný čas  $t$ . Tento vztah však ještě musíme mírně upravit pro účely naší situace. V časovém okamžiku  $t_0 = 0$  jsou vzdálenosti obou prvků od průsečíku jejich drah rovny  $s_{01}$  a  $s_{02}$  a s každým následujícím okamžikem budou oba prvky z této dráhy „ukrajovat“ až do okamžiku, kdy protnou onen průsečík drah a jejich vzdálenosti od něho budou nulové. Na základě předchozí úvahy vydedukujeme správný tvar  $s = s_0 - v \cdot t$ . Tedy pro oba pracovní prvky bude platit

$$s_1 = s_{01} - v \cdot t = 1 - 2t, \quad s_2 = s_{02} - v \cdot t = 2 - 2t.$$

Pojďme nyní tyto údaje zanást do schematického nákresu.



Z něj by mělo již být vidět, že je na snadě použití Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník

$$d^2 = (1 - 2t)^2 + (2 - 2t)^2.$$

Rovnici upravíme a rovnou ji můžeme psát ve tvaru funkce

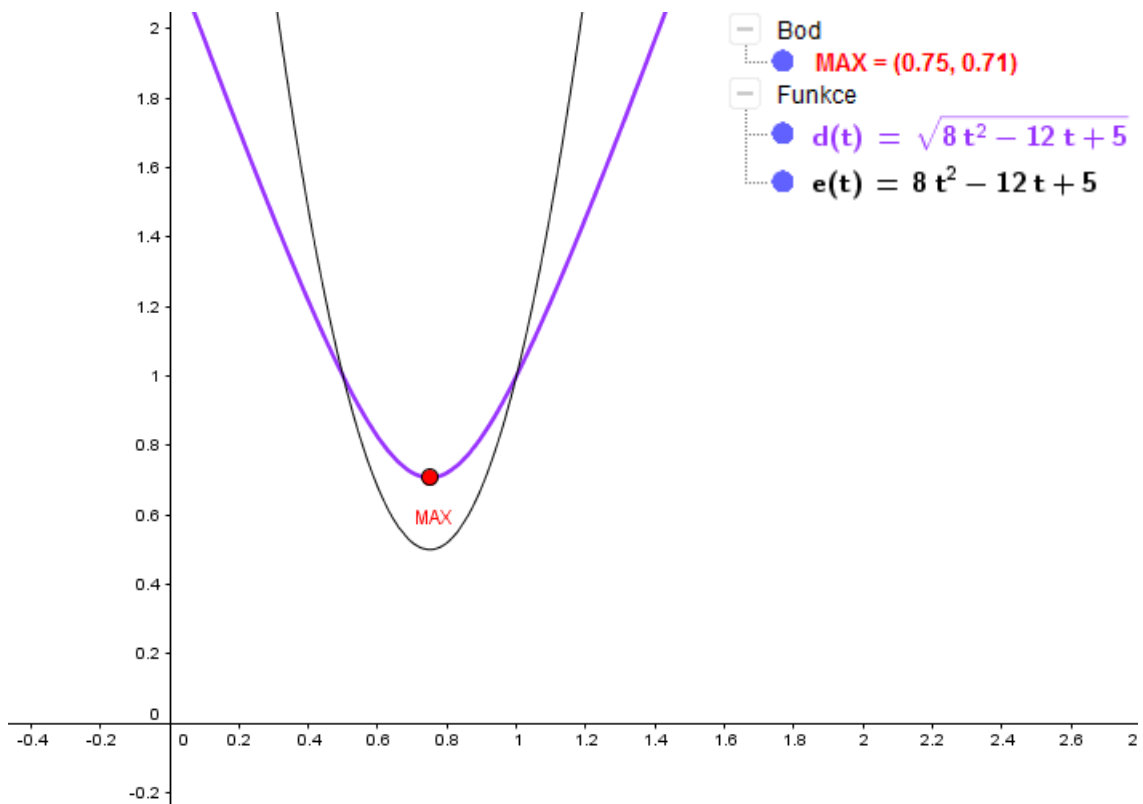
$$d(t) = \sqrt{8t^2 - 12t + 5}.$$

Protože hledáme minimální velikost  $d$ , hledáme vlastně

extrém a k tomu budeme potřebovat derivovat, proto ještě předchozí rovnici upravíme

$$d(t) = (8t^2 - 12t + 5)^{\frac{1}{2}}.$$

Funkční závislost jsme tedy našli, dále je již postup standardní, jako u většiny příkladů na hledání extrémů. Ještě si znázorníme tuto funkci graficky (viz následující obrázek).



### 1) První derivace

$$d'(t) = (16t - 12) \cdot \frac{1}{2} \cdot (8t^2 - 12t + 5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{8t - 6}{\sqrt{8t^2 - 12t + 5}}$$

### 2) Druhá derivace

$$\begin{aligned}
 d''(t) &= (8t - 6) \cdot (8t^2 - 12t + 5)^{-\frac{1}{2}} = 8 \cdot (8t^2 - 12t + 5)^{-\frac{1}{2}} + (8t - 6) \cdot \\
 &\quad \cdot (16t - 12) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (8t^2 - 12t + 5)^{-\frac{3}{2}} = \frac{8}{\sqrt{8t^2 - 12t + 5}} - \\
 &\quad - \frac{(8t - 6)^2}{\sqrt{(8t^2 - 12t + 5)^3}} = \frac{8 \cdot (8t^2 - 12t + 5) - (8t - 6)^2}{\sqrt{(8t^2 - 12t + 5)^3}} = \\
 &= \frac{64t^2 - 96t + 40 - (64t^2 - 96t + 36)}{\sqrt{(8t^2 - 12t + 5)^3}} = \frac{4}{\sqrt{(8t^2 - 12t + 5)^3}}
 \end{aligned}$$

### 3) Vyhodnocení derivací

V první řadě opět stojí nutná podmínka existence extrému.

$$d'(t) = 0 \Leftrightarrow 8t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ s}$$

První derivace nám poskytla stacionární bod  $t = 0,75$  s. Jinými slovy tvrdí, že po uplynutí  $0,75$  s od výchozího stavu budou oba prvky automatu v minimální nebo maximální vzdálenosti od sebe. Selským rozumem snadno odhalíme, že o maximum se ze zřejmých důvodů jednat nebude – po uplynutí tak krátké doby není možné, aby oba prvky dojeli do takové vzdálenosti od průsečíku jejich drah (např. až na okraj samotných přepravníků). Půjde tedy zřejmě o minimum, které jsme hledali, nicméně tento dohad ještě musíme potvrdit. A to dosazením stacionárního bodu do druhé derivace

$$d''\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{\left(8\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 12\left(\frac{3}{4}\right) + 5\right)^3}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{1}{8}}} = 8\sqrt{2} > 0.$$

Druhá derivace je kladná, tudíž v bodě  $t = 0,75$  s nastává skutečně lokální minimum. Jestli je i minimum globálním potvrdíme vyšetřením limit v krajních bodech definičního oboru. K tomu využijeme větu o limitě složené funkce ([4], s. 52).

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{8t^2 - 12t + 5} = \sqrt{\lim_{t \rightarrow +\infty} (8t^2 - 12t + 5)} = \sqrt{\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \left(8 - \frac{12}{t} + \frac{5}{t^2}\right)} = \\ &= \sqrt{+\infty \cdot (8 - 0 + 0)} = +\infty, \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(t) = \sqrt{\lim_{t \rightarrow -\infty} (8t^2 - 12t + 5)} = \sqrt{\lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 \left(8 - \frac{12}{t} + \frac{5}{t^2}\right)} = \sqrt{+\infty \cdot (8 - 0 + 0)} = +\infty.$$

Závěr tedy zní: „V čase  $t = 0,75$  s budou oba pracovní prvky v minimální vzdálenosti od sebe.“

b) Druhým a posledním úkolem je tuto minimální vzdálenost nalézt číselně. Postup již byl naznačen v úvodu tohoto příkladu. Vyjdeme opět z pravoúhlého trojúhelníka a jelikož jsme si již vztah pro závislost mezi vzdáleností  $d$  prvků a času  $t$  odvodili, nyní do něj pouze dosadíme

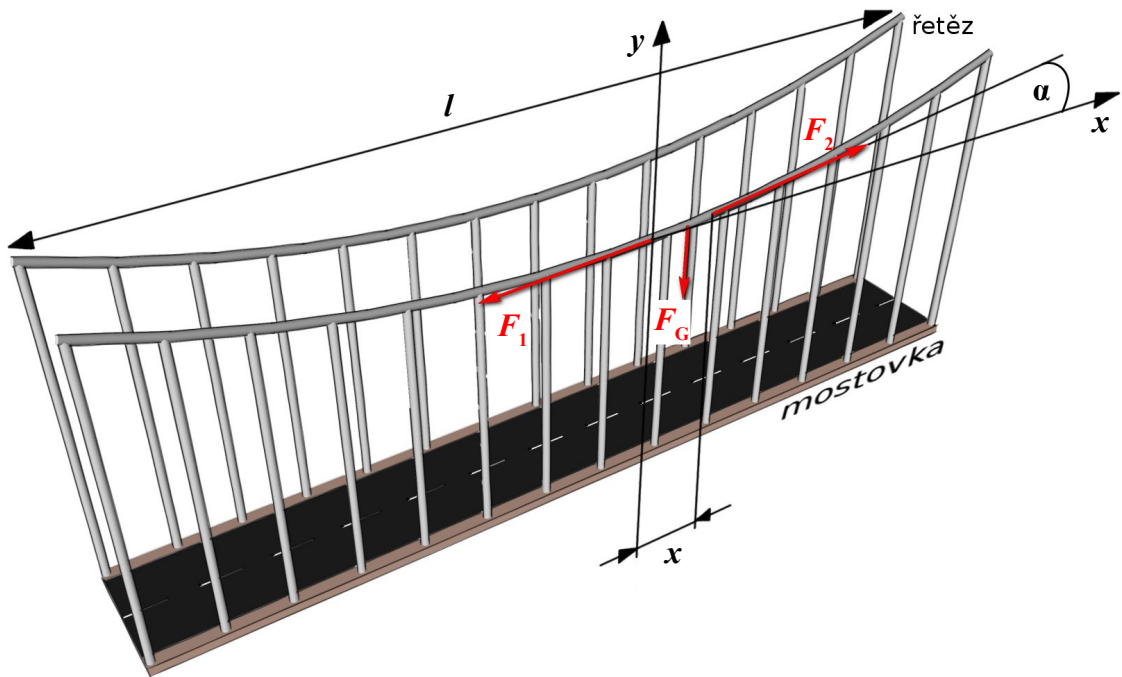
$$d(t) = (8t^2 - 12t + 5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(8\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 12\left(\frac{3}{4}\right) + 5\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \doteq 0,71 \text{ m.}$$

Závěr: „V čase  $t = 0,75$  s budou oba pracovní prvky v minimální vzdálenosti od sebe a tato vzdálenost je  $0,71$  m.“

## 25. příklad

Závěsný most:

Určete tvar křivky řetězu závěsného mostu, předpokládáte-li, že zatížení je rozděleno rovnoměrně po délce řetězu v horizontální přímce. Hmotnost řetězu vzhledem k hmotnosti mostovky zanedbejte.



Na řetěz mostu působí tíhová síla rovnoměrného rozložení závěsné mostovky a tahová síla realizovaná závěsy řetězu. Na část délky  $x$  působí tíhová síla

$$F_G = \frac{m}{l} g x$$

( $m$  je celková hmotnost mostu)<sup>2</sup> a dvě tahové síly o velikostech  $F_1, F_2$ .

Necht' řetěz svírá s horizontální rovinou v určitém bodě úhel  $\alpha$ . Pro úhel  $\alpha$  platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy(x)}{dx}$$

(viz teoretická část; dále jen  $y$ , kde  $y = y(x)$  je hledaná rovnice křivky).

---

2 Základní vztah pro tíhovou sílu působící na celý řetěz délky  $l$  je  $F_G = m g$  ([5], s. 75), tudíž poměrná část této síly působící jen na určitou délku řetězu  $x$  je dána poměrem  $\frac{x}{l}$ . Předpokládáme tedy, že řetěz je homogenní těleso s rovnoměrným rozložením hmotnosti.

Tahovou sílu  $F_2$  v laně můžeme rozložit do dvou složek ([30], s. 6):

- $F_{2x} = F_2 \cos \alpha,$
- $F_{2y} = F_2 \sin \alpha.$

Protože řetěz je v rovnováze, musí být výslednice všech sil na něj působících rovna nule. Složkově –

- ve směru  $x$ :  $F_2 \cos \alpha = F_1,$
- ve směru  $y$ :  $F_2 \sin \alpha = \frac{m}{l} g x.$

Z toho dostáváme pro

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m g}{l F_1} x.$$

Označme  $\frac{m g}{l F_1} = k \dots$  konstanta pro daný druh řetězu.

Pak dostaneme  $\frac{d y}{d x} = k x$ . Separací a integrací:

$$d y = k x d x,$$

$$y = k \frac{x^2}{2} + C.$$

Konstantu  $C$  určíme z okrajových podmínek: je-li  $x = 0$ , je také  $y = 0$ . Tedy i  $C = 0$ . Pak

$$y = \frac{m g}{2 l F_1} x^2.$$

Řetěz bude mít tvar paraboly.

## Matematické úlohy

### 26. příklad

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Naše tři čísla si označíme  $x, y, z$ . A sestavíme rovnici funkce  $f(x, y)$  podle zadání příkladu. Součet tří kladných čísel má dát číslo 24:

$$24 = x + y + z. \quad (1)$$

A jejich součin má být co největší.

$$x \cdot y \cdot z = \text{MAX}. \quad (2)$$

Rovnici (1) upravíme na

$$z = 24 - x - y. \quad (3)$$

a dosadíme do (2)

$$x \cdot y \cdot (24 - x - y) = \text{MAX}. \quad (4)$$

Teď už jen rovnici (4) přepíšeme jako funkci

$$f(x, y) = x \cdot y \cdot (24 - x - y). \quad (5)$$

Podle rovnice (4) má být tato funkce maximální. V tomto případě tedy hledáme globální maximum. Od lokálního se liší tím, že do našeho vyšetřovacího procesu musíme zahrnout i hraniční oblasti definičního oboru.  $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}_+^2\}$ , hraniční oblasti proto budou  $+\infty$  a  $0$ , v nich extrémy nastat mohou (musíme spočítat limity v nekonečnu a funkční hodnoty v nule a porovnat je s funkčními hodnotami v podezřelých bodech). Teď už přijde na řadu standardní postup tak, jak jej známe.

#### 1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 24y - 2xy - y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 24x - 2xy - x^2$$

Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$24y - 2xy - y^2 = 0$$

$$24x - 2xy - x^2 = 0$$

Nejdříve ale můžeme provést úpravu, která nám řešení značně zjednoduší.

$$y \cdot (24 - 2x - y) = 0$$

$$x \cdot (24 - 2y - x) = 0$$

Nyní obě rovnice vytknutými členy vydělíme. Nemusíme se bát, že bychom přišli o jedno řešení  $x = 0$  a  $y = 0$ . V zadání stojí, že všechna tři čísla  $x, y, z$  mají být kladná a jejich součin maximální. Pokud by tedy jedno z těchto čísel bylo nulové i jejich součin bude nulový. A to nechceme. Po úpravě dostaneme soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} 24 - 2x - y &= 0 \\ 24 - x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Druhou rovnici vynásobíme  $-2$  a rovnice sečteme

$$3y - 24 = 0 \quad \rightarrow \quad y = 8.$$

Toto řešení dosadíme do první rovnice a dostaneme  $x = 8$ .

Řešení je tedy pouze jedno:  $\{x = 8, y = 8\} \rightarrow A_1 = [8; 8]$  (stacionární bod).

## 2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 24 - 2x - 2y$$

## 3) Hessián

$$\det H_f = \begin{vmatrix} -2y & 24 - 2x - 2y \\ 24 - 2x - 2y & -2x \end{vmatrix}$$

$$\det H_f(A_1) = \begin{vmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -16 \end{vmatrix} = 192$$

## 4) Závěr

$A_1 = [8; 8]$ : ostré lokální maximum  $\rightarrow$  tzn., že čísla  $x = 8$  a  $y = 8$  jsou hodnoty, ve kterých funkce  $f(x, y)$  nabývá největší hodnoty. Tu snadno dopočítáme

$$8 \cdot 8 \cdot (24 - 8 - 8) = 8^3 = 2^9 = 512.$$

Nakonec z rovnice (3) dopočítáme třetí hledané číslo  $z = 8$ . Či-li naše tři hledaná čísla jsou  $x = 8, y = 8, z = 8$ .

Protože jsme ale hledali globální maximum a dosud víme, že  $A_1$  je pouze lokální, musíme vypočítat ony limity (jak je zmiňováno na předchozí stránce) v hraničních oblastech, abychom zjistili, jestli je zároveň extrémem globálním.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} x \cdot y \cdot (24 - x - y) = (+\infty) \cdot (+\infty) \cdot [24 - (+\infty) - (+\infty)] = (+\infty) \cdot (+\infty) \cdot (+\infty) \cdot \left[ \frac{24}{+\infty} - 1 - 1 \right] = (+\infty) \cdot (-2) = -\infty,$$



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, +\infty)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, +\infty)} x \cdot y \cdot (24 - x - y) = x_0 \cdot (+\infty) \cdot [24 - x_0 - (+\infty)] =$$

$$= (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty,$$

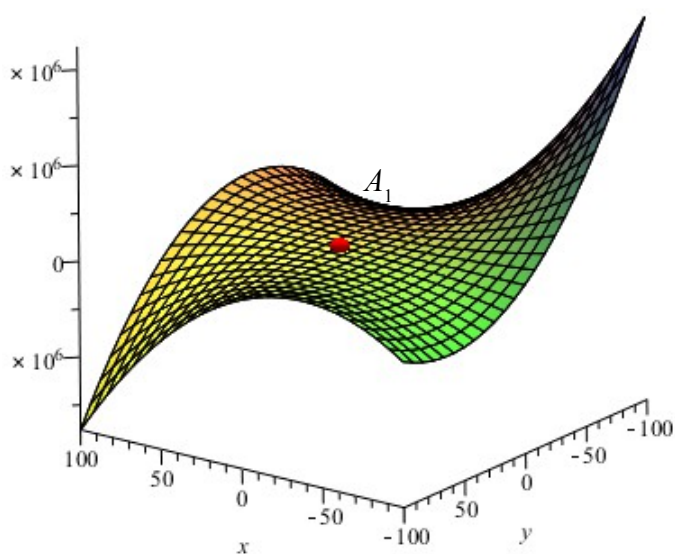
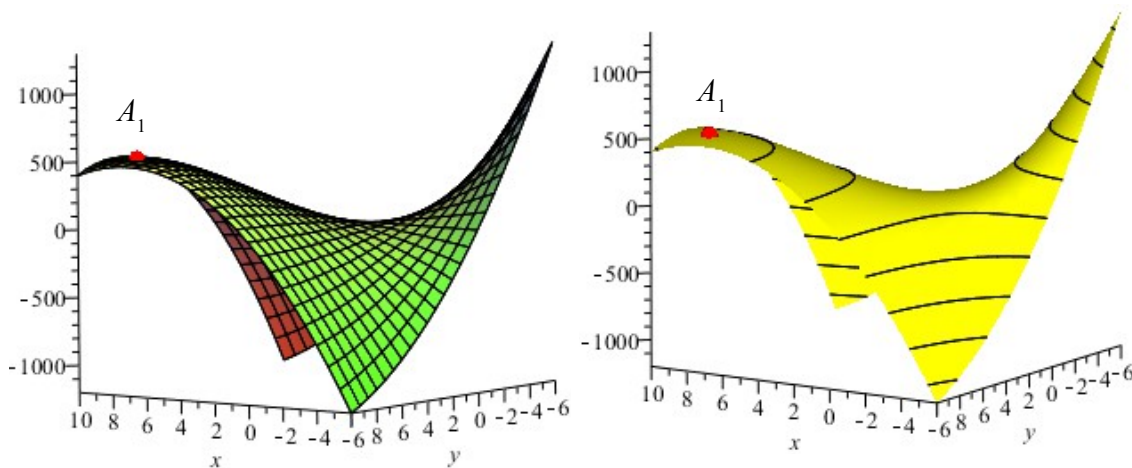
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, y_0)} x \cdot y \cdot (24 - x - y) = (+\infty) \cdot y_0 \cdot [24 - (+\infty) - y_0] =$$

$$= (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty,$$

$$f(x, 0) = 0, \quad f(0, y) = 0, \quad f(8, 8) = 512.$$

Největší z těchto funkčních hodnot a limit je 512. Globální maximum na intervalu  $(0; +\infty)$  je tedy skutečně v bodě  $[8; 8]$ .

$A_1 = [8; 8]$  je zároveň lokálním i globálním ostrým maximem funkce  $f$  a tedy naše tři hledaná čísla jsou  $x = 8, y = 8, z = 8$ .



## 27. příklad

Najděte lokální extrémy funkce  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(x^2 + y^2)$ ,

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

### 1) Nutná podmínka

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin(x^2 + y^2) + \sqrt{x^2 + y^2} \cdot 2x \cdot \cos(x^2 + y^2) = \\ &= x \cdot \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Parciální derivaci podle proměnné  $y$  můžeme díky symetrii v proměnných získat z předchozího vztahu pouhou záměnou symbolů  $x$  a  $y$ .

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y \cdot \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(x^2 + y^2)$$

Obě rovnice položíme rovny nule a dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(x^2 + y^2) &= 0, \\ y \cdot \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(x^2 + y^2) &= 0. \end{aligned}$$

V obou rovnicích upravíme levou stranu na společný jmenovatel

$$\begin{aligned} \frac{x \cdot \sin(x^2 + y^2) + 2x \cdot (x^2 + y^2) \cdot \cos(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= 0, \\ \frac{y \cdot \sin(x^2 + y^2) + 2y \cdot (x^2 + y^2) \cdot \cos(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= 0. \end{aligned}$$

Nyní obě rovnice jmenovatelem bez meškání vynásobíme a rovnou v čitateli vytkneme z první rovnice  $x$ , ze druhé  $y$  a získáme

$$\begin{aligned} x \cdot (\sin(x^2 + y^2) + 2 \cdot (x^2 + y^2) \cdot \cos(x^2 + y^2)) &= 0, \\ y \cdot (\sin(x^2 + y^2) + 2 \cdot (x^2 + y^2) \cdot \cos(x^2 + y^2)) &= 0. \end{aligned}$$

Ted' je zřejmé, že když obě rovnice vydělíme členem  $\sin(x^2 + y^2) + \dots$ , zůstane nám  $x = 0$  a  $y = 0$ . A tedy jeden stacionární bod je  $A_1 = [0; 0]$ .

Nyní opačný případ, kdy obě rovnice vydělíme členem před závorkou a zůstanou nám dvě identické rovnice

$$\sin(x^2 + y^2) + 2 \cdot (x^2 + y^2) \cdot \cos(x^2 + y^2) = 0.$$

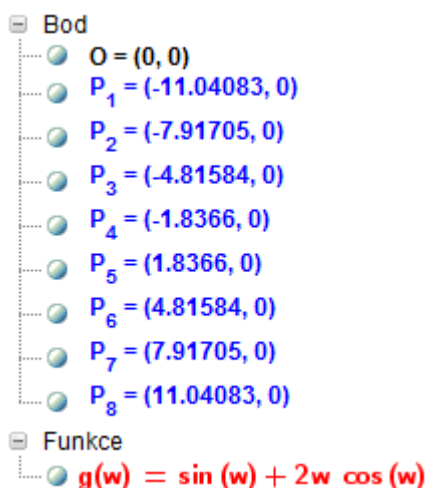
Jedná se o transcendentní rovnici, kterou nemůžeme vyjádřit nebo upravit pomocí elementárních funkcí. Pomůžeme si tedy jinak, a to pomocí substituce. V našem případě budeme substituovat člen  $x^2 + y^2$  proměnnou  $w$ .

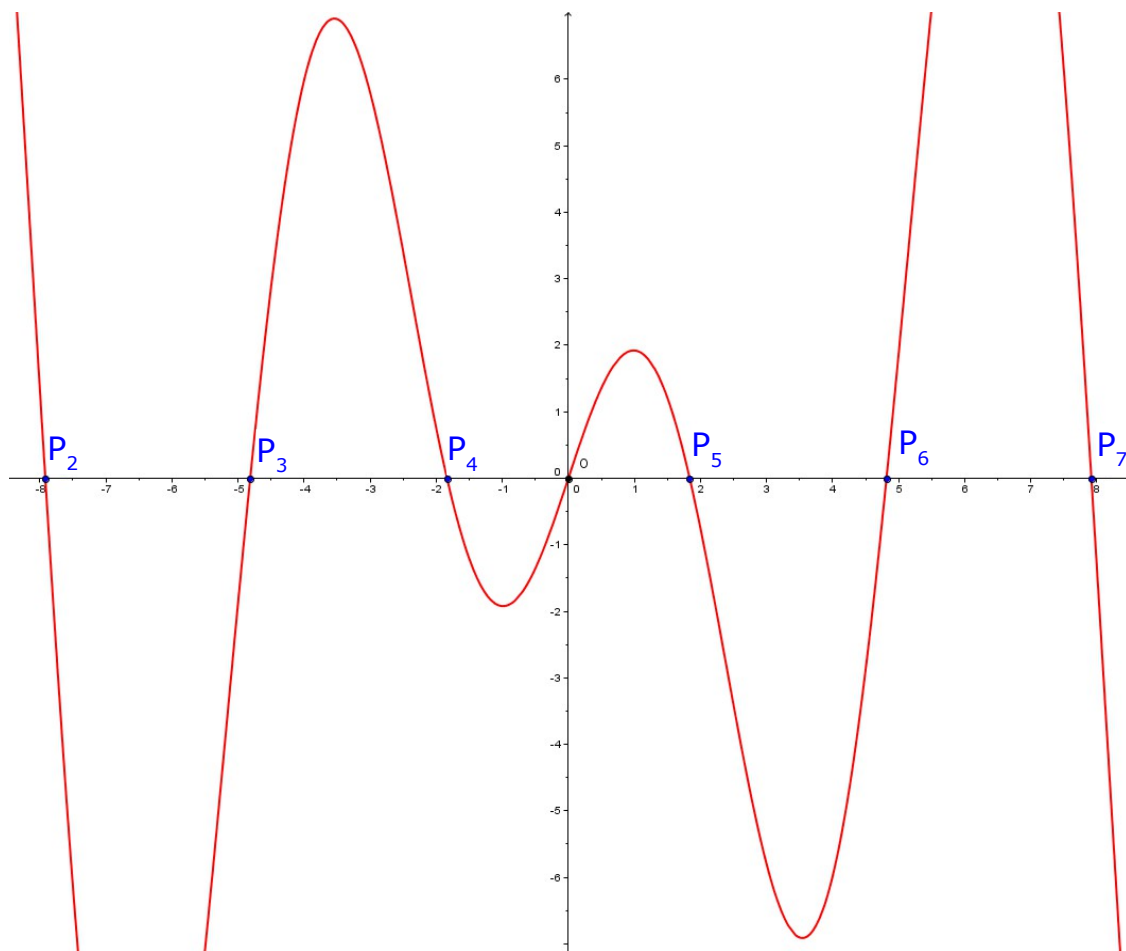
$$\sin(w) + 2w \cdot \cos(w) = 0 \quad (1)$$

Ani tuto rovnici však analyticky vyřešit nedokážeme, nicméně alespoň jsme ze dvou proměnných  $(x, y)$  udělali jednu  $(w)$ . Ted' z této rovnice na okamžik uděláme funkci

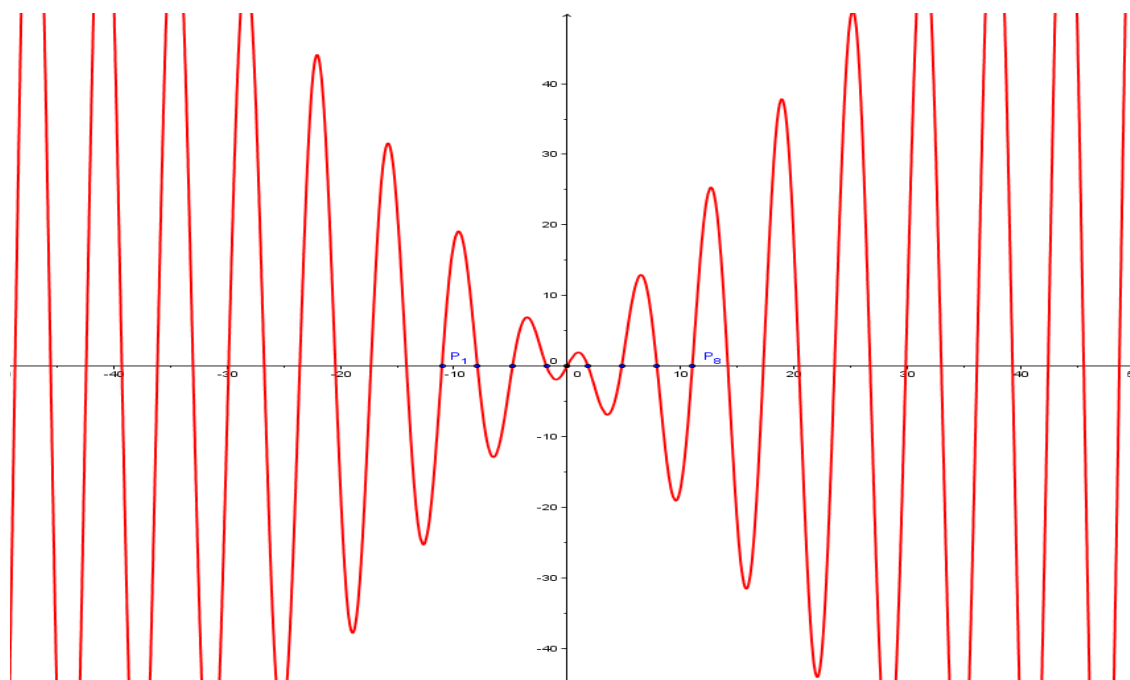
$$g(w) = \sin(w) + 2w \cdot \cos(w). \quad (2)$$

a využijeme např. program GeoGebra, Maple, Graph nebo kterýkoliv jiný volně dostupný grafický software a „nakreslíme“ si funkci  $g(w)$  – viz další stranu.





Na obrázku výše vyznačené body  $P_2 - P_7$  jsou právě body vyhovující naší rovnici (1). Na dalším obrázku je vidět, že těchto bodů bude nekonečně mnoho.



Je tedy jasné, že vyšetřit všechny tyto body by bylo nemožné. Ono to ani nebude zapotřebí. Pro začátek využijeme body  $P_5$ ,  $P_6$  a uvidíme.

## 2) Druhá derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos(x^2 + y^2) \cdot 2x \cdot \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \sin(x^2 + y^2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot y^2 \cdot \\ &\quad \cdot (-2) \cdot x^{-3} + 2 \cdot \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot y^2 \cdot (-2) \cdot x^{-3} \cdot \cos(x^2 + y^2) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot (-\sin(x^2 + y^2))\right) = \\ &= \frac{2x \cdot (\cos(x^2 + y^2) - \sin(x^2 + y^2))}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} - \frac{y^2 \cdot \sin(x^2 + y^2) + 2\cos(x^2 + y^2)}{x^3 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^3}} \end{aligned}$$

Parciální derivaci druhého řádu podle proměnné  $y$  získáme opět pouhou záměnou proměnných  $x$  a  $y$ , podobně jako tomu bylo u derivací prvního řádu (viz str. 53).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2y \cdot (\cos(x^2 + y^2) - \sin(x^2 + y^2))}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}} - \frac{x^2 \cdot \sin(x^2 + y^2) + 2\cos(x^2 + y^2)}{y^3 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^3}}$$

Smíšené derivace ani nemá cenu dopočítávat, vidíme totiž, že v bodě  $A_1$  nejsou parciální derivace druhého řádu definovány, tudíž nepůjde sestavit Hessián. Budeme tedy muset použít jiný nástroj, a to ...

## 3) ... definici extrému

$$\Delta f = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)$$

Pro náš konkrétní případ (tedy bod  $A_1$ ) to bude vypadat takto

$$\begin{aligned} (\Delta f)_{A_1} &= f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \\ &= f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) = \\ &= \sqrt{(0 + h_1)^2 + (0 + h_2)^2} \cdot \sin((0 + h_1)^2 + (0 + h_2)^2) - \sqrt{0} \cdot \sin(0) = \\ &= \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \cdot \sin(h_1^2 + h_2^2). \end{aligned}$$

Vidíme, že výraz  $h_1^2 + h_2^2$  bude vždy kladný, nehledě na to, jestli za přírůstky  $h_1, h_2$  dosadíme kladné nebo záporné hodnoty. Stačí nám tedy prošetřit případy, kdy  $h_1 \neq 0$  a  $h_2 \neq 0$ . Mohlo by se zdát, že hodnota funkce sinus ve výraze bude záviset na velikosti jejího argumentu (to je sice pravda), ale uvědomme si, že zde proměnné  $h_1, h_2$  zastupují nekonečně malé přírůstky.

Pro bod  $A_1$  tedy vyšetřujeme:

- a)  $(h_1 = 0) \wedge (h_2 = 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} = 0$
- b)  $(h_1 \neq 0) \wedge (h_2 = 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} > 0$
- c)  $(h_1 = 0) \wedge (h_2 \neq 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} > 0$
- d)  $(h_1 \neq 0) \wedge (h_2 \neq 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} > 0$

Pro všechny přírůstky nenulové funkční hodnota roste ve všech směrech, a tedy v bodě  $A_1$  nastává ostré lokální minimum.

Nyní zpět k našim bodům  $P_5, P_6$ . Jelikož jsou to kořeny funkce  $g(w)$ , která vznikla substitucí, musíme se teď k této substituci vrátit (nás totiž nezajímá proměnná  $w$ , ale naše původní proměnné  $x, y$ ).

$$w = x^2 + y^2$$

Proveďme tedy zpětnou substituci pro oba body  $P_5, P_6$  (pro souřadnice bodů viz str. 99).

$$P_5 : g(1,8366) = 0 \rightarrow K_5 : x^2 + y^2 = 1,8366$$

$$P_6 : g(4,81584) = 0 \rightarrow K_6 : x^2 + y^2 = 4,81584$$

Vidíme, že stacionární body  $K_5, K_6$  jsou vlastně stacionární kružnice o poloměrech  $r_5 = \sqrt{1,8366} \approx 1,3552, r_6 = \sqrt{4,81584} \approx 2,1945$ .

Začněme vyšetřovat postupně body  $K_5$  a  $K_6$  tak, jako jsme to provedli s bodem  $A_1$ . Je jasné, že těžko budeme vyšetřovat obecně celou kružnici, a proto zvolíme na kružnici bod a ten pak vyšetříme.

$$K_5 : y = \sqrt{1,8366 - x^2} \rightarrow x = \pm 1,3552 ; y = 0 \rightarrow A_5 = [1,3552; 0]$$

$$K_6 : y = \sqrt{4,81584 - x^2} \rightarrow x = \pm 2,1945 ; y = 0 \rightarrow A_6 = [2,1945; 0]$$

Zvolili jsme si hodnotu  $x$  takovou, že  $y$  dá nulovou hodnotu. Také je vidět, že hodnoty  $x$  vyšly dvě (kladná a záporná), ale protože nám stačí jen jeden bod, využijeme tu kladnou

pro snazší výpočet. Máme dva stacionární body  $A_5 = [1,3552; 0]$ ,  $A_6 = [2,1945; 0]$ .

Pomůžeme si opět graficky a to tak, že uděláme řez rovinou  $y = 0$ . Připomeňme, jak vypadá rovnice naší funkce

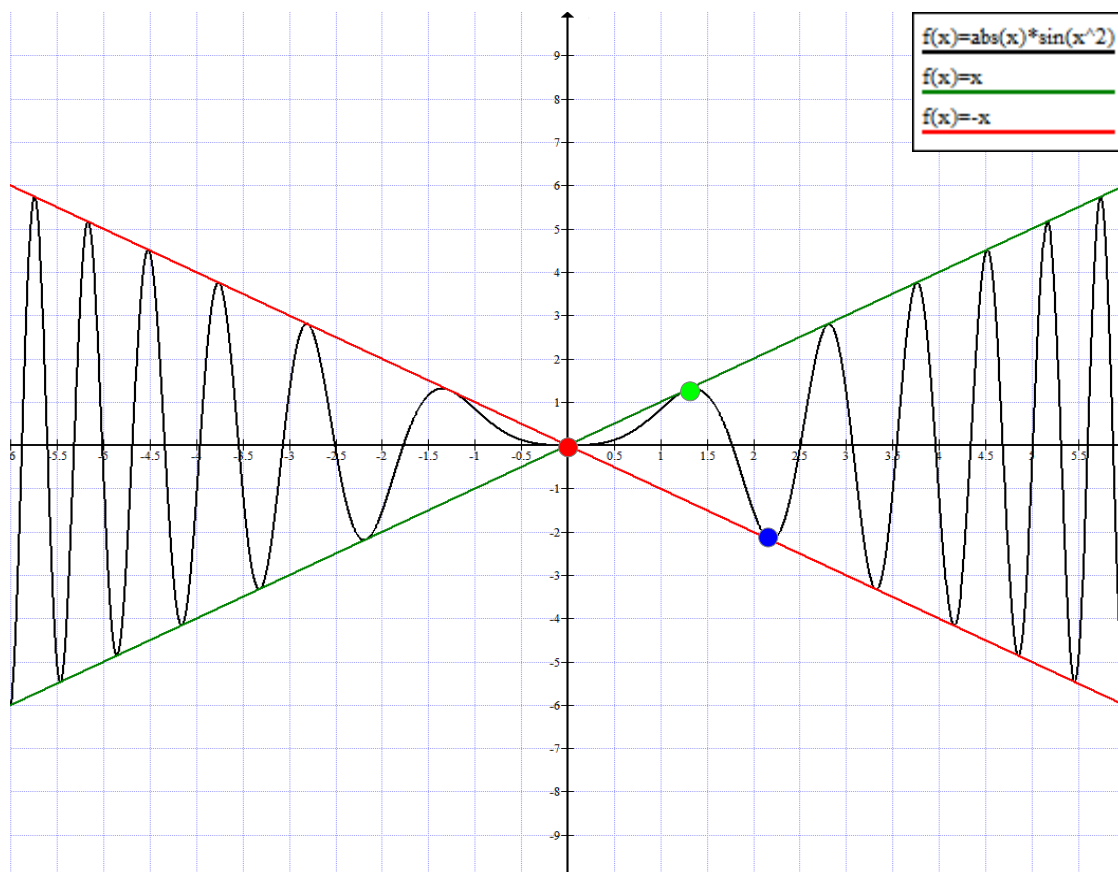
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(x^2 + y^2).$$

Rovnici  $y = 0$  teď do ní dosadíme a dostaneme funkci

$$f(x, 0) = \sqrt{x^2 + 0} \cdot \sin(x^2 + 0),$$

$$f(x) = |x| \cdot \sin(x^2).$$

Tuto funkci opět snadno „nakreslíme“ pomocí matematického software (tentokrát použijeme volně dostupný program Graph).

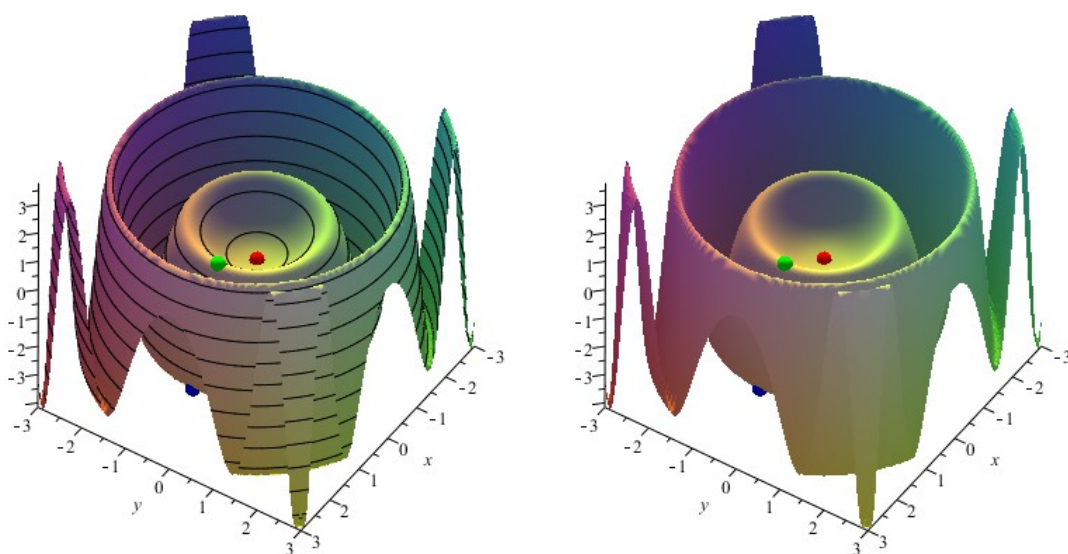


Toto je řez naší funkcí (na obrázku vodorovná osa  $x$ , svislá  $z$ ). Legenda k obrázku:

- bod  $A_1 = [0; 0]$  – ostré lokální minimum
- bod  $A_5 = [1,3552; 0]$  – neostré lokální maximum
- bod  $A_6 = [2,1945; 0]$  – neostré lokální minimum

Jistě také stojí za povšimnutí, že řez naší funkcí je „chycen“ mezi funkcemi  $f(x) = x$  a  $f(x) = -x$ . Bod  $A_5$  je jeden z „mnoha“ bodů ležících na kružnici  $K_5$ , proto je tento extrém neostrý. Tedy pro upřesnění: celá kružnice  $K_5$  je neostré lokální maximum, stejně tak  $K_6$  je neostré lokální minimum. Z obrázku je patrné, že další bude následovat opět maximum, za ním minimum a tak dále. Těchto neostrých lokálních extrémů bude nekonečně mnoho.

Z následujících obrázků snad bude vidět, jak naše funkce  $f(x, y)$  vypadá ve skutečnosti.



*Poznámka* : Barevné značení bodů na těchto obrázcích koresponduje se značením na obrázku řezu ze strany 103.



## Literatura

- [1] SEKAL, Tomáš. Sešit „Matematika pro fyziky I“, a. r. 2008/09, JČU v ČB, Fakulta pedagogická, Katedra fyziky, obor učitelství M-F/SŠ.  
Převzaté příklady (zadání):  
– **př. 4:** povrch krychle – abs. a rel. chyba měření (s. 22)  
– **př. 15:** výtok H<sub>2</sub>O ze stěny nádoby (s. 56)
- [2] SEKAL, Tomáš. *Extrémy funkcí dvou proměnných: sbírka řešených příkladů*. České Budějovice, 2013. Bakalářská práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky.  
Převzaté příklady (zadání + řešení):  
– **př. 7:** Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže ... (s. 29)  
– **př. 26:** Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel ... (s. 94)  
– **př. 27:**  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(x^2 + y^2)$  (s. 97)
- [3] BARTUŠKA, Karel a Emanuel SVOBODA. *Fyzika pro gymnázia: Molekulová fyzika a termika*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-200-7.
- [4] BATÍKOVÁ, Barbora et al. *Matematika pro 4MM101 s aplikačními příklady*. 2. vyd. Praha: Oeconomica, 2007, s. 98-106. ISBN 978-80-245-1173-3.
- [5] BEDNAŘÍK, Milan a Miroslava ŠIROKÁ. *Fyzika pro gymnázia: Mechanika*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-176-5.
- [6] BLAHOVEC, Antonín. *Elektrotechnika I*. 4. vyd. Praha: Informatorium, 2002. ISBN 80-86073-90-4.
- [7] Diferenciální rovnice. In: *Wikipedie – otevřená encyklopedie* [online]. St. Petersburg (Florida): Wikimedia Foundation, 14. 1. 2002, naposledy upraveno 18. 6. 2015 [cit. 2015-07-26]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Diferenci%C3%A1ln%C3%AD\\_rovnice](https://cs.wikipedia.org/wiki/Diferenci%C3%A1ln%C3%AD_rovnice)  
Převzaté příklady (zadání):  
– **př. 17:** Chladnutí čaje (s. 68)
- [8] Encyklopedie fyziky. Chladnutí kávy – přímý výpočet. *Fyzika.jreichl.com* [online]. ©2006-2015 [cit. 2015-12-25]. Dostupné z: [http://fyzika.jreichl.com/main\\_article/view/1626-chladnuti-kavy-primy-vypocet](http://fyzika.jreichl.com/main_article/view/1626-chladnuti-kavy-primy-vypocet)
- [9] FALTUS, Ivo. Ekonomická optimalizace průřezu silových kabelů nn. *Odborné časopisy: ELEKTRO – časopis pro elektrotechniku* [online článek]. 2010, č. 5, str. 42-43. [cit. 2015-12-29]. Dostupné z: <http://www.odbornecasopisy.cz/elektro/casopis/tema/ekonomicka-optimalizace-prurezu-silovych-kabelu-nn--10408>
- [10] FEYNMAN, R., R. LEIGHTON a M. SANDS. *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady (1/3)*. 1. vyd. Havlíčkův Brod: Fragment, 2000. ISBN 80-7200-405-0.
- [11] GILLMAN, Leonard a Robert H. MCDOWELL. *Matematická analýza*. 2. vyd. Praha: SNTL, 1983.

- [12] HAMHALTER, Jan a Jaroslav TIŠER. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 2. vydání. Praha: ČVUT, 2005, s. 107-127.
- [13] HORSKÝ, Zdeněk. *Učebnice matematiky pro posluchače VŠE*. 4. přeprac. vyd. Praha: SNTL/ALFA, 1977.
- [14] Chcete nabíjet baterii nebo podpořit studený start? Potřebujete více informací o nabíjení a startování? Čtěte zde. *Alfin Trading s.r.o.* [online článek]. ©2015 [cit. 2015-12-29]. Dostupné z: <http://www.alfin-trading.cz/clanek/chcete-nabijet-baterii-nebo-podporit-studený-start-potřebujete-více-informaci-o-nabíjení-a-startování-ctete-zde/1>
- [15] JAREŠOVÁ, Miroslava a Bohumil VYBÍRAL. Diferenciální rovnice – Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku. *Fyzikální olympiáda* [online PDF]. [cit. 2015-07-12]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/difro.pdf>.  
Převzaté příklady (zadání + řešení):  
– **př. 14:** výtok kapaliny z nádoby (s. 55)  
– **př. 18:** radioaktivní rozpad (s. 72)  
– **př. 19:** barometrická rovnice (s. 76)  
– **př. 20:** průlet kamene Zemí (s. 77)  
– **př. 21:** nabíjení kondenzátoru (s. 79)  
– **př. 25:** závěsný most (s. 94)
- [16] KNOTOVÁ, Miroslava. *Užití diferenciálního a integrálního počtu v praxi*. Tábor, 2006. Závěrečná ročníková práce. Střední průmyslová škola strojnická Tábor. Převzaté příklady (zadání):  
– **př. 5:** Obdélníkový papír – odstříhneme rohy (s. 24)  
– **př. 9:** Reklama – investice (s. 35)  
– **př. 10:** Pořizovací náklady elektrického vedení (s. 37)  
– **př. 11:** Průmyslový závod vzdálen od města (s. 42)  
– **př. 22:** Akumulátor – max. výkon (s. 82)  
– **př. 24:** Balicí automat (s. 90)
- [17] KOUDELKA, Ctirad. Přípojky NN. *Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava: Katedra elektrotechniky* [online PDF]. Ostrava, 2007. [cit. 2015-12-29]. Dostupné z: [http://fei1.vsb.cz/kat420/vyuka/Bakalarske/prednasky/pred\\_ZEP/Pripojky%20NN-07.pdf](http://fei1.vsb.cz/kat420/vyuka/Bakalarske/prednasky/pred_ZEP/Pripojky%20NN-07.pdf)
- [18] LEPIL, Oldřich a Pavel ŠEDIVÝ. *Fyzika pro gymnázia: Elektřina a magnetismus*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-202-1.
- [19] MAHNELOVÁ, H. Matematika: Extrémy funkcí. *Pedagogická fakulta JČU v ČB, Katedra matematiky, Projekt Fibonacci* [online PDF]. [cit. 2015-07-18]. Dostupné z: <http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/Fibo/extremecz.pdf>  
Převzaté příklady (zadání):  
– **př. 6:** Kvádr vepsaný do rotačního válce (s. 27)

- [20] MAŘÍK, Robert. Využití derivací v praktických příkladech. *Mendelova univerzita v Brně: Home Page of Robert Mařík – Aplikovaná matematika pro arboristy* [online PDF]. Brno, ©2011, poslední změna 2011-10-25 [cit. 2015-07-12]. Dostupné z: [http://user.mendelu.cz/marik/wiki/arboristika/derivace\\_priklady.pdf](http://user.mendelu.cz/marik/wiki/arboristika/derivace_priklady.pdf)  
Převzaté příklady (zadání):  
– **př. 2:** Rychlost rozšiřování spáleniště (s. 16)  
– **př. 3:** Oplocování pozemku (s. 17)  
– **př. 8:** Změna objemu vlivem teplotní roztažnosti (s. 33)  
– **př. 12:** Nejpohodlnější cesta – ptáci (s. 46)  
– **př. 13:** Rychlost s jakou roste hladina v nádrži (s. 52)  
– **př. 16:** Propustnost mostu (s. 62)  
– **př. 23:** Rychlost taženého objektu (s. 86)
- [21] MIKULČÁK, Jiří et al. *Matematické fyzikální chemické tabulky*. 6. doplněné vyd. Praha: SPN, 1974.
- [22] Newtonovy pohybové zákony. In: *Wikipedie – otevřená encyklopedie* [online]. St. Petersburg (Florida): Wikimedia Foundation, 14. 1. 2002, naposledy upraveno 18. 6. 2015 [cit. 2015-07-26]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Newtonovy\\_pohybov%C3%A9\\_z%C3%A1kony#Druh.C3.BD\\_Newton.C5.AFv\\_z.C3.A1kon](https://cs.wikipedia.org/wiki/Newtonovy_pohybov%C3%A9_z%C3%A1kony#Druh.C3.BD_Newton.C5.AFv_z.C3.A1kon)
- [23] PRÁGEROVÁ, Alena. *Cvičení z matematiky II*. 2. vyd., Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983, s. 516-547. (skripta VŠE)
- [24] Sbíрка příkladů. Využití derivace v praxi - maximální obsah. *Sbirkapříkladu.eu* [online]. ©2012 [cit. 2015-6-25]. Dostupné z: <http://www.sbirkapříkladu.eu/p/610#.VoKhtlLkDdl>  
Převzaté příklady (zadání):  
– **př. 1:** Rovnoběžník, max. S (s. 15)
- [25] ŠINDELÁŘ, Václav a Ladislav SMRŽ. *Nová soustava jednotek*. 2. uprav. vyd. Praha: SPN, 1977.
- [26] ŠKOPOVÁ, Michaela. *Jednoduché diferenciální rovnice a experimenty*. Olomouc, 2010. Bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci, Fakulta přírodovědecká, Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky.
- [27] ŠTOLL, Ivan. *Fyzika pro gymnázia: Fyzika mikrosvětá*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2006. ISBN 80-7196-241-4.
- [28] TESARŠ, Jiří a František JÁCHIM. *Fyzika 5 pro základní školu: Energie*. 1. vyd. Praha: SPN, 2010. ISBN 978-80-7253-491-7.
- [29] TSISHCHANKA, Kiryl. Exponential Growth and Decay. *Department of Mathematics, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University* [online PDF]. ©2010 [cit. 2015-11-14]. Dostupné z: [https://cims.nyu.edu/~kiryl/Calculus/Section\\_3.4--Exponential\\_Growth\\_and\\_Decay/Exponential\\_Growth\\_and\\_Decay.pdf](https://cims.nyu.edu/~kiryl/Calculus/Section_3.4--Exponential_Growth_and_Decay/Exponential_Growth_and_Decay.pdf)

- [30] VYBÍRAL, Bohumil. Statika tuhého tělesa. *Fyzikální olympiáda* [online PDF]. [cit. 2015-12-05]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/statika.pdf>
- [31] ZAPLETAL, Miroslav. Nabíjení kapacitoru. *SOU technické Chotěboř* [online PPT]. ©2001 [cit. 2015-12-29]. Dostupné z: [www.souch.cz/dok/nabijeni\\_kapacitoru.ppt](http://www.souch.cz/dok/nabijeni_kapacitoru.ppt)