UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Extrémy funkcí dvou proměnných — sbírka úloh

Vedoucí bakalářské práce:
Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.
Rok odevzdání: 2013

Vypracoval:
Hana Keslerová
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením paní Mgr. Ivety Bebčákové, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 4. prosince 2013

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí bakalářské práce paní Mgr. Ivetě Bebčákové, Ph.D. za spolupráci i za čas, který mi věnovala při konzultacích.

Obsah

Úvod

Diferenciální počet se v praxi aplikuje velmi často a právě vyšetřování extrémů funkcí patří k jeho nejdůležitějším částem. Jeho praktické využití vidíme nejčastěji v ekonomii, jelikož ekonomické rozhodování jakéhokoli subjektu, který je součástí národního hospodářství, je postaveno na tom, že onen subjekt chce dosáhnout minimalizace nákladů a maximalizace zisku. Hledáním maxim a minim funkcí se zabývá již v nadpisu práce zmíněná část diferenciálního počtu.

Má práce se bude skládat ze dvou velkých částí, přičemž druhá bude ještě rozdělena do tří menších. První, pouze teoretická, se nebude zabývat přímo extrémy, ale teorií týkající se funkcí dvou proměnných a parciálních derivací funkcí dvou proměnných, protože znalost těchto kapitol je bezpodmínečně nutná pro další pracování s těmito funkcemi, v mém případě pro hledání jejich extrémů. Teoreticko — praktická část bude rozdělena do tří podkapitol (lokální, vázané a globální extrémy). V každé z těchto kapitol si vždy nejprve vysvětlíme, co ony extrémy vlastně znamenají, jaké jsou podmínky pro to, aby jich funkce vůbec mohla nabývat a jak postupovat při vyšetřování, zda funkce má či nemá v jistém bodě extrém. Každá z těchto podkapitol bude následně doplněna deseti podrobně vysvětlenými a následně vyřešenými příklady zabývajícími se postupně lokálními, vázanými a nakonec globálními extrémy funkcí dvou proměnných. Čtenář by po prostudování této práce měl být schopen hlouběji proniknout, pochopit a vyřešit příklady s touto problematikou, jejíž znalost je myslím důležitá nejen pro osoby, které se zabývají matematickým studiem či výzkumem.

Cíl je tedy jasný, jak je již v nadpisu celé práce uvedeno, jde o vytvoření sbírky příkladů na zadané téma. Účelem této sbírky je její následné poskytnutí studentům nižších ročníků matematických oborů Univerzity Palackého pro lepší pochopení této látky.

Text je vysázen typografickým systémem TEX ve formátu LATEX2ε, grafy funkcí jsou vytvořeny pomocí matematického softwaru MATLAB.

Seznam značení

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ — n - rozměrný prostor

$\mathbb{R}^2$ — 2 - rozměrný prostor

Ω — libovolná podmnožina v $\mathbb{R}^n$ (popř. $\mathbb{R}^2$)

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ — bod v libovolné podmnožině Ω

$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — funkce n proměnných

$z = f(x, y)$ — funkce dvou proměnných x a y

$X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ — bod v prostoru $\mathbb{R}^3$

D_f — definiční obor funkce $f(x, y)$

H_f — obor hodnot funkce $f(x, y)$

$\varphi(x) = f(x, y_0)$ — funkce jedné proměnné x

$f'_x(x_0, y_0)$, $f'_x(X)$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(X)}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}(X)$ — parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $X = (x_0, y_0)$ podle proměnné x

f'_x nebo $\frac{\partial f}{\partial x}$ — parciální derivace funkce f podle proměnné x

$\lim_{x \to a} f(x)$ — limita funkce f v bodě a

$\emptyset$ — prázdná množina

$\mathcal{U}(X)$ — okolí bodu X

$f''_{xx}(X)$ — parciální derivace druhého řádu funkce f v bodě X podle proměnné x

$f''_{yy}(X)$ — parciální derivace druhého řádu funkce f v bodě X podle proměnné y

$f''_{xy}(X)$, $f''_{yx}(X)$ — smíšené parciální derivace druhého řádu funkce f podle proměnných x a y

$D_2 = \det H$ — determinant Hessovy matice

Kapitola 1

Teoretická část

1.1 Základní pojmy

1.1.1 Funkce více proměnných

Na začátku této kapitoly je třeba si říci, co si představujeme pod pojmem funkce více proměnných, protože umíme-li definovat funkci více proměnných, nebude pro nás pak problém zaměřit se konkrétně na funkci dvou proměnných, jejímiž extrémy se budeme v práci následně zabývat.

Definice 1 Nechť Ω značí libovolný obor v prostoru $\mathbb{R}^n$, přičemž každý bod $X \in \Omega$ lze popsat n-ticí $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Pak každé zobrazení f množiny Ω do množiny $\mathbb{R}$ všech reálných čísel nazýváme *reálnou funkcí n reálných* (nezávisle) *proměnných* (nebo *reálnou funkcí n reálných argumentů*) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a píšeme

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{popř.} \quad y = f(X) \text{ pro } \forall X \in \Omega.$$

Obor Ω se nazývá *definiční obor funkce* $f(X)$.

[4]

1.1.2 Funkce dvou proměnných

Jak již bylo řečeno, v této práci se omezíme na funkce dvou argumentů (proměnných), tím pádem je třeba předchozí definici zjednodušit pro $n = 2$.

Definice 2 *Reálnou skalární funkcí*[1], neboli *reálnou funkcí dvou reálných proměnných*, budeme rozumět předpis či pravidlo, jímž uspořádané dvojici reálných

[1]Funkce, jejíž hodnoty jsou skaláry, tedy veličiny, které určuje jeden jediný číselný údaj (reálné či komplexní číslo).

čísel $(x, y) \in D_f$, kde $D_f \subset \mathbb{R}^2$ je neprázdná množina, přiřadíme reálné číslo $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$. Jedná se tedy o zobrazení

$$f : (x, y) \in D_f \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Množina D_f je *definičním oborem* funkce f.

Množina $H_f = \Big\{ z \in \mathbb{R} |\text{ existuje } (x, y) \in D_f \text{ tak, že } z = f(x, y) \Big\}$ je *obor hodnot* funkce f.

Grafem funkce f je množina $G_f = \Big\{ \Big(x, y, f(x, y) \Big) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} | (x, y) \in D_f \Big\}$.

[5]

Protože se dále budeme zabývat pouze reálnými funkcemi dvou reálných proměnných, budeme zkráceně používat termín *funkce dvou proměnných.*

Poznámka 1 Každá funkce dvou proměnných je určená svým funkčním předpisem a definičním oborem. Pokud její definiční obor neznáme, budeme za něj považovat maximální množinu bodů $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pro které má funkční předpis této funkce smysl.

Jak spolu souvisí spojitost a extrémy funkce dvou proměnných?

Souvislost mezi spojitostí funkce dvou proměnných a jejími extrémy uvádí následující věta.

Věta 1 (Weierstrassova věta) Nechť funkce f je spojitá na kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Pak funkce f nabývá na množině M svého maxima a minima, tj. existují body x_m a x_M v množině M takové, že

$$f(x_m) = \min\{f(x) | x \in M\}, \quad f(x_M) = \max\{f(x) | x \in M\}.$$

[6]

Tuto větu budeme později využívat při hledání *globálních (absolutních) extrémů* funkce dvou proměnných.

1.1.3 Parciální derivace funkcí dvou proměnných

Abychom v další části této práce byli schopni pochopit a následně řešit příklady týkající se extrémů funkcí dvou proměnných, je pro nás nezbytně nutná znalost další kapitoly diferenciálního počtu a tou jsou parciální derivace funkcí dvou proměnných.

Parciální derivace prvního řádu

Nejprve si povíme něco o parciálních derivacích funkce dvou proměnných v bodě.

Definice 3 Nechť funkce $z = f(x, y)$ je definována na libovolné podmnožině Ω, ve které leží bod $X = (x_0, y_0)$.

1. Má-li funkce $\varphi(x) = f(x, y_0)$ o jedné proměnné x v bodě x_0 derivaci $\varphi'(x_0)$, nazýváme ji *parciální derivací funkce $f(x, y)$ podle x v bodě $X = (x_0, y_0)$* a značíme ji některým z těchto symbolů:

$$f'_x(x_0, y_0), \quad f'_x(X), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(X)}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(X).$$

Přitom je

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

2. Má-li funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ o jedné proměnné y v bodě y_0 derivaci $\psi'(y_0)$, nazýváme ji *parciální derivací funkce $f(x, y)$ podle y v bodě $X = (x_0, y_0)$* a značíme ji některým z těchto symbolů:

$$f'_y(x_0, y_0), \quad f'_y(X), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(X)}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(X).$$

Přitom je

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{p \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + p) - f(x_0, y_0)}{p}.$$

[4]

V případě parciální derivace funkce f podle x v bodě X postupujeme při výpočtu tak, že za y dosadíme nějakou pevnou hodnotu y_0 a tím získáme funkci pouze jedné proměnné $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Existuje-li $\varphi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$, tedy má-li funkce φ v bodě x_0 *derivaci*, pak funkce f má v bodě (x_0, y_0) *parciální derivaci podle proměnné x* a platí $\varphi'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$.

Při výpočtu parciální derivace funkce f podle y v bodě X postupujeme analogicky.

Toto byla definice parciálních derivací funkce f v konkrétním bodě X, nyní se zaměříme také na parciální derivace funkce na množině.

Definice 4 Nechť funkce f je definovaná na množině $D_f \subset \mathbb{R}^2$ a nechť $D_{f_x} \neq \emptyset$, $D_{f_x} \subset D_f$ je množina všech bodů $(x, y) \in D_f$, v nichž existuje vlastní parciální derivace $f'_x(x, y)$. Funkce dvou proměnných definovaná na D_{f_x} předpisem $(x, y) \longmapsto f'_x(x, y)$ se nazývá *parciální derivace funkce f podle proměnné x* a značí se f'_x nebo $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Nechť funkce f je definovaná na množině $D_f \subset \mathbb{R}^2$ a nechť $D_{f_y} \neq \emptyset$, $D_{f_y} \subset D_f$ je množina všech bodů $(x, y) \in D_f$, v nichž existuje vlastní parciální derivace $f'_y(x, y)$. Funkce dvou proměnných definovaná na D_{f_y} předpisem $(x, y) \longmapsto$ $\longmapsto f'_y(x, y)$ se nazývá *parciální derivace funkce f podle proměnné y* a značí se f'_y nebo $\frac{\partial f}{\partial y}$.

[7]

Parciální derivace používáme při výpočtech všech druhů extrémů funkcí dvou proměnných.

Poznámka 2 Díky tomu, že při určování parciálních derivací považujeme jednu proměnnou za konstantu a derivujeme tedy pouze vzhledem k jedné proměnné, můžeme při výpočtech používat stejná pravidla pro derivování jako u totálních (obyčejných) derivací funkcí jedné proměnné.

Věta 2 *Nechť funkce $f(x, y)$, $g(x, y)$ mají v daném bodě (x_0, y_0) parciální derivace $f'_x(x_0, y_0)$, $g'_x(x_0, y_0)$ podle proměnné x, pak také funkce $f(x, y) \pm g(x, y)$, $f(x, y) \cdot g(x, y)$ a $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ mají v tomto bodě parciální derivace podle x, ty vypočteme podle těchto pravidel:*

a) $(f + g)'_x(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) + g'_x(x_0, y_0)$;

b) $(f - g)'_x(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) - g'_x(x_0, y_0)$;

c) $(f \cdot g)'_x(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot g(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) \cdot g'_x(x_0, y_0)$;

d) $(c \cdot f)'_x(x_0, y_0) = c \cdot f'_x(x_0, y_0)$, *kde c je konstanta*;

e) $\left(\frac{f}{g}\right)'_x (x_0, y_0) = \frac{f'_x(x_0,y_0) \cdot g(x_0,y_0) - f(x,y) \cdot g'_x(x_0,y_0)}{g(x_0,y_0)^2}$, *pokud $g(x_0, y_0) \neq 0$.*

[4]

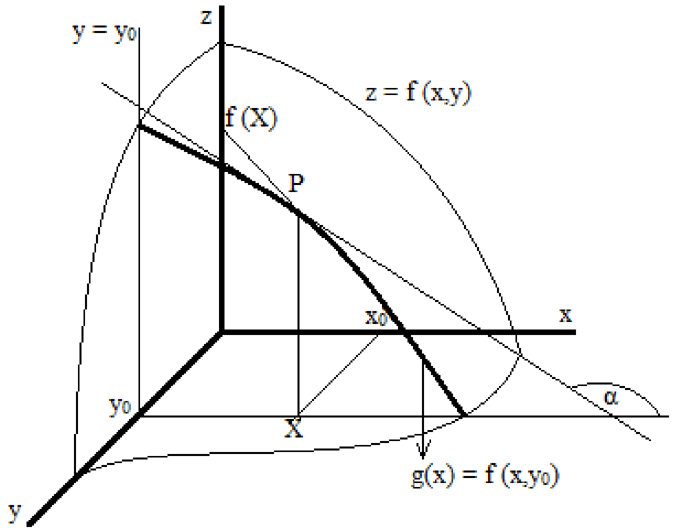
Obdobné vzorce platí pro parciální derivace podle proměnné y.

Poznámka 3 Funkce jedné proměnné je vždy spojitá v bodě, v němž má *vlastní derivaci*. Existence obou *parciálních derivací* v bodě (x_0, y_0) u funkce dvou proměnných nám ovšem spojitost nezaručuje, a to proto, že z parciálních derivací funkce dvou proměnných lze vyčíst pouze to, jak se funkce chová ve směrech, které jsou rovnoběžné s osami x a y (jak později uvidíme v gometrické interpretaci parciálních derivací). V jiných směrech se funkce může chovat jakkoli jinak.

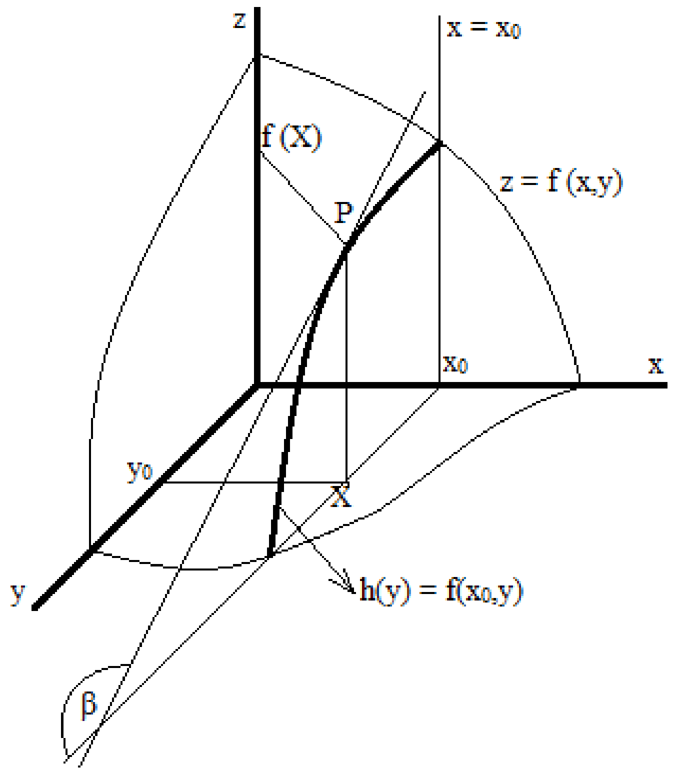
Geometrická interpretace parciálních derivací:

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce dvou proměnných x a y definovaná na okolí $\mathcal{U}(X)$ bodu $X = (x_0, y_0)$. Utvoříme funkci $g(x) = f(x, y_0)$ definovanou na množině takových bodů z $\mathcal{U}(X)$, které leží na přímce o rovnici $y = y_0$. Graf funkce $g(x)$ je průsečnice roviny $y = y_0$ s grafem funkce $z = f(x, y)$. Je to jakási křivka, která prochází bodem $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Sestrojíme tečnu této křivky v bodě $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, která leží v rovině $y = y_0$. Pro tangens úhlu α, který svírá tečna s kladným směrem osy x, platí, že je roven derivaci $\frac{\partial f(X)}{\partial x}$. (viz. obrázek 1.1)

Nechť $z = f(x, y)$ je funkce dvou proměnných x a y, definovaná na okolí $\mathcal{U}(X)$ bodu $X = (x_0, y_0)$. Utvoříme funkci $h(y) = f(x_0, y)$ definovanou na množině takových bodů z $\mathcal{U}(X)$, které leží na přímce o rovnici $x = x_0$. Graf funkce $h(y) = f(x_0, y)$ je průsečnice roviny $x = x_0$ s grafem funkce $z = f(x, y)$. Je to opět jakási křivka, která prochází bodem $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Sestrojíme tečnu této křivky v bodě $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, která leží v rovině $x = x_0$. Pro tangens úhlu β, který svírá tečna s kladným směrem osy y, platí, že je roven derivaci $\frac{\partial f(X)}{\partial y}$. (viz. obrázek 1.2)



Obrázek 1.1: Parciální derivace podle proměnné x.



Obrázek 1.2: Parciální derivace podle proměnné y.

Parciální derivace druhého řádu

Parciální derivace prvního řádu jsou opět funkce dvou proměnných, proto můžeme dále počítat jejich parciální derivace a tím získat parciální derivace druhého řádu.

Definice 5 Nechť f je funkce dvou proměnných x a y. Nechť Df_x je definičním oborem funkce f'_x. Existuje-li parciální derivace funkce f'_x podle proměnné x v bodě $(x_0, y_0) \in Df_x$, nazýváme tuto derivaci parciální derivací druhého řádu funkce f podle proměnné x v bodě (x_0, y_0) a značíme ji $f''_{xx}(x_0, y_0)$.

Toto platí analogicky také pro parciální derivace $f''_{yy}(x_0, y_0)$, $f''_{xy}(x_0, y_0)$ a $f''_{yx}(x_0, y_0)$.

[4]

Nyní vyslovíme Schwarzovu větu, která se nám možná teď jeví jako nedůležitá, ale v budoucích výpočtech zjistíme, že má v teorii extrémů funkcí dvou proměnných své opodstatnění.

Věta 3 (Schwarzova věta) *Jestliže smíšené parciální derivace $f''_{xy}(X)$, $f''_{yx}(X)$ existují na okolí $\mathcal{U}(X)$ a jsou spojité v bodě $X = (x_0, y_0)$, pak nutně jsou si rovny, tj. $f''_{xy}(X) = f''_{yx}(X)$.*

[4]

Kapitola 2

Teoreticko — praktická čáxt

2.1 Extrémy funkcí dvou proměnných

Nyní již známe všechen teoretický základ potřebný k tomu, abychom se mohli přesunout do teoreticko — praktických částí této bakalářské práce, které se budou zabývat jedním z nejdůležitějších bodů diferenciálního počtu, tedy hledáním extrémů funkcí dvou proměnných. Postupně projdeme lokální, vázané a konečně i globální extrémy funkcí dvou proměnných.

2.2 Lokální extrémy

Funkce $f(x, y)$ má na oblasti Ω *lokální extrém* v bodě $X \in \Omega$, pokud nabývá v tomto bodě buď *lokálního maxima* nebo *lokálního minima*. O jaké extrémy může jít, nám ukáže následující definice.

Definice 6 Řekneme, že funkce $f(x, y)$ má na oblasti Ω v bodě $X = (x_0, y_0) \in \Omega$

- *lokální maximum*, právě když existuje okolí $\mathcal{U}(X) \subseteq \Omega$, takové, že pro každý bod $(x, y) \in \mathcal{U}(X)$ platí $f(x, y) \leq f(X)$,
- *lokální minimum*, právě když existuje okolí $\mathcal{U}(X) \subseteq \Omega$, takové, že pro každý bod $(x, y) \in \mathcal{U}(X)$ platí $f(x, y) \geq f(X)$,
- *ostré lokální maximum*, právě když existuje okolí $\mathcal{U}(X) \subseteq \Omega$, takové, že pro každý bod $(x, y) \in \mathcal{U}^*(X)$ platí $f(x, y) < f(X)$,
- *ostré lokální minimum*, právě když existuje okolí $\mathcal{U}(X) \subseteq \Omega$, takové, že pro každý bod $(x, y) \in \mathcal{U}^*(X)$ platí $f(x, y) > f(X)$.

[4]

Poznámka 4 Z definice je zřejmé, že abychom bod X mohli považovat za lokální extrém, musí se jednat o *vnitřní bod* oblasti Ω, ze které tento bod uvažujeme.

Věta 4 (Fermatova věta) *Nechť funkce $f(x,y)$ má v bodě $X = (x_0, y_0)$ lokální extrém. Nechť má v tomto bodě parciální derivace $f'_x(X)$, $f'_y(X)$. Potom platí, že $f'_x(X) = f'_y(X) = 0$.*

[3]

Tato věta je *nutnou podmínkou* pro existenci lokálního extrému a plyne z ní, že má-li funkce $f(x,y)$ v bodě $X = (x_0, y_0)$ parciální derivace, které jsou jiné než nulové, pak v tomto bodě nemá lokální extrém.

Věta nám ovšem nezaručuje existenci lokálního extrému. Funkce může mít v bodě $X = (x_0, y_0)$ nulové spojité parciální derivace prvního řádu, a přesto v tomto bodě nenabývat lokálního maxima ani minima.

Definice 7 Bod X, ve kterém existují obě parciální derivace a platí, že $f'_x(X) = f'_y(X) = 0$, se nazývá *stacionární bod* funkce $f(x,y)$.

[4]

Poznámka 5 Extrémů funkce $f(x,y)$ může nabývat jak ve stacionárních bodech, tak také v bodech, kde jedna parciální derivace neexistuje a druhá je nulová, nebo v bodech, kde neexistuje ani jedna parciální derivace. O tom, zda má funkce ve stacionárních bodech lokální extrémy, ve většině případů rozhodneme pomocí *postačující podmínky* pro existenci lokálního extrému, kterou je následující věta.

Věta 5 *Nechť má funkce $f(x,y)$ na nějakém okolí stacionárního bodu X všechny parciální derivace druhého řádu a ty jsou v bodě X spojité, potom sestavíme matici*

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f''_{xx}(X) & f''_{xy}(X) \\ f''_{yx}(X) & f''_{yy}(X) \end{pmatrix}$$

a vypočteme determinanty

$$D_1 = \det\Big(f''_{xx}(X)\Big) = f''_{xx}(X), \qquad D_2 = \det H.$$

Pokud:

1) *$D_1 < 0$ a zároveň $D_2 > 0$, pak má f v X ostré lokální maximum,*

2) *$D_1 > 0$ a zároveň $D_2 > 0$, pak má f v X ostré lokální minimum,*

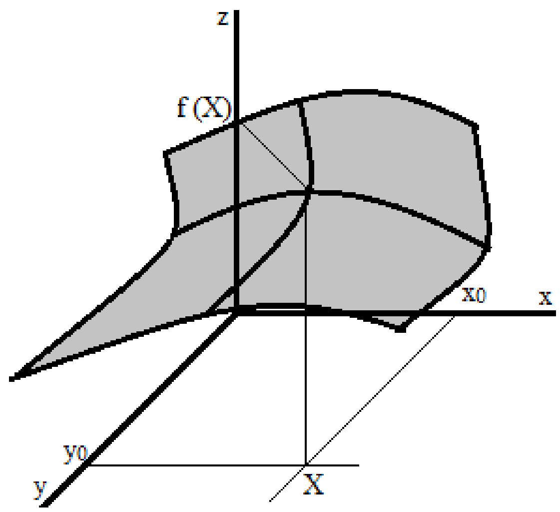
3) $D_2 \neq 0$ *a přitom neplatí ani jedna z předchozích možností, pak* f *nemá v* X *lokální extrém,*

4) $D_2 = 0$*, pak* f *může, ale nemusí mít v* X *lokální extrém, v tomto případě nelze pomocí této věty rozhodnout.*

[8]

Poznámka 6 Výše uvedená matice se nazývá *Hessova*[1], jejímu determinantu říkáme *Hessián*. Je to čtvercová matice (v našem případě matice typu 2×2), která je symetrická (protože smíšené parciální derivace $f''_{xy}(X)$ a $f''_{yx}(X)$ jsou si rovny — viz Schwarzova věta).

Poznámka 7 Pokud funkce f nemá ve stacionárním bodě X lokální maximum ani minimum (tedy pokud platí bod 3) předchozí věty), nazýváme tento bod *sedlový*, což znamená, že graf funkce má v okolí tohoto bodu tvar sedla, a proto funkce v tomto bodě nemůže nabývat žádného lokálního extrému. (viz obrázek 2.1)



Obrázek 2.1: Možný tvar funkce v okolí sedlového bodu X.

Je důležité si říci, podle jakých kritérií rozhodujeme o tom, zda funkce v nějakém bodě má či nemá lokální extrém.

[1]Podle jejího objevitele, kterým byl matematik Ludwig Hesse.

Jak vyšetřit body, ve kterých může nastat lokální extrém funkce dvou proměnných:

1) *Stacionární body:*

   - postačující podmínka pro existenci lokálního extrému
   - definice lokálního extrému (pokud platí, že druhé parciální derivace této funkce nejsou spojité)

2) *Body, kde neexistuje ani jedna parciální derivace,* nebo *kde jedna neexistuje a druhá je nulová:*

   - definice lokálního extrému

Nyní si popíšeme algoritmus postupu hledání lokálních maxim a minim.

Postup při hledání lokálních extrémů funkce dvou proměnných:

1) Určíme definiční obor funkce $f(x, y)$.

2) Vytvoříme parciální derivace funkce podle proměnných x a y a ty položíme rovny nule.

3) Mohou nastat 2 situace:

   - Existují obě parciální derivace, tedy dostaneme dvě rovnice o dvou neznámých x a y, jejich vyřešením získáme souřadnice stacionárních bodů (může být jeden, více i nekonečně mnoho). Pokud soustava nemá řešení, funkce nemá stacionární body.
   - Jedna nebo obě parciální derivace v některých bodech neexistují (druhá příslušná parciální derivace je nulová). Takové body vyšetříme později v kroku 7.

4) V případě, že existují stacionární body, vytvoříme parciální derivace funkce f druhého řádu, z těch pak sestrojíme Hessovu matici(viz Věta 5).

5) Dosadíme souřadnice stacionárních bodů do druhých parciálních derivací a následně pro každý stacionární bod určíme determinanty D_1 a D_2.

6) Dle definice postačující podmínky pro existenci lokálního extrému rozhodneme, zda funkce má či nemá v daném bodě extrém a o jaký extrém se jedná.

7) V bodech, ve kterých nelze podle postačující podmínky rozhodnout a v bodech, které nejsou stacionární, ale přesto v nich funkce může extrémů nabývat, rozhodneme o existenci a typu extrému pomocí definice lokálních extrémů.

2.2.1 Lokální extrémy — příklady

Ukažme si uvedený postup na příkladech. Úkol bude pro všechny příklady $1-10$ stejný, a to najít lokální extrémy funkce $f(x,y)$.

Příklad 1

$$f(x,y) = 2x^2 + (1-y)^2$$

Řešení:

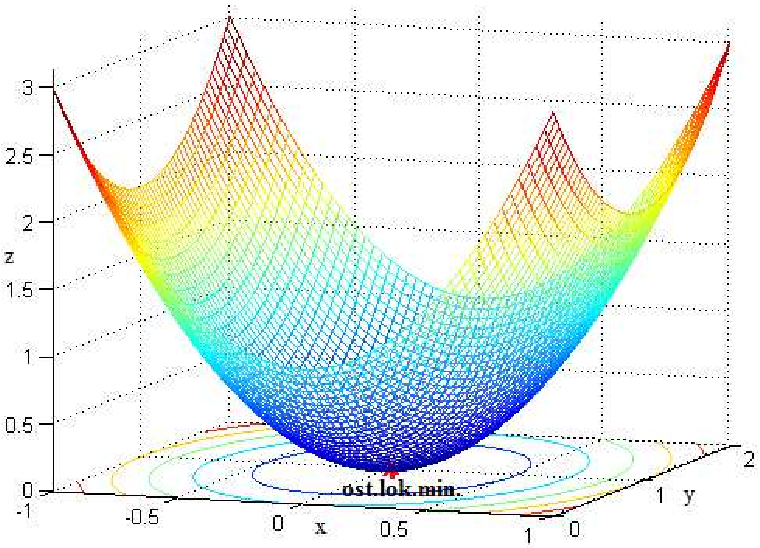
1) $D_f = \mathbb{R}^2$

2) Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y-2$ položíme rovny nule. Dostáváme soustavu rovnic
$$4x = 0, \qquad 2y-2=0.$$
Ze soustavy je zřejmé, že $x=0$ a $y=1$, funkce má tedy jeden stacionární bod $P_0 = (0,1)$.
Obě parciální derivace existují ve všech bodech Df, tudíž lokální extrém může nastat pouze ve stacionárním bodě.

3) Spočítáme parciální derivace funkce f druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0,$$
$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) Determinant $D_2 = 8 > 0$, funkce f má tedy v bodě P lokální extrém, a protože $D_1 = 4 > 0$, je to ostré lokální minimum.

Závěr: Funkce $f(x,y) = 2x^2 + (1-y)^2$ má ostré lokální minimum v bodě $P_0 = (0,1)$ a jeho hodnota je $f(P) = 0$.



Obrázek 2.2: Graf funkce $f(x, y) = 2x^2 + (1 - y)^2$.

Příklad 2

$$f(x, y) = (x - y + 1)^2$$

Řešení:

1) $D_f = \mathbb{R}^2$

2) Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y + 1)$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(x - y + 1)$ položíme rovny nule, dostáváme soustavu rovnic

$$2(x - y + 1) = 0, \qquad -2(x - y + 1) = 0.$$

Z první rovnice vyjádříme $x = y - 1$, dosazením do druhé získáváme $0 = 0$. Je tedy zřejmé, že stacionárních bodů je nekonečně mnoho a leží na přímce $x = y - 1$.
V žádném dalším bodě extrém nastat nemůže.

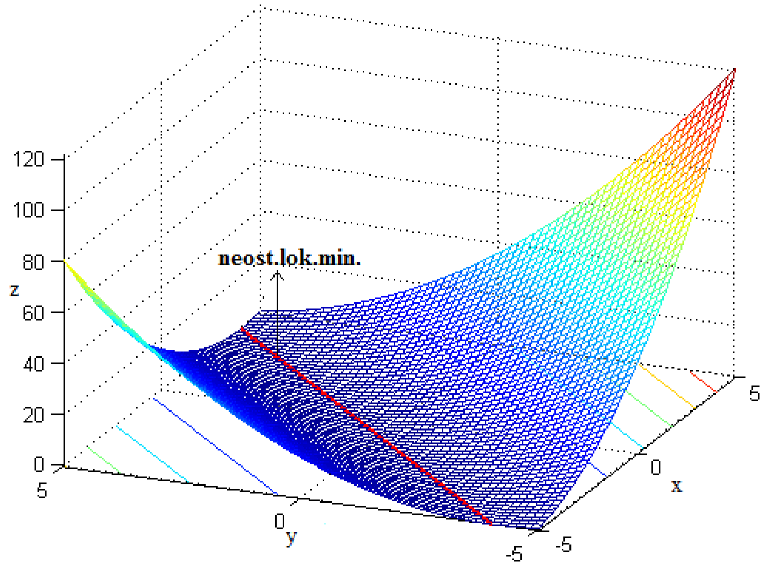
3) Spočítáme parciální derivace funkce f druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2,$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) Determinant $D_2 = 0$, tímto způsobem tedy nelze o existenci extrému rozhodnout, pomůže nám definice lokálních extrémů.
   Z předpisu funkce vidíme, že její funkční hodnota bude vždy nezáporné číslo, jelikož $H_f = \mathbb{R}^+$. Je tedy zřejmé, že lokální minimum bude v bodě, kde $f(x, y) = 0$. Do funkčního předpisu $(x-y+1)^2$ dosadíme výraz $x = y-1$, tím získáváme $f(x, y) = 0$, funkce f tedy nabývá ve všech svých stacionárních bodech neostrého lokálního minima.

Závěr: Funkce $f(x, y) = (x - y + 1)^2$ má neostré lokální minimum ve všech bodech přímky $x = y - 1$ a jeho hodnota je $f(y - 1, y) = 0$.



Obrázek 2.3: Graf funkce $f(x, y) = (x - y + 1)^2$.

Příklad 3

$$f(x,y) = xy - \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$

Řešení:

1) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0, y \neq 0\}$

2) Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{50}{x^2}$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{20}{y^2}$ položíme rovny nule, dostáváme soustavu rovnic

$$y + \frac{50}{x^2} = 0, \qquad x - \frac{20}{y^2} = 0.$$

Z první rovnice je zřejmé, že $y = -\frac{50}{x^2}$, to dosadíme do druhé, dostáváme

$$x\left(1 - \frac{x^3}{125}\right) = 0,$$

jejíž řešení jsou $x_1 = 0$ (v bodech s x - ovou souřadnicí nulovou ovšem funkce není definovaná) a $x_2 = 5$. Po dosazení do rovnice $y = -\frac{50}{x^2}$ dostaneme souřadnice jediného stacionárního bodu $P_0 = (5, -2)$. V žádném dalším bodě extrém nastat nemůže.

3) Spočítáme parciální derivace funkce f druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{100}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{40}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1,$$

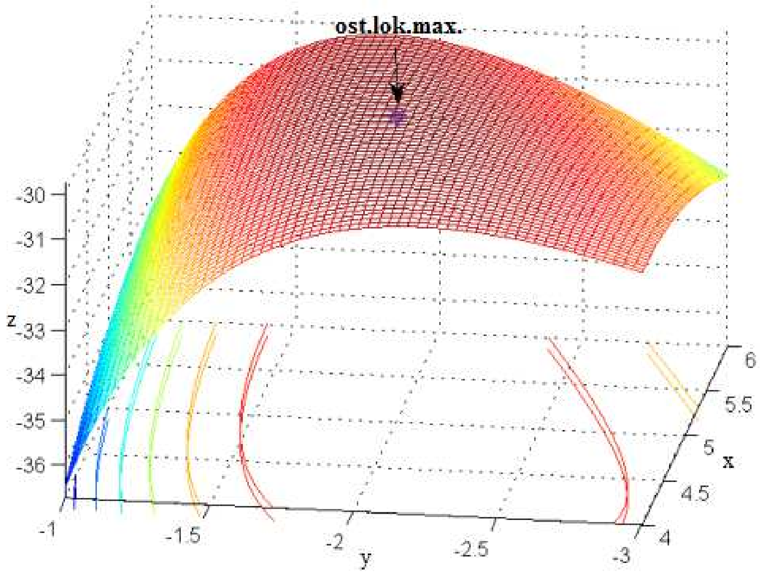
$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\frac{100}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{y^3} \end{pmatrix}.$$

4) Pro bod P_0 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $D_2 = 3 > 0$, funkce f má tedy v tomto bodě lokální extrém, a protože

$$D_1 = -\frac{4}{5} < 0,$$

je to ostré lokální maximum.

Závěr: Funkce $f(x,y) = xy - \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ má ostré lokální maximum v bodě $P_0 = (5, -2)$ a jeho hodnota je $f(P) = -30$.



Obrázek 2.4: Graf funkce $f(x,y) = xy - \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$.

Příklad 4

$$f(x,y) = x^3 + 8xy^2 + 14x^2 + 26y^2$$

Řešení:

1) $D_f = \mathbb{R}^2$

2) Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 8y^2 + 28x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 16xy + 52y$ položíme rovny nule, dostáváme soustavu rovnic

$$3x^2 + 8y^2 + 28x = 0, \qquad 16xy + 52y = 0.$$

Druhou rovnici převedeme na tvar $4y(4x+13) = 0$, jejímž řešením je buď $y = 0$, nebo $x = -\frac{13}{4}$. Dosazením hodnoty $y = 0$ do první rovnice získáváme dvě příslušná řešení $x_1 = 0$ a $x_2 = -\frac{28}{3}$. Dosazením hodnoty $x = -\frac{13}{4}$ do první rovnice získáváme dvě příslušná řešení $y_1 = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{949}{2}}$ a $y_2 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{949}{2}}$. Funkce f má tedy čtyři stacionární body $P_0 = (0,0)$, $P_1 = \left(-\frac{28}{3}, 0\right)$, $P_2 = \left(-\frac{13}{4}, -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{949}{2}}\right)$, $P_3 = \left(-\frac{13}{4}, \frac{1}{8}\sqrt{\frac{949}{2}}\right)$.

3) Spočítáme parciální derivace funkce f druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 28, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 16x + 52, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 16y,$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 6x+28 & 16y \\ 16y & 16x+52 \end{pmatrix}.$$

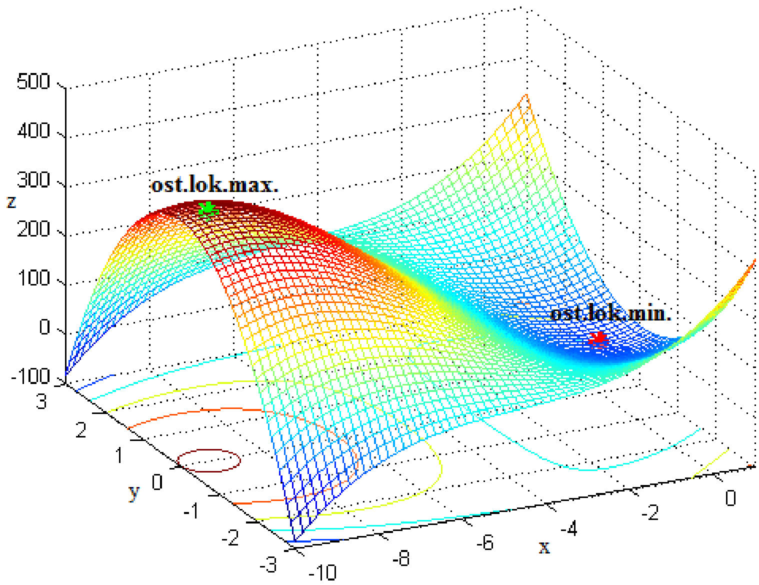
4) Pro bod P_0 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 28 & 0 \\ 0 & 52 \end{pmatrix}$, $D_2 = 1456 > 0$, funkce f má tedy v tomto bodě lokální extrém a protože $D_1 = 28 > 0$, je to ostré lokální minimum.

   Pro bod P_1 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -28 & 0 \\ 0 & -\frac{292}{3} \end{pmatrix}$, $D_2 = 2725,3 > 0$, funkce f má tedy v tomto bodě lokální extrém a protože $D_1 = -28 < 0$, je to ostré lokální maximum.

   Pro bod P_2 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 8,5 & -2\sqrt{\frac{949}{2}} \\ -2\sqrt{\frac{949}{2}} & 0 \end{pmatrix}$, $D_2 = -1898 <$ < 0, funkce f tedy v tomto bodě nemá lokální extrém, je to sedlový bod.

   Pro bod P_3 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 8,5 & 2\sqrt{\frac{949}{2}} \\ 2\sqrt{\frac{949}{2}} & 0 \end{pmatrix}$, $D_2 = -1898 < 0$, funkce f tedy v tomto bodě nemá lokální extrém, je to sedlový bod.

Závěr: Funkce $f(x,y) = x^3 + 8xy^2 + 14x^2 + 26y^2$ má v bodě $P_0 = (0,0)$ ostré lokální minimum a jeho hodnota je $f(P_0) = 0$, v bodě $P_1 = \left(-\frac{28}{3}, 0\right)$ ostré lokální maximum v bodě a jeho hodnota je $f(P_1) = \frac{10976}{27}$. V bodech $P_2 = \left(-\frac{13}{4}, -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{949}{2}}\right)$ a $P_3 = \left(-\frac{13}{4}, \frac{1}{8}\sqrt{\frac{949}{2}}\right)$ má funkce $f(x,y)$ sedlové body.



Obrázek 2.5: Graf funkce $f(x, y) = x^3 + 8xy^2 + 14x^2 + 26y^2$.

Příklad 5

$$f(x, y) = (2x - x^2)(y^2 - 5y)$$

Řešení:

1) $D_f = \mathbb{R}^2$

2) Funkci roznásobíme na tvar $f(x, y) = 2xy^2 - 10xy - x^2y^2 + 5x^2y$.

3) Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 - 10y - 2xy^2 + 10xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy - 10x - 2x^2y + 5x^2$ položíme rovny nule, dostáváme soustavu rovnic

$$2y^2 - 10y - 2xy^2 + 10xy = 0, \qquad 4xy - 10x - 2x^2y + 5x^2 = 0.$$

První rovnici odpovídají dvě řešení pro y a to $y_1 = 0$ a $y_2 = 5$ (za předpokladu, že $x \neq 1$). Dosazením y_1 do druhé rovnice dostáváme souřadnice dvou stacionárních bodů a to $P_0 = (0, 0)$ a $P_1 = (2, 0)$. Dosazením y_2 do druhé rovnice dostáváme souřadnice dalších dvou stacionárních bodů a to $P_2 = (0, 5)$ a $P_3 = (2, 5)$. Nyní ještě vyšetříme případ, kdy $x = 1$, to dosadíme do druhé rovnice a získáme tak poslední stacionární bod $P_4 = \left(1, \frac{5}{2}\right)$. V jiných bodech funkce extrém mít nemůže.

4) Spočítáme parciální derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y^2 + 10y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x - 2x^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4y - 10 - 4xy + 10x,$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -2y^2 + 10y & 4y - 10 - 4xy + 10x \\ 4y - 10 - 4xy + 10x & 4x - 2x^2 \end{pmatrix}.$$

5) Pro bod P_0 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$, $D_2 = -100 < 0$, funkce f tedy v tomto bodě nemá lokální extrém, jde o sedlový bod.

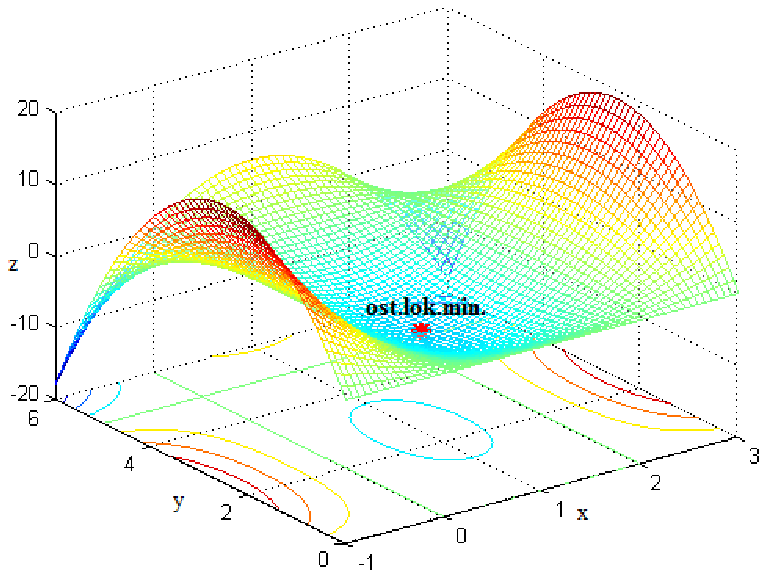
   Pro bod P_1 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$, $D_2 = -100 < 0$, funkce f tedy v tomto bodě nemá lokální extrém, jde o sedlový bod.

   Pro bod P_2 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$, $D_2 = -100 < 0$, funkce f tedy v tomto bodě nemá lokální extrém, jde o sedlový bod.

   Pro bod P_3 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$, $D_2 = -100 < 0$, funkce f tedy v tomto bodě nemá lokální extrém, jde o sedlový bod.

   Pro bod P_4 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 12,5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D_2 = 25 > 0$, funkce f tedy v tomto bodě má lokální extrém, a protože $D_1 = 12,5 > 0$, jde o ostré lokální minimum.

Závěr: Funkce $f(x, y) = (2x - x^2)(y^2 - 5y)$ má ostré lokální minimum v bodě $P_4 = (1, \frac{5}{2})$ a jeho hodnota je $f(P_4) = -\frac{25}{4}$. V ostatních bodech funkce lokální extrémy nemá.



Obrázek 2.6: Graf funkce $f(x, y) = (2x - x^2)(y^2 - 5y)$.

Příklad 6

$$f(x,y) = 1 - (x^2 + 2y - 4)^2$$

Řešení:

1) $D_f = \mathbb{R}^2$

2) Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x} = -4x^3 - 8xy + 16x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4x^2 - 8y + 16$ položíme rovny nule, dostáváme soustavu rovnic

$$-4x^3 - 8xy + 16x = 0, \qquad -4x^2 - 8y + 16 = 0.$$

Druhou rovnici vydělíme -4, dostaneme y ve tvaru $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$, takto vyjádřené y dosadíme do první rovnice, která pak vyjde $0 = 0$, funkce má tedy nekonečně mnoho stacionárních bodů ležících na parabole $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$.

3) Spočítáme parciální derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x^2 - 8y + 16, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -8, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -8x,$$

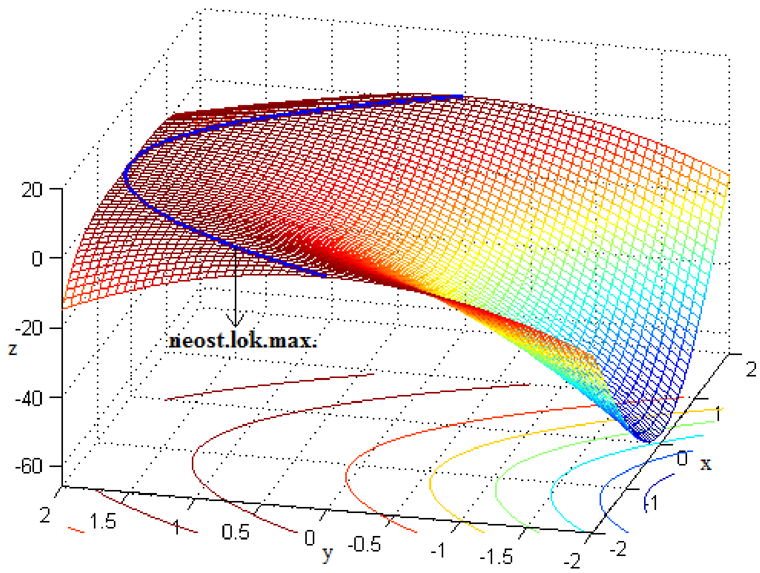
$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -12x^2 - 8y + 16 & -8x \\ -8x & -8 \end{pmatrix}.$$

4) Rovnici paraboly, tedy $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ dosadíme do druhých parciálních derivací a dostaneme tak matici

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -8x^2 & -8x \\ -8x & -8 \end{pmatrix},$$

$D_2 = 0$, tímto způsobem tedy nelze o existenci rozhodnout, pomůže nám definice lokálního extrému.
Z tvaru funkce je zřejmé, že její největší funkční hodnota je 1, jíž funkce bude nabývat v bodech splňujících rovnici $x^2 + 2y - 4 = 0$. To znamená, že funkce své největší funkční hodnoty nabývá právě ve stacionárních bodech ležících na parabole $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$.

Závěr: Funkce $f(x,y) = 1 - (x^2 + 2y - 4)^2$ má neostré lokální maximum ve všech bodech paraboly $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ a jeho hodnota je $f(x, 2 - \frac{1}{2}x^2) = 1$.



Obrázek 2.7: Graf funkce $f(x, y) = 1 - (x^2 + 2y - 4)^2$.

Příklad 7

$$f(x, y) = e^{3x}(y^2 - 2xy + 3x^2)$$

Řešení:

1) $D_f = \mathbb{R}^2$

2) Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{3x}(9x^2 + 6x - 6xy + 3y^2 - 2y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{3x}(2y - 2x)$ položíme rovny nule, dostáváme soustavu rovnic

$$e^{3x}(9x^2 + 6x - 6xy + 3y^2 - 2y) = 0, \qquad e^{3x}(2y - 2x) = 0.$$

Jelikož e^{3x} nikdy nebude rovno nule, můžeme tuto soustavu převést na tvar

$$9x^2 + 6x - 6xy + 3y^2 - 2y = 0, \qquad 2y - 2x = 0.$$

Z druhé rovnice je zřejmé, že $x = y$, to dosadíme do rovnice první, po jejím vypočtení získáme souřadnice dvou stacionárních bodů $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

3) Spočítáme parciální derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{3x}(27x^2 + 36x - 18xy + 9y^2 - 12y + 6),$$

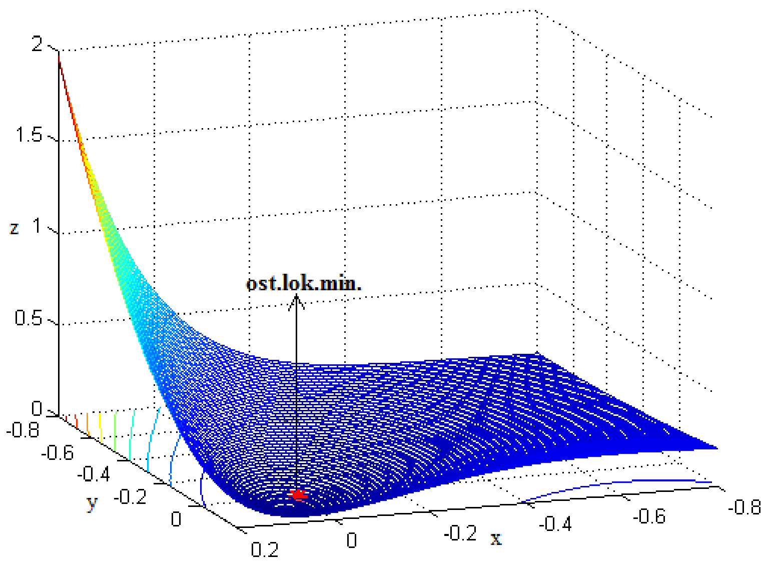
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{3x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{3x}(6y - 6x - 2),$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} e^{3x}(9y^2 - 18xy + 27x^2 - 12y + 36x + 6) & e^{3x}(6y - 6x - 2) \\ e^{3x}(6y - 6x - 2) & 2e^{3x} \end{pmatrix}.$$

4) Pro bod P_0 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $D_2 = 8 > 0$, funkce f má tedy v tomto bodě lokální extrém a protože $D_1 = 6 > 0$, je to ostré lokální minimum.
Pro bod P_1 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e^2} & -\frac{2}{e^2} \\ -\frac{2}{e^2} & \frac{2}{e^2} \end{pmatrix}$, $D_2 = -\frac{8}{e^4} < 0$, funkce f tedy v tomto bodě extrém nemá, jde o sedlový bod.

Závěr: Funkce $f(x,y) = e^{3x}(y^2 - 2xy + 3x^2)$ má ostré lokální minimum v bodě $P_0 = (0,0)$ a jeho hodnota je $f(P_0) = 0$. V bodě $P_1 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ funkce lokální extrém nemá.



Obrázek 2.8: Graf funkce $f(x,y) = e^{3x}(y^2 - 2xy + 3x^2)$.

Příklad 8

$$f(x,y) = (2x+2y)e^{-x^2-y^2}$$

Řešení:

1) $D_f = \mathbb{R}^2$

2) Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x^2-y^2}(2-4x^2-4xy)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x^2-y^2}(2-4y^2-4xy)$ položíme rovny nule. Výraz $e^{-x^2-y^2}$ bude vždy kladný pro libovolný bod definičního oboru, stačí proto, když bude platit systém rovnic

$$(2-4x^2-4xy) = 0, \quad (2-4y^2-4xy) = 0.$$

Tyto rovnice od sebe odečteme a zjistíme tak, že $x^2 = y^2$, $|x| = |y|$, tedy $x = \pm y$.
Po dosazení $x = y$ do první rovnice dostáváme $y_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$, tedy souřadnice prvních dvou stacionárních bodů jsou $P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
Po dosazení $x = -y$ do první rovnice dostáváme nerovnici $2 \neq 0$, jiné stacionární body tedy neexistují a v jiných než stacionárních bodech funkce extrémů nabývat nebude.

3) Spočítáme derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x^2-y^2}(8x^3 + 8x^2y - 12x - 4y),$$

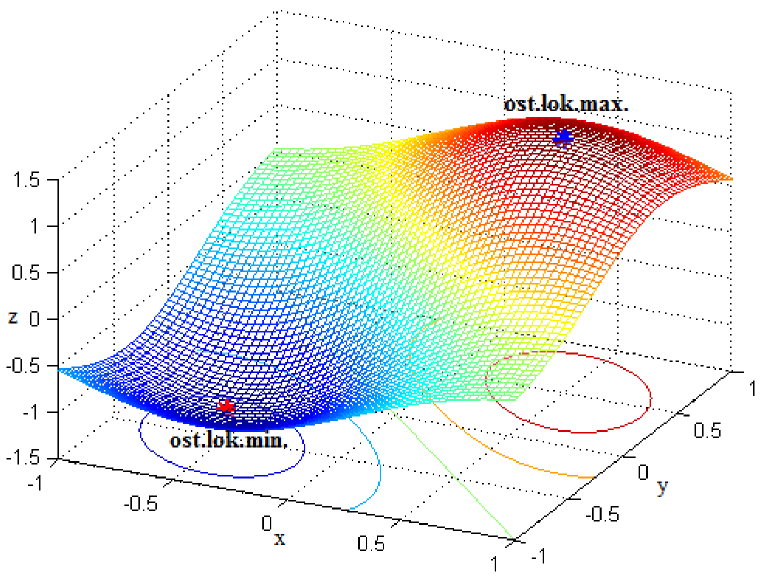
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-x^2-y^2}(8y^3 + 8xy^2 - 4x - 12y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{-x^2-y^2}(8x^2y + 8xy^2 - 4x - 4y),$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} e^{-x^2-y^2}(8x^3 + 8x^2y - 12x - 4y) & e^{-x^2-y^2}(8x^2y + 8xy^2 - 4x - 4y) \\ e^{-x^2-y^2}(8x^2y + 8xy^2 - 4x - 4y) & e^{-x^2-y^2}(8y^3 + 8xy^2 - 4x - 12y) \end{pmatrix}.$$

4) Pro bod P_0 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -6e^{-\frac{1}{2}} & -2e^{-\frac{1}{2}} \\ -2e^{-\frac{1}{2}} & -6e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$, $D_2 = \frac{32}{e} > 0$, funkce f má tedy v tomto bodě lokální extrém a protože $D_1 = -6e^{-\frac{1}{2}} < 0$, je to ostré lokální maximum.
Pro bod P_1 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 6e^{-\frac{1}{2}} & 2e^{-\frac{1}{2}} \\ 2e^{-\frac{1}{2}} & 6e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$, $D_2 = \frac{32}{e} > 0$, funkce f má tedy v tomto bodě lokální extrém a protože $D_1 = 6e^{-\frac{1}{2}} > 0$, je to ostré lokální minimum.

Závěr: Funkce $f(x,y) = (2x + 2y)e^{-x^2-y^2}$ má ostré lokální maximum v bodě $P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a jeho hodnota je $f(P_0) = 2e^{-\frac{1}{8}}$. Ostré lokální minimum má funkce $f(x,y)$ v bodě $P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ a jeho hodnota je $f(P_2) = -2e^{-\frac{1}{8}}$.



Obrázek 2.9: Graf funkce $f(x,y) = (2x + 2y)e^{-x^2-y^2}$.

Příklad 9

$$f(x,y) = \sqrt[3]{(1-x^2)^2}\,\sqrt[3]{(1-y^2)^2}$$

Řešení:

1) $D_f = \mathbb{R}^2$

2) Vytvoříme parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-4x\sqrt[3]{(1-y^2)^2}}{3\sqrt[3]{1-x^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4y\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}{3\sqrt[3]{1-y^2}}$$

a položíme je rovny nule, získáme tak soustavu rovnic

$$\frac{-4x\sqrt[3]{(1-y^2)^2}}{3\sqrt[3]{1-x^2}} = 0$$

$$\frac{-4y\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}{3\sqrt[3]{1-y^2}} = 0.$$

3) Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ jsou nulové zároveň pouze v bodě $P_0 = (0,0)$.

4) Spočítáme parciální derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{4(x^2-3)\sqrt[3]{(1-y^2)^2}}{9\sqrt[3]{(1-x^2)^4}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4(y^2-3)\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}{9\sqrt[3]{(1-y^2)^4}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{16xy}{9\sqrt[3]{1-x^2}\,\sqrt[3]{1-y^2}},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{4(x^2-3)\sqrt[3]{(1-y^2)^2}}{9\sqrt[3]{(1-x^2)^4}} & \frac{16xy}{9\sqrt[3]{1-x^2}\,\sqrt[3]{1-y^2}} \\ \frac{16xy}{9\sqrt[3]{1-x^2}\,\sqrt[3]{1-y^2}} & \frac{4(y^2-3)\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}{9\sqrt[3]{(1-y^2)^4}} \end{pmatrix}.$$

5) Pro bod P_0 získáme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$, $D_2 = \frac{16}{9} > 0$, funkce f má tedy v tomto bodě lokální extrém a protože $D_1 = -\frac{4}{3} < 0$, je to ostré lokální maximum.

6) Z tvaru derivací vidíme, že neexistují ve všech bodech D_f, tedy, že

$$D(f'_x) = \mathbb{R}^2 - \{(x, y); x = \pm 1\}, \qquad D(f'_y) = \mathbb{R}^2 - \{(x, y); y = \pm 1\}.$$

Derivace $f'_x = 0$ v bodech přímky $y = \pm 1$, ale derivace f'_y v bodech této přímky neexistuje.
Derivace $f'_y = 0$ v bodech přímky $x = \pm 1$, ale derivace f'_x v bodech této přímky neexistuje.

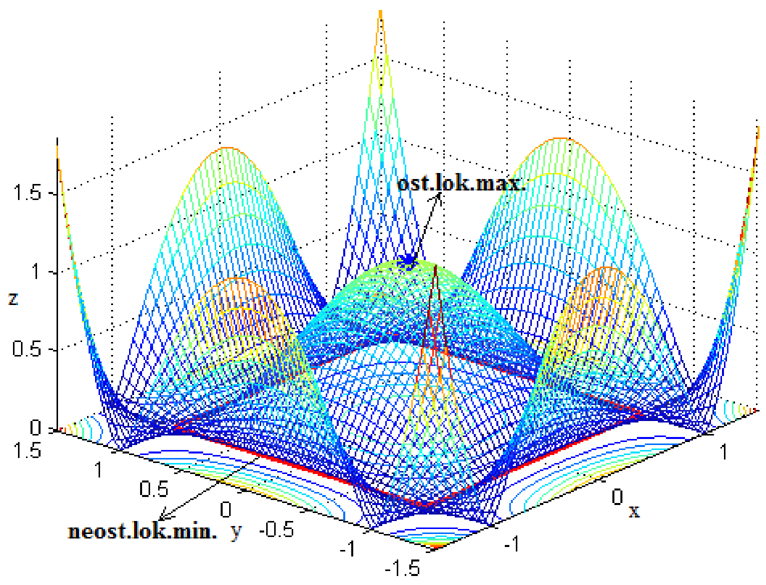
7) Extrémy určíme podle definice v bodech, kde neexistuje ani jedna parciální derivace, případně jedna neexistuje a druhá je nulová — v tomto případě jsou to body přímek $x = \pm 1$ a $y = \pm 1$ a body $P_1 = (-1, -1)$,$P_2 = (-1, 1)$,$P_3 = (1, -1)$,$P_4 = (1, 1)$.

Z předpisu funkce je zřejmé, že $f(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in D_f$.
Platí:

$$f(\pm 1, y) = 0 \leq f(x, y),$$
$$f(x, \pm 1) = 0 \leq f(x, y),$$
$$f(P_1) = 0 \leq f(x, y).$$
$$f(P_2) = 0 \leq f(x, y).$$
$$f(P_3) = 0 \leq f(x, y).$$
$$f(P_4) = 0 \leq f(x, y).$$

8) Z definice lokálních extrémů je tedy zřejmé, že funkce $f(x, y)$ nabývá v bodech $(\pm 1, y)$, $(x, \pm 1)$, (P_1), (P_2), (P_3), (P_4) lokálního extrému a sice neostrého lokálního minima.

Závěr: Funkce $f(x, y) = \sqrt[3]{(1 - x^2)^2}\sqrt[3]{(1 - y^2)^2}$ má v bodě $P_0 = (0, 0)$ ostré lokální maximum a jeho hodnota je $f(P_0) = 1$ a neostré lokální minimum ve všech bodech přímek $x = \pm 1$ a $y = \pm 1$ a jeho hodnota je $f(\pm 1, y) = 0$, $f(x, \pm 1) = 0$.



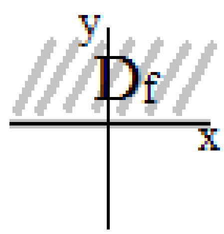
Obrázek 2.10: Graf funkce $f(x, y) = \sqrt[3]{(1-x^2)^2}\sqrt[3]{(1-y^2)^2}$.

Příklad 10

$$f(x, y) = 2x\sqrt{y} + x^2 - y - 6x + 3$$

Řešení:

1) Graficky znázorníme definiční obor této funkce:



Obrázek 2.11: Definiční obor funkce $f(x, y) = 2x\sqrt{y} + x^2 - y - 6x + 3$.

2) Vytvoříme parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sqrt{y} + 2x - 6$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{2\sqrt{y}} - 1$. Z tvaru $f'y$ vidíme, že neexistuje v bodech přímky $y = 0$.

3) Vyšetříme, zda má funkce stacionární body. Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sqrt{y} + 2x - 6, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{2\sqrt{y}} - 1$$

položíme rovny nule, dostaneme tak soustavu rovnic

$$2\sqrt{y} + 2x - 6 = 0$$

$$\frac{2x}{2\sqrt{y}} - 1 = 0.$$

Po úpravě druhé rovnice zjistíme, že $x = \sqrt{y}$, to dosadíme do první rovnice a získáme tak souřadnice jediného stacionárního bodu $P_0 = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$.

4) Spočítáme parciální derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{x}{2y\sqrt{y}},$$

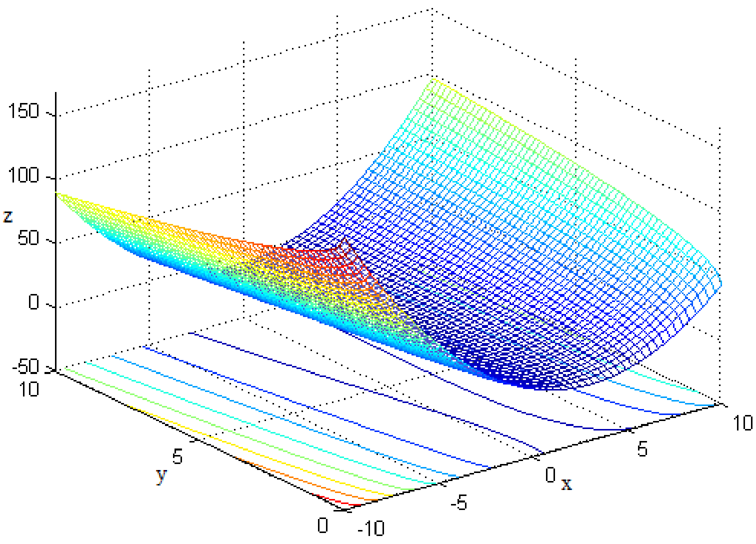
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} & -\frac{x}{2y\sqrt{y}} \end{pmatrix}.$$

5) Pro bod P_0 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$, $D_2 = -\frac{5}{9} < 0$, funkce f tedy v tomto bodě nemá lokální extrém, je to sedlový bod.

6) Vyšetření nestacionárních bodů:
Z tvaru derivace $f'x$ je zřejmé, že $f'x = 0$ v bodě $P_1 = (3, 0)$, $f'y$ v tomto bodě neexistuje, tento bod bychom tedy mohli podezřívat z existence lokálního extrému, ale neuděláme to, jelikož bod P_1 je hraniční, nikoli vnitřní bod definičního oboru a v těchto bodech již nevyšetřujeme lokální, nýbrž globální extrémy a těmi se budeme zabývat později.

Závěr: Funkce $f(x, y) = 2x\sqrt{y} + x^2 - y - 6x + 3$ nemá žádný lokální extrém.

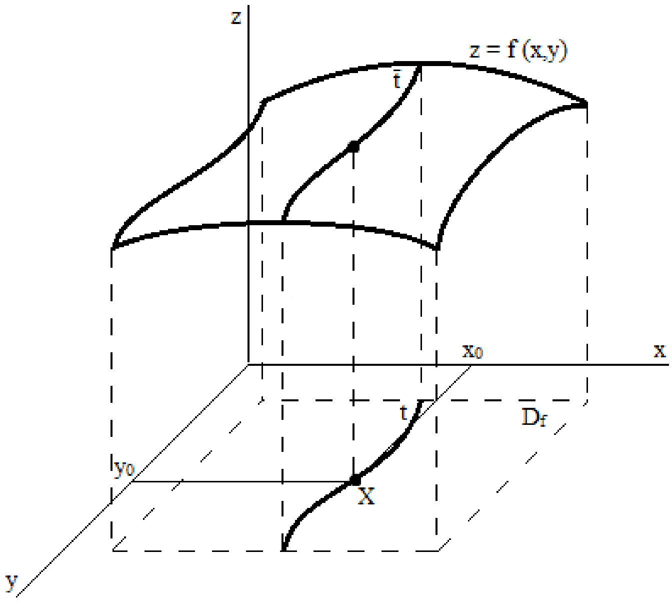


Obrázek 2.12: Graf funkce $f(x, y) = 2x\sqrt{y} + x^2 - y - 6x + 3$.

2.3 Vázané extrémy

Další rozsáhlejší kapitolou, jejíž příklady budou trochu náročnější na výpočet, jsou tzv. *vázané lokální extrémy funkcí dvou proměnných*. Od lokálních se liší tím, že se hledají pouze na množině M, která je vymezena nějakou podmínkou (vazbou).

Geometrická interpretace vázaného extrému:



Popis obrázku: Je dána funkce f na $D_f \subset \mathbb{R}^2$. M označuje množinu bodů (x, y) z D_f, jejichž souřadnice vyhovují rovnici $g(x, y) = 0$, zapisujeme

$$M = \{(x, y) \in D_f; g(x, y) = 0\}.$$

Množina M je na obrázku reprezentována křivkou t ležící v rovině (xy). Graf funkce f definované na množině M je prostorová křivka $\bar{t}$. Body, jež na křivce $\bar{t}$ mají největší (resp. nejmenší) z - ovou souřadnici, jsou *lokální maxima* (resp.*minima*) funkce f na množině M.

Naším úkolem v této kapitole bude najít vázané lokální extrémy funkce f při zadané množině M. Rovnici určující množinu M nazýváme *vazební podmínkou*, zkráceně *vazbou*.

Definice 8 Nechť $M = \{(x, y) \in D_f; g(x, y) = 0\}$.

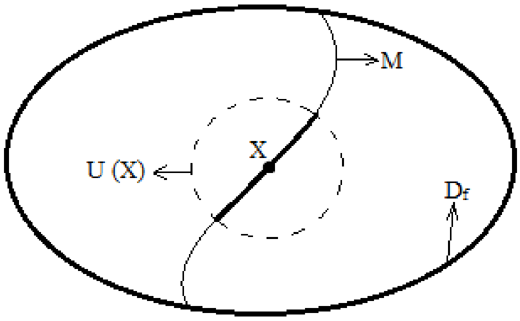
- Funkce f má v bodě $X = (x_0, y_0)$ *vázané lokální maximum* při vazbě $g(x,y) = 0$, pokud existuje okolí $\mathcal{U}(X)$ tak, že

$$f(x,y) \leq f(X) \quad \forall \quad (x,y) \in \mathcal{U}(X) \cap M.$$

- Funkce f má v bodě $X = (x_0, y_0)$ *vázané lokální minimum* při vazbě $g(x,y) = 0$, pokud existuje okolí $\mathcal{U}(X)$ tak, že

$$f(x,y) \geq f(X) \quad \forall \quad (x,y) \in \mathcal{U}(X) \cap M.$$

Pokud nerovnost mezi funkčními hodnotami $f(x,y)$ a $f(X)$ bude ostrá, budeme mluvit o *ostrém vázaném lokálním maximu* (resp. *minimu*).



Obrázek 2.13: Grafické znázornění Definice 8.

Nadále budeme předpokládat, že funkce $f(x,y)$ i $g(x,y)$ jsou vždy dvakrát diferencovatelné v bodech, o kterých bude řeč.
Je zřejmé, že podmínka $g(x,y) = 0$ již silně omezila obě proměnné x a y a určila, jakou mezi sebou mají závislost. Nemůžeme tedy libovolně volit x i y. Jakmile zvolíme např. $x = x_1$, za y pak můžeme brát pouze ty hodnoty, které vyhovují rovnici $g(x_1, y) = 0$.

Pokud by každému x rovnice $g(x,y) = 0$ přiřadila pouze jediné y, byla by touto rovnicí určena funkce $y = \varphi(x)$. Jestliže známe takovouto funkci, snadno najdeme vyjádření pro dílčí funkci určenou funkcí $f(x,y)$ na množině M, které bude $F(x) = f[x, \varphi(x)]$. Je to funkce jedné proměnné, jejíž lokální extrémy již nalézt umíme.

Toto analogicky platí v případě, pokud by rovnice $g(x,y) = 0$ přiřadila každému y pouze jediné x.

Jestliže vazbou $g(x,y) = 0$ není určena funkce $y = \varphi(x)$ (popř. $x = \psi(y)$), je třeba použít tzv. *Lagrangeovy metody neurčitých koeficientů* opírající se o dvě následující pomocné věty:

Věta 6 (První lemma) *Nechť $X = (x_0, y_0)$ je bod, ve kterém nastává lokální extrém funkce $z = f(x, y)$ vázaný podmínkou $g(x, y) = 0$. Nechť jsou dále splněny tyto dvě podmínky:*

a) *Platí vztah $|g'_x(X)| + |g'_y(X)| > 0$.*

b) *Na okolí $\mathcal{U}(X)$ jsou obě funkce $f(x, y)$, $g(x, y)$ spojitě diferencovatelné.*

Pak existuje číslo λ (zvané *Lagrangeův multiplikátor*), *pro které platí*

$$f'_x(x_0, y_0) + \lambda g'_x(x_0, y_0) = 0 \tag{2.1}$$
$$f'_y(x_0, y_0) + \lambda g'_y(x_0, y_0) = 0 \tag{2.2}$$
$$g(x_0, y_0) = 0. \tag{2.3}$$

[4]

Levé strany rovnic (2.1) a (2.2) dostaneme jako parciální derivace podle proměnných x a y funkce

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

což je *Lagrangeova funkce.*

Poznámka 8 Z předchozí věty je zřejmé, že bod $X = (x_0, y_0)$ podezřelý z vázaného extrému je třeba hledat nejen mezi body vyhovujícími soustavě rovnic z této věty, ale také mezi body, které vyhovují rovnici $g(x, y) = 0$ při neplatnosti alespoň jedné z podmínek této věty.

Věta 7 *Nechť čísla x_0, y_0, λ_0 představují řešení soustavy rovnic z Prvního lemma (Věta 6). Má-li Lagrangeova funkce*

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

v bodě $X = (x_0, y_0)$ lokální extrém při uvedeném čísle λ_0, pak funkce $z = f(x, y)$ má v bodě X extrém vázaný podmínkou $g(x, y) = 0$.

[4]

Poznámka 9 Ne v každém bodě, v němž má funkce $z = f(x, y)$ extrém vázaný podmínkou $g(x, y) = 0$, má funkce $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ lokální extrém, proto nám *Lagrangeova metoda neurčitých koeficientů* nezaručuje nalezení všech vázaných extrémů. V případě nenalezení lokálního extrému Lagrangeovy funkce nám pomůže definice vázaného extrému, popř. druhý diferenciál a vazba nebo následující věta.

Věta 8 *Buď $X = (x_0, y_0)$ stacionární bod funkce $L(x, y, \lambda)$, vyhovující soustavě rovnic z Prvního lemma. Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ a $g(x, y)$ mají spojité parciální derivace 2. řádu. Označme*

$$D_L(X) = - \begin{vmatrix} L''_{xx}(X) & L''_{xy}(X) & g'_x(X) \\ L''_{yx}(X) & L''_{yy}(X) & g'_y(X) \\ g'_x(X) & g'_y(X) & 0 \end{vmatrix}.$$

Pak platí:

a) *Je-li $D_L(X) > 0$, má funkce $f(x, y)$ v bodě X vázané lokální minimum.*

b) *Je-li $D_L(X) < 0$, má funkce $f(x, y)$ v bodě X vázané lokální maximum.*

[6]

Postupy při hledání vázaných lokálních extrémů funkce dvou proměnných:

a) **Metoda přímého dosazení**

1) Určíme definiční obor funkce $f(x, y)$.
2) Ze zadání množiny M vyjádříme jednu proměnnou pomocí druhé (x pomocí y nebo naopak). Získáme tak $x = \varphi(y)$ nebo $y = \psi(x)$.
3) Do funkčního předpisu funkce f dosadíme nám vzniklý výraz, dostaneme tak dílčí funkci jedné proměnné $F(y) = f(\varphi(y), y)$ (popř.$F(x) = f(x, \psi(x))$).
4) Derivaci dílčí funkce $F'(y)$ (popř. $F'(x)$) položíme rovnu nule, rovnici vyřešíme a tím získáme souřadnici y_0 (popř.x_0) stacionárního bodu funkce $F(y)$ (popř.$F(x)$).
5) Vytvoříme druhou derivaci $F''(y)$ (popř. $F''(x)$).
Je - li $F''(y_0)$ (popř.$F''(x_0)$)≤ 0, pak má funkce $F(y)$ (popř.$F(x)$) v bodě y_0 (popř.x_0) lokální maximum. Je - li $F''(y_0)$ (popř.$F''(x_0)$)≥ 0, pak má funkce $F(y)$ (popř.$F(x)$) v bodě y_0 (popř.x_0) lokální minimum.
6) Souřadnici y_0 (x_0) dosadíme do vazební podmínky, tím získáme stacionární bod funkce $f(x, y)$ $P = (\psi(y_0), y_0)$ (popř.$P = (x_0, \varphi(x_0))$).
7) Má-li funkce $F''(y)$ (popř. $F''(x)$) v bodě y_0 (popř.x_0) lokální maximum (popř.minimum), pak má funkce $f(x, y)$ v bodě $P = (\psi(y_0), y_0)$ (popř.$P = (x_0, \varphi(x_0))$) vázané lokální maximum (popř.minimum) vzhledem k množině M.
8) Neexistuje - li derivace $F'(y)$ (popř. $F'(x)$) v nějakém bodě definičního oboru, může v tomto bodě funkce $F(y)$ (popř.$F(x)$) nabývat lokálního extrému, a tedy funkce $f(x, y)$ vázaného lokálního extrému vzhledem k množině M. O jeho existenci a typu rozhodneme podle definice lokálních extrémů.

b) **Lagrangeova metoda neurčitých koeficientů**

1) Určíme definiční obor funkce $f(x, y)$.
2) Sestrojíme Lagrangeovu funkci $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.
3) Parciální derivace Lagrangeovy funkce položíme rovny nule a přidáme vazební podmínku, dostaneme tak soustavu tří rovnic

$$\begin{aligned} L'x &= 0 \\ L'y &= 0 \\ g(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Pokud soustava má řešení, jsou jím stacionární body funkce $L(x, y, \lambda)$. Pokud soustava řešení nemá, funkce $L(x, y, \lambda)$ nemá stacionární body.

4) O existenci a typu extrémů rozhodujeme:

   - *ve stacionárních bodech funkce* $L(x, y, \lambda)$ — podle postačující podmínky pro existenci lokálních extrémů (Věta 5, Věta 8). Pokud podle ani jedné věty nelze rozhodnout, pak nám pomůže definice vázaných lokálních extrémů.
   - *v bodech, kde alespoň jedna parciální derivace funkce* $L(x, y, \lambda)$ *neexistuje* — podle definice vázaných lokálních extrémů.

2.3.1 Vázané extrémy — příklady

Ukažme si uvedené postupy na příkladech. Úkol bude pro všechny příklady $11-20$ stejný, a to najít vázané lokální extrémy funkce $f(x,y)$ na množině M.

Metoda přímého dosazení

Příklad 11

$$f(x,y)=2x^2+3y^2; \qquad M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-2y+4=0\right\}$$

Řešení:

1) $D_f=\mathbb{R}^2$

2) Ze zadání množiny M vidíme, že např. x lze vyjádřit pomocí y jako $x=2y-4$, to dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(y)=f(\psi(y),y)=11y^2-32y+32.$$

3) Derivaci funkce F položíme rovnu nule

$$F'(y)=22y-32=0.$$

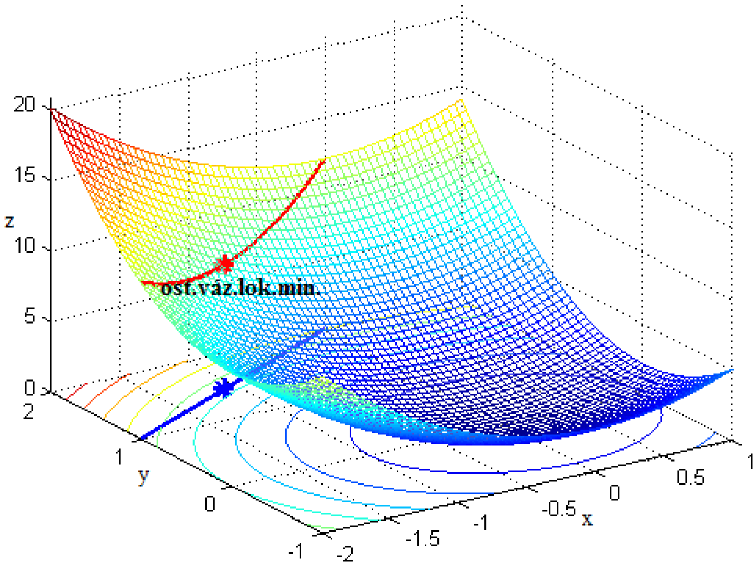
Z této rovnice je zřejmé, že $y=\frac{16}{11}$, stacionární bod funkce $F(y)$ je tedy $y_0=\frac{16}{11}$.

4) Vytvoříme druhou derivaci. Vidíme, že $F''(y)=22>0$, to znamená, že funkce $F(y)$ má v bodě y_0 ostré lokální minimum.

5) Dosazením bodu y_0 do vazební podmínky získáme stacionární bod P_0 funkce $f(x,y)$, $P_0=\left(-\frac{12}{11},\frac{16}{11}\right)$.

6) Funkce $F(y)$ nabývá v bodě y_0 ostrého lokálního minima, tedy funkce $f(x,y)$ nabývá v bodě P_0 ostrého vázaného lokálního minima vzhledem k množině M.

Závěr: Funkce $f(x,y)=2x^2+3y^2$ má v bodě $P_0=\left(-\frac{12}{11},\frac{16}{11}\right)$ ostré vázané lokální minimum vzhledem k množině $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-2y+4=0\}$.



Obrázek 2.14: Graf funkce $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$.

Příklad 12

$$f(x, y) = 2xy + 3x - 4y^2 + 1; \qquad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 6\right\}$$

Řešení:

1) $D_f = \mathbb{R}^2$

2) Ze zadání množiny M vidíme, že např. y lze vyjádřit pomocí x jako $y = 6 - 2x$, to dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = -20x^2 + 111x - 143.$$

3) Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'(x) = -40x + 111 = 0.$$

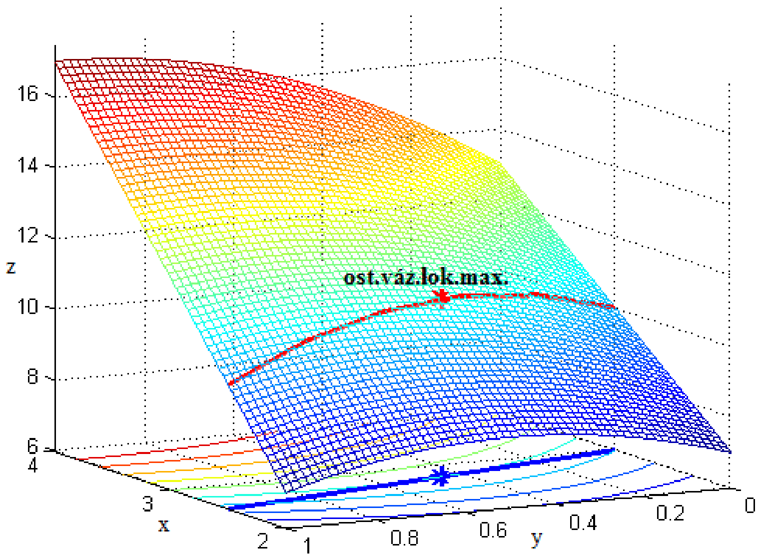
Z této rovnice je zřejmé, že $x = \frac{111}{40}$, stacionární bod funkce $F(x)$ je tedy $x_0 = \frac{111}{40}$.

4) Vytvoříme druhou derivaci. Vidíme, že $F''(x) = -40 < 0$, to znamená, že funkce $F(x)$ má v bodě x_0 ostré lokální maximum.

5) Dosazením bodu x_0 do vazební podmínky získáme stacionární bod P_0 funkce $f(x, y)$, $P_0 = \left(\frac{111}{40}, \frac{9}{20}\right)$.

6) Funkce $F(y)$ nabývá v bodě x_0 ostrého lokálního maxima, tedy funkce $f(x,y)$ nabývá v bodě P_0 ostrého vázaného lokálního maxima vzhledem k množině M.

Závěr: Funkce $f(x,y) = 2xy + 3x - 4y^2 + 1$ má v bodě $P_0 = \left(\frac{111}{40}, \frac{9}{20}\right)$ ostré vázané lokální maximum vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 6\}$.



Obrázek 2.15: Graf funkce $f(x,y) = 2xy + 3x - 4y^2 + 1$.

Příklad 13

$$f(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - y = 6, x \neq 0, y \neq 0\right\}$$

Řešení:

1) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0, y \neq 0\}$

2) Ze zadání množiny M vidíme, že např. y lze vyjádřit pomocí x jako $y = 4x - 6$, to dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné
$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x-6}.$$

3) $D_F = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0; x \neq \frac{3}{2}\}$

4) Derivaci funkce $F(x)$ položíme rovnu nule

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^2 - 12x + 9} = 0.$$

Po vyřešení této rovnice získáváme $x_0 = 3$, $x_1 = 1$, stacionární body funkce $F(x)$ jsou tedy $x_0 = 3$ a $x_1 = 1$

5) Vytvoříme druhou derivaci

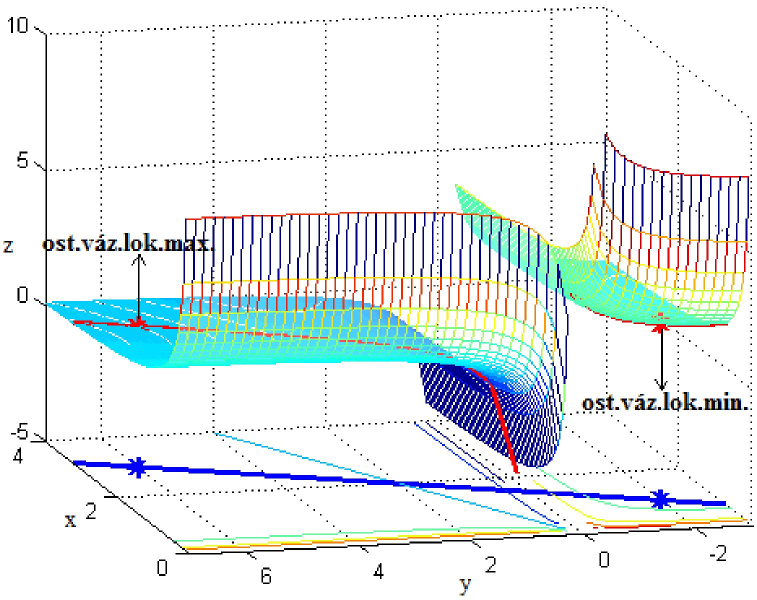
$$F''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{12 - 8x}{(4x^2 - 12x + 9)^2}.$$

6) Pro bod x_0 dostaneme $F''(3) = -\frac{2}{27} < 0$, z čehož plyne, že funkce $F(x)$ má v tomto bodě ostré lokální maximum.
Pro bod x_1 dostaneme $F''(1) = 6 > 0$, z čehož plyne, že funkce $F(x)$ má v tomto bodě ostré lokální minimum.

7) Dosazením bodů x_0 a x_1 do vazební podmínky získáme stacionární body P_0 a P_1 funkce $f(x, y)$, $P_0 = (3, 6)$, $P_1 = (1, -2)$.

8) Funkce $F(x)$ nabývá v bodě x_0 ostrého lokálního maxima, tedy funkce $f(x, y)$ nabývá v bodě $P_0 = (3, 6)$ ostrého vázaného lokálního maxima vzhledem k množině M.
Funkce $F(x)$ nabývá v bodě x_1 ostrého lokálního minima, tedy funkce $f(x, y)$ nabývá v bodě $P_1 = (1, -2)$ ostrého vázaného lokálního minima vzhledem k množině M.

Závěr: Funkce $f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ má v bodě $P_0 = (3, 6)$ ostré vázané lokální maximum a v bodě $P_1 = (1, -2)$ ostré vázané lokální minimum vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - y = 6, x \neq 0, y \neq 0\}$.



Obrázek 2.16: Graf funkce $f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.

Příklad 14

$$f(x, y) = 2y - 9x + 3; \qquad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^{2x} - x\}$$

Řešení:

1) $D_f = \mathbb{R}^2$

2) V zadání množiny M vidíme, že y je vyjádřeno přímo v podmínce a to jako $y = e^{2x} - x$, to dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné
$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 2e^{2x} - 11x + 3.$$

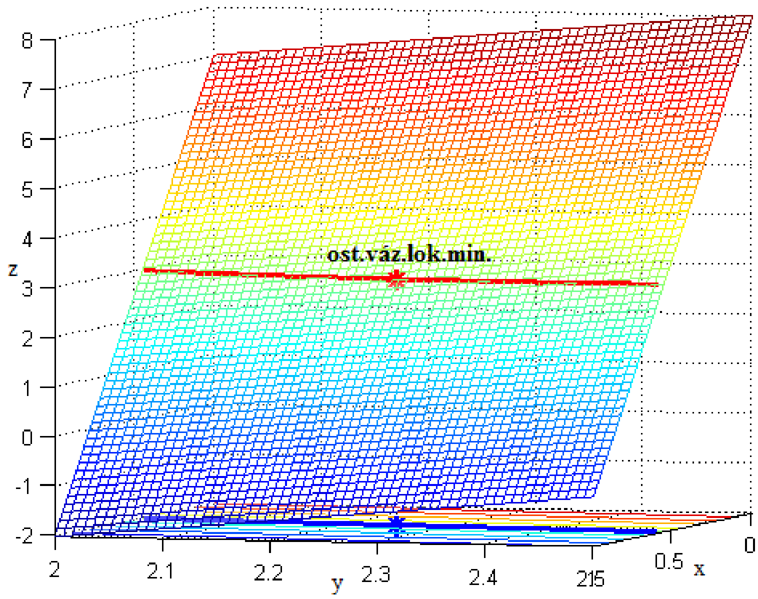
3) Derivaci funkce $F(x)$ položíme rovnu nule
$$F'(x) = 4e^{2x} - 11 = 0.$$
Po vyřešení této rovnice získáváme $x = \frac{\ln \frac{11}{4}}{2}$, stacionární bod funkce $F(x)$ je tedy $x_0 = \frac{\ln \frac{11}{4}}{2}$

4) Vytvoříme druhou derivaci
$$F''(x) = 8e^{2x}.$$
Pro bod x_0 dostaneme $F''(\frac{\ln \frac{11}{4}}{2}) = 22 > 0$, z čehož plyne, že funkce $F(x)$ má v tomto bodě ostré lokální minimum.

5) Dosazením bodu x_0 do vazební podmínky získáme stacionární bod P_0 funkce $f(x,y)$, $P = \left(\frac{\ln\frac{11}{4}}{2}, \frac{11-2\ln\frac{11}{4}}{4}\right)$.

6) Funkce $F(x)$ nabývá v bodě x_0 ostrého lokálního minima, tedy funkce $f(x,y)$ nabývá v bodě P_0 ostrého vázaného lokálního minima vzhledem k množině M.

Závěr: Funkce $f(x,y) = 2y - 9x + 3$ má v bodě $P_0 = \left(\frac{\ln\frac{11}{4}}{2}, \frac{11-2\ln\frac{11}{4}}{4}\right)$ ostré vázané lokální minimum vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^{2x} - x\}$.



Obrázek 2.17: Graf funkce $f(x,y) = 2y - 9x + 3$.

Příklad 15

$$f(x,y) = 4x - 3y; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3 + 1\right\}$$

Řešení:

1) $D_f = \mathbb{R}^2$

2) V podmínce je vyjádřeno, že $y = x^3 + 1$, to dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 4x - 3x^3 - 3.$$

3) Derivaci funkce $F(x)$ položíme rovnu nule

$$F'(x) = 4 - 9x^2 = 0.$$

Po vyřešení této rovnice získáváme $x_0 = \frac{2}{3}$, $x_1 = -\frac{2}{3}$, stacionární body funkce $F(x)$ jsou tedy $x_0 = \frac{2}{3}$ a $x_1 = -\frac{2}{3}$.

4) Vytvoříme druhou derivaci

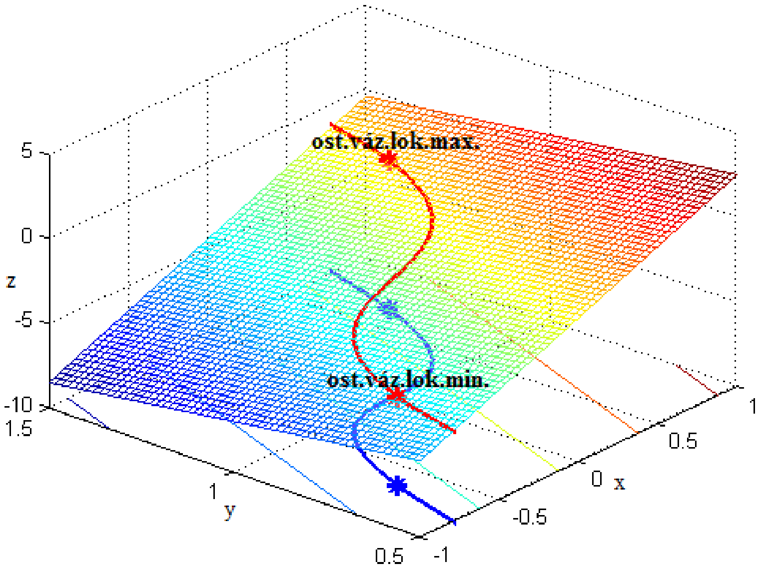
$$F''(x) = -18x.$$

5) Pro bod x_0 dostaneme $F''(\frac{2}{3}) = -12 < 0$, z toho plyne, že funkce $F(x)$ má v tomto bodě ostré lokální maximum.
Pro bod x_1 dostaneme $F''(-\frac{2}{3}) = 12 > 0$, z toho plyne, že funkce $F(x)$ má v tomto bodě ostré lokální minimum.

7) Dosazením bodů x_0 a x_1 do vazební podmínky získáme stacionární body P_0 a P_1 funkce $f(x,y)$, $P_0 = (\frac{2}{3}, \frac{35}{27})$, $P_1 = (-\frac{2}{3}, \frac{19}{27})$.

8) Funkce $F(x)$ nabývá v bodě x_0 ostrého lokálního maxima, tedy funkce $f(x,y)$ nabývá v bodě P_0 ostrého vázaného lokálního maxima vzhledem k množině M.
Funkce $F(x)$ nabývá v bodě x_1 ostrého lokálního minima, tedy funkce $f(x,y)$ nabývá v bodě P_1 ostrého vázaného lokálního minima vzhledem k množině M.

Závěr: Funkce $f(x,y) = 4x - 3y$ má v bodě $P_0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{35}{27}\right)$ ostré vázané lokální maximum a v bodě $P_1 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right)$ ostré vázané lokální minimum vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3 + 1\}$.



Obrázek 2.18: Graf funkce $f(x, y) = 4x - 3y$.

Lagrangeova metoda neurčitých koeficientů:
Příklad 16

$$f(x,y) = 2x + 2y - 5; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}, x \neq 0, y \neq 0\right\}$$

Řešení:

1) $D_f = \mathbb{R}^2$

2) Sestrojíme Lagrangeovu funkci $L(x,y,\lambda) = 2x + 2y - 5 + \lambda\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2}\right)$.

3) Parciální derivace funkce $L(x,y,\lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} L'_x &= 2 - \frac{2\lambda}{x^3} = 0 \\ L'_y &= 2 - \frac{2\lambda}{y^3} = 0 \\ g(x,y) &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme $x = \sqrt[3]{\lambda}$, z druhé $y = \sqrt[3]{\lambda}$, to dosadíme do vazební podmínky, z rovnice

$$g(x,y) = \frac{1}{(\sqrt[3]{\lambda})^2} + \frac{1}{(\sqrt[3]{\lambda})^2} - \frac{1}{2} = 0$$

výpočtem dostáváme $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -8$ a po dosazení do vzorců pro x a y získáme dva stacionární body $P_0 = (2,2)$ a $P_1 = (-2,-2)$.

4) Spočítáme parciální derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

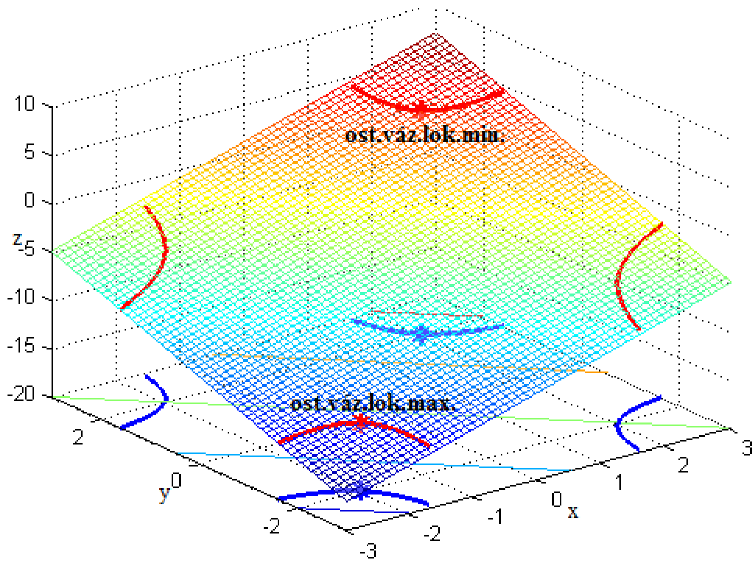
$$L''_{xx} = \frac{6\lambda}{x^4}, \qquad L''_{xy} = L''_{yx} = 0, \qquad L''_{yy} = \frac{6\lambda}{y^4},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{6\lambda}{x^4} & 0 \\ 0 & \frac{6\lambda}{y^4} \end{pmatrix}.$$

5) Pro bod P_0 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $D_2 = 9 > 0$, funkce L má v bodě P_1 lokální extrém, tedy funkce $f(x,y)$ má v tomto bodě vázaný lokální extrém a protože $D_1 = 3 > 0$, je to ostré vázané lokální minimum vzhledem k množině M.

Pro bod P_1 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $D_2 = 9 > 0$, funkce L má v bodě P_2 lokální extrém, tedy funkce $f(x, y)$ má v tomto bodě vázaný lokální extrém a protože $D_1 = -3 < 0$, je to ostré vázané lokální maximum vzhledem k množině M.

Závěr: Funkce $f(x, y) = 2x + 2y - 5$ má v bodě $P_0 = (2, 2)$ ostré vázané lokální minimum a v bodě $P_1 = (-2, -2)$ ostré vázané lokální maximum vzhledem k množině $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}, x \neq 0, y \neq 0\right\}$.



Obrázek 2.19: Graf funkce $f(x, y) = 2x + 2y - 5$.

Příklad 17

$$f(x, y) = 3x - \frac{y}{6} + 1; \qquad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

Řešení:

1) $D_f = \mathbb{R}^2$

2) Sestrojíme Lagrangeovu funkci $L(x, y, \lambda) = 3x - \frac{y}{6} + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

3) Parciální derivace funkce $L(x, y, \lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic

$$L'_x = 3 + 2\lambda x = 0$$
$$L'_y = -\frac{1}{6} + 2\lambda y = 0$$
$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme $x = -\frac{3}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{12\lambda}$, to dosadíme do vazební podmínky, z rovnice

$$g(x,y) = \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{144\lambda^2} - 1 = 0$$

výpočtem dostáváme $\lambda_1 = \frac{5\sqrt{13}}{12}$, $\lambda_2 = -\frac{5\sqrt{13}}{12}$ a po dosazení do vzorců pro x a y získáme dva stacionární body $P_0 = \left(-\frac{18}{5\sqrt{13}}, \frac{1}{5\sqrt{13}}\right)$ a $P_1 = \left(\frac{18}{5\sqrt{13}}, -\frac{1}{5\sqrt{13}}\right)$.

4) Spočítáme parciální derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

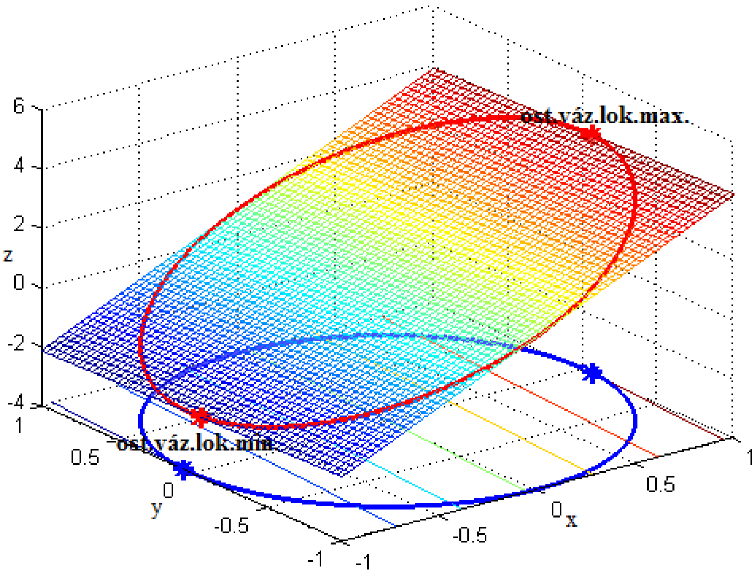
$$L''_{xx} = 2\lambda, \qquad L''_{xy} = L''_{yx} = 0, \qquad L''_{yy} = 2\lambda,$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

5) Pro bod P_0 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{13}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5\sqrt{13}}{6} \end{pmatrix}$, $D_2 = \frac{325}{36} > 0$, funkce L má v bodě P_0 lokální extrém, tedy funkce $f(x,y)$ má v tomto bodě vázaný lokální extrém a protože $D_1 = \frac{5\sqrt{13}}{6} > 0$, je to ostré vázané lokální minimum vzhledem k množině M.

   Pro bod P_1 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{13}}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{5\sqrt{13}}{6} \end{pmatrix}$, $D_2 = \frac{325}{36} > 0$, funkce L má v bodě P_1 lokální extrém, tedy funkce $f(x,y)$ má v tomto bodě vázaný lokální extrém a protože $D_1 = -\frac{5\sqrt{13}}{6} < 0$, je to ostré vázané lokální maximum vzhledem k množině M.

Závěr: Funkce $f(x,y) = 3x - \frac{y}{6} + 1$ má v bodě $P_0 = \left(-\frac{18}{5\sqrt{13}}, \frac{1}{5\sqrt{13}}\right)$ ostré vázané lokální minimum a v bodě $P_1 = \left(\frac{18}{5\sqrt{13}}, -\frac{1}{5\sqrt{13}}\right)$ ostré vázané lokální maximum vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.



Obrázek 2.20: Graf funkce $f(x, y) = 2x + 2y - 5$.

Příklad 18

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 8y; \qquad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 68\right\}$$

Řešení:

1) $D_f = \mathbb{R}^2$

2) Sestrojíme Lagrangeovu funkci $L(x, y, \lambda) = x^2+y^2-2x+8y+\lambda(x^2+y^2-68)$.

3) Parciální derivace funkce $L(x, y, \lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} L'_x &= 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y &= 2y + 8 + 2\lambda y = 0 \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 68 = 0 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme $x = \frac{1}{1+\lambda}, \quad y = -\frac{4}{1+\lambda}$, to dosadíme do vazební podmínky, z rovnice

$$g(x, y) = \frac{1}{(1+\lambda)^2} + \frac{16}{(1+\lambda)^2} - 68 = 0$$

výpočtem dostáváme $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ a po dosazení do vzorců pro x a y získáme dva stacionární body $P_0 = (-2, 8)$ a $P_1 = (2, -8)$.

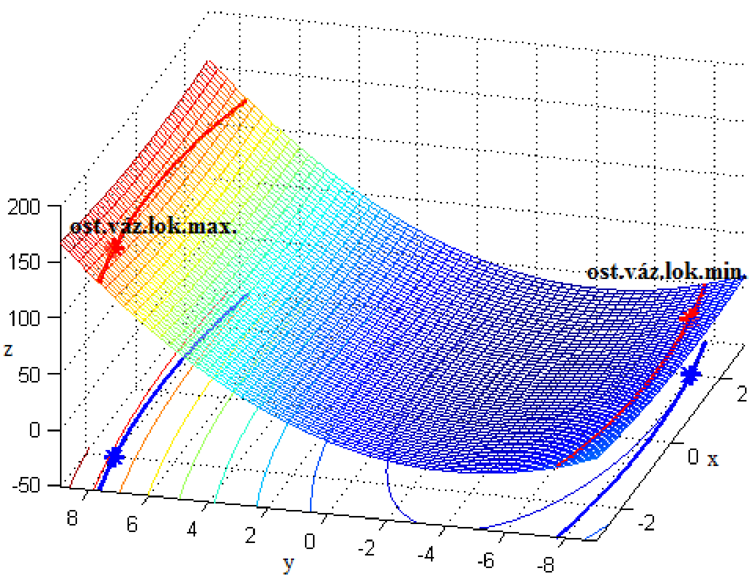
4) Spočítáme parciální derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$L''_{xx} = 2 + 2\lambda, \qquad L''_{xy} = L''_{yx} = 0, \qquad L''_{yy} = 2 + 2\lambda,$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 2+2\lambda \end{pmatrix}.$$

5) Pro bod P_0 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D_2 = 1 > 0$, funkce L má v bodě P_0 lokální extrém, funkce $f(x, y)$ má zde tedy vázaný lokální extrém a protože $D_1 = -1 < 0$, je to ostré vázané lokální maximum vzhledem k množině M.
Pro bod P_1 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_2 = 1 > 0$, funkce L má v bodě P_1 lokální extrém, funkce $f(x, y)$ má zde tedy vázaný lokální extrém a protože $D_1 = 1 > 0$, je to ostré vázané lokální minimum vzhledem k množině M.

Závěr: Funkce $f(x, y) = 3x - \frac{y}{6} + 1$ má v bodě $P_0 = (-2, 8)$ ostré vázané lokální maximum a v bodě $P_1 = (2, -8)$ ostré vázané lokální minimum vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 68\}$.



Obrázek 2.21: Graf funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 8y$.

Příklad 19

$$f(x,y)=\frac{1}{2x}+\frac{2}{y}; \qquad M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{4}, x\neq 0, y\neq 0\right\}$$

Řešení:

1) $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x\neq 0, y\neq 0\}$

2) Sestrojíme Lagrangeovu funkci $L(x,y,\lambda)=\frac{1}{2x}+\frac{2}{y}+\lambda\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{4}\right)$.

3) Parciální derivace funkce $L(x,y,\lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} L'_x &= -\frac{1}{2x^2}-\frac{2\lambda}{x^3}=0 \\ L'_y &= -\frac{2}{y^2}-\frac{2\lambda}{y^3}=0 \\ g(x,y) &= \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{4}=0 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme $x=-4\lambda, \quad y=-\lambda$, to dosadíme do vazební podmínky, z rovnice

$$g(x,y)=\frac{1}{16\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{4}=0$$

výpočtem dostáváme $\lambda_1=\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\lambda_2=-\frac{\sqrt{17}}{2}$ a po dosazení do vzorců pro x a y získáme dva stacionární body $P_0=\left(-2\sqrt{17},-\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$ a $P_1=\left(2\sqrt{17},\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$.

4) Spočítáme parciální derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

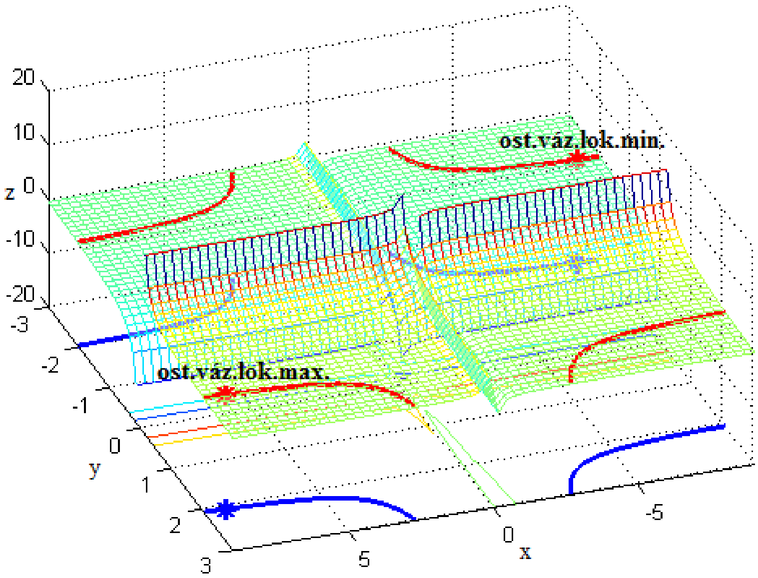
$$L''_{xx}=\frac{1}{x^3}+\frac{6\lambda}{x^4}, \qquad L''_{xy}=L''_{yx}=0, \qquad L''_{yy}=\frac{1}{y^3}+\frac{6\lambda}{y^4},$$

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} \frac{1}{x^3}+\frac{6\lambda}{x^4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^3}+\frac{6\lambda}{y^4} \end{pmatrix}.$$

5) Pro bod P_0 dostáváme matici $\mathbf{H}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}}{(-2\sqrt{17})^4} & 0 \\ 0 & \frac{40\sqrt{17}}{289} \end{pmatrix}$, $D_2=\frac{5}{9724}>0$, funkce L má v bodě P_0 lokální extrém, tedy funkce $f(x,y)$ má zde vázaný lokální extrém a protože $D_1=\frac{\sqrt{17}}{(-2\sqrt{17})^4}>0$, je to ostré vázané lokální minimum vzhledem k množině M.

Pro bod P_1 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{17}}{(2\sqrt{17})^4} & 0 \\ 0 & -\frac{40\sqrt{17}}{289} \end{pmatrix}$, $D_2 = \frac{5}{9724} > 0$, funkce L má v bodě P_1 lokální extrém, tedy funkce $f(x, y)$ má zde vázaný lokální extrém a protože $D_1 = -\frac{\sqrt{17}}{(2\sqrt{17})^4} < 0$, je to ostré vázané lokální maximum vzhledem k množině M.

Závěr: Funkce $f(x, y) = \frac{1}{2x} + \frac{2}{y}$ má v bodě $P_0 = \left(-2\sqrt{17}, -\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$ ostré vázané lokální minimum a v bodě $P_1 = \left(2\sqrt{17}, \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$ ostré vázané lokální maximum vzhledem k množině $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}, x \neq 0, y \neq 0\right\}$.



Obrázek 2.22: Graf funkce $f(x, y) = \frac{1}{2x} + \frac{2}{y}$.

Příklad 20

$$f(x, y) = 2x^2 - 4y^2; \qquad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2x - 2y^2 - 4y = 0\right\}$$

Řešení:

1) $D_f = \mathbb{R}^2$

2) Sestrojíme Lagrangeovu funkci $L(x, y, \lambda) = 2x^2 - 4y^2 + \lambda(x^2 + 2x - 2y^2 - 4y)$.

3) Parciální derivace funkce $L(x, y, \lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} L'_x &= 4x + 2\lambda x + 2\lambda = 0 \\ L'_y &= -8y - 4\lambda y - 4\lambda = 0 \\ g(x, y) &= x^2 + 2x - 2y^2 - 4y = 0 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme $x = -\frac{\lambda}{2+\lambda}, \quad y = -\frac{\lambda}{2+\lambda}$, to dosadíme do vazební podmínky, z rovnice

$$g(x, y) = \frac{\lambda^2}{(2+\lambda)^2} - \frac{2\lambda}{2+\lambda} - \frac{2\lambda^2}{(2+\lambda)^2} + \frac{4\lambda}{2+\lambda} = 0$$

výpočtem dostáváme $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$ a po dosazení do vzorců pro x a y získáme dva stacionární body $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (-2, -2)$.

4) Spočítáme parciální derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$L''_{xx} = 4 + 2\lambda, \qquad L''_{xy} = L''_{yx} = 0, \qquad L''_{yy} = -8 - 4\lambda,$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 4 + 2\lambda & 0 \\ 0 & -8 - 4\lambda \end{pmatrix}.$$

5) Pro bod P_0 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $D_2 = -32 < 0$, funkce L tedy v bodě P_0 nemá lokální extrém, to ovšem neznamená, že funkce $f(x, y)$ zde nemá extrém vázaný na množině M. Najdeme ho pomocí Věty 8 z teorie vázaných extrémů.

Před sestavením potřebného determinantu spočítáme parciální derivace g'_x a g'_y v bodě $P_0 = (0, 0)$.

$$g'_x = 2x + 2 \quad \text{, tudíž} \quad g'_x(0, 0) = 2,$$

$$g'_y = -4y - 4 \quad \text{, proto} \quad g'_y(0, 0) = -4.$$

Nyní můžeme sestavit determinant

$$D_L(X) = -\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -(-32) = 32 > 0.$$

Jelikož $D_L(X) > 0$, funkce $f(x, y)$ má v bodě P_0 vázané lokální minimum k množině M.

Pro bod P_1 dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $D_2 = -32 < 0$, funkce L tedy v bodě P_1 také nemá lokální extrém. Zda má zde funkce $f(x, y)$ extrém vázaný určíme opět podle Věty 8.

Do parciálních derivací g'_x a g'_y dosadíme bod $P_1 = (-2, -2)$.

$$g'_x = 2x + 2 \quad , \text{ tudíž } g'_x(-2, -2) = -2,$$

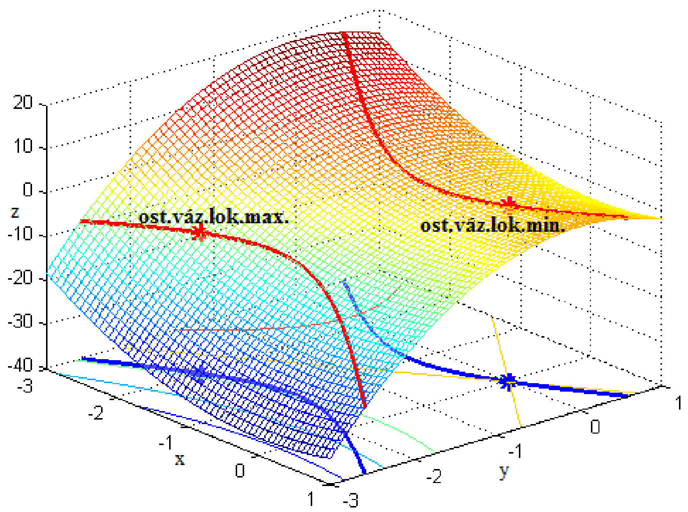
$$g'_y = -4y - 4, \text{ proto } g'_y(-2, -2) = 4.$$

Nyní můžeme sestavit determinant

$$D_L(X) = -\begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -(32) = -32 < 0.$$

Jelikož $D_L(X) < 0$, funkce $f(x, y)$ má v bodě P_1 vázané lokální maximum vzhledem k množině M.

Závěr: Funkce $f(x, y) = 2x^2 - 4y^2$ má v bodě $P_0 = (0, 0)$ vázané lokální minimum a v bodě $P_1 = (-2, -2)$ vázané lokální maximum vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2x - 2y^2 - 4y = 0\}$.



Obrázek 2.23: Graf funkce $f(x, y) = 2x^2 - 4y^2$.

2.4 Globální (absolutní) extrémy

Tyto extrémy jsou definovány podobně jako *lokální extrémy*, s tím rozdílem, že porovnávání funkčních hodnot dané funkce s hodnotou této funkce v bodě, který je podezřelý z extrému, neprovádíme pouze na vhodných dostatečně malých okolích tohoto bodu, ale na celé množině, na níž *globální extrémy* hledáme.

Definice 9 Nechť je funkce $f(x, y)$ definována na množině $M \subset \mathbb{R}^2$.

Řekněme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě $X = (x_0, y_0) \in M$

- *globální neboli absolutní minimum na* M, jestliže pro všechny body $(x, y) \in M$ platí $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$,
- *ostré globální neboli absolutní minimum* M, jestliže pro všechny body $(x, y) \in$

  $\in M$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ platí $f(x, y) > f(x_0, y_0)$,
- *globální neboli absolutní maximum* M, jestliže pro všechny body $(x, y) \in M$ platí $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$,
- *ostré globální neboli absolutní maximum* M, jestliže pro všechny body $(x, y) \in$

  $\in M$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ platí $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.

[5]

Weierstrassova věta nám říká, že je-li funkce $f(x)$ spojitá na nějakém uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak je na něm ohraničená a to shora svou nejvyšší hodnotou a zdola svou nejnižší hodnotou, nabývá tedy extrémů.

Tato věta platí i pro funkci dvou proměnných $f(x, y)$ definovanou na neprázdné kompaktní (uzavřené omezené) množině M. Největší a nejmenší funkční hodnoty, kterých funkce nabývá ve vyšetřovaných bodech z této množiny, nazýváme *globální maxima* a *globální minima*.

Funkce $f(x, y)$ může těchto extrémních hodnot nabývat v bodech:

- které náleží hranici množiny M
- které náleží vnitřku množiny M (pokud má zde funkce globální extrém, jde zároveň i o extrém lokální, opačně to ovšem neplatí)

Poznámka 10 Pokud množina M není uzavřená, funkce na ní může, ale nemusí *globálních extremálních hodnot* nabývat, jejich nalezení může být obtížné a my se jím v této práci zabývat nebudeme.

Postup při hledání globálních (absolutních) extrémů funkce dvou proměnných na množině M:

1) Ověříme, že množina M je neprázdná a kompaktní a funkce f je na ní spojitá a tím pádem existují globální extrémy funkce f.

2) Určíme všechny možné body podezřelé z existence globálního extrému a to nejdříve z vnitřku množiny M (viz postup při hledání lokálních extrémů) a následně z hranice množiny M (viz postup při hledání vázaných lokálních extrémů).

   - z bodů uvnitř M jsou podezřelé ty, v nichž by funkce f mohla mít lokální extrémy. Existují-li zde parciální derciální derivace, podezřelými body jsou pouze body stacionární (ležící uvnitř M).
   - z hraničních bodů množiny M jsou podezřelé ty, v nichž by funkce mohla mít extrémy vázané vzhledem k hranici množiny M.

3) Vypočteme funkční hodnoty funkce f ve všech těchto podezřelých bodech a podle toho, která z nich je největší (resp. nejmenší) rozhodujeme, která funkční hodnota je globální maximum (resp. minimum).

2.4.1 Globální extrémy — příklady

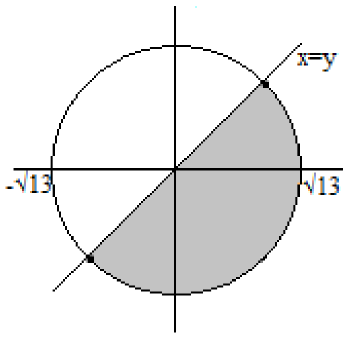
Ukažme si uvedený postup na příkladech. Úkol bude pro všechny příklady 21 – 30 stejný, a to najít globální extrémy funkce $f(x,y)$ na množině M.

Příklad 21

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 13, x - y \geq 0\right\}$$

Řešení:

1) Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru (viz obrázek 2.24) vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x,y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.24: množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 13, x - y \geq 0\}$

2) Body podezřelé z existence globálních extrémů:

   1. *Uvnitř množiny M*:
      Parciální derivace $f'_x = 2x - 6$, $f'_y = 2y - 4$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic

      $$2x - 6 = 0, \qquad 2y - 4 = 0.$$

      Řešením těchto rovnic je bod $P_0 = (3,2)$, který ovšem neleží uvnitř, nýbrž na hranici množiny M, ten tedy neuvažujeme.

   2. *Na hranici množiny M*:
      Hranice množiny M se skládá ze dvou částí. Jsou to body ležící na části kružnice $x^2 + y^2 - 13 = 0$ a body ležící na části přímky $x = y$. Jako první vyšetříme průsečíky kružnice $x^2 + y^2 - 13 = 0$ a přímky $x = y$ a poté zvlášť každou z těchto částí.

a) Průsečíky kružnice $x^2 + y^2 - 13 = 0$ a přímky $x = y$:
Do rovnice $x^2 + y^2 = 13$ dosadíme $x = y$, dostáváme rovnici

$$2x^2 = 13 \quad \longrightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{13}{2}} = y_{1,2}.$$

První body podezřelé z globálního extrému jsou tedy $P_0 = \left(-\sqrt{\frac{13}{2}}, -\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ a $P_1 = \left(\sqrt{\frac{13}{2}}, \sqrt{\frac{13}{2}}\right)$.

b) Část kružnice $x^2 + y^2 - 13 = 0$, kde $x \in \left(-\sqrt{\frac{13}{2}}, \sqrt{13}\right)$ - metoda Lagrangeových multiplikátorů:
Sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 13).$$

Parciální derivace funkce $L(x, y, \lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} L'_x &= 2x - 6 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y &= 2y - 4 + 2\lambda y = 0 \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 13 = 0 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme

$$x = \frac{3}{1+\lambda}, \quad y = \frac{2}{1+\lambda},$$

to dosadíme do vazební podmínky, z rovnice

$$g(x, y) = \frac{9}{(1+\lambda)^2} + \frac{4}{(1+\lambda)^2} - 13 = 0$$

výpočtem dostáváme $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ a po dosazení do vzorců pro x a y získáme další dva podezřelé body $P_2 = (3, 2)$ a $P_3 = (-3, -2)$ — ten však neleží v M, nebudeme ho tedy dále uvažovat.

c) Část přímky $x = y$, kde $x \in \left(-\sqrt{\frac{13}{2}}, \sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 2x^2 - 10x.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'(x) = 4x - 10 = 0.$$

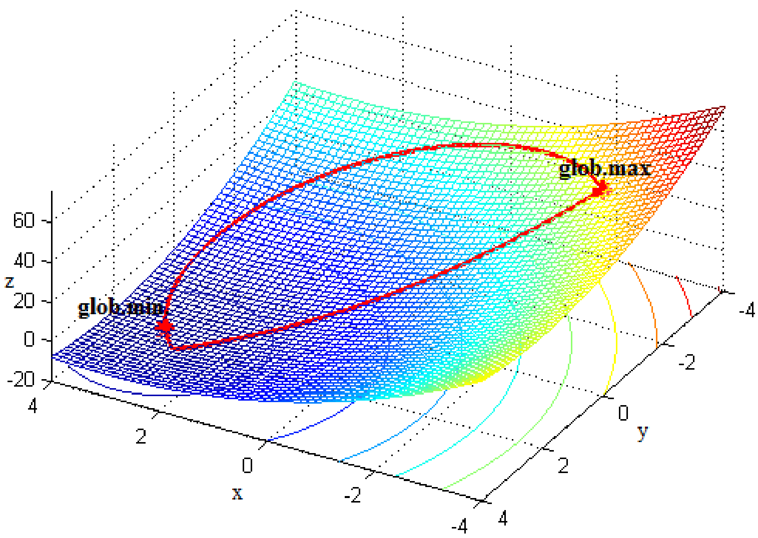
Z této rovnice je zřejmé, že $x = \frac{5}{2} \in \left(-\sqrt{\frac{13}{2}}, \sqrt{\frac{13}{2}}\right)$. Dosazením tohoto x do rovnice $x = y$ získáme souřadnici $y = \frac{5}{2} \in \left(-\sqrt{\frac{13}{2}}, \sqrt{\frac{13}{2}}\right)$, tak získáme další podezřelý bod $P_4 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

3) Funkční hodnoty v bodech podezřelých z existence globálních extrémů:

1. $f(P_0) = 13 + 10\sqrt{\frac{13}{2}}$
2. $f(P_1) = 13 - 10\sqrt{\frac{13}{2}}$
3. $f(P_2) = -13$
4. $f(P_4) = -12,5$

Z vypočtených funkčních hodnot je zřejmé, že funkce f nabývá globálního maxima v bodě P_0 a globálního minima v bodě P_2.

Závěr: Funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y$ má v bodě $P_0 = \left(-\sqrt{\frac{13}{2}}, -\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ globální maximum a v bodě $P_2 = (3,2)$ globální minimum na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 13, x - y \geq 0\}$.



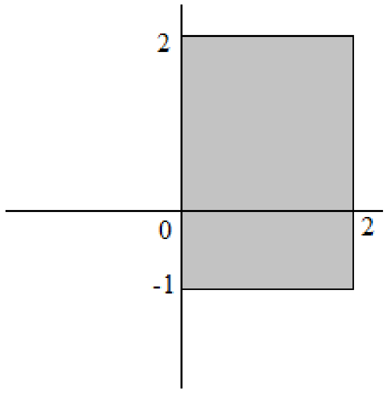
Obrázek 2.25: Graf funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y$.

Příklad 22

$$f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 4xy; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2\right\}$$

Řešení:

1) Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru (viz obrázek 2.26) vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x,y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.26: množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2\}$

2) Body podezřelé z existence globálních extrémů:

   1. *Uvnitř množiny M:*
      Parciální derivace $f'_x = 6x^2 - 4y$, $f'_y = 6y^2 - 4x$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic
      $$6x^2 - 4y = 0, \qquad 6y^2 - 4x = 0.$$
      Z druhé rovnice vidíme, že $x = \frac{3}{2}y^2$, to dosadíme do první a získáme tak bod $P_0 = (0,0)$ (neleží uvnitř, ale na hranici M, tudíž ho neuvažujeme) a $P_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, který uvažovat budeme.
   2. *Na hranici množiny M:*
      Hranice má čtyři části (4 úsečky), ty postupně všechny vyšetříme.
      a) Část přímky $x = 0$, kde $y \in (-1, 2)$ - metoda přímého dosazení:
         Výraz z podmínky dosadíme do tvaru $f(x,y)$, dostaneme tak funkci jedné proměnné
         $$F(y) = f(\psi(y), y) = 2y^3.$$
         Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule
         $$F'(y) = 6y^2 = 0.$$

Dostáváme bod , který má stejné souřadnice jako bod $P_0 = (0, 0)$. Jelikož $y = 0$ leží v intervalu $(-1, 2)$, přidáme tento bod mezi body podezřelé z globálního extrému.

b) Část přímky $x = 2$, kde $y \in (-1, 2)$ - metoda přímého dosazení: Výraz z podmínky dosadíme do tvaru $f(x, y)$, dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(y) = f(\psi(y), y) = 2y^3 - 8y + 16.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'(y) = 6y^2 - 8 = 0,$$

dostáváme dvojici řešení pro y a to $y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{8}{6}}$ a tedy body $P_2 = \left(2, \sqrt{\frac{8}{6}}\right)$ a $P_3 = \left(2, -\sqrt{\frac{8}{6}}\right)$ — tento bod však neleží v M, tudíž ho nebudeme uvažovat.

c) Část přímky $y = -1$, kde $x \in (0, 2)$ - metoda přímého dosazení: Výraz z podmínky dosadíme do tvaru $f(x, y)$, dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 2x^3 + 4x - 2.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'(x) = 6x^2 + 4 = 0,$$

tato rovnice nemá řešení, zde podezřelý bod nenajdeme.

d) Část přímky $y = 2$, kde $x \in (0, 2)$ - metoda přímého dosazení: Výraz z podmínky dosadíme do tvaru $f(x, y)$, dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 2x^3 - 8x + 16.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'(x) = 6x^2 - 8 = 0,$$

dostáváme dvojici řešení pro x a to $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{8}{6}}$ a tedy body $P_4 = \left(\sqrt{\frac{8}{6}}, 2\right)$ a $P_5 = \left(-\sqrt{\frac{8}{6}}, 2\right)$ — tento bod však neleží v M, tudíž ho nebudeme uvažovat.

e) Mezi body podezřelé z globálních extrémů přidáme vrcholy obdélníku, který ohraničuje množinu M:

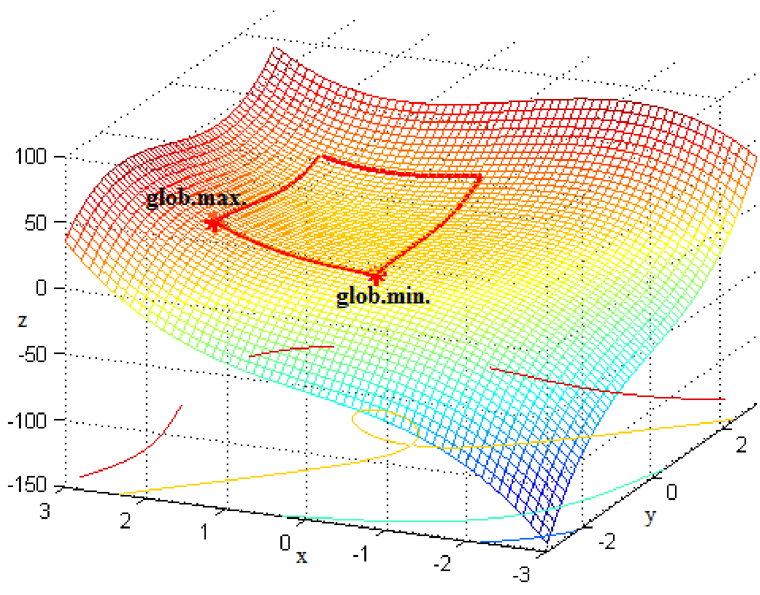
$$P_6 = (0, 2), \quad P_7 = (2, 2), \quad P_8 = (0, -1), \quad P_9 = (2, -1).$$

3) Funkční hodnoty v bodech podezřelých z existence globálních extrémů:

1. $f(P_0) = 0$
2. $f(P_1) = -\frac{16}{27}$
3. $f(P_2) = 16 - \frac{16}{3}\sqrt{\frac{8}{6}}$
4. $f(P_4) = 16 - \frac{16}{3}\sqrt{\frac{8}{6}}$
5. $f(P_6) = 16$
6. $f(P_7) = 16$
7. $f(P_8) = -2$
8. $f(P_9) = 22$

Z vypočtených funkčních hodnot je zřejmé, že funkce f nabývá globálního minima v bodě P_8 a globálního maxima v bodě P_9.

Závěr: Funkce $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 4xy$ má v bodě $P_8 = (0,-1)$ globální minimum a v bodě $P_9 = (2,-1)$ globální maximum na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2\}$.



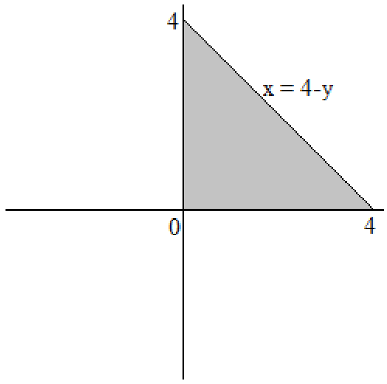
Obrázek 2.27: Graf funkce $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 4xy$.

Příklad 23

$f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 4xy - 6y - 1; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 4\right\}$

Řešení:

1) Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru (viz obrázek 2.28) vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x,y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.28: množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 4\}$

2) Body podezřelé z existence globálních extrémů:

1. *Uvnitř množiny M:*
   Parciální derivace $f'_x = 4x + 4y$, $f'_y = -2y + 4x - 6$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic
   $$4x + 4y = 0, \qquad -2y + 4x - 6 = 0.$$
   Z první rovnice vidíme, že $x = -y$, to dosadíme do druhé a tím získáme první bod $P_0 = (1,-1)$, který ale neleží v M, tudíž jej neuvažujeme.
2. *Na hranici množiny M:*
   Hranice M má tři části (3 úsečky), ty postupně všechny vyšetříme.
   a) Část přímky $x = 0$, kde $y \in (0,4)$ - metoda přímého dosazení:
   Výraz z podmínky dosadíme do tvaru $f(x,y)$, dostaneme tak funkci jedné proměnné
   $$F(y) = f(\psi(y), y) = -y^2 - 6y - 1.$$
   Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule
   $$F'(y) = -2y - 6 = 0.$$
   Dostaneme bod $P_1 = (0,-3)$, který ovšem neleží v M, tudíž jej neuvažujeme.

b) Část přímky $y = 0$, kde $x \in (0,4)$ - metoda přímého dosazení: Výraz z podmínky dosadíme do tvaru $f(x,y)$, dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(y) = f(\psi(y), y) = 2x^2 - 1.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'(x) = 4x = 0.$$

Dostáváme bod $P_2 = (0,0)$, který ovšem také neleží v M, tudíž jej neuvažujeme.

c) Část přímky $x = 4 - y$, kde $y \in (0,4)$ - metoda přímého dosazení: Rovnici přímky dosadíme do tvaru $f(x,y)$, dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(y) = f(\psi(y), y) = -3y^2 - 6y + 31.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'(y) = -6y - 6 = 0.$$

Výpočtem dostáváme souřadnice bodu $P_3 = (-1,5)$, který ale neleží v M, tudíž jej neuvažujeme.

d) Mezi body podezřelé z existence globálních extrémů přidáme vrcholy trojúhelníku, který ohraničuje množinu M:

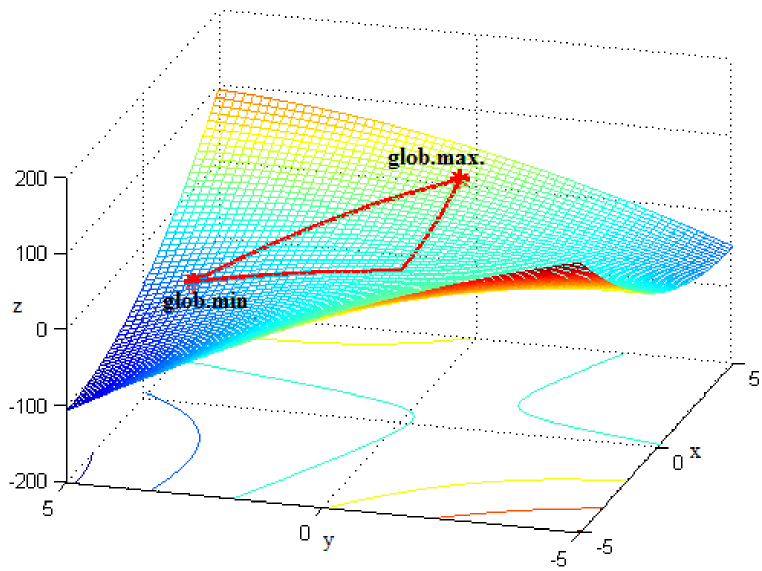
$$P_4 = (0,0), \quad P_5 = (0,4), \quad P_6 = (4,0).$$

3) Funkční hodnoty v bodech podezřelých z existence globálních extrémů:

1. $f(P_4) = -1$
3. $f(P_5) = -41$
4. $f(P_6) = 31$

Z vypočtených funkčních hodnot je zřejmé, že funkce f nabývá globálního minima v bodě P_5 a globálního maxima v bodě P_6.

Závěr: Funkce $f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 4xy - 6y - 1$ má v bodě $P_5 = (0,4)$ globální minimum a v bodě $P_6 = (4,0)$ globální maximum na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 4\}$.



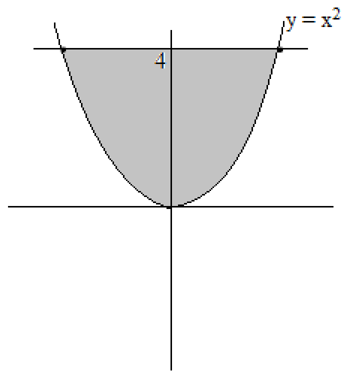
Obrázek 2.29: Graf funkce $f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 4xy - 6y - 1$.

Příklad 24

$$f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy; \qquad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y \leq 4\right\}$$

Řešení:

1) Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru (viz obrázek 2.30) vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x, y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.30: množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y \leq 4\}$

2) Body podezřelé z existence globálních extrémů:

1. *Uvnitř množiny M*:
Parciální derivace $f'_x = 6x^2 + 8x - 2y$, $f'_y = 2y - 2x$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic

$$6x^2 + 8x - 2y = 0, \qquad 2y - 2x = 0.$$

Z druhé rovnice vidíme, že $x = y$, to dosadíme do první a získáme tak dva body $P_0 = (0, 0)$ a $P_1 = (-1, -1)$. Bod P_0 neleží uvnitř, nýbrž na hranici množiny M, proto jej neuvažujeme a bod P_1 neleží v množině M, tudíž jej také neuvažujeme.

2. *Na hranici množiny M*:
Hranice množiny M je tvořená dvěmi částmi a to body ležícími na části paraboly $y = x^2$ a body ležícími na části přímky $y = 4$. Jako první vyšetříme průsečíky těchto dvou částí a poté obě části zvlášť.

   a) Průsečíky přímky $y = 4$ a paraboly $y = x^2$:
   Do rovnice $y = x^2$ dosadíme $y = 4$, dostáváme rovnici

   $$x^2 = 4 \quad \longrightarrow \quad x_{1,2} = \pm 2.$$

   První dva podezřelé body jsou $P_2 = (2, 4)$ a $P_3 = (-2, 4)$.

   b) Část paraboly $y = x^2$, kde $x \in (-2, 2)$ - metoda přímého dosazení:
   Výraz z podmínky dosadíme do funkčního předpisu funkce $f(x, y)$, dostaneme tak funkci jedné proměnné

   $$F(x) = f(x, \varphi(x)) = x^4 + 4x^2.$$

   Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

   $$F'(x) = 4x^3 + 8x = 0.$$

   Po vyřešení rovnice získáme bod se stejnými souřadnicemi jako $P_0 = (0, 0)$, nyní jej již můžeme uvažovat.

   c) Část přímky $y = 4$, kde $x \in (-2, 2)$ - metoda přímého dosazení:
   Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

   $$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16.$$

   Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

   $$F'(x) = 6x^2 + 8x - 8.$$

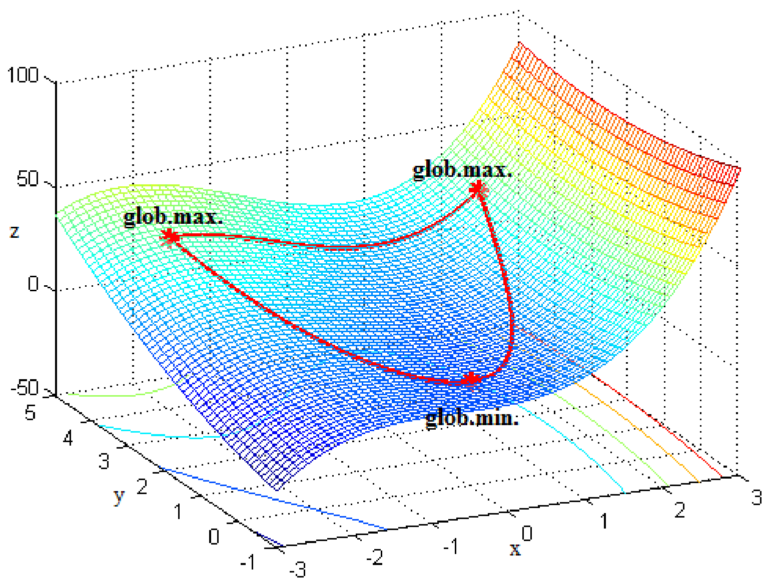
   Tato rovnice má dvě řešení a to $x_1 = \frac{2}{3}$ a $x_2 = -2$ (tento bod ovšem neleží v intervalu $(-2, 2)$), souřadnice dalšího podezřelého bodu jsou tedy $P_4 = \left(\frac{2}{3}, 4\right)$.

3) Funkční hodnoty v bodech podezřelých z existence globálních extrémů:

1. $f(P_0) = 0$
2. $f(P_2) = f(P_3) = 32$
3. $f(P_4) = \frac{352}{27}$

Z vypočtených funkčních hodnot je zřejmé, že funkce f nabývá globálního minima v bodě P_0 a globálního maxima v bodech P_2 a P_3.

Závěr: Funkce $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ má v bodě $P_0 = (0, 0)$ globální minimum a v bodech $P_2 = (2, 4)$ a $P_3 = (-2, 4)$ globální maximum na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y \leq 4\}$.



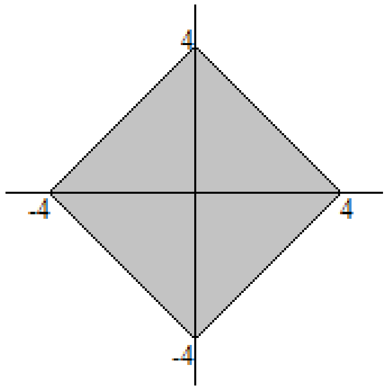
Obrázek 2.31: Graf funkce $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$.

Příklad 25

$$f(x,y) = 2x^2 - 4xy + y^2; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 4\right\}$$

Řešení:

1) Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru (viz obrázek 2.32) vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x,y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.32: množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 4\}$

2) Body podezřelé z existence globálních extrémů:

   1. *Uvnitř množiny* M:
      Parciální derivace $f'_x = 4x - 4y$, $f'_y = -4x + 2y$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic

      $$4x - 4y = 0, \qquad -4x + 2y = 0.$$

      Z první rovnice vidíme, že $x = y$, to dosadíme do druhé a získáme tak první bod $P_0 = (0,0)$.

   2. *Na hranici množiny* M:
      Hranice je tvořená čtyřmi částmi (4 úsečky), které postupně vyšetříme.

      a) Část přímky $y = 4 - x$, kde $x \in (0,4)$ - metoda přímého dosazení: Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

      $$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 7x^2 - 24x + 16.$$

      Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

      $$F'(x) = 14x - 24 = 0.$$

      Z této rovnice je zřejmé, že $x = \frac{12}{7}$, další podezřelý bod je tedy $P_1 = \left(\frac{12}{7}, \frac{16}{7}\right)$.

b) Část přímky $y = 4+x$, kde $x \in (-4, 0)$ - metoda přímého dosazení: Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = -x^2 - 8x + 16.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'(x) = -2x - 8 = 0.$$

Z této rovnice je zřejmé, že $x = -4$, další bod je tedy $P_2 = (-4, 0)$, jehož x - ová souřadnice však neleží v intervalu $(-4, 0)$, proto jej neuvažujeme.

c) Část přímky $y = -4 - x$, kde $x \in (-4, 0)$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 7x^2 + 24x + 16.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'(x) = 14x + 24 = 0.$$

Z této rovnice je zřejmé, že $x = -\frac{12}{7}$, další podezřelý bod je tedy $P_3 = \left(-\frac{12}{7}, -\frac{16}{7}\right)$.

d) Část přímky $y = -4+x$, kde $x \in (0, 4)$ - metoda přímého dosazení: Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = -x^2 + 8x + 16.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'(x) = -2x + 8 = 0.$$

Z této rovnice je zřejmé, že $x = 4$, další bod je tedy $P_4 = (4, 0)$, jehož x - ová souřadnice však neleží v intervalu $(0, 4)$, proto jej neuvažujeme.

e) Mezi body podezřelé z existence globálních extrémů přidáme vrcholy čtverce, který tvoří hranici množiny M:

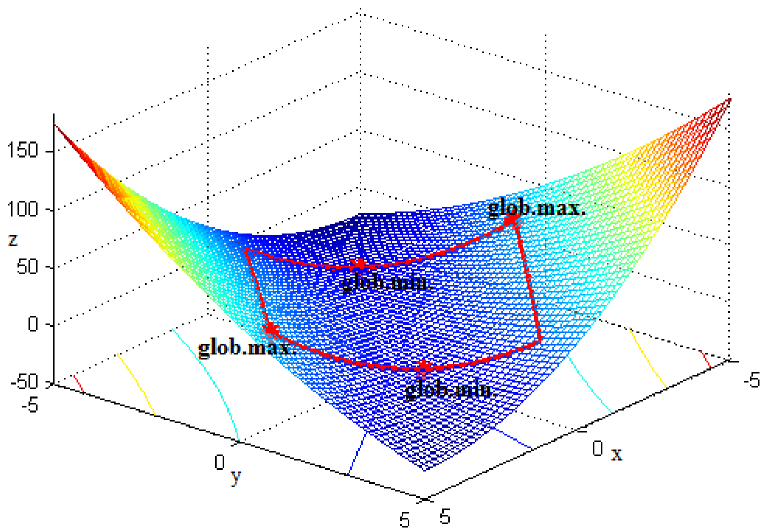
$$P_5 = (0, -4), \quad P_6 = (0, 4), \quad P_7 = (-4, 0), \quad P_8 = (4, 0)$$

3) Funkční hodnoty v bodech podezřelých z existence globálních extrémů:

1. $f(P_0) = 0$
2. $f(P_1) = -\frac{32}{7}$
3. $f(P_3) = -\frac{32}{7}$
4. $f(P_5) = f(P_6) = 16$
5. $f(P_7) = f(P_8) = 32$

Z vypočtených funkčních hodnot je zřejmé, že funkce f nabývá globálního minima v bodech P_1 a P_3 a globálního maxima v bodech P_7 a P_8.

Závěr: Funkce $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^2$ má v bodech $P_1 = \left(\frac{12}{7}, \frac{16}{7}\right)$ a $P_3 = \left(-\frac{12}{7}, -\frac{16}{7}\right)$ globální minimum a v bodech $P_7 = (-4, 0)$ a $P_8 = (4, 0)$ globální maximum na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 4\}$.



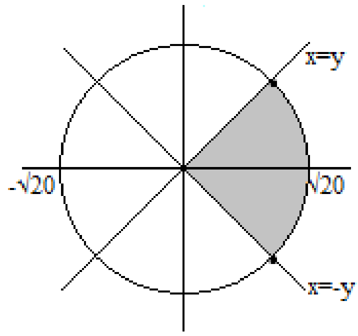
Obrázek 2.33: Graf funkce $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^2$.

Příklad 26

$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq |y|, x^2 + y^2 \leq 20\right\}$$

Řešení:

1) Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru (viz obrázek 2.34) vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x,y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.34: množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq |y|, x^2 + y^2 \leq 20\}$

2) Body podezřelé z existence globálních extrémů:

   1. *Uvnitř množiny* M:
   Parciální derivace $f'_x = 2x - 2$, $f'_y = 2y - 4$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic

   $$2x - 2 = 0, \qquad 2y - 4 = 0.$$

   Vyřešením rovnic dostaneme první bod $P_0 = (1,2)$, který však neleží v M, tudíž jej neuvažujeme.

   2. *Na hranici množiny* M:
   Hranice se skládá ze tří částí (2 úsečky a část kružnice). Nejprve vyšetříme průsečíky těchto částí a poté postupně každou část zvlášť.

      a) Průsečíky částí hranice množiny M:

         1) Průsečíky přímky $x = y$ a kružnice $x^2 + y^2 - 20 = 0$ - jsou to body $P_1 = (\sqrt{10}, \sqrt{10})$ a ,$P_2 = (-\sqrt{10}, -\sqrt{10})$ - tento bod neuvažujeme, jelikož neleží v M.

         2) Průsečíky přímky $x = -y$ a kružnice $x^2 + y^2 - 20 = 0$ - jsou to body $P_3 = (\sqrt{10}, -\sqrt{10})$ a ,$P_4 = (-\sqrt{10}, \sqrt{10})$ - tento bod neuvažujeme, jelikož neleží v M.

3) Průsečík přímek $x = y$ a $x = -y$ - bod $P_5 = (0, 0)$.

b) Část přímky $y = x$, kde $x \in (0, \sqrt{10})$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 2x^2 - 6x.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'(x) = 4x - 6 = 0.$$

Z této rovnice je zřejmé, že $x = \frac{3}{2}$, dostáváme bod $P_6 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

c) Část přímky $x = -y$, kdy $x \in (0, \sqrt{10})$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(y) = f(\psi(y), y) = 2y^2 - 2y.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'(y) = 4y - 2 = 0.$$

Z této rovnice je zřejmé, že $y = \frac{1}{2}$, dostáváme bod $P_7 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, který však neuvažujeme, jelikož jeho x - ová souřadnice neleží v intervalu $x \in (0, \sqrt{10})$.

d) Část kružnice $x^2 + y^2 - 20 = 0$, kde $x \in (\sqrt{10}, \sqrt{20})$ - metoda Lagrangeových multiplikátorů:
Sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 20).$$

Parciální derivace funkce $L(x, y, \lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} L'_x &= 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y &= 2y - 4 + 2\lambda y = 0 \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 20 = 0 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme

$$x = \frac{1}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{2}{1 + \lambda},$$

to dosadíme do vazební podmínky, z rovnice

$$g(x,y) = \frac{1}{(1+\lambda)^2} + \frac{4}{(1+\lambda)^2} - 20 = 0$$

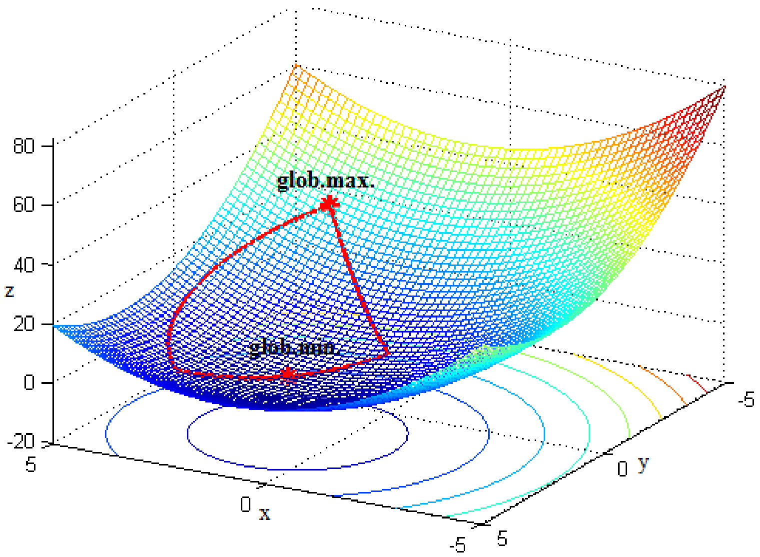
výpočtem dostáváme $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ a po dosazení do vzorců pro x a y získáme souřadnice dvou bodů $P_8 = (2,4)$ a $P_9 = (-2,-4)$. Tyto body neuvažujeme, jelikož neleží v M.

3) Funkční hodnoty v bodech podezřelých z existence globálních extrémů:

1. $f(P_1) = 20 - 6\sqrt{10}$
2. $f(P_3) = 20 + 2\sqrt{10}$
3. $f(P_5) = 0$
4. $f(P_6) = -\frac{9}{2}$

Z vypočtených funkčních hodnot je zřejmé, že funkce f nabývá globálního maxima v bodě P_3 a globálního minima v bodě P_6.

Závěr: Funkce $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y$ má v bodě $P_3 = (\sqrt{10}, -\sqrt{10})$ globální maximum a v bodě $P_6 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ globální minimum na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq |y|, x^2 + y^2 \leq 20\}$.



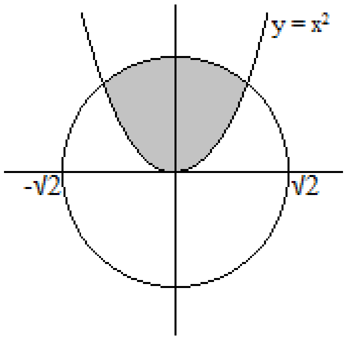
Obrázek 2.35: Graf funkce $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y$.

Příklad 27

$$f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 8y + 2; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\right\}$$

Řešení:

1) Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru (viz obrázek 2.36) vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x,y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.36: množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$

2) Body podezřelé z existence globálních extrémů:

   1. *Uvnitř množiny M:*
      Parciální derivace $f'_x = 6x$, $f'_y = 6y - 8$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic
      $$6x = 0, \qquad 6y - 8 = 0.$$
      První bod podezřelý z globálního extrému je $P_0 = \left(0, \frac{4}{3}\right)$.
   2. *Na hranici množiny M:*
      Hranice se skládá ze dvou částí (část kružnice a část paraboly). Nejdříve vyšetříme průsečíky těchto částí a poté každou část zvlášť.
      a) Průsečíky kružnice $x^2 + y^2 = 2$ a paraboly $y = x^2$:
         Do rovnice $x^2 + y^2 = 2$ dosadíme $x^2 = y$, dostáváme rovnici
         $$y^2 + y - 2 = 0.$$
         Po vyřešení dostáváme body $P_1 = (1,1)$ a $P_2 = (-1,1)$.
      b) Část paraboly $y = x^2$, kde $x \in (-1,1)$ - metoda přímého dosazení:
         Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné
         $$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 3x^4 - 5x^2 + 2.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'(x) = 12x^3 - 10x = 0,$$

po vyřešení dostaneme tři body podezřelé z globálního extrému a to $P_3 = (0,0)$, $P_4 = \left(\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{5}{6}\right)$ a $P_5 = \left(-\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{5}{6}\right)$.

c) Část paraboly $x^2 + y^2 - 2 = 0$, kde $x \in (-1, 1)$ - metoda Lagrangeových multiplikátorů:
Sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = 3x^2 + 3y^2 - 8y + 2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2).$$

Parciální derivace funkce $L(x, y, \lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} L'_x &= 6x + 2\lambda x = 0 \\ L'_y &= 6y - 8 + 2\lambda y = 0 \\ g(x,y) &= x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

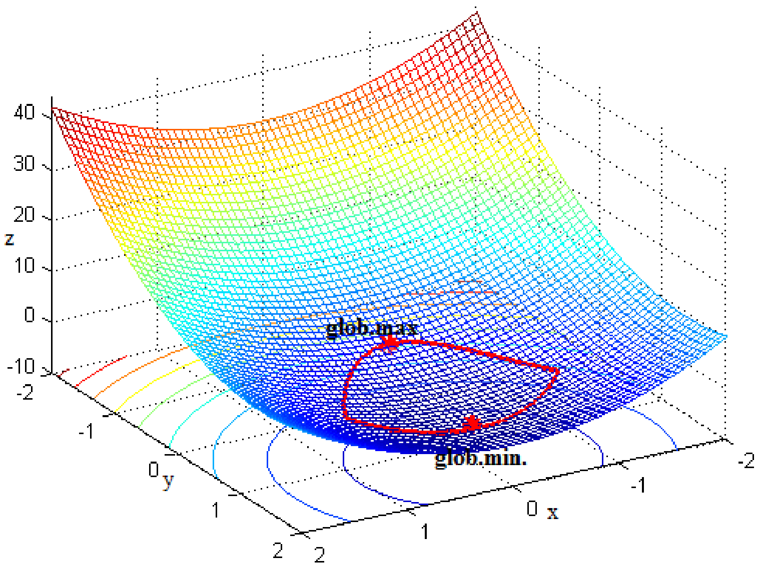
Z první rovnice vidíme, že aby byla splněna rovnost, musí být buď $x = 0$, nebo $\lambda = -3$ - tuto možnost pro λ vyloučíme, protože pak by nebyla splněna rovnost v druhé rovnici. Po dosazení $x = 0$ do vazební podmínky získáváme dva podezřelé body $P_6 = (0, \sqrt{2})$ a $P_7 = (0, -\sqrt{2})$ - ten vyloučíme, jelikož neleží v M.

3. Funkční hodnoty v bodech podezřelých z existence globálních extrémů:

   1. $f(P_0) = -\frac{10}{3}$
   2. $f(P_1) = f(P_2) = 0$
   3. $f(P_3) = 2$
   4. $f(P_4) = -\frac{1}{12}$
   5. $f(P_5) = -\frac{1}{12}$
   6. $f(P_6) = 8 - 8\sqrt{2}$

Z vypočtených funkčních hodnot je zřejmé, že funkce f nabývá globálního minima v bodě P_0 a globálního maxima v bodě P_3.

Závěr: Funkce $f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 8y + 2$ má v bodě $P_0 = \left(0, \frac{4}{3}\right)$ globální minimum a v bodě $P_3 = (0, 0)$ globální maximum na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$.



Obrázek 2.37: Graf funkce $f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 8y + 2$.

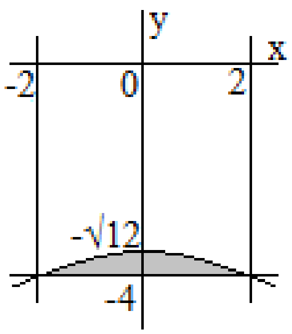
Příklad 28

$f(x, y) = 2x^2 - 2y^2 - 3x + 6y + 4; \qquad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 \geq 12, -4 \leq y \leq 0\right\}$

Poznámka 11 Když v nerovnici $y^2 - x^2 \geq 12$ nahradíme znaménko nerovnosti rovností, dostaneme rovnici hyperboly.

Řešení:

1) Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru (viz obrázek 2.38) vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x, y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.38: množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 \geq 12, -4 \leq y \leq 0\}$

2) Body podezřelé z existence globálních extrémů:

1. *Uvnitř množiny M*:
Parciální derivace $f'_x = 4x - 3$, $f'_y = -4y + 6$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic

$$4x - 3 = 0, \qquad -4y + 6 = 0.$$

První bod podezřelý z globálního extrému je $P_0 = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$, ale protože neleží v množině M, neuvažujeme jej.

2. *Na hranici množiny M:*
Hranice je tvořená dvěmi částmi (úsečka a část hyperboly). Jako první vyšetříme průsečíky těchto částí a poté obě části zvlášť.

a) Průsečíky hyperboly $y^2 - x^2 = 12$ a přímky $y = -4$:
Do rovnice $y^2 - x^2 = 12$ dosadíme $y = -4$, dostáváme rovnici

$$16 - x^2 = 12,$$

první podezřelé body jsou tedy $P_1 = (2, -4)$, $P_2 = (-2, -4)$.

b) Část přímky $y = -4$, kde $x \in (-2, 2)$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 2x^2 - 3x - 52.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'(x) = 4x - 3 = 0,$$

po vyřešení dostaneme další podezřelý bod $P_3 = \left(\frac{3}{4}, -4\right)$.

c) Část hyperboly $y^2 - x^2 - 12 = 0$, kde $y \in (-4, -\sqrt{12}\rangle$ - metoda Lagrangeových multiplikátorů:
Sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = 2x^2 - 2y^2 - 3x + 6y + 4 + \lambda(y^2 - x^2 - 12).$$

Parciální derivace funkce $L(x, y, \lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} L'_x &= 4x - 3 - 2\lambda x = 0 \\ L'_y &= -4y + 6 + 2\lambda y = 0 \\ g(x, y) &= y^2 - x^2 - 12 = 0 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme

$$x = \frac{3}{2(2-\lambda)}, \quad y = \frac{3}{2-\lambda},$$

to dosadíme do vazební podmínky, z rovnice

$$g(x,y) = \frac{9}{(2-\lambda)^2} - \frac{9}{4(2-\lambda)^2} - 12 = 0$$

výpočtem dostáváme $\lambda_1 = \frac{11}{4}$, $\lambda_2 = \frac{5}{4}$ a po dosazení do vzorců pro x a y získáme dva body $P_4 = (-2,-4)$, který již uvažujeme a $P_5 = (2,4)$, který uvažovat nebudeme, jelikož neleží v M.

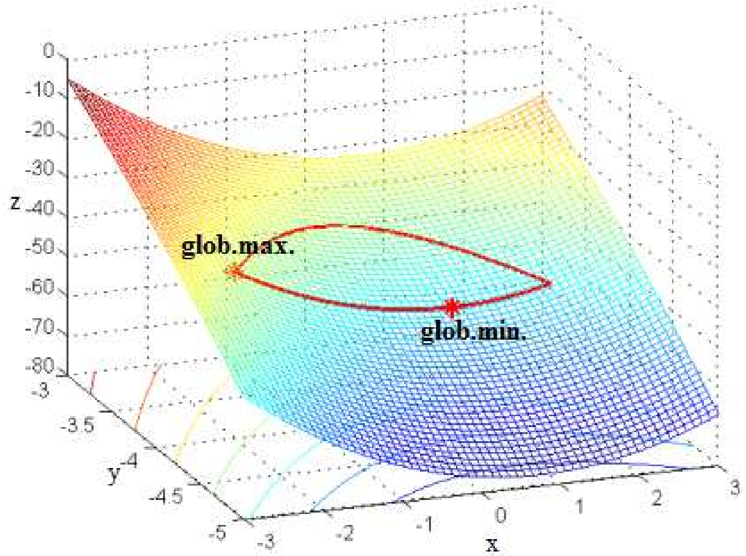
d) Mezi body podezřelé z existence globálního extrému přidáme ještě bod $P_6 = (0, -\sqrt{12})$.

3) Funkční hodnoty podezřelých bodů:

1. $f(P_1) = -50$
2. $f(P_2) = -38$
3. $f(P_3) = -53,125$
3. $f(P_6) = -20 - 6\sqrt{12}$

Z vypočtených funkčních hodnot je zřejmé, že funkce f nabývá globálního maxima v bodě P_2 a globálního minima v bodě P_3.

Závěr: Funkce $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2 - 3x + 6y + 4$ má v bodě $P_2 = (-2,-4)$ globální maximum a v bodě $P_3 = \left(\frac{3}{4}, -4\right)$ globální minimum na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 \geq 12, -4 \leq y \leq 0\}$.



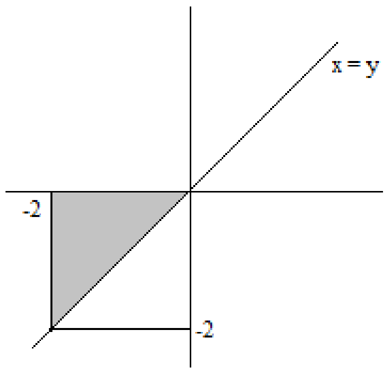
Obrázek 2.39: Graf funkce $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - y + 4x - 1$.

Příklad 29

$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - y + 4x - 1; \qquad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0, x \leq y \leq 0\}$

Řešení:

1) Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru (viz obrázek 2.40) vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x, y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.40: množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0, x \leq y \leq 0\}$

2) Body podezřelé z existence globálních extrémů:

1. *Uvnitř množiny M*:
   Parciální derivace $f'_x = 4x - y + 4$, $f'_y = 2y - x - 1$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic
   $$f'_x = 4x - y + 4 = 0, \qquad f'_y = 2y - x - 1 = 0.$$
   Z první rovnice vyjádříme x a to jako $x = \frac{y-4}{4}$, to dosadíme do druhé a máme bod $P_0 = (-1, 0)$, který však neleží uvnitř množiny M, tudíž jej nebudeme uvažovat.
2. *Na hranici množiny M:*
   Hranice se skládá ze tří částí (3 úsečky), které postupně vyšetříme.
   a) Část přímky $x = -2$, kde $y \in (-2, 0)$ - metoda přímého dosazení: Do funkčního předpisu funkce f dosadíme $x = -2$, dostáváme funkci jedné proměnné
   $$F(y) = f(\psi(y), y) = y^2 + y - 1.$$
   Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule
   $$F'(y) = 2y + 1 = 0,$$
   další bod podezřelý z globálního extrému je tedy $P_1 = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.
   b) Část přímky $x = y$, kdy $y \in (-2, 0)$ - metoda přímého dosazení: Do funkčního předpisu funkce f dosadíme $x = y$, dostáváme funkci jedné proměnné
   $$F(y) = f(\psi(y), y) = 2y^2 + 3y - 1.$$
   Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule
   $$F'(y) = 4y + 3 = 0,$$
   další bod podezřelý z globálního extrému je tedy $P_2 = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$.
   c) Část přímky $y = 0$, kdy $x \in (-2, 0)$ - metoda přímého dosazení: Do funkčního předpisu funkce f dosadíme $y = 0$, dostáváme funkci jedné proměnné
   $$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 2x^2 + 4x - 1.$$
   Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule
   $$F'(x) = 4x + 4 = 0,$$
   dostáváme bod se stejnými souřadnicemi jako bod $P_0 = (-1, 0)$, není jej tedy uvažujeme.

d) Mezi body podezřelé z existence globálních extrémů přidáme vrcholy trojúhelníku, který ohraničuje množinu M.

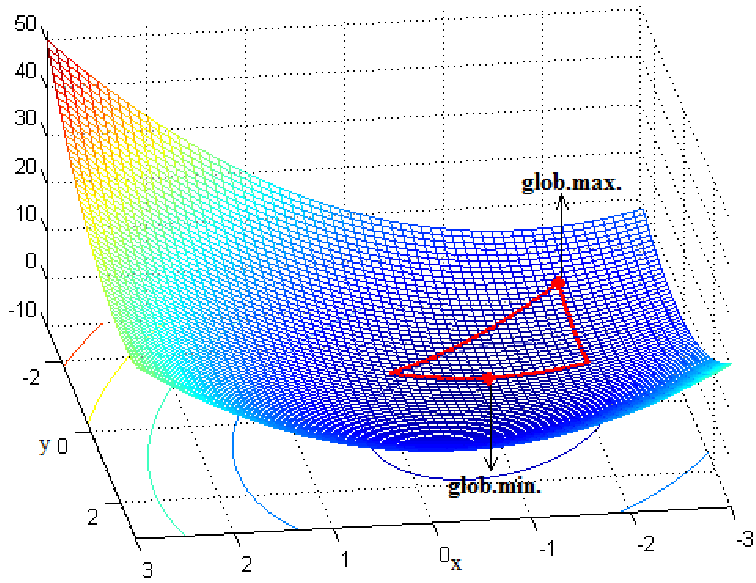
$$P_3 = (0,0), \quad P_4 = (-2,0) \quad P_5 = (-2,-2).$$

3) Funkční hodnoty podezřelých bodů:

1. $f(P_0) = -3$
2. $f(P_1) = -\frac{5}{4}$
3. $f(P_2) = -\frac{17}{8}$
4. $f(P_3) = -1$
5. $f(P_4) = -1$
6. $f(P_5) = 1$

Z vypočtených funkčních hodnot je zřejmé, že funkce f nabývá globálního minima v bodě (P_0) a globálního maxima v bodě (P_5).

Závěr: Funkce $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - y + 4x - 1$ má v bodě $P_0 = (-1,0)$ globální minimum a v bodě $P_5 = (-2,-2)$ globální maximum na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0, x \leq y \leq 0\}$.



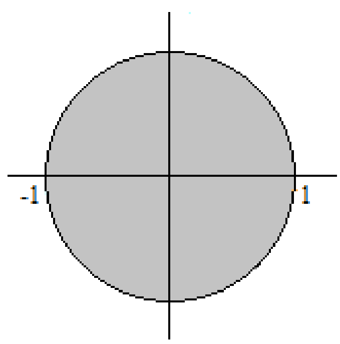
Obrázek 2.41: Graf funkce $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - y + 4x - 1$.

Příklad 30

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{y^2 - x^2}; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Řešení:

1) Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru (viz obrázek 2.42) vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x,y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.42: množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

2) Body podezřelé z existence globálních extrémů:

1. *Uvnitř množiny M*:
   Parciální derivace $f'_x = 2xe^{y^2-x^2}(1-x^2+y^2)$, $f'_y = 2ye^{y^2-x^2}(x^2-y^2-1)$ položíme rovny nule, dostáváme soustavu rovnic

   $$f'_x = 2xe^{y^2-x^2}(1-x^2+y^2) = 0, \qquad f'_y = 2ye^{y^2-x^2}(x^2-y^2-1) = 0.$$

   Z této soustavy vidíme, že první bod, který splňuje rovnost, je $P_0 = (0,0)$.
   Když z výrazu $(1-x^2+y^2)$ v první rovnici vyjádříme $y^2 = x^2 - 1$ a dosadíme to do výrazu (x^2-y^2-1), dostaneme $0 = 0$, tedy nekonečně mnoho podezřelých bodů ležících na hyperbole $x^2 - y^2 = 1$. Z těchto bodů však musíme vybrat pouze ty, pro které platí současně $x^2+y^2 \leq 1$ a $x^2 - y^2 = 1$. Těmto rovnicím odpovídají body $P_1 = (1,0)$ a $P_2 = (-1,0)$, které však uvažovat nemůžeme, jelikož nepatří do vnitřku, ale do hranice množiny M.
2. *Na hranici množiny M:*
   a) Kružnice $x^2 + y^2 = 1$ - metoda přímého dosazení:
   Mohli bychom použít také Lagrangeovy multiplikátory, ale přímým dosazením dojdeme k výsledku rychleji a elegantněji.
   Z podmínky vyjádříme např. $y^2 = 1 - x^2$, to dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

   $$F(x) = f(x, \varphi(x)) = (2x^2-1)e^{1-2x^2}.$$

   Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

   $$F'(x) = 4xe^{1-2x^2}(2-2x^2) = 0,$$

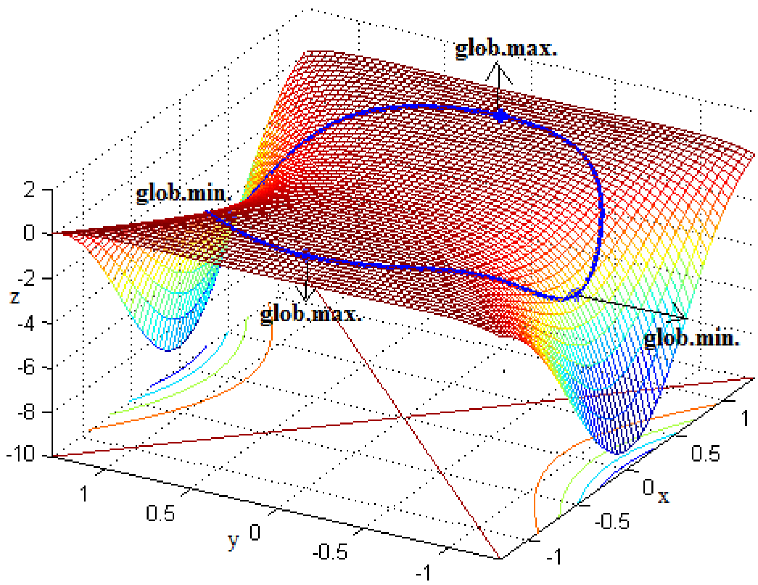
   této rovnici odpovídají tři řešení pro x a to $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$ a tedy 4 podezřelé body $P_3 = (0,1)$, $P_4 = (0,-1)$, $P_5 = (1,0)$, $P_6 = (-1,0)$.

3) Funkční hodnoty podezřelých bodů:

1. $f(P_0) = 0$
2. $f(P_3) = f(P_4) = -e$
3. $f(P_5) = f(P_6) = \frac{1}{e}$

Z vypočtených funkčních hodnot je zřejmé, že funkce f nabývá globálního minima v bodech (P_3), (P_4) a globálního maxima v bodech (P_5), (P_6).

Závěr: Funkce $f(x,y) = (x^2-y^2)e^{y^2-x^2}$ má v bodech $P_3 = (0,1)$ a $P_4 = (0,-1)$ globální minimum a v bodech $P_5 = (1,0)$ a $P_6 = (-1,0)$ globální maximum na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.



Obrázek 2.43: Graf funkce $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{y^2 - x^2}$.

Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit sbírku podrobně řešených příkladů na téma extrémy funkcí dvou proměnných.

Práce se skládá ze dvou velkých kapitol. Druhá kapitola je pak rozdělena do 3 částí podle toho, jakými druhy extrémů se zabývá.

První, pouze teoretická kapitola, se zaměřuje na teorii týkající se funkce více proměnných, konkrétně pak na funkci dvou proměnných a dále na parciální derivace prvního a druhého řádu funkce dvou proměnných, jelikož bez znalostí těchto částí diferenciálního počtu nelze vyšetřovat extrémy funkcí dvou proměnných.

Druhá, teoreticko — praktická kapitola má 3 části a to lokální extrémy, vázané extrémy a globální extrémy funkcí dvou proměnných.

První část, tedy lokální extrémy funkcí dvou proměnných, nejprve teoreticky pojednává o tom, co to lokální extrémy jsou, jaké jsou nutné a postačující podmínky pro jejich existenci, kde těchto extrémů funkce může nabývat, jakou roli hrají při jejich výpočtu parciální derivace, co znamenají pojmy stacionární a sedlový bod, k čemu slouží Hessova matice a dle jakých kritérií rozhodujeme o existenci lokálních extrémů. Teorie je zakončená návodem, jak bod po bodu postupovat při vyšetřování těchto extrémů. Tato část je poté doplněna deseti podrobně vyřešenými příklady, které jsou seřazeny od jednodušších po složitější.

Druhá část, tedy vázané lokální extrémy funkcí dvou proměnných, také nejprve nabízí teorii, co tyto extrémy znamenají, jak je můžeme geometricky interpretovat, co je to metoda přímého dosazení a Lagrangeova metoda neurčitých koeficientů a jak při vyšetřování těchto extrémů postupovat. Kapitola je následně opět doplněna deseti příklady na toto téma, z nichž pět se zabývá metodou přímého dosazení a dalších pět Lagrangeovou metodou.

Poslední, tedy třetí část, se zabývá globálními extrémy funkcí dvou proměnných. Pojednává o tom, jaký je rozdíl mezi těmito a lokálními extrémy, kde funkce těchto extrémů nabývá, co je to kompaktní množina a jak s touto teorií souvisí a konečně nabízí opět názorný postup, kterým se při řešení úloh na toto téma může řídit. Část je zakončena deseti rozsáhlými podrobně vyřešenými příklady.

Práce obsahuje celkem třicet vyřešených příkladů dopněných o grafické znázornění výsledného řešení, na kterých by čtenář, tedy student některého z nižších ročníků matematických oborů Univerzity Palackého, měl dostatečně pochopit tuto látku a byl tak připraven jak na zápočtové testy, tak zkoušky, případně další studium, které znalost této části matematické analýzy bude vyžadovat.

Literatura

[1] Jarník V. — *Diferenciální počet (II.),* ACADEMA, Praha 1976

[2] Rektorys K. a spol. — *Přehled užité matematiky I.,* PROMETHEUS, Praha 1995

[3] Kluvánek I., Mišík L., Švec M. — *Matematika pro studium technických věd I.,* SVTL, Bratislava 1963

[4] Škrášek J., Tichý Z. — *Základy aplikované matematiky I.,* SNTL, Praha 1983

[5] Musilová J., Musilová P. — *Matematika II/2 pro porozumění i praxi,* VUTIUM, Brno 2012

[6] Moučka J., Rádl P. — *Matematika pro studenty ekonomie,* GRADA publishing a.s., Praha 2010

[7] Opory pro studium M-E na UPOL: *http://kma.me.sweb.cz/derivace+diferenciál.pdf*

[8] Charvát J., Kelar V., Šibrava Z. — *Matematika 2 — Sbírka příkladů,* ČVUT, Praha 2006