

# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV RADIOELEKTRONIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION  
DEPARTMENT OF RADIO ELECTRONICS

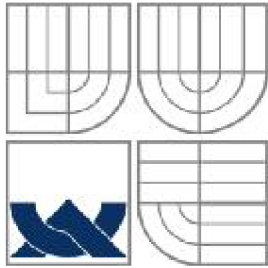
MODEL KOMORY REAKTORU PRO MIKROVLNNÝ OHŘEV

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
MASTER'S THESIS

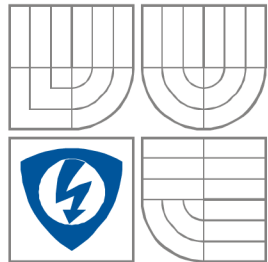
AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Bc. TOMÁŠ KŘÍŽ

BRNO 2008



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A  
KOMUNIKAČNÍCH  
TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV RADIOELEKTRONIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION  
DEPARTMENT OF RADIO ELECTRONICS

MODEL KOMORY REAKTORU PRO MIKROVLNNÝ OHŘEV  
MODEL OF THE REACTOR CHAMBER FOR MICROWAVE HEATING

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
MASTER'S THESIS

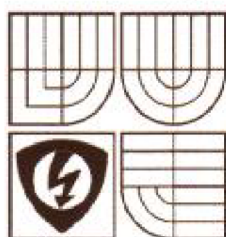
AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Bc. Tomáš Kříž

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

Ing. Eva Kroutilová, Ph.D.

BRNO, 2008



VYSOKÉ UČENÍ  
TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky  
a komunikačních technologií

Ústav radioelektroniky

# Diplomová práce

magisterský navazující studijní obor  
**Elektronika a sdělovací technika**

**Student:** Kříž Tomáš, Bc.

**Ročník:** 2

**ID:** 88511

**Akademický rok:** 2007/08

**NÁZEV TÉMATU:**

## Model komory reaktoru pro mikrovlnný ohřev

**POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:**

Prostudujte základní principy numerického modelování vF polí v prostředí ANSYS. Zaměřte se na sdružené úlohy emg. pole - teplotní pole.

Navrhněte zařízení pro úpravu emulze oleje (obsah vody nad 30% objemu). Zařízení navrhněte pro pracovní frekvenci v oblasti  $f = 2,45$  GHz. Navrhněte regulaci výkonu pro optimální proces vysoušení, distribuce tepla v nehomogenním prostředí s ohledem na chemické a fyzikální změny v komoře reaktoru.

Vytvořte numerický model, v němž ověříte navržené zařízení pro úpravu emulze oleje s regulací výkonu pro optimální proces vysoušení, distribuce tepla v nehomogenním prostředí s ohledem na chemické a fyzikální změny v komoře reaktoru.

**DOPORUČENÁ LITERATURA:**

[1] ANSYS Users Guides, v.8.1, USA.

[2] FIALA, P. Coupled electromagnetic model of smoothing choke. In Proceedings of AMTEE'01 Fifth International Conference. Plzeň, 2001, p. C05, ISBN 80-7082-756-4.

[3] KUNZEL, G. Matematické modely sdílení tepla v konstrukcích elektrotechniky. 1990, Praha: Academia. ISBN 80-200-0165-4

**Termín zadání:** 5.10.2007

**Termín odevzdání:** 30.5.2008

**Vedoucí projektu:** Ing. Eva Kroutilová, Ph.D.

prof. Dr. Ing. Zbyněk Raida  
předseda oborové rady



**UPOZORNĚNÍ:**

Autor diplomové práce nesmí při vytváření diplomové práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

## LICENČNÍ SMLOUVA POSKYTOVANÁ K VÝKONU PRÁVA UŽÍT ŠKOLNÍ DÍLO

uzavřená mezi smluvními stranami:

### 1. Pan/paní

Jméno a příjmení: Bc. Tomáš Kříž  
Bytem: R. Těsnohlídka 1525, Čáslav, 286 01  
Narozen/a (datum a místo): 1. července 1980 v Čáslavi

(dále jen „autor“)

a

### 2. Vysoké učení technické v Brně

Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií  
se sídlem Údolní 53, Brno, 602 00  
jejímž jménem jedná na základě písemného pověření děkanem fakulty:  
prof. Dr. Ing. Zbyněk Raida, předseda rady oboru Elektronika a sdělovací technika  
(dále jen „nabyvatel“)

### Čl. 1

#### Specifikace školního díla

1. Předmětem této smlouvy je vysokoškolská kvalifikační práce (VŠKP):

- ▣ disertační práce
  - ▣ diplomová práce
  - ▣ bakalářská práce
  - ▣ jiná práce, jejíž druh je specifikován jako .....
- (dále jen VŠKP nebo dílo)

Název VŠKP: Model komory reaktoru pro mikrovlnný ohřev  
Vedoucí/ školitel VŠKP: Ing. Eva Kroutilová, Ph.D.  
Ústav: Ústav teoretické a experimentální elektrotechniky  
Datum obhajoby VŠKP: \_\_\_\_\_

VŠKP odevzdal autor nabyvateli\*:

v tištěné formě – počet exemplářů: 2  
v elektronické formě – počet exemplářů: 2

2. Autor prohlašuje, že vytvořil samostatnou vlastní tvůrčí činností dílo shora popsané a specifikované. Autor dále prohlašuje, že při zpracovávání díla se sám nedostal do rozporu s autorským zákonem a předpisy souvisejícími a že je dílo dílem původním.
3. Dílo je chráněno jako dílo dle autorského zákona v platném znění.
4. Autor potvrzuje, že listinná a elektronická verze díla je identická.

---

\* hodíci se zaškrtněte



## Článek 2

### Udělení licenčního oprávnění

1. Autor touto smlouvou poskytuje nabyvateli oprávnění (licenci) k výkonu práva uvedené dílo nevýdělečně užit, archivovat a zpřístupnit ke studijním, výukovým a výzkumným účelům včetně pořizování výpisů, opisů a rozmnoženin.
2. Licence je poskytována celosvětově, pro celou dobu trvání autorských a majetkových práv k dílu.
3. Autor souhlasí se zveřejněním díla v databázi přístupné v mezinárodní síti
  - ihned po uzavření této smlouvy
  - ▣ 1 rok po uzavření této smlouvy
  - ▣ 3 roky po uzavření této smlouvy
  - ▣ 5 let po uzavření této smlouvy
  - ▣ 10 let po uzavření této smlouvy(z důvodu utajení v něm obsažených informací)
4. Nevýdělečné zveřejňování díla nabyvatelem v souladu s ustanovením § 47b zákona č. 111/ 1998 Sb., v platném znění, nevyžaduje licenci a nabyvatel je k němu povinen a oprávněn ze zákona.

## Článek 3

### Závěrečná ustanovení

1. Smlouva je sepsána ve třech vyhotoveních s platností originálu, přičemž po jednom vyhotovení obdrží autor a nabyvatel, další vyhotovení je vloženo do VŠKP.
2. Vztahy mezi smluvními stranami vzniklé a neupravené touto smlouvou se řídí autorským zákonem, občanským zákoníkem, vysokoškolským zákonem, zákonem o archivnictví, v platném znění a popř. dalšími právními předpisy.
3. Licenční smlouva byla uzavřena na základě svobodné a pravé vůle smluvních stran, s plným porozuměním jejímu textu i důsledkům, nikoliv v tísní a za nápadně nevýhodných podmínek.
4. Licenční smlouva nabývá platnosti a účinnosti dnem jejího podpisu oběma smluvními stranami.

V Brně dne: 30. května 2008

.....  
Nabyvatel

.....  
Autor

## Abstrakt

Diplomová práce se zabývá návrhem vysokofrekvenční komory, která slouží pro vysoušení emulze složené z oleje a vody, kde obsah vody je nad 30% objemu emulze. Vysokofrekvenční komora pracuje na kmitočtu 2,45GHz. Byl sestaven numerický model, ve kterém je řešena vysokofrekvenční-tepelná sdružená úloha. Návrh vysokofrekvenční komory je řešen s ohledem na distribuci tepla v nehomogenním prostředí a chemické a fyzikální změny. Rozměry vysokofrekvenční komory zaručují v komoře největší možný přenášený výkon ze zdroje a rovnoměrné rozložení elektromagnetického pole. Tyto podmínky jsou nutné k rovnoměrnému ohřevu vysoušené emulze. Diplomová práce obsahuje několik numerických modelů s různými rozměry, na základě kterých byl vybrán model s nejkratší dobou ohřevu vzhledem k objemu emulze.

## Abstrakt

The diploma thesis deals with the concept of a high-frequency chamber which serves for desiccation of emulsion consisted of oil and water where the contents of water is over 30% of the emulsion capacity. The high-frequency chamber works on frequency 2,45 GHz. The task was to design a numerical model in which a high-frequency thermic conjugated problem is solved. The design of a high-frequency chamber is made up considering the heat distribution in inhomogeneous environment as well as chemical and physical changes. The proportions of the high-frequency chamber can guarantee the biggest output transmitted from the source to the chamber with the emulsion desiccated and uniform layout of electromagnetic field. These criteria are necessary for smooth heating of the emulsion desiccated. In this diploma thesis, there were several numerical models with various proportions made up. Finally, the one with the shortest time of heating the emulsion in reference to emulsion capacity was chosen.

## Klíčová slova

Vysokofrekvenční komora, mikrovlnný ohřev, sdružená úloha, změna skupenství, metoda konečných prvků, ANSYS, ADPL

## Keywords

High-frequency chamber, microwave heating, coupled analysis, phase changes, finite element Method, ANSYS, ADPL

KŘÍŽ, T. *Model komory reaktoru pro mikrovlnný ohřev: Diplomová práce*. Brno: FEKT VUT v Brně, 2008. 51 s.

## Prohlášení

Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma Model komory reaktoru pro mikrovlnný ohřev jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této diplomové práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

V Brně dne 30. května 2008

.....  
podpis autora

## Poděkování

Děkuji vedoucí diplomové práce Ing. Evě Kroutilové, Ph.D. za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé diplomové práce.

V Brně dne 30. května 2008

.....  
podpis autora

# OBSAH

Úvod	9
<b>1. Metoda konečných prvků</b>	<b>10</b>
1.1 Aproximace uzlových hodnot	10
1.2 Metody pro minimalizaci zbytku	14
1.2.1 Metoda nejmenších čtverců	14
1.2.2 Metoda vážených reziduí	14
1.2.3 Galerkinova metoda	14
1.3 Výpočet koeficientů $K$ a vektoru $F$	16
<b>2. Výkon elektromagnetického pole</b>	<b>17</b>
2.1 Maxwellovy rovnice a okrajové podmínky	17
2.2 Harmonický ustálený stav	18
2.3 Poytingův vektor	18
2.4 Rovnice výkonové rovnováhy	20
<b>3. Teplo</b>	<b>21</b>
3.1 Sdílení tepla	21
3.1.1 Sdílení tepla radiací	21
3.1.2 Sdílení tepla kondukcí	22
3.2 Sdílení tepla konvekcí	23
3.3 První zákon termodynamiky	24
3.4 Tepelné děje	25
3.4.1 Izobarický děj	26
3.4.2 Izochorický děj	26
3.4.3 Izotermický děj	27
3.4.4 Adiabatický děj	28
<b>4. Vlnovod</b>	<b>29</b>
4.1 Kruhový vlnovod	30
4.1.1 Určení vidových čísel	31
<b>5. Návrh numerického modelu</b>	<b>32</b>
5.1 Numerický model – návrh rozměrů	32
5.2 Ověření navržené HF komory	34
5.3 Matematický popis numerického modelu	35
5.3.1 Matematický popis HF modelu	35
5.3.2 Matematický popis teplotního modelu	36
<b>6. Popis funkce numerického modelu</b>	<b>37</b>
<b>7. Porovnání různých numerických modelů</b>	<b>43</b>
<b>8. Výsledky numerické analýzy</b>	<b>44</b>
<b>9. Závěr</b>	<b>49</b>

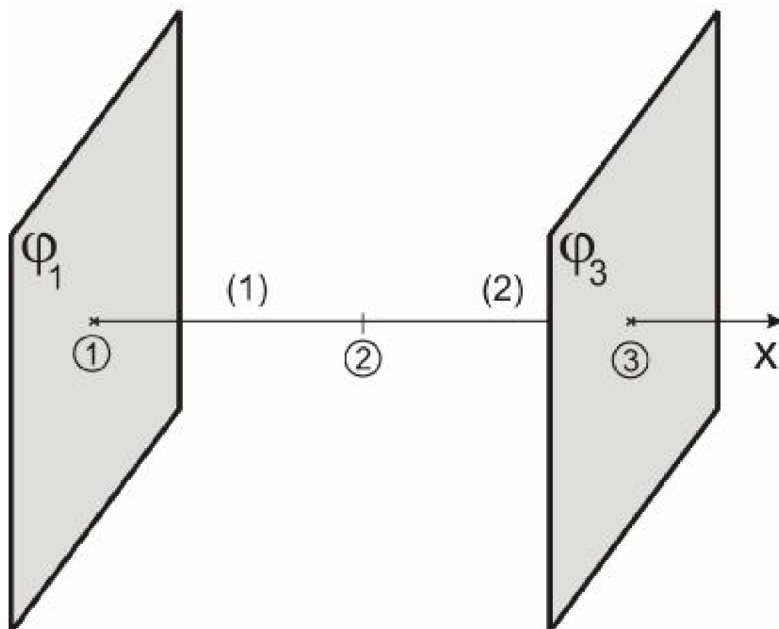
10. Použitá literatura	50
11. Seznam symbolů a zkratk	51

## Úvod

Úkolem diplomové práce bylo navržení vysokofrekvenční komory, která má sloužit pro vysoušení emulze složené z oleje a vody, kde obsah vody je nad 30 %, protože voda obsažená v oleji zhoršuje jeho dielektrické vlastnosti. Vysokofrekvenční ohřev byl zvolen, protože má selektivní charakter pro vodu díky jejím vodivým vlastnostem (ohřev probíhá hlavně v částech obsahujících vodu). Rozměry vysokofrekvenční komory mají zaručit co největší přenos výkonu ze zdroje buzení do HF komory s vysoušenou emulzí a rovnoměrné rozložení elektromagnetického pole v objemu emulze (nesmí docházet k ohřevu emulze pouze v některých místech). Pro buzení byl zvolen klystron s výkonem 800W, pracující na kmitočtu 2,45GHz. Bylo vytvořeno několik modelů s různými rozměry a z nich vybrán model s nejkratší dobou vysoušení vzhledem k objemu komory.

## 1. Metoda konečných prvků

Máme dvě rovinné elektrody se známými potenciály  $\varphi_1$  a  $\varphi_3$ . Elektrody jsou od sebe vzdáleny 1m. Dále známe objemovou hustotu náboje  $\rho$  a permitivitu  $\epsilon$ , budeme řešit rozložení potenciálu mezi deskami. Úloha je znázorněna na obr. 1.1.



Obr. 1.1 Zadání úlohy

Úsek mezi elektrodami byl rozdělen na dva konečné prvky (1) a (2). Konečný prvek (1) je vymezen uzly {1} a {2}, konečný prvek (2) uzly {2} a {3}. Uzly mají souřadnice  $x_1=0$ ,  $x_2=0,5$  a  $x_3=1$ . Hodnoty potenciálů v uzlech {1} a {3} jsou známe, jsou to tzv. okrajové podmínky. Pro uzel {2}, ve kterém neznáme hodnotu potenciálu, je nutné sestavit rovnici. Obecně musíme sestavit tolik rovnic, kolik je vnitřních uzlů (uzlů, ve kterých neznáme hodnotu).

### 1.1 Aproximace uzlových hodnot

Aproximace v celé oblasti (globální aproximace) je složena z lokálních aproximací na jednotlivých konečných prvcích. Lokální aproximace na prvku (1) je určena rovnicí přímky

$$\tilde{\varphi}^{(1)}(x) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \varphi_1 = \varphi_1 \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \varphi_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (1.1)$$

Aproximaci lze vyjádřit lineární kombinací uzlových potenciálů  $\varphi$  a tvarových funkcí daného prvku. Tvarové funkce se značí  $N_{\check{c}.uzlu}^{(\check{c}.prvku)}$ .

$$\tilde{\varphi}^{(1)}(x) = \varphi_1 N_1^{(1)} + \varphi_2 N_2^{(1)} \quad (1.2)$$

$$N_1^{(1)} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad N_2^{(1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad x \in \langle x_1, x_2 \rangle \quad (1.3)$$

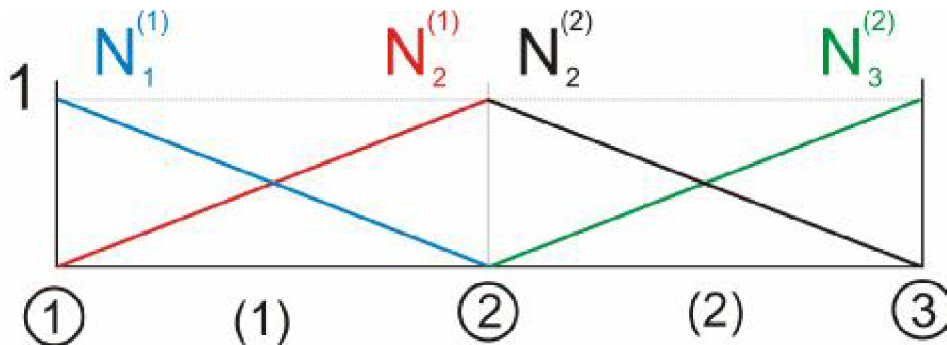
Lokální aproximace na prvku (2) je dána podobně:

$$\tilde{\varphi}^{(2)}(x) = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{x_3 - x_2}(x - x_2) + \varphi_2 = \varphi_1 \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + \varphi_2 \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \quad (1.4)$$

$$\tilde{\varphi}^{(2)}(x) = \varphi_2 N_2^{(2)} + \varphi_3 N_3^{(2)} \quad (1.5)$$

$$N_2^{(2)} = \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} \quad N_3^{(2)} = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \quad x \in \langle x_2, x_3 \rangle \quad (1.6)$$

Každý konečný prvek je popsán tolika tvarovými funkcemi, kolik má uzlů. V 1D má konečný prvek dvě tvarové funkce. Každá tvarová funkce  $N_j^{(e)}$  je rovna jedné v uzlu  $j$ , lineární na  $(e)$ -tém prvku, nulová ve druhém uzlu prvku a mimo prvek. Tvarové funkce jsou na obr. 1.2.

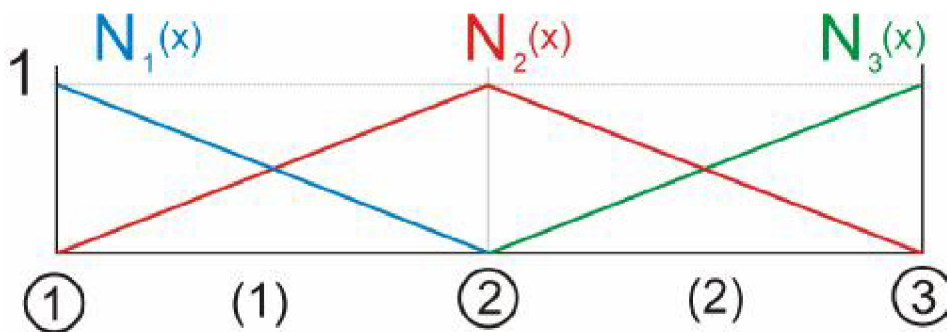


**Obr. 1.2** Tvarové funkce

Dále zavedeme báзовou funkci  $N_{\varepsilon, \text{uzlu}}$ . Báзовá funkce  $N_j(x)$  pro  $j$ -tý uzel je dána součtem tvarových funkcí, které mají v tomto uzlu hodnotu jedna. Každému vnitřnímu uzlu odpovídají dvě tvarové funkce. Báзовá funkce krajních uzlů je dána jejich tvarovou funkcí. Báзовé funkce jsou na obr. 1.3. Báзовé funkce pro zvolenou úlohu:

$$N_1(x) = N_1^{(1)}, \quad N_2(x) = N_2^{(1)} + N_2^{(2)}, \quad N_3(x) = N_3^{(2)} \quad (1.7)$$

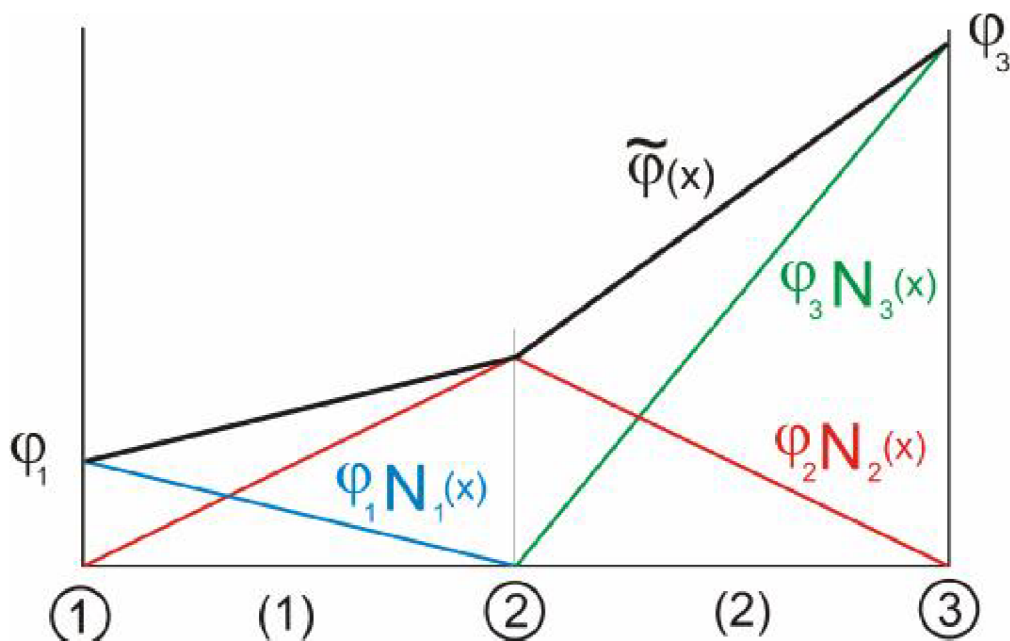




Obr. 1.3 Bázové funkce

Pomocí definovaných bázových funkcí  $N_j(x)$  lze zapsat globální aproximace (obr. 1.4) jako:

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{j=1}^3 \varphi_j N_j(x) \quad (1.8)$$



Obr. 1.4 Globální aproximace

Lineární aproximace 1D úlohy s  $U$  uzly a  $E = U - 1$  prvky číslovanými vzestupnou řadou lze zapsat pomocí bázových funkcí:

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{j=1}^U \varphi_j N_j(x) \quad (1.9)$$

Lokální aproximace na  $j$ -tém prvku je:

$$\tilde{\varphi}^{(j)}(x) = \varphi_j N_j^{(j)}(x) + \varphi_{j+1} N_{j+1}^{(j)} \quad (1.10)$$

$$N_j^{(j)}(x) = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \quad N_{j+1}^{(j)} = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \quad (1.11)$$

Vztah (1.11) představuje aproximaci Lagrangeovým polynomem 1. stupně. Pro tvarové funkce lze použít polynom 2. nebo 3. stupně.

Sestavení rovnic pro neznámé uzlové potenciály  $\varphi$  na oblasti  $\Omega$ . Hledáme řešení Poissonovy rovnice (1.14) na hranici  $\Gamma$ . Hranice  $\Gamma$  je dána z hranic  $\Gamma_d$ , na které známe potenciál elektrod a z  $\Gamma_n$ , na které je hodnota  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ , která je zpravidla nulová  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ . Pro hranici  $\Gamma$  platí vztah (1.12). Pro 1D úlohu oblast  $\Omega$  představuje úsečku a hranice

$$\Gamma = \Gamma_d + \Gamma_n \quad \Gamma_d \cap \Gamma_n = 0 \quad (1.12)$$

$\Gamma$  body úsečky. Oblast je rozdělena na  $E$  konečný prvek s  $U$  uzly. Potenciál aproximujeme podle (1.9) z uzlových hodnot  $\varphi_j$  a bázovými funkcemi  $N_j$ .

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} \sum_{j=1}^U \varphi_j N_j \quad (1.13)$$

$$\text{div} \mathbf{D} = \text{div} \varepsilon \mathbf{E} = \text{div} \varepsilon (-\text{grad} \varphi) = \rho \quad (1.14)$$

V Poissonově rovnici (1.14) aproximujeme:

$$\mathbf{D} \approx \mathbf{D} = -\varepsilon \text{grad} \sum_{j=1}^U \varphi_j N_j = -\sum_{j=1}^U \varepsilon \varphi_j \text{grad} N_j. \quad (1.15)$$

Na jednotlivých konečných prvcích předpokládáme konstantní permitivitu. Permitivita může být různá na jednotlivých konečných prvcích. Dosazením aproximace (1.15) do (1.14) není rovnice přesně splněna, ale vykazuje zbytek, který je funkcí souřadnic a uzlových potenciálů.

$$\text{div} \mathbf{D} - \rho = R(x, y, z, \varphi_1, \dots, \varphi_U) \quad (1.16)$$

Je třeba nalézt takové hodnoty  $\varphi_j, j = 1, \dots, U$ , které dají minimální zbytek.

## 1.2 Metody pro minimalizaci zbytku

### 1.2.1 Metoda nejmenších čtverců

Integrujeme kvadrát zbytků, po integraci dostaneme výraz  $I(\varphi_1, \dots, \varphi_U)$ , který je kvadratickou formou uzlových potenciálů. Minimalizací, tj.  $\frac{\partial I}{\partial \varphi_i} = 0, i = 1 \dots U$ , dostaneme systém  $U$  lineárních rovnic pro uzlové potenciály.

$$I = \int_{\Omega} R^2 d\Omega \quad (1.17)$$

### 1.2.2 Metoda vážených reziduí

Metoda spočívá ve vynásobení zbytkové funkce  $R(x, y, z, \varphi_1, \dots, \varphi_U)$  vhodnou váhovou funkcí  $W(x, \varphi_1, \dots, \varphi_U)$  a integrací součinu přes celou analyzovanou oblast a položení výsledku integrace nule.

$$\int_{\Omega} RW_i d\Omega = 0 \quad (1.18)$$

### 1.2.3 Galerkinova metoda

Tato metoda spočívá v minimalizaci zbytku v okolí každého uzlu jeho bázovou funkcí. Za váhovou funkci bereme bázovou funkci daného prvku.

$$\int_{\Omega} RN_i d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, U \quad (1.19)$$

Aplikací na (1.19) dostaneme

$$\int_{\Omega} (\text{div} \mathbf{D} - \rho) N_i d\Omega = 0 \quad (1.20)$$

$$\int_{\Omega} N_i \text{div} \mathbf{D} d\Omega - \int_{\Omega} N_i \rho d\Omega = 0 \quad (1.21)$$

Substituce (1.15) za  $\mathbf{D}$  vede na  $\text{div grad } N_j$ , tj. vyžaduje funkci  $N_j$  dvakrát diferencovatelnou, tedy nejméně kvadratickou. Řád snížíme o jeden aplikací Gaussovy věty na (1.21). Použitím  $\text{div grad } \Phi = \Delta \Phi$  dostaneme:

$$\text{div}(N_i \mathbf{D}) = \text{grad } N_i \cdot \mathbf{D} + N_i \text{div} \mathbf{D} \quad (1.22)$$

na místo (1.21)

$$\int_{\Omega} \left[ \operatorname{div}(N_i \mathbf{D}) - \operatorname{grad} N_i \cdot \mathbf{D} \right] d\Omega = \int_{\Omega} N_i \rho d\Omega \quad (1.23)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(N_i \mathbf{D}) d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{grad} N_i \cdot \mathbf{D} d\Omega = \int_{\Omega} N_i \rho d\Omega \quad (1.24)$$

První integrál je s použitím Gaussovy věty a (1.12)

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(N_i \mathbf{D}) d\Omega = \int_{\Gamma} N_i \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_d} N_i \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_d d\Gamma + \int_{\Gamma_n} N_i \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_n d\Gamma \quad (1.25)$$

$\mathbf{n}$  je vnější normála k  $\Gamma$

Pro uzel  $i$  na  $\Gamma_d$  rovnici nesestavujeme, neboť jeho potenciál známe. To je ekvivalentní podmínce  $N_i = 0$  pro  $i$  na  $\Gamma_d$ . Na  $\Gamma_n$  je podle předpokladu  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ , tj.  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \varepsilon \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) = 0$ .

Oba integrály jsou nulové a nulový je i první integrál v (1.24). Vynecháním tohoto integrálu a s použitím (1.15) dostaneme

$$-\int_{\Omega} \operatorname{grad} N_i \cdot \mathbf{D} d\Omega = \int_{\Omega} N_i \rho d\Omega \quad (1.26)$$

$$-\int_{\Omega} \operatorname{grad} N_i \cdot \left( -\sum_{j=1}^U \varepsilon \varphi_j \operatorname{grad} N_j \right) d\Omega = \int_{\Omega} N_i \rho d\Omega \quad (1.27)$$

Záměnou integrace a sumace získáme  $i$ -tou rovnici soustavy

$$\sum_{j=1}^U \varphi_j \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} N_i \cdot \operatorname{grad} N_j d\Omega = \int_{\Omega} N_i \rho d\Omega \quad (1.28)$$

Volbou  $i = 1, \dots, U$  obdržíme soustavu  $U$  rovnic.

$$\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f}, \quad (1.29)$$

kde  $\mathbf{K}$  je čtvercová matice koeficientů

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} N_i \cdot \operatorname{grad} N_j d\Omega \quad (1.30)$$

prvky vektoru  $\mathbf{f}$  pravé strany jsou

$$f_i = \int_{\Omega} N_i \rho d\Omega \quad (1.31)$$

$\varphi$  je hledaný vektor uzlových potenciálů.

### 1.3 Výpočet koeficientů $K$ a vektoru $F$

Aproximační funkce  $N_i, N_j$  jsou nulové mimo prvky, které obsahují  $i$ -tý a  $j$ -tý uzel, stejně tak  $i$  jejich derivace. Proto je součin  $grad N_i \cdot grad N_j$  v (1.30) nenulový jen tehdy, patří-li uzly  $i, j$  stejnému prvku. Ze vzorce plyne, že většina koeficientů je nulová. Matice  $K$  je řídká, symetrická kolem diagonály. Protože  $N_j$  je vyjádřena v jednotlivých prvcích tvarovými funkcemi  $N_j^{(e)}$ , je třeba při numerickém vyčíslení počítat integrály (1.30) a (1.31) na každém prvku samostatně. S použitím (1.9) dostaneme příslušný koeficient jako součet příspěvků jednotlivých prvků

$$k_{ij} = \sum_p k_{ij}^{(e)} \qquad f_{ij} = \sum_p f_{ij}^{(e)} \qquad (1.32)$$

Příspěvky jednotlivých prvků jsou

$$k_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \epsilon^{(e)} grad N_i^{(e)} \cdot grad N_j^{(e)} d\Omega \qquad (1.33)$$

$$f_i^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)} \rho \Omega \qquad (1.34)$$

Soustava rovnic byla odvozena s využitím literatury [1], [2].

## 2. Výkon elektromagnetického pole

### 2.1 Maxwellovy rovnice a okrajové podmínky

Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}^e \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

Dále zapíšeme materiálové vztahy pro lineární izotropní prostředí

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \gamma\mathbf{E} \quad (2.5a,b,c)$$

Na rozhraní dvou prostředí s materiálovými konstantami  $\varepsilon, \mu, \gamma$  se mění vektory pole nespojitě. Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru zde neplatí a je třeba je nahradit podmínkami spojitosti tečné a normálové složky vektorů pole. Zavedeme systém vzájemně ortogonálních vektorů  $\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_s$ . Normálový vektor  $\mathbf{u}_n$  směřuje do druhého prostředí. Vektory  $\mathbf{u}_t$  a  $\mathbf{u}_s$  jsou v rovině rozhraní a platí  $\mathbf{u}_n \times \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_s$ . Pro jednotlivé vektory a jejich složky platí:

a) Vektory elektrického pole

$$E_{t2} - E_{t1} = 0 \quad D_{n2} - D_{n1} = \sigma \quad (2.6a,b)$$

b) Vektory magnetického pole

$$H_{t2} - H_{t1} = K_s \quad B_{n2} - B_{n1} = 0 \quad (2.7a,b)$$

c) Vektory hustoty proudu

$$J_{n2} - J_{n1} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t} \quad (2.8)$$

## 2.2 Harmonický ustálený stav

Harmonický vektor sestává ze tří harmonických složek, kmitajících se stejným kmitočtem, ale obecně s různou amplitudou a fází. Harmonický vektor intenzity elektrického pole je zapsán v kartézských souřadnicích takto

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = E_{xm} \sin(\omega t + \varphi_x) \mathbf{u}_x + E_{ym} \sin(\omega t + \varphi_y) \mathbf{u}_y + E_{zm} \sin(\omega t + \varphi_z) \mathbf{u}_z \quad (2.9)$$

Amplitudy složek  $E_{xm}$ ,  $E_{ym}$ ,  $E_{zm}$  a fáze  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$  jsou reálné funkce polohy. Harmonický vektor v symbolickém zápisu je komplexním vektorem efektivní hodnoty.

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ E_{xm} e^{j\varphi_x} \mathbf{u}_x + E_{ym} e^{j\varphi_y} \mathbf{u}_y + E_{zm} e^{j\varphi_z} \mathbf{u}_z \right] \quad (2.10)$$

Zkrácený zápis komplexního vektoru pomocí fázorů složek

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{E}_x \mathbf{u}_x + \underline{E}_y \mathbf{u}_y + \underline{E}_z \mathbf{u}_z \quad (2.11)$$

Komplexní vektor nemá v reálném prostoru směr, ale lze jej vyjádřit pomocí reálných vektorů  $\mathbf{E}_r$  a  $\mathbf{E}_i$

$$\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i \quad (2.12)$$

Rozkladem (2.10) na reálnou a imaginární část dostaneme

$$\mathbf{E}_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ E_{xm} \cos \varphi_x \mathbf{u}_x + E_{ym} \cos \varphi_y \mathbf{u}_y + E_{zm} \cos \varphi_z \mathbf{u}_z \right] \quad (2.13)$$

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ E_{xm} \sin \varphi_x \mathbf{u}_x + E_{ym} \sin \varphi_y \mathbf{u}_y + E_{zm} \sin \varphi_z \mathbf{u}_z \right]$$

a pro okamžitou hodnotu lze psát

$$\mathbf{E} = \sqrt{2} (\mathbf{E}_r \sin \omega t + \mathbf{E}_i \cos \omega t) \quad (2.14)$$

Koncový bod harmonického vektoru opisuje v závislosti na čase elipsu, ležící v rovině obou vektorů  $\mathbf{E}_r$  a  $\mathbf{E}_i$ .

## 2.3 Poytingův vektor

Poytingův vektor má v kartézských souřadnicích tvar

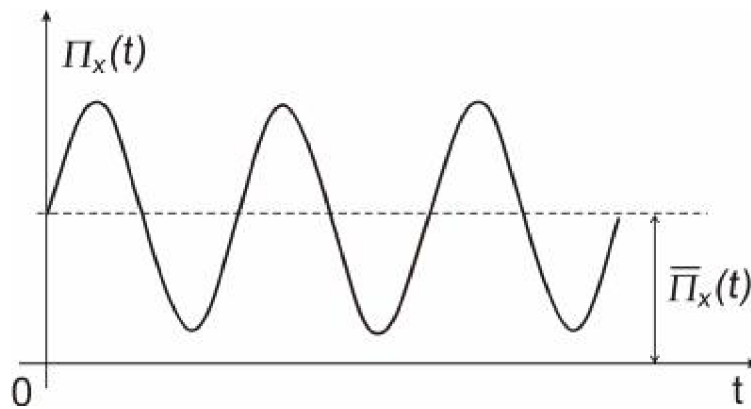
$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = (E_y H_z - E_z H_y) \mathbf{u}_x + (E_z H_x - E_x H_z) \mathbf{u}_y + (E_x H_y - E_y H_x) \mathbf{u}_z \quad (2.15)$$

Jednotlivé složky  $\mathbf{\Pi}$ , např.

$$\Pi_x = E_y H_z - E_z H_y \quad (2.16)$$

obsahují součiny jednotlivých složek měnících se harmonicky v čase. Okamžitý výkon periodicky kmitá kolem střední hodnoty, která je označena pruhem. Střední hodnota složky Poytingova vektoru (obr. 2.1) je

$$\bar{\Pi}_x = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi_x dt = \text{Re} \{ \underline{E}_y \underline{H}_z^* - \underline{E}_z \underline{H}_y^* \} \quad (2.17)$$



**Obr. 2.1** Střední hodnota  $x$ -ové složky Poytingova vektoru

Součtem jednotlivých složek dostaneme pro časově střední hodnotu Poytingova vektoru výraz

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{\Pi} dt = \text{Re} \{ \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* \} \quad (2.18)$$

kde

$$\underline{\mathbf{H}}^* = \underline{\mathbf{H}}_r - j \underline{\mathbf{H}}_i = \underline{H}_x^* \mathbf{u}_x + \underline{H}_y^* \mathbf{u}_y + \underline{H}_z^* \mathbf{u}_z \quad (2.19)$$

je vektor komplexně sdružený k  $\mathbf{H}$ . Tedy komplexní Poytingův vektor je

$$\underline{\mathbf{\Pi}} = \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}} \quad (2.20)$$

Jeho reálná část určuje časově střední hodnotu hustoty toku výkonu na jednotku plochy.



## 2.4 Rovnice výkonové rovnováhy

K vyjádření výkonových poměrů v elektromagnetickém poli vyjdeme z vektorové identity

$$\operatorname{div}(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) = \underline{\mathbf{H}}^* \operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}}^* \quad (2.21)$$

Za rotace dosadíme Maxwellovy rovnice v komplexním tvaru a dostaneme

$$\operatorname{div}(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) = -\underline{\mathbf{H}}^* j\omega \underline{\mathbf{B}} - \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{J}}^* + \underline{\mathbf{E}} j\omega \underline{\mathbf{D}}^* - \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{J}}^{e*} \quad (2.22)$$

Členy na obou stranách přeuspořádáme a integrujeme přes objem  $V$ . Obdržíme tak rovnici výkonové rovnováhy v komplexním tvaru.

$$-\int_V \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{J}}^{e*} dV = \int_V \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{J}}^* dV + j2\omega \int_V \left( \frac{\underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{H}}^*}{2} - \frac{\underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{D}}^*}{2} \right) dV + \int_S (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) d\mathbf{S} \quad (2.23)$$

Levá strana představuje komplexní výkon zdrojů. Jeho reálná část představuje střední výkon zdrojů za jednu periodu

$$\overline{P}_e = -\int_V \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{J}}^{e*} dV \quad (2.24)$$

První člen na pravé straně má význam střední hodnoty činných ztrát.

$$\overline{P}_J = \int_V \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{J}}^* dV = \int_V \gamma |\underline{\mathbf{E}}|^2 dV \quad (2.25)$$

Druhý člen představuje střední hodnotu energie v magnetickém a elektrickém poli.

$$j2\omega \int_V \left( \frac{\underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{H}}^*}{2} - \frac{\underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{D}}^*}{2} \right) dV = j2\omega \int_V \left( \frac{1}{2} \mu |\underline{\mathbf{H}}|^2 - \frac{1}{2} \varepsilon |\underline{\mathbf{E}}|^2 \right) dV = j2\omega (\overline{W}_m - \overline{W}_e) \quad (2.26)$$

Zkrácený zápis rovnice výkonové rovnováhy

$$\underline{P}_e = \overline{P}_J + j2\omega (\overline{W}_m - \overline{W}_e) + \int_S \underline{\mathbf{H}} d\mathbf{S} \quad (2.27)$$

Reálná část rovnice vyjadřuje střední rovnováhu výkonů, imaginární část je  $2\omega$  násobkem středního rozdílu energie v elektrickém a magnetickém poli a je nazývána jalovým výkonem. Vztahy byly odvozeny z literatury [1].

## 3. Teplo

### 3.1 Sdílení tepla

Tepelná energie se může šířit dvěma různými způsoby, které jsou po fyzikální stránce zcela odlišné. Pokud vedení tepelné energie zprostředkovává látka, jedná se o přenos kondukcí (vedením) a konvekcí (prouděním). Jestliže energii přenášejí elektromagnetické vlny mluvíme o radiaci (sálání). Vztahy byly odvozeny z literatury [3], [4].

#### 3.1.1 Sdílení tepla radiací

Jedná se o přenos energie elektromagnetickými vlnami prostředím rychlostí světla. Toto prostředí se průchodem energie neohřívá. Teoreticky se energie přenáší v celém spektru vlnových délek, ale především v intervalu 0,7 μm až 15 μm.

Těleso zahřáté na teplotu  $T$  vyzáří podle Stefanova – Boltzmannova zákona z 1 m<sup>2</sup> svého povrchu za 1 s hustotu tepelného výkonu  $M$ , zvanou intenzita vyzařování.

$$M = C \left( \frac{T}{100} \right)^4 = \varepsilon C_B \left( \frac{T}{100} \right)^4, \quad (3.1)$$

kde  $C$  je součinitel záření šedého tělesa,  $C_B$  je součinitel záření dokonale černého tělesa ( $C_B = 5,67051 \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$ ) a  $\varepsilon$  empiricky stanovený součinitel zvaný emisivita. Intenzita vyzařování  $M$  udává vyzářenou energii bez ohledu na to, zda se v okolí nacházejí jiné zdroje záření. Teplo sdílené mezi dvěma tělesy je výsledkem vzájemného sálání obou těles. Teplo sdílené mezi dvěma tělesy závisí na velikosti, drsnosti povrchů, tvaru a vzájemné poloze. Teplo odevzdané tělesem je rozdíl energie jím vyzářené a na ně dopadlé.

Pro dvě rozměrné plochy 1 a 2 s teplotami  $T_1$  a  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ), z nichž každá má plochu  $A$  a součinitelů vyzařování  $C_1$  a  $C_2$  je tepelný tok, který přešel z plochy 1 na plochu 2

$$\Phi = C_{12} A \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (3.2)$$

Součinitel vzájemného vyzařování obou ploch určíme z rovnice

$$C_{12} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_B}} = \frac{C_B}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}, \quad (3.3)$$

kde  $C_B = 5,67051 \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$  je součin vyzařování dokonale černého tělesa a  $\varepsilon_1$  a  $\varepsilon_2$  jsou emisivity.

Také v případě, kdy těleso 2 obklopuje těleso 1 a není-li těleso 1 nikde konkávní a je-li z každého bodu plochy  $A_2$  vidět těleso 1, je možné pro určení zářivého toku použít vztah (3.2). Součinitel vzájemného vyzařování určíme ze vztahu

$$C_{12} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{A_1}{A_2} \left( \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_B} \right)} = \frac{C_B}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}. \quad (3.4)$$

Rovnici (3.2) lze použít pro tělesa libovolného tvaru, podmínkou však je, aby obklopené těleso, jehož povrch je  $A_1$ , bylo vypuklé.

Je-li  $A_2 \gg A_1$ , zjednoduší se rovnice (3.4) na

$$C_{12} = C_1 = \varepsilon_1 C_B. \quad (3.5)$$

### 3.1.2 Sdílení tepla kondukcí

Při řešení vedení tepla vyšetřujeme v tělese teplotní pole a tepelné toky v prostorové závislosti u stacionárních dějů, u dějů nestacionárních pak také v časové závislosti  $T = T(\mathbf{r}, t)$ , kde  $\mathbf{r}$  je polohový vektor a  $t$  je čas.

$$\Phi = -\lambda A \text{grad}T, \quad (3.6)$$

kde  $T$  je teplota,  $\Phi$  je tepelný tok prošlý plochou  $A$ , stojící kolmo ke směru toku a  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti. Pro velikost tepelného toku bude potom

$$\Phi = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (3.7)$$

K určení tepelného toku je třeba znát gradient teploty a tedy i rozdělení teploty v látce. Diferenciální rovnice vedení tepla Fourierova-Kirchhoffova pro izotropní a homogenní látku má tvar

$$\frac{\partial T}{\partial n} = a \cdot \text{div} \cdot \text{grad}T + a \frac{q_v}{\lambda}, \quad (3.8)$$

kde ( $a = \lambda / (c_p \rho)$ ),  $c_p$  měrná tepelná kapacita látky při stálém tlaku,  $\rho$  je hustota, ( $\lambda$ ) je součinitel teplotní vodivosti,  $q_v$  množství tepla vzniklé v jednotce objemu za jednotku času. Pro stacionární děje a pro teplotní pole bez vnitřních tepelných zdrojů se rovnice zjednoduší a přechází v Poissonovu rovnici

$$\text{div} \cdot \text{grad}T + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \quad (3.9)$$

a je-li navíc  $q_v = 0$ , pak v Laplaceovu

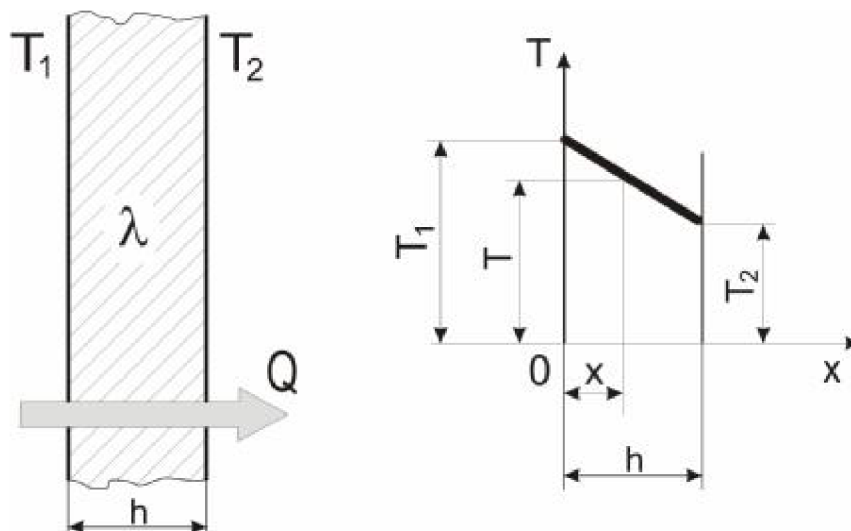
$$\text{div} \cdot \text{grad}T = 0. \quad (3.10)$$

V případě jednorozměrného stacionárního vedení tepla jednoduchou rovinnou stěnou (obr. 3.1), potom pro rozložení teplot dostáváme

$$T(x) = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{h} \quad (3.11)$$

a pro tepelný tok  $\Phi$  plochou  $A$

$$T(x) = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{h}. \quad (3.12)$$



Obr. 3.1 Sdílení tepla vedením

### 3.2 Sdílení tepla konvekcí

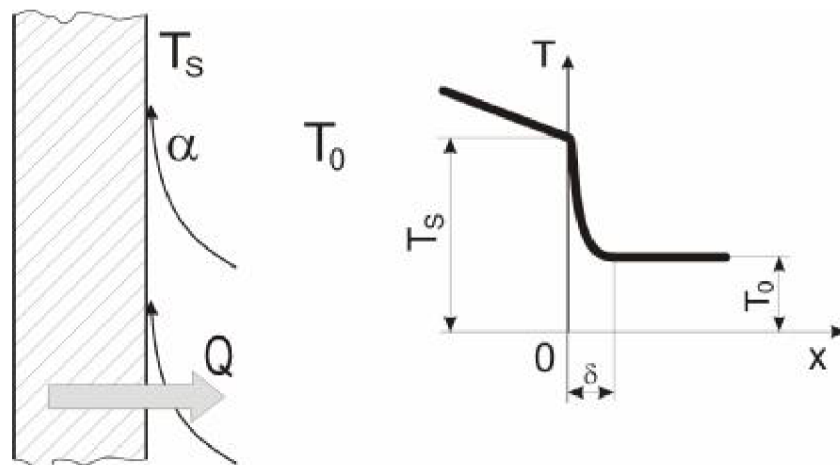
Sdílení tepla prouděním je způsobeno pohybem tekutiny, při němž přecházejí teplejší částice do míst o nižší teplotě a naopak. Současně se uplatňuje vedení tepla v tekutině, jež není možno od proudění oddělit. Je-li proudění způsobeno pouze teplotními rozdíly, mluvíme o proudění volném, je-li způsobeno uměle, hovoříme o proudění vynuceném. Pro popsání přestupu tepla použijeme vztahu odvozeného Newtonem

$$\Phi = \alpha A(T_0 - T_s) ; \Phi = \alpha A(T_s - T_0), \quad (3.13)$$

kde  $T_0$  je střední teplota tekutiny,  $T_s$  je teplota stěny,  $\alpha$  ( $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ ) součinitel přestupu tepla. První vztah platí pro přestup tepla z tekutiny do pevné stěny, druhý pro přestup tepla z pevné stěny do tekutiny obr. 3.2. Přestup tepla  $\alpha$  je funkcí všech činitelů, majících vliv na množství přecházejícího tepla. Stanovit takovouto závislost je prakticky nemožné, proto se v praxi zjišťování součinitele přestupu tepla provádí nejčastěji experimentálně za použití teorie podobnosti. Kriteriační rovnice pro sdílení tepla prouděním v případě, že nedochází ke změně skupenství tekutiny, potom dostane tvar

$$N_u = f(F_0, R_e, G_r, P_r), \quad (3.14)$$

kde  $N_u = \alpha L / \lambda$  je Nusseltovo číslo,  $F_0 = a \Delta t / L^2$  je Fourierovo číslo,  $R_e = cL / \nu$  je Reynoldsovo číslo,  $G_r = g \gamma \Delta T L^3 / \nu^2$  je Grashofovo číslo,  $P_r = \nu / a$  je Prandtlovo číslo,  $L$  je charakteristický rozměr tělesa,  $\Delta t$  je charakteristický časový interval,  $\alpha$  je součinitel přestupu tepla,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $a$  je součinitel teplotní vodivosti,  $c$  je charakteristická rychlost,  $\nu$  je kinematická viskozita,  $\gamma$  je teplotní součinitel objemové roztažnosti,  $\Delta T$  je charakteristický teplotní rozdíl a  $g$  je tíhové zrychlení. U stacionárního proudění odpadá závislost na Fourierově čísle. Součin Reynoldsova a Prandtlova čísla se nazývá Pécletovo číslo ( $P_e = cL / a$ ) a součin Grashofova a Prandtlova čísla se nazývá Rayleighovo číslo ( $R_a = g \gamma \Delta T L^3 / (\nu a)$ ).



Obr. 3.2 Vedení tepla prouděním

Ve speciálních případech se kritériální rovnice zjednodušuje. Ve stacionárním proudění odpadá vliv Fourierova čísla, ve vynuceném proudění Grashofova čísla a ve volném prostředí Reynoldsova čísla. Kritériální rovnici pro nucené turbulentní proudění lze vyjádřit ve tvaru mocninné funkce

$$N_u = C R_e^m P_r^n . \quad (3.15)$$

### 3.3 První zákon termodynamiky

Zákon zachování energie v termodynamice nazýváme prvním zákonem termodynamiky. Celková změna vnitřní energie soustavy  $\Delta U$  se rovná součtu práce  $W$  vykonané okolními tělesy nebo soustavou silovým působením a tepla  $Q$  přijatého z okolních těles nebo odevzdaného okolním tělesům.

$$\Delta U = W + Q , \quad (3.16)$$

kde  $\Delta U$  je změna vnitřní energie,  $Q$  je teplo,  $W$  je práce. Jestliže z vnějších sil působí jen tlak, bude vykonaná práce rovna

$$dw = pdv \quad . \quad (3.17)$$

Zavedením vztahu pro měrnou entalpii

$$i = u + pv \quad . \quad (3.18)$$

Pak lze první zákon termodynamiky přepsat ve tvaru

$$dq = di - vdp \quad . \quad (3.19)$$

$$dw = -vdp \quad . \quad (3.20)$$

Vzorec (3.19) představuje technickou (tlakovou) práci plynu. Matematická formulace prvního zákona termodynamiky pro otevřené termodynamické soustavy pro případ, že je přiváděno a odváděno totéž množství látky za jednotku času, má tvar

$$dq = di + \frac{dc^2}{2} + gdz + dw_h \quad , \quad (3.21)$$

kde  $c$  je rychlost tekutiny,  $z$  je potenciální výška a  $w_h$  je práce na hřídeli.

Otázky vztahující se k podmínkám přeměny energie v práci řeší druhý zákon termodynamiky. Jeho matematická formulace pro vratné změny je první vztah a pro nevratné druhý

$$dq = Tds \quad ; \quad dq < Tds \quad , \quad (3.22)$$

kde  $dq$  je teplo přivedené (nebo odvedené) z okolí (na 1 kg). Veličina  $s$  se nazývá měrná entropie.

Vztah mezi termodynamickými stavovými veličinami za tepelné rovnováhy udává termodynamická stavová rovnice

$$f(p, v, T) = 0 \quad . \quad (3.22)$$

Pro většinu látek je známa s dostatečnou přesností.

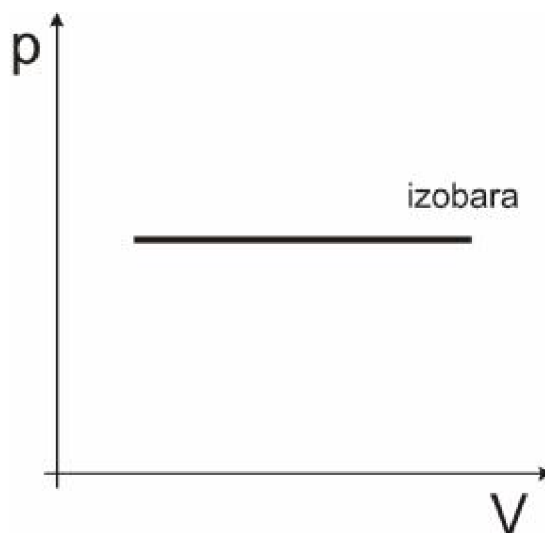
### **3.4 Tepelné děje**

Pod pojmem změna stavu soustavy rozumíme jakékoliv přeměny energie, které probíhají uvnitř soustavy nebo mezi soustavou a okolím. Změna, která by mohla proběhnout z konečného stavu do původního stavu po téže cestě ve stavovém prostoru jako změna z původního stavu do konečného stavu, přičemž by soustava i okolí procházely v obou případech týmiž mezilehlými stavy, se nazývá vratná. Skutečné změny jsou vždy nevratné.

Pro technickou praxi jsou nejdůležitější vratné změny stavu.

### 3.4.1 Izobarický děj

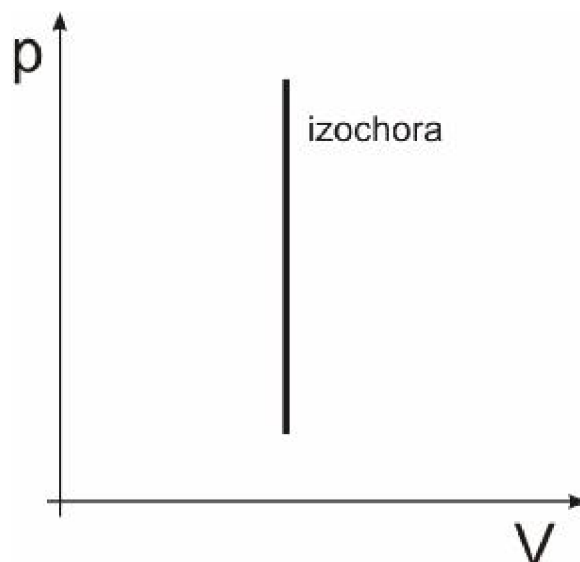
Izobarický děj je termodynamický děj s ideálním plynem, při kterém zůstává konstantní tlak a mění se objem a teplota plynu.  $p/T = konst.$  Závislost tlaku na objemu plynu graficky vyjadřuje izobara obr. 3.3. Při izobarickém ději se koná práce a mění se vnitřní energie plynu. Z 1. termodynamického zákona plyne  $Q = \Delta U + W$ , neboli teplo  $Q$  dodané plynu se spotřebuje na zvýšení vnitřní energie  $\Delta U$  a práci  $W$  vykonanou plynem, opačně úbytek vnitřní energie  $\Delta U$  a práce  $W$  vykonaná na plynu se rovná teplu  $Q$  vydanému plynem do okolí.



Obr. 3.3 p-V diagram izobarického děje

### 3.4.2 Izochorický děj

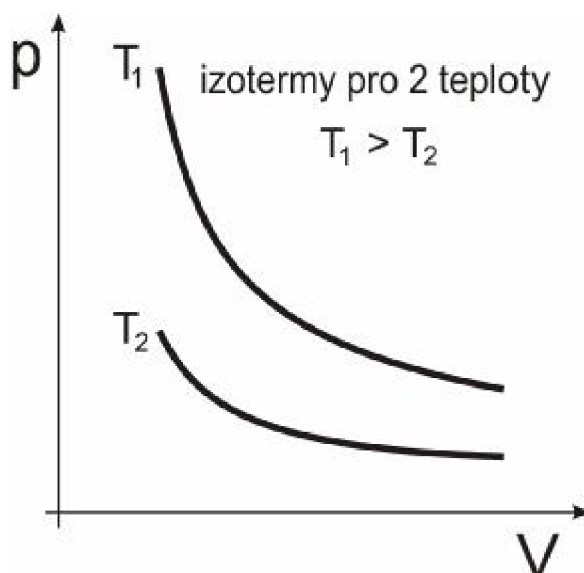
Je děj, při kterém zůstává konstantní objem a mění se tlak a teplota plynu  $p/T = konst.$  Závislost tlaku na objemu plynu graficky vyjadřuje izochora obr. 3.4. Při izochorickém ději se nekoná objemová práce, pouze se mění vnitřní energie plynu. Z 1. termodynamického zákona plyne  $Q = \Delta U$ , neboli teplo  $Q$  dodané plynu se spotřebuje na zvýšení vnitřní energie  $\Delta U$ , opačně úbytek vnitřní energie  $\Delta U$  se rovná teplu  $Q$  vydanému plynem do okolí.



Obr. 3.4  $p$ - $V$  diagram izochorického děje

### 3.4.3 Izotermický děj

Je děj, při kterém zůstává konstantní teplota a mění se objem a tlak plynu  $pV = \text{konst.}$ . Závislost tlaku na objemu plynu graficky vyjadřuje izoterma obr. 3.5. Při izotermickém ději se vnitřní energie plynu nemění. Z 1. termodynamického zákona plyne  $Q = W$ , neboli teplo  $Q$  dodané plynu se zcela spotřebuje na práci  $W$  vykonanou plynem při zvětšování jeho objemu ( $W = p \cdot \Delta V$ ), opačně vnější práci  $W$  při stlačení odevzdá plyn do okolí získanou energii ve formě tepla  $Q$ .

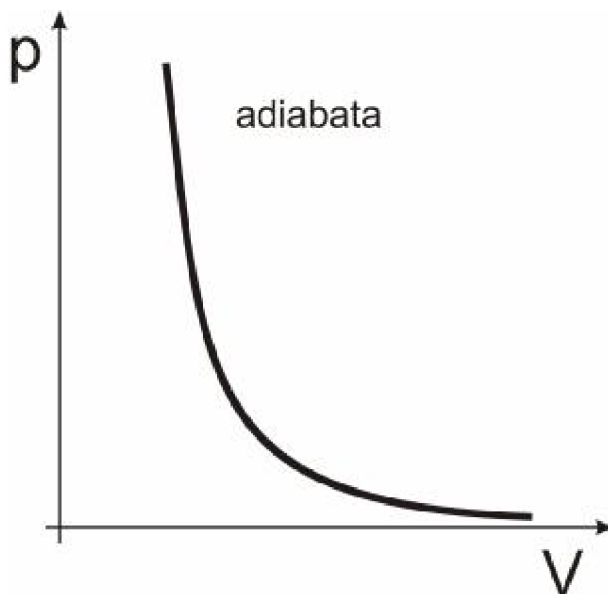


Obr. 3.5  $p$ - $V$  diagram izotermického děje



### 3.4.4 Adiabatický děj

Je děj, při kterém nedochází k tepelné výměně mezi plynem a okolím. Při adiabatickém ději se mění tlak, objem i teplota plynu,  $pV^\kappa = konst.$  Součin tlaku  $p$  a  $\kappa$ -mocniny objemu plynu  $V$  je při adiabatickém ději stálý. Exponent  $\kappa$  se nazývá Poissonova konstanta a její hodnota je  $\kappa = C_p / C_v$ , kde  $C_p$  je měrná tepelná kapacita při stálém tlaku,  $c_v$  je měrná tepelná kapacita při stálém objemu. Závislost tlaku na objemu plynu graficky vyjadřuje křivka adiabata obr. 3.6. Při adiabatickém ději plyn koná práci  $W$  na úkor své vnitřní energie  $\Delta U$ , nebo opačně práce  $W$  vykonaná na plynu způsobí zvýšení vnitřní energie  $\Delta U$  plynu. Z 1. termodynamického zákona plyne  $\Delta U = -W$ . Aby plyn nestihl vyměnit žádné teplo s okolím, měl by adiabatický děj probíhat nekonečně rychle.



Obr. 3.3  $p$ - $V$  diagram adiabatického děje

Vztahy byly odvozeny z literatury [3] a [4].

## 4. Vlnovod

Celkové elektromagnetické pole v dutém vlnovodu lze vyjádřit jako superpozici dvou typů vln: transverzálně elektrické TE a transverzálně magnetické TM. Vlna TM má magnetické pole pouze v příčném směru. Intenzitu elektrického pole má ve všech směrech. Vlna TE má naopak nenulovou složku elektrického pole v příčném směru a nulovou v podélném, magnetické pole je ve směru příčném i podélném. Ve vlnovodu mohou existovat nezávislé vidy TE a TM jako samostatný přenosový kanál.

Bezeztrátový dutý kovový vlnovod je schopen šířit signál, jehož kmitočet je v pásmu propustnosti daného vlnovodu. Kmitočet signálu musí splňovat podmínku  $f_m < f$ , pro vlnové délky platí obdobná podmínka  $\lambda_m > \lambda$ , kde  $f_m$  je mezní kmitočet, který závisí na příčných rozměrech a na materiálu vyplňující vlnovod  $\epsilon$ ,  $\mu$ .  $\lambda_m$  je mezní vlnová délka, která závisí pouze na příčných rozměrech. Signál, který tyto podmínky nesplní, je výrazně tlumen a nemůže se daným vlnovodem šířit. Mezní kmitočet (vlnová délka) je definován jako nejmenší kmitočet (největší vlnová délka), který je schopen se vlnovodem šířit. Přechod mezi nepropustným a propustným pásmem vlnovodu je velmi ostrý. Vztahy byly odvozeny z literatury [1], [9].

**Fázová rychlost** je rychlost, s jakou se v podélném směru vlnovodu pohybují místa se stejnou fází.

$$v_f = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_m}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2}}, \quad (4.1)$$

kde

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (4.2)$$

**Skupinová rychlost** je rychlost pohybu míst s konstantní fází modulační obálky signálu ve směru podélné osy.

$$v_g = v \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_m}{f}\right)^2} = v \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2} \quad (4.3)$$

**Délka vlny** ve vlnovodu  $\lambda_g$  je vzdálenost, kterou urazí vlna ve vlnovodu fázovou rychlostí za dobu jedné periody.

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2}} \quad (4.4)$$

V pásmu propustnosti je  $\lambda_g > \lambda$ . Toto prodloužení je způsobeno zvětšením fázové rychlosti vlny  $v_f$  ve vlnovodu nad rychlost světla.

**Charakteristická impedance** vlny ve vlnovodu je definována jako podíl komplexních amplitud příčných složek intenzity elektrického a magnetického pole ve vlnovodu.

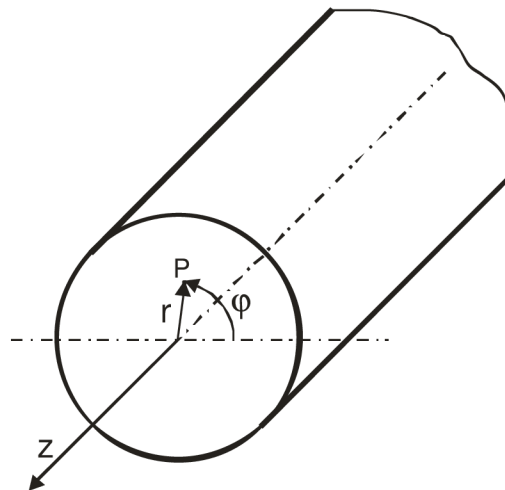
$$Z_{0TM} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_m}{f}\right)^2} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2} \quad (4.5)$$

$$Z_{0TM} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_m}{f}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2}} \quad (4.6)$$

Charakteristická impedance vlny v propustném pásmu je reálná, a to menší než  $(\mu/\epsilon)^{1/2}$  pro vlnu TM a větší než  $(\mu/\epsilon)^{1/2}$  pro vlnu TE. V pásmu nepropustnosti vlnovodu je charakteristická impedance ryze imaginární.

#### 4.1 Kruhový vlnovod

Vlnovod příčného kruhového průřezu o poloměru  $a$  je umístěn do válcového souřadného systému obr. 4.1.



**Obr. 4.1** Kruhový vlnovod ve válcových souřadnicích

V tomto vlnovodu se může šířit nekonečně mnoho vidů TE a TM. Každý vid je charakterizován dvěma celými čísly (vidovými čísly)  $m, n$ . Vidové číslo  $m$  může nabývat hodnot  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Vidové číslo  $n$  musí být různé od nuly. Pokud  $n = 0$ , jedná se o zakázaný vid. Není splněna okrajová podmínka na plášti vlnovodu.

Mezní kmitočety a mezní vlnová délka pro vid TM se spočítá

$$f_m^{TM} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\alpha_{mn}}{a} \quad (4.7)$$

$$\lambda_m^{TM} = \frac{2\pi a}{\alpha_{mn}} \quad (4.8)$$

a pro vid TE

$$f_m^{\text{TE}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\alpha'_{mn}}{a} \quad (4.9)$$

$$\lambda_m^{\text{TE}} = \frac{2\pi a}{\alpha'_{mn}} \quad (4.10)$$

kde  $\alpha_{mn}$  je  $n$ -tý kořen Besselovy funkce 1. druhu  $n$ -tého řádu a  $\alpha'_{mn}$  je derivace  $n$ -tého kořene Besselovy funkce 1. druhu  $n$ -tého řádu.

#### **4.1.1 Určení vidových čísel**

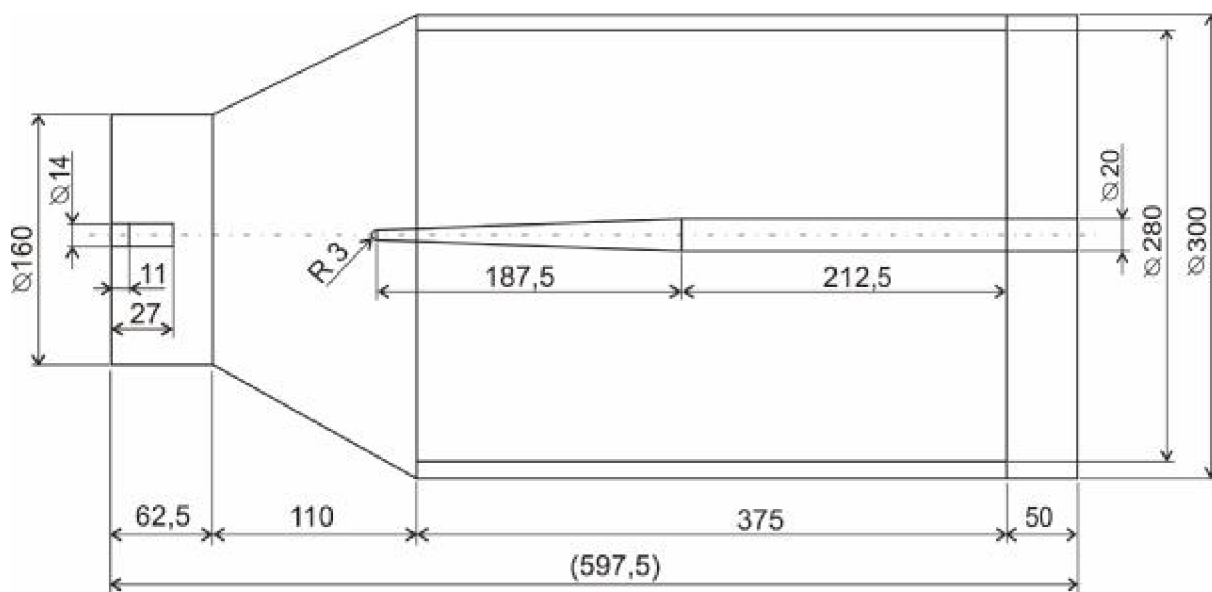
Z fyzikálního hlediska vyjadřuje vidové číslo  $m$  počet vln intenzity elektrického pole (u vidů TE), příp. počet vln intenzity magnetického pole (u vidů TM), podél obvodu kruhového průřezu vlnovodu. Vidové číslo  $n$  se vztahuje na počet vln příslušné intenzity podél průměru kruhového průřezu vlnovodu. Přitom u vidů TE je vidové číslo  $n$  rovno přesně počtu vln intenzity elektrického pole podél průměru kruhu jen tehdy, je-li  $m \neq 1$ . Je-li  $m = 1$ , je počet vln na průměru kruhu roven pouze  $n - 0,5$ . U vidů TM číslo  $n$  udává přesně počet vln intenzity magnetického pole podél průměru kruhového průřezu, je-li  $m = 1$ , a pouze přibližně, je-li  $m \neq 1$ . Je-li  $m = 0$ , je počet vln intenzity magnetického pole podél průměru roven  $n - 0,5$ . Pro  $m > 1$  je naopak tento počet roven  $n + 0,5$ .

Vztahy byly odvozeny z literatury [9].

## 5. Návrh numerického modelu

### 5.1 Numerický model – návrh rozměrů

Rozměry navržené komory jsou na obr. 5.1. Průměr budící části HF komory byl vypočten pro vid  $TE_{01}$ . Rozložení intenzity elektrického pole pro tento vid je na obr. 5.2. Délka budící části komory byla zvolena jako  $\lambda/2$ , jedná se o vedení naprázdno. Vid  $TE_{01}$  je rotačně symetrickým videm. Rozložení intenzity elektrického pole v příčném směru je symetrické a zaručuje rovnoměrné rozložení elektromagnetického pole.



Obr. 5.1 Rozměry vysokofrekvenční komory

Průměr vlastní komory byl navržen pro vid  $TE_{02}$ . Tento vid byl zvolen pro požadované použití komory. Opět se jedná o rotačně symetrický vid. Oba příčné rozměry byly vypočteny podle vztahu:

$$a = \frac{\lambda \alpha'_{mn}}{\omega} \quad (5.1)$$

Výpočet příčných rozměrů HF komory:

budící část

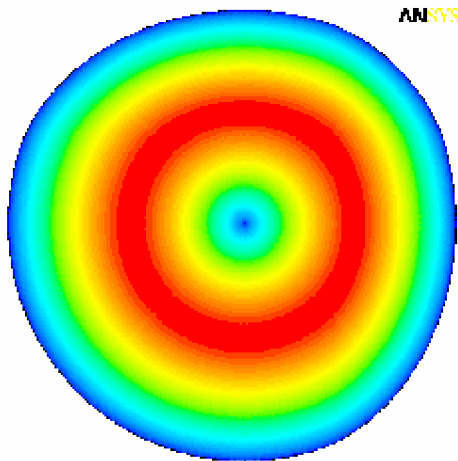
$$a_{01} = \frac{c \alpha'_{01}}{2\pi f} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 3,8317}{2\pi \cdot 2,45 \cdot 10^9} = 0,07467m \quad (5.2)$$

HF komora

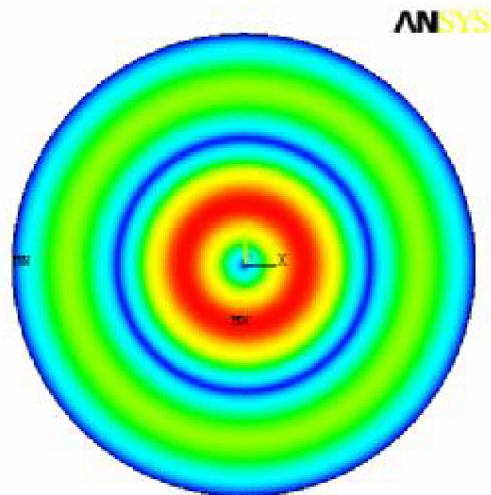
$$a_{02} = \frac{c \alpha'_{02}}{2\pi f} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 7,0156}{2\pi \cdot 2,45 \cdot 10^9} = 0,13672m \quad (5.3)$$

kde  $\alpha'_{01} = 3,8317$  a  $\alpha'_{02} = 7,0156$  jsou kořeny derivací besselových funkcí pro vid  $TE_{01}$  a  $TE_{02}$  [10],  $c$  je rychlost světla  $f$  je frekvence a  $a$  je poloměr vlnovodu.

Pro numerický model byly rozměry  $a_{01}$  a  $a_{02}$  zvětšeny na  $a_{01} = 80\text{mm}$  a  $a_{02} = 150\text{mm}$ . Tato změna byla provedena proto, aby bylo možno použít metodu konečných prvků. Pokud by se použily minimální vypočtené rozměry, nemuselo by dojít k šíření elektromagnetického pole (podle hustoty použité sítě). Zvětšené rozměry však nesmí překročit rozměry dalšího vyššího vidu, aby se tento vid nemohl vybudit. Vyšší rozměry vlnovodu jsou  $a_{31} = 83,58\text{ mm}$  a  $a_{61} = 159,45\text{ mm}$ .



Obr. 5.2 Příčné rozložení E pro vid  $TE_{01}$



Obr. 5.3 Příčné rozložení E pro vid  $TE_{02}$

Pro spojení budící části komory a vlastní komory bylo použito trychtýřové rozšíření. Toto rozšíření bylo použito, aby obě části komory byly impedančně přizpůsobeny. Délka trychtýřového rozšíření byla vypočtena 110mm podle vztahu (5.4).

$$L_{opt} = \frac{0,3 \cdot 2 a_{02}^2}{\lambda_0} = \frac{0,3 \cdot 2 \cdot 0,15^2}{0,122449} = 0,11\text{m} \quad (5.4)$$

kde  $a_{02}$  je poloměr vlnovodu pro vid  $TE_{02}$ ,  $\lambda_0$  je mezní vlnová délka,  $L_{opt}$  délka trychtýře

Délka komory byla zvolena jako trojnásobek vlnové délky. Tato délka byla zvolena s ohledem na dobu ohřevu potřebnou pro vysušení emulze v komoře. Vodivá tyč uprostřed komory slouží pro převedení TE vlny na TEM vlnu, to zaručuje rovnoměrné rozložení elektromagnetického pole. Tato tyč také slouží k uchycení nádoby s vysoušenou emulzí. Tyč se směrem k budící části zužuje a na konci je zaoblena. Zúžení je zde proto, aby nedocházelo k odrazu vlny zpět do budící části komory a tím k tlumení elektromagnetického pole. Konec musí být zaoblén, jinak by na něm vznikalo příliš velké elektromagnetické pole. Vzduchová mezera mezi nádobou s emulzí a stěnou komory je zde proto, aby docházelo k působení elektromagnetického pole i na stěny nádoby a docházelo k ohřevu i ze stran. Budící elektroda je umístěna  $\lambda/4$  od horní stěny komory a v ose komory. Toto umístění zaručuje vybudění požadovaného vidu  $TE_{01}$ . Takto navržené rozměry zaručují šíření elektromagnetické vlny komorou a jeho rovnoměrné rozložení. Šíření elektromagnetického pole bylo ověřeno numerickou analýzou pomocí metody konečných prvků v prostředí ANSYS.

## 5.2 Ověření navržené HF komory

V této kapitole bude ověřena funkčnost vysokofrekvenční komory. Bude porovnána teoretická vypočtená hodnota intenzity elektrického pole s hodnotou získanou ze simulace.

$$\beta_{01} = \sqrt{\frac{\alpha'_{02}}{a_{02}} - (2\pi f_m)^2 \epsilon \mu} \quad (5.5)$$

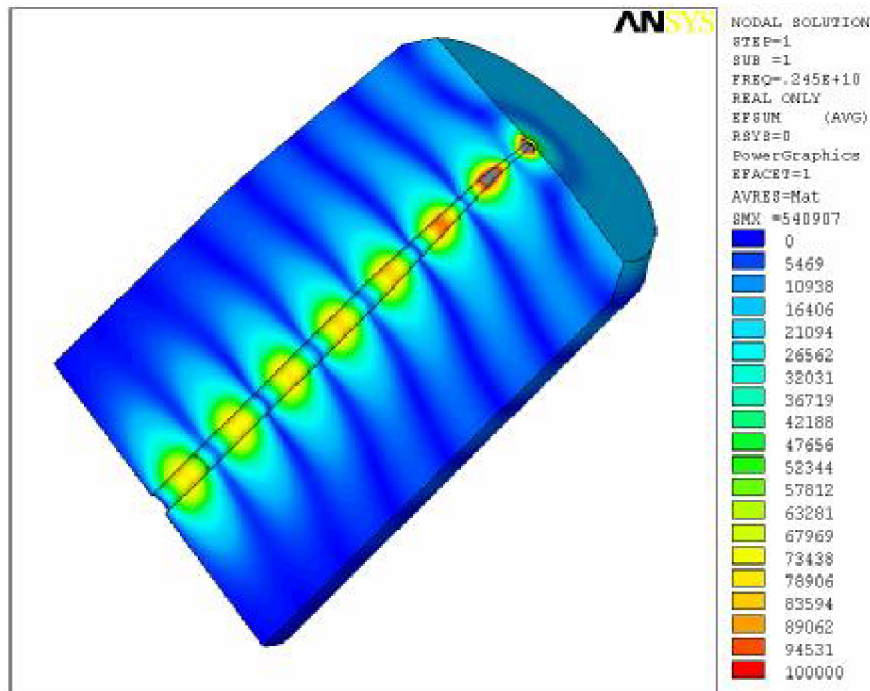
$$\beta_{01} = \sqrt{\frac{7,0156}{0,150} - (2\pi \cdot 2,45 \cdot 10^9)^2 \cdot 8,8542 \cdot 10^{-12} \cdot 1,2566 \cdot 10^{-6}} = 1,91058 \quad (5.6)$$

kde  $\alpha'_{02} = 7,0156$  je kořen derivace besselovy funkce pro vid  $TE_{02}$ ,  $a_{02}$  je poloměr vlnovodu pro vid  $TE_{02}$ ,  $f_m$  je frekvence,  $\epsilon$  je permitivita vzduchu a  $\mu$  je permeabilita vzduchu.

$$E = \sqrt{\frac{P \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} 2\pi f_m \sqrt{\epsilon \mu}}{0,2383\pi a_{02}^2 \beta_{02}}} \quad (5.7)$$

$$E = \sqrt{\frac{800 \sqrt{\frac{1,2566 \cdot 10^{-6}}{8,8542 \cdot 10^{-12}}} 2\pi \cdot 2,45 \cdot 10^9 \sqrt{8,8542 \cdot 10^{-12} \cdot 1,2566 \cdot 10^{-6}}}{0,2383\pi \cdot 0,15^2 \cdot 1,91058}} = 87058V/m \quad (5.8)$$

kde  $P$  je přenášený výkon,  $\epsilon$  je permitivita vzduchu,  $\mu$  permeabilita vzduchu,  $a_{02}$  je poloměr vlnovodu pro vid  $TE_{02}$ ,  $f_m$  je frekvence,  $\beta$  je vlnový útlum.



Obr. 5.4 Rozložení intenzity elektrického pole v komoře

Hodnota maximální intenzity elektrického pole podle vztahu (5.8) je v komoře 87 kV/m a hodnota ze simulace je 100 kV/m (obr. 5.9). Relativní chyba je 13%.

$$\delta_x = \frac{\mathbf{E}_m - \mathbf{E}_t}{\mathbf{E}_m} 100 = \frac{1.10^5 - 87.10^3}{1.10^5} 100 = 13\% \quad (5.9)$$

kde  $\delta_x$  je relativní chyba,  $\mathbf{E}_m$  hodnota  $\mathbf{E}$  získaná ze simulace a  $\mathbf{E}_t$  vypočtená hodnota.

### 5.3 Matematický popis numerického modelu

#### 5.3.1 Matematický popis HF modelu

Analýzu modelu je možné provést pomocí numerického modelu metodou konečných prvků (MKP). Elektromagnetický model je založen na řešení plných Maxwellových rovnic

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_s, \quad \nabla \times \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad (5.10)$$

kde  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  jsou vektory intenzity elektrického a magnetického pole,  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{B}$  elektrická a magnetická indukce,  $\mathbf{J}_s$  je hustota proudu proudových zdrojů,  $\rho$  je hustota volného elektrického náboje a  $\gamma$  konduktivita materiálu,  $\Omega$  je definiční oblast modelu úlohy. Platí pro materiálové vztahy mezi intenzitami a induklemi elektrického a magnetického pole

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (5.11)$$

V HFM je permitivita  $\epsilon$ , permeabilita  $\mu$  i konduktivita  $\gamma$  obecně tenzor s hlavními osami ve směru os kartézských souřadnic  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Když všechny složky vektorů pole kmitají se stejným kruhovým kmitočtem  $\omega$ , lze první dvě z Maxwellových rovnic psát ve tvaru

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mu} \underline{\mathbf{H}}, \quad \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = (\sigma + j\omega \epsilon) \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{J}}_s \quad \text{v oblasti } \Omega \quad (5.12)$$

Zde  $\underline{\mathbf{E}}$ ,  $\underline{\mathbf{H}}$ ,  $\underline{\mathbf{J}}_s$  jsou komplexní vektory pole. Při respektování hraničních podmínek vyjádřených posledními dvěma relacemi (5.10) a úpravami (5.12) dostaneme

$$(j\omega)^2 \epsilon \underline{\mathbf{E}} + \sigma \underline{\mathbf{E}} + \nabla \times \underline{\mu}^{-1} \nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mathbf{J}}_s \quad (5.13)$$

Aplikací Galerkinovy metody s vektorovými aproximačními funkcemi  $\mathbf{W}_i$  a použitím vektorové varianty Greenovy věty na člen s dvojnásobnou rotací získáme výraz, který po diskretizaci má tvar

$$-k_0 [M] \{\mathbf{E}\} + jk_0 [C] \{\mathbf{E}\} + [K] \{\mathbf{E}\} = \{\mathbf{F}\}, \quad (5.14)$$

kde  $\{E\}$  je sloupcová matice komplexních vektorů elektrické intenzity. Matice  $[K]$ ,  $[C]$  a  $[M]$  jsou ve tvaru uvedeném v literatuře [5] a vektor  $\{F\}$  je počítán z výrazu



$$\{\mathbf{F}\} = -jk_0 Z_0 \int_{\Omega} [\mathbf{W}_i] \{\mathbf{J}_s\} d\Omega + jk_0 Z_0 \int_{\Gamma_0 + \Gamma_1} [\mathbf{W}_i] \{\mathbf{n} \times \mathbf{H}\} d\Gamma \quad (5.15)$$

vektorové aproximační funkce  $\mathbf{W}$  jsou definované v manuálu [5],  $k_0$  je vlnové číslo pro vakuum,  $Z_0$  je impedance volného prostoru. Soustava rovnic (5.6) nezávisí na čase, ale stanoví se z ní  $\underline{\mathbf{E}}$  a pro okamžitý průběh vektoru  $\mathbf{E}$  platí

$$\mathbf{E} = \text{Re} \{ \underline{\mathbf{E}} e^{j\omega t} \} \quad (5.16)$$

### **5.3.2 Matematický popis teplotního modelu**

Model byl řešen jako teplotní nelineární model s fázovou změnou, to je stav, kdy dojde k odpaření vody z materiálu a změní se v páru. Průběh křivky tepla v závislosti na dodaném měrném skupenském teple je na obr. 5.8. Teplotní model je formulován z prvního zákona termodynamiky

$$q + \rho c v \cdot \text{div} T - \text{div} (k \text{ grad} T) = \rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) \quad (5.17)$$

kde  $q$  je měrné teplo,  $\rho$  měrná hustota,  $c$  je měrné skupenské teplo,  $T$  je teplota,  $t$  je čas,  $k$  je koeficient teplotní vodivosti,  $v$  je rychlost proudění.

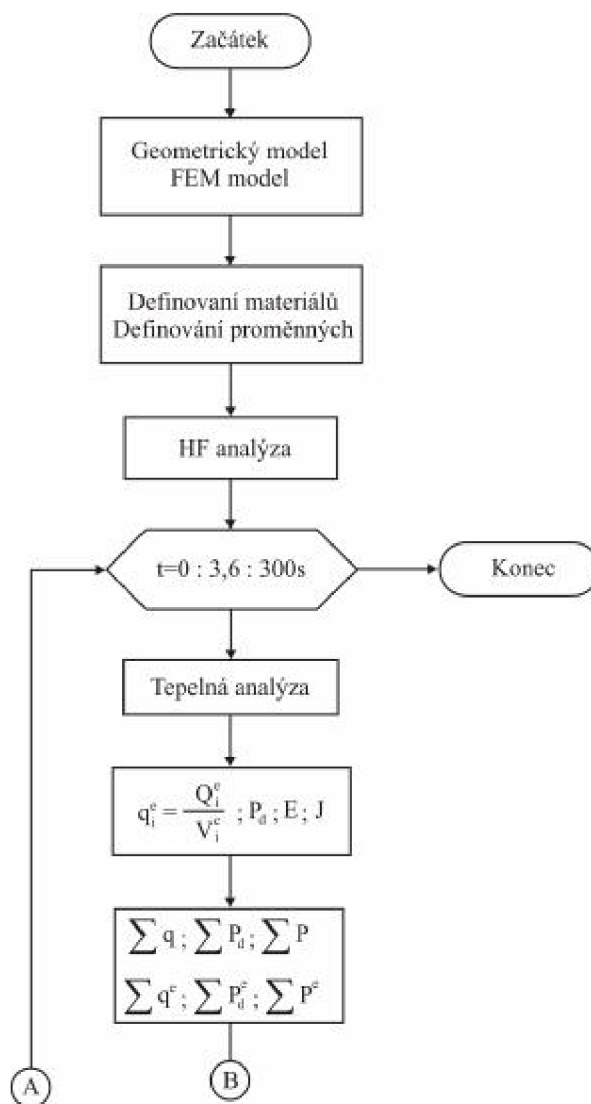
Model může být zjednodušen při respektování Sellových principů na tvar

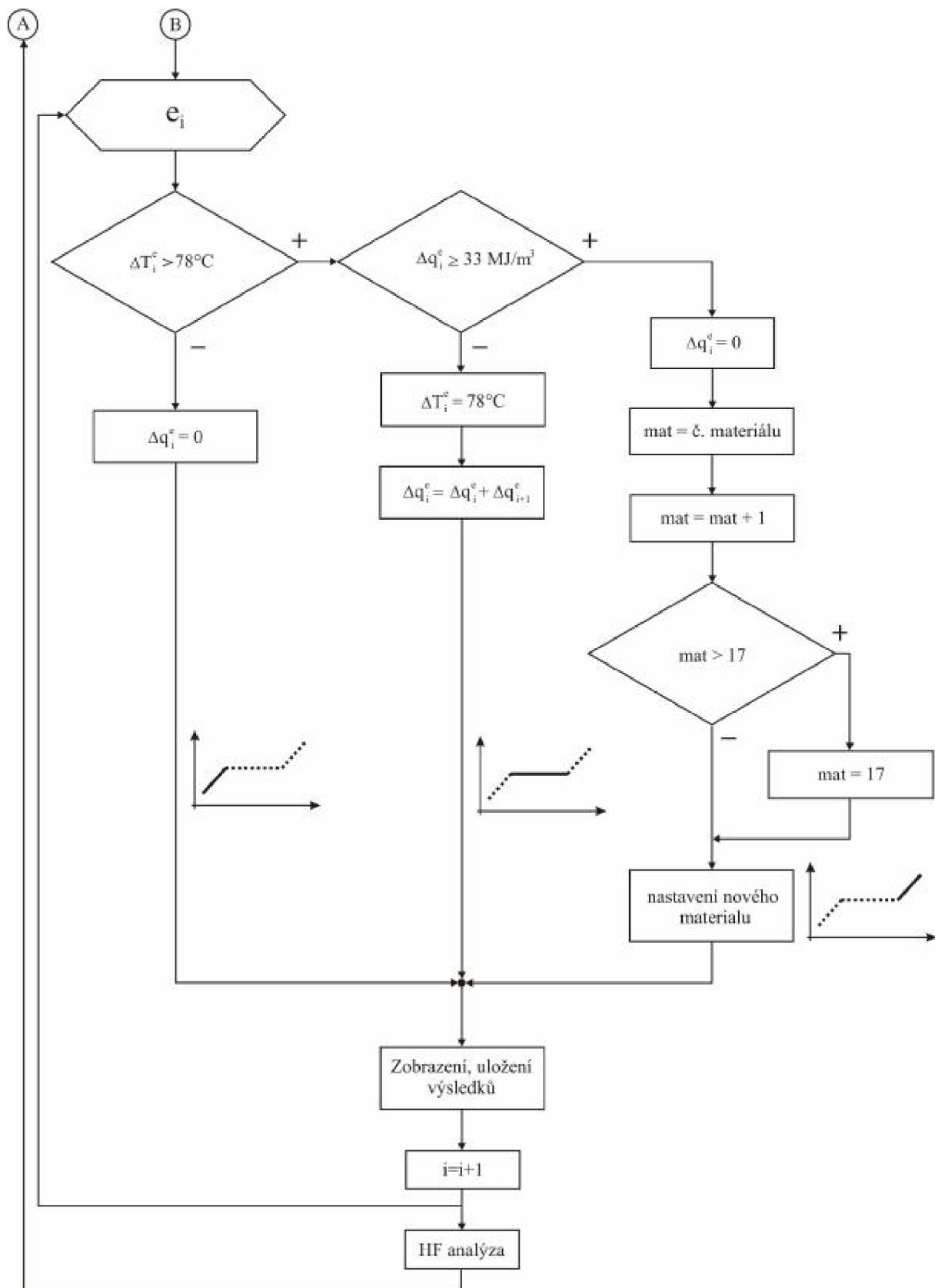
$$q - \text{div} (k \text{ grad} T) = \rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) \quad (5.18)$$

## 6. Popis funkce numerického modelu

Pro numerickou analýzu byl vybrán systém ANSYS, využívající metodu konečných prvků a lze v něm řešit sdružené úlohy. ANSYS obsahuje programovací jazyk ADPL, který umožňuje použití cyklů a podmínek. Makro, které bylo vytvořeno pro řešení úlohy, bylo sestaveno z příkazů systému ANSYS a jazyka ADPL. Popis simulace je proveden podle vývojového diagramu. Makro je přiloženo na CD.

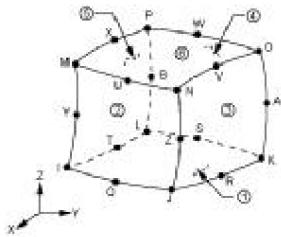
Byl vytvořen geometrický model, rozměry modelu byly vypočteny v kapitole 5.2. Aby bylo možno použít mapovanou síť (model byl rozdělen na menší šestistěnné objemy), která umožňuje rovnoměrné rozmístění elementů v objemu komory, sníží se tím počet potřebných elementů a tím se zkrátí i doba potřebná pro výpočet. Pro síť byl zvolen element MESH200 s 20-ti uzly. Tento element vytváří pouze síť a nemá žádné stupně volnosti, lze jej však modifikovat na jakýkoliv jiný 20-ti uzlový element. Při řešení zadané úlohy bude element MESH200 modifikován podle toho, zda půjde o vysokofrekvenční nebo tepelnou analýzu.



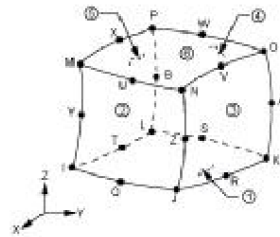


Obr. 6.1 Vývojový diagram

Použitím tohoto elementu se zkrátí doba řešení, model se nebude muset znovu síťovat, ale pouze se bude měnit typ elementů podle analýzy. Ukázka sítě je na obr. 6.4.



Obr. 6.2 Použitý prvek HF120



Obr. 6.3 Použitý prvek SOLID90

Pro vysokofrekvenční analýzu byl zvolen element HF120 (obr. 6.2) a pro tepelnou analýzu SOLID90 (obr. 6.3).

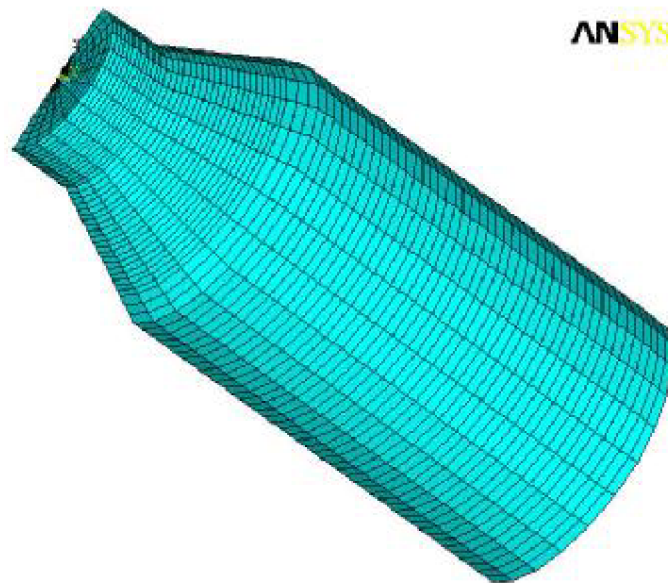
Na začátku makra jsou definovány proměnné pro uložení vypočtených hodnot. Proměnné jsou ve formě vektorů a tabulek, do kterých jsou uloženy výsledky pro jednotlivé elementy. Výsledky se ukládají po každém časovém kroku analýzy. Dále byly zadány materiálové vlastnosti modelu pro vysokofrekvenční analýzu obr. 5.4, modrá část představuje vzduch s  $\epsilon_r = 1$  a  $\mu_r = 1$ , zelená je dielektrická část budící elektrody s  $\epsilon_r = 2,5$  a  $\mu_r = 1$  a fialová část představuje vysoušenou emulzi, která se skládá z vody a oleje. Během procesu vysoušení se mění složení vysoušené emulze. Tato změna je provedena změnou materiálových vlastností. První materiál popisuje vlastnosti materiálu na počátku vysoušení, kdy obsahuje vodu. Materiály 2 – 17 popisují vlastnosti emulze, kdy již neobsahuje vodu. Tyto materiály popisují jednotlivé stavy páry, od syté přes mokrou až po suchou páru (materiál 2 – materiál 17). Při změně stavu par se mění jejich elektrické vlastnosti, které jsou popsány rezistivitou tabulka 6.1. Během vysoušení zůstává konstantní  $\mu_r = 1$  a  $\epsilon_r = 2,2$ .

Tab. 6.1 Rezistivita materiálů během procesu vysoušení

Číslo materiálu	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezistivita [Ω/m]	0,08	80	$8 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^{12}$	$8 \cdot 10^{13}$	$8 \cdot 10^{14}$	$8 \cdot 10^{15}$	$8 \cdot 10^{16}$
Číslo materiálu	10	11	12	13	14	15	16	17	
Rezistivita [Ω/m]	$8 \cdot 10^{17}$	$8 \cdot 10^{18}$	$8 \cdot 10^{19}$	$8 \cdot 10^{20}$	$8 \cdot 10^{21}$	$8 \cdot 10^{22}$	$8 \cdot 10^{23}$	$8 \cdot 10^{24}$	

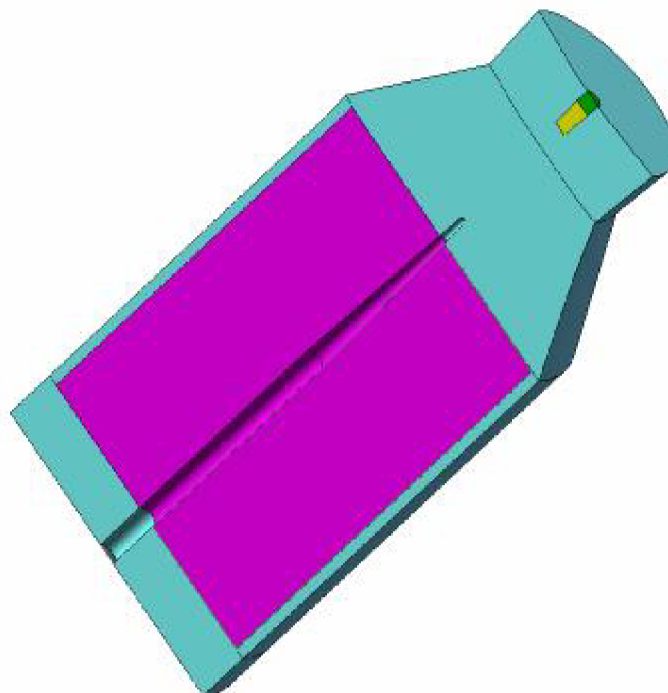
Všechny kovové stěny byly označeny jako dokonalý elektrický vodič (PEC).

Pro tepelnou analýzu byly definovány materiálové vlastnosti: pro vysoušenou emulzi (fialová) hustota  $\rho = 866 \text{ Kg.m}^{-3}$ , tepelná vodivost  $0,159 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  a měrná tepelná kapacita  $c = 1600 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , vzduch (modrá) hustota  $\rho = 1,29 \text{ Kg.m}^{-3}$ , tepelná vodivost  $0,03 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  a měrná tepelná kapacita  $c = 1010 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , elektroda (zelená) hustota  $\rho = 930 \text{ Kg.m}^{-3}$ , tepelná vodivost  $0,414 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  a měrná tepelná kapacita  $c = 2300 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .



**Obr. 6.4** Síť modelu

Po zadání materiálových vlastností modelu byla nastavena vysokofrekvenční analýza, která slouží pro získání počátečních hodnot simulace. Jedná se o začátek vysoušení, kde z vysokofrekvenční analýzy získáme hodnoty, které budou dále použity pro tepelnou analýzu (činné ztráty vzniklé při působení elektromagnetického pole). K buzení vysokofrekvenční komory byl zvolen klystron s výkonem 800W. Z výkonu klystronu byla vypočtena intenzita elektrického pole  $E = 700\text{kV/m}$ . Vypočtená intenzita elektrického pole byla zadána na budící elektrodu. Elektroda je na obr. 6.5 (žlutou barvou). Výsledky vysokofrekvenční analýzy jsou uloženy do odpovídajících proměnných. Z této analýzy jsou zjištěny celkové ztráty, intenzita elektrického pole a dielektrické ztráty.



**Obr. 6.5** Zadané materiálové vlastnosti modelu

Výchozí materiál pro simulaci byl zadán materiál číslo jedna ( $\mu_r = 1$ ,  $\epsilon_r = 2,2$  a rezistivita  $0,08\Omega/m$ ).

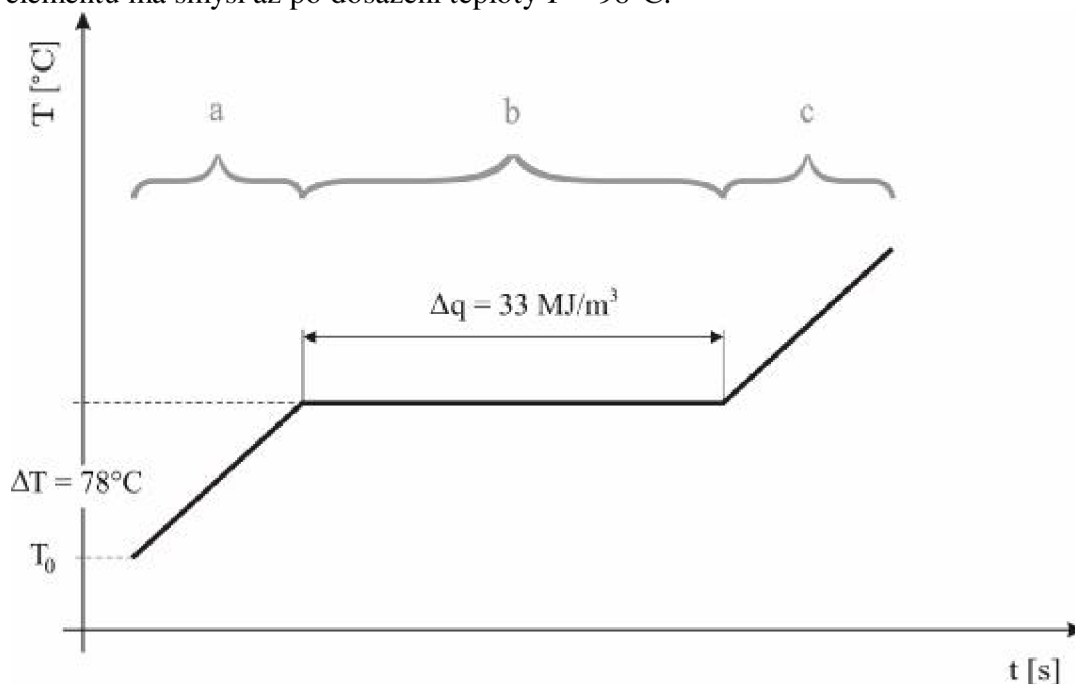
Následuje hlavní smyčka, ve které se mění čas simulace od 0 s do 180 s s krokem 3,6 s. Čas 3,6 s byl zvolen po několika simulacích tak, aby element nemohl přesáhnout hodnotu  $2\Delta q$  ( $66 \text{ MJ/m}^3$ ). Čas vysoušení je 3 minuty, simulace je rozdělena do 50 kroků. Působením vysokofrekvenčního elektromagnetického pole vznikají ve vysoušené emulzi ztráty, které způsobují žádaný ohřev. Z celkových ztrát jsou zjištěny činné ztráty, tyto ztráty způsobují žádaný ohřev emulze. Činné ztráty jsou použity jako vstupní data pro tepelnou analýzu. Tepelná analýza slouží pro získání měrného skupenského tepla potřebného pro změnu vody v páru a zjištění rozložení teploty ve vysoušené emulzi a v celé komoře. Je použita časová tepelná analýza, která trvá v každém kroku 3,6 s. Po dokončení této analýzy je vypočteno teplo  $Q$  každého elementu. Podle vztahu (6.1) je přepočtena na měrné skupenské teplo. Všechny hodnoty jsou uloženy (teplo, měrné skupenské teplo, teplota).

$$q_i^e = \frac{Q_i^e}{V_i^e} \quad (6.1)$$

kde  $Q$  je teplo v elementu zjištěné z tepelné analýzy,  $V$  objem elementu a  $q$  měrné skupenské teplo.

Následuje vnitřní smyčka, kde jsou procházeny všechny elementy v HF komoře. U jednotlivých elementů se zjišťuje, zda dosáhly potřebné teploty a následně zda mají dostatečné měrné skupenské teplo pro přeměnu vody v páru. U elementů mohou nastat tři případy:

- a) Obr. 6.6 část a. Předpokládáme, že ohřev emulze začíná při teplotě  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Na to, aby měla voda potřebnou teplotu a začala se vypařovat, musí se nejprve ohřát o  $\Delta T = 78^\circ\text{C}$  tedy na  $98^\circ\text{C}$  a následně získat měrné skupenské teplo  $33 \text{ MJ/m}^3$ . Pokud tato podmínka není splněna, je vynulována energie, kterou do té doby v elementu získal. Zjišťovat energii v elementu má smysl až po dosažení teploty  $T = 98^\circ\text{C}$ .



**Obr. 6.6** Diagram fázové změny vody a – voda, b – přechod mezi vodou a párou, c - pára

- b) Obr. 6.6 část b. Teplota elementu nyní splňuje podmínku  $\Delta T = 78^{\circ}\text{C}$ . Další nutnou podmínkou k odpařování vody je překročení měrného skupenského tepla  $\Delta q_i^e \geq 33\text{MJ}/\text{m}^3$ . V tomto okamžiku se teplota elementu nezvyšuje. Hromadí se v elementu jako měrné stavové teplo. Pokud není hodnota  $\Delta q_i^e \geq 33\text{MJ}/\text{m}^3$  překročena, ponechá se údaj o získaném měrném skupenském teple a v dalším kroku k němu bude přičtena nově získaná hodnota. Zachová se také informace o tom, že element splnil podmínku  $\Delta T = 78^{\circ}\text{C}$ .
- c) Obr. 6.6 část c. V předchozích dvou bodech se testovalo, zda daný element dosáhl potřebné teploty a měrného skupenského tepla potřebného pro změnu fáze vody v páru. V bodech a a b nedocházelo k odpařování vody. Nyní jsou již všechny potřebné podmínky splněny ( $\Delta T = 78^{\circ}\text{C}$  a  $\Delta q_i^e \geq 33\text{MJ}/\text{m}^3$ ). Postup při vysoušení: Ke změně skupenství vody v páru dojde po přijetí  $33\text{MJ}/\text{m}^3$  měrného skupenského tepla. Tuto energii akumuluje element při stálé teplotě  $98^{\circ}\text{C}$ . Při prvním spuštění analýzy je materiál emulze nastaven na materiál 1 (emulze obsahuje vodu). Při prvním dosažení měrného skupenského tepla  $33\text{MJ}/\text{m}^3$ , dosud nahromaděné skupenské teplo je vynulováno. Došlo ke změně vody obsažené v elementu na páru. Nyní se pohybujeme na křivce změny skupenství vody (obrázek 5.8) na přechodu části b a c. Voda se změnila v sytou páru (má stejnou teplotu jako ohřátá emulze a obsahuje kapičky vody). Sytá pára je popsána materiálem číslo 2. Aby bylo dosaženo odstranění veškeré vlhkosti z emulze, bude se vysoušená emulze obsahující sytou páru s kapkami vody dále ohřívat. Nyní již elementy dosáhly změny teploty o  $\Delta T = 78^{\circ}\text{C}$ , v dalších krocích je zjišťováno překročení velikosti měrného skupenského tepla o  $\Delta q_i^e \geq 33\text{MJ}/\text{m}^3$ . Pokaždé, když přesáhne element tuto hodnotu změní se jeho materiál o jeden viz. tabulka 6.1 až do dosažení materiálu 17. Materiál 17 má vlastnosti suché páry, ta již neobsahuje zbytky vody. Touto změnou materiálů je simulován proces vysoušení. Nyní element obsahuje pouze vysušený olej.

Po zjištění stavu všech elementů jsou výsledky pro daný krok simulace graficky zobrazeny a uloženy.

Následuje další vysokofrekvenční analýza, která bude použita v dalším kroku jako vstup pro tepelnou analýzu. Simulace se opakuje do dosažení času vysoušení 3 minuty a pak je ukončena.

## 7. Porovnání různých numerických modelů

Při řešení diplomové práce byly vytvořeny čtyři numerické modely. Vybraný numerický model, který pracuje s vidy  $TE_{01}$  a  $TE_{02}$  se středním hrotem, dále model 1 (popsaný v kapitole 5), model pracující se stejnými vidy bez středního hrotu, dále model 2, model s vidy  $TE_{11}$  a  $TE_{13}$  s hrotem (model 3) a model s vidy  $TE_{11}$  a  $TE_{13}$  bez hrotu (model 4). Podélné rozměry komory jsou stejné jako u modelu 1, pouze kuželové rozšíření u modelu 3 a 4 je 40 mm. Příčné rozměry u modulů 3 a 4 jsou pro budící část  $a_{11} = 45$  mm a  $a_{13} = 90$  mm. Ve všech modelech byl simulován proces vysoušení (kapitola 6) po dobu 3 minut. Byly zjišťovány činné a dielektrické ztráty a množství odpařené vody. Činné a dielektrické ztráty za dobu 32,4 s jednotlivých modelů jsou v tabulce 7.1.

**Tabulka 7.1** Činné a dielektrické ztráty v numerických modelech

	model 1		model 2		model 3		model 4	
t [s]	Pc [W]	Pd [VA]	Pc [W]	Pd [VA]	Pc [W]	Pd [VA]	Pc [W]	Pd [VA]
3,6	520,74	325,42	238,41	245,81	613,67	439,05	368,86	256,31
7,2	427,56	339,72	389,85	274,25	439,59	280,67	284,61	176,07
10,8	560,43	372,27	527,65	341,36	509,14	300,49	317,91	176,92
14,4	1083,15	528,11	557,37	331,52	433,02	314,32	476,89	240,66
18,0	839,32	453,54	360,24	285,43	416,25	310,26	425,24	228,85
21,6	979,54	542,56	448,41	286,12	630,66	393,98	347,31	226,28
25,2	420,38	278,19	372,24	262,75	587,25	398,54	419,62	246,94
28,8	378,92	259,14	380,58	277,88	625,79	417,13	267,29	200,17
32,4	485,05	295,45	210,18	218,06	552,72	441,12	351,15	233,94
součet	5695,09	3394,4	3484,93	2523,18	4808,09	3295,56	3258,88	1986,14

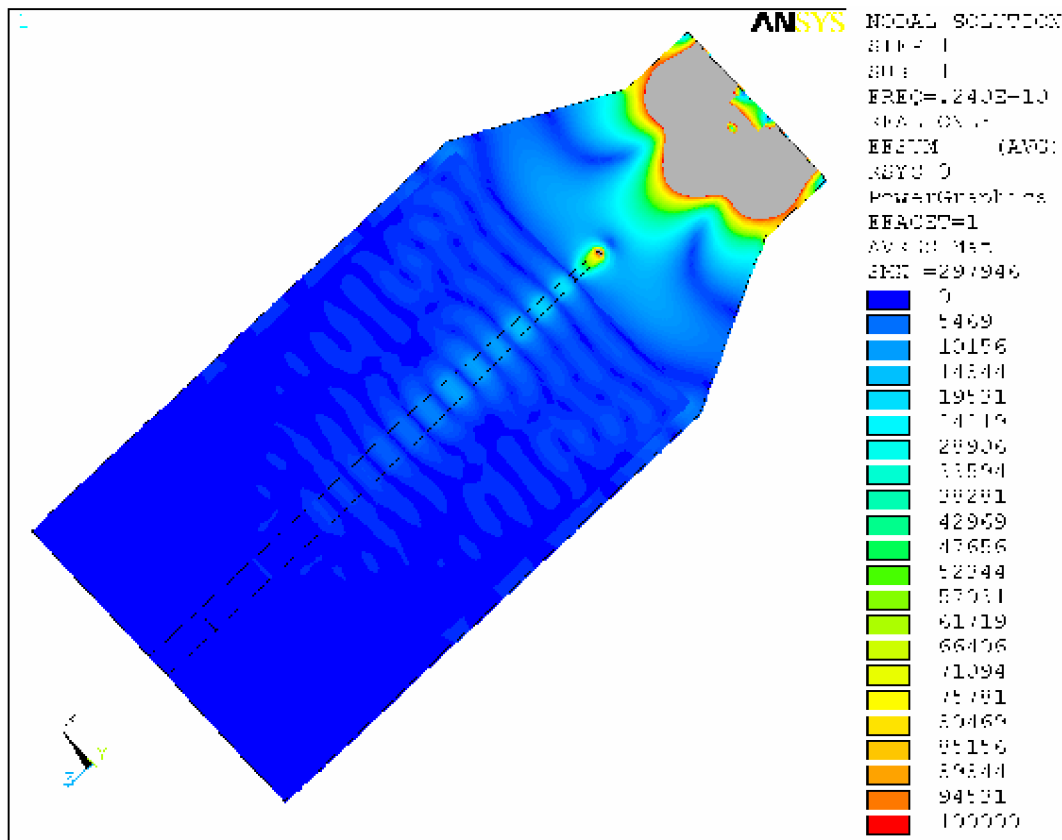
Z tabulky 7.1 je vidět, že použitý hrot uprostřed komory zlepšuje rozložení intenzity elektrického pole, tím i působení na vysoušenou emulzi a vznikají vyšší činné ztráty v emulzi. Toto platí u obou vytvořených modelů.

Hodnoty činného výkonu u modelu 1 a 3 jsou velmi blízké, ale o něco lépe vychází model 1. Proces vysoušení u modelu 3 je rychlejší než u modelu 1 vzhledem k tomu, že objem emulze je menší. Při srovnání objemů modelu 1 a 3 vychází, že model 1 má 2,7x větší objem než model 3. Při srovnání doby vysoušení obou modelů je proces vysoušení v modelu 3 přibližně 2x rychlejší. Z toho vyplývá, že nejeftektivnější je vybraný model 1. U modelů 3 a 4 navíc vznikají chladnější místa kvůli použitému vidu  $TE_{13}$ .



## 8. Výsledky numerické analýzy

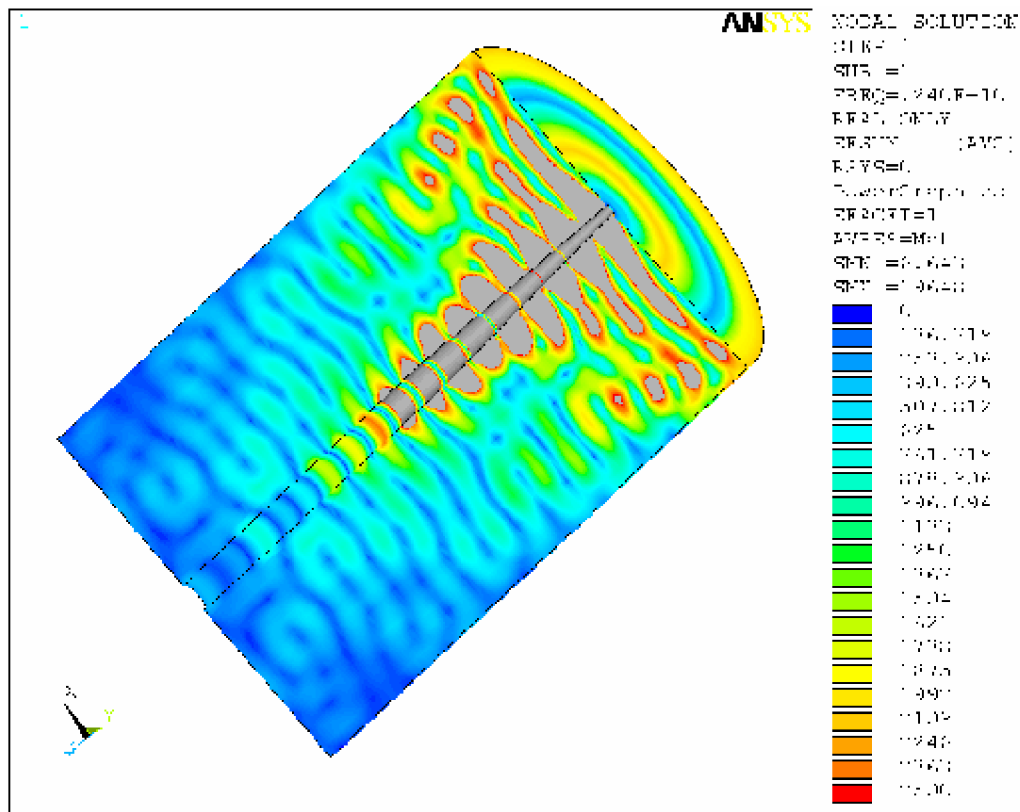
Výsledky numerické analýzy potvrzují, že navržené rozměry splňují podmínku šíření elektromagnetického pole v komoře bez emulze obr. 5.4 i s emulzí obr. 8.1. Na obr. 8.1 je vidět průchod intenzity elektrického pole emulzí a tlumení vlny vlivem vodivých vlastností emulze s vodou. Na obr. 8.2 je detail rozložení intenzity elektrického pole v emulzi. Je zde patrné rovnoměrné rozložení pole v emulzi a tlumení pole. Při tlumení dochází ke ztrátám a k ohřevu emulze. Činné ztráty působením intenzity elektrického pole jsou na obr. 8.4.



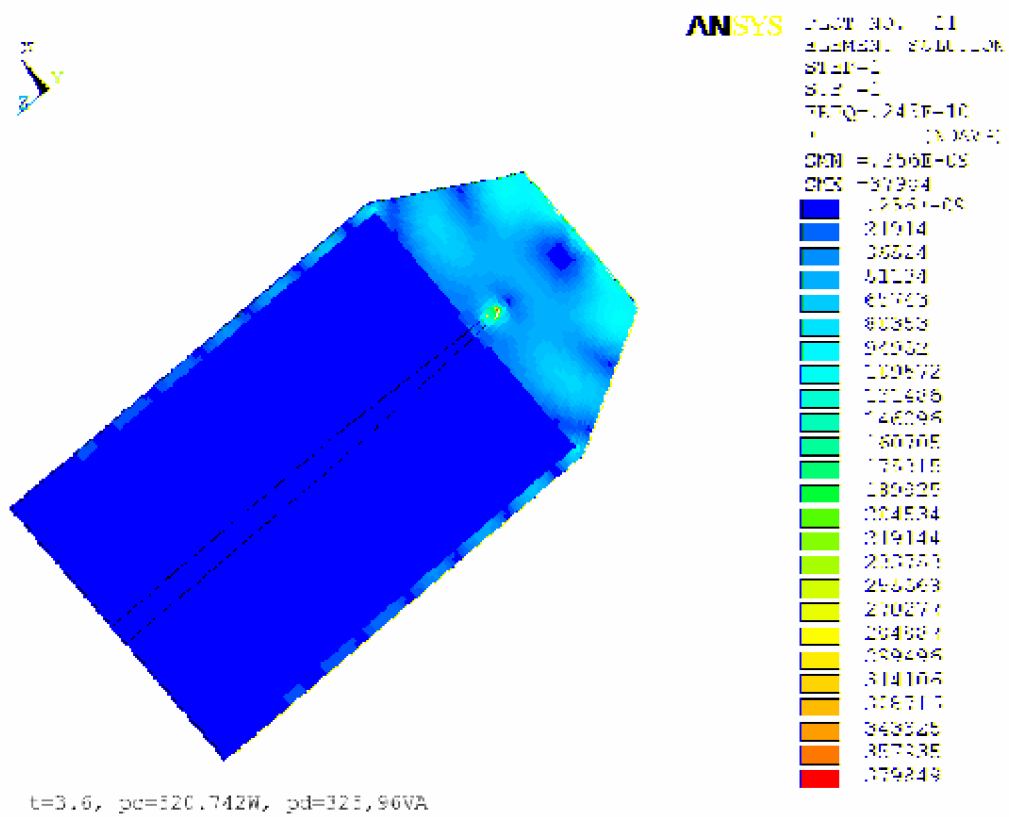
**Obr. 8.1** Rozložení intenzity elektrického pole v modelu

Výsledky procesu vysoušení: Na obr. 8.3 je rozložení intenzity elektrického pole v komoře po prvním kroku 3,6 s. Je zde vidět, že intenzita elektrického pole vniká do emulze pouze do malé hloubky (velmi rychle se tlumí), to je způsobeno obsahem vody v emulzi. Také je vidět, že působí i ze stran emulze. Jejím působením vznikají ztráty v emulzi, činné ztráty jsou na obr. 8.4. Tyto ztráty způsobují žádaný ohřev emulze, rozložení teploty je na obr. 8.5. Po prvním kroku již byla vysušena okrajová část emulze obr. 8.6 (vysušené elementy jsou označeny tmavě modrou barvou).

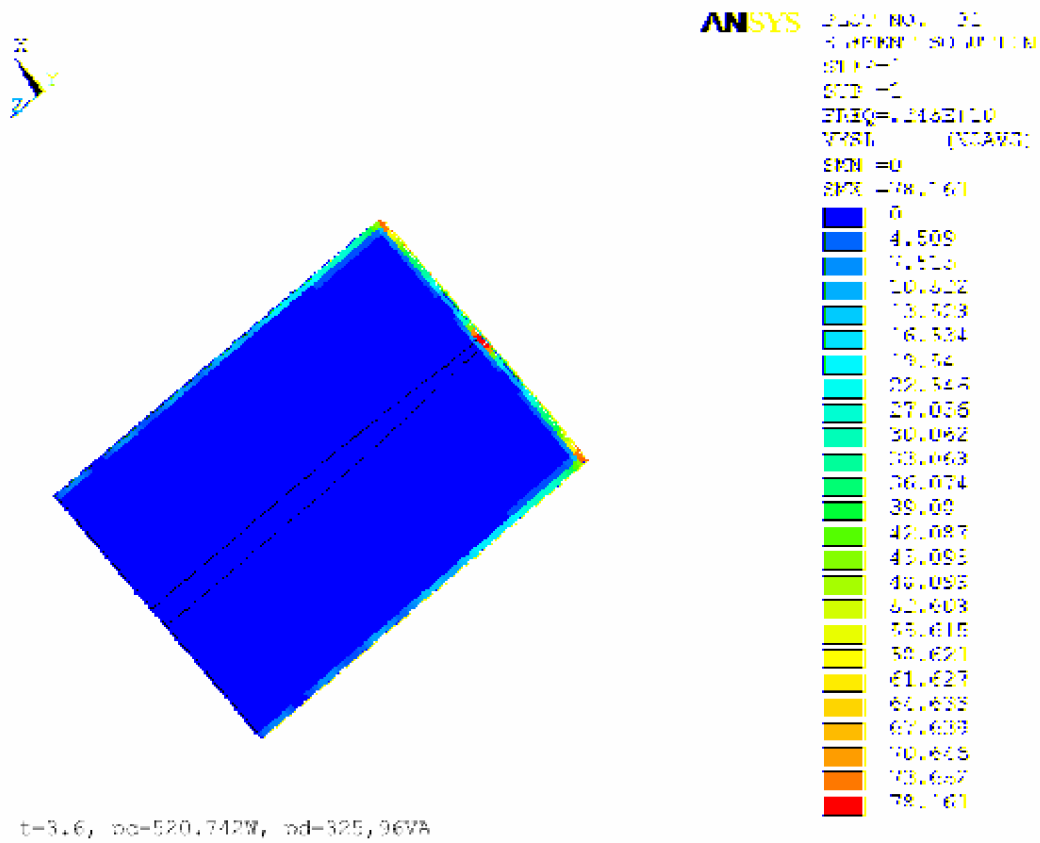
Další proces vysoušení je vidět na výsledcích z časových okamžiků 1, 2 a 3 minuty. Na obr. 8.7 – 8.9 je rozložení intenzity elektrického pole v závislosti na vysušených elementech a již vysušené elementy (nevysušené elementy jsou zobrazeny fialovou barvou).

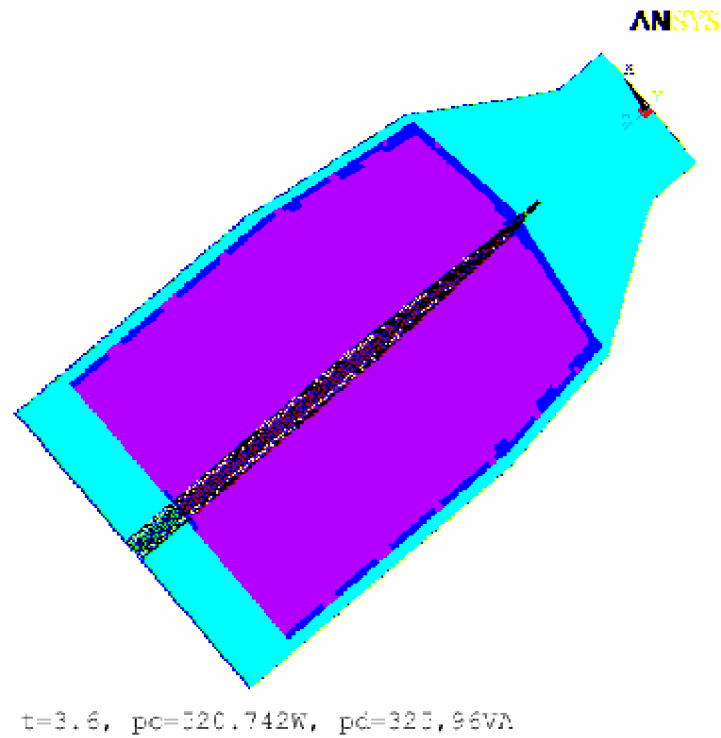


Obr. 8.2 Rozložení intenzity elektrického pole v emulzi

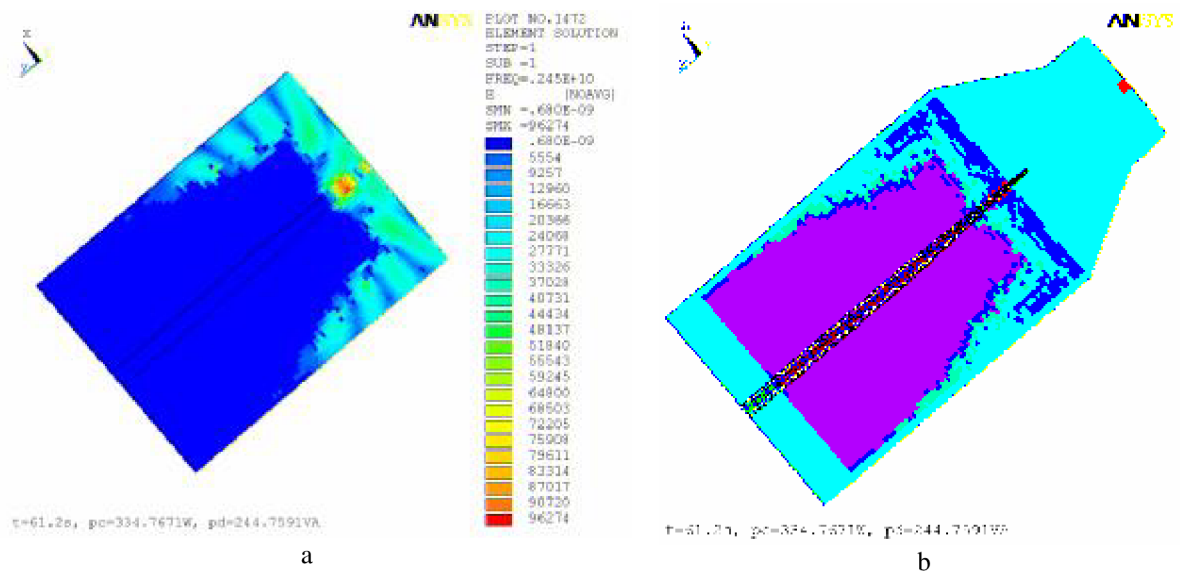


Obr. 8.3 Rozložení intenzity elektrického pole v komoře pro  $t=3,6$  s

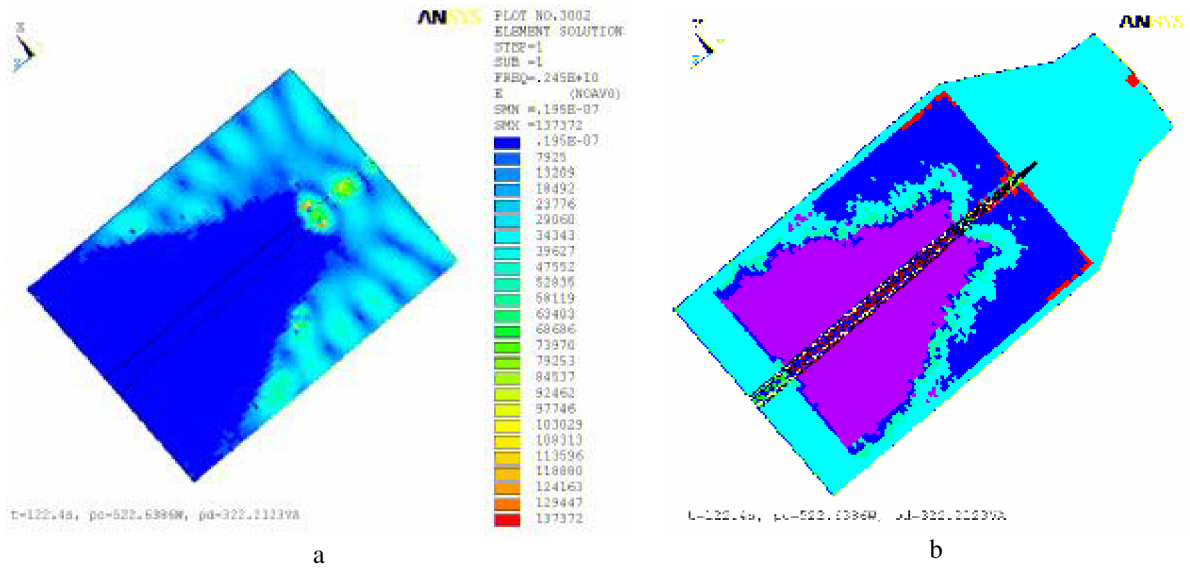




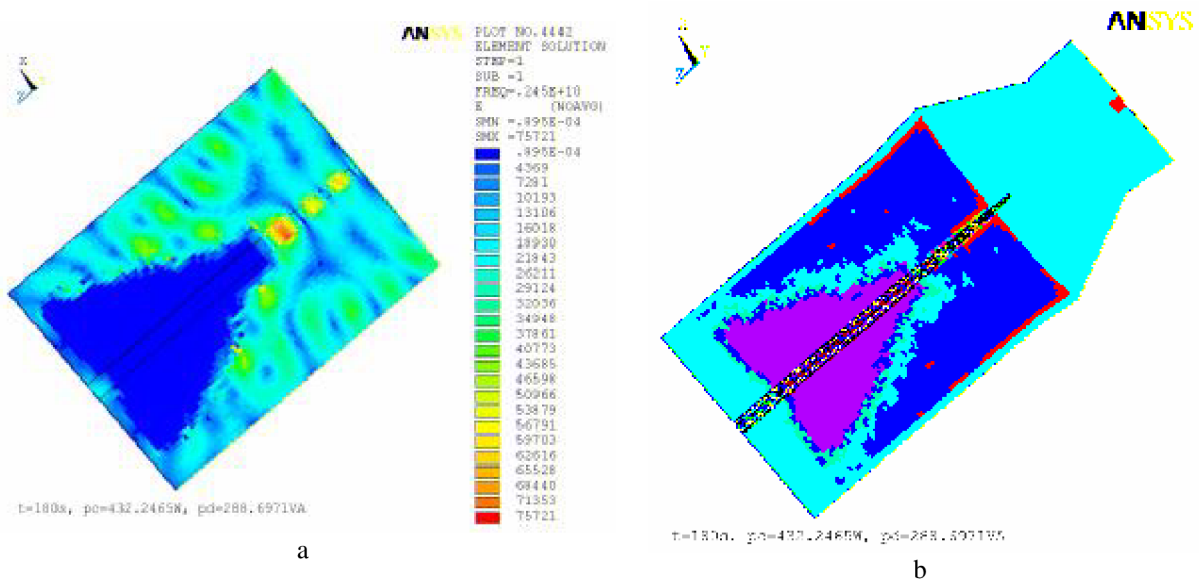
Obr. 8.6 Vysušené elementy pro  $t=3,6$  s



Obr. 8.7 a) Rozložení intenzity elektrického pole v emulzi, b) vysušené elementy,  $t=61,2$  s



Obr. 8.8 a) Rozložení intenzity elektrického pole v emulzi, b) vysušené elementy,  $t=122,4s$



Obr. 8.9 a) Rozložení intenzity elektrického pole v emulzi, b) vysušené elementy,  $t=180 s$

## 9. Závěr

V diplomové práci byla na základě prostudovaných informací o šíření elektromagnetického pole ve vlnovodu, šíření tepla v nehomogenních materiálech a fázových změnách vody návržena vysokofrekvenční komora pracující na kmitočtu 2,45GHz, sloužící pro vysoušení emulze složené z oleje a vody (nad 30% objemu emulze).

Byl sestaven numerický model, ve kterém je vyřešena vysokofrekvenční-tepelná sdružená úloha. Návrh vysokofrekvenční komory je řešen s ohledem na distribuci tepla v nehomogenním prostředí a chemické a fyzikální změny. Rozměry vysokofrekvenční komory zaručují v komoře největší možný přenášený výkon ze zdroje a rovnoměrné rozložení elektromagnetického pole. Tyto podmínky jsou nutné k rovnoměrnému ohřevu vysoušené emulze.

V práci byly vytvořeny nejprve 4 numerické modely úlohy metodou konečných prvků v multifyzikálním prostředí ANSYS pomocí jazyka ADPL, s různými rozměry, na jejichž základě byl vybrán model s nejkratší dobou ohřevu vzhledem k objemu emulze, který měl nejefektivnější dobu vysoušení a činné ztráty. Výsledek výpočtených a simulovaných hodnot (podle vztahu 5.9) se lišil s relativní chybou 13%.

Pomocí numerické vysokofrekvenční analýzy (viz obr. 8.1) bylo také ověřeno šíření elektromagnetického pole v komoře a jeho rovnoměrné rozložení ve vysoušené emulzi.

Vysoušení bylo řešeno vysokofrekvenční-tepelnou analýzou (viz kapitola 6) a bylo zjištěno rozložení intenzity elektrického pole v komoře, jejímž působením vznikají ve vysoušené emulzi činné ztráty (viz obr. 8.4) způsobující žádaný ohřev emulze. Tyto ztráty tvořily vstupní data tepelné analýzy, k výpočtu měrného skupenského tepla potřebného pro přeměnu vody v páru a rozložení teploty v emulzi. Simulace vysoušení trvala 3 minuty a byla rozdělena na 50 kroků. V jednom kroku proběhla vysokofrekvenční a tepelná analýza a byla sledována potřebná teplota a skupenské teplo pro vypaření vody v každém elementu. Po dosažení měrného skupenského tepla  $33 \text{ MJ/m}^3$  došlo ke změně materiálových vlastností elementu, což simulovalo odpaření vody z daného elementu. Materiálové vlastnosti popisovaly přeměnu vody v mokrou až suchou páru. Po 3 minutách došlo k odpaření přibližně 70% objemu vody z emulze, to plně dostačovalo požadavkům zadání diplomové práce.

## 10. Použitá literatura

- [1] DĚDEK, L., DĚDKOVÁ, J. *Elektromagnetismus*. VUTIUM Brno, 1998
- [2] ZBYNĚK RAIDA a kol., *Analýza mikrovlnných struktur v časové oblasti*. VUTIUM Brno 2004
- [3] RAČEK, J., *Energetická zařízení*. VUT Brno 2004
- [4] RAČEK, J., *Technická mechanika*. Elektronické texty VUT Brno
- [5] *Ansys User's Manual*. SVANSON ANALYSYS SYSTÉM, Inc. 2003, Huston, USA registered ISO 9001:2000
- [6] ZIENKIEVICKY, O.C., Taylor, R.L. *Finite Element Method*. vol. 1-3., Butterworth Hineman, London, 2000, pp 352, ISBN 07506-50508
- [7] GUSTA, K.K., Meek, J. L. *Finite Element mutticlisnipling Analysis*. AIAA, New York, 2000, pp 380, ISBN 156347-3933
- [8] FIALA, P., KADLECOVÁ, E., BACHOREC, T. *Modelování elektromagnetických polí. Počítačová cvičení*. Elektronické texty VUT v Brně, FEKT, 2005
- [9] SVAČINA J. *Mikrovlnná technika*. SNTL – Praha 1982
- [10] OPPL L. *Základy mikrovlnné techniky – Sběrka příkladů*. Vydavatelství ČVUT 1995
- [11] VRBA J. *Technika velmi vysokých frekvencí*. Vydavatelství ČVUT 1998
- [12] BHARTIA P., BAHL I. J. *Millimetr Wave Engineering And Applications*. IEEE 1984
- [13] KALČÍK, J. *Technické mechanika*. 1973
- [14] RÉDR, M. *Základy tepelné techniky*. 1991
- [15] REKTORYS, K. *Přehled užité matematiky*. Praha : SNTL 1968
- [16] FIALA, P. *Modeling of current transformers on a short-circuit*. Phd Thesis, Technical University Brno, FEI, 11.6.1999, pp.41, ISBN 80-214-1346-8.

## 11. Seznam symbolů a zkratek

<i>Fyzikální veličiny</i>		<i>Jednotky</i>
a	Poloměr vlnovodu	m
a'	Derivace kořene besselovky funkce	
B	Magnetická indukce	T
c	rychlost světla	m.s <sup>-1</sup>
C	Měrná tepelná kapacita	J.Kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
DU	Energie soustavy	J
E	Intenzita elektrického pole	V.m <sup>-1</sup>
e	permitivita	F.m <sup>-1</sup>
f	Kmitočet	Hz
F	Tepelný tok	W
g	vodivost	S.m <sup>-1</sup>
H	Intenzita emagnetického pole	A.m <sup>-1</sup>
i, j	Indexy	
J	Proudová hustota	A.m <sup>-2</sup>
l	vlnová délka	m
L <sub>opt</sub>	Délka trychtýřového rozšíření	m
m	permeabilita	H.m <sup>-1</sup>
P	Pointigův vektor	W.m <sup>-2</sup>
R <sub>T</sub>	tepelný odpor	K.W <sup>-1</sup>
R <sub>TC</sub>	celkový tepelný odpor	K.W <sup>-1</sup>
R <sub>Tch</sub>	tepelný odpor chladícího elementu	K.W <sup>-1</sup>
R <sub>Tl</sub>	podélný tepelný odpor	K.W <sup>-1</sup>
R <sub>TS</sub>	tepelný odpor styku	K.W <sup>-1</sup>
R <sub>Tt</sub>	příčný tepelný odpor	K.W <sup>-1</sup>
R <sub>Tu</sub>	tepelný odpor proudové úžiny	K.W <sup>-1</sup>
R <sub>u</sub>	odporu proudové úžiny	Ω
Z	Impedance	W