UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

DANIELA WAGNEROVÁ
IV. ročník – prezenční studium

Obor: Učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ a speciální pedagogika

NESTANDARDNÍ APLIKAČNÍ ÚLOHY A PROBLÉMY

Diplomová práce

Vedoucí práce: Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.

OLOMOUC 2010

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jen uvedených pramenů a literatury.

V Olomouci dne 5.4. 2010

…………………………………….

vlastnoruční podpis

Děkuji Mgr. Jitce Hodaňové, Ph.D. za odborné vedení diplomové práce, ale i učitelům základních škol, u nichž jsem prováděla průzkum.

Obsah

Úvod

Od roku 2004 dochází v českém školství ke změnám. Kromě jiného byl schválen Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV), který vymezuje základní rámec pro vzdělávání na základní škole.

Pro svou diplomovou práci jsem si vybrala jeden z tematických okruhů vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace, konkrétně okruh **Nestandardní aplikační úlohy a problémy.**

Tento okruh je v matematickém vzdělávání na základní škole nový. Jeho realizací by mělo být žákům umožněno řešit úlohy a problémy zábavnou formou, zabývat se úlohami s tématikou z různých oblastí matematiky i úlohami a problémy z praktického života. Hlavním cílem mé práce je vytvořit sbírku úloh typických pro tento tematický okruh, která bude využitelná ve výuce.

Cílem první kapitoly práce je seznámit čtenáře s obecnými cíly a principy základního vzdělávání uvedenými v RVP ZV. V druhé kapitole je uvedena charakteristika vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace a vzdělávací obsah tematického okruhu Nestandardní aplikační úlohy.

Dalších pět kapitol obsahuje konkrétní úlohy s řešením z tohoto tematického okruhu. Kapitoly jsou rozděleny podle zaměření a to na logické a kombinační úlohy, geometrické úlohy, úlohy zaměřené na prostorovou představivost, slovní úlohy a úlohy zaměřené na aplikaci poznatků a dovedností z jiných vzdělávacích oblastí.

V osmé kapitole je zhodnocen průzkum, který jsem aplikovala na žácích devátého ročníku. Průzkum byl realizován pomocí testu složeného z vybraných úloh ze sbírky, kterou jsem vytvořila. Sestavila jsem dotazník zaměřený na charakteristiku žáků. V dotazníku se žáci také vyjadřovali k obtížnosti zadaných úloh. V testu žáci řešili úlohy logické a kombinatorické, a dále pak úlohy geometrické a úlohy zaměřené na prostorovou představivost.

Součástí práce jsou i přílohy, které průzkum doplňují o test, dotazník a výpočty.

1 POJETÍ ZÁKLADNÍHO VZDĚLÁVÁNÍ DLE RVP ZV

V roce 2004 MŠMT schválilo nové principy v politice pro vzdělávání žáků od 3 do 19 let. Tímto rozhodnutím se zavádí nový systém kurikulárních dokumentů, které jsou nyní vytvářeny na dvou úrovních a to na úrovni státní a na úrovni školské.

Státní úroveň v systému kurikulárních dokumentů představují Národní program vzdělávání a RVP. Národní program vzdělávání vymezuje počáteční vzdělávání jako celek. RVP vymezují závazné rámce vzdělávání pro jeho jednotlivé etapy – předškolní, základní a střední vzdělávání. Školní úroveň představují školní vzdělávací programy (dále jen ŠVP), podle nichž se uskutečňuje vzdělávání na jednotlivých školách.[1]

Tímto je učitelům umožněno vytvořit si vlastní vzdělávací program, založený na vlastních představách a zkušenostech s výukou.

1.1 Rámcové vzdělávací programy:

- vycházejí z nové strategie vzdělávání, která zdůrazňuje klíčové kompetence, jejich provázanost se vzdělávacím obsahem a uplatnění získaných vědomostí a dovedností v praktickém životě;
- vycházejí z koncepce celoživotního učení;
- formulují očekávanou úroveň vzdělání stanovenou pro všechny absolventy jednotlivých etap vzdělávání;
- podporují pedagogickou autonomii škol a profesní odpovědnost učitelů za výsledky vzdělávání.[2]

Principy Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání

- navazuje svým pojetím na RVP PV a je východiskem pro koncepci rámcových vzdělávacích programů pro střední vzdělávání;
- vymezuje vše, co je společné a nezbytné v povinném základním vzdělávání žáků, včetně vzdělávání v odpovídajících ročnících víceletých středních škol;

---

[1] Wikipedie

[2] JEŘÁBEK, J.; TUPÝ, J., aj.: *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání: s přílohou upravující vzdělávání žáků s lehkým mentálním postižením*, str. 9

- specifikuje úroveň klíčových kompetencí, jíž by měli žáci dosáhnout na konci základního vzdělávání;
- vymezuje vzdělávací obsah – očekávané výstupy a učivo;
- zařazuje jako závaznou součást základního vzdělávání průřezová témata s výrazně formativními funkcemi;
- podporuje komplexní přístup k realizaci vzdělávacího obsahu, včetně možnosti jeho vhodného propojování, a předpokládá volbu různých vzdělávacích postupů, odlišných metod, forem výuky a využití všech podpůrných opatření ve shodě s individuálními potřebami žáků;
- umožňuje modifikaci vzdělávacího obsahu pro vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami;
- je závazný pro všechny střední školy při stanovování požadavků přijímacího řízení pro vstup do středního vzdělávání.[3]

1.2 Pojetí základního vzdělávání na 2. stupni

Základní vzdělávání na **2. stupni** pomáhá žákům získat vědomosti, dovednosti a návyky, které jim umožní samostatné učení a utváření takových hodnot a postojů, které vedou k uvážlivému a kultivovanému chování, k zodpovědnému rozhodování a respektování práv a povinností občana našeho státu i Evropské unie. Pojetí základního vzdělávání na 2. stupni je budováno na širokém rozvoji zájmů žáků, na vyšších učebních možnostech žáků a na provázanosti vzdělávání a života školy se životem mimo školu. To umožňuje využít náročnější metody práce i nové zdroje a způsoby poznávání, zadávat komplexnější a dlouhodobější úkoly či projekty a přenášet na žáky větší odpovědnost ve vzdělávání i v organizaci života školy.[4]

1.3 Cíle základního vzdělávání

Základní vzdělávání má žákům pomoci utvářet a postupně rozvíjet klíčové kompetence a poskytnout spolehlivý základ všeobecného vzdělání orientovaného zejména na situace blízké životu a na praktické jednání. V základním vzdělávání se proto usiluje o naplňování těchto cílů:

---

[3] JEŘÁBEK, J.; TUPÝ, J., aj.: *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání,* str. 10
[4] Tamtéž, str. 12

- umožnit žákům osvojit si strategie učení a motivovat je pro celoživotní učení
- podněcovat žáky k tvořivému myšlení, logickému uvažování a k řešení problémů
- vést žáky k všestranné, účinné a otevřené komunikaci
- rozvíjet u žáků schopnost spolupracovat a respektovat práci a úspěchy vlastní i druhých
- připravovat žáky k tomu, aby se projevovali jako svébytné, svobodné a zodpovědné osobnosti, uplatňovali svá práva a naplňovali své povinnosti
- vytvářet u žáků potřebu projevovat pozitivní city v chování, jednání a v prožívání životních situací; rozvíjet vnímavost a citlivé vztahy k lidem, prostředí i k přírodě
- učit žáky aktivně rozvíjet a chránit fyzické, duševní a sociální zdraví a být za ně odpovědný
- vést žáky k toleranci a ohleduplnosti k jiným lidem, jejich kulturám a duchovním hodnotám, učit je žít společně s ostatními lidmi
- pomáhat žákům poznávat a rozvíjet vlastní schopnosti v souladu s reálnými možnosti a uplatňovat je spolu s osvojenými vědomostmi a dovednostmi při rozhodování o vlastní životní a profesní orientaci[5]

1.4 Vzdělávací oblasti

Vzdělávací obsah základního vzdělávání je v RVP ZV orientačně rozdělen do devíti **vzdělávacích oblastí.** Jednotlivé vzdělávací oblasti jsou tvořeny jedním *vzdělávacím oborem* nebo více obsahově blízkými *vzdělávacími obory*:

- **Jazyk a jazyková komunikace** *(Český jazyk a literatura, Cizí jazyk)*

[5] JEŘÁBEK, J.; TUPÝ, J., aj.: *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*, str. 12

- **Matematika a její aplikace** *(Matematika a její aplikace)*
- **Informační a komunikační technologie** *(Informační a komunikační technologie)*
- **Člověk a jeho svět** *(Člověk a jeho svět)*
- **Člověk a společnost** *(Dějepis, Výchova k občanství)*
- **Člověk a příroda** *(Fyzika, Chemie, Přírodopis, Zeměpis)*
- **Umění a kultura** *(Hudební výchova, Výtvarná výchova)*
- **Člověk a zdraví** *(Výchova ke zdraví, Tělesná výchova)*
- **Člověk a svět práce** *(Člověk a svět práce)*[6]

[6] JEŘÁBEK, J.; TUPÝ, J., aj.: *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*, str. 18

2 MATEMATIKA A JEJÍ APLIKACE

2.1 Charakteristika vzdělávací oblasti[7]

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Poskytuje vědomosti a dovednosti potřebné v praktickém životě a umožňuje tak získávat matematickou gramotnost. Pro tuto svoji nezastupitelnou roli prolíná celým základním vzděláváním a vytváří předpoklady pro další úspěšné studium.

Vzdělávání klade důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům matematiky a jejich vzájemným vztahům. Žáci si postupně osvojují některé pojmy, algoritmy, terminologii, symboliku a způsoby jejich užití.

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru **Matematika a její aplikace** je rozdělen na čtyři tematické okruhy. V tematickém okruhu *Čísla a početní operace* na prvním stupni, na který navazuje a dále ho prohlubuje na druhém stupni tematický okruh *Číslo a proměnná*, si žáci osvojují aritmetické operace v jejich třech složkách: dovednost provádět operaci, algoritmické porozumění (proč je operace prováděna předloženým postupem) a významové porozumění (umět operaci propojit s reálnou situací). Učí se získávat číselné údaje měřením, odhadováním, výpočtem a zaokrouhlováním. Seznamují se s pojmem proměnná a s její rolí při matematizaci reálných situací.

V dalším tematickém okruhu *Závislosti, vztahy a práce s daty* žáci rozpoznávají určité typy změn a závislostí, které jsou projevem běžných jevů reálného světa, a seznamují se s jejich reprezentacemi. Uvědomují si změny a závislosti známých jevů, docházejí k pochopení, že změnou může být růst i pokles a že změna může mít také nulovou hodnotu. Tyto změny a závislosti žáci analyzují z tabulek, diagramů a grafů, v jednoduchých případech je konstruují a vyjadřují matematickým předpisem nebo je podle možností modelují s využitím vhodného počítačového software nebo grafických kalkulátorů. Zkoumání těchto závislostí směřuje k pochopení pojmu funkce.

---

[7] JEŘÁBEK, J.; TUPÝ, J., aj.: *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*, str. 29

V tematickém okruhu *Geometrie v rovině a v prostoru* žáci určují a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace, hledají podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině (resp. v prostoru), učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem), zdokonalovat svůj grafický projev. Zkoumání tvaru a prostoru vede žáky k řešení polohových a metrických úloh a problémů, které vycházejí z běžných životních situací.

Důležitou součástí matematického vzdělávání jsou ***Nestandardní aplikační úlohy a problémy***, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní.

Žáci se učí využívat prostředky výpočetní techniky (především kalkulátory, vhodný počítačový software, určité typy výukových programů) a používat některé další pomůcky, což umožňuje přístup k matematice i žákům, kteří mají nedostatky v numerickém počítání a rýsovacích technikách. Zdokonalují se rovněž v samostatné a kritické práci se zdroji informací.

2.2 Cílové zaměření vzdělávací oblasti[8]

Vzdělávání v dané vzdělávací oblasti směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tím, že vede žáka k:

- využívání matematických poznatků a dovedností v praktických činnostech - odhady, měření a porovnávání velikostí a vzdáleností, orientace
- rozvíjení paměti žáků prostřednictvím numerických výpočtů a osvojováním si nezbytných matematických vzorců a algoritmů

[8] JEŘÁBEK, J.; TUPÝ, J., aj.: *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*, str. 29

- rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů
- rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení osvojováním si a využíváním základních matematických pojmů a vztahů, k poznávání jejich charakteristických vlastností a na základě těchto vlastností k určování a zařazování pojmů
- vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu
- vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění; k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací), k vyhodnocování matematického modelu a hranic jeho použití; k poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely
- provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému
- přesnému a stručnému vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky, prováděním rozborů a zápisů při řešení úloh a ke zdokonalování grafického projevu
- rozvíjení spolupráce při řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situace z běžného života a následně k využití získaného řešení v praxi; k poznávání možností matematiky a skutečnosti, že k výsledku lze dospět různými způsoby
- rozvíjení důvěry ve vlastní schopnosti a možnosti při řešení úloh, k soustavné sebekontrole při každém kroku postupu řešení, k rozvíjení systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti, k vytváření dovednosti vyslovovat hypotézy na základě zkušenosti nebo pokusu a k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů

2.3 Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru nestandardní aplikační úlohy a problémy[9]

Očekávané výstupy 2. stupeň

Žák

- ***užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací***
- ***řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí***

Učivo 2. stupeň

- číselné a logické řady
- číselné a obrázkové analogie
- logické a netradiční geometrické úlohy

Dle Branta[10] je smyslem zařazení tohoto tematického okruhu je ukázat žákům na řešení aplikačních úloh, pokud možno zábavnou formou, potřebnost matematiky pro řešení praktických problémů, její využitelnost v nejrůznějších oborech a životních situacích, rozvíjet u žáků logické myšlení, a tím nejen zvýšit zájem o matematiku u žáků s matematickým nadáním, ale také podchytit tento zájem u žáků prospěchově slabších. Tomu napomáhají i takové úlohy a problémy, jejichž řešení vyžaduje a rozvíjí logické uvažování a je více či méně nezávislé na znalostech školské matematiky.

Náročnost úloh a problémů by měla samozřejmě odpovídat jednak rozumové vyspělosti žáků vzhledem k jejich věku, ale také individuálním schopnostem jednotlivých žáků. Zařazování úloh s různou náročností významně napomáhá realizaci individuálního přístupu k žákům a dává možnost realizace i slabším žákům.

Při rozpracování vzdělávacího obsahu tematického okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy je třeba mít stále na paměti, že tyto úlohy a problémy by měly prolínat všemi tematickými okruhy a měly by být organicky zařazovány do výuky

[9] JEŘÁBEK, J.; TUPÝ, J., aj.: *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*, str. 33
[10] BRANT, J. *Nestandardní aplikační úlohy a problémy.*

v průběhu celého základního vzdělávání. Vzhledem k tomu, že tento tematický okruh nemusí tvořit samostatný celek, lze jej rozpracovat např. zařazením úloh a problémů do všech tematickým okruhů v jednotlivých ročnících. Rozpracování lze také řešit např. zařazením tohoto vzdělávacího okruhu do jednotlivých ročníků jako samostatného tematického okruhu v každém ročníku. Je samozřejmě možné tyto způsoby kombinovat, tj. rozpracovat zařazení úloh do ostatních tematických okruhů a na závěr zařadit i jako samostatný tematický okruh v každém ročníku apod.

V každém případě by měly být zařazovány úlohy a problémy s nejrůznější tématikou takové, aby jejich řešení vyžadovalo uplatnění poznatků nejen z izolovaných tematických okruhů, ale aby k jejich řešení byly potřebné poznatky komplexního charakteru z různých tematických okruhů a vzdělávacích oblastí, což může významně přispět i k řešení mezipředmětových souvislostí. Především je však třeba zařazovat takové úlohy, k jejichž řešení je třeba užívat logickou úvahu, popř. kombinační úsudek. Pro zpestření je vhodné zařazovat i úlohy a problémy ze zábavné matematiky.

Řešení úloh s reálnými náměty tohoto tematického okruhu vyžadují větší důraz na matematizaci reálných situací, provádění situačních náčrtů při analýze problému, provádění zkoušky řešení vzhledem k dané reálné situaci. Při výuce se uplatní vztahy mezi jednotlivými tematickými okruhy, zejména mezi algebrou a geometrií.

3 LOGICKÉ A KOMBINAČNÍ ÚLOHY

Dle Emmerlingové[11] je logické myšlení charakterizováno jako vývojově vyšší forma myšlení, které je založeno na správném usuzování podle zákonů formální logiky. Slovník cizích slov vymezuje formální logiku jako učení o zákonech a pravidlech nutných pro získávání pravdivých závěrů při usuzování. Za jejího zakladatele je považován Aristoteles.

Základem pro jakoukoliv dovednost, v našem případě pro logické myšlení, je dostatečné množství nervových buněk a silná struktura nervových spojů v dané oblasti mozku. Logické myšlení lze rozvíjet u dětí již od tří let a nervové spoje se vytvářejí při jakékoliv činnosti po celý život člověka.

O logické myšlení se jedná v každé myšlenkové úloze, kterou musí člověk vyřešit. V užším smyslu se logickými úlohami rozumějí takové, u nichž se na základě předložených faktů musejí učinit závěry.

Kombinatorika hraje v rozvoji matematického myšlení výraznou roli. Její význam je zejména v rozvoji logického myšlení a obecných kombinačních schopností, v neposlední řadě ji lze považovat za základ pro následné řešení různých pravděpodobnostních problémů.

Je učivem hlavně středních škol. Různé kombinatorické úlohy se vyskytují často v matematických olympiádách a dalších soutěžích. Na druhém stupni základních škol se kombinatorické úlohy řeší také, ale pouze intuitivně, úsudkem nebo dosazováním hodnot bez použití vzorců a obecných kombinatorických pravidel.[12]

V praxi se kombinatorických metod používá při řešení úloh s dopravní tématikou (např. při sestavování jízdního řádu), při vypracování plánu výroby a realizace produkce, při sestavování a luštění šifer a pro řešení dalších problémů teorie informace.

[11] EMMERLINGOVÁ, S.: *Můžeme se naučit logicky myslet?*

[12] PŘÍHONSKÁ, J.: *Rozvoj kombinatorického myšlení.*, str. 1

3.1 Úlohy logického a kombinačního charakteru

Jedním typem těchto úloh jsou logické řady. Žák má vyřešit, podle jakého pravidla za sebou čísla následují.

Úloha 1

Kterým číslem pokračuje řada?

1	3	5	7	9	?

Řešení: 11; řada roste vždy o 2

Úloha 2

Které číslo chybí v této číselné řadě?

1, 5, ?, 50, 100, 500

Řešení: 10 (jsou to římské číslice)

Úloha 3

Které číslo sem nepatří?

1	99
43	8
67	29

Řešení: 8; všechna ostatní čísla jsou lichá

Úloha 4

Jaká kombinace čísel následuje?

8	7	6	5	?
2	5	8	11	?

Řešení:

4
14

Horní řada se snižuje vždy o 1, spodní se zvyšuje o 3.

Komplikovanější variantou číselných řad jsou číselné čtverce.

Úloha 5

Jaké číslo nahradí otazník?

9	4	6	8	5
3	7	6	3	7
8	5	5	9	4
4	6	7	2	8
10	3	?	7	6

Obr. 1: Číselný čtverec – Úloha 5

Řešení: 7. Každý malý čtverec ze čtyř čísel dává dohromady 23.

Úloha 6

Které číslo nahradí otazník?

2	1	8	3
1	4	2	9
0	2	6	5
3	5	2	?

Obr. 2: Číselný čtverec – Úloha 6

Řešení: 7. Součty čísel ve sloupcích tvoří matematickou řadu: součet prvního sloupce je 6, druhého 12, třetího 18 a čtvrtého 24

Úloha 7

Kterým číslem nahradíš otazník?

6	8	4	2
9	7	5	7
3	5	8	6
1	4	9	?

Obr. 3: Číselný čtverec – Úloha 7

Řešení: 6. V každá řadě sečti první a třetí číslo a druhé číslo urči tak, abys dostal čtvrté číslo.

Vhodné je zapojit úlohy s písmeny nebo obecnými symboly, které nahrazují číslice, a žák má vyřešit, která čísla jsou symboly nahrazena.

Úloha 8

Každé písmeno v tabulce má svou hodnotu. Které číslo nahradí otazník?

C	B	A	A	
B	A	B	A	46
B	C	B	B	59
C	B	C	C	
62	?			

Obr. 4: Čtverec z písmen – Úloha 8

Řešení: 54. A = 9, B = 14, C = 17[13]

Úloha 9

Všechna stejná písmena v tabulce mají stejnou hodnotu. Jaké číslo nahradí otazník?

A	B	B	C	?
B	A	C	A	190
A	C	C	A	194
A	A	B	C	
		200		

Obr. 5: Čtverec z písmen – Úloha 9

Řešení: 193. A = 45, B = 48, C = 52.[14]

[13] SKITT, C.: *Mensa - IQ trénink pro děti*, str. 136
[14] Tamtéž, str. 73

Úloha 10 (inspirováno úlohou z[15])

Všechny stejné symboly v tabulce mají tutéž hodnotu. Které číslo nahradí otazník?

○	△	○	○	
△	○	△	△	111
△	○	△	○	?
○	○	△	△	
	109			

Obr. 6: Čtverec se symboly – Úloha 10

Řešení: 110. ○ = 27, △ = 28

Úlohy 11 a 12 mají za úkol procvičit žákovy představy o číslech. Žák má vhodně zkombinovat, nebo doplnit čísla tak, aby daný předpis platil.

Úloha 11 (inspirováno úlohou z[16])

Dovedeš uspořádat čísla 1, 2, 3 a 4 tak, aby platil uvedený výsledek?

a) $\{[(?+?):?]-?\}\cdot ?=1$

b) $\{[(?+?):?]-?\}\cdot ?=4$

c) $\{[(?+?):?]-?\}\cdot ?=16$

Řešení:

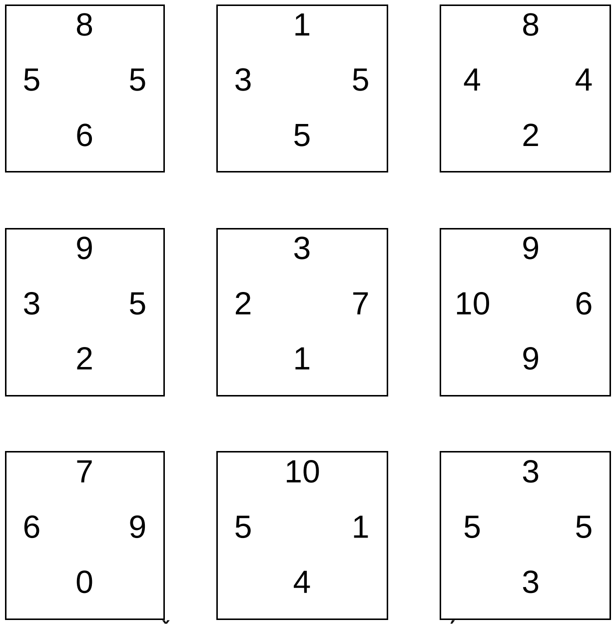
a) 3 3 4 1 2
b) 3 3 1 4 2
c) 3 3 1 2 4

[15] Tamtéž, str. 99
[16] SKITT, C.: *Mensa - IQ trénink pro děti*, str. 142

Další dvě úlohy procvičují paměťové sčítání čísel. Což je velice důležité pro běžné užívání matematiky v praktickém životě.

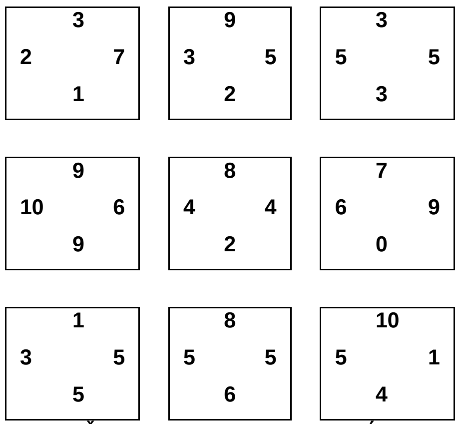
Úloha 12

Uspořádej číselné čtverce po třech tak, aby součet sousedních čísel vždy dával číslo 10.[17]



Obr. 7: Číselné čtverce (zadání) – Úloha 12

Řešení:



Obr. 8: Číselné čtverce (řešení) – Úloha 12

[17] SKITT, C.: *Mensa - IQ trénink pro děti*, str. 82

Úloha 13[18]

Najděte „cestu“ (tj. sečtěte příslušná čísla), která vychází z horního levého vrcholu čtverce a končí v jeho pravém dolním vrcholu tak, aby součet čísel byl 110.

3	4	5	4	3	9	7
1		6		5		8
2	3	7	6	9	4	1
4		8		3		3
5	6	9	8	7	2	8
1		1		6		3
3	4	2	8	5	4	3

Obr. 9: Cesta číselným čtvercem (zadání) – Úloha 13

Řešení:

3	**4**	**5**	**4**	**3**	**9**	**7**
1		6		5		**8**
2	3	**7**	**6**	**9**	**4**	**1**
4		**8**		3		3
5	6	**9**	8	7	2	8
1		**1**		6		3
3	4	**2**	**8**	**5**	**4**	**3**

3	4	**5**	**4**	**3**	**9**	**7**
1		**6**		5		**8**
2	3	**7**	6	9	4	**1**
4		**8**		3		**3**
5	6	**9**	8	7	2	**8**
1		**1**		6		**3**
3	**4**	**2**	8	5	4	**3**

3	4	5	4	**3**	**9**	**7**
1		6		**5**		**8**
2	**3**	**7**	6	**9**	4	**1**
4		**8**		**3**		**3**
5	6	**9**	**8**	**7**	2	**8**
1		1		6		**3**
3	4	2	8	5	4	**3**

Obr. 10: Cesta číselným čtvercem (řešení) – Úloha 13

Následující úlohy jsou zábavného charakteru a učí žáky hledat i neobvyklá řešení.

Úloha 14[19]

Husy

Husy jdou po cestě jedna za druhou. Kolik jich jde?

Řešení: Po cestě jdou tři husy

[18] MALÁČ, J., KURFÜRST, J.: *Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ*, str. 12

[19] LOUKOTA, J.: *Veselá matematika aneb Kouzla, hříčky, hádanky a lamohlavy*, str. 10

Úloha 15[20]

Kočky

Jestliže tři kočky chytily 3 myši za 3 minuty, kolik koček chytí 100 myší za 100 minut?

Řešení: Tři kočky chytí 100 myší za 100 minut.

Úloha 16[21]

Vážení

Na dvě vážení zjistěte, která z devíti stejně vypadajících koulí je lehčí. Můžete použit jen rovnoramenné váhy bez závaží.

Řešení:

Rozdělíme devět koulí na tři stejné skupiny a na obě misky vah položíme po třech koulích. Třetí skupinu ponecháme stranou (první vážení).

První případ: Váhy jsou v rovnováze, hledaná koule je potom ve třetí hromádce, kterou jsme odložili. Vezmeme z těchto tří koulí kterékoliv dvě a každou z nich položíme na jednu misku vah (druhé vážení). Nebudou-li váhy v nyní v rovnováze, bude miska s lehčí koulí nahoře, budou-li v rovnováze, je lehčí ta koule, kterou jsme na váhu nedali.

Druhý případ: Váhy nejsou v rovnováze. Hledaná koule je tedy na té misce, která je nahoře. V tomto případě najdeme z těchto koulí druhým vážením jako v prvním případě lehčí kouli.

Úloha 17[22]

Vlk, koza a zelí

Velmi stará úloha, kterou uvádí již Alkuin, přítel Karla Velikého, v roce 800 před naším letopočtem. Sedlák má na loďce převézt vlka, kozu a zelí. Do loďky se však vejde buď on s kozou nebo s vlkem, nebo se zelím. Jak to udělal, aby koza nezůstala pohromadě s vlkem nebo se zelím?

Řešení:

První řešení: Převeze kozu, vrátí se pro vlka, převeze vlka, vrátí se s kozou, převeze zelí, vrátí se pro kozu.

---

[20] Tamtéž, str. 10

[21] Tamtéž, str.52

[22] LOUKOTA, J.: *Veselá matematika aneb Kouzla, hříčky, hádanky a lamohlavy*, str. 52

Druhé řešení: Převeze kozu, vrátí se pro zelí, kozu vezme zpět, převeze vlka, a vrátí se pro kozu.

Úloha 18[23]

Pět bojovníků z kmene Apačů v čele se slavným Vinnetouem zajalo 34 obyvatelů. Do tábora je měli dopravit přes řeku v člunu, do kterého se vešlo 9 lidí. Náčelník Vinnetou dal převést zajatce tak, aby jeden bojovník neměl pod dozorem více zajatců než 10 a aby je převezli napětkrát. Víte, jak to učinil?

Řešeni:

	Vyjeli	Zůstali na druhém břehu	Vrátili se	Čekali na převoz
1.	2 boj. 7 zaj.	1 boj. 7 zaj.	1 boj.	3 boj. 27 zaj.
2.	2 boj. 7 zaj.	1 boj. 7 zaj.	1 boj.	2 boj. 20 zaj.
3.	1 boj. 7 zaj.	6 zaj.	1 boj. 1 zaj.	2 boj. 13 zaj.
4.	2 boj. 7 zaj.	1 boj. 7 zaj.	1 boj.	1 boj. 7 zaj.
5.	2 boj. 7 zaj.			

Tab. 1: Řešení Úlohy 18

Úloha 18[24]

Vajíčko na tvrdo

Vajíčko na tvrdo se má vařit 15 minut. Jak tento čas odměříte, když máte po ruce jen přesýpací hodiny, které ukazují 7 minut, a druhé, které ukazují 11 minut. Obrátit můžete čtyřikrát nebo třikrát.

Řešení:

Na čtyři obraty: Vložíme vejce do vařící vody a obrátíme oboje hodiny. Až odběhnou sedmiminutové, rychle je otočíme, a až doběhnou jedenáctiminutové, opět sedmiminutové obrátíme.

Na tři obraty: Obrátíme oboje hodiny. Až doběhnou sedmiminutové, vložíme velce do vařící vody. Až doběhnou jedenáctiminutové, obrátíme je.

Úlohy 19, 20 a 21 jsou příkladem úloh, u kterých žáci zobecněním zjistí jejich princip.

[23] *Zábavná matematika*

[24] LOUKOTA, J.: *Veselá matematika aneb Kouzla, hříčky, hádanky a lamohlavy*, str. 61

Úloha 19[25]

Z mládí znamenitého matematika Gausse se vypráví tato příhoda: Když chodil Gauss do národní školy, dal učitel žákům za úkol sečíst všechna čísla od 1 do 100. Žáci pracně počítali: $1+2+3+4+\ldots$ Gauss nepsal, ale přemýšlel. Náhle napsal několik číslic a k překvapení žáků i učitele hlásil správný výsledek: 5050. Jak postupoval?

Řešení:

Součet prvního a posledního čísla, součet druhého a předposledního čísla atd. je vždy 101. Protože je takových dvojic 50, je výsledek $50 \cdot 101 = 5050$.

Úloha 20 (inspirováno úlohou z[26])

Kouzla s čísly

„Ukážu vám kouzelnický kousek s čísly a prosím, abyste odhalili jeho tajemství. Ať někdo z vás napíše na kousek papíru, abych o tom nevěděl, libovolné třímístné číslo. Mohou v něm být i nuly. Připište k němu ještě jednou totéž číslo. Tím dostanete přirozeně šestimístné číslo. Předejte papír svému sousedovi. A ten ať to šestimístné číslo dělí sedmi. Výsledek dejte svému sousedovi a nic mi neříkejte. Ten ho bude dělit jedenácti. Předejte výsledek dál. Budeme ho dělit třinácti. Podejte mi papír s výsledkem, ale složte jej, abych neviděl číslo." Kouzelník podal složený lístek prvnímu. „Zde máte číslo, které jste si zvolil."

Řešení:

Podívejme se, co se stalo se zvoleným číslem. Především k němu bylo připsáno totéž třímístné číslo ještě jednou. To je totéž jako připsat tři nuly a přičíst pak původní číslo; například:

$$872872 = 872000 + 872$$

Nyní je zřejmé, co se vlastně s číslem stalo: bylo znásobeno tisícem a kromě toho bylo ještě původní číslo přidáno; stručněji řečeno – bylo znásobeno číslem 1001.

[25] MALÁČ, J., KURFÜRST, J.: *Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ*, str. 40
[26] PERELMAN, J., I.: *Zajímavá matematika: matematické povídky a hlavolamy*, str. 15

Co bylo provedeno se součinem? Byl dělen postupně 7, 11, 13. Celkem tedy byl dělen číslem $7 \cdot 11 \cdot 13$, tj. číslem 1001.

Bylo tedy zvolené číslo zprvu znásobeno číslem 1001 a pak číslem 1001 děleno. Jaký div, že nakonec vyšlo totéž číslo.

Úloha 21[27]

Zvolte si tři různá jednociferná čísla (např. 2, 5, 8). Pomocí těchto tří čísel zapište všechna trojciferná čísla, v jejichž zápisu se číslice neopakují. (*258, 285, 528, 582, 825, 852).* Všech těchto šest čísel sečtěte. Vzniklý součet vydělte součtem zvolených tří jednociferných čísel. Pokud jste správně počítali, vyjde vám vždy 222.

Zdůvodnění:

Každé ze šesti trojciferných čísel můžeme zapsat pomocí rozvinutého zápisu v desítkové soustavě. Uveďme obecný případ:

100 a + 10 b + c

100 a + 10 c + b

100 b + 10 a + c

100 b + 10 c + a

100 c + 10 a + b

100 c + 10 b + a

Součet těchto čísel je 222 a + 222 b + 222 c = 222(a + b + c).

Úloha 22[28]

Šifrovaný dopis

Pavel si psal do zápisníku tajným písmem, které si sám vytvořil. Jeho kamarád Jarda se proto rozhodl, že mu sdělí šifrovaně den, kdy k němu přijde. Napsal mu dopis v tomto znění:

„Přijdu v posledním týdnu v srpnu, který má všechny dny od pondělí do neděle. Den v týdnu si vylušti z přiloženého tiketu Sportky.“ Na tiketu byla přeškrtnuta čísla 1, 5, 11, 16, 20.

Rozšifrujte uvedený dopis.

[27] BLAŽKOVÁ, R.: *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*, str. 2

[28] MÍDA, J.: *Mozaika matematických úloh*, str. 27

Řešení:

Pavel napsal do jedné řádky přirozená čísla 1 až 20 podle velikosti a pod ně do druhé řádky prvních 20 písmen české abecedy, přičemž se rozhodl vynechat písmena opatřená háčkem či čárkou, popř. kroužkem; nenapsal také CH. Dostal dva řádky:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T

Podtrhl čísla, jež byla přeškrtnuta na tiketu, a pod nimi přečetl pětici písmen: A, E, K, P, T. Názvy dní v týdnu mající pět písmen jsou v češtině jen dva: úterý a pátek. Pro náš případ přichází v úvahu pátek. Pětice *a e k p t* je pro slovo pátek tzv. anagram. Anagramy se kdysi užívaly v dopisech pro utajení informace.

Pozn. Anagram neboli přesmyčka je slovo, které vznikne z původního slova tak, že se použijí všechna písmena ve slově obsažená a změní se jejich pořadí. Často se přitom nedbá na diakritiku.

Úloha 23[29]

Šifrovaná odpověď

Pavel dopis rozluštil a odpověděl Jardovi také šifrovaně:

„Ehoj! GIOEQ XI“

Rozšifrujte Pavlovu odpověď Jardovi.

Řešení: Slovo „Ehoj“ je klíčové slovo, jež obsahuje instrukci k šifře. Vzniklo z pozdravu „Ahoj“ a plyne z něho, že písmeno A je vyjádřeno v šifře písmenem E, tj. A → E. Jde o posun v abecedě (vynechána jsou písmena s čárkou, háčkem, kroužkem a dále písmeno CH) o čtyři písmena. Při dešifrování je nutno užít zpětného posunutí E → A. Odtud plyne G → C, I → E atd. Vzkaz po dešifrování zní: CEKAM TE. Samozřejmě je třeba doplnit háčky a čárku.

Dalším typem úloh jsou úlohy kombinatorického charakteru, u kterých žáci mohou postupovat úsudkem.

[29] MÍDA, J.: *Mozaika matematických úloh,* str. 27

Úloha[30]

Svícen

Doma měli starožitný svícen pro čtyři svíčky. Byl Štědrý den a blížila se sváteční večeře. Chlapec šel pro nové svíčky do předsíně. Náhradní svíčky byly tří barev. Nové chtěl vybrat tak, aby byly dvě dvojice téhož barevného odstínu. Nevylučoval přitom případ, že popř. všechny svíčky budou stejné barvy.

Kolik aspoň svící musí přinést, aby měl jistotu, že se nebude vracet, protože v šeru předsíně bezpečně barvy nerozeznával?

Řešení:

Barvy svíček označme *a, b, c*. Při přinesených pěti svíčkách by mohla nastat např. situace, že svíčky jsou barev *a, a, a, b, c*. Přidáme-li k nim další libovolnou svíčku barvy *a, b* nebo *c*, vždy mezi nimi budou aspoň dvě dvojice svíček téže barvy. Svíček musel chlapec přinést aspoň šest.

Úloha 25[31]

Ve skříňce je celkem 70 kuliček. Z těch je 20 červených, 20 modrých, 20 žlutých a zbývajících 10 připadá na kuličky bílé a černé. Určete nejmenší počet kuliček, které musíte vytáhnout, aniž byste je viděli, abyste měli:

a) zaručeně 10 kuliček jedné barvy,
b) po jedné kuličce červené, modré a žluté,
c) pět kuliček jedné barvy.

Řešení:

Nejnepříznivější případy:

a) 9 červených + 9 modrých + 9 žlutých + 10 bílých a černých, tj. 37. Musíme vytáhnout 38 kuliček.
b) 20 červených + 20 modrých + 10 bílých a černých + 1 = 51 kuliček
c) 4 červené + 4 modré + 4 žluté + 4 bílé + 4 černé + 1 = 21 kuliček.

Úloha 26[32]

Turecký med

Pouťový obchodník si nasadil na hlavu fez, který asi nebyl vyroben v Orientu, nýbrž v jihočeských Strakonicích, a začal prodávat nefalšovaný „turecký“ med.

---

[30] Tamtéž, str. 29

[31] MALÁČ, J., KURFÜRST, J.: *Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ*, str. 37

[32] MÍDA, J.: *Mozaika matematických úloh,* str. 19

Kousek medu byl buď za 5 Kč, nebo dvojnásobně velký nikoli za 10 Kč, ale za pouhých 8 Kč.

Úspěch měl nečekaný, za chvíli bylo v jeho pokladničce 400 Kč. Kolik kousků po 5 Kč a po 8 Kč za tuto dobu prodal?

Řešení:

Úloha vede k rovnici $5x + 8y = 400$, kde *x* a *y* jsou počty kousků medu po 5 Kč a 8 Kč. Po úpravě dostávám $5x = 8 \cdot (50 - y)$, odkud plyne, že *y* je násobkem pěti. Tedy $y = 5k$ a $x = 8 \cdot (10 - k)$, kde $0 \le k \le 10$ je celé číslo. Úloha má celkem 11 řešení.

Úloha 27[33]

Cirkus LACOLOMBA (italsky holubice)

Nad velkým stanem se skvěl ve dvou řadách nápis s různobarevnými písmeny:

CIRKUS

LACOLOMBA

V noci písmena svítila, a to tak, že se postupně zleva doprava po jednom rozsvěcovala a vzápětí zhasínala. Toto rozsvěcování a zhasínání se dělo nezávisle na sobě v obou řadách. Když se v první řadě došlo ke koncovému S, po jeho zhasnutí se rozsvítilo počáteční C. Obdobně tomu bylo i v názvu LACOLOMBA.

Chlapec si všiml, že se v jistém okamžiku současně rozsvítilo ve slově CIRKUS písmeno C a ve druhé řadě počáteční písmeno L. Jestliže svícení jednoho písmena trvá 10 sekund, za jak dlouhou dobu nejdříve dojde ke stejné situaci, tj. v první řadě se rozsvítí C a ve druhé řadě zároveň počáteční písmeno L?

Řešení:

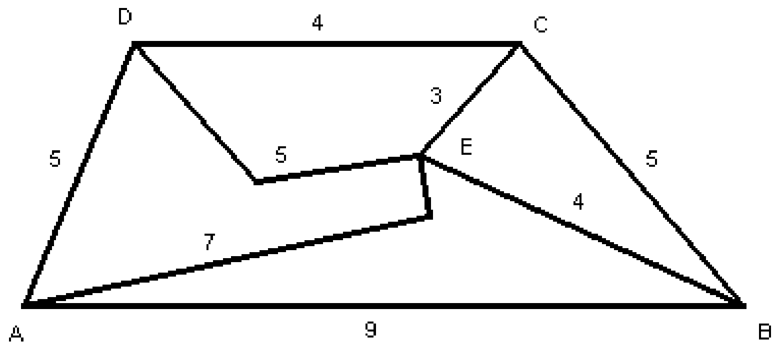
V první řadě se rozsvítí zase C po předchozím rozsvícení C nejdříve za 60 s. Ve druhé řadě se počáteční L rozsvítí po rozsvícení počátečního L nejdříve za 90 s. K současnému rozsvícení prvních písmen v obou řadách dojde od jejich předešlého současného rozsvícení poprvé za 180 s, tj. po 3 minutách, neboť číslo 180 je nejmenší společný násobek čísel 60 a 90.

[33] tamtéž, str. 20

V praxi se člověk často setkává s problémem, jak ušetřit čas, peníze, nebo materiál. Proto jsou další úlohy zaměřené na rozvoj tohoto druhu myšlení.

Úloha 28[34]

Pět obcí (A, B, C, D, E) má být propojeno elektrickým vedením. Na obrázku jsou uvedeny délky možných spojů elektrického vedení mezi jednotlivými obcemi (v kilometrech). Navrhněte plán elektrického vedení tak, aby celkové vedení bylo co nejkratší.



Obr. 11: Elektrické vedení mezi obcemi – Úloha 28

Řešení:

Celková délka vedení je dána součtem délek určité čtveřice spojů mezi dvěma obcemi. Najdeme čtveřici s nejmenším součtem délek – je to čtveřice (3, 4, 4, 5) a zjistíme, zda splňuje dané požadavky. Jedná se o lomenou čáru ADCEB, která propojuje všech pět obcí.

Minimální délka vedení propojujícího pět obcí A, B, C, D, E je tedy 16 km.

Úloha 29[35]

Benátská noc

Pro počátek prázdnin připravuje již tradičně sportovní klub lampiónovou slavnost s ohňostrojem a hudbou ve stylu benátské noci. Její účastníci se mají také plavit na lodičkách, nebudou to však gondoly, nýbrž pramičky.

Pořadatelé mají k dispozici jednu pramici pro devět osob a dvě pramice, z nichž každá je pro sedm osob. Dále si může klub vypůjčit pramičky, které jsou pro pět, resp. pro tři osoby.

[34] BRANT, J.: *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*
[35] MÍDA, J.: *Mozaika matematických úloh*, str. 24

Má-li být na lodičkách celkem 125 míst, jaký nejmenší počet pramiček si klub musí vypůjčit? Místa na pramičkách mají být plně využita.

Řešení:

Na lodičkách musí být 125 míst. Na pramicích pro devět a sedm osob, které mají pořadatelé k dispozici, je celkem $9+2\cdot 7=23$ míst. Je třeba ještě zajistit 102 míst. Je-li *x* počet pramiček pro 5 osob, pak rozdíl $(102-5x)$ musí být dělitelný třemi, tj. číslo *x* je násobek tří. Má-li být počet půjčených lodiček co nejmenší, musí být počet *x* pětimístných pramiček co největší. Platí $102:5=20{,}4$, tj. $5\cdot 18\leq 102\leq 5\cdot 21$. Tedy *x* = 18 a pramiček pro tři osoby bude $(102-5\cdot 18):3=4$. Celkem je třeba si vypůjčit $18+4=22$ pramiček.

3.2 Jednoduché hry[36]

Odhalování optimálních strategií pro tyto hry přináší užitečné přístupy k matematizaci reálných situací a je vhodným prostředkem pro rozvoj matematického myšlení.

První hra

Pravidla:

- Dva hráči se pravidelně střídají v odebírání zápalek z jedné hromádky, na níž je na začátku hry 15 zápalek.
- Je-li hráč na tahu, odebere jednu, dvě nebo tři zápalky.
- Vítězí ten, kdo odebírá poslední zápalku, tedy prohrává ten, kdo nemůže již nic odebrat.

Mají-li žáci po seznámení s hrou odhalovat její strategii, je vhodné je přivést k tomu, aby postupovali „odzadu“ a evidovali své výsledky v grafické formě. Postupně se zavádí pojmy – vyhrávající postavení a prohrávající postavení vzhledem k hráči, který je na tahu, a precizuje se jejich obsah.

Žáci by měli vlastním jazykem vyjádřit tuto základní ideu (postavením ve hře rozumíme situaci, kdy je na hromádce určitý počet zápalek):

[36] CIHLÁŘ, J.: *Rozvoj myšlení ve vyučování matematice,* str. 109-112

- prohrávající postavení je takové, které všechny pravidly dovolené tahy mění na vyhrávající postavení,
- vyhrávající postavení je takové, v němž existuje alespoň jeden pravidly dovolený tah, který je mění na prohrávající.

Dále by měli být schopni odpovědět na tyto otázky.

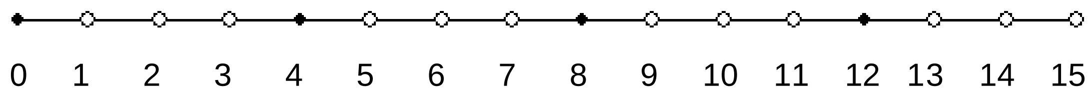
Proč můžete v první hře vyhrát, když je na hromádce jedna, dvě, nebo tři zápalky? Proč musíte prohrát, když váš soupeř hraje dobře, a na hromádce jsou čtyři zápalky? Proč můžete vyhrát, když je na hromádce pět, šest nebo sedm zápalek?

<u>Úloha 30</u>

Nalezněte všechna prohrávající a vyhrávající postavení v první hře a formulujte pro ni vyhrávající strategii.

Řešení:

Pokud budou žáci postupně zaznamenávat své výsledky graficky, získají například tento zápis (plným kroužkem jsou označována prohrávající postavení a prázdným kroužkem vyhrávající postavení):



Obr. 12: Strategie hry – Úloha 30

První (začínající) hráč v postavení s 15 zápalkami má jediný tah, který mu zaručí výhru – a to odebrat tři zápalky (přejde do postavení, které je pro jeho soupeře prohrávající). Ať pak udělá druhý hráč jakýkoliv tah, první hráč má možnost odebrat zápalky tak, aby jich bylo na hromádce 8 (další prohrávající postavení), atd.

Podstatný fakt je, že prohrávající postavení jsou ta, kde počet zápalek je násobkem čtyř.

Pravidla první hry můžeme různě obměňovat. I když budeme stále odebírat zápalky jen z jedné hromádky, můžeme měnit původní počet zápalek na hromádce při začátku hry, a můžeme také měnit pravidla pro odebírání, tedy v podstatě libovolně měnit počet zápalek, který smíme při tahu odebírat. Tak dostáváme celou řadu různě složitých her.

Druhá hra

Pravidla:

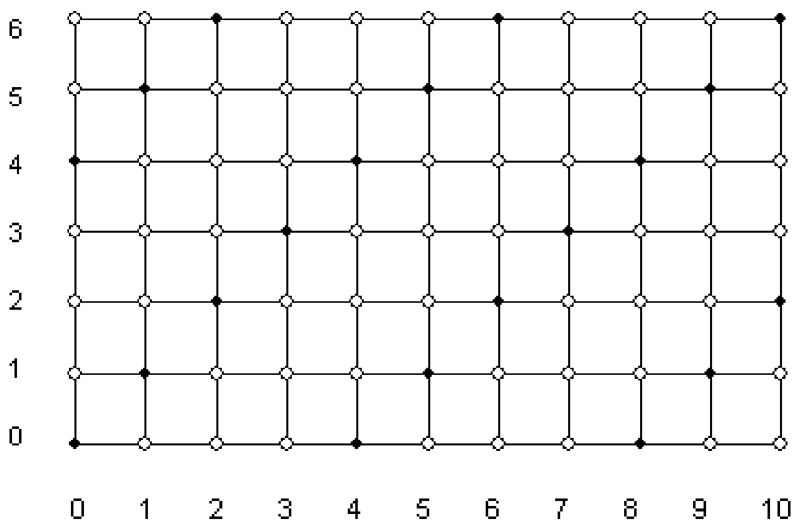
- Dva hráči se pravidelně střídají v odebírání zápalek ze dvou hromádek, na každé z nich je na začátku hry libovolný počet zápalek.
- Je-li hráč na tahu, vybere si jednu hromádku a odebere z ní jednu, dvě nebo tři zápalky.
- Vítězí opět ten, kdo odebírá poslední zápalku, tedy prohrává ten, kdo nemůže již nic odebrat.

Postup při odhalování strategie je stejný, jen výsledky uvažování zaznamenávají do dvourozměrného grafu. Každé postavení je značeno mřížovým bodem, jehož souřadnice jsou přirozená čísla.

<u>Úloha 31</u>

Nalezněte všechna prohrávající a vyhrávající postavení a formulujte vyhrávající strategii pro druhou hru.

Řešení:



Obr. 13: Strategie hry – Úloha 31

Prohrávající a vyhrávající postavení jsou na obrázku, prohrávající postavení jsou právě ta, kde je rozdíl počtu zápalek dělitelný čtyřmi.

Pravidla druhé hry můžeme také různě obměňovat. Zápalky můžeme odebírat jen z jedné hromádky v libovolném shora omezeném počtu, nebo odebíráme přesně daný počet zápalek, ale tak že část odebereme z jedné a zbytek z druhé hromádky, atd.

4 GEOMETRICKÉ ÚLOHY

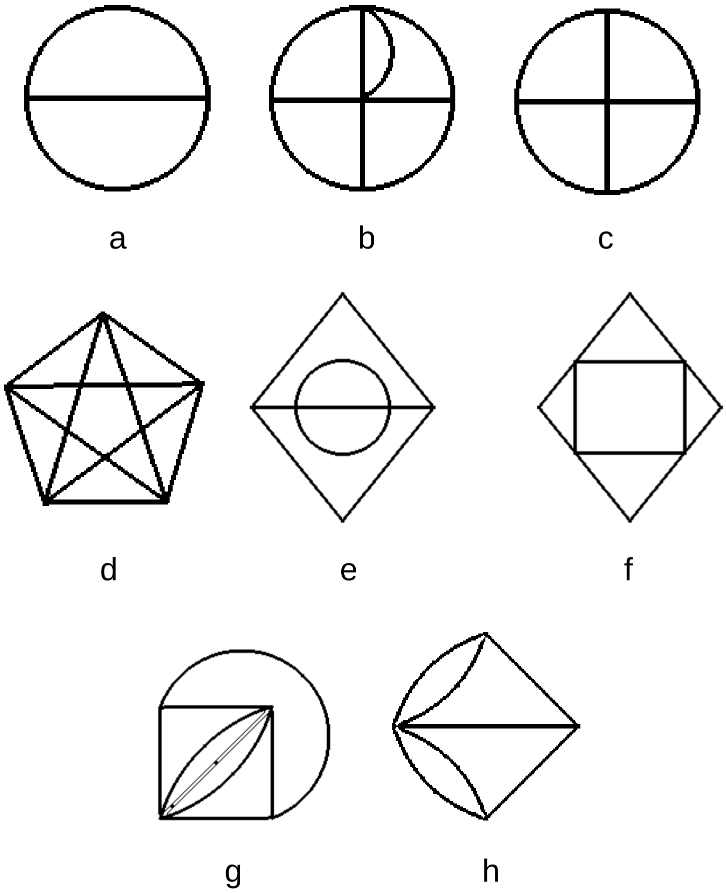
Geometrická představivost je schopnost (dovednost) poznávat geometrické útvary a jejich vlastnosti, abstrahovat z reálné skutečnosti jejich geometrické vlastnosti, na základě rovinných obrazů si představit geometrické útvary v nejrůznějších vzájemných vztazích a představit si geometrické útvary a vztahy mezi nimi i na základě jejich popisu.

4.1 Úlohy geometrické

Úloha 32[37]

Pokuste se nakreslit obrázky a, b, c, d, e, f, g, h jedním tahem (bez zvednuti tužky) tak, aby žádný tah nebyl kreslen dvakrát.

Které z obrázků je možné nakreslit jedním tahem?



Obr. 14: Obrázky jedním tahem – Úloha 32

[37] HOUSKA, J., NEMČÍKOVÁ, K.: *Nestandardní aplikační úlohy a problémy pro 2. stupeň ZŠ a NG*, str. 9

Řešení:

a – ano, b – ne, c – ne, d – ano, e – ano, f – ano, g – ne, h – ne

Zabýváme se uzavřenými křivkami, které nemají začátek ani konec. Mají však křižovatky (vrcholy, uzly). Stupeň vrcholu křivky je počet čar, které z něj vycházejí (nebo do něj vcházejí). Euler dokázal, že uzavřenou křivku lze nakreslit jedním tahem právě tehdy, když nemá žádný nebo právě dva vrcholy lichého stupně. Při kreslení je třeba vyjít a skončit ve vrcholu lichého stupně. Pokud má uzavřená křivka více než dva vrcholy lichého stupně, nelze uvedeným způsobem jedním tahem nakreslit.

Následující úloha by měla u žáků upřesnit představu o některých geometrických útvarech a pojmech.

Úloha 33[38]

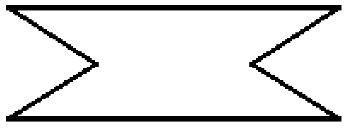
Narýsuj šestiúhelník, který má pět pravých úhlů.

Řešení:

Obr. 15: Šestiúhelník s pěti pravými úhly – Úloha 33

Narýsuj šestiúhelník, který má čtyři ostré úhly.

Řešení:

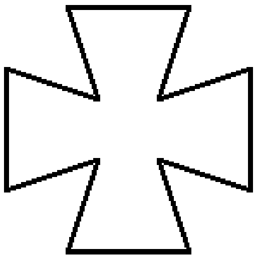


Obr. 16: Šestiúhelník se čtyřmi ostrými úhly – Úloha 33

Narýsuj dvanáctiúhelník, který má osm ostrých úhlů.

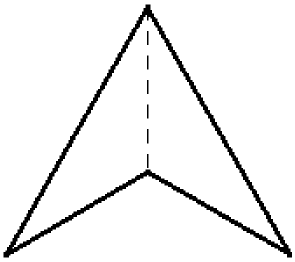
[38] LOUKOTA, J.: *Veselá matematika aneb Kouzla, hříčky, hádanky a lamohlavy*, str. 50

Řešení:



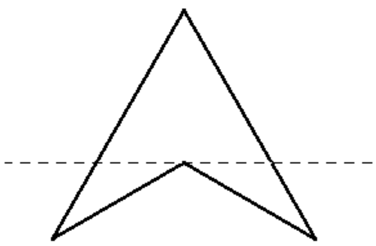
Obr. 17: Dvanáctiúhelník s osmi ostrými úhly – Úloha 33

Narýsuj čtyřúhelník, v němž je možno sestrojit pouze jednu úhlopříčku.
Řešení:



Obr. 18: Čtyřúhelník s jedinou úhlopříčkou – Úloha 33

Narýsuj čtyřúhelník, který je možno rozdělit na tři trojúhelníky jedinou přímkou.
Řešení:

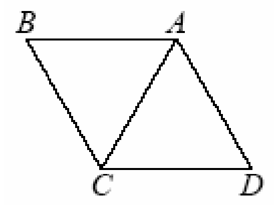


Obr. 19: Čtyřúhelník dělený jednou přímkou – Úloha 33

Úloha 34[39]

Rovnostranný trojúhelník ACD se otáčí kolem bodu A proti směru hodinových ručiček. Určete velikost úhlu otočení v okamžiku, kdy překryje rovnostranný trojúhelník ABC.

[39] MOLNÁR, J. aj. *Matematický klokan 2004*, str. 24



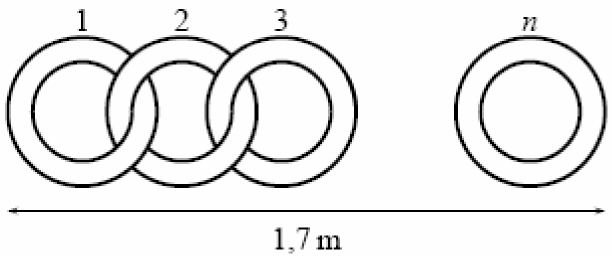
Obr. 20: Otáčení trojúhelníka – Úloha 34

Řešení:

Uvědomíme-li si, že rovnostranný trojúhelník má všechny úhly rovny $60°$, a že pokud by se otočil kolem bodu A na své původní místo, pak by úhel otočení byl $360°$. K otočení o $360°$ mu však chybí jedna fáze, tj. $60°$. Velikost otočení je tedy $360° - 60° = 300°$.

<u>Úloha 35</u>[40]

Prstenec s vnitřním průměrem 4 cm a vnějším průměrem 6 cm jsou spolu propojeny stejně jako na obrázku. Kolik prstenců potřebujeme, abychom dostali řetěz dlouhý 1,7 m?



Obr. 21: Řetěz z prstenců – Úloha 35

Řešení:

První prstenec zaujímá délku 6 cm, pokud k němu přidáme další, zvětší se řetěz o 4 cm, protože 2 cm se ztratí z důvodu překrývání kroužků. S každým dalším přidaným prstencem se řetěz prodlouží o 4 cm. Máme tedy jeden prstenec, který řetěz prodlouží o 6 cm a neznámý počet prstenců *x*, který jej prodlouží o $4 \cdot x$ cm.

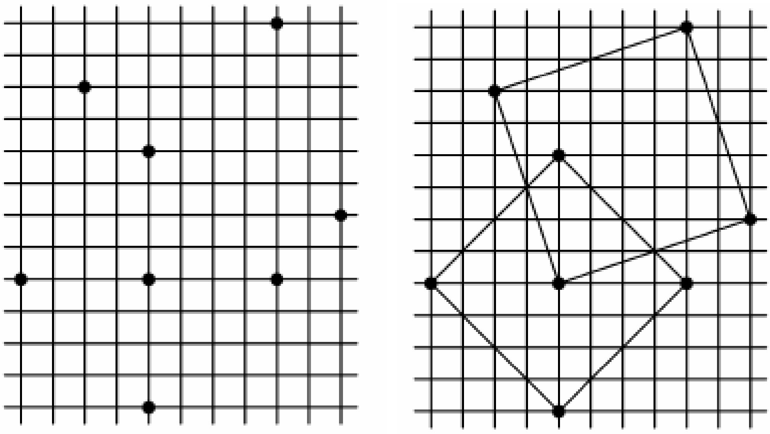
1,7 m = 170 cm

Odečteme-li od délky řetězce délku, kterou zaujímá první prstenec: 170 – 6 = 164, dostaneme délku, kterou tvoří jen prstence, které řetězec prodlužují o 4 cm. Tedy 164 : 4 = 41, máme počet prstenců, které vytvoří řetěz dlouhý 164 cm. Připočteme-li k nim první prstenec, který jsme na začátku odečetli, dostáváme, že řetězec o délce 170 cm je tvořen 42 prstenci.

[40] MOLNAR, J. aj. *Matematický klokan 2004*, str. 25

Úloha 36[41]

Na prvním obrázku jsou znázorněny všechny vrcholy dvou čtverců. Zjisti obsah S jejich společné části (jeden čtvereček sítě má obsah $25mm^2$).



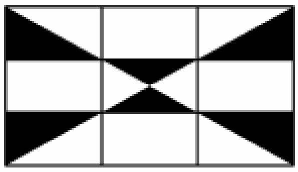
Obr. 22: Čtverce v síti – Úloha 36

Řešení:

Jediná možnost dokreslení čtverců je na druhém obrázku. Jejich společnou část tvoří čtyřúhelník, jehož vrcholy jsou opět body čtvercové sítě. Celý čtyřúhelník lze „svisle“ rozdělit na dva trojúhelníky. Obsah každého z nich určíme buď přímo, nebo je ve čtvercové síti doplníme na obdélník a uvědomíme si, že obsah trojúhelníku je roven polovině obsahu obdélníku. Proto obsah $S = 16 : 2 = 8$ čtverečků $S = 8 \cdot 25 = 200mm^2$.

Úloha 37[42]

Ivan dostal speciální bílo-hnědou čokoládu. Zjisti hmotnost bílé části, pokud celá čokoláda má tři stejně široké řádky a tři stejně široké sloupce a váží 144 gramů.

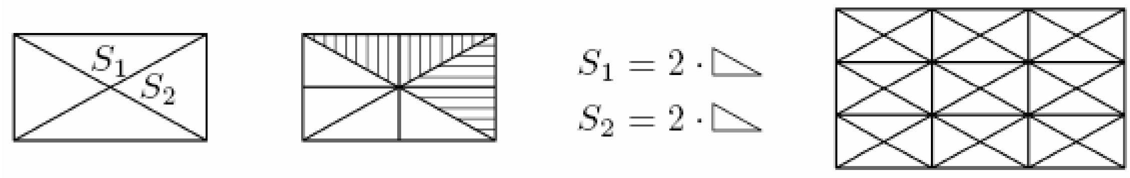


Obr. 23: Čokoláda (zadání) – Úloha 37

[41] ŠPAŇHELOVÁ, L.: *Nestandardní a aplikační úlohy v geometrii,* str. 21
[42] Tamtéž, str. 22

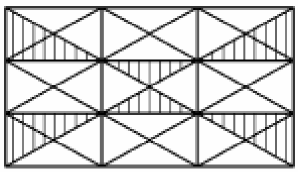
Řešení:

Čokoláda má tvar obdélníku a má 3 stejné řádky a 3 stejné sloupce, tedy je rozdělena na 9 shodných obdélníků. Proto je také možno rozdělit celou čokoládu na 36 trojúhelníků stejných obsahů. Shodnost obsahů těchto malých trojúhelníků je zřejmá např. z dalšího rozděleni na 4 shodné trojúhelníky:



Obr. 24: Čokoláda (řešení 1) – Úloha 37

Celá čokoláda má hmotnost 144 g. Hmotnost jednoho trojúhelníku je 144 : 36 = 4 g.
Hnědá část: 10 trojúhelníků . . . 10. 4 = 40 g.
Bílá část: 26 trojúhelníků . . . 26. 4 = 104 g.



Obr. 25: Čokoláda (řešení 2) – Úloha 37

Bílá část má hmotnost 104 gramy.

<u>Úloha 38</u>[43]

Stěna duté čokoládové koule má tloušťku přibližně 2 mm, vnější průměr koule je 58 mm. Teta Běta snědla pět koulí a libuje si: „Po tom neztloustnu, dutá koule je jenom vzduch.“

a) Zjisti, kolik gramů čokolády Běta snědla; hustota čokolády ϱ je přibližně 1200 $\frac{kg}{m^3}$.

(objemy zaokrouhluj na celá čísla)

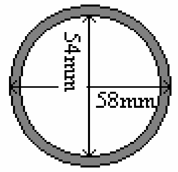
b) Vypočítej, jakou energetickou hodnotu měla snědená čokoláda, když 100 g této

[43] ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J.: *Pracovní sešit z matematiky: Soubor úloh pro 9. ročník základní školy,* str. 141

čokolády dodá energii 2 158 kJ. Přesáhla teta doporučenou denní dávku, která je 9000 kJ?

Řešení:

a) Objem čokolády V vypočítáme, tak že od objemu V_1 koule s průměrem $d_1 = 58mm \ \ (r_1 = 29mm)$ odečteme objem V_2 koule o průměru $d_2 = 54mm \ \ (r_2 = 27mm)$.



Obr. 26: Čokoládová koule – Úloha 38

$$V = V_1 - V_2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r_1^3 - \frac{4}{3}\pi r_2^3$$

$$V = 102160 - 82448$$

$$V = 19712mm^3.$$

Protože máme vypočítat, kolik gramů čokolády Běta snědla, musíme převést hustotu čokolády z $\frac{kg}{m^3}$ na $\frac{g}{cm^3}$ a současně objem čokolády na cm^3 nebo převedeme objem *V* z milimetrů na metry a výslednou hmotnost, která nám vyjde v kilogramech převedeme na gramy. Volíme první způsob:

$$1200\frac{kg}{m^3} = 1{,}2\frac{g}{cm^3}$$

$$19712\ mm^3 = 19{,}712\,cm^3$$

$$m = \rho \cdot V$$

$$m = 1{,}2 \cdot 19{,}712$$

$$m = 23{,}7g$$

Nyní jsme vypočítali hmotnost čokolády jedné koule. Protože Běta snědla takových kouli pět je celková hmotnost čokolády, kterou teta snědla $5 \cdot 23{,}7 = 118{,}5g$.

b) Víme, že 100g čokolády dodá energii 2158 kJ. Pro 1g čokolády tedy platí: 2158 : 100 = 21,6. Jeden gram čokolády má energetickou hodnotu zhruba 21,6 kJ. Teta snědla celkem 23,7 g čokolády, takže celková energie snědené čokolády je $23{,}7 \cdot 21{,}6 = 512kJ$. Protože 512<9000, teta nepřesáhla doporučenou denní dávku energie.

5 ÚLOHY NA PROSTOROVOU PŘEDSTAVIVOST

Prostorová představivost je významnou schopností člověka, která se uplatňuje v řadě povolání i v běžném životě.

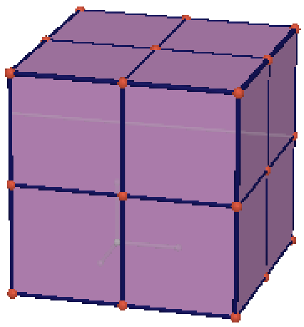
Přestože se děti neustále pohybují v prostoru, převážná část geometrie, se kterou se setkávají ve škole, zejména na 2. stupni základní školy, je rovinná.

Schopnost orientace v prostoru, prostorová představivost a schopnost použít prostorovou představivost k řešení úloh je u žáků základních škol na velmi různé úrovni. Nesporně existují žáci nadaní těmito schopnostmi. Většině žáků však myšlená, abstraktní, orientace v prostoru činí větší či menší potíže.

5.1 Úlohy rozvíjející prostorovou představivost

Úloha 39[44]

Představte si velkou kostku, která se skládá z osmi malých kostek. Nyní odpovězte na otázku, aniž byste se nadále dívali na obrázek: Kolik malých čtverců se nachází uvnitř krychle, tj. ne na jejím povrchu?



Obr. 27: Krychle z osmi krychlí – Úloha 39

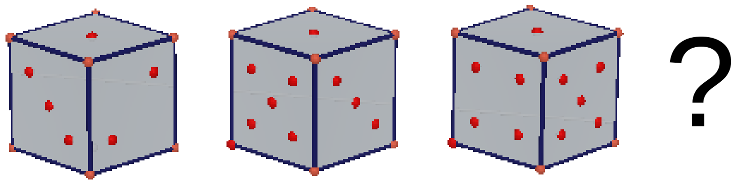
Řešení:

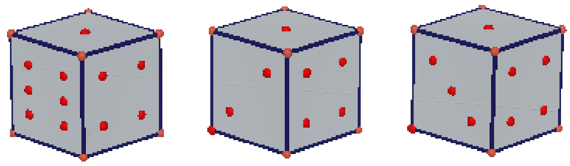
24. Z každé šestistranné kostky jsou tři strany uvnitř a tři vně.

[44] HAVAS, H.: *Trénink inteligence*, str. 49

Úloha 40[45]

Která kostka následuje? Kolik puntíků má běžná hrací kostka celkem?





A **B** **C**

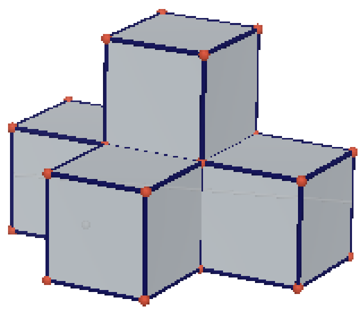
Obr. 28: Kostka – Úloha 40

Řešení:

B. Kostka se pootočí vpravo. 21 – na šesti stranách je třikrát sedm puntíků na protilehlých stranách (1 + 6, 2 + 5, 3 + 4).

Úloha 41[46]

Zobrazené kostky jsou na vnějších stranách pomalovány, ale nikoli na stranách, kterými se dotýkají. Kolik je dohromady pomalováno čtverců?



Obr. 29: Těleso z pěti krychlí – Úloha 42

Řešení: 22 čtverců je pomalováno.

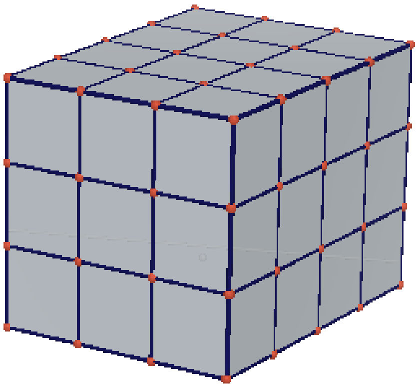
[45] HAVAS, H.: *Trénink inteligence*, str. 48

[46] Tamtéž, str. 55

Úloha 42[47]

Představte si kvádr, který je složen z 36 malých kostek (viz. Obr.). Nyní odpovězte na otázky.

a) Kolik malých čtvercových ploch obsahuje kvádr navenek?
b) Kříží se úhlopříčky kvádru v pravém úhlu?
c) Kolik kostek nemá ani jednu plochu na povrchu kvádru?



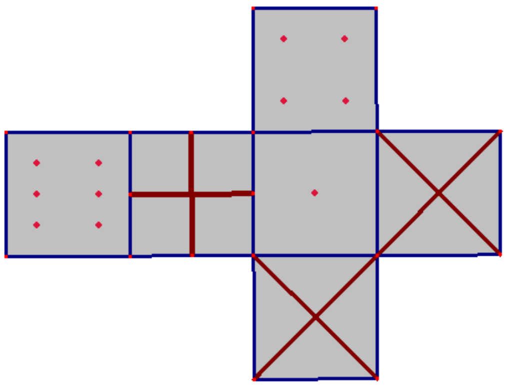
Obr. 30: Kvádr z 36 kostek – Úloha 41

Řešení:

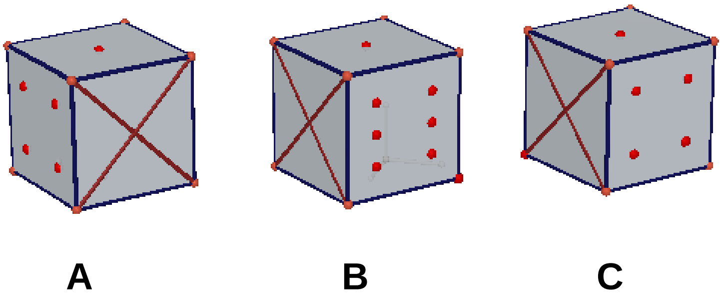
a) 66.
b) Úhlopříčky na čtvercové straně ano, na obdélníkové ne.
c) 2.

Úloha 43[48]

Která kostka odpovídá rozvinutému plášti?



[47] Tamtéž, str. 53
[48] Tamtéž, str. 58

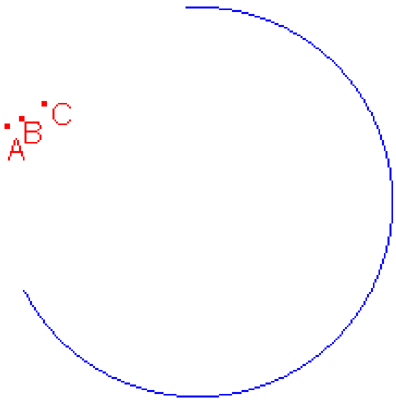


Obr. 31: Rozvinutý plášť kostky – Úloha 43

Řešení: C.

<u>Úloha 44</u> (inspirováno úlohou z[49])

Kterým za tří bodů prochází kružnice?

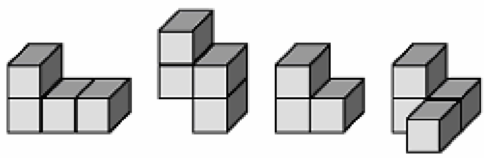


Řešení: B.

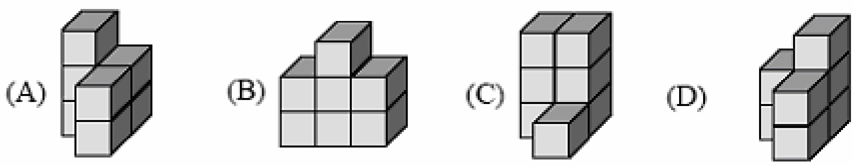
Obr. 32: Kružnice se třemi body – Úloha 44

<u>Úloha 45</u>[50]

Vpravo vidíš díly dřevěné stavebnice, které jsou vytvořeny ze 3 nebo 4 malých kostek. Kterou ze staveb na obrázcích (A) až (D) nelze postavit z našich dílů stavebnice?



Obr. 33: Díly stavebnice – Úloha 45



Obr. 34: Tvary z dílu stavebnice – Úloha 45

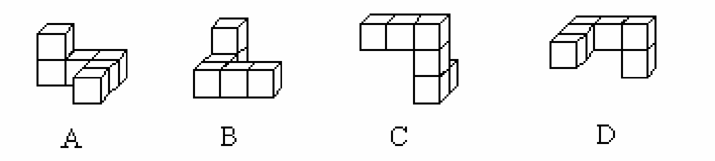
[49] HAVAS, H.: *Trénink inteligence*, str. 54
[50] MOLNÁR, J. aj.: *Matematický klokan 2004*, str. 11

Řešení:

Všechny stavby na obrazcích (A) až (D) lze sestavit z dílů stavebnice.

Úloha 46[51]

Který z obrázků znázorňuje pohled na jiné těleso než ostatní tři?

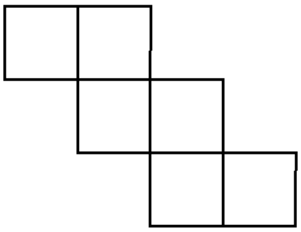


Obr. 35: Pohledy na těleso – Úloha 46

Řešení: B.

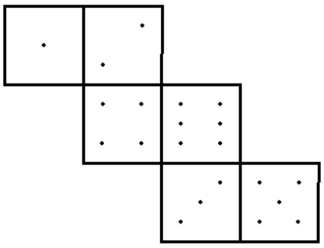
Úloha 47[52]

Doplňte síť hrací kostky. (Na každých dvou protějších stěnách kostky je součet ok 7.)



Obr. 37: Síť kostky (zadání) – Úloha 47

Řešení:



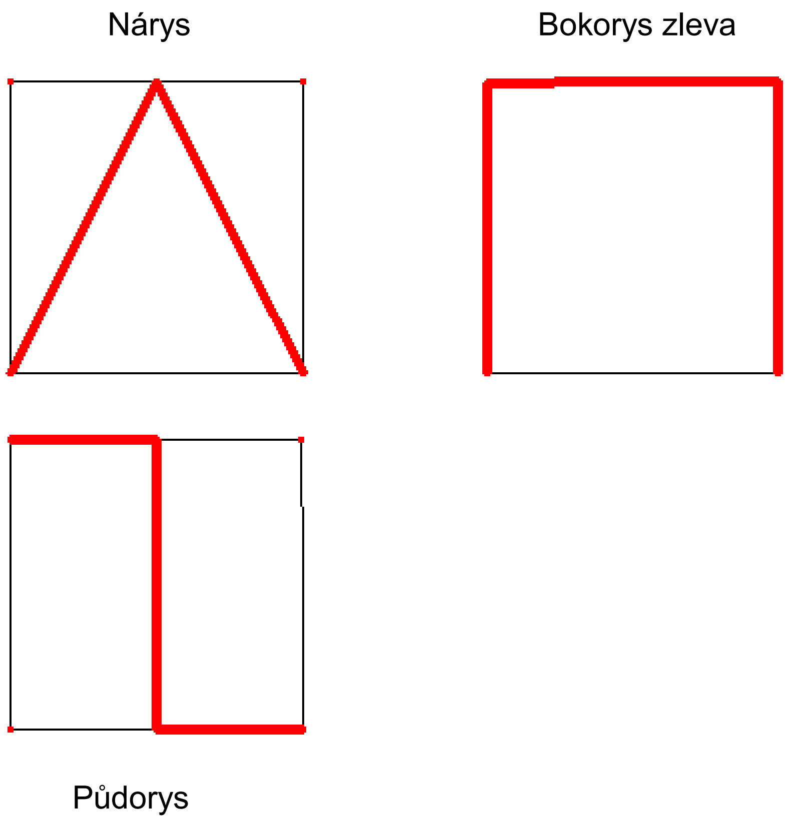
Obr. 36: Síť kostky (řešení) – Úloha 47

[51] *Útvary v prostoru,* str. 1

[52] Tamtéž, str. 4

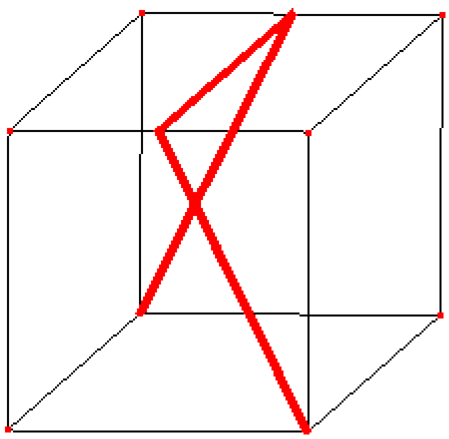
Úloha 48[53]

Jsou dány tři průměty drátěného modelu. Sestrojte prostorový obrázek modelu vepsaného do dané krychle.



Obr. 38: Krychle – nárys, bokorys, půdorys – Úloha 48

Řešení:

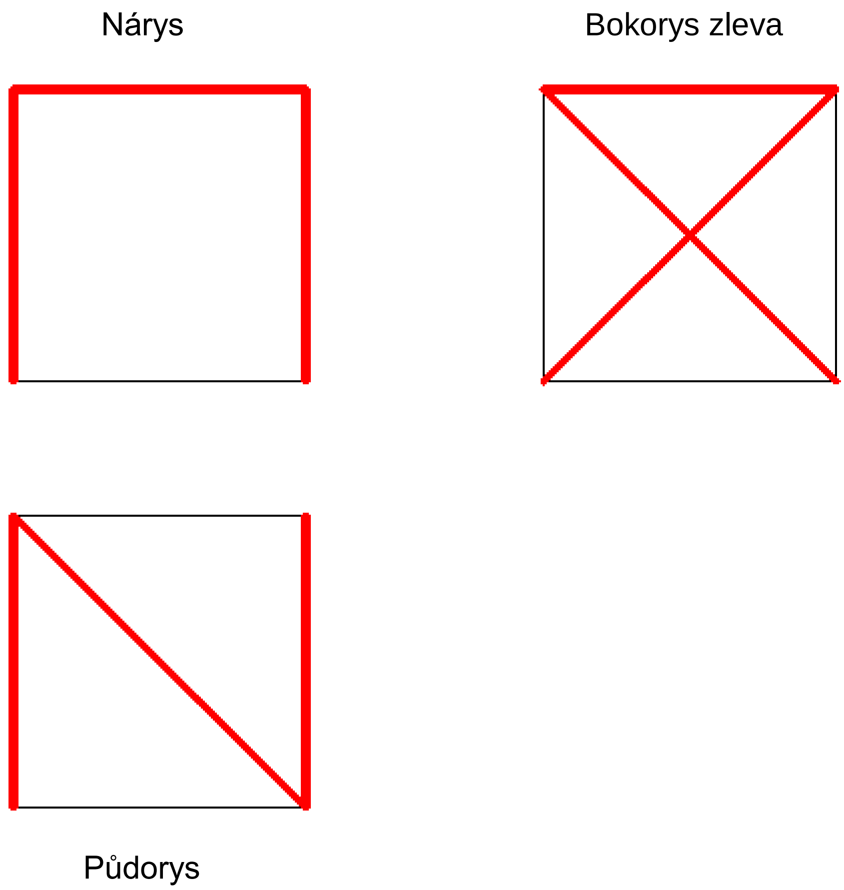


Obr. 39: Krychle (řešení) – Úloha 48

[53] PERNÝ, J.: *Tvořivostí k rozvoji prostorové představivosti,* str. 73

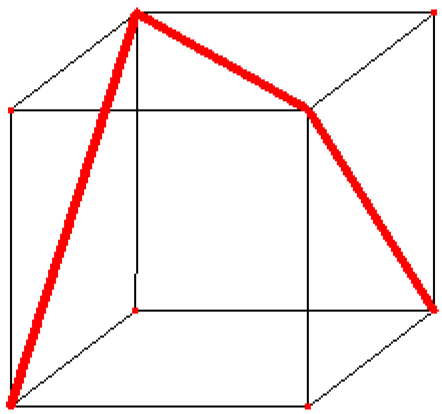
Úloha 49 (inspirováno úlohou z[54])

Jsou dány tři průměry drátěného modelu. Sestrojte prostorový obrázek modelu vepsaného do dané krychle.



Obr. 40: Krychle – nárys, bokorys, půdorys – Úloha 49

Řešení:

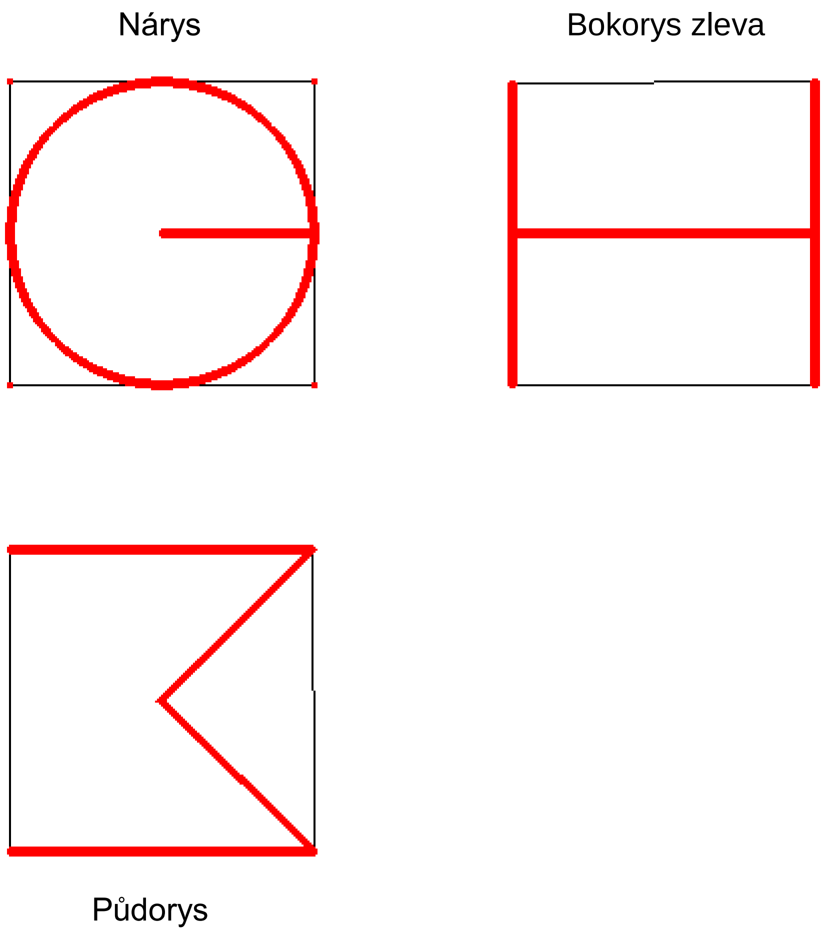


Obr. 41: Krychle (řešení) – Úloha 49

[54] PERNÝ, J.: *Tvořivostí k rozvoji prostorové představivosti,* str. 73

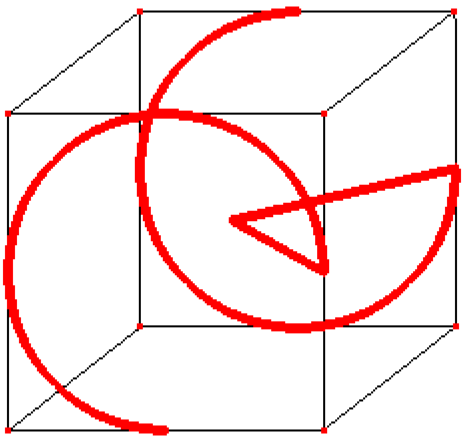
Úloha 50 (inspirováno úlohou z[55])

Jsou dány tři průměry drátěného modelu. Sestrojte prostorový obrázek modelu vepsaného do dané krychle.



Obr. 42: Krychle – nárys, bokorys, půdorys – Úloha 50

Řešení:



Obr. 43: Krychle (řešení) – Úloha 50

[55] PERNÝ, J.: *Tvořivostí k rozvoji prostorové představivosti,* str. 73

Úloha 51[56]

Na obrázku je kótovaný půdorys tělesa, které je složené z kostek. Nakresli nárys a bokorys (zprava i zleva) tohoto tělesa.

		2	
2		4	
3	2	1	3

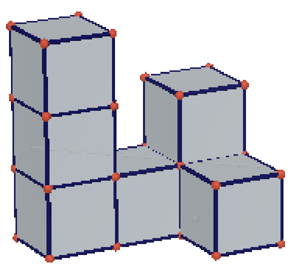
Obr. 44: Kótovaný půdorys tělesa (zadání) – Úloha 51

Vzorový příklad:

3	1	2
		1

Obr. 45: Kótovaný půdorys tělesa (vzor) – Úloha 51

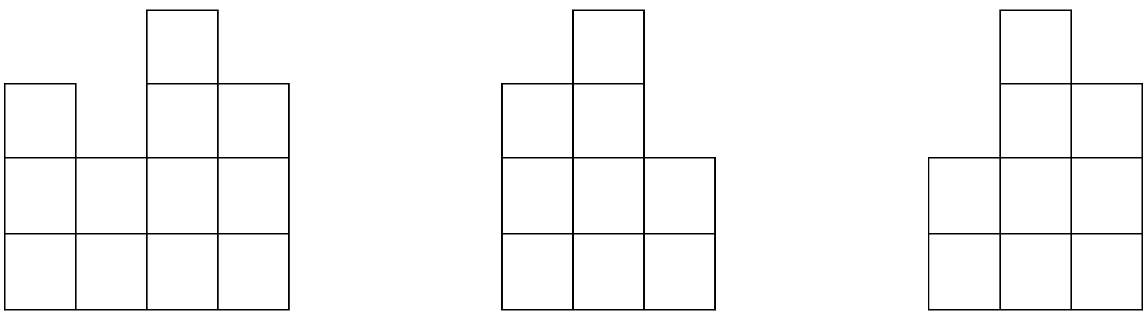
Těleso sestavené podle kótovaného půdorysu:



Obr. 46: Těleso (vzor) – Úloha 51

Řešení:

Nárys: Bokorys pravý: Bokorys levý:



Obr. 47: Nárys a bokorysy tělesa – Úloha 51

[56] ŠPAŇHELOVÁ, L.: *Nestandardní a aplikační úlohy v geometrii*, str. 15

6 SLOVNÍ ÚLOHY

Řešení slovních úloh dělá žákům často potíže. Je v nich potřeba nejen počítat, ale přeložit běžný jazyk do jazyka matematiky.

Dříve než začneme řešit slovní úlohu, je důležité, aby žáci správně porozuměli obsahu textu, aby si srovnali fakta a vztahy v dané úloze.

6.1 Slovní úlohy

Vhodné jsou úlohy s větším počtem možností řešení. Podporujeme tím tvořivou aktivitu žáků.

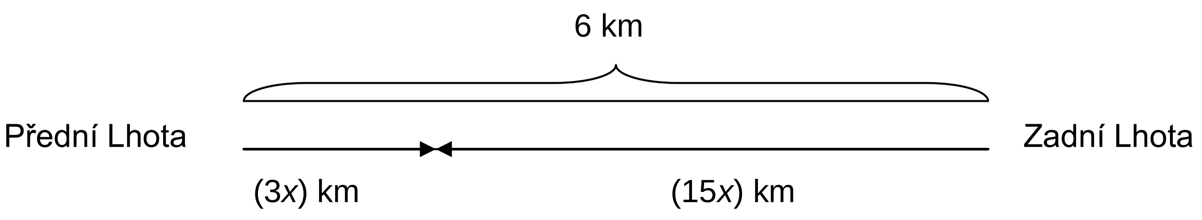
Úloha 52[57]

Karel a Pavel

Karel jede na prázdniny k Pavlovi do Zadní Lhoty. Z Přední Lhoty, kam dojel autobusem, musí jít 6 km pěšky. Volá telefonem Pavlovi, že vyráží na cestu. Pavel okamžitě vyjíždí na kole Karlovi naproti. Karel jde rychlostí 3 km/h, Pavel jede průměrnou rychlostí 15 km/h.
Kolik kilometrů se bude Karel vláčet s kufrem sám?

Řešení:

1. čas, ze který se K. a P. setkají ……………………………*x* h
rychlost K. …………………………………………….. 3 km/h
dráha, kterou ujde K. za x hodin ………………………. ($3x$) km
rychlost P. ……………………………………………. 15 km/h
dráha, kterou ujede P. za *x* hodin …………………….. ($15x$) km
dráha celkem ………………………………………… ($3x + 15x$) km
dráha celkem ………………………………………… 6 km



[57] ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J.: *Knížka pro učitele ke školním vzdělávacím programům na druhém stupni ZŠ: matematika a její aplikace*, str. 44-46

Hledáme takové *x*, pro které platí 3*x* + 15 *x* = 6.

Rozbor úlohy lze také uspořádat do tabulky:

	Karel	Pavel
Rychlost	$3\frac{km}{h}$	$15\frac{km}{h}$
Čas do setkání	*x* h	*x* h
Dráha	(3 *x*) km	(15*x*) km
Celková dráha	(3 *x* + 15 *x*) km	
Celková dráha	6 km	

Tab. 2: Rozbor řešení – Úlohy 52

2. čas, za který se K. s P. setkají .... *x* h

rychlost K. .... 3 km/h

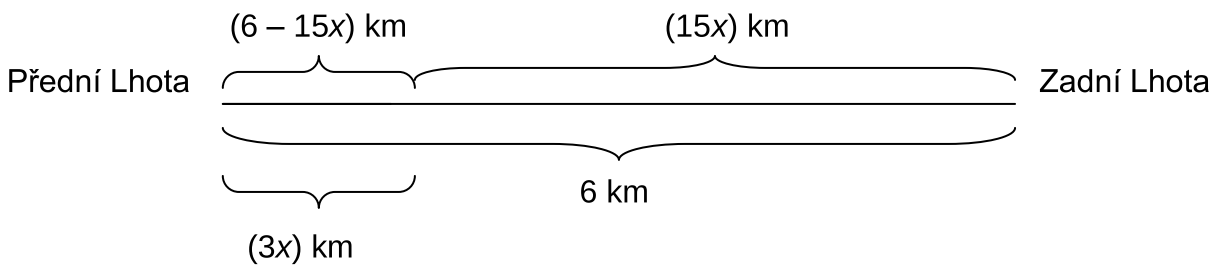
dráha, kterou ujde K. za *x* hodin .... (3 *x*) km

rychlost P. .... 15 km/h

dráha, kterou ujede P. za *x* hodin .... (15 *x*) km

dráha, která by zbývala P. od místa setkání k

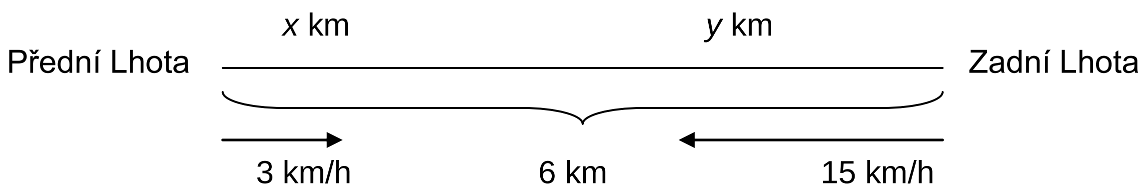
dosažení PL .... (6 - 15 *x*) km



Sestavíme rovnici:

3*x* = 6 – 15*x*.

3.



dráha, kterou ujde Karel .... *x* km

dráha, kterou ujede Pavel .... *Y* km dráha celkem .... $(x + y)$ km

dráha celkem .... 6 km

čas do setkání .... $\frac{x}{3}$ h

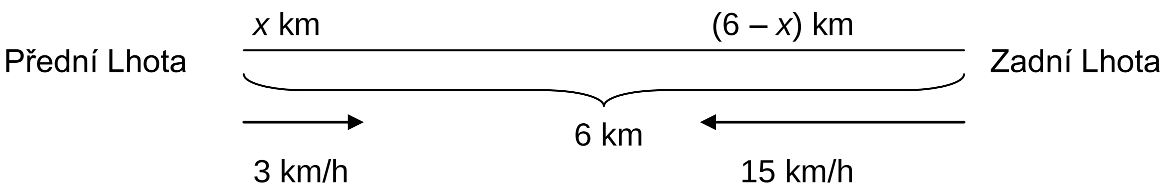
čas do setkání .... $\frac{y}{15}$ h

Sestavíme soustavu rovnic s neznámými x, y a vyřešíme ji:

$$x + y = 6$$

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{15}$$

4.



dráha, kterou ujde Karel .... x km

rychlost K. .... 3 km/h

čas do setkání .... $\frac{x}{3}$ h

dráha, kterou ujede Pavel .... $(6 - x)$ km

rychlost P. .... 15 km/h

čas do setkání .... $\frac{6-x}{15}$ h

Sestavíme rovnici:

$$\frac{x}{3} = \frac{6-x}{15}$$

5. Využijeme poměr rychlostí Pavla a Karla:

Pavlova rychlost je pětkrát větší než Karlova.

Pavel tedy ujede 5 km, Karel ujde 1 km.

6. Budeme postupovat odhadem a zkouškou:

Za 1 hodinu by Pavel ujel 15 km, Karel by ušel 3 km, celkem tedy 18 km.

Vzdálenost mezi Lhotami je třikrát kratší, Karel tedy ujde 1 km.

Úloha 53[58]

Chlapci hráli kuličky. Jiřík prohrál s prvním kamarádem 1 kuličku, pak ještě polovinu zbytku svých kuliček a ještě jednu kuličku. Totéž se opakovalo při hře s druhým, s třetím i se čtvrtým kamarádem. Nakonec měl Jiřík právě jednu kuličku. Kolik kuliček měl na počátku hry?

Řešení:

1 a 1 je polovina zbytku, zbytek jsou 4 kuličky.

Do hry se 4. kamarádem měl: 4 + 1 = 5 kuliček.

5 a 1 je polovina zbytku, zbytek je 12 kuliček.

Do hry se 3. kamarádem měl: 12 +1 = 13 kuliček.

13 a 1 je polovina zbytku, zbytek je 28 kuliček.

Do hry s 2. kamarádem měl: 28 + 1 = 29 kuliček.

29 a 1 je polovina zbytku, zbytek je 60 kuliček.

Do hry s 1. kamarádem měl: 60+ 1 = 61 kuliček.

Úloha 54[59]

Starověký matematik Diofantos měl prý na svém náhrobku vytesaný životopis vyjádřený rovnicí. Šestinu svého věku byl chlapcem, za další dvanáctinu mu narostly vousy, za další sedminu se oženil. Syn, který se mu narodil o pět let později, zemřel, když dosáhl právě polovinu celého otcova věku. Jak stár byl Diofantos, zemřel-li čtyři léta po svém synovi?

Řešení:

Označíme-li si Diofantův věk x, vede úloha na rovnici:

$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x$, která má řešení $x=84$.

Diofantos se dožil věku 84 let.

---

[58] MALÁČ, J., KURFÜRST, J.: *Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ*, str. 13

[59] LOUKOTA, J.: *Veselá matematika aneb Kouzla, hříčky, hádanky a lamohlavy*, str. 13

Úloha 55[60]

Jarka viděla u strýčka pobíhat na dvoře slepice a králíky. Ptala se, kolik je kterých. Strýc vyzkoušel Jarku z počtů touto odpovědí: Mají dohromady 160 nohou a slepic je o 50 více než králíků. Dovedeš to spočítat?

Řešení:

(160 – 100) : 6 = 10 (králíků). Slepic je 60.

Úloha 56 (inspirováno úlohou z[61])

Společné vaření

Nájemnice – nazvu ji pro jednoduchost Trojánková – přiložila do společné plotny 3 polena ze své zásoby a nájemnice Pětníková 5 polen; nájemníku Netopilovi, který jak tušíte, neměl vlastní dříví, dovolili uvařit oběd na společném ohni. Náhradou za výdaje zaplatil Netopil sousedkám 8 rublů. Jak se mají o ně rozdělit?

Řešení:

Není správné, jak se mnozí domnívají, že 8 rublů bylo zaplaceno za 8 polen, po jednom rublu za poleno. Peníze byly zaplaceny pouze za třetinu z oněch 8 polen, neboť ohně používaly tři osoby ve stejné míře. Z toho plyne, že všech 8 polen má cenu 8 • 3 = 24 rublů, a jedno poleno 3 rubly.

Nyní snadno zjistíme, kolik má kdo dostat. Pětníkové za jejích 5 polen náleží 15 rublů; ale ona sama používala plotny za 8 rublů; má tedy dobírat 15 – 8 = 7 rublů. Trojánková má za 3 polena dostat 9 rublů, a po odečtení 8 rublů za použití plotny dostane celkem jen 9 – 8 = 1 rubl.

Při správném dělení má tedy Pětníková dostat 7 rublů a Trojánková 1 rubl.

Úloha 57[62]

Děd a vnuk

„To, o čem vám povím, se stalo roku 1932. Bylo mi tehdy právě tolik let, kolik vyjadřují poslední dvě číslice v letopočtu mého narození. Když jsem o této souvislosti řekl dědovi, překvapil mě tvrzením, že s jeho věkem je to také tak. Mně se to zdálo

[60] MALÁČ, J., KURFÜRST, J.: *Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ*, str. 14
[61] PERELMAN, J., I.: *Zajímavá matematika: matematické povídky a hlavolamy*, str. 10
[62] Tamtéž, str. 11

nemožné. Vidíte, a je to docela dobře možné. Dědeček mi to dokázal. Kolik let nám tenkrát každému bylo?“

Řešení:

Na první pohled by se opravdu mohlo zdát, že v úloze je chyba, vypadá to, jako by děd i vnuk byli stejně staří. Ale podmínkám úlohy, jak hned uvidíme, lze snadno vyhovět.

Vnuk se zřejmě narodil ve 20. století. První dvojčíslí v letopočtu jeho narození je tedy 19: to jsou stovky. Druhé dvojčíslí, sečteno se sebou samým, má dát 32. Je to tedy číslo 16; vnuk se narodil r. 1916 a r. 1932 mu bylo 16 let.

Jeho děd se ovšem narodil v 19. století; první dvě číslice v letopočtu jeho narození jsou 18. Dvojnásobek druhého dvojčíslí má být 132. Je to tedy polovina ze 132, tj. 66. Děd se narodil r. 1866 a r. 1932 mu bylo 66 let.

Tak bylo r. 1932 vnukovi a dědovi tolik let, kolik vyjadřují poslední dvě číslice v letopočtech jejich narození.

Úloha 58[63]

Čertova lávka

Pocestný narazil na počátku lávky na čerta a ani se nepodivil, neboť bylo 5. prosince, kdy se čerti před svátkem svatého Mikuláše přímo rojí. Pekelník pocestnému vyhrožoval, že ho shodí do vody. Dali se spolu do křížku. Tu pocestný poznal, že nejde o převlečeného člověka, nýbrž o skutečného čerta. Když pekelník cítil neodvratnost prohry a svého vlastního pádu do vody, slíbil pocestnému, nechá.li ho, že mu zdvojnásobí peníze, které má právě v kapse. Pocestný si řekl, že peníze potřebuje, a čerta pustil. Když však přišel na druhý břeh, zjistil, že při zdvojnásobování ho čert ošidil o 4 groše. Vrátil se čert mu řekl: „Protože se mne nebojíš, až dojdeš na druhý konec lávky, budeš mít peněz dvakrát tolik, než máš teď, což bude třikrát více, než jsi měl původně.“

Kolik měl pocestný peněz, když přišel k lávce?

[63] MÍDA, J.: *Mozaika matematických úloh*, str. 8

Řešení:

Počet grošů, které měl pocestný, když přišel k lávce označme *x*. Po prvním přejití lávky měl (2*x* – 4) grošů, po čertově opravě tedy bylo (2*x* – 4) . 2 grošů. Můžeme tedy sestavit pro neznámou *x* rovnici $(2x-4)\cdot 2 = 3x$, která má řešení 8.

<u>Úloha 59</u>[64]

Keramické číslice na domech

Na starobylém náměstí ulicového typu stojí na jedné straně 52 domů, na druhé straně 48 domů. Domy jsou označeny orientačními čísly: na straně s větším počtem domů lichými, na druhé straně sudými. Městské zastupitelstvo doporučilo, aby byly domy po opravách fasád očíslovány čísly vytvořenými z jednotných keramických číslic z místní dílny.

Celkem kolik keramických číslic devět bude zapotřebí?

Řešení:

Na straně s lichými čísly má první dům číslo 1, poslední 1 + 2 . (52 – 1) = 103. Čísla dvou sousedních domů se totiž liší o číslo 2. Na straně se sudými čísly se obdobně zjistí, že první dům má číslo 2 a poslední 2 + 2 . (48 – 1) = 96. U lichých čísel jsou devítky na místech jednotek, tj. v každé desítce jedna, tedy je jich 10. Na místě desítek ji mají čísla 91, 93, 95, 97, 99, těchto devítek je tedy 5. U sudých čísel je devítka jen na místech desítek, jde celkem o čtyři čísla 90, 92, 94, 96. Číslic devět je celkem třeba 10 + 5 + 4 = 19.

<u>Úloha 60</u>[65]

Bílá paní a kastelán

Na mnoha jihočeských hradech a zámcích se zjevuje bílá paní. Na jednom zámku těsně před půlnocí o sv. Jiří uviděl kastelán v arkádové chodbě světlo a v něm vidí přízrak bílé paní, která mu stroze oznámila: „Na svém zámku vidím jen samý nepořádek, pečuješ o něj bídně. Budu se zjevovat vždy po uplynutí čtvrt roku a napomínat tě. Nezlepší-li se stav, budeš ode mne přísně potrestán.“ Kastelán si řekl, že čtvrt roku jsou tři měsíce, a nalistoval v kalendáři, že se bílá paní objeví opět 24.

---

[64] Tamtéž, str. 12

[65] Tamtéž, str. 21

července. Tento den proběhl a bílá paní nikde. Zjevila se až dalšího dne na sv. Jakuba. Umíte její zpoždění vysvětlit?

Řešení:

Vydělíme-li počet dní v roce čtyřmi, pak dostáváme buď 91,5, nebo 91,25, podle toho, zda je přestupný rok, či nikoli. Snadno zjistíme, že 24. července je 91. den po 24. dubnu. Platí totiž 6 + 31 + 30 + 24 = 91. Tedy se bílá paní zcela správně zjevila až 25. července.

Úloha 61[66]

Kolik let je Petrovi?

Sourozencům Petrovi a Pavlovi je dohromady 21 let. Kolik je Petrovi, jestliže je Pavlovi dvakrát tolik, kolik bylo Petrovi tenkrát, když Pavlovi bylo tolik, kolik je Petrovi dnes?

Řešení:

Současný věk Petra a Pavla označíme po řadě *x* a *y*. sestavíme podle textu úlohy tabulku:

Petr	x	$\frac{y}{2}$
Pavel	y	x

Tab. 3: Řešení – Úloha 61

Z tabulky plynou rovnice:

$$x + y = 21$$

$$x - y = \frac{1}{2}y - x$$

Druhá rovnice vyjadřuje, že rozdíl mezi věkem chlapců se nemění. Řešení této soustavy je $x = 9$, $y = 12$. Po ověření zkouškou podle textu úlohy lze vyslovit závěr: Petrovi je 9 let a Pavlovi 12 let.

[66] MÍDA, J.: *Mozaika matematických úloh*, str. 21

Úloha 62[67]

Dva plavci

Na velkém rybníku je bójkami vyznačena trať dlouhá 1500 metrů. Bójky jsou od sebe vzdáleny po 100 metrech a jsou očíslovány 0, 1, 2, …, 15. Podél bójek plavou po různých stranách dva chlapci, kteří trénují vytrvalost. Snad už se vidí na kanálu La Manche.

Od bójky 0 začal plavat první z nich ve směru k bójce 15 a v tutéž chvíli začal plavat druhý z nich od bójky 15 směrem k bójce 0. Když doplavali ke koncovým bójkám (první k bójce 15, druhý k 0), otočili se a plavali zpět.

Kde se poprvé potkali, si chlapci nevšimli, podruhé se tak stalo u bójky označené číslem 6.

Vypočtěte, kde se míjeli poprvé. (Předpokládejte, že plavali stálými rychlostmi a že při otáčkách měli stejné časové ztráty.)

Řešení:

Když se chlapci podruhé míjeli, první z nich uplaval 1500 m + (1500 m – 600 m) = 2400 m. Druhý uplaval 1500 m + 600 m = 2100 m. Označme rychlosti obou chlapců po řadě v_1, v_2 v m/s. Dále označme čas *t* (v sekundách) při druhém setkání měřený od začátku plavání, avšak zmenšený o ztrátu při otočce. Potom

$$\frac{v_1 t}{v_2 t} = \frac{2400}{2100}, tj. \frac{v_1}{v_2} = \frac{8}{7}.$$

Místo jejich prvního setkání muselo vzdálenost od bójky 0 k bójce 15 dělit v poměru 8 : 7, tj. bylo u bójky označené číslem 8.

Úloha 63 [68]

Tajné chodby radyňské

S podzemními stavbami nezačali naši předkové až v 19. století. Tajné podzemní chodby měly snad všechny hrady, kláštery i města. Byly také součástí opevnění hradu Radyně, který se tyčí sedm kilometrů jihovýchodně od Plzně. Z něho údajně vedlo šestnáct tajných podzemních chodeb. Dnes je Radyně zřícenina, která má z původních dvou věží jen jednu. Byl to významný královský hrad postavený

[67] Tamtéž, str. 25
[68] MÍDA, J.: *Mozaika matematických úloh*, str. 26

v době Karla IV. Výlet do radyňských sklepení se nedoporučuje, neboť v nich straší přízrak zvaný Radouš.

Tajné chodby nebyly stejně dlouhé. Nejdelší vedly až do Plzně, měřily tedy 7 km.

Představme si, že do Plzně byly vyraženy celkem tři chodby a že délky dalších třinácti bylo možno seřadit tak, že nejdelší měla délku 6800 metrů a každá následující byla kratší o 500 metrů. Kolik za těchto předpokladů měřila nejkratší chodba? Pokud budete mít trpělivost, vypočtěte délky všech chodeb a jejich celkovou délku.

Řešení:

Nejdelší chodba byla dlouhá 6800 metrů. Třináctá chodba v sestupném pořadí délek po ní následuje jako dvanáctá, musela tedy být kratší o $12 \cdot 500$ metrů, takže měřila $6800m - 12 \cdot 500m = 800m$. Předposlední má délku $800m + 500m = 1300m$, další měří 1800*m*, 2300*m*, 2800,, 3300*m*, 4300*m*, 4800*m*, 5300*m*, 5800*m*, 6300*m*, 6800*m*. Celková délka byla 49,4 km.

Úloha 64[69]

Manžel je o 8 let starší než jeho žena, která je o 8 let starší než její sestra. Žena je tak stará jako její sestra a její syn dohromady. Muž je tak stár jako jeho žena a její syn dohromady. Stáří muže a švagrové je v poměru 5 : 3. Je možno z těchto údajů určit stáří jednotlivých členů rodiny?

Řešení:

Muž je o 16 roků starší než jeho švagrová. Trojnásobek jeho věku je o 48 let větší než trojnásobek let švagrové; oněch 48 let je dvojnásobek jejího stáří.

Stáří nyní: švagrová 24 let, žena 32 let, syn 8, muž 40 let.

Úloha 65[70]

Na stromě seděly vrány a křičely: „Je nás sto.“ Pod stromem byla liška a řekla: „Neumíte počítat. Kdyby vás mělo být sto, muselo by vás být ještě jednou tolik, kolik vás je, a půlkrát tolik a čtvrtkrát tolik a ještě já s vámi. Pak teprve by vás bylo sto.“ Kolik bylo vran?

---

[69] MALÁČ, J., KURFÜRST, J.: *Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ*, str. 14
[70] Tamtéž, str. 21

Řešení:

$\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{4}$ hejna je 99.

Vran bylo 36.

7 ÚLOHY NA APLIKACI POZNATKŮ A DOVEDNOSTÍ Z JINÝCH VZDĚLÁVACÍCH OBLASTÍ

Neexistuje jediná oblast matematiky, a to jakkoli abstraktní, která by se jednou nedala aplikovat na jevy reálného světa.
N. I. Lobačevskij

Žáci by měli umět řešit problémy, rozumět různým typům textů, třídit informace, systematizovat je a využívat jich v procesu školního učení a v mimoškolním prostředí.

7.1 Úlohy aplikační

V této a následující úloze si žáci procvičí časovou představivost a počítání s velkými čísly.

Úloha 66[71]

„Sejdeme se přesně za jeden milión dvě stě devět tisíc šest set sekund," řekl Marek, který rád počítá s velkými čísly, svému kamarádovi Honzovi, když se dne 10. června ve 12 hodin loučili. Kdy se opět setkají?

Řešení*:*

Uvedený čas v sekundách musíme vyjádřit ve dnech. Přitom víme, že 1 minuta má 60 sekund, 1 hodina má 60 minut a 1 den má 24 hodin. 1209 600 : 60 = 20 160 (minut) 20 160 : 60 = 336 (hodin) 336 : 24 = 14 (dní)

Odpověď: Marek a Honza se znovu setkají 24. června ve 12 hodin.

Úloha 67[72]

Vodník Perlička

Za starých dob si lidé vyprávěli o vodnících. Zvláště známé jim byly zvyky hastrmana u nich usedlého. V jednom městě v nevelké vzdálenosti od řeky byly čtyři hospody. Jmenovaly se zajímavě: *Černý orel, Bílá růže, Modrá hvězda, Zlatý jelen.*

---

[71] MALÁČ, J., KURFÜRST, J.: *Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ*, str. 11
[72] MÍDA, J.: *Mozaika matematických úloh*, str. 9

Místní vodník Perlička navštěvoval každý den večer jednu z nich, přičemž za čtyři dny je všechny postupně vystřídal ve výše uvedeném pořadí. Když dospěl až ke Zlatému jelenu, tak druhý den šel k Černému orlu, pak k Bílé růži atd. Všude měl otevřený účet, který koncem roku vyrovnal perlami a drahokamy. Žádná z těchto hospůdek neměla zavírací den.

Jistého roku na Silvestra přišel vodník Perlička k Černému orlu. V které hospodě bylo možno se s vodníkem Perličkou setkat v následujícím roce 12. března – na sv. Řehoře, kdy čápi letí přes moře?

Řešení:

Očíslujeme dny – Silvestr, tj. 31. prosinec, bude pro nás den č. 1, 1. leden č. 2 atd. Pro 12. březen je pořadové číslo 1 + 31 + 28 + 12 = 72, resp. 73, je-li rok, v němž je uvažován 12. březen, přestupný.

K Černému orlu přišel Perlička v den č. 1, ale také v den s pořadovým číslem 1 + 4 = 5 atd., stručně řečeno: ve dny, jejichž pořadová čísla při dělení čtyřmi dávají zbytek 1. Obdobně je tomu pro ostatní hospůdky – Bílá růže, zbytek 2; Modrá hvězda, zbytek 3; Zlatý jelen, beze zbytku. Odtud plyne, že v nepřestupný rok se s vodníkem Perličkou můžeme setkat u Zlatého jelena, v přestupný rok u Černého orla.

Další dvě úlohy mají za úkol seznámit žáky s jednotkami, které byly běžně používány v minulosti.

Úloha 68[73]

Ze zápisků šenkýře od Černého koně

Stolní společnosti v uvedené restauraci ukázal její majitel výčepní deník jejž vedl jeho pradědeček. Zde je jeden ze zápisů:

„Na svatého Tadeáše přivezli ze zámeckého pivovaru čtvrtinu tuctu sudů, z nichž každý obsahoval čtyři věrtele piva. Z této várky prodán mandel mázů (českých, nikoli vídeňských) a zbytek vyčepován po žejdlících.“

Měl pravdu šenkýř, jestliže dále poznamenal, že žejdlíků načepoval přes pět set?

---

[73] MÍDA, J.: *Mozaika matematických úloh*, str. 7

Poznámka. Tucet je 12 kusů. Staročeská číslovka mandel značí 15. Jeden věrtel je asi 23,25 litru, český máz se rovnal 4 žejdlíkům a odpovídal hodnotě 1,91 litru; vídeňský máz byl jen 1,415 litru.

Řešení:

Piva v dovezených třech sudech bylo celkem $3 \cdot 4 \cdot 23{,}25$ litrů = 279 litrů; 15 mázů je 28,65 l. Vyčepovaných žejdlíků tedy bylo $[(279 - 28{,}65) : 1{,}91] \cdot 4 > 500$.

Šenkýř měl pravdu.

Úloha 69[74]

Prácheňský poklad

Část jižních Čech se nazývá Prácheňsko podle bývalého správního hradu Prácheň na stejnojmenném kopci nad Horažďovicemi. Pod zříceninami tohoto hradu jsou ukryty poklady, jež lze spatřit jen jednou v roce – na ŠTĚDRÝ DEN, když se v tamějším kostelíku sv. Vojtěcha slouží půlnoční mše.

Bohatství střeží zlatá sova s rubínovýma očima. Poklad obsahuje hlavně říční perly a zlato, vše pochází z Otavy tekoucí pod bývalým hradem. Jeden odvážlivec zde kdysi spatřil kožený měšec s narýžovaným zlatem, kterého odhadl potěžkáním na tucet liber. Náhle však uslyšel soví houkání, dostal strach a utekl, aniž cokoliv odnesl. Tolik říká pověst a nyní úloha:

Vypočtěte, jakému množství čtrnáctikarátového zlata odpovídá 12 liber ryzího zlata.

Poznámka: Stará česká míra libra je asi 0,51375 kg. Tolik míst uvádíme proto, že v úloze jde o hmotnost zlata. Čtrnáctikarátové zlato obsahuje hmotnostně 14/24 čistého zlata a 10/24 příměsí.

Řešení:

Ryzího zlata bylo celkem $(12 \cdot 0{,}51375 kg : 14) \cdot 24 \cong 10{,}568\ 57$ kg čtrnáctikarátového zlata.

V následujících úlohách je propojena matematika s jinými předměty. Například s fyzikou.

[74] MÍDA, J.: *Mozaika matematických úloh*, str. 8

Úloha 70[75]

Alchymistická transmutace kovů (příběh z doby Rudolfa II.)

Do ponuré alchymistické laboratoře spoře osvícené hořícími loučemi se ozývá odbíjení věžních hodin, a to půlnoci. Venku zuří sněhová bouře. Při sedmém úderu hodin byla místnost ozářena bleskem. Pomůže snad přírodní energie k transmutaci obecného kovu ve zlato? Příhodná doba je od záblesku do zahřmění.

Ozve se hrom do posledního půlnočního úderu věžních hodin, je-li mezi jednotlivými údery interval 3 sekundy a blesk sjel ve vzdálenosti jedné hodiny chůze?

Řešení:

Předpokládejme, že rychlost chodce je 4 km/h, a tedy že blesk sjel ve vzdálenosti 4 km. Průměrná rychlost zvuku je 340 m/s. Tedy od záblesku do zahřmění uplyne čas 4000 m : 340 m/s $\cong$ 11,76 s. U hodin jsou dvě možnosti: zda odbíjejí před každou celou hodinou ještě navíc čtyřikrát, anebo nikoli. Tedy půlnočních úderů je 16, popř. 12. Intervalů je od sedmého úderu 9, resp. 5. V obou případech je $9 \cdot 3$s nebo $5 \cdot 3$s více než 11,76 s, takže hrom do posledního úderu zazní.

Úloha 71[76]

Průjezd železničním tunelem

Železniční trať Klatovy – Železná Ruda prochází pod sedlem Špičáku tunelem dlouhým 1748 m.

Představme si, že do tohoto tunelu vjíždí vlak dlouhý 250 m rychlostí 36 km/h. Po jak dlouhou dobu bude cely skryt v tunelu?

Řešení:

Okamžik, kdy začíná být celý vlak v tunelu, nastává, když čelo lokomotivy (v případě, že lokomotiva vlak táhne, nikoli tlačí) je vzdáleno od vjezdu do tunelu 250 metrů. Celý vlak je v tunelu až do chvíle, kdy čelo lokomotivy dojede k výjezdu z tunelu. Rychlost vlaku vypočítáme nejprve v m/s. Platí

$$36\frac{km}{h} = \frac{36000}{3600}\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s}.$$

[75] Tamtéž, str. 13

[76] MÍDA, J.: *Mozaika matematických úloh*, str. 26

Vlak je celý v tunelu po dobu

$$[(1748-250):10]s = 149{,}8s \cong 2{,}5\min .$$

Úloha 72[77]

Změna turistické cesty

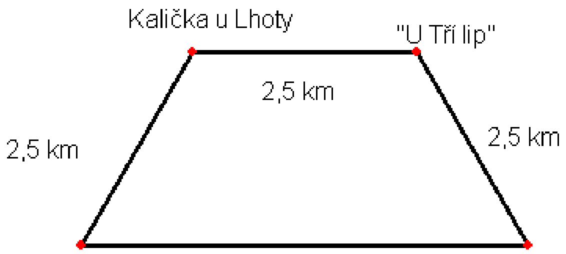
Turistická cesta z Hoštic na Moučný vrch musela být vedena nově. Ukázalo se totiž, že na jaře je vždy v jisté části zcela neschůdná. Po jarním tání sněhu se vytváří obtížně překonatelná bažina.

Nově se jde z Hoštic ke kapličce u Lhoty a potom kolem výletní restaurace „U tří lip“ na Moučný vrch. Kaplička u Lhoty a restaurace „U tří lip“ dělí tuto cestu na přibližně stejně dlouhé části. Od uvedené kapličky k restauraci „U tří lip“ se jde po vyznačené turistické stezce a tam je uvedeno, že tato vzdálenost je 2,5 km.

Kolik měřila původní cesta z Hoštic na Moučný vrch, jestliže byla o pětinu kratší než nově vyznačená stezka?

Řešení:

Načrtněte si schematický nákres nově vyznačené stezky.



Obr. 48: Schematický nákres stezky – Úloha 72

Potom z údaje, že jedna třetina nové cesty je 2,5 km, vypočteme délku nové stezky 7,5 km. Původní cesta z Hoštic na Moučný vrch tedy měřila $\frac{4}{5}\cdot 7{,}5$ km = 6 km.

Úloha 73[78]

Čekání na vlak

[77] MÍDA, J.: *Mozaika matematických úloh*, str. 18

[78] Tamtéž, str. 25

Na nástupišti bylo z dálky slyšet pískání vlaku. Jeden z čekajících, který zřejmě tímto směrem jezdí často, řekl: „Vlak vyjížděl ze zastávky Poříčí a zapískal, neboť je před ním nechráněný přejezd. Bude tu asi za pět minut."

Jak daleko je zastávka Poříčí, jestliže vlak jel průměrnou rychlostí 60 km/h?

Řešení:

Jestliže rychlost zvuku 340 m/s považujeme za dostatečně velikou, můžeme počítat velmi jednoduše, a to zpaměti: Rychlost 60 km/h znamená 1 km za minutu, takže zastávka je vzdálena asi 5 km.

Chce-li někdo počítat „přesněji", bude postupovat např. takto: Označme vzdálenost od zastávky Poříčí *x* metrů, průměrnou rychlost zvuku ve vzduchu *c* m/s, průměrnou rychlost vlaku *v* m/s. V okamžiku, kdy slyšíme zapískání, je vlak od nádraží vzdálen $\left(x - \frac{x}{c} \cdot v\right)$ metrů, neboť po dobu $\frac{x}{c}$ sekund, po niž nám šel zvuk, vlak ujel vzdálenost $\frac{x}{c} \cdot v$ metrů. Tedy vlak přijede za dobu

$$t = \left(x - \frac{x}{c} \cdot v\right) : v = \frac{x}{v} - \frac{x}{c}$$

sekund, což má být 5 minut. Odtud postupně vypočteme

$$x = \frac{c \cdot v \cdot t}{c - v} = \frac{340 \cdot 16{,}7 \cdot 300}{340 - 16{,}7} m \cong 5268{,}8. \cong 5{,}26 km.$$

<u>Úloha 74</u>[79]

Auto má nosnost 500 kg. Řidič váží 85 kg a jeho spolujezdec 90 kg. Chtějí tímto autem převézt 2 dřevěné špalky tvaru válce, které jsou 110 cm dlouhé a jejichž průměr je 60 cm. Jeden špalek je z borovicového dřeva a jeden ze smrkového.

Může řidič se spolujezdcem převézt oba špalky najednou nebo musí jet víckrát?

Řešení:

Hustoty dřeva podle tabulek: Borovice ϱ = 500 kg/m^3

[79] KYSELOVSKÁ, M.: *Kruh a válec ve slovních úlohách, Fyzika - Hustota*

Smrk ϱ = 650 kg/m^3

Dub ϱ = 700 kg/m^3

$V_{válce} = \pi \cdot r^2 \cdot v$

$V_{špalku} = 3{,}14 \cdot 30^2 \cdot 110 \ cm^3$ $\quad m_{borovice} = 500 \cdot 0{,}310860 \ kg$ $\quad m_{smrk} = 650 \cdot 0{,}310860 \ kg$

$V_{špalku} = 310860 \ cm^3$ $\quad m_{borovice} = 155{,}43 \ kg$ $\quad m_{smrk} = 202{,}059 \ kg$

$V_{špalku} = 0{,}310860 \ m^3$

Celková hmotnost $m_c = 85kg + 90kg + 155{,}43kg + 202{,}059kg = 532{,}489kg$.

Oba špalky najednou nelze převést.

Úloha 75[80]

Jezírko tvaru kruhu o průměru 25 m je po okraj plné vody. Na hladině vody je vrstvička oleje vysoká 0,001 mm. Kolik litrů oleje stačilo k pokrytí a znečištění celé hladiny jezírka?

Kdyby do tohoto jezírka vypustil řidič automobilu 2 litry starého oleje, jakou tloušťku by měla olejová skvrna na celé hladině jezírka?

Řešení:

Obsah kruhu $S = \pi \cdot r^2$ Objem válce $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$

Plocha jezírka: $S = 3{,}14 \cdot 12{,}5^2 \ m^2$

$S = 490{,}625 \ m^2$

$S = 49062{,}5 \ dm^2$

Objem oleje na hladině $V = 49062{,}5 \cdot 0{,}00001 \ dm^2 = 0{,}49 \ dm^2 =$ přibližně *0,5* litru.

Dva litry oleje vytvoří na hladině vrstvičku 0,002 mm vysokou.

Úloha 76[81]

[80] KYSELOVSKÁ, M.: *Kruh a válec ve slovních úlohách, Ekologie – Čistota vody*
[81] Tamtéž, *Zeměpis – Trasimenské jezero v Itálii*

Trasimenské jezero leží v Itálii. Je to největší jezero na Apeninském poloostrově a čtvrté největší v Itálii. Jeho rozloha je asi 128 km^2, hloubka 6 – 7m. Jedná se o bezodtokové jezero s velmi malým vodním pohybem. V létě často vysychá. Pobřeží je osídlené řídce, je však oblíbeným místem rekreace pro místní obyvatele. Roku 217 př. n. l. zvítězil u tohoto jezera slavný vojevůdce z Kartága, Hannibal, nad Římany.
Trasimenské jezero má přibližně tvar kruhu. Kdybychom šli průměrnou rychlostí 4 km/hod, stačil by nám jeden den, abychom ho celé obešli?

Řešení:

Ze vzorečku $S = \pi \cdot r^2$ vyjádřit *r* a dosadit $S = 128\ km^2$. Výsledek *r* = 6,385 *km.*
Obvod jezera $O = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}385\ km = 40{,}0978\ km = 40\ km$.

$$t = \frac{s}{v}$$

$$t = \frac{40}{4}$$

$t = 10$ hodin
Jezero lze obejít za jeden den. Šli bychom kolem něj asi 10 hodin.

<u>Úloha 77</u>[82]

Velký význam měla pro středověký hrad tak zvaná útočištní věž, a to zvláště při obléhání. Ve sklepě měla zásoby jídla a byly v něm ukryty cennosti pána. Stála často přímo nad pramenem vody. Vchod měla 5 až 10 m vysoko nad zemí. K ní vedoucí dřevěné schodiště se dalo v případě nutnosti spálit a nepříteli přístup do věže tak znemožnit.

Vypočítej, kolik m^3 kamenného zdiva je potřeba na stavbu takové věže tvaru válce, jejíž vnější obvod je 47,1 m. Tloušťka zdi je 3,5 m a výška věže 30 m. Výsledek zaokrouhli na celé m^3. (Neber v úvahu otvory pro okna a dveře.)

Řešení:

[82] KYSELOVSKÁ, M.: *Kruh a válec ve slovních úlohách, Dějepis – Obléhání středověkého hradu, Věž (a její význam)*

Z vnějšího obvodu vypočítáme vnější průměr válcové věže $r_1 = 47{,}1 : 6{,}28\ m = 7{,}5\ m$.

Vnitřní průměr $r_2 = 7{,}5m - 3{,}5m = 4m$

Objem zdiva $V = V_1 - V_2$

$V = n \cdot r_1^2 \cdot v - n \cdot r_2^2 \cdot v$

$V = n \cdot v \cdot (r_1^2 - r_2^2)$

Po dosazení $V = 3{,}14 \cdot 30 \cdot (7{,}5^2 - 4^2)m^3$

$V = 3791{,}55m^3 =$ po zaokrouhlení $3792m^3$

Na stavbu věže bylo potřeba $3792m^3$ kamenného zdiva.

Úloha 78[83]

Ve středověku se stavěly hrady. Některé měly i svou studnu. Ta byla důležitá hlavně při dlouhém obléhání hradu. Voda se z hradní studny vytahovala ve vědrech pomocí rumpálu.

Urči, kolikrát je nutné otočit dokola klikou rumpálu tvaru válce, aby se vědro ponořené těsně pod hladinu vody dostalo k okraji studny. Hladina vody ve studni je 15 m pod okrajem studny a průměr válce rumpálu je 26 cm. Za dlouhého sucha hladina vody ve studni poklesla o 80 cm. Zjisti, kolik litrů vody ve studni ubylo, je-li průměr studny uvnitř 110 cm.

Řešení:

Obvod válcového rumpálu $O = 2 \cdot \pi \cdot r$

$O = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 13cm = 81{,}64cm$.

Hloubka studny od okraje ke hladině je $18m = 1800cm$.

$1800 : 81{,}64 = 22{,}05$

Klikou rumpálu je nutné otočit 22x.

Vnitřní poloměr studny r = 55 cm. Hloubka vody, která ubyla h = 80 cm.

Objem vody, která ubyla $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$

$V = 3{,}14 \cdot 55^2 \cdot 80cm^3 = 759{,}88dm^3 = 760\,l$

(zaokrouhleno na celé litry)

Ve studni ubylo 760 litrů vody.

[83] Tamtéž, *Dějepis – Obléhání středověkého hradu, Studna (a její význam)*

8 PRŮZKUM

8.1 Předmět průzkumu

Diplomová práce obsahuje průzkum, který ověřuje úspěšnost žáků při řešení některých úloh z tematického okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy. Průzkum byl proveden ve třech devátých třídách základní školy, na vzorku 50 žáků.

Žákům byl předložen test (Příloha č. 1) z tohoto tematického okruhu a krátký dotazník (viz Příloha č. 2). Na vypracování testu a dotazníku měli žáci čas určený jednou vyučovací jednotkou (45 minut). Dotazník byl zaměřen na charakteristiku žáků a na jejich vlastní hodnocení obtížnosti zadaných příkladů. V testu bylo celkem zadáno šest úloh. Tři úlohy byly logického a kombinatorického charakteru a zbylé byly zaměřené na geometrii a prostorovou představivost. Každá úloha byla hodnocena jedním bodem, žáci tedy mohli dosáhnout šesti bodů při vyřešení všech příkladů.

V průzkumu je sledována úspěšnost žáků při řešení zadaných úloh.

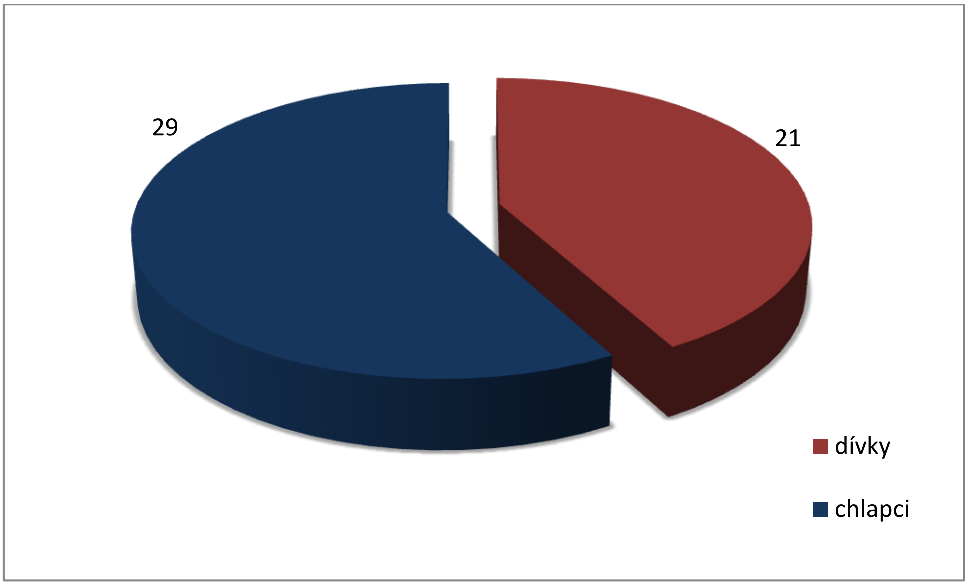
V první části je uvedena průměrná úspěšnost všech žáků v jednotlivých příkladech a úspěšnosti žáků podle posledních známek na vysvědčení z matematiky.

Další část se týká průměrných výsledků všech žáků. Je zde také uvedeno porovnání úspěšnosti v úlohách zaměřených na logiku a kombinatoriku s úlohami zaměřenými na prostorovou představivost a geometrii. Také je zde výpočet, který zjišťuje, zda mezi výsledky žáků jsou rozdíly související s jejich známkou z posledního vysvědčení z matematiky.

Poslední část se týká hodnocení obtížnosti příkladů samotnými žáky.

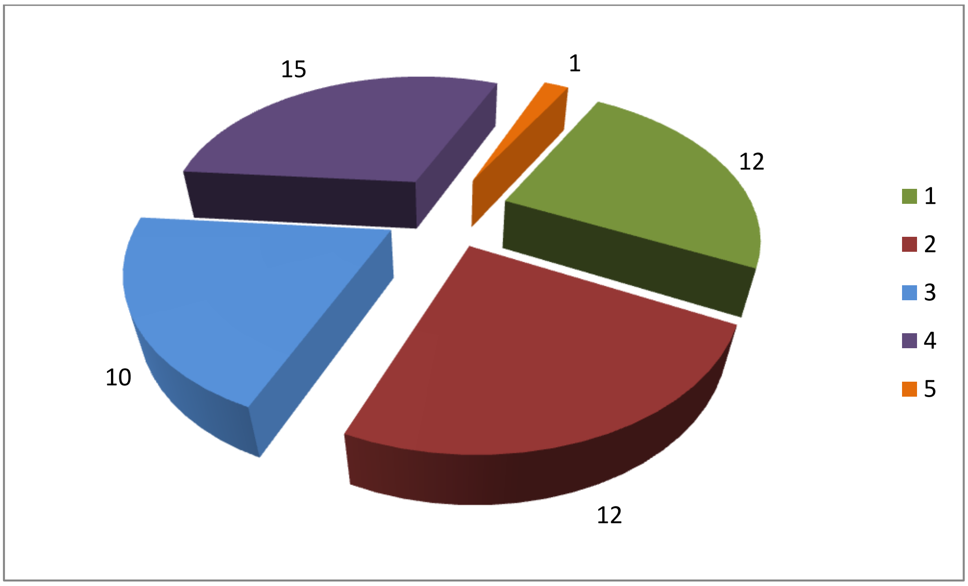
8.2 Vyhodnocení dotazníku

První část dotazníku se týká pohlaví respondentů a jejich poslední známky z matematiky. Z 50 respondentů bylo 29 chlapců a 21 dívek (viz Graf 1). Všichni byli žáky deváté třídy.



Graf 1: Pohlaví respondentů

Žáci jako poslední známku na vysvědčení z matematiky uvedli ve 12 případech jedničku, ve 12 případech dvojku. Ohodnocení „dobře“ uvedlo 10 žáků, „dostatečně“ 15 žáků. V jednom případě byla v dotazníku zakřížkovaná známka „nedostatečná“ (viz Graf 2).



Graf 2: Poslední známka z matematiky

8.3 Úlohy a úspěšnost žáků při jejich řešení

V další části jsou uvedeny úspěšnosti žáků při řešení jednotlivých zadaných příkladů.

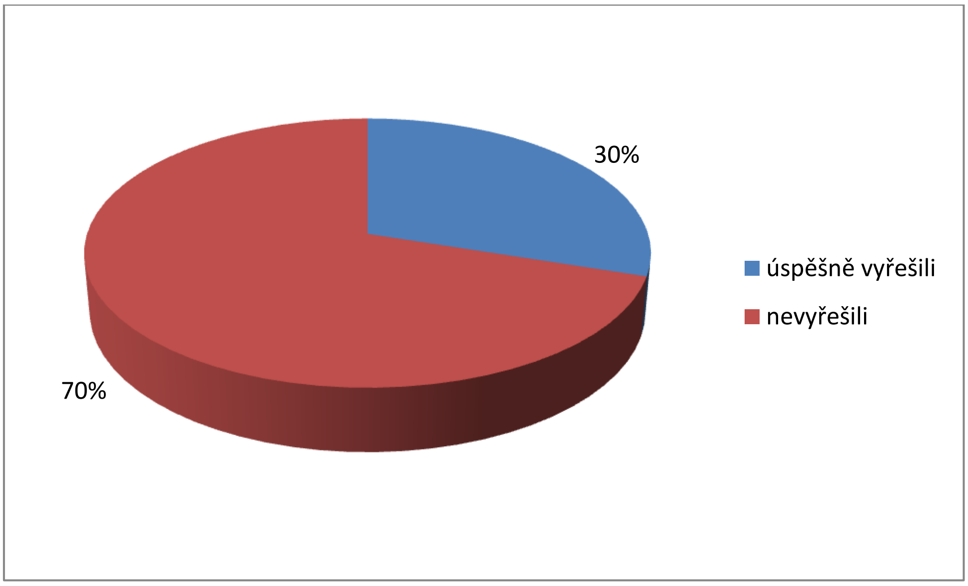
Příklad 1

Kterým číslem nahradíš otazník?

6	8	4	2
9	7	5	7
3	5	8	6
1	4	9	?

Řešením bylo číslo 6. V každá řadě po sečtení prvního a třetího čísla vychází stejné číslo, jako při sečtení druhého a čtvrtého.

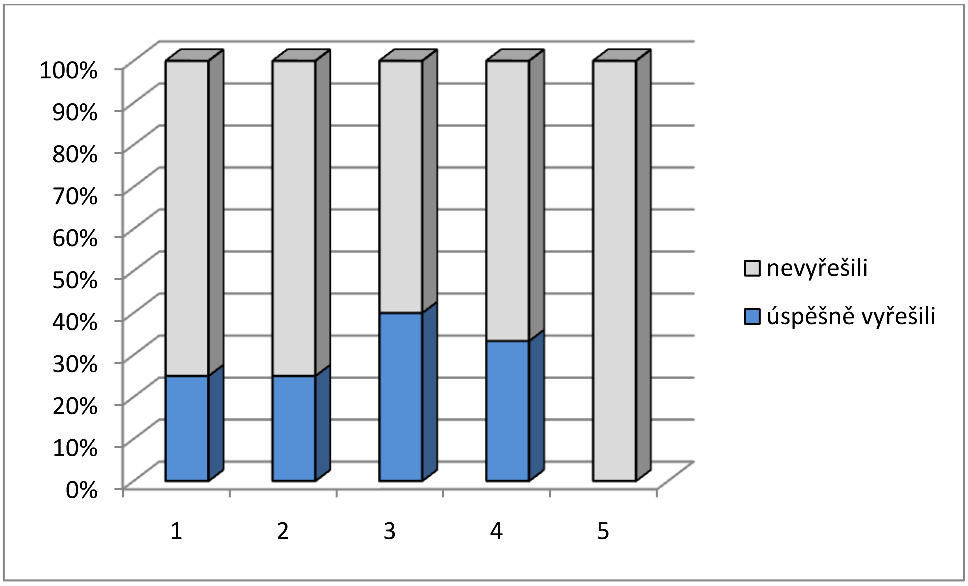
Tento příklad je zaměřený na logické myšlení a pochopení zákonitosti, podle které daný předpis funguje. Hodnocen v tomto příkladě byl pouze správný výsledek. Úspěšnost žáků v řešení tohoto příkladu ukazuje Graf 3.



Graf 3: Úspěšnost žáků při řešení Příkladu 1.

Z grafu je patrné, že žáci nebyli příliš úspěšní při řešení tohoto příkladu. Správného výsledku dosáhla jen třetina žáků. Poměrně velká skupina žáků měla jako výsledek číslo 9, které by bylo pokračováním posloupnosti čísel na úhlopříčce. Zbylí neměli tento příklad vyřešený.

V Grafu 4 je uvedena procentuální úspěšnost žáků podle posledních známek na vysvědčení.



Graf 4: Úspěšnost žáků u Příkladu 1 podle poslední známky na vysvědčení

Z grafu vidíme, že v tomto příkladě byli žáci s trojkou, nebo čtverkou na posledním vysvědčení úspěšnější než žáci „jedničkáři“ a „dvojkaři“. Z toho bychom mohli soudit, že tento příklad by mohl být použit jako motivační pro slabší žáky, protože mají stejnou pravděpodobnost, že jej vyřeší. Tuto domněnku by bylo ovšem potřeba potvrdit, protože velikost testované skupiny nebyla dostatečná.

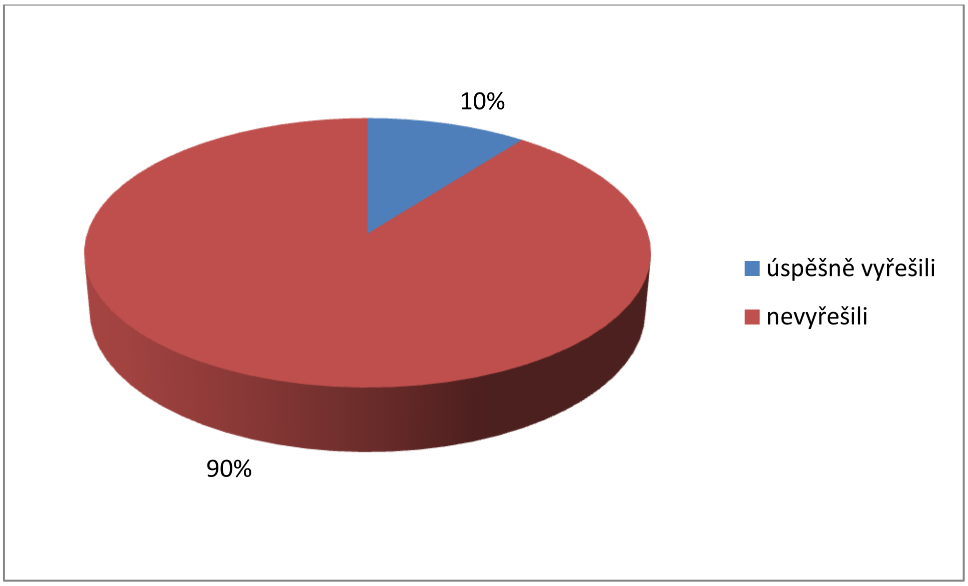
Příklad 2

Ve skříňce je celkem 70 kuliček. Z těch je 20 červených, 20 modrých, 20 žlutých a zbývajících 10 připadá na kuličky bílé a černé. Určete nejmenší počet kuliček, které musíte vytáhnout, aniž byste je viděli, abyste měli:

d) zaručeně 10 kuliček jedné barvy,
e) po jedné kuličce červené, modré a žluté,
f) pět kuliček jedné barvy.

Tento příklad je kombinatorického charakteru. K řešení je možné dospět uvědoměním si nejnepříznivějších případů. Správným výsledkem byla čísla 38, 51 a 21.

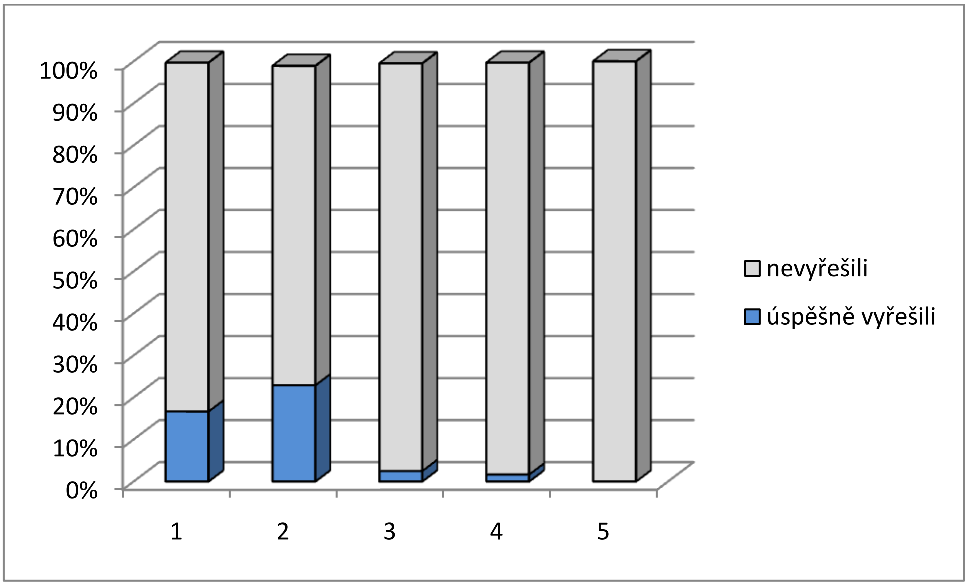
Úspěšnost žáků v tomto příkladě ukazuje Graf 5.



Graf 5: Úspěšnost žáků při řešení Příkladu 2.

V tomto příkladu byli žáci převážně neúspěšní, pouze 10 % z nich jej bylo schopno úspěšně vyřešit.

Důvodem, proč jsem tento příklad zařadila, bylo, že já osobně jsem se s podobnou úlohou setkala již v páté třídě na ZŠ. Tehdy jsem ji také nevyřešila, ale paní učitelka nám ukázala řešení a od té doby úlohy tohoto typu nepovažuji za obtížné.



Graf 6: Úspěšnost žáků v Příkladě 2 podle poslední známky na vysvědčení

Z výsledku je možné usoudit, že tato úloha je vhodnější pro žáky s matematickým nadáním, než pro žáky v matematice slabší.

<u>Příklad 3</u>

Šifrovaný dopis

Pavel si psal do zápisníku tajným písmem, které si sám vytvořil. Jeho kamarád Jarda se proto rozhodl, že mu sdělí šifrovaně den, kdy k němu přijde. Napsal mu dopis v tomto znění:

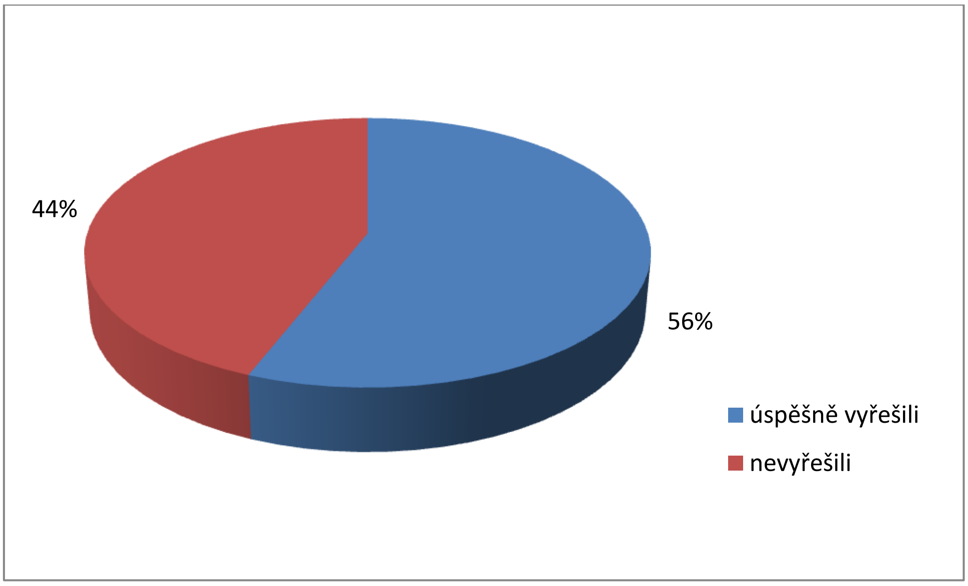
„Přijdu v posledním týdnu v srpnu, který má všechny dny od pondělí do neděle. Den v týdnu si vylušti z přiloženého tiketu Sportky.“ Na tiketu byla přeškrtnuta čísla 1, 5, 11, 16, 20.

Rozšifrujte uvedený dopis.

Řešení: Čísla jsou nahrazením písmen. Po jejich převedení dostaneme pětici písmen: A, E, K, P, T. Názvy dní v týdnu mající pět písmen jsou v češtině jen dva: úterý a pátek. Pro náš případ přichází v úvahu pátek. Pětice *a e k p t* je pro slovo pátek anagram.

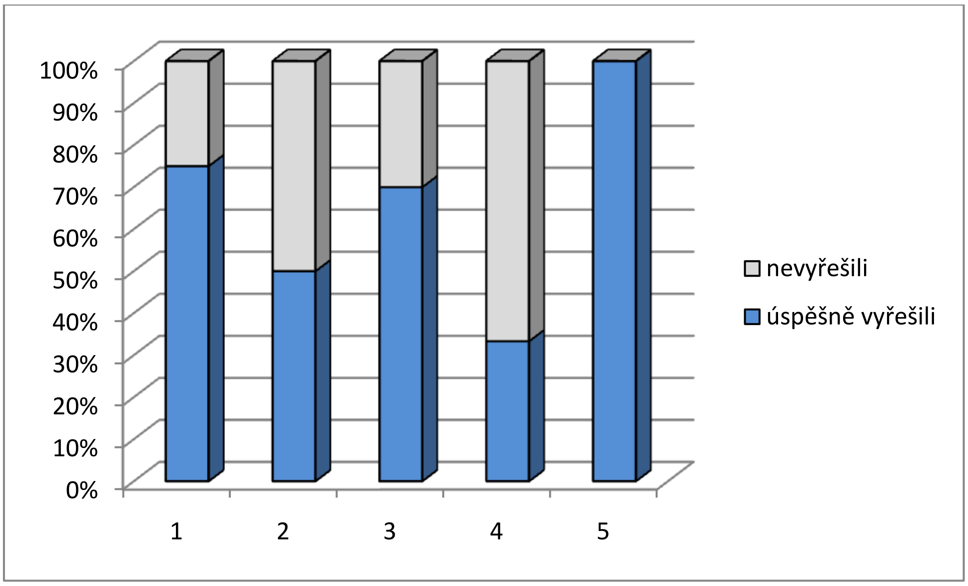
Tato úloha je spíše zábavného charakteru. Řešení různých šifer je odpradávna oblíbenou činností zvídavých lidí.

Úspěšnost žáků v této úloze uvádí Graf 7.



Graf 7: Úspěšnost žáků při řešení Příkladu 3.

Úspěšnost v této úloze byla vyšší než 50%.

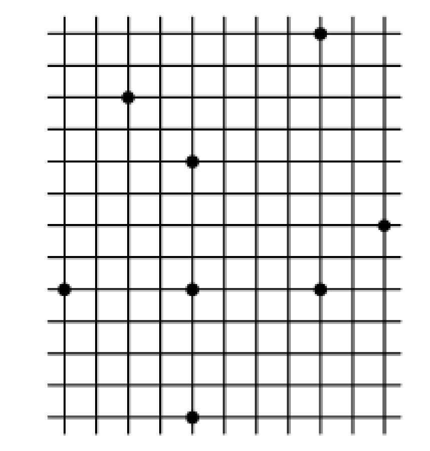


Graf 8: Úspěšnost žáků u Příkladu 3 podle poslední známky na vysvědčení

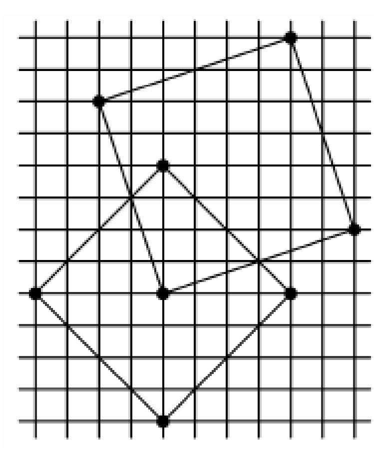
Z výsledku vyplynulo, že žáci jsou schopni tvořivou aktivitou tuto úlohu vyřešit. Překvapil mě správný výsledek žáka ohodnoceného známkou „nedostatečně“, který tento příklad správně vyřešil.

<u>Příklad 4</u>

Na obrázku 1 jsou znázorněny všechny vrcholy dvou čtverců. Zjisti obsah S jejich společné části (jeden čtvereček sítě má obsah $25mm^2$).



obr. 1

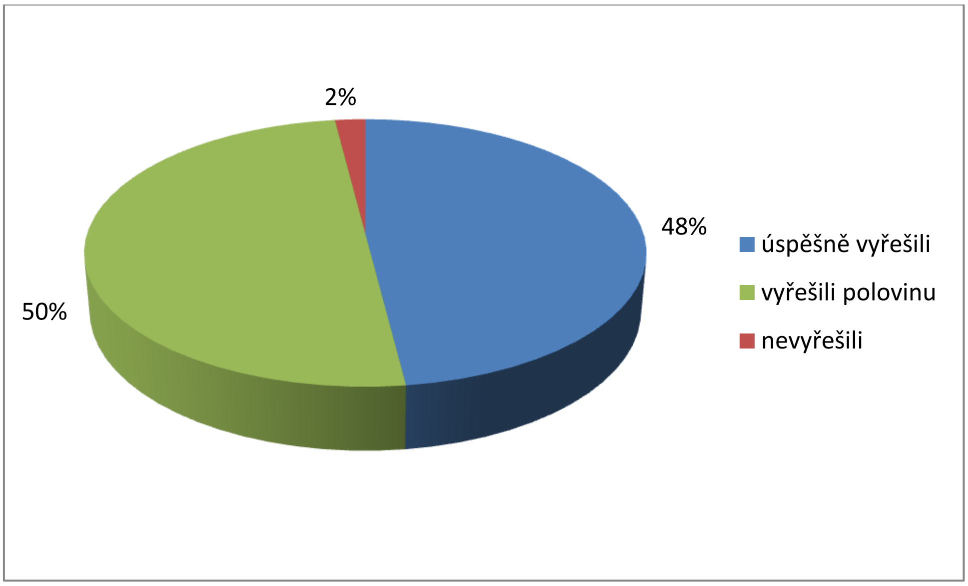


obr. 2

Řešení:

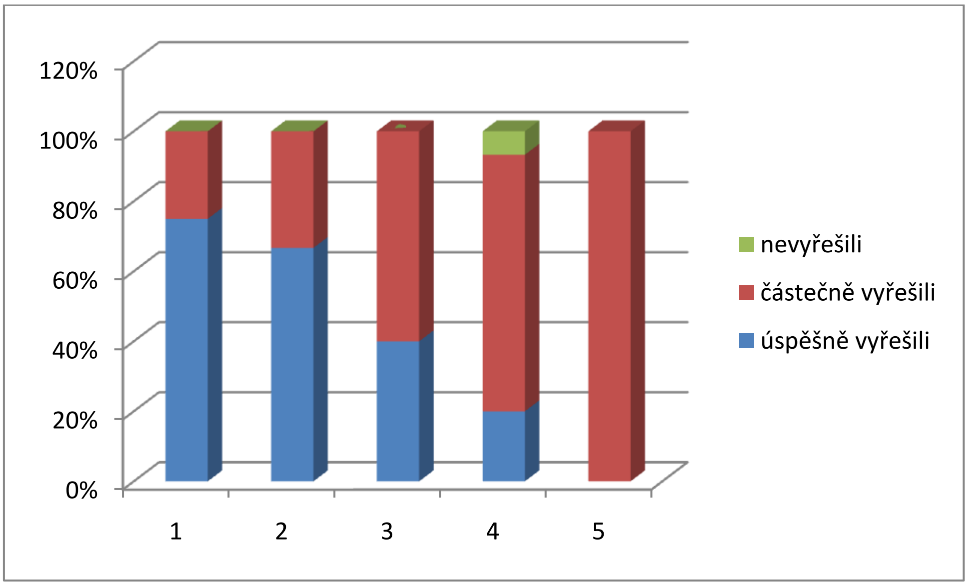
Jediná možnost dokreslení čtverců je na obrázku 2. Jejich společnou část tvoří čtyřúhelník, jehož vrcholy jsou opět body čtvercové sítě. Celý čtyřúhelník lze „svisle“ rozdělit na dva trojúhelníky. Obsah každého z nich určíme buď přímo, nebo je ve čtvercové síti doplníme na obdélník a uvědomíme si, že obsah trojúhelníku je roven polovině obsahu obdélníku. Proto obsah $S = 16 : 2 = 8$ čtverečků $S = 8 \cdot 25 = 200mm^2$.

Příklad geometrického zaměření. Žáci měli za úkol zorientovat se na dané ploše, najít v ní dva čtverce a vypočítat obsah společné části. Polovinou bodu bylo hodnoceno správné zakreslení obou čtverců, druhá polovina bodu byla za správné vypočtení obsahu společné části.



Graf 9: Úspěšnost žáků při řešení Příkladu 4.

Velmi dobrá úspěšnost, 48 % žáků bylo schopno tento příklad vyřešit úplně, dalších 50 % jej vyřešilo částečně. Pouze 1 žák tento příklad nevyřešil vůbec.

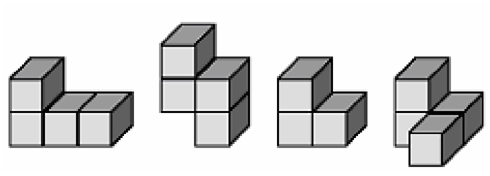


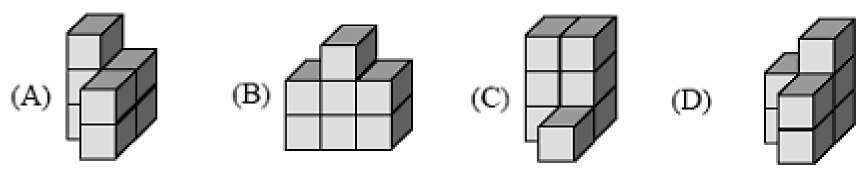
Graf 10: Úspěšnost žáků u Příkladu 4 podle poslední známky na vysvědčení

Úspěšnost v řešení tohoto příkladu se zhoršuje spolu se zhoršující se známkou z matematiky.

Příklad 5

Vpravo vidíš díly dřevěné stavebnice, které jsou vytvořeny ze 3 nebo 4 malých kostek. Kterou ze staveb na obrázcích (A) až (D) nelze postavit z našich dílů stavebnice?



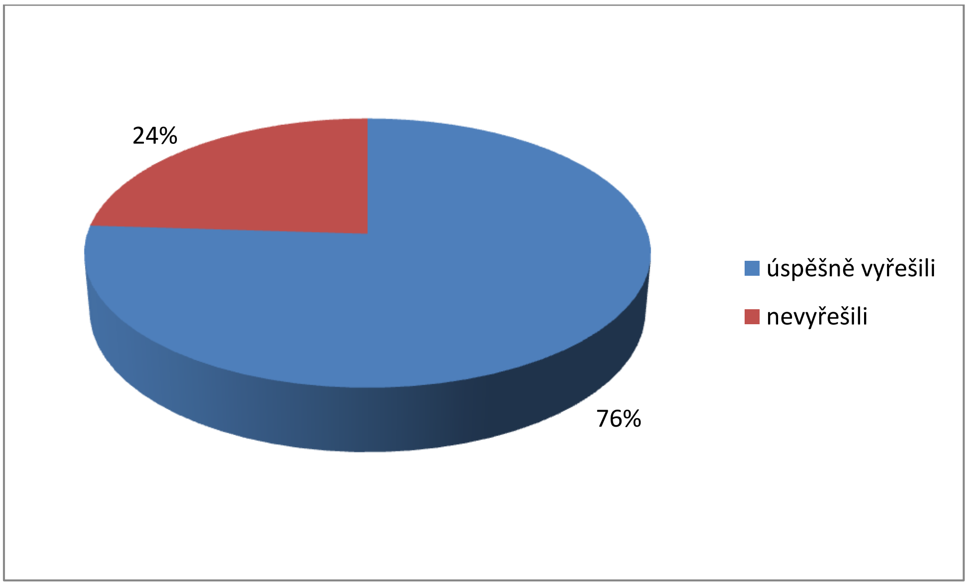


Řešení:

Všechny stavby na obrazcích (A) až (D) lze sestavit z dílů stavebnice.

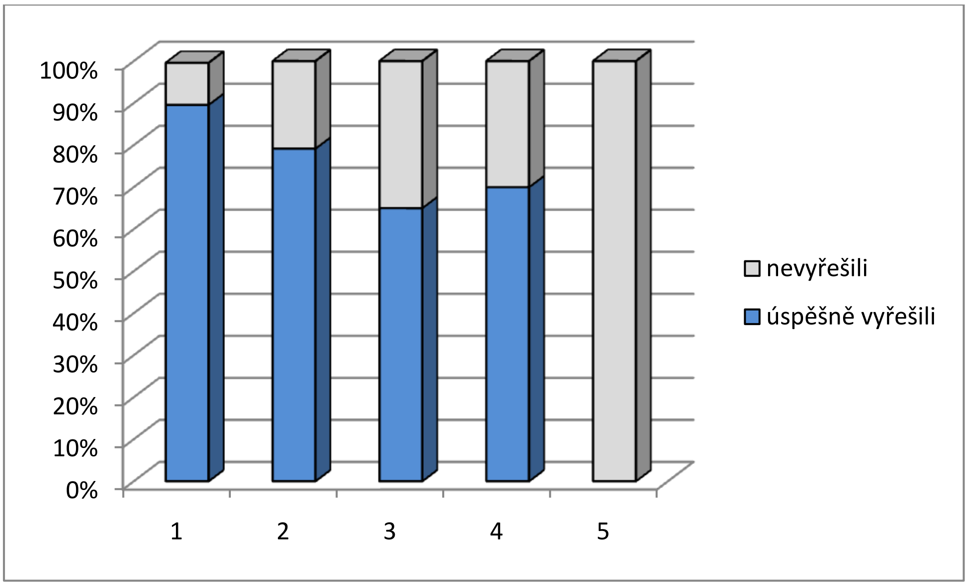
Příklad je zaměřený na prostorovou představivost. K úspěšnému vyřešení je potřeba představit si otočení a skládání jednotlivých kusů stavebnice.

Následující graf (Graf 11) ukazuje úspěšnost všech žáků při řešení tohoto příkladu.



Graf 11: Úspěšnost žáků při řešení Příkladu 5.

Úspěšnost při řešení tohoto příkladu je poměrně vysoká, z toho se dá usoudit, že většina žáků z testovaného vzorku má dobrou prostorovou představivost.



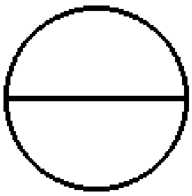
Graf 12: Úspěšnost žáků u Příkladu 5 podle poslední známky na vysvědčení

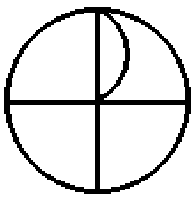
Velmi dobrého výsledku dosáhla většina žáků.

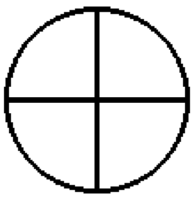
<u>Příklad 6</u>

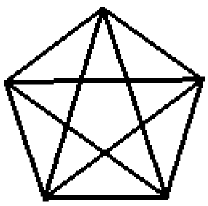
Pokuste se nakreslit obrázky a, b, c, d, e, f, g, h jedním tahem (bez zvednuti tužky) tak, aby žádný tah nebyl kreslen dvakrát.

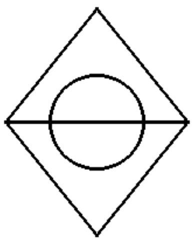
Které z obrázků je možné nakreslit jedním tahem?

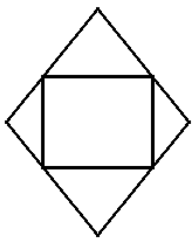

a

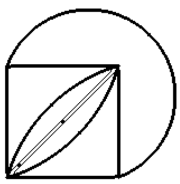

b

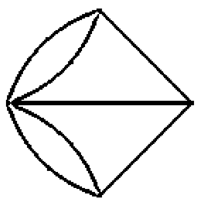

c


d


e


f

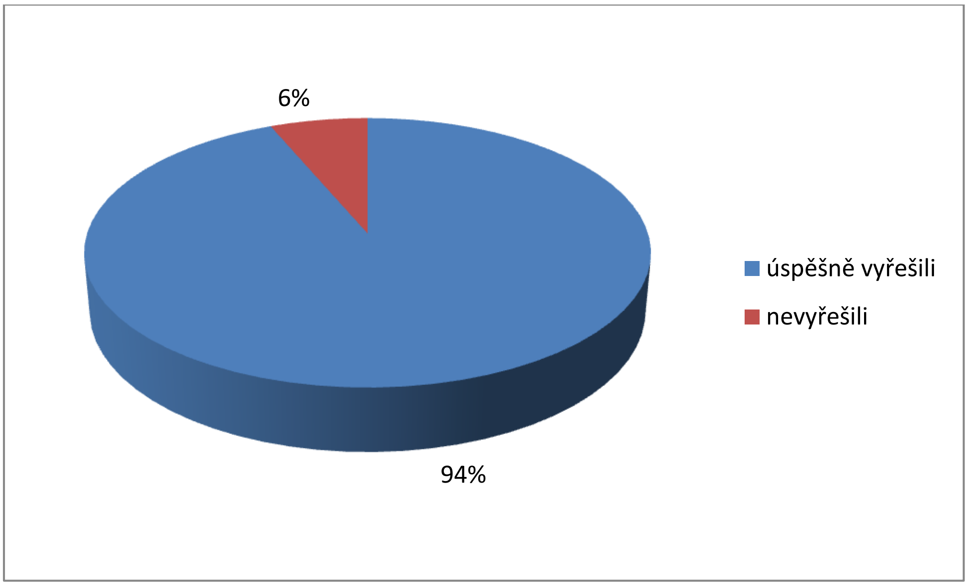

g


h

Řešení:

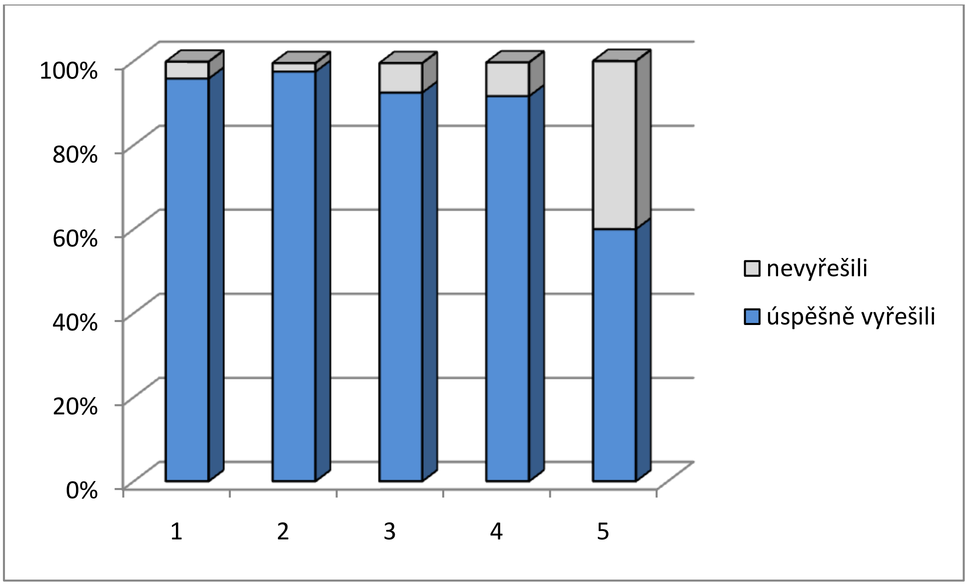
a – ano, b – ne, c – ne, d – ano, e – ano, f – ano, g – ne, h – ne

Příklad byl hodnocen za každou správnou odpověď, takže žáci mohli získat i část bodu.



Graf 13: Úspěšnost žáků při řešení Příkladu 6.

Tento příklad byl zařazen jako motivační, očekávala jsem vysokou úspěšnost od všech žáků. Můj předpoklad byl splněn, což vyplývá z výsledku – průměrně bylo získáno 94 % bodů u všech žáků.

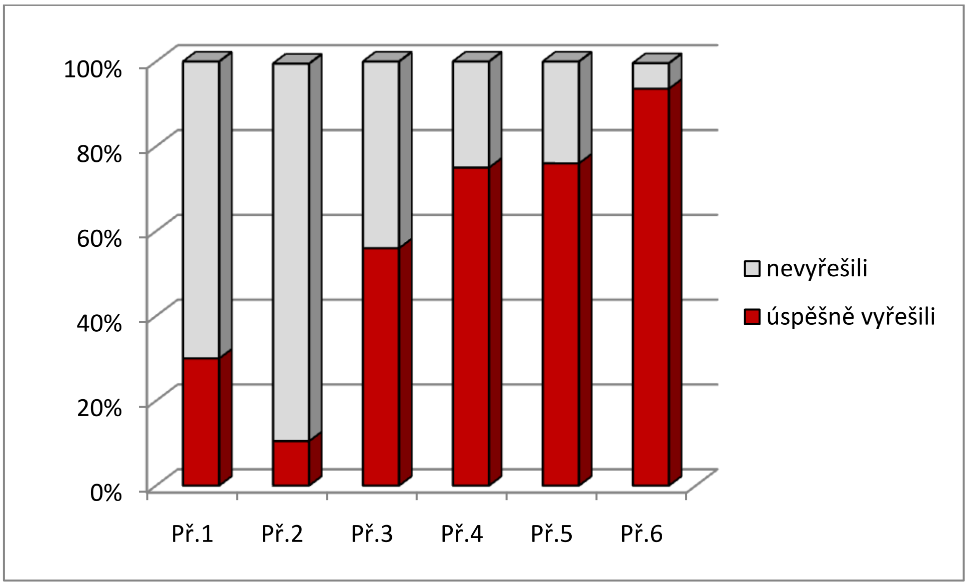


Graf 14: Úspěšnost žáků u příkladu 6 podle poslední známky na vysvědčení

Dá se říct, že tento příklad byl snadný pro všechny žáky. Většina žáků z testovaného vzorku dospěla ke správnému výsledku. Tedy tento příklad by mohl být vhodný, jako matematická rozcvička.

8.4 Výsledky všech příkladů

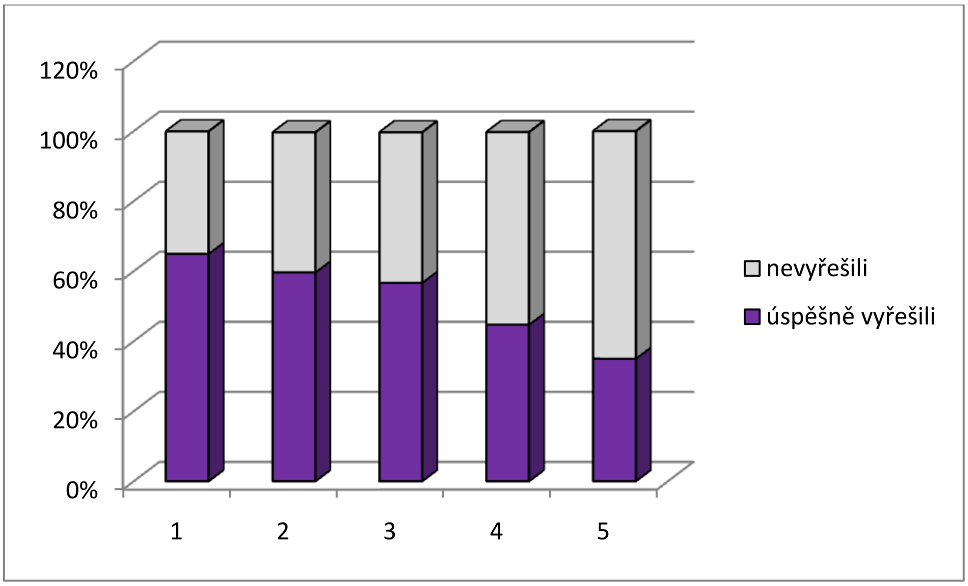
Celková úspěšnost u jednotlivých příkladů.



Graf 15: Porovnání úspěšnosti všech příkladů

Jak vyplývá z grafu, nejnižší úspěšnost byla zjištěna u Příkladu 2, který byl kombinatoricky zaměřen. Nejvyšší úspěšnost potom byla v Příkladě 6, „obrázky jedním tahem“, u kterého žáci mohli postupovat metodou pokusů.

Porovnáním úspěšnosti v prvních třech příkladech, logického a kombinatorického charakteru, s příklady zaměřenými na geometrii a prostorovou představivost, zjistíme, že žáci byli úspěšnější v příkladech geometrických a zaměřených na prostorovou představivost.



Graf 16: Celková úspěšnost žáků podle známek

Průměrná úspěšnost žáků ve všech příkladech postupně klesá s jejich známkou z posledního vysvědčení. Úspěšnost v řešení zadaných úloh tedy pravděpodobně odráží i celkovou úspěšnost žáků během školního roku.

V další části chci zjistit, zda mezi výsledky žáků jsou rozdíly související s jejich známkou z posledního vysvědčení z matematiky. Porovnám výsledky žáků, kteří měli na posledním vysvědčení z matematiky jedničku nebo dvojku s žáky, kteří měli trojku, čtverku nebo pětku. Budu zjišťovat, jestli je mezi nimi statisticky významný rozdíl.

K výpočtu použiji Studentův t-test. „*Studentův t-test je jedním z nejznámějších statistických testů významnosti pro metrická data. Pomocí Studentova t-testu můžeme rozhodnout, zda dva soubory dat, získané měřením ve dvou různých skupinách objektů (např. žáků), mají stejný aritmetický průměr.*“[84]

Nejdříve si stanovím hypotézy:

H_0 – Mezi průměrným počtem bodů získaných žáky v testu není rozdíl.

H_A – Mezi průměrným počtem bodů je rozdíl.

Hladina významnosti – 0,05.

[84] CHRÁSKA, M.: *Metody pedagogického výzkumu*, str. 122

Než vytvoříme tabulku (Tabulka viz Příloha č. 3), vypočítáme průměry obou skupin žáků.

$X_{1i} = 3,737$

$X_{2i} = 3,004$

$$s^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left[\sum \left(x_{1i} - \bar{x}_1 \right)^2 + \sum \left(x_{2i} - \bar{x}_2 \right)^2 \right] = \frac{1}{24 + 26 - 2} \cdot \left[41,85 + 29,71 \right] = 1,49$$

$$s = \sqrt{1,49} = 1,221$$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} = \frac{3,737 - 3,004}{1,221} \cdot \sqrt{\frac{24 \cdot 26}{24 + 26}} = 2,1207$$

$$f = n_1 + n_2 - 2 = 24 + 26 - 2 = 48$$

Protože $t_{0,05}(45) = 2,014$ a pro $t_{0,005}(50) = 2,009$ (viz Tabulka Příloha č. 4) a to je menší než námi vypočítaná hodnota, odmítáme nulovou hypotézu a přijímáme alternativní. Mezi průměrem získaných bodů je tedy významný rozdíl. Můžeme konstatovat, že žáci s lepší známkou z matematiky dosáhli významně lepšího bodového hodnocení než žáci s horší známkou.

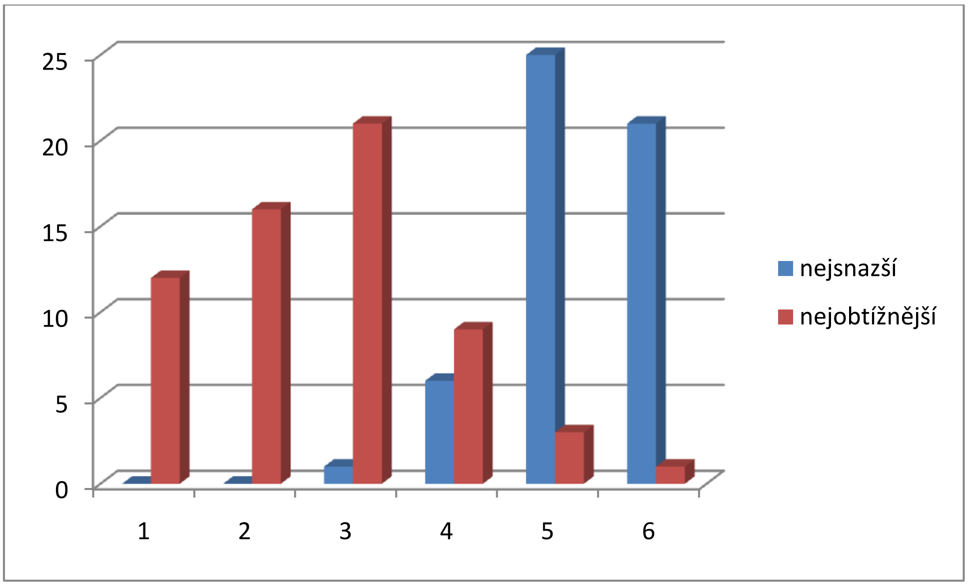
8.5 Hodnocení obtížnosti zadaných úloh žáky

Následující tabulka a graf se týkají hodnocení obtížnosti zadaných příkladů samotnými žáky. Žáci měli vybrat, která úloha byla pro ně nejobtížnější a která nejsnazší. Tři žáci na tyto otázky neodpověděli nebo zaškrtli všechny příklady, tyto odpovědi jsem do výpočtu nezahrnula. Deset žáků zaškrtlo v obou kategoriích více možností, zapojila jsem všechny zaškrtnuté možnosti.

V následující tabulce je uveden počet odpovědí zaškrtnutých žáky.

	Př. 1	Př. 2	Př. 3	Př. 4	Př. 5	Př. 6
Nejsnazší	0	0	1	6	25	21
Nejobtížnější	12	16	21	9	3	1

Tab. 4: Počet zaškrtnutých odpovědí v dotazníku



Obr. 49: Hodnocení obtížnosti úloh žáky

Z grafu je patrné, že za nejsnazší žáci považovali Příklad 5 a následně Příklad 6. Naopak jako nejobtížnější ohodnotili žáci Příklad 3, následně Příklad 2 a Příklad 1. Překvapilo mě, že žáci ohodnotili jako nejobtížnější Příklad 3, ve kterém jejich úspěšnost přesáhla 50 % a ne Příklad 2, který správně vyřešilo pouze 10 % všech žáků. Také u nejsnazšího příkladu neodpovídá vlastní hodnocení žáků jejich nejvyšší úspěšnosti. Nejvíce úspěšní byli žáci v Příkladě 6 (94 %), přesto hodnotili jako nejsnazší Příklad 5 (úspěšnost 76 %).

Závěr

Diplomová práce se zabývá tematickým okruhem Nestandardní aplikační úlohy a problémy. Tyto úlohy mohou nejen rozvíjet u žáků matematické nadání, ale i motivovat žáky, kteří mají s matematikou problémy. Žákům jsou předkládány matematické úlohy a problémy zábavnou formou, žáci řeší úlohy s tématikou z různých oblastí matematiky a také se zabývají řešením úloh a problémů z praktického života.

V práci jsem vycházela z pojetí základního vzdělávání dle RVP ZV a vymezila jsem vzdělávací obsah okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy. V dalších částech jsem vytvořila sbírku úloh, kterou jsem rozdělila podle zaměření na:

- logické a kombinatorické úlohy,
- geometrické úlohy,
- úlohy na rozvoj prostorového myšlení,
- slovní úlohy,
- úlohy zaměřené na aplikaci poznatků a dovedností z jiných vzdělávacích oblastí.

Snažila jsem se vybírat úlohy, které by odpovídaly požadavků RVP ZV tak, aby některé úlohy mohly být použity jako motivační, jiné jako rozvíjející matematické nadání.

V závěrečné části jsem uvedla výsledky průzkumu, ve kterém jsem předložila některé vybrané úlohy žákům devátého ročníku. Z výsledků žáků byla zjištěna vyšší úspěšnost v příkladech zaměřených na prostorovou představivost a geometrii, než v příkladech zaměřených na logiku a kombinatoriku. Dále bylo zjištěno, že výsledky žáků v testu souvisí s jejich poslední známkou z matematiky. Z hodnocení obtížnosti zadaných úloh samotnými žáky vyplynulo, že žáci jako nejobtížnější překvapivě nehodnotili příklad, ve kterém byla jejich úspěšnost nejnižší. Obdobný výsledek byl u nejsnazšího příkladu.

V budoucnu bych ráda někdy podobným výzkumem ověřila schopnosti a dovednosti svých žáků a doplnila svou sbírku o další úlohy vztahující se k tomuto tématu.

Literatura:

1. BLAŽKOVÁ, R.: *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*, [online]. [cit. 2010-03-01] <http://svp.muni.cz/ukazat.php?docId=460>

2. BRANT, J.: *Nestandardní aplikační úlohy a problémy.* [online]. [cit. 2010-03-01] <http://clanky.rvp.cz/clanek/s/Z/253/NESTANDARDNI-APLIKACNI-ULOHY-A-PROBLEMY.html/>

3. EMMERLINGOVÁ, S.: *Můžeme se naučit logicky myslet?* [online]. [cit. 2010-03-20]. Dostupné z: <http://www.energycentrum.cz/clanek/115_muzeme-se-naucit-logicky-myslet>

4. HAVAS, H.: *Trénink inteligence.* Praha: Ikar, 2005. ISBN 80-249-0481-0

5. HOUSKA, J., NEMČÍKOVÁ, K.: *Nestandardní aplikační úlohy a problémy pro 2. stupeň ZŠ a NG.* VÚP [online]. [cit. 2009-12-17]. Dostupné z: <http://clanky.rvp.cz/clanek/s/Z/3002/NETRADICNI-ULOHY-VE-VYUCE-MATEMATIKY.html/>

6. CHRÁSKA, M.: *Metody pedagogického výzkumu.* Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1369-4

7. JEŘÁBEK, J.; TUPÝ, J., aj.: *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání: s přílohou upravující vzdělávání žáků s lehkým mentálním postižením.* Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2005. ISBN 80-87000-02-1.

8. KYSELOVSKÁ, M.: *Kruh a válec ve slovních úlohách.* 2008 [online]. Dostupné z: <http://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/2407/kruh-a-valec-ve-slovnich-ulohach.html/>

9. LANGER, V., KOPECKÝ, M.: *Úvod do počtu pravděpodobnosti a statistiky (sbírka úloh).* Olomouc: Univerzita Palackého, 2005. ISBN 80-244-1032-X

10. LOUKOTA, J.: *Veselá matematika aneb Kouzla, hříčky, hádanky a lamohlavy,* Olomouc: Votobia, 1998. ISBN 80-7198-318-7.

11. MALÁČ, J., KURFÜRST, J.: *Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1981.

12. MÍDA, J.: *Mozaika matematických úloh.* Praha: Prométheus, 1994. ISBN 80-85849-60-7

13. MOLNÁR, J., NOVÁK, B., NAVRÁTILOVÁ, D., CALÁBEK, P.: *Matematický klokan 2004*. [online]. Olomouc: UP Olomouc, 2004. Dostupné z: <http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2004.pdf>

14. ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J.: *Knížka pro učitele ke školním vzdělávacím programům na druhém stupni ZŠ: matematika a její aplikace*, Praha: Prométheus, 2006. ISBN 80-7196-333-X.

15. ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J.: *Pracovní sešit z matematiky: Soubor úloh pro 9. ročník základní školy*. Praha: Prométheus, 2001. ISBN 80-7196-227-9

16. PERELMAN, J., I.: *Zajímavá matematika: matematické povídky a hlavolamy,* Praha: Mladá fronta, 1971

17. PERNÝ, J.: *Tvořivostí k rozvoji prostorové představivosti.* Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2004. ISBN 80-7083-802-7

18. PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., MAREŠ, J.: *Pedagogický slovník.* Praha: Portál, 1998. ISBN 80-7178-252-1

19. PŘÍHONSKÁ, J.: *Rozvoj kombinatorického myšlení* [online]. [cit. 2010-03-20]. Dostupné z: <http://www.upol.cz/fileadmin/user_upload/PdF-katedry/KMT/Seminare/Prihonska.pdf>

20. http://www.msmt.cz/vzdelavani/ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani-verze-2007 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

21. SKITT, C.: *Mensa - IQ trénink pro děti.* Praha: Svojtka & Co., 2003. ISBN 80-7237-730-2

22. ŠPAŇHELOVÁ, L.: *Nestandardní a aplikační úlohy v geometrii.* Brno, 2007, 57s. Diplomová práce na Pedagogické fakultě Masarykovy univerzity v Brně na katedře matematiky. Vedoucí diplomové práce RNDr. Růžena Blažková, CSc.

23. *Útvary v prostoru.* Praha: Výzkumný ústav pedagogický [online]. [cit. 2009-12-17] Dostupné z: *http://old.vuppraha.cz/soubory/Utvary_v_prostoru.pdf*

24. *Wikipedie, Otevřená encyklopedie*. [online]. [cit. 2009-12-17] Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/wiki/R%C3%A1mcov%C3%BD_vzd%C4%9Bl%C3%A1vac%C3%AD_program>

25. *Zábavná matematika,* [online]. [cit. 2010-03-25]. Dostupné z: <*http://www.tady.cz/zabavna.matematika/*>

Seznam příloh

Příloha č. 1 – Test pro žáky

① Kterým číslem nahradíš otazník?

6	8	4	2
9	7	5	7
3	5	8	6
1	4	9	?

②

Ve skříňce je celkem 70 kuliček. Z těch je 20 červených, 20 modrých, 20 žlutých a zbývajících 10 připadá na kuličky bílé a černé. Určete nejmenší počet kuliček, které musíte vytáhnout, aniž byste je viděli, abyste měli:

g) zaručeně 10 kuliček téže barvy,
h) po jedné kuličce červené, modré a žluté,
i) pět kuliček téže barvy.

③ **Šifrovaný dopis**

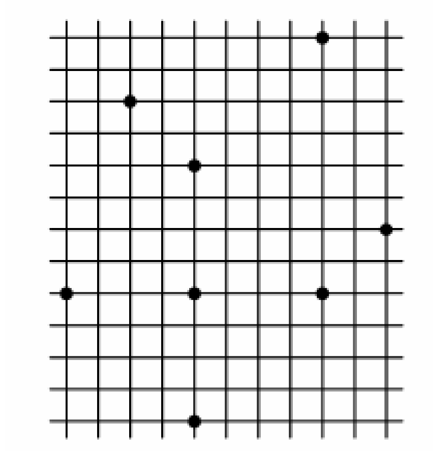
Pavel si psal do zápisníku tajným písmem, které si sám vytvořil. Jeho kamarád Jarda se proto rozhodl, že mu sdělí šifrovaně den, kdy k němu přijde. Napsal mu dopis v tomto znění:

„Přijdu v posledním týdnu v srpnu, který má všechny dny od pondělí do neděle. Den v týdnu si vylušti z přiloženého tiketu Sportky.“ Na tiketu byla přeškrtnuta čísla 1, 5, 11, 16, 20.

Rozšifrujte uvedený dopis.

④

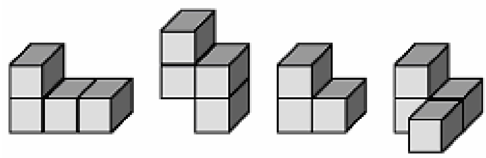
Na obrázku 1 jsou znázorněny všechny vrcholy dvou čtverců. Zjisti obsah S jejich společné části (jeden čtvereček sítě má obsah $25mm^2$).

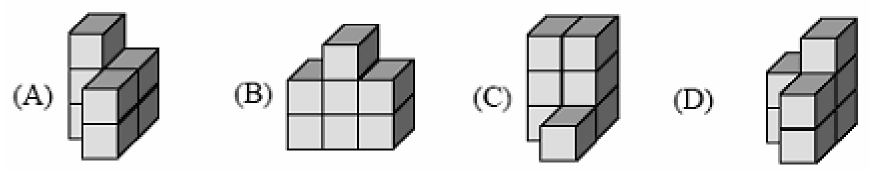


obr. 1

⑤

Vpravo vidíš díly dřevěné stavebnice, které jsou vytvořeny ze 3 nebo 4 malých kostek. Kterou ze staveb na obrázcích (A) až (D) nelze postavit z našich dílů stavebnice?



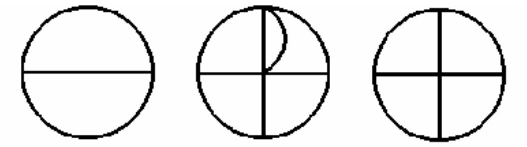


a) lze nelze
b) lze nelze
c) lze nelze
d) lze nelze

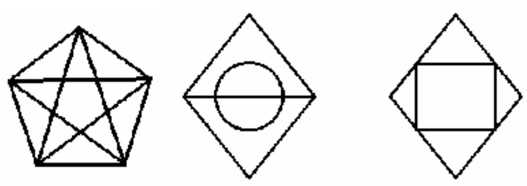
⑥

Pokuste se nakreslit obrázky a, b, c, d, e, f, g, h jedním tahem (bez zvednuti tužky) tak, aby žádný tah nebyl kreslen dvakrát.

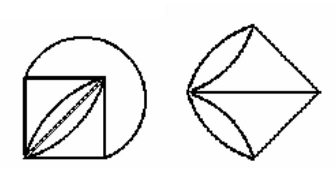
Které z obrázků je možné nakreslit jedním tahem?



a b c



d e f



g h

a) lze nelze
b) lze nelze
c) lze nelze
d) lze nelze
e) lze nelze
f) lze nelze
g) lze nelze
h) lze nelze

Příloha č. 2 - Dotazník

Milí žáci,
nyní máte před sebou dotazník, který se vztahuje k předchozím příkladům.
Prosím vás o jeho pravdivé vyplnění.

Děkuji za spolupráci

Daniela

1) Jaké je tvé pohlaví ?

- ☐ Chlapec
- ☐ Dívka

2) Do které třídy chodíš?

- ☐ Osmá
- ☐ Devátá

3) Jaká byla tvá poslední známka na vysvědčení z matematiky?

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5

4) Který z příkladů byl pro tebe nejsnazší?

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6

5) Který z příkladů byl pro tebe nejobtížnější?

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6

Příloha č. 3 - Tabulka k výpočtu Studentova t-testu

Žáci s jedničkou a dvojkou	x_{1i}	$x_{1i} - \overline{x_1}$	$\left(x_{1i} - \overline{x_1}\right)^2$	Žáci s trojkou, čtverkou nebo pětkou	x_{2i}	$x_{2i} - \overline{x_2}$	$\left(x_{2i} - \overline{x_2}\right)^2$
č. 1	5	1,263	1,595169	č. 1	4,5	1,496	2,238016
č. 2	4	0,263	0,069169	č. 2	4,5	1,496	2,238016
č. 3	4	0,263	0,069169	č. 3	1,9	-1,104	1,218816
č. 4	3,4	-0,337	0,113569	č. 4	1,75	-1,254	1,572516
č. 5	5	1,263	1,595169	č. 5	4,5	1,496	2,238016
č. 6	3,9	0,163	0,026569	č. 6	4,25	1,246	1,552516
č. 7	4	0,263	0,069169	č. 7	2	-1,004	1,008016
č. 8	3	-0,737	0,543169	č. 8	1,75	-1,254	1,572516
č. 9	5,5	1,763	3,108169	č. 9	2,1	-0,904	0,817216
č. 10	4	0,263	0,069169	č. 10	3,5	0,496	0,246016
č. 11	2,9	-0,837	0,700569	č. 11	3	-0,004	0,000016
č. 12	2,15	-1,587	2,518569	č. 12	2,9	-0,104	0,010816
č. 13	5,75	2,013	4,052169	č. 13	2,25	-0,754	0,568516
č. 14	3	-0,737	0,543169	č. 14	2,4	-0,604	0,364816
č. 15	2,5	-1,237	1,530169	č. 15	1,9	-1,104	1,218816
č. 16	1,4	-2,337	5,461569	č. 16	2,5	-0,504	0,254016
č. 17	6	2,263	5,121169	č. 17	2,5	-0,504	0,254016
č. 18	4	0,263	0,069169	č. 18	4,9	1,896	3,594816
č. 19	3,9	0,163	0,026569	č. 19	4,65	1,646	2,709316
č. 20	1,9	-1,837	3,374569	č. 20	2,9	-0,104	0,010816
č. 21	6	2,263	5,121169	č. 21	2,15	-0,854	0,729316
č. 22	4	0,263	0,069169	č. 22	4,5	1,496	2,238016
č. 23	3	-0,737	0,543169	č. 23	4	0,996	0,992016
č. 24	1,4	-2,337	5,461569	č. 24	2,4	-0,604	0,364816
$\sum$	89,7		41,85126	č. 25	2,65	-0,354	0,125316
				č. 26	1,75	-1,254	1,572516
				$\sum$	78,1		29,70962

Příloha č. 4 - Kritické hodnoty Studentova testového kritéria t[85]

Stupně volnosti	Hladina významnosti	
	0,05	0,01
1	12,706	63,657
2	4,303	9,925
3	3,182	5,841
4	2,776	4,604
5	2,571	4,032
6	2,447	3,707
7	2,365	3,499
8	2,306	3,355
9	2,262	3,250
10	2,228	3,169
11	2,201	3,106
12	2,179	3,055
13	2,160	2,012
14	2,145	2,977
15	2,131	2,947
16	2,120	2,921
17	2,110	2,898
18	2,101	2,878
19	2,093	2,861
20	2,086	2,845
21	2,080	2,831
22	2,074	2,819
23	2,069	2,807
24	2,064	2,797
25	2,060	2,787
26	2,056	2,779
27	2,052	2,771
28	2,08	2,763
29	2,045	2,756
30	2,042	2,750
35	2,03	2,724
40	2,021	2,705
45	2,014	2,690
50	2,009	2,679
60	2,000	2,660
70	1,994	2,648
80	1,990	2,639
90	1,987	2,632
100	1,984	2,626
140	1,977	2,611
200	1,972	2,601
400	1,966	2,588
1000	1,962	2,581
∞	1,960	2,576

[85] LANGER, V., KOPECKÝ, M.: *Úvod do počtu pravděpodobnosti a statistiky (sbírka úloh),* str. 63

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam grafů

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Daniela Wagnerová
Katedra:	Matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.
Rok obhajoby:	2010

Název práce:	Nestandardní aplikační úlohy a problémy
Název práce v angličtině:	Non-standard aplication tasks and problems
Anotace:	Diplomová práce se věnuje tematickému okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy. První část se zabývá vymezením vzdělávacího obsahu tohoto okruhu. V další části je vytvořena sbírka úloh. V závěrečné části jsou popsány výsledky průzkumu zaměřeného na úspěšnost žáků při řešení vybraných úloh.
Klíčová slova:	Nestandardní aplikační úlohy a problémy, úlohy
Anotace v angličtině:	The dissertation applies to the thematic sphere – The non-standard aplication tasks and problems. First part occupies with the specification of educational content of the sphere. Collection of the tasks is created in the other part. Results of the survey are described in final part. It´s focused on how successful the pupils are while solving certain problems.
Klíčová slova v angličtině:	Non-standard tasks and problems, exercises
Přílohy vázané v práci:	Příloha č. 1: Test pro žáky Příloha č. 2: Dotazník Příloha č. 3: Tabulka k výpočtu Studentova t-testu Příloha č. 4: Kritické hodnoty Studentova testového kritéria t

Rozsah práce:	89 stran, 4 přílohy
Jazyk práce:	Čeština