



# Výpočet napětí a deformace tenkostěnné tlakové nádoby s plochými dny a experimentální ověření výpočtu.

## Bakalářská práce

*Studijní program:* B2301 – Strojní inženýrství  
*Studijní obor:* 2301R000 – Strojní inženýrství

*Autor práce:* **Josef Prokop**  
*Vedoucí práce:* prof. Ing. Bohdana Marvalová, CSc.



## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Josef Prokop**

Osobní číslo: **S13000161**

Studijní program: **B2301 Strojní inženýrství**

Studijní obor: **Strojní inženýrství**

Název tématu: **Výpočet napětí a deformace tenkostěnné tlakové nádoby s plochými dny a experimentální ověření výpočtu.**

Zadávající katedra: **Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti**

### Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Výpočet napětí a deformace tenkostěnné tlakové nádoby s plochými dny a experimentální ověření výpočtu.

Tenkostěnná tlaková nádoba je součástí vybavení laboratoře KMP. Nádoba byla vyrobena pro výuku experimentálních metod v mechanice. Plášť nádoby je ocelový. Nádoba je naplněna olejem a je vybavena tlakovou pumpou s tlakoměrem. Deformace v některých místech je pro jednoduchost a názornost měřena pomocí tisícinných indikátorových hodinek.

Postup řešení:

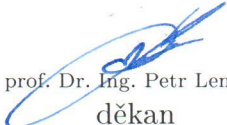
1. Analytický výpočet napětí a deformace nádoby jak v oblasti membránového napětí, tak v blízkosti přechodu do dna, kde vzniká ohyb (tenká ohýbaná válcová skořepina a deska) a výpočet napětí v okolí malých otvorů, kterými je přiváděn olej. Výpočet lze sestavit na základě poznatků získaných v předmětech PP1 a PP2.
2. V experimentální části ověřte výsledky výpočtu změřením deformací nádoby v různých místech jak pomocí nainstalovaného indikátoru, tak pomocí odporových tenzometrů a optické metody digitální stereokorelace, která je ve vybavení laboratoře KMP.

Rozsah grafických prací: **dle potřeby**  
Rozsah pracovní zprávy: **cca 40 stran**  
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**  
Seznam odborné literatury:


- [1] HÖSCHL, C., *Pružnost a pevnost I*, Liberec: VŠST v Liberci, 1992. ISBN 80-7083-087-5.  
[2] HÖSCHL, C., *Pružnost a pevnost II*, Liberec: VŠST v Liberci, 1992. ISBN 80-7083-104-9.  
[3] STŘÍŽ, B. a kol., *Pružnost a pevnost II*, Liberec: VŠST v Liberci, 1980.

Vedoucí bakalářské práce: **prof. Ing. Bohdana Marvalová, CSc.**  
Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

Datum zadání bakalářské práce: **18. listopadu 2015**  
Termín odevzdání bakalářské práce: **18. února 2017**

  
prof. Dr. Ing. Petr Lenfeld  
děkan



  
doc. Ing. Iva Petříková, Ph.D.  
vedoucí katedry

V Liberci dne 1. března 2016

## Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum: 30.6.2016

Podpis: 

## Poděkování

Děkuji prof. Ing. CSc. Bohdaně Marvalové za cenné rady při vedení bakalářské práce. Mé poděkování patří též Ing. Ph.D. Alešovi Lufinkovi za pomoc při tenzometrickém měření tlakové nádoby v laboratořích MKP.

Dále bych chtěl poděkovat svým rodičům za podporu, kterou mi poskytují.

## Abstrakt

Tlakové nádoby jsou nedílnou součástí různých odvětví dnešního průmyslu. Tyto konstrukce musí splňovat vysokou bezpečnost a spolehlivost. Tato bakalářská práce je zaměřena na teoretické a následně experimentální ověření konstrukce tlakové nádoby z hlediska napětí a deformace. Tlaková nádoba byla vyrobena pro potřeby výuky experimentálních metod na Katedře mechaniky pružnosti a pevnosti.

Stanovení napětí a deformací je provedeno:

1. analyticky pomocí základní teorie tenkých skořepin a desek, numerické výpočty jsou provedeny v programu Matlab
2. numerickou simulací pomocí metody konečných prvků v programu Autodesk Simulation Mechanical 2015.
3. tenzometrickým měřením v kritických místech nádoby.

## Klíčová slova

tlaková nádoba, tenká skořepina, tenké desky, napětí, deformace

## Abstract

Pressure vessels are an integral part of the various sectors of the industry today. These construction must meet high safety and reliability. This thesis is focused on theoretical and subsequent experimental validation of the design of the pressure vessel in terms of stress and strain. The pressure vessel was made for teaching experimental methods for the Department of mechanics of elasticity and strength.

Determination of stresses and deformations is done:

1. First analytically using the basic theory of thin shells and numerical calculations are performed in Matlab
2. Numerical simulations using finite element method in Autodesk Simulation Mechanical.
3. First strain gauge in critical areas of the container

## Keywords

pressure vessel, a thin shell, a thin sheet, stress, strain

## Obsah

1	Úvod .....	10
1.1	Napjatost v tenkostěnné tlakové nádobě.....	10
1.2	Napjatost v tenké válcové ohýbané skořepině .....	12
1.3	Napjatost v tenkých deskách.....	14
1.3.1	Napjatost v okolí otvorů tenkých desek .....	16
2	Parametry tlakové nádoby .....	18
3	Napjatost v okolí horního víka .....	21
3.1	Výpočet napětí v oblasti horního víka .....	21
3.2	Napjatost a deformace horního dna .....	22
3.2.1	Napjatost v okolí otvoru pro manometr a uprostřed desky .....	24
3.3	Zesílený lem (1) pod horním okrajem nádoby.....	25
3.4	Střední část tlakové nádoby (2) .....	27
3.5	Okrajové podmínky pro horní okraj .....	28
3.6	Popis skriptu z Matlabu .....	30
3.7	Grafy z Matlabu .....	31
4	Napjatost v okolí dolního dna nádoby.....	37
4.1	Výpočet napětí v oblasti dolního dna .....	37
4.2	Zesílený lem (3) u vetknutí.....	38
4.3	Střední část tlakové nádoby (4) .....	40
4.4	Okrajové podmínky pro dolní okraj: .....	41
4.5	Grafy z Matlabu .....	43
5	Pevnostní analýza v programu Autodesk Simulation Mechanical 2015 .....	46
5.1	Výsledky z MKP.....	47
6	Experimentální měření .....	50
6.1	Tenzometrické měření .....	52
6.2	Grafy tenzometrů .....	52

6.3	Porovnání výsledků z Matlabu a tenzometrie.....	54
7	Závěr.....	60

## Seznam grafů

Graf 3.1:	Moment u horního okraje.....	31
Graf 3.2:	Průhyb u horního okraje.....	32
Graf 3.3:	Napětí u horního okraje .....	33
Graf 3.4:	Průhyb desky.....	34
Graf 3.5:	Momenty v desce .....	35
Graf 3.6:	Napětí v desce .....	36
Graf 4.1:	Průhyb u vetknutí.....	43
Graf 4.2:	Moment u vetknutí.....	44
Graf 4.3:	Napětí u vetknutí.....	45
Graf 6.1:	Tenzometr 1 z programu DEWEsoft 7.0 .....	52
Graf 6.2:	Tenzometr 2 z programu DEWEsoft 7.0 .....	53
Graf 6.3:	Tenzometr 3 z programu DEWEsoft 7.0 .....	53
Graf 6.4:	Zatěžování a odlehčování nádoby (tenzometr 1) v závislosti na tlaku ..	58
Graf 6.5:	Zatěžování a odlehčování nádoby (tenzometr 2) v závislosti na tlaku ..	58
Graf 6.6:	Zatěžování a odlehčování nádoby (tenzometr 3) v závislosti na tlaku ..	59

## Seznam obrázků

Obr. 1.1:	Schéma momentové teorie .....	11
Obr. 1.2:	Deska (dno) zatížená vnitřním tlakem .....	15
Obr. 1.3:	Koncentrace napětí v okolí otvoru .....	16
Obr. 2.1:	Tlaková nádoba .....	18
Obr. 2.2:	Schéma tlakové nádoby .....	19
Obr. 3.1:	Vnitřní účinky vrchní části.....	21
Obr. 3.2:	Napětí v tloušťce stěny.....	26
Obr. 4.1:	Vnitřní účinky u vetknutí .....	37



Obr. 5.1: Detail zasít'ování tlakové nádoby.....	46
Obr. 6.1: Schéma odporového tenzometru .....	50
Obr. 6.2: Tenzometr na tlakové nádobě .....	50
Obr. 6.3: Umístění tenzometrů .....	51

## Seznam tabulek

Tabulka 3.1: Maximální moment u horního okraje.....	31
Tabulka 3.2: Maximální průhyb horního okraje .....	32
Tabulka 3.3: Minimální průhyb horního okraje .....	32
Tabulka 3.4: Maximální napětí u horního okraje .....	33
Tabulka 3.5: Ustálená hodnota napětí u horního okraje.....	33
Tabulka 3.6: Maximální průhyb desky.....	34
Tabulka 3.7: Minimální průhyb desky .....	34
Tabulka 3.8: Maximální moment desky .....	35
Tabulka 3.9: Minimální moment desky .....	35
Tabulka 3.10: Maximální napětí v desce.....	36
Tabulka 3.11: Minimální napětí v desce .....	36
Tabulka 4.1: Maximální průhyb u vetknutí.....	43
Tabulka 4.2: Maximální moment u vetknutí .....	44
Tabulka 4.3: Maximální napětí u vetknutí .....	45
Tabulka 4.4: Ustálená hodnota napětí u vetknutí .....	45
Tabulka 6.1: Maximální hodnoty naměřené tenzometry.....	54
Tabulka 6.2: Hodnoty z Matlabu.....	55
Tabulka 6.3: Porovnání manometrického a skutečného tlaku.....	56
Tabulka 6.4: Hodnoty poměrných prodloužení tenzometrů a skutečného tlaku...	57
Tabulka 7.1: Srovnání výsledků z horní části nádoby.....	61
Tabulka 7.2: Srovnání výsledků ze spodní části nádoby.....	61

## Seznam použitých symbolů

Symbol	Význam	Jednotka
$\mu$	Poissonovo číslo	[-]
$E$	Youngův modul pružnosti v tahu	[Pa]
$\beta$	Zahrnuje vliv rozměrů a materiálu	[m <sup>-1</sup> ]
$p$	Tlak v nádobě	[Pa]
$\sigma_{kt}$	Napětí na mezi kluzu	[Pa]
$\sigma_x$	Osové napětí	[Pa]
$\sigma_t$	Obvodové (tečné) napětí	[Pa]
$\sigma_r$	Radiální napětí	[Pa]
$\sigma_a$	Axiální napětí	[Pa]
$\sigma_{ao}$	Axiální ohybové napětí	[Pa]
$\sigma_{am}$	Axiální membránové napětí	[Pa]
$\sigma_{to}$	Tečné ohybové napětí	[Pa]
$\sigma_{tm}$	Tečné membránové napětí	[Pa]
$\sigma_{ekv}$	Ekvivalentní napětí	[Pa]
$\varepsilon_x$	Osové poměrné prodloužení	[-]
$\varepsilon_t$	Obvodové (tečné) poměrné prodloužení	[-]
$M_r$	Radiální moment	[N]
$M_t$	Tečný moment	[N]
$M_x$	Osový moment	[N]
$\vartheta$	Úhel slonu	[rad]
$\vartheta_{part.}$	Partikulární řešení úhlu sklonu	[rad]
$w$	Průhyb (deformace)	[m]
$w_{part.}$	Partikulární řešení průhybu	[m]
$D$	Tuhost	[Nm]
$T$	Osová síla	[Nm <sup>-1</sup> ]
$Q$	Příčná síla	[Nm <sup>-1</sup> ]
$K_t$	Součinitel koncentrace napětí	[-]
$\sigma_{ekvibi.}$	Ekvibiální napětí	[Pa]

# 1 Úvod

V části 1 je úvod do napjatosti tenkostěnných tlakových nádob, tenkostěnné válcové skořepiny a tenkých kruhových desek. V 2. kapitole jsou popsány parametry tlakové nádoby, její konstrukce a rozměry. V části 3 a 4 je analyticko-numerické řešení celé nádoby, nejprve v okolí horního víka a poté výpočet v okolí dolního dna. Následuje kapitola 5, kde je provedena pevnostní analýza pomocí metody konečných prvků. Výsledky analýzy jsou znázorněny v grafech kapitoly 6. A nakonec v kapitole 7 je výpočet experimentálně ověřen v laboratořích KMP.

## 1.1 Napjatost v tenkostěnné tlakové nádobě

Návrhy tlakových nádob jsou ovlivněny řadou faktorů jako například tvarem nádoby, typem uložení, prostředím, v němž je provozována aj.

Tlakové nádoby jsou nejvíce namáhány u okrajů, kde je válcová skořepina napojena na dno a právě tvar dna ovlivňuje velikost namáhání. Ideální je dno ve tvaru polokoule. V tom případě dno nejméně ovlivňuje skořepinu. Tento tvar se většinou nepoužívá, například z důvodu využití maximálního objemu v zástavbovém prostoru. Naopak nejméně ideální jsou rovná dna, kde je momentový efekt nejvíce znatelný. Rovné dno prakticky neumožňuje radiální roztažení. Působením tlakového zatížení se deska prohne a značně ovlivňuje okraj válcové části ohybovým momentem. To má za následek průhyb skořepiny dovnitř nádoby a vznik špiček napětí, deformace a ohybového momentu. Nejčastějším použitím jsou dna sférická ve tvaru kulového vrchlíku, je to takový kompromis v optimalizaci, neboli mezi kulovým a rovným dnem. Tento tvar je znázorněn na obr. 1.1.

Napětí v tenkostěnném válcovém plášti tlakové nádoby jsou v dostatečné vzdálenosti od obou čel nádoby dána vztahy pro tzv. membránovou napjatost (Stříž a kol., 1986, s. 79):

Působí zde osové membránové napětí  $\sigma_{xm} = \frac{p \cdot R}{2 \cdot h}$  (1.1)

a obvodové (tečné) membránové napětí  $\sigma_{tm} = \frac{p \cdot R}{h}$ . (1.2)

V okolí čel je však v tlakové nádobě komplikovaná napjatost, vzniká zde navíc vnitřní ohybový moment a ohybové napětí, které může dosahovat vysokých hodnot. Obecně lze takovou nádobu rozdělit na tři díly (viz obr. 1.1). V okolí čel použijeme k výpočtu napjatosti momentovou teorii tenkých skořepin a ve vzdálenosti od okraje větší, než  $2,5 \cdot \sqrt{Rh}$  můžeme napětí v tenkostěnné skořepině určit z bezmomentové teorie tenkostěnných nádob.



**Obr. 1.1:** Schéma momentové teorie

Z podrobnějšího rozboru složitých deformací v okolí dna a různých dalších změn tvaru či průřezu bylo zjištěno, že vliv těchto změn zasahuje přibližně do vzdálenosti:

$$l_0 = 2,5\sqrt{Rh}, \quad (1.3)$$

kde  $R$  je poloměr a  $h$  je tloušťka skořepiny.

Nádoba, která je předmětem této práce má plochá dna. V dolní části je nádoba vetknutá, zde je i maximální moment, ovšem v horní části jsou tlustší skořepina a také část tenčí skořepiny ovlivněny rovným dnem. Je zřejmé, že ohybový moment tak bude nabývat vyšších hodnot než u vetknutí.

## 1.2 Napjatost v tenké válcové ohýbané skořepině

V tenkostěnných válcových skořepinách zanedbáváme vliv radiálního napětí, proto je zde pouze dvouosá napjatost a platí tedy Hookeův zákon ve tvaru:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_t),$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_t + \mu\varepsilon_x),$$

kde  $\sigma_x$  a  $\sigma_t$  jsou osová a obvodová (tečné) napětí.

V příčném řezu také vzniká smykové napětí  $\tau_{xz}$ , které vzhledem k velikosti napětí  $\sigma_x$  a  $\sigma_t$  zanedbáváme.

V tenké válcové skořepině vzniká jednotkový vnitřní osový a obvodový ohybový moment  $M_x, M_t$  a jednotková příčná síla  $Q$  (tyto účinky jsou rozloženy na jednotku délky). Výpočet těchto sil je staticky neurčitá úloha. Z rozboru přetvoření skořepiny a z podmínek rovnováhy byla sestavena diferenciální rovnice čtvrtého řádu pro průhybu skořepiny:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = -\frac{\nu T_x}{DR} + \frac{p(x)}{D}, \quad (1.4)$$

kde  $T_x$  je osová síla, zatěžující tlak  $p(x)$ , tuhost skořepiny:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (1.5)$$

a  $\beta$  zahrnuje geometrické a materiálové vlivy:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2h^2}} \quad (1.6)$$

Řešením této diferenciální rovnice je funkce průhybu:

$$w(x) = e^{-\beta x} (A_1 \sin \beta x + A_2 \cos \beta x) + e^{\beta x} (A_3 \sin \beta x - A_4 \cos \beta x) + w_{part.}(x), \quad (1.7)$$

kde  $A_1, A_2, A_3, A_4$  jsou integrační konstanty, které určíme z okrajových podmínek a  $w_{part.}$  je partikulární integrál rovnice.

Pokud je skořepina krátká, tj. když je její délka menší než  $l_0$  daná rovnicí (1.3), pak je nutné v rovnici (1.7) podržet všechny členy a určit integrační konstanty ze 4 okrajových podmínek. Pokud jde o dlouhou skořepinu (její délka je větší než  $l_0$ ), pak jsou konstanty  $A_3 = A_4 = 0$ .

Okrajové podmínky se mohou týkat průhybu  $w(x)$  a sklonu  $\vartheta = \frac{dw(x)}{dx}$  na okrajích skořepiny, nebo osového momentu  $M_x$  a příčné síly  $Q$  na okraji. Tyto síly závisí na průhybu skořepiny podle vztahů:

$$M_x = D \frac{d^2 w(x)}{dx^3}, \quad (1.8)$$

$$Q = D \frac{d^3 w(x)}{dx^3}, \quad (1.9)$$

$$M_t = \mu M_x. \quad (1.10)$$

Na základě vypočtené funkce průhybu  $w(x)$  a vztahů (1.8), (1.9) a (1.10) můžeme stanovit axiální a tečná ohybová napětí v plášti skořepiny:

$$\sigma_{ao} = \pm \frac{6M_x}{h^2}, \quad (1.11)$$

$$\sigma_{to} = \pm \frac{6M_t}{h^2}. \quad (1.12)$$

### 1.3 Napjatost v tenkých deskách

Tenké desky se vyznačují tím, že mají průměr o hodně větší než tloušťku ( $d \gg h$ ), dále budeme předpokládat, že průhyb bude menší než tloušťka ( $w \ll h$ ). Zatížení osově souměrné desky může být silové (jednotková síla  $F[N/m]$ ), momentové (jednotkový moment  $M[Nm/m]$ ) a zatížením spojitě rozloženým ( $q[N/m^2]$ ). V těchto deskách je tzv. střední rovina ve které je  $\sigma_z = 0$ , proto je zde dvouosá napjatost, ve které působí hlavní napětí  $\sigma_r$  a  $\sigma_t$ . Napjatost desky zjistíme z vnitřních sil a okrajových podmínek. Jelikož je napětí závislé na tloušťce tak maximální hodnoty vznikají na povrchu desky.

Radiální a tečný moment ( $M_r$  a  $M_t$ ) získáme integrací radiálního a tečného napětí po tloušťce desky [Stříž a kol., 1986, s. 52 – 53]. Po úpravě dostáváme vztahy:

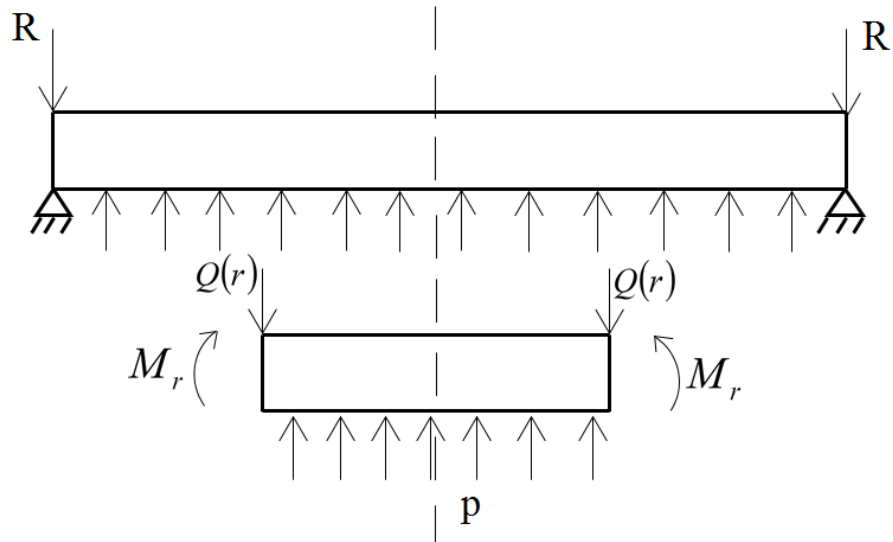
$$M_r = D \cdot \left[ \frac{d\vartheta}{dr} + \mu \cdot \frac{\vartheta}{r} \right], \quad (1.13)$$

$$M_t = D \cdot \left[ \frac{\vartheta}{r} + \mu \cdot \frac{d\vartheta}{dr} \right], \quad (1.14)$$

kde  $\vartheta$  je sklon a  $D$  je tuhost desky:

$$D = \frac{E \cdot h_d^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}. \quad (1.15)$$

Příčnou sílu  $Q$  bychom získali z integrace smykové síly  $\tau_{rz}$  po tloušťce desky, ale  $\tau_{rz}$  je ve srovnání s  $\sigma_r$  a  $\sigma_t$  zanedbáváme. Proto příčnou sílu určíme metodou myšleného řezu (viz obr. 1.2).



**Obr. 1.2:** Deska (dno) zatížená vnitřním tlakem

Rovnice rovnováhy ve svislém směru (viz obr. 1.2):

$$\begin{aligned}
 -Q(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r &= \pi \cdot r^2 \cdot p \\
 Q(r) &= -\frac{1}{2} pr
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

Dosazením momentů do okrajových podmínek [Stříž a kol., 1986, s. 53 – 55] získáme diferenciální rovnici druhého řádu pro úhel sklonu:

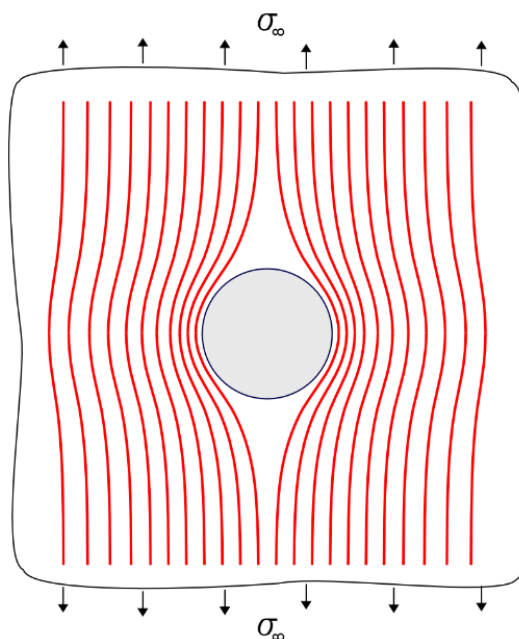
$$\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r^2} = -\frac{Q(r)}{D}.
 \tag{1.17}$$



### 1.3.1 Napjatost v okolí otvorů tenkých desek

Napjatost v okolí otvorů vychází z Kirschovy úlohy [*Stress Concentrations at Holes*, McGinty, ©2004].

Na obr. 1.3 je vidět koncentrace napětí v okolí otvoru. Červené křivky naznačují, jak se napětí koncentruje (analogie s prouděním tekutiny). Čím větší a delší je otvor tím víc se musí červené křivky odklánět a proto vznikne i větší koncentrace napětí.



**Obr. 1.3:** Koncentrace napětí v okolí otvoru

Při zatížení kruhové desky se největší napětí koncentruje okolo otvoru. Působí zde tzv. obručová napjatost, kde poloměr otvoru je stejný jako zkoumaný rádius. Pro obručovou napjatost při zatížení desky v jednom osovém směru jsou radiální a smyková napětí na poloměru otvoru rovny nule. Obvodové (tečné) napětí má hodnotu:

$$\sigma_t = \sigma(1 - 2 \cos 2 \theta),$$

kde  $\sigma$  je zatěžující napětí a  $\theta$  je úhel zkoumaného elementu. Kolikrát je napětí v desce s otvorem větší než bez otvoru, udává součinitel koncentrace napětí  $K_t$ . Je to poměr maximálního a jmenovitého napětí v desce.

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{jmen}} \quad (1.18)$$

Z toho plyne, že je součinitel bezrozměrná veličina. Pro jednoosou napjatost je součinitel koncentrace  $K_t = 3$ . Maximální napětí určíme ze vztahu (1.18):

$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_{jmen}. \quad (1.19)$$

V případě osového zatížení dosadíme za  $\sigma_{jmen}$  obvodové napětí.

Při zatížení desky kruhovým ohybovým momentem tzn., že je napětí kolem celého otvoru. Vzniká tak dvouosá napjatost, pro kterou platí  $K_t = 2$ . Za  $\sigma_{jmen}$  dosadíme hodnotu ekvibiaxiálního napětí:

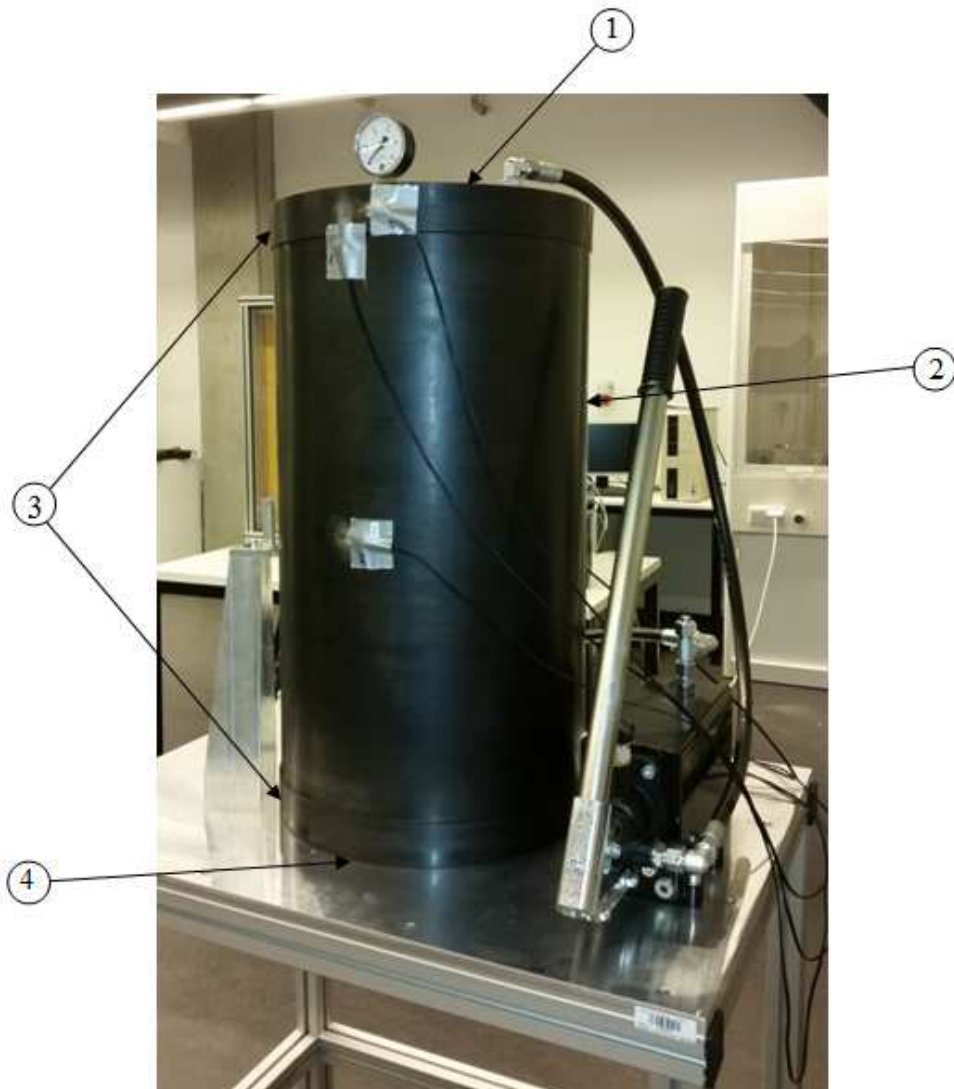
$$\sigma_{ekvibi.} = 6 \frac{M_r}{h_d^2} = 6 \frac{M_t}{h_d^2} \quad (1.20)$$

kde  $M_r$  a  $M_t$  jsou radiální a tečný moment v desce,  $h_d$  je tloušťka desky.

## 2 Parametry tlakové nádoby

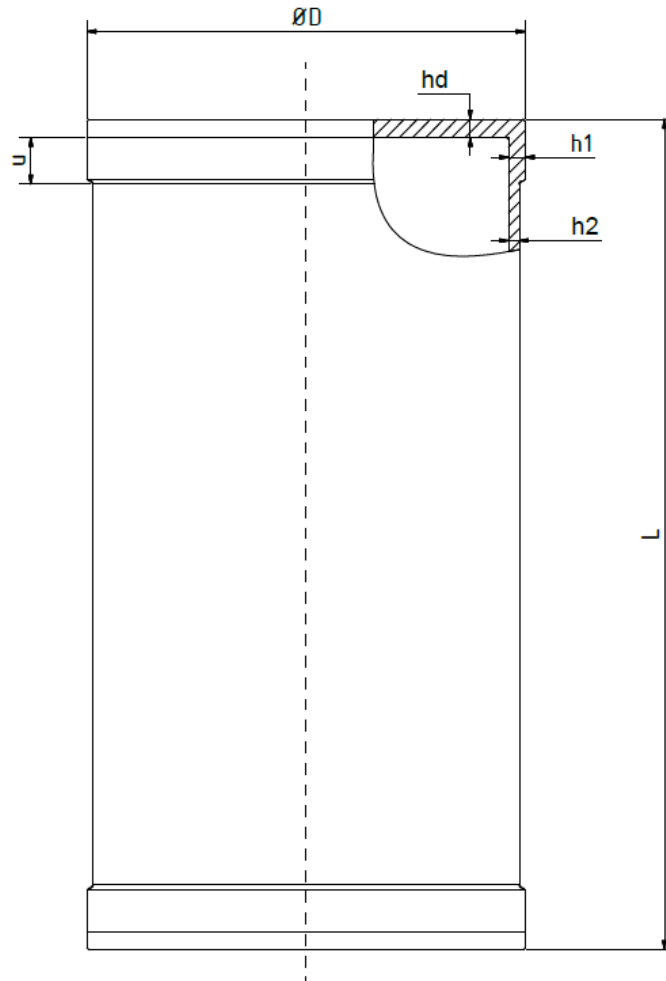
Celá sestava se skládá z hliníkového podstavce (stolu), tisícínového číselníkového úchylkoměru, manometru, tlakových hadic, šroubení, jednočinné ruční pumpy a tlakové nádoby, jejíž hlavní části jsou popsány níže (viz obr. 2.1).

1. horního dno s otvory pro tlakové hadice
2. dlouhá válcová skořepina
3. zesílené lemy na koncích
4. spodního dno, které je přišroubované k tlusté desce podstavce



**Obr. 2.1:** Tlaková nádoba

Tlaková nádoba má tenkostěnnou válcovou část vysoustruženou z bezešvé trubky z oceli 11 353.1. Napětí na mezi kluzu:  $\sigma_{kt} = 240\text{MPa}$ , Poissonovo číslo pro ocel:  $\mu = 0,3$  a modul pružnosti pro ocel:  $E = 2 \cdot 10^5 \text{MPa}$ .



**Obr. 2.2:** Schéma tlakové nádoby

tloušťka zesíleného lemu	$h1 = 5\text{mm}$
tloušťka dlouhé válcové skořepiny	$h2 = 2,5\text{mm}$
délka lemu	$u = 37,5\text{mm}$
tloušťka desky	$hd = 15\text{mm}$
střední průměr	$\varnothing D = 368\text{mm} \Rightarrow R = 184\text{mm}$
celková délka tlakové nádoby	$L = 706\text{mm}$

Tenkostěnnost tlakové nádoby se určuje z poměru poloměru a tloušťky stěny  $\frac{R}{h} > 10$ . Pro zesílený lem ( $h_1 = 5\text{mm}$ ) je poměr  $184/5 = 37$  a pro střední část nádoby ( $h_2 = 2,5\text{mm}$ ) je poměr  $184/2,5 = 74$ . Z výsledků plyne, že obě skořepiny můžeme považovat za tenkostěnné.

Tlaková nádoba má plochá dna. Spodní dno je pevně přišroubované k tlusté desce stolu a tedy lze přibližně považovat nádobu za vetknutou na spodním konci. Vrchní dno je po obvodu přivařeno k plášti tlakové nádoby a lze ho považovat za tenkou rotační desku spojitě zatíženou vnitřním tlakem. Válcová část se skládá z jedné dlouhé a dvou krátkých skořepin. Skošepina je považována za dlouhou, je-li splněna podmínka:

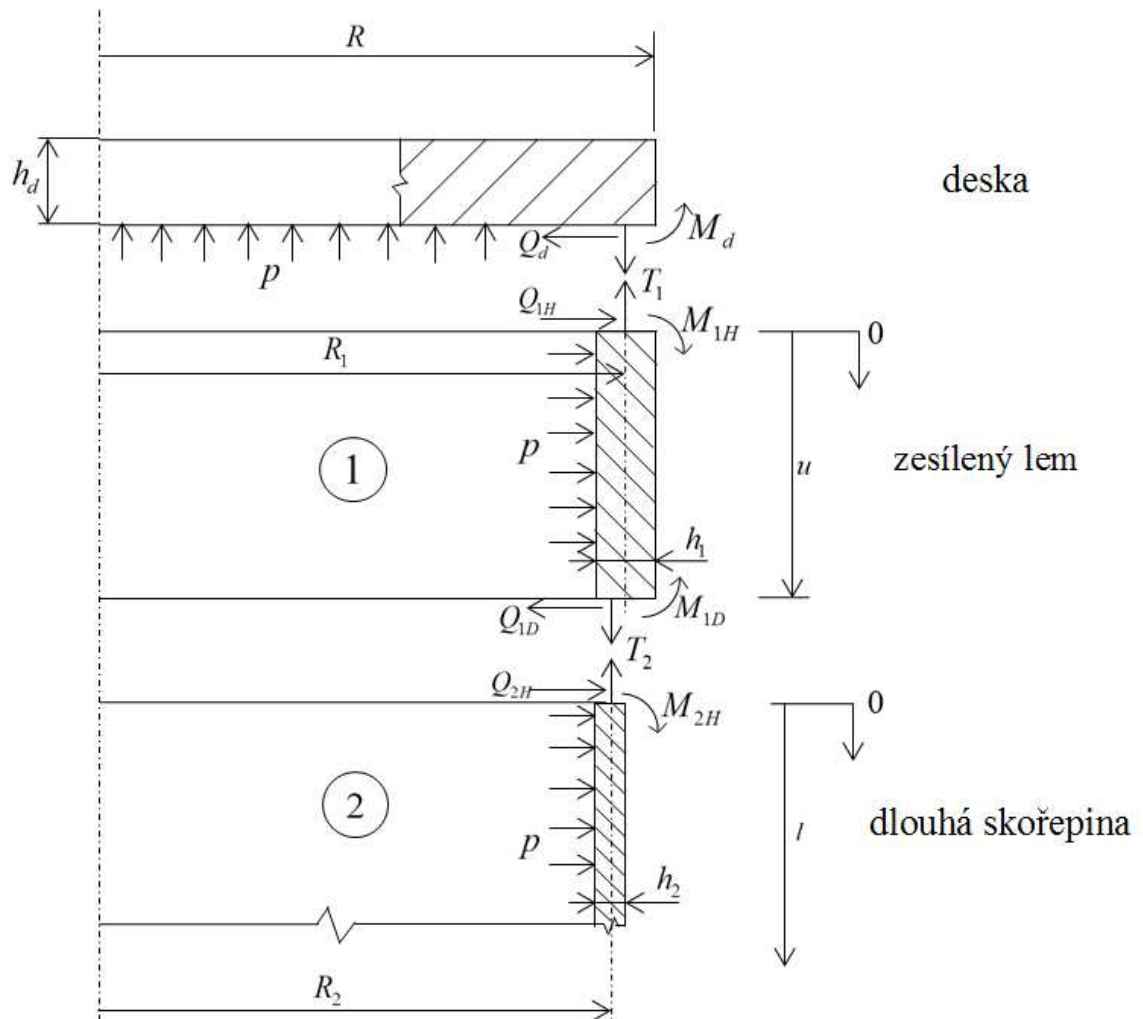
$$l > l_0, \text{ kde } l_0 = 2,5\sqrt{Rh}. \quad (2.1)$$

Střední část nádoby  $l_2 = 601\text{mm}$ ,  $R = 184\text{mm}$ ,  $h_2 = 2,5\text{mm}$ ,  $l_0 = 53,6\text{mm}$  můžeme tedy považovat za dlouhou.

Analogicky pro zesílený lem s délkou  $l_1 = 37,5\text{mm}$  je délka  $l_0 = 75,8\text{mm}$ , z toho plyne, že skořepinu musíme považovat za krátkou.

### 3 Napjatost v okolí horního víka

#### 3.1 Výpočet napětí v oblasti horního víka



Obr. 3.1: Vnitřní účinky vrchní části

## 3.2 Napjatost a deformace horního dna

Dno můžeme považovat za tenkou ohýbanou desku spojitě zatíženou tlakem. Dále předpokládáme, že dochází pouze k deformaci ohybem, roztažení do radiálního směru zanedbáváme.

Řešením diferenciální rovnice (1.17) je funkce sklonu desky:

$$\vartheta(r) = C_1 \cdot r + C_2 \cdot \frac{1}{r} + \vartheta_p(r), \quad (3.1)$$

kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou integrační konstanty, které budou určeny z okrajových podmínek desky, partikulární řešení  $\vartheta_p(r)$  závisí na tvaru funkce  $Q(r)$  ze vztahu (1.16).

Partikulární řešení získáme dosazením rovnice (1.16) do pravé strany rovnice (1.17). Po úpravách je:

$$\vartheta_p(r) = \frac{1}{16} \frac{pr^3}{D_d}, \quad (3.2)$$

kde  $D_d$  je tuhost desky a  $p$  je zatěžující tlak.

Dosadíme-li partikulární řešení (3.2) do funkce (3.1), získáme:

$$\vartheta(r) = C_1 \cdot r + C_2 \cdot \frac{1}{r} + \frac{1}{16} \frac{pr^3}{D_d}$$

konstantu  $C_2$  položíme rovno nule, protože platí  $\vartheta_{(0)} = 0$ . Proto je sklon desky:

$$\vartheta(r) = C_1 \cdot r + \frac{1}{16} \frac{pr^3}{D_d} \quad (3.3)$$

Vztah (3.3) je základní rovnicí pro výpočet horního dna tlakové nádoby. Pomocí této funkce určíme radiální a tečný moment, průhyb a z momentů následně radiální a tečné napětí.

Dosazením funkce (3.3) do vztahů (1.13) a (1.14) dostaneme rovnice pro výpočet radiálního ( $M_r$ ) a tečného ( $M_t$ ) momentu desky:

$$M_r = D_d \cdot \left[ C_1(1 + \mu) + \frac{3 + \mu}{16D_d} pr^2 \right],$$

$$M_t = D_d \cdot \left[ C_1(1 + \mu) - \frac{3\mu + 1}{16D_d} pr^2 \right].$$

Radiální napětí: 
$$\sigma_r = \frac{12M_r}{h_d^3} z,$$

tečné napětí: 
$$\sigma_t = \frac{12M_t}{h_d^3} z,$$

kde  $z$  je souřadnice horní a dolní hrany desky.

Maximální napětí je na  $z = \pm \frac{h_d}{2}$ :

$$\sigma_r = \pm \frac{6M_r}{h_d^2},$$

$$\sigma_t = \pm \frac{6M_t}{h_d^2}.$$

Ekvivalentní napětí v desce podle HMH:

$$\sigma_{ekv.} = \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_r^2 - \sigma_t \sigma_r}$$

Diferenciální rovnice průhybu desky je  $\frac{dw}{dr} = -\vartheta(r)$ . Po integraci sklonu dostaneme průhyb rovného dna tlakové nádoby:



$$w_d = -\int \vartheta dr$$

$$\int \vartheta dr = -\int C_1 r dr - \int \frac{1}{16} \frac{P}{D_d} r^3 dr$$

$$w_d = -\frac{1}{2} C_1 r^2 - \frac{1}{64} \frac{P}{D_d} r^4 + C_3,$$

kde  $C_1$  a  $C_3$  jsou integrační konstanty.

### 3.2.1 Napjatost v okolí otvoru pro manometr a uprostřed desky

V horním víku je dvouosá napjatost. Ve středu desky je stejný radiální i obvodový moment a tedy tam jsou stejná obvodová i radiální napětí (viz graf 3.5 a 3.6).

Průměr otvoru ve středu desky je přibližně 20 mm. Z grafu 6.3 je vidět, že oba momenty mají ve vzdálenosti 10 mm přibližně hodnotu 8980 Nm. Po dosazení do vzta-  
hu 1.20 dostaneme, že  $\sigma_{ekvibi.} = 240 \text{ MPa}$ . Maximální napětí je podle součinitele kon-  
centrace napětí dvakrát větší než ekvibiaxiální, tedy po dosazení do 1.19:

$$\sigma_{\max} = 480 \text{ MPa}$$

V otvoru pro manometr můžeme předpokládat, že obvodové napětí je přibližně dvakrát větší než kdyby tam otvor nebyl [*Stress Concentrations at Holes*, McGinty, ©2004].

### 3.3 Zesílený lem (1) pod horním okrajem nádoby

Tento zesílený lem pod vrchním dnem tlakové nádoby můžeme dle vztahu (2.1) považovat za krátkou tenkou skořepinu. Pro výpočet průhybu použijeme vztah (1.7). Budeme-li dodržovat indexaci jednotlivých částí podle obrázku 3.1. Potom bude průhyb pro krátkou skořepinu:

$$w_1(x) = e^{-\beta_1 x} (A_1 \sin \beta_1 x + A_2 \cos \beta_1 x) + e^{\beta_1 x} (A_3 \sin \beta_1 x - A_4 \cos \beta_1 x) + w_{part.1}(x),$$

kde,

$$\beta_1 = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R_1^2 h_1^2}},$$

dále tloušťka stěny skořepiny lemu  $h_1$  a  $w_{part.1}(x)$  je partikulární řešení, pro které platí:

$$w_{part.1}(x) = \frac{1}{4\beta_1^4} \left( -\frac{\mu T_1}{D_1 R_1} + \frac{p}{D_1} \right).$$

tuhost skořepiny:

$$D_1 = \frac{E h_1^3}{12(1-\mu^2)},$$

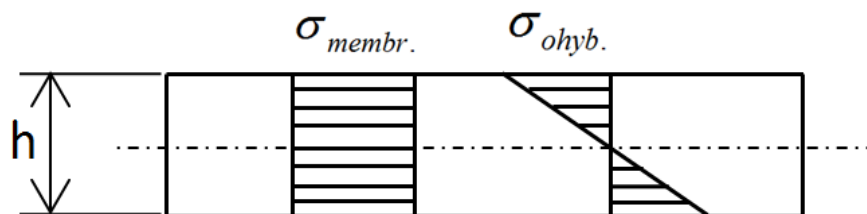
$p$  je tlak uvnitř nádoby,  $R_1$  je střední poloměr skořepiny a  $T_1$  je osová síla, která vychází z rovnice rovnováhy. V jednom směru působí tlak  $p$  na kruhové ploše o poloměru  $R_1$  a v druhém směru působí po obvodu kružnice o poloměru  $R_1$  osová síla na jednotku délky  $T_1$ .

$$2 \pi R_1 T_1 = \pi R_1^2 p \quad (3.4)$$

z toho plyne, že:

$$T_1 = \frac{p R_1}{2}.$$

V plášti skořepiny se sčítají membránová a ohybová napětí (viz obr. 3.2).



**Obr. 3.2:** Napětí v tloušťce stěny

V axiálním směru to tedy bude součet axiálního (ohybového) a axiálního (membránového) napětí, tedy:

$$\sigma_{al} = \sigma_{ao} + \sigma_{am},$$

obvodové napětí je součet obvodového ohybového a membránového:

$$\sigma_{t1} = \sigma_{to} + \sigma_{tm},$$

kde membránová napětí jsou:  $\sigma_{am} = \frac{pR_1}{2h_1}$ ,

$$\sigma_{tm} = 2\sigma_{am} = \frac{pR_1}{h_1}$$

a ohybová napětí:  $\sigma_{ao} = \pm \frac{6M_x}{h_1^2}$ ,

$$\sigma_{to} = \pm \frac{6M_t}{h_1^2}.$$

Podle vztahů (2.8), (2.9) a (2.10) určíme:

osový moment:  $M_x = D_1 w_1''(x)$ ,

obvodový moment:  $M_t = \mu \cdot M_x$ ,

příčnou sílu:  $Q = D_1 w_1'''(x)$ .

Ekvivalentní napětí podle hypotézy HMH:

$$\sigma_{eqv} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_t - \sigma_a)^2 + (\sigma_a - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_t)^2},$$

kde radiální napětí  $\sigma_r = -p$ , většinou se zanedbává vzhledem k velikosti  $\sigma_t$  a  $\sigma_a$ .

### 3.4 Střední část tlakové nádoby (2)

Skořepinu (2) považujeme za dlouhou, dle vztahu (2.1). Použijeme tu část vztahu pro výpočet průhybu  $w_{(x)}$ , která vymizí se zvětšující se souřadnicí  $x$ , neboli součin, ve kterém vystupuje člen  $e^{-\beta x}$ . Ve funkci (1.7) jsou konstanty  $A_3 = A_4 = 0$ .

Deformace  $w_{(x)}$  je potom dána vztahem:

$$w_2(x) = e^{-\beta_2 x} (A_5 \sin \beta_2 x + A_6 \cos \beta_2 x) + w_{part.2}(x).$$

Partikulární řešení vypočítáme ze vztahu:

$$w_{part.1}(x) = \frac{1}{4\beta_2^4} \left( -\frac{\mu T_2}{D_2 R_2} + \frac{p}{D_2} \right),$$

konstanta: 
$$\beta_2 = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R_2^2 h_2^2}}$$

tuhost skořepiny: 
$$D_2 = \frac{E h_2^3}{12(1-\mu^2)}$$

$h_2$  a  $R_2$  je tloušťka a poloměr slabší skořepiny a osová síla  $T_2$  byla určena analogicky podle vztahu (3.4):

$$T_2 = \frac{pR_2}{2}.$$

Neznámé integrační konstanty:

z průhybu desky:  $C_1, C_3$

z průhybu tlustší skořepiny:  $A_1, A_2, A_3, A_4$

z průhybu tenčí skořepiny:  $A_5, A_6$

### 3.5 Okrajové podmínky pro horní okraj

Osm rovnic, které potřebujeme pro určení osmi integračních konstant získáme z osmi okrajových podmínek, (viz obr. 3.1). Okrajové podmínky jsou:

a) $w_{1H(0)} = 0$	e) $Q_{1D(u)} = Q_{2H(0)}$
b) $\vartheta_{d(R)} = -\vartheta_{1H(0)}$	f) $\vartheta_{1D(u)} = \vartheta_{2H(0)}$
c) $M_{d(R_1)} = -M_{1H(0)}$	g) $w_{1D(u)} = w_{2H(0)}$
d) $M_{1D(u)} = M_{2L(0)}$	h) $w_{d(R_1)} = 0$

Jednotlivé okrajové podmínky jsme anulovali (tzn. vše je převedeno na jednu stranu rovnice a položeno rovno nule). Na základě vytvořeného skriptu pomocí symbolického toolboxu v Matlabu (viz příloha B) jsme vyřešili tuto soustavu a získali následující výsledky, ve kterých vystupují už jen neznámé integrační konstanty.

$$a) w_1(x)|_{x=0} = 0$$

$$A_2 - A_4 + 0,0469 = 0$$

$$\text{b) } C_1 \cdot r + \frac{1}{16} \frac{pr^3}{D_d} \Big|_{r=R} + \frac{dw_1(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

$$0,0424 A_1 - 0,0424 A_2 + 0,0424 A_3 - 0,0424 A_4 + 184 C_1 - 0,0103 = 0$$

$$\text{c) } D_d \cdot \left[ C_1(1+\mu) + \frac{3+\mu}{16D_d} pr^2 \right] \Big|_{r=R_1} + D_1 \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0$$

$$8223,2 A_3 - 2,8601 \cdot 10^{-14} A_2 - 8223,2 A_1 - 2,8601 \cdot 10^{-14} A_4 + 80357 \cdot 10^3 C_1 - 11381 = 0$$

$$\text{d) } D_1 \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} \Big|_{x=u} - D_2 \frac{d^2 w_2(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0$$

$$30,881 A_1 + 1677,9 A_2 - 741,40 A_3 + 40285 A_4 + 2069,8 A_5 + 5,9224 \cdot 10^{-14} A_6 = 0$$

$$\text{e) } D_1 \frac{d^3 w_1(x)}{dx^3} \Big|_{x=u} - D_2 \frac{d^3 w_2(x)}{dx^3} \Big|_{x=0} = 0$$

$$69,802 A_1 - 72,419 A_2 - 1738,7 A_3 + 1675,8 A_4 - 124,48 A_5 - 124,48 A_6 = 0$$

$$\text{f) } \frac{dw_1(x)}{dx} \Big|_{x=u} = \frac{dw_2(x)}{dx} \Big|_{x=0}$$

$$0,2038 A_3 - 0,0085 A_2 - 0,0088 A_1 + 0,2114 A_4 - 0,0601 A_5 - 0,0601 A_6 = 0$$

$$g) w_1(x)|_{x=u} = w_2(x)|_{x=0}$$

$$0,0240 A_1 - 0,0038 A_2 + 4,8989 A_3 + 0,0902 A_4 - A_6 = 0$$

$$h) - \int \vartheta_d dr|_{r=R_1} = 0$$

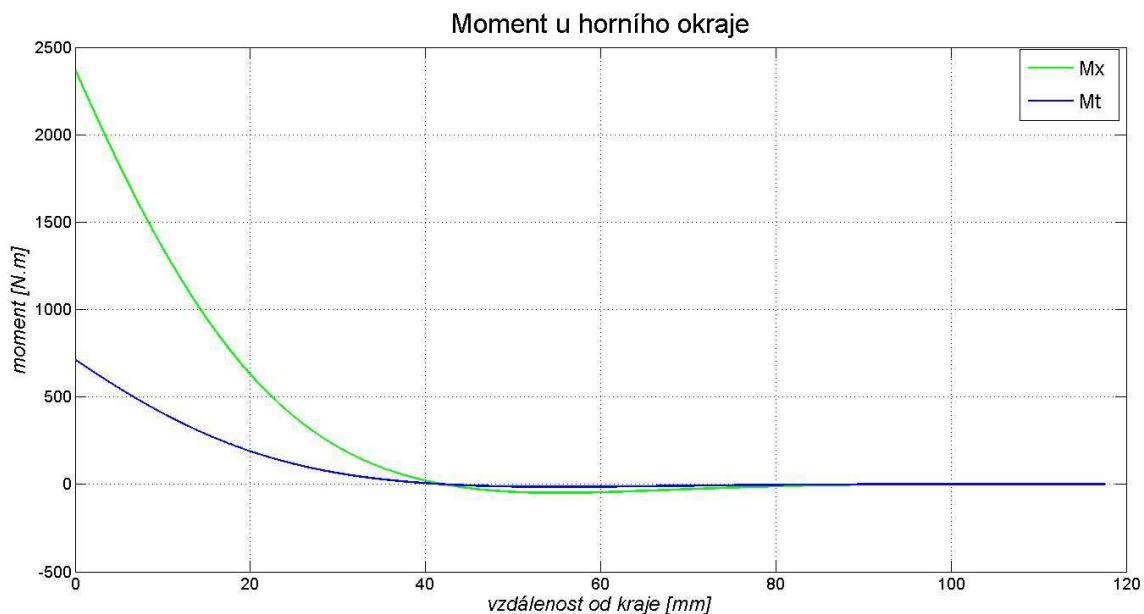
$$16928 C_1 + C_2 + 0,4723 = 0$$

Výsledky derivací funkcí vystupujících v okrajových podmínkách jsou podrobněji rozepsány v příloze 3. Pomocí skriptu získáme i průběhy jednotlivých funkcí.

### 3.6 Popis skriptu z Matlabu

Na začátku jsou určeny proměnné, které budou ve výpočtech v symbolickém tvaru. Dále jsou vypsány číselné konstanty a poté konstanty, které vychází ze vzorců. Následují rovnice pro desku, zesílený lem a dlouhou skořepinu. Jednou z nejdůležitějších částí jsou okrajové podmínky (anulované), tzn. vše je převedeno na jednu stranu rovnice a položeno rovno nule. Pro určení neznámých integračních konstant je potřeba osm rovnic. Pomocí funkce solve byla vyřešena soustava rovnic o osmy neznámých. Jednotlivé konstanty, které byly v symbolickém tvaru jsou nyní zapsány jako číselné hodnoty, pro dvojitou přesnost použijeme funkci double. Dále jsou do rovnic pro jednotlivé úseky tj. deska, zesílený lem a dlouhá skořepina dosazeny hodnoty vypočtených konstant. Výsledky jsou znázorněny pomocí grafů. Pro obě skořepiny a desku jsou vypočteny osově a obvodové momenty dále osově, obvodové a ekvivalentní napětí a průhyb neboli deformace. Grafy s tabulkami, které obsahují maximální, minimální nebo ustálené hodnoty dané funkce jsou znázorněny v kapitole 3.7.

### 3.7 Grafy z Matlabu



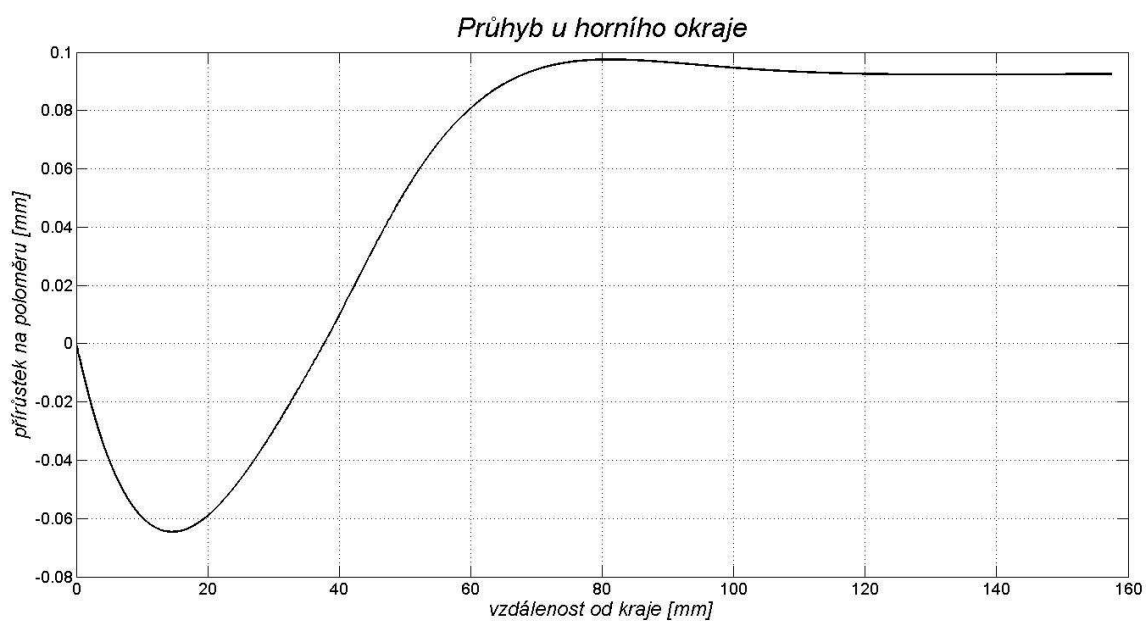
**Graf 3.1:** Moment u horního okraje

**Tabulka 3.1:** Maximální moment u horního okraje

Moment	Maximum [N.m]	Vzdálenost x [mm]
$M_{x(x)}$	2375	0
$M_{t(x)}$	712,4	0

Zde je vidět, že bezmomentovou teorii lze uplatnit až 57,5 mm od posledního rozruchu, tedy od konce zesíleného lemu. Podle obecného vztahu (2.1) pro střední část nádoby nám vyšla vzdálenost počátku bezmomentové teorie 53,6 mm, což je velmi blízko hodnotě určené z grafu.





**Graf 3.2:** Průhyb u horního okraje

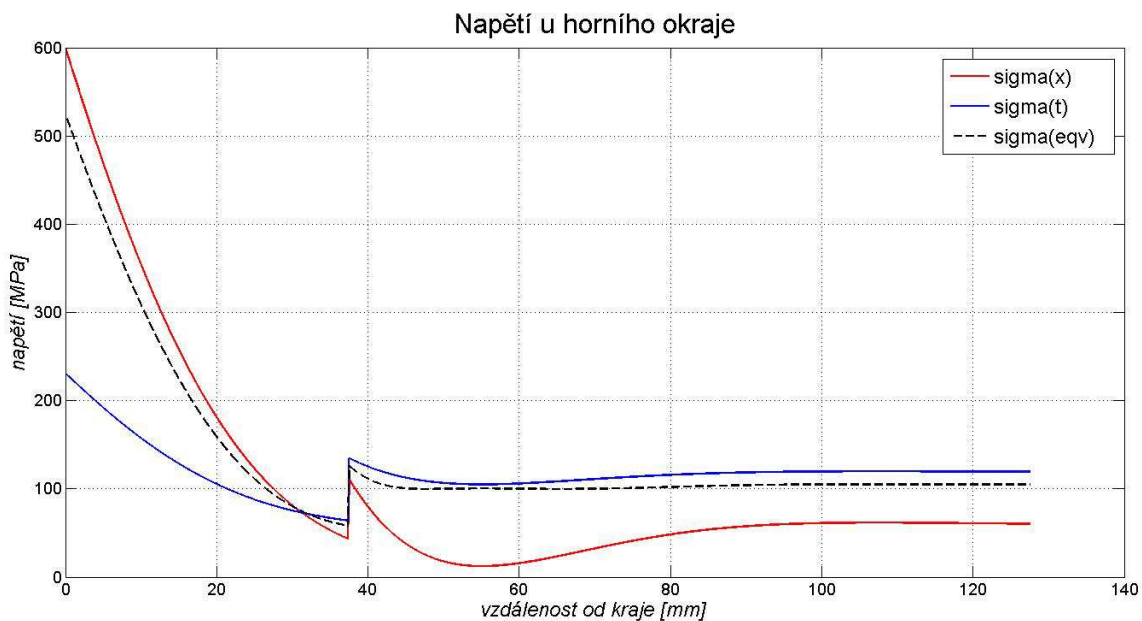
**Tabulka 3.2:** Maximální průhyb horního okraje

Průhyb	Maximum [mm]	Vzdálenost x [mm]
$w(x)$	0,098	81,5

**Tabulka 3.3:** Minimální průhyb horního okraje

Průhyb	Minimum [mm]	Vzdálenost x [mm]
$w(x)$	-0,065	14,3

Záporný průhyb je způsoben ohybem desky, který má vliv přibližně do 36 mm od horního okraje, poté už průhyb nabývá kladných hodnot.



**Graf 3.3:** Napětí u horního okraje

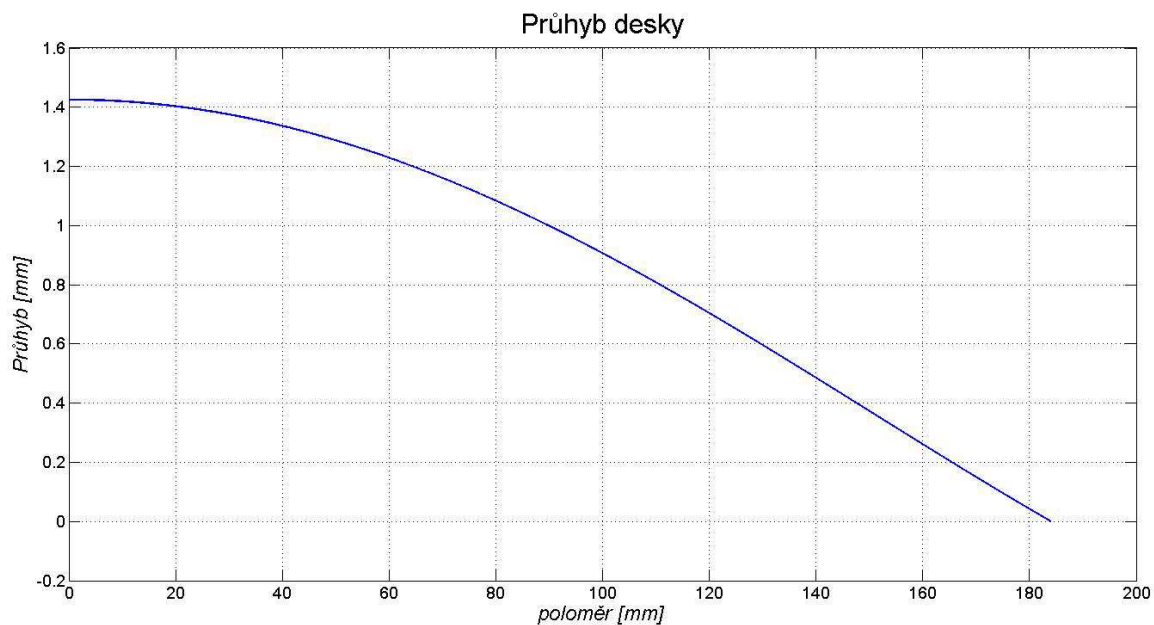
**Tabulka 3.4:** Maximální napětí u horního okraje

Napětí	Maximum [MPa]	Vzdálenost x [mm]
$\sigma_x$	600	0
$\sigma_t$	231	0
$\sigma_{eqv.}$	525	0

**Tabulka 3.5:** Ustálená hodnota napětí u horního okraje

Napětí	Hodnota [MPa]	Od vzdálenosti x [mm]
$\sigma_x$	61	102
$\sigma_t$	120	95
$\sigma_{eqv.}$	105	95

V místě přechodu z tlustší na tenkou skořepinu je vidět napěťový skok, je způsoben tím, že je napětí závislé na kvadrátu tloušťky stěny, která je dvakrát tenčí. Ohybová napětí působí přibližně do vzdálenosti 97 mm, Dále už působí jen membránové napětí.



**Graf 3.4:** Průhyb desky

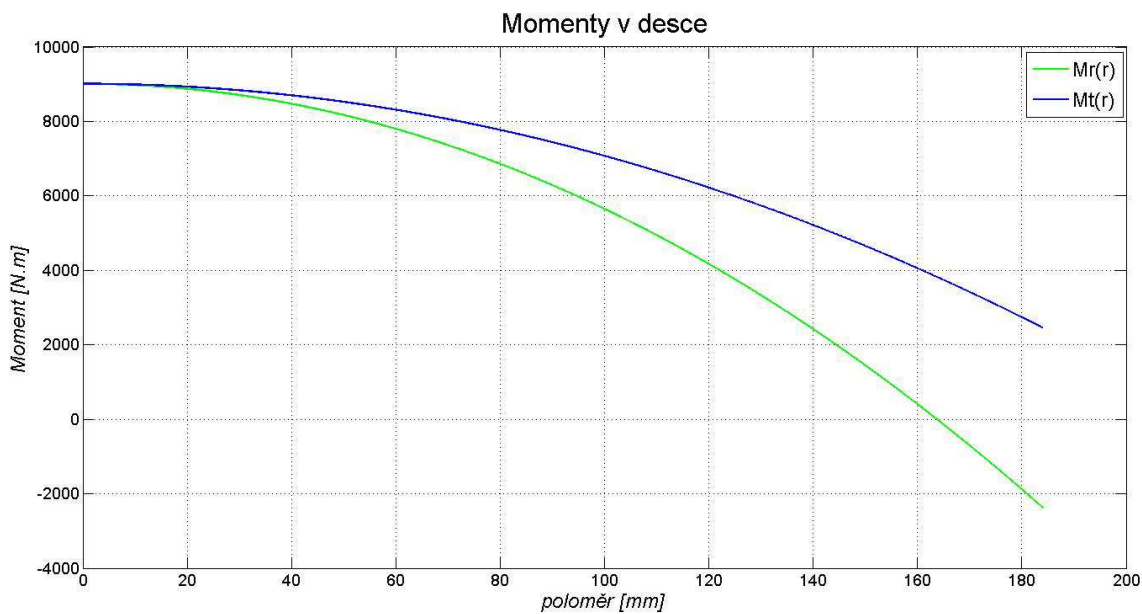
**Tabulka 3.6:** Maximální průhyb desky

Průhyb	Maximum [mm]	Poloměr r [mm]
$w_d$	1,43	0

**Tabulka 3.7:** Minimální průhyb desky

Průhyb	Minimum [mm]	Poloměr r [mm]
$w_d$	0	184

Maximální průhyb je podle očekávání ve středu desky. Na kraji je roven nule, což je uvedeno v poslední počáteční podmínce v podkapitole 4.5.



**Graf 3.5:** Momenty v desce

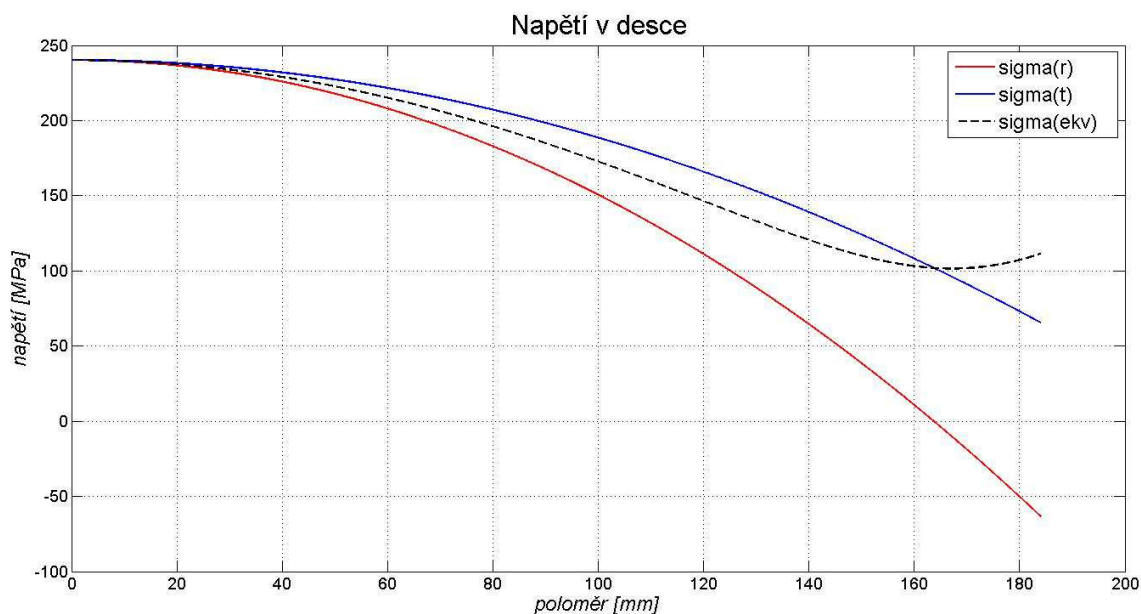
**Tabulka 3.8:** Maximální moment desky

Moment	Maximum [MPa]	Vzdálenost r [mm]
$M_r$	9007	0
$M_t$	9007	0

**Tabulka 3.9:** Minimální moment desky

Moment	Minimum [MPa]	Vzdálenost r [mm]
$M_r$	-2375	184
$M_t$	2454	184

Maximální hodnoty radiálního a tečného momentu jsou uprostřed víka shodné, což vychází ze vztahů 2.13 a 2.14. Dále je vidět, že radiální moment přibližně po 165 mm působí v opačném smyslu.



**Graf 3.6:** Napětí v desce

**Tabulka 3.10:** Maximální napětí v desce

Napětí	Maximum [MPa]	Vzdálenost x [mm]
$\sigma_r$	240	0
$\sigma_t$	240	0
$\sigma_{ekv.}$	240	0

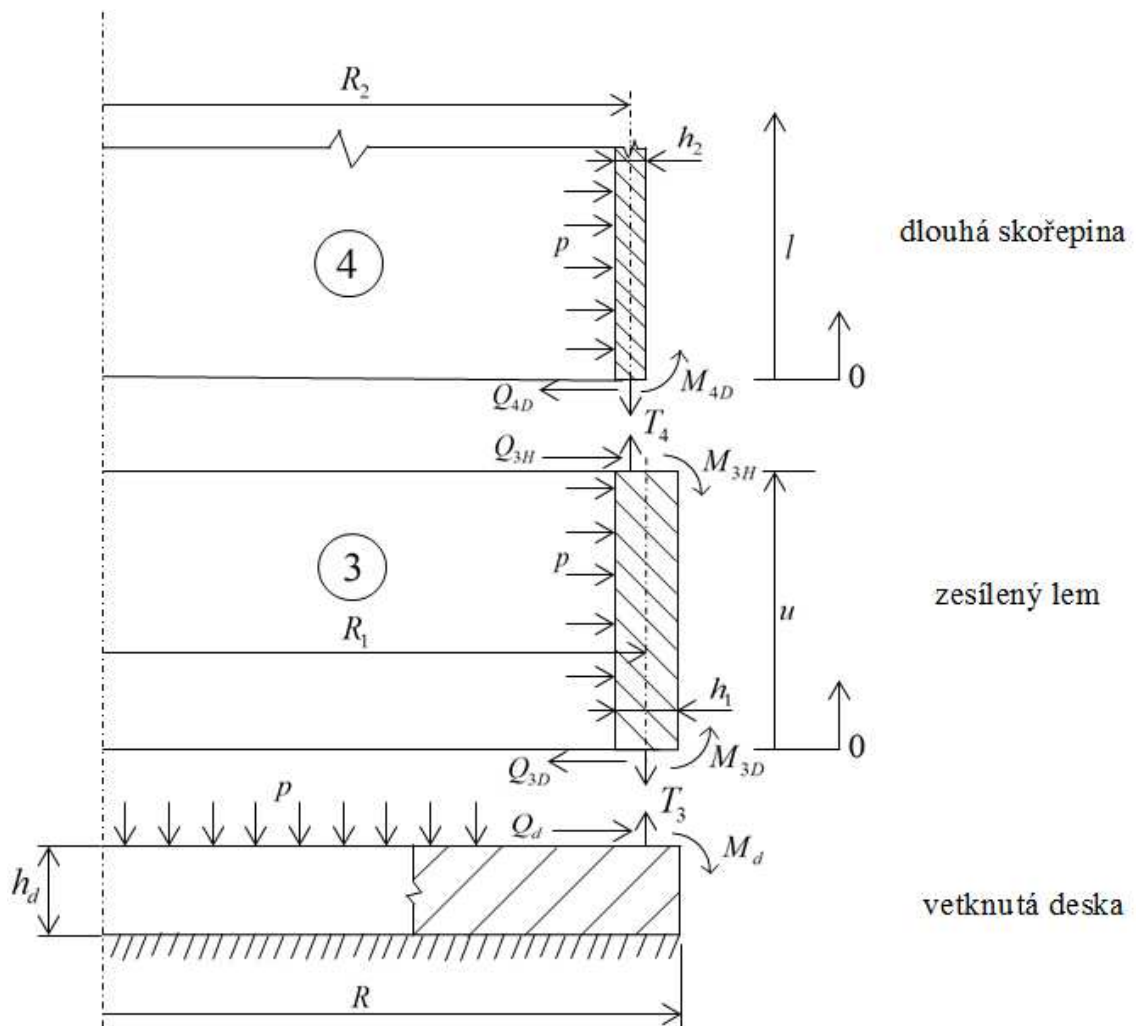
**Tabulka 3.11:** Minimální napětí v desce

Napětí	Minimum [MPa]	Vzdálenost x [mm]
$\sigma_r$	-63	184
$\sigma_t$	65	184
$\sigma_{ekv.}$	102	167

Radiální a tečné napětí vychází z momentů (viz graf 3.5), proto jsou průběhy podobné. Radiální napětí nabývá záporných hodnot přibližně od 165 mm, to má vliv na průběh ekvivalentního napětí, které se v těchto místech odklání a roste.

## 4 Napjatost v okolí dolního dna nádoby

### 4.1 Výpočet napětí v oblasti dolního dna



Obr. 4.1: Vnitřní účinky u vetknutí

V tomto případě považujeme dolní dno za vetknuté. Deska se nedeformuje, a proto ji nezahrnujeme ve výpočtu. Deformace lemu a dlouhé skořepiny vypočteme analogicky jako v horní části nádoby (viz kapitola 3).

## 4.2 Zesílený lem (3) u vetknutí

Rozměry lemu u vetknutí jsou stejné jako u horního okraje a proto můžeme považovat lem za krátkou tenkou skořepinu podle podmínky (2.1). Průhyb skořepiny je:

$$w_3(x) = e^{-\beta_3 x} (A_1 \sin \beta_3 x + A_2 \cos \beta_3 x) + e^{\beta_3 x} (A_3 \sin \beta_3 x - A_4 \cos \beta_3 x) + w_{part.3}(x),$$

kde partikulární řešení je: 
$$w_{part.3}(x) = \frac{1}{4\beta_3^4} \left( -\frac{\mu T_3}{D_3 R_1} + \frac{p}{D_3} \right)$$

$$\beta_3 = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R_1^2 h_1^2}}$$

$h_1$  je tloušťka lemu, osovou sílu  $T_3$  vypočítáme z rovnováhy tlaku působícího na plochu o poloměru  $R_1$  a v opačném směru působí na kružnici o poloměru  $R_1$  síla  $T_3$ .

$$2\pi R_1 T_3 = \pi R_1^2 p \quad (4.1)$$

$$T_3 = \frac{pR_1}{2}.$$

Tuhost lemu je: 
$$D_3 = \frac{Eh_1^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Osově a obvodově napětí je součtem ohybových a membránovým napětí, tak jak plyne z obr. 3.2.

$$\sigma_t = \sigma_{to} + \sigma_{tm}$$

$$\sigma_a = \sigma_{ao} + \sigma_{am}$$

Osově membránové napětí:  $\sigma_{am} = \frac{pR_1}{2h_1},$

obvodově membránové napětí:  $\sigma_{tm} = 2\sigma_a = \frac{pR_1}{h_1}.$

a ohybová napětí:  $\sigma_{ao} = \pm \frac{6M_x}{h_1^2},$

$$\sigma_{to} = \pm \frac{6M_t}{h_1^2},$$

Podle vztahů (1.8), (1.9) a (1.10) určíme:

osový moment:  $M_x = D_1 w_1''(x),$

obvodový moment:  $M_t = \mu \cdot M_x,$

příčnou sílu:  $Q = D_1 w_1'''(x),$

Ekvivalentní napětí v oblasti dolního víka podle hypotézy HMMH:

$$\sigma_{eqv} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_t - \sigma_a)^2 + (\sigma_a - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_t)^2},$$

kde radiální napětí  $\sigma_r = -p$ , většinou se zanedbává vzhledem k velikosti  $\sigma_t$  a  $\sigma_a$ .



### 4.3 Střední část tlakové nádoby (4)

Z důvodů uvedených u střední části tlakové nádoby (2) na str. 27 je výpočet průhybu:

$$w_4(x) = e^{-\beta_4 x} (A_5 \sin \beta_4 x + A_6 \cos \beta_4 x) + w_{part.4}(x)$$

Partikulární řešení vypočítáme ze vztahu:

$$w_{part.4}(x) = \frac{1}{4\beta_4^4} \left( -\frac{\mu T_4}{D_4 R_2} + \frac{p}{D_4} \right),$$

konstanta pro danou skořepinu:  $\beta_4 = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R_2^2 h_2^2}},$

tuhost skořepiny:  $D_4 = \frac{E h_2^3}{12(1-\mu^2)},$

$T_2$  je osová síla, vypočtena analogicky podle (3.1):

$$T_2 = \frac{pR_2}{2}.$$

Neznámé integrační konstanty:

z průhybu tlustší skořepiny:  $A_1, A_2, A_3, A_4$

z průhybu tenčí skořepiny:  $A_5, A_6$

## 4.4 Okrajové podmínky pro dolní okraj:

Soustavu rovnic pro vyřešení těchto šesti integračních konstant určíme u okrajových podmínek (viz obr. 4.1):

$$\text{a) } w_{3D(0)} = 0$$

$$\text{d) } w_{3H(u)} = w_{4D(0)}$$

$$\text{b) } \vartheta_{3D(0)} = 0$$

$$\text{e) } Q_{3H(u)} = Q_{4D(0)}$$

$$\text{c) } M_{3H(u)} = M_{4D(0)}$$

$$\text{f) } \vartheta_{3H(u)} = \vartheta_{4D(0)}$$

$$\text{a) } w_3 \Big|_{x=0} = 0$$

$$A_2 - A_4 + 0,0469$$

$$\text{b) } \frac{dw_3(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

$$0,0424 A_1 - 0,0424 A_2 + 0,0424 A_3 - 0,0424 A_4 = 0$$

$$\text{c) } D_3 \frac{d^2 w_3(x)}{dx^2} \Big|_{x=u} - D_4 \frac{d^2 w_4(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0$$

$$30,881 A_1 + 1,6779 A_2 - 7,4140 A_3 + 4,0285 A_4 + 2,0698 A_5 + 5,9225 A_6 = 0$$

$$\text{d) } w_3(x) \Big|_{x=u} - w_4(x) \Big|_{x=0} = 0$$

$$0,2041 A_1 - 0,0038 A_2 + 4,8989 A_3 + 0,0902 A_4 - A_6 - 0,0456 = 0$$

$$e) D_3 \frac{d^3 w_3(x)}{dx^3} \Big|_{x=u} - D_4 \frac{d^3 w_4(x)}{dx^3} \Big|_{x=0} = 0$$

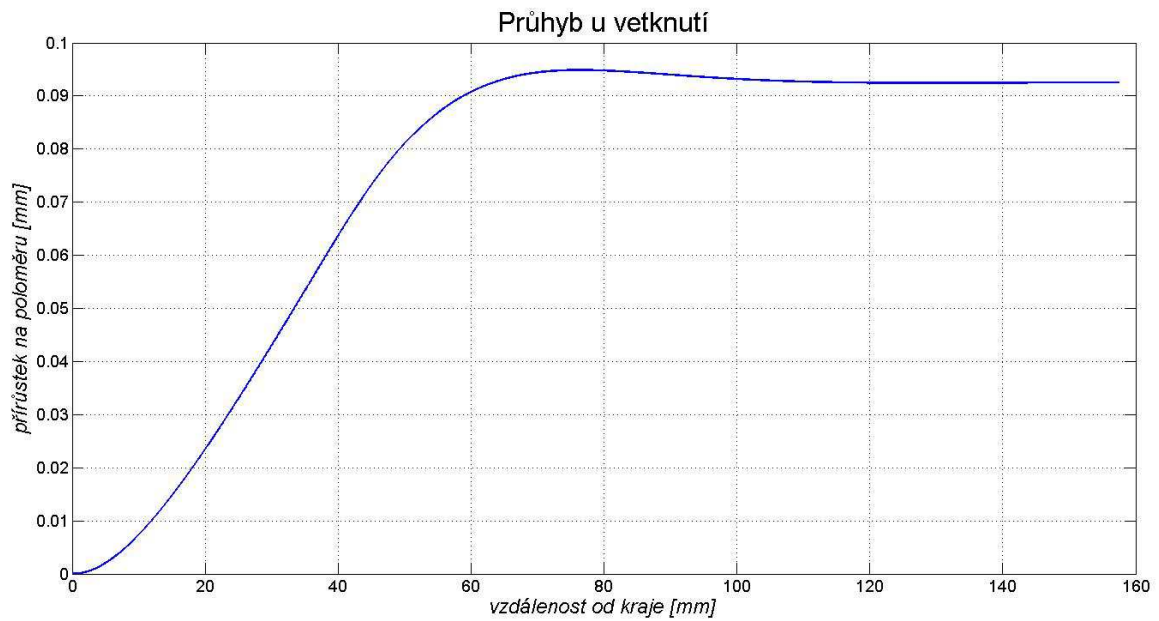
$$69,80 A_1 - 72,42 A_2 - 1739 A_3 + 1676 A_4 - 124,5 A_5 - 124,5 A_6 = 0$$

$$f) \frac{dw_3(x)}{dx} \Big|_{x=u} - \frac{dw_4(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

$$0,2038 A_3 - 0,0085 A_2 - 0,0088 A_1 + 0,2114 A_4 - 0,0601 A_5 + 0,0601 A_6 = 0$$

Tuto soustavu rovnic o šesti neznámých jsme vyřešili po sestavení skriptu pomocí funkcí symbolického toolboxu v programu Matlab, (viz příloha C). Tento skript je napsán ve stejném smyslu jako skript na výpočet vrchní části tlakové nádoby.

## 4.5 Grafy z Matlabu

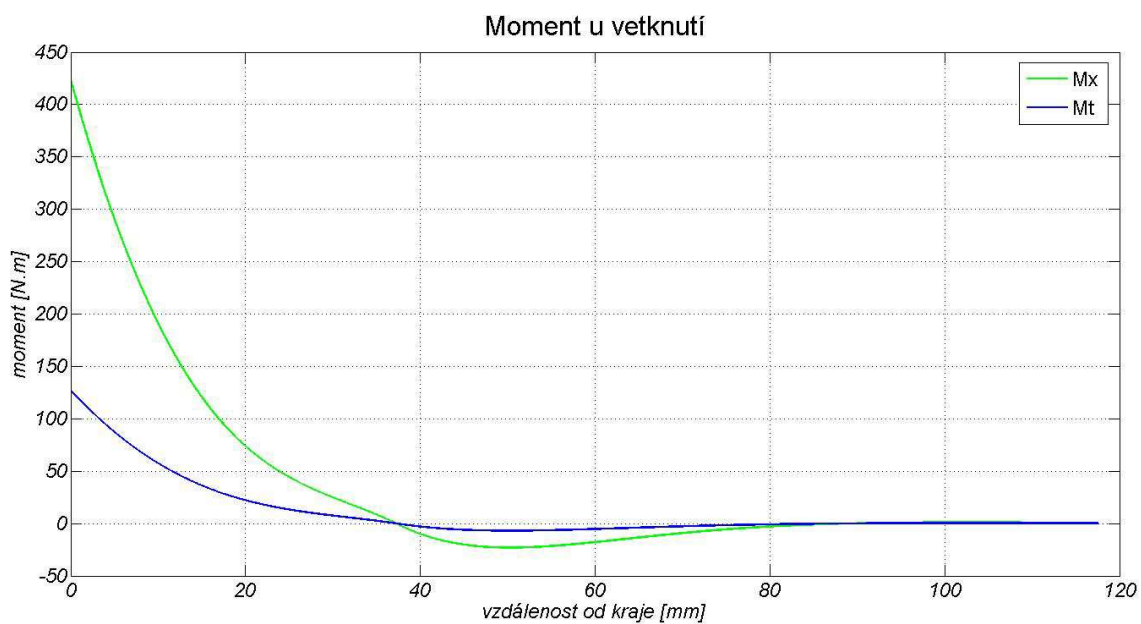


**Graf 4.1:** Průhyb u vetknutí

**Tabulka 4.1:** Maximální průhyb u vetknutí

Průhyb	Maximum [mm]	Vzdálenost x [mm]
$w_3(x)$	0,095	76

Z Grafu 4.1 je vidět, že u vetknutí dochází pouze ke kladnému průhybu, protože je spodní dno pevně přišroubované k desce stolu, tak neovlivňuje průhyb skořepiny, tak jako u horního víka.

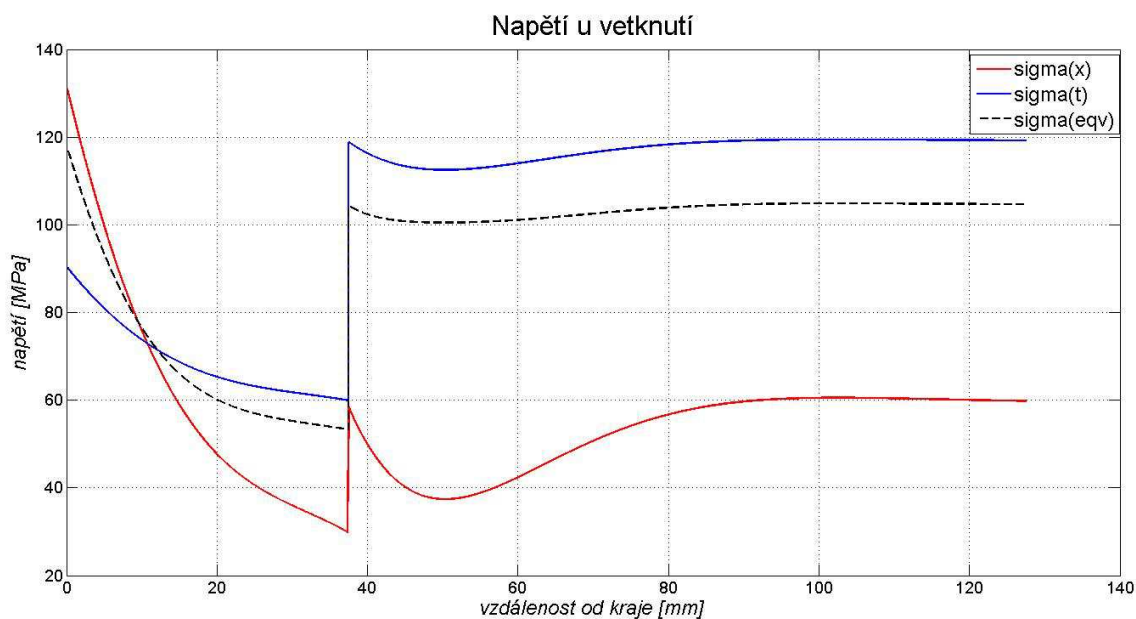


**Graf 4.2:** Moment u vetknutí

**Tabulka 4.2:** Maximální moment u vetknutí

Moment	Maximum [Nm]	Vzdálenost x [mm]
$M_x$	424	0
$M_t$	127	0

Stejně jako u momentového působení u horního okraje i zde vymizí momentové účinky přibližně po 97 mm od vetknutí. To přibližně odpovídá odhadu podle rovnice (2.1), kde vyšla bezmomentová teorie od vzdálenosti přibližně 91 mm.



**Graf 4.3:** Napětí u vetknutí

**Tabulka 4.3:** Maximální napětí u vetknutí

Napětí	Maximum [MPa]	Vzdálenost x [mm]
$\sigma_x$	132	0
$\sigma_t$	91	0
$\sigma_{eqv.}$	118	0

**Tabulka 4.4:** Ustálená hodnota napětí u vetknutí

Napětí	Hodnota [MPa]	Od vzdálenosti x [mm]
$\sigma_x$	60	120
$\sigma_t$	119	95
$\sigma_{eqv.}$	105	97

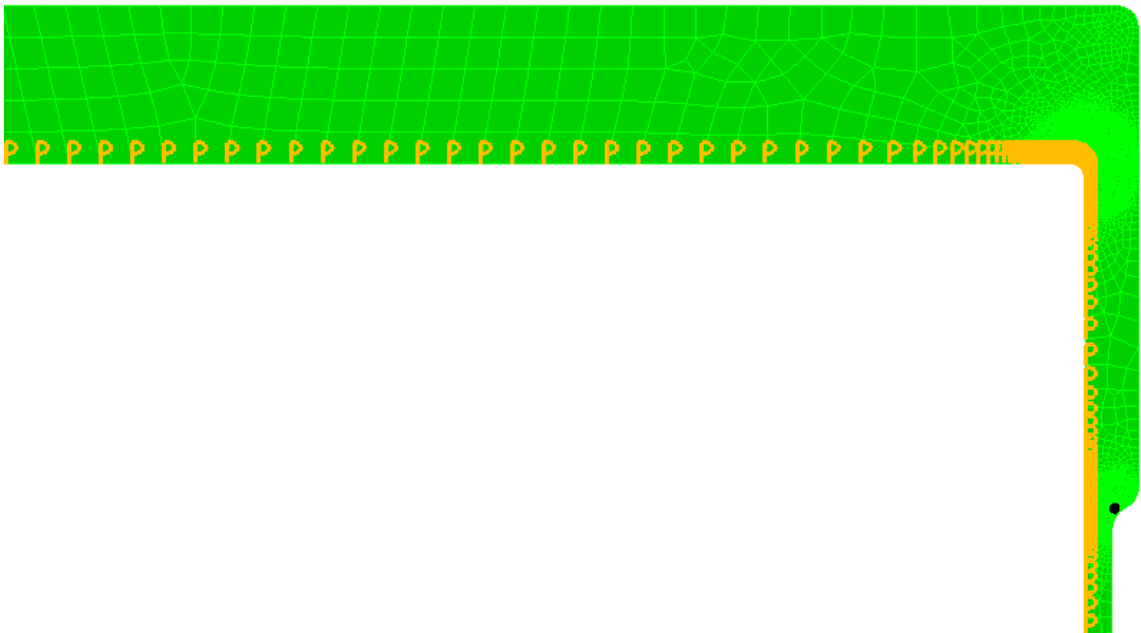
Napětí zde nabývá menších hodnot než u horního víka. Napěťový skok se zdá být naopak větší, ale ve skutečnosti je menší. To je způsobené jiným měřítkem grafu. Ohybové napětí vymizí přibližně ve vzdálenosti 110 mm od okraje, poté ve skořepině působí jen membránová napětí.

## 5 Pevnostní analýza v programu Autodesk Simulation Mechanical 2015

V programu jsme nastavili 2-D rotační symetrickou úlohu (element type < 2-D >). V materiálových konstantách byl zadán modul pružnosti  $E = 200\,000$  MPa a Poissonovo číslo 0,3.

Na obr. 5.1 je detail horní hrany tlakové nádoby. Velikost prvků jsem volil 3 mm a v místech předpokládané koncentrace napětí jsem zmenšil velikosti prvků v okolí 5 mm na 0,1 mm. Tvar prvků jsem volil smíšený. Oranžové praporky znázorňují vnitřní přetlak.

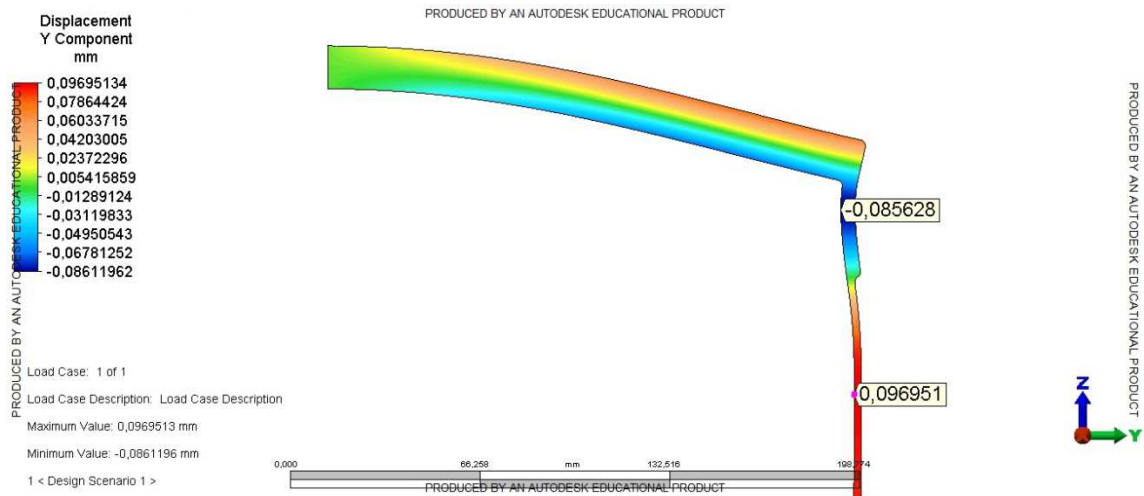
U vetknutí je zasíťování obdobné, spodní dno je vetknuté a zahuštění sítě stejné jako na obr. 5.1.



**Obr. 5.1:** Detail zasíťování tlakové nádoby

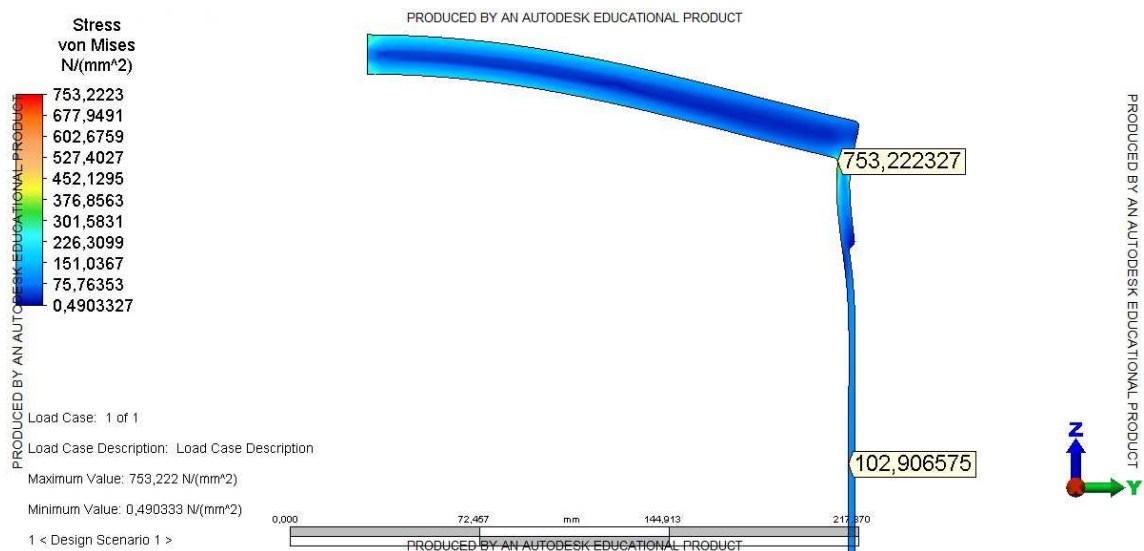
Pro porovnání jsou ve výsledcích z MKP výpočtu vyznačeny hodnoty vybraných bodů, které odpovídají extrémům nebo ustáleným hodnotám ve výsledných grafech z Matlabu. Odchytky výsledků jsou dány především odlišným přístupem k výpočtu těchto metod.

## 5.1 Výsledky z MKP



**Obr. 5.2:** Průhyb u horního okraje ve směru osy Y.

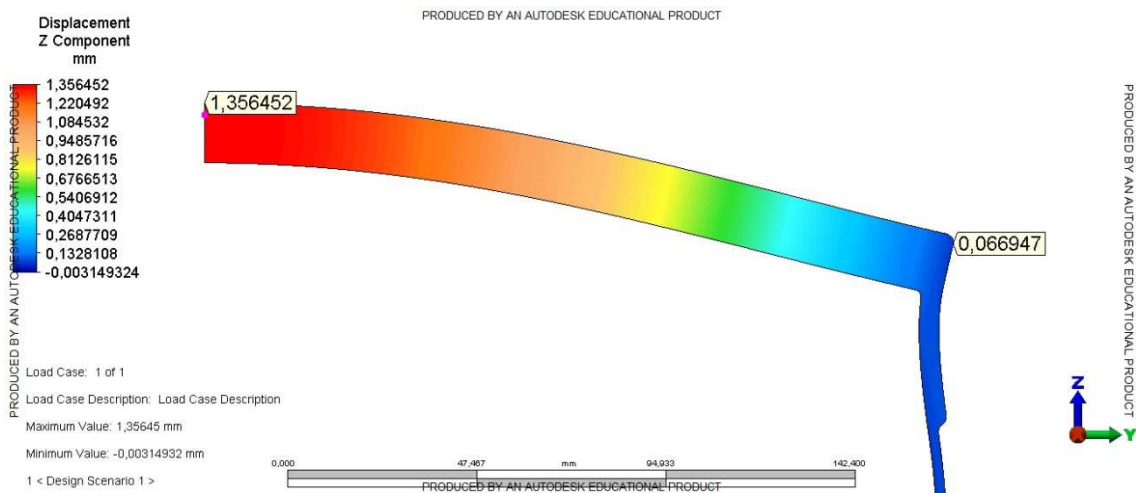
Průhyb se oproti analytickému řešení liší řádově o tisícinu milimetru. Na obr. 5.2 je vidět záporný průhyb skořepiny v důsledku deformace desky.



**Obr. 5.3:** Napětí u horního okraje podle von Mises.

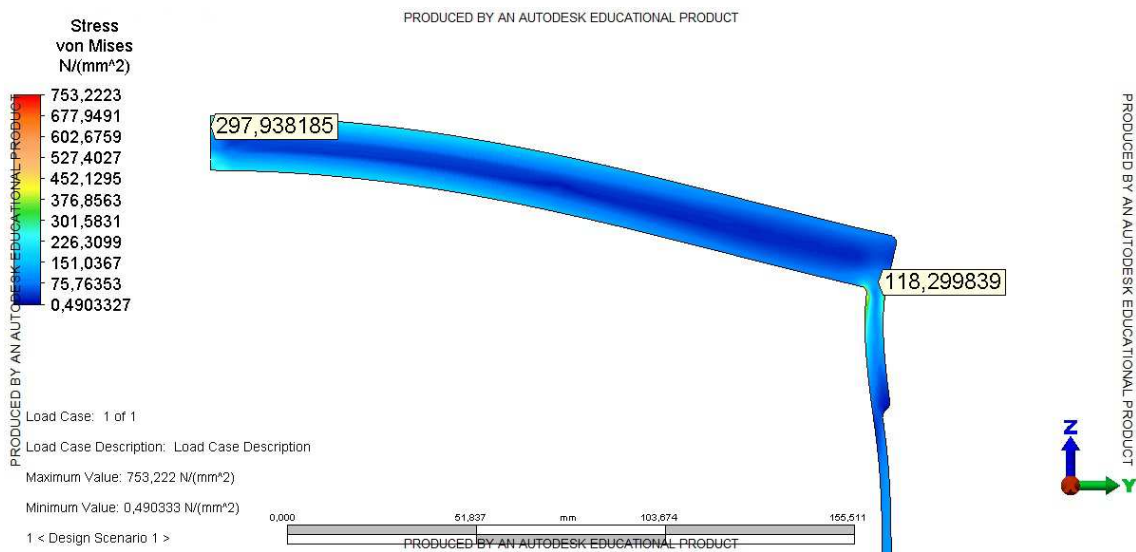
Na obrázku je vidět že se v místech změny tvaru koncentruje napětí.





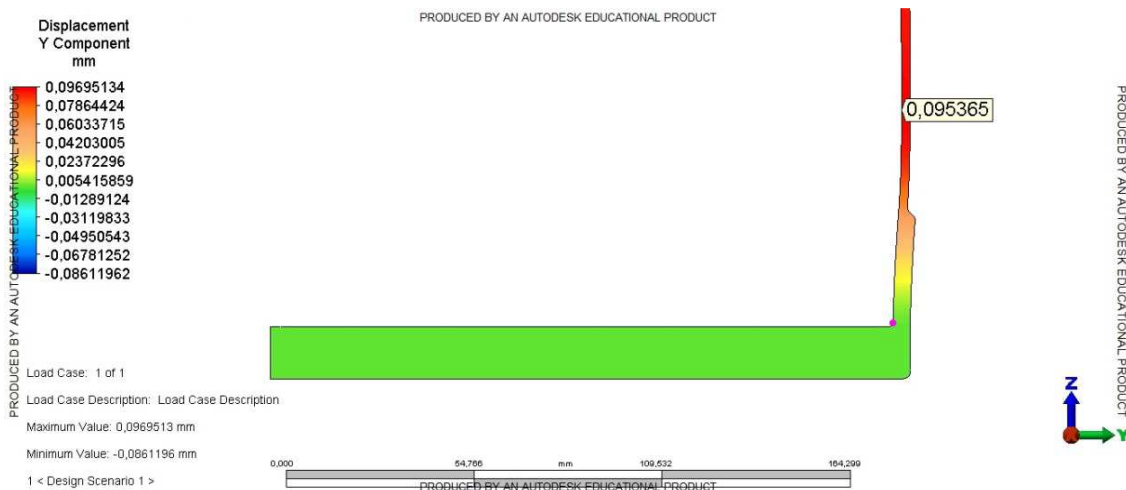
**Obr. 5.4:** Průhyb desky ve směru osy Z.

Průhyb na kraji desky je přibližně 0,067 mm v analytickém výpočtu jsme tento průhyb považovali za nulový.



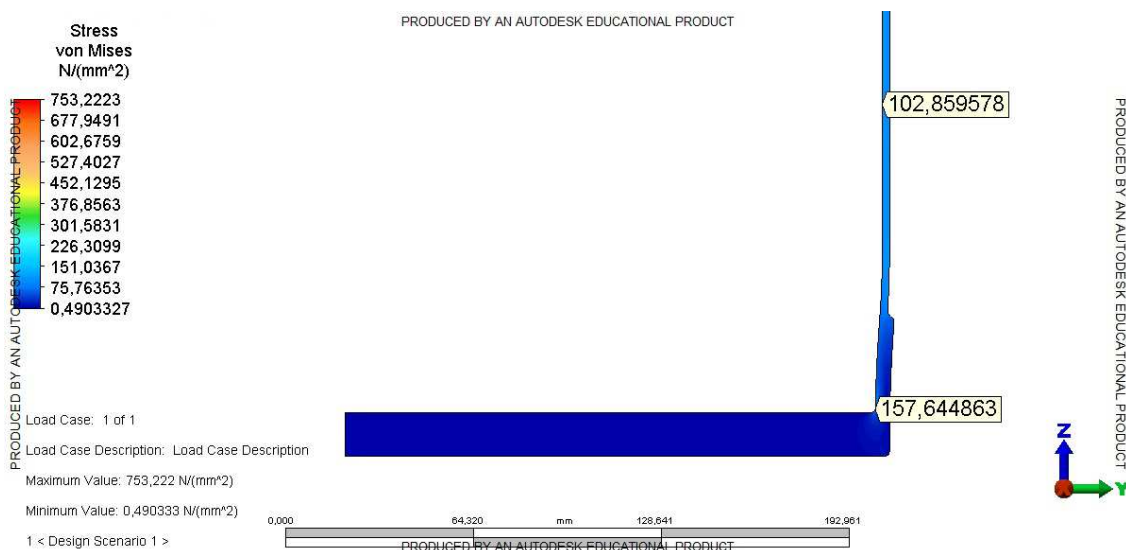
**Obr. 5.5:** Napětí v desce podle von Mises.

Maximální hodnota podle MKP je přibližně o 58 MPa větší než výsledek z analytického výpočtu.



**Obr. 5.6:** Průhyb u vetknutí ve směru osy Y.

Dno považujeme za vetknuté, proto se skořepiny prohýbají jen v kladném směru, jak je tomu i v grafu 4.1.

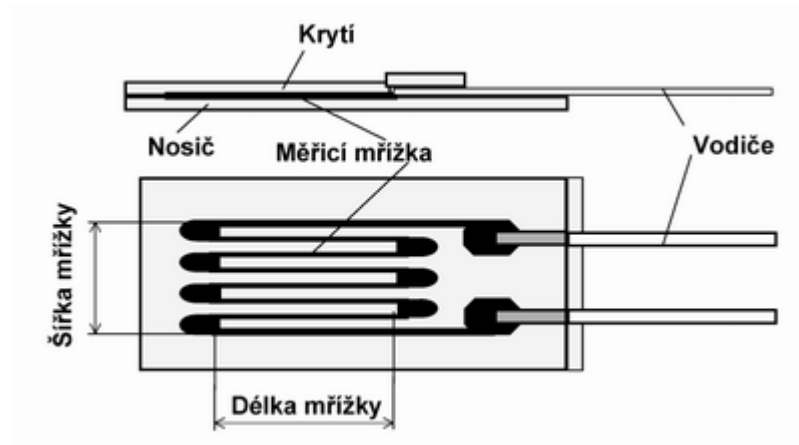


**Obr. 5.7:** Napětí u vetknutí podle von Mises.

Vetknutí desky způsobilo snížení maximálního napětí v napojení desky na krátkou skořepinu oproti hornímu okraji, kde dosahuje přibližně 750 MPa.

## 6 Experimentální měření

Pro měření byly použity tři elektrické odporové tenzometry HBM typ 6/350 LY41 (viz obr. 6.2). Odpor tenzometru je  $350 \Omega$  a k-faktor je 2,06. Na obr. 6.1 je schéma odporového tenzometru.



Obr. 6.1: Schéma odporového tenzometru

Mřížka se při deformaci přetváří a mění tak svůj průřez a tedy i odpor. Tenzometr lze použít jen v určitém rozsahu deformace, která se musí pohybovat v rozmezí stanoveném výrobcem. Po překročení tohoto rozsahu už tenzometr nelze dále použít, protože se po odlehčení nevrátí do původního stavu. Konce drátků jsou připájeny na kontakty, které vedou signál do měřicí karty.



Obr. 6.2: Tenzometr na tlakové nádobě

Pro převod elektrického signálu jsme použili měřící kartu Dewetron a program DEWEsoft 7.0. Výsledným parametrem je poměrné prodloužení.

Jednotlivé tenzometry jsme po očištění povrchu přilepili speciálním lepidlem na tlakovou nádobu v místech, kde jsou podle teoretického výsledku očekávány největší deformace (viz kapitola 3.7). Tři tenzometry jsou na válcové části (viz obr. 6.3).

Tenzometr č. 2 a 3 měří obvodové poměrné prodloužení ( $\varepsilon_t$ ) a tenzor č. 1 osově poměrné prodloužení ( $\varepsilon_x$ ).

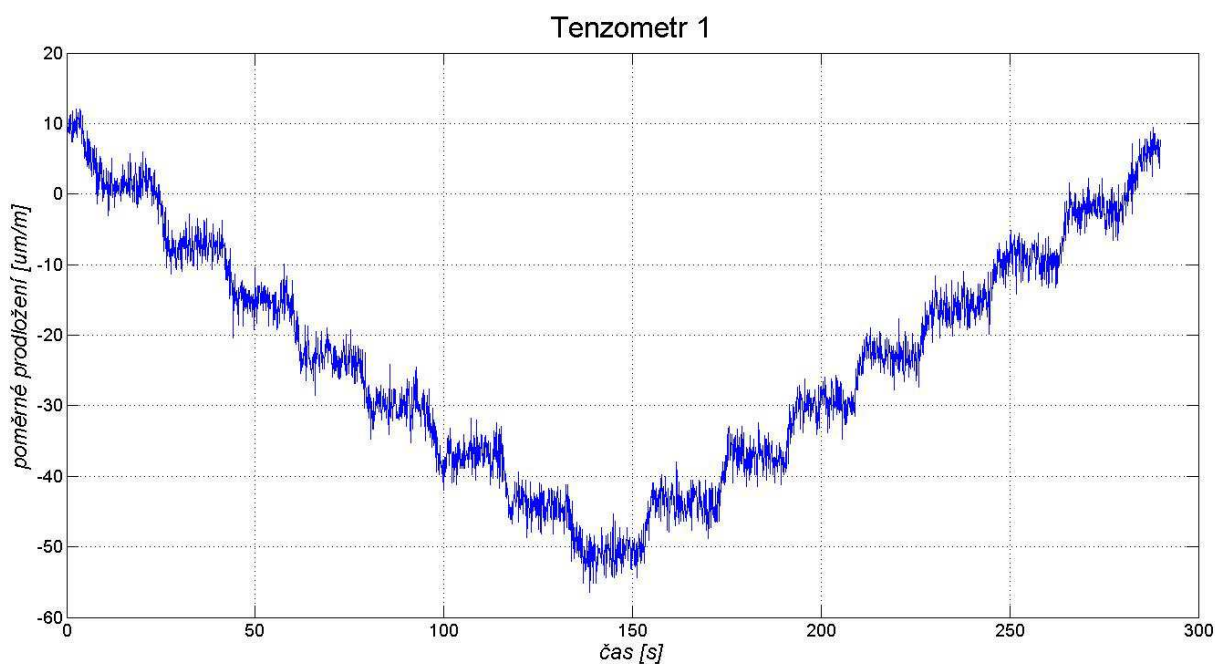


**Obr. 6.3:** Umístění tenzometrů

## 6.1 Tenzometrické měření

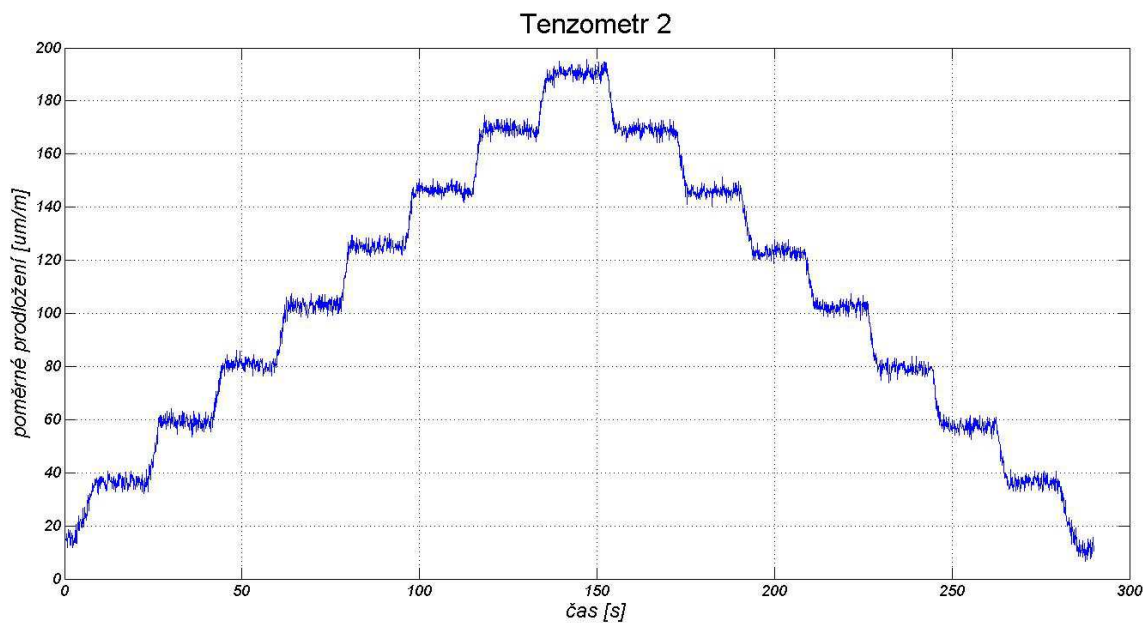
Nádobu jsme postupně zatěžovali tlakem od 0 do 16 barů s krokem 2 bary (měřeno na membránovém tlakoměru, který je součástí vybavení nádoby) a následně jsme stejným způsobem nádobu odlehčovali. Po každém zvýšení (snížení) tlaku jsme počkali přibližně 15 sekund, abychom ve výsledných grafech byli schopni rozpoznat, kde došlo ke změně tlaku. Měření jsme opakovali třikrát. Výsledky všech měření jsou srovnatelné.

## 6.2 Grafy tenzometrů



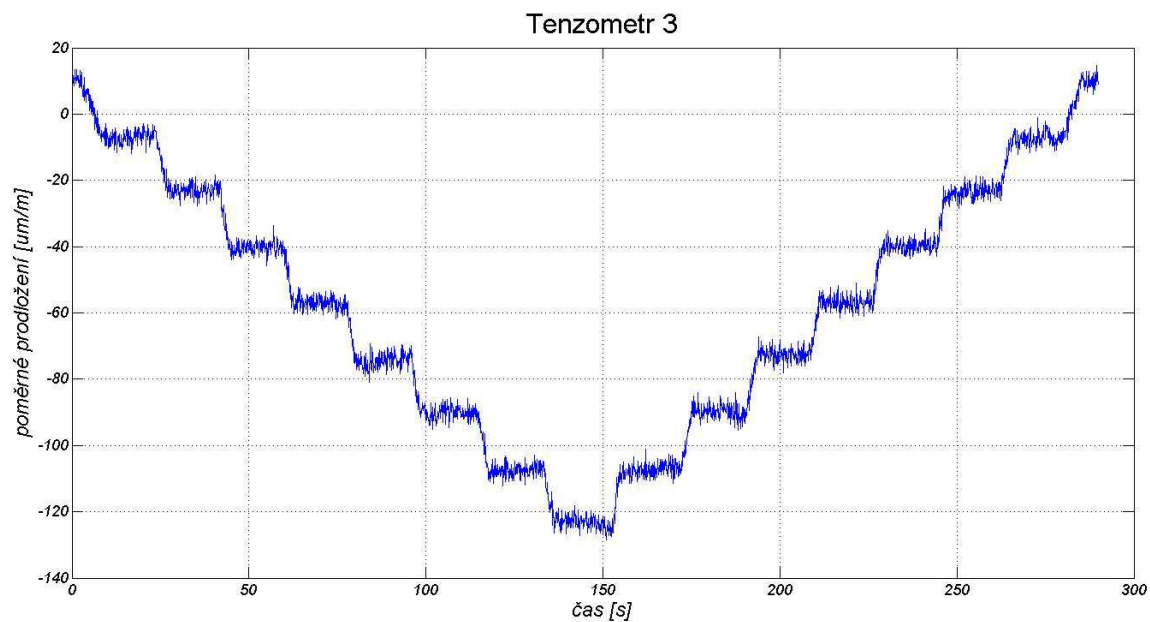
**Graf 6.1:** Tenzometr 1 z programu DEWEsoft 7.0

Tenzometr 1 měří poměrnou deformaci v axiálním směru a je nalepený 27 mm od horního okraje. Největší průměrná záporná hodnota poměrného prodloužení je při maximálním vnitřním přetlaku rovna -50,61 um/m.



**Graf 6.2:** Tenzometr 2 z programu DEWESoft 7.0

Tenzometr 2 měří tečnou poměrnou deformaci ve vzdálenosti 354 mm od horního okraje. Zde jsou nejvíce znatelné intervaly po změně tlaku. Průměrná maximální hodnota poměrného prodloužení při maximálním přetlaku rovna 190,48  $\mu\text{m}/\text{m}$ .



**Graf 6.3:** Tenzometr 3 z programu DEWESoft 7.0



Tenzometr 3 měří poměrnou deformaci v tečném směru v oblasti zesíleného lemu, ve vzdálenosti 25 mm od horního okraje. Největší průměrná záporná hodnota poměrného prodloužení je při maximálním vnitřním přetlaku rovna -123,03  $\mu\text{m/m}$ .

### 6.3 Porovnání výsledků z Matlabu a tenzometrie

Při tenzometrickém měření jsme tlak v nádobě měřili pomocí manometru, který je součástí tlakové nádoby. Výsledky získané z programu DEWEsoft 7.0 jsou v Tabulce 6.1.

**Tabulka 6.1:** Maximální hodnoty naměřené tenzometry

	Umístění od kraje [mm]	$[\mu\text{m/m}]$	[mm/m]
Tenzometr 1 ( $\varepsilon_x$ )	27	-56,61	-0,057
Tenzometr 2 ( $\varepsilon_t$ )	354	190,48	0,191
Tenzometr 3 ( $\varepsilon_t$ )	25	-123,03	-0,123

Pro porovnání výsledků výpočtů a experimentálního měření stanovíme osově a tečně poměrné prodloužení v místě tenzometrů z Hookeova zákona pro dvousou napjatost:

$$\text{osové poměrné prodloužení: } \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_t), \quad (6.1)$$

$$\text{tečné poměrné prodloužení: } \varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_x). \quad (6.2)$$

Za napětí dosadíme vypočtené hodnoty, které přísluší poloze jednotlivých tenzometrů. Napětí získáme z výsledků výpočtu v grafu 3.3. Hodnoty napětí jsou v tabulce 6.2.

**Tabulka 6.2:** Hodnoty z Matlabu

Umístění tenzometru č.	Vzdálenost od kraje [mm]	$\sigma_x$ [MPa]	$\sigma_t$ [MPa]
1	27	-105	-83
2	354	61	120
3	25	-123	-88

Po dosazení napětí do vztahů (6.1) a (6.2) dostáváme poměrné prodloužení v místě prvního, druhého a třetího tenzometru:

$$\varepsilon_{x1} = -4,005 \cdot 10^{-4} [m/m] = -0,401 [mm/m]$$

$$\varepsilon_{t2} = 5,085 \cdot 10^{-4} [m/m] = 0,509 [mm/m]$$

$$\varepsilon_{i3} = -2,555 \cdot 10^{-4} [m/m] = -0,256 [mm/m]$$

Když porovnáme výsledky  $\varepsilon_{x1}$ ,  $\varepsilon_{t2}$ ,  $\varepsilon_{i3}$  s hodnotami poměrných prodloužení z tabulky 6.1, tak vidíme, že se ani z daleka neshodují. To je pravděpodobně způsobeno tím, že manometr nefunguje správně. Maximální tlak stanovený výrobcem je 1,63 MPa. Tuto hodnotu jsme uvažovali ve výpočtech. Poměrné prodloužení z tenzometrického měření je několikanásobně menší, tedy skutečný tlak v nádobě je pravděpodobně nižší, než ukazuje manometr.

Skutečný tlak určíme pomocí tenzometru č. 2, ten vykazoval maximální poměrné prodloužení při údajných 16 barech 0,191 [mm/m]. Ze vztahu (6.2) vyjádříme a určíme hodnotu skutečného tlaku:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{1}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_x) \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E} \left( \frac{pR_2}{h_2} - \mu \frac{pR_2}{2h_2} \right) \\ p &= \frac{\varepsilon_t E R_2}{R_2 (1 - \mu)} = \frac{190,48 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}}{182,75 \cdot 10^{-3} \cdot (1 - 0,3)} \\ p &= 0,74 \text{ MPa} = 7,4 \text{ bar} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Skutečný tlak je 7,4 bar, tedy méně než polovina toho co naměřil manometr.



Podle výpočtu vztahu 6.3 zjistíme skutečný tlak v každém ze sedmnácti kroků měření tenzometru 2. Výsledky skutečného tlaku jsou porovnány s údajnými hodnotami tlaku z manometru v tabulce 6.3.

**Tabulka 6.3:** Porovnání manometrického a skutečného tlaku

$p_{manom.} [bar]$	$p_2 [bar]$
0	0,593
2	1,428
4	2,314
6	3,155
8	4,030
10	4,896
12	5,723
14	6,623
16	7,450
14	6,609
12	5,705
10	4,813
8	4,006
6	3,098
4	2,259
2	1,426
0	0,443

Zatěžování a odlehčování nádoby považujeme na lineární, minimální odchylka v řádu setin někdy až tisícín baru je způsobena tím, že neřešíme ideální případ.

Díky linearitě jsme schopni určit konstantu  $k$  z poměru manometrického a skutečného tlaku.

$$k = \frac{P_{manom.}}{p_2} \quad (6.4)$$

Do vztahu 7.4 dosadíme postupně všechny hodnoty z tabulky 6.3. Průměrná hodnota ze sedmnácti hodnot je přibližně  $k = 1,7$ . Pomocí konstanty  $k$  můžeme poměrně

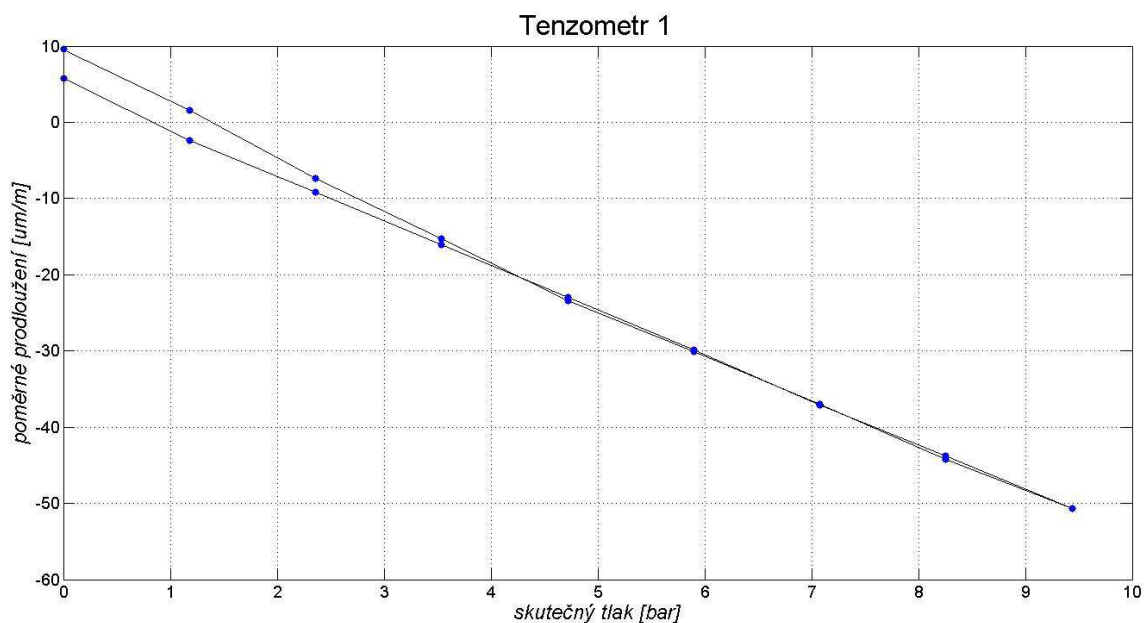
přesně určit skutečný tlak  $p = \frac{P_{manom.}}{k}$ .

Hodnoty poměrného prodloužení jednotlivých tenzometrů získáme z grafů (6.1), (6.2) a (6.3). Potřebujeme získat průměrnou hodnotu poměrného prodloužení v každém intervalu, kde je konstantní tlak. Záznam každého tenzometru bude obsahovat sedmnáct intervalů. Hodnoty z intervalů jsou zprůměrovány. Jelikož jsme z každého tenzometru uložili přibližně 3 000 hodnot, sestavili jsme pro výpočet průměrů z intervalů skript v Matlabu (viz příloha D). V tomto skriptu jsou dále příkazy pro určení skutečného tlaku a vykreslení závislostí poměrných prodloužení na tlaku.

**Tabulka 6.4:** Hodnoty poměrných prodloužení tenzometrů a skutečného tlaku

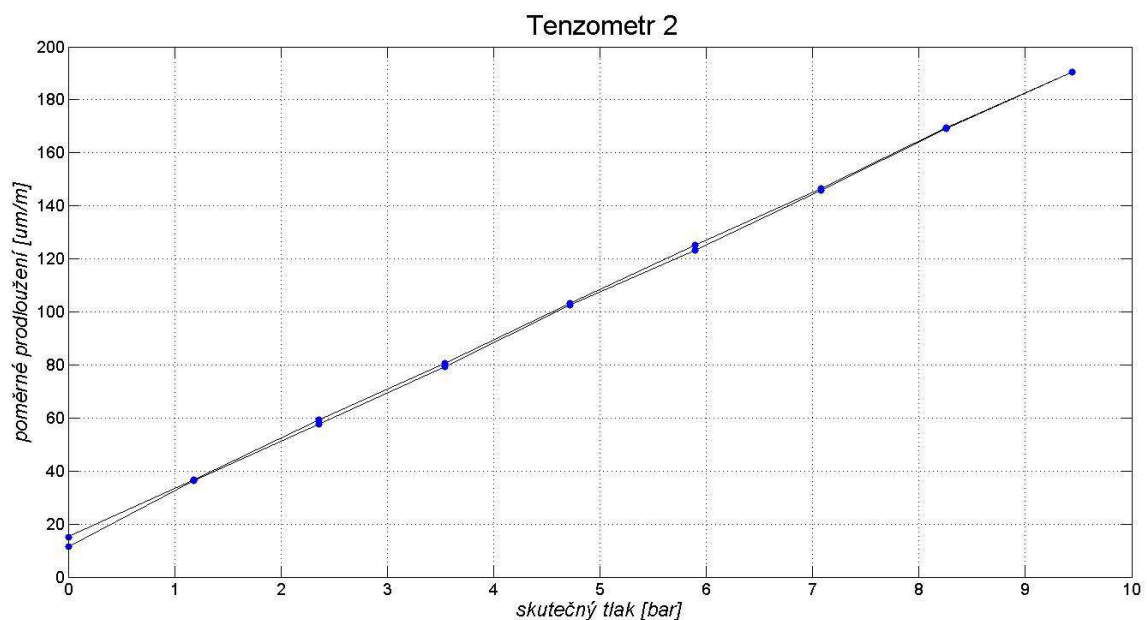
$\varepsilon_{x1} [\mu m / m]$	$\varepsilon_{t2} [\mu m / m]$	$\varepsilon_{t3} [\mu m / m]$	$p [bar]$
9,572	15,162	10,653	0,000
1,524	36,536	-7,023	1,180
-7,343	59,198	-22,986	2,359
-15,287	80,713	-40,367	3,539
-23,402	103,102	-57,006	4,718
-30,119	125,259	-74,410	5,898
-36,951	146,417	-90,166	7,077
-44,186	169,458	-107,459	8,257
-50,669	190,596	-123,019	9,437
-43,735	169,097	-107,319	8,257
-37,055	145,961	-89,852	7,077
-29,883	123,150	-72,565	5,898
-22,938	102,499	-56,893	4,718
-16,016	79,251	-39,874	3,539
-9,197	57,805	-23,468	2,359
-2,332	36,474	-7,403	1,180
5,784	11,328	10,089	0,000

Nyní už jsou určeny hodnoty poměrného prodloužení všech tenzometrů a hodnoty skutečného tlaku (viz tabulka 6.4). Jednotlivé závislosti poměrných prodloužení na skutečném tlaku jsou znázorněny v grafech (6.4), (6.5) a (6.6).



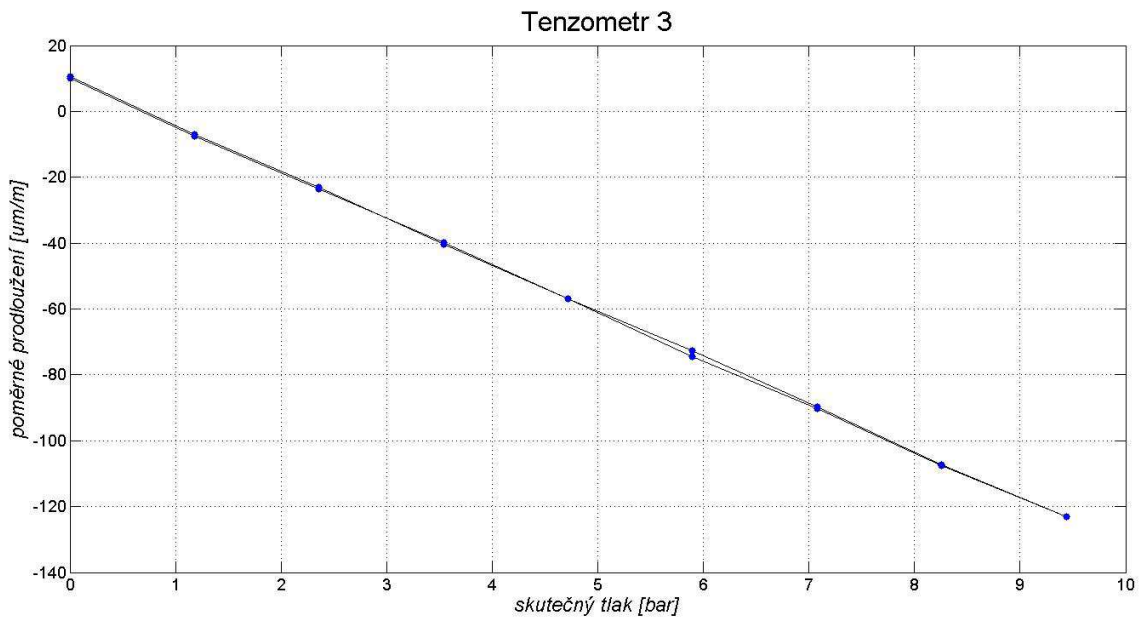
**Graf 6.4:** Zatěžování a odlehčování nádoby (tenzometr 1) v závislosti na tlaku

V ideálním případě by se měla zatěžovací a odlehčovací křivka překrývat. Mírná odchylka je způsobena z velké části ručním určování intervalů. Vypočítané hodnoty jsou v tabulce 6.4.



**Graf 6.5:** Zatěžování a odlehčování nádoby (tenzometr 2) v závislosti na tlaku

Zde se obě křivky téměř překrývají. Tento tenzometr se jako jediný vykazuje tahovou deformaci, proto se poměrné prodloužení pohybuje v kladných hodnotách. Vypočítané hodnoty jsou v tabulce 6.4.



**Graf 6.6:** Zatěžování a odlehčování nádoby (tenzometr 3) v závislosti na tlaku

Tenzometr 3 je deformován tlakem. Poměrné prodloužení je při zatěžování a odlehčování. Vypočítané hodnoty jsou v tabulce 6.4.

## 7 Závěr

Cílem bakalářské práce bylo vypočítat a experimentálně ověřit napětí a deformace tenkostěnné tlakové nádoby. V úvodu jsou odvozeny základní vztahy pro výpočet napjatosti tenkých skořepin, rotační tenké desky a napjatosti v okolí otvorů tenké desky podle Kirschovy úlohy. Vrchní víko považujeme za tenkou kruhovou desku zatíženou vnitřním tlakem, která je namáhána na ohyb. Výpočtem bylo ověřeno, že krátký zesílený lem, který je spojen s deskou lze považovat za tenkou krátkou skořepinu a druhou, střední válcovou část nádoby můžeme považovat za tenkou dlouhou skořepinu. Na základě deformačních rovnic byly sestaveny okrajové podmínky v horní a dolní části tlakové nádoby. Tato soustava rovnic byla numericky vyřešena v symbolickém toolboxu programu Matlab a také metodou konečných prvků v programu Autodesk Simulation Mechanical 2015. Výsledky z Matlabu jsou znázorněny pomocí grafů s průběhy napětí, průhybů (deformací) a momentů. Výsledky z metody konečných prvků přibližně odpovídají výsledkům z Matlabu (viz tabulka (7.1) a (7.2)). Ekvivalentní napětí vypočtené z Matlabu a napětí podle von Mises z MKP výpočtu vysoce přesahují hodnotu napětí meze kluzu materiálu tlakové nádoby, to je způsobeno tím, že celou problematiku řešíme lineárně, pouze v mezích elastických deformací.

Experimentálním měřením jsme zjistili, že naměřené poměrné prodloužení je v průměru třikrát menší nežli poměrné prodloužení vypočítané z hodnot napětí. Tato vysoká odchylka je způsobena špatně měřícím manometrem. Výrobce už byl obeznán a nefunkční manometr v nejbližší době nahradí. Skutečný tlak, který je v nádobě jsme určili z tenzometru 2, umístěného v tečném směru přibližně v polovině výšky tlakové nádoby. Výrobce udává maximální tlak 16,3 barů, odvozený z meze kluzu (240 MPa). Z Hookeova zákona pro dvouosou napjatost byl pro tečné poměrné prodloužení vypočítán skutečný tlak 7,4 barů. V podkapitole 7.3 jsou uvedeny grafické závislosti tenzometrického poměrného prodloužení na skutečném tlaku.

**Tabulka 7.1:** Srovnání výsledků z horní části nádoby

HORNÍ OKRAJ	Matlab	MKP
Průhyb [mm]	0,098 (-0,065)	0,097 (-0,086)
Moment [Nm]	2375	/
Napětí [MPa]	600 (osové)	753,22 (von Mises)
Průhyb desky [mm]	1,43	1,36
Momenty v desce [Nm]	9007	/
Napětí v desce [MPa]	240	298 (von Mises)

**Tabulka 7.2:** Srovnání výsledků ze spodní části nádoby

SPODNÍ OKRAJ	Matlab	MKP
Průhyb [mm]	0,095	0,095
Moment [Nm]	424 (osový)	/
Napětí [MPa]	131 (osové)	157,64 (von Mises)

## Použitá literatura

STRÍŽ, Bohuslav, 1986. *Pružnost a pevnost - II. díl*. Druhé vydání. Liberec: Ediční středisko VŠST Liberec. Číslo publikace 55 - 803 - 86.

Automatizace.hw.cz. *Automatizace.hw.cz* [online]. 1997 [cit. 2016-06-29]. Dostupné z: <http://automatizace.hw.cz/clanek/2005111>

Fracture Mechanics. *Stress Concentrations at Holes* [online]. USA: McGinty, 2014 [cit. 2016-07-01]. Dostupné z: <http://www.fracturemechanics.org/hole.html>

## A Obsah přiloženého CD

- bakalářská práce
  - bakalarska\_prace\_2016\_Josef\_Prokop.pdf
  - kopie\_zadání\_bakalarska\_prace\_2016\_Josef\_Prokop.pdf
- skript
  - pro výpočet tlakové nádoby v oblasti horního víka (v programu Matlab)
  - pro výpočet tlakové nádoby v oblasti vetknutí (v programu Matlab)
  - pro střední hodnoty všech tenzometrů (v programu Matlab)
- data z tenzometrického měření (.xlsx, .txt)
  - výchozí hodnoty (data\_1)
  - měření 2 a 3 (data\_2, data\_3)

## B Skript na výpočet horní části tlakové nádoby

```
% VÝPOČET HORNÍ ČÁSTI TLAKOVÉ NÁDOBY
% 1.....zesílený lem pod deskou
% 2.....dlouhá skořepina
clear

syms x r C1 C2 A1 A2 A3 A4 A5 A6 real %hodnoty v symbolic-
                                     kém tvaru

%KONSTANTY:
pk=0.3; %Poissonovo číslo
hd=15; %tloušťka desky [mm]
E=2*10^5; %modul pružnosti pro ocel [MPa]
p=1.63; %tlak [MPa]
R=184; %poloměr desky minus h1/2 (polovina tloušťky) [mm]
R1=184; %poloměr zesíleného lemu [mm]
R2=182.75; %poloměr dlouhé skořepiny [mm]
h1=5; %tloušťka zesíleného lemu[mm]
h2=2.5; %tloušťka dlouhé skořepiny [mm]
u=37.5; %délka zesíleného lemu [mm]

%KONSTANTY (VZORCE):
Dd=(E*hd^3)/(12*(1-pk^2)); %tuhost desky
D1=(E*h1^3)/(12*(1-pk^2)); %tuhost 1
D2=(E*h2^3)/(12*(1-pk^2)); %tuhost 2
B1=sqrt(sqrt((3*(1-pk^2))/(R1^2*h1^2))); % konstanta 1
B2=sqrt(sqrt((3*(1-pk^2))/(R2^2*h2^2))); % konstanta 2
T1=(p*R1)/2; %osová síla 1
T2=(p*R2)/2; %osová síla 2
Wp1=(1/(4*B1^4))*(-(pk*T1)/(D1*R1))+(p/D1); %partikulární
                                             řešení 1
Wp2=(1/(4*B2^4))*(-(pk*T2)/(D2*R2))+(p/D2); %partikulární
                                             řešení 2
Sa1=(p*R1)/(2*h1); %axiální napětí, (membránové) v 1
St1=(p*R1)/h1; %tečné napětí, (membránové) v 1
Sa2=(p*R2)/(2*h2); %axiální napětí, (membránové) ve 2
St2=(p*R2)/h2; %tečné napětí, (membránové) ve 2

%ROVNICE:
Wd=((C1*r^2)/2)-((p*r^4)/(Dd*64))+C2; %průhyb desky
Vd=C1*R-((p*R^3)/(16*Dd)); %natočení desky
Md=Dd*(C1*(1+pk)-(((3+pk)*p*R^2)/(16*Dd))); %radiální mo-
                                             ment okraje desky
W1=(exp(B1*x))*(A1*sin(B1*x)+A2*cos(B1*x))+(exp(B1*x))*(A3*
sin(B1*x)-A4*cos(B1*x))+Wp1; %průhyb 1
W2=(exp(-B2*x))*(A5*sin(B2*x)+A6*cos(B2*x))+Wp2; %průhyb 2
Mx1=D1*diff(W1,2,x); %osový moment 1
Mx2=D2*diff(W2,2,x); %osový moment 2
```



```

Mt1=pk*Mx1; %obvodový moment 1
Mt2=pk*Mx2; %obvodový moment 2

%ROVNICE(anulované O.P.):
r1=subs(W1,x,0); %průhyb 1 = 0
r2=Vd+subs((diff(W1,x)),x,0); %natočení desky = -natočení 1
r3=Md+subs((diff(W1,2,x)*D1),x,0); %moment desky= -moment 1
r4=subs((diff(W1,2,x)*D1),x,u)-subs((diff(W2,2,x)*D2),x,0);
    %moment 1 = moment 2
r5=subs((diff(W1,3,x)*D1),x,u)-subs((diff(W2,3,x)*D2),x,0);
    %příčná síla 1 = příčná síla 2
r6=subs((diff(W1,x)),x,u)-subs((diff(W2,x)),x,0);
    %natočení 1 = natočení 2
r7=subs(W1,x,u)-subs(W2,x,0); %průhyb 1 = průhyb 2
r8=subs(Wd,r,R); %průhyb desky na okraji = 0

%ŘEŠENÍ ROVNIC:
reseni=solve(r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,C1,A1,A2,A3,A4,
    A5,A6,C2);

%HODNOTY JEDNOTLIVÝCH KONSTANT (s dvojitou přesností -
double):
c1=double(reseni.C1);
a1=double(reseni.A1);
a2=double(reseni.A2);
a3=double(reseni.A3);
a4=double(reseni.A4);
a5=double(reseni.A5);
a6=double(reseni.A6);
c2=double(reseni.C2);

%DESKA:
Mr=Dd*(c1*(1+pk)-(((3+pk)*p*r^2)/(16*Dd))); %radiální mo-
    ment desky (v závislosti na poloměru r)
Mt=Dd*(c1*(1+pk)-(((3*pk+1)*p*r^2)/(16*Dd))); %tečný moment
    desky (v závislosti na poloměru r)
Sr=(6*Mr)/hd^2; %radiální napětí
St=(6*Mt)/hd^2; %tečné napětí
Sekv_d=sqrt((St^2)+(Sr^2)-(Sr*St));%ekvivalentní napětí
    (HMH) v desce
Wd=((c1*r^2)/2)-((p*r^4)/(Dd*64))+c2; %průhyb desky

%SESÍLENÝ LEM:
Wlk=(exp(B1*x))*(a1*sin(B1*x)+a2*cos(B1*x))+(exp(B1*x))*(a3
    *sin(B1*x)-a4*cos(B1*x))+Wp1; %průhyb 1
Mol=subs((Mx1),{A1,A2,A3,A4},{a1,a2,a3,a4}); %moment 1 (do-
    sazení do Mx1)

```

```

Sx1=(6*subs(Mx1,{A1,A2,A3,A4},{a1,a2,a3,a4}))/((h1^2)+Sa1;
                                     %osové napětí 1
So1=(6*subs(Mt1,{A1,A2,A3,A4},{a1,a2,a3,a4}))/((h1^2)+St1;
                                     %obvodové napětí 1
Seqv1=((sqrt(2))/2)*sqrt(((Sx1-So1)^2)+((So1+p)^2)+((-p-
Sx1)^2)); %ekvivalentní napětí (HMH) ve skořepině
Mx1k=subs(Mx1,{A1 A2 A3 A4},{a1 a2 a3 a4}); %osový moment
                                     konečný 1 (dosazeno za A1 A2 ....)
Mt1k=subs(Mt1,{A1 A2 A3 A4},{a1 a2 a3 a4}); %obvodový mo-
                                     ment konečný 1 (dosazeno za A1 A2 ....)

%DLOUHÁ SKOŘEPINA:
W2k=(exp(-B2*x))*(a5*sin(B2*x)+a6*cos(B2*x))+Wp2; %průhyb 2
Mo2=subs((Mx2),{A5,A6},{a5,a6}); %moment 2 (dosazení za
                                     Mx2)
Sx2=(6*subs(Mx2,{A5,A6},{a5,a6}))/((h2^2)+Sa2; %osové napětí
                                     2
So2=(6*subs(Mt2,{A5,A6},{a5,a6}))/((h2^2)+St2; %obvodové na-
                                     pětí 2
Seqv2=((sqrt(2))/2)*sqrt(((Sx2-So2)^2)+((So2+p)^2)+((-p-
Sx2)^2)); %ekvivalentní napětí (HMH)
Mx2k=subs(Mx2,{A5 A6},{a5 a6}); %osový moment konečný 2
                                     (dosazeno za A1 A2 ....)
Mt2k=subs(Mt2,{A5 A6},{a5 a6}); %obvodový moment konečný 2
                                     (dosazeno za A1 A2 ....)

%-----

%GRAFY PRO PRŮHYB:
pruhyb1=0:0.01:37.5;
pr1=subs(W1k,x,pruhyb1);
pruhyb2=0:0.01:120;
pr2=subs(W2k,x,pruhyb2);
plot([pruhyb1 pruhyb2+37.5],[pr1 pr2],'k')
title('Průhyb u horního okraje')
grid on
xlabel('vzdálenost od kraje [mm]')
ylabel('přírůstek na poloměru [mm]')

figure

%-----

%GRAF PRO OSOVÝ MOMENT:
osovy1=0:0.01:37.5;
o1=subs(Mx1k,x,osovy1);
osovy2=0:0.01:80;
o2=subs(Mx2k,x,osovy2);
plot([osovy1 osovy2+37.5],[o1 o2],'g')

```

```

hold on

%GRAG PRO OBVODOVÝ MOMENT:
obvodovy1=0:0.01:37.5;
obv1=subs(Mt1k,x,obvodovy1);
obvodovy2=0:0.01:80;
obv2=subs(Mt2k,x,obvodovy2);
plot([obvodovy1 obvodovy2+37.5],[obv1 obv2])
title('Momenty u horního okraje')
grid on
xlabel('vzdálenost od kraje [mm]')
ylabel('moment [N.m]')
legend('Mx', 'Mt')

figure

%-----

%GRAF PRO OSOVÉ NAPĚTÍ:
osove1=0:0.01:37.5;
os1=subs(Sx1,x,osove1);
osove2=0:0.01:90;
os2=subs(Sx2,x,osove2);
plot([osove1 osove2+37.5],[os1 os2], 'r');

hold on

%GRAF PRO OBVODOVÉ NAPĚTÍ:
obvodove1=0:0.01:37.5;
ob1=subs(So1,x,obvodove1);
obvodove2=0:0.01:90;
ob2=subs(So2,x,obvodove2);
plot([obvodove1 obvodove2+37.5],[ob1 ob2])

hold on

%GRAF PRO EKVIVALENTNÍ NAPĚTÍ (skořepiny):
ekvi1=0:0.01:37.5;
ek1=subs(Seqv1,x,ekvi1);
ekvi2=0:0.01:90;
ek2=subs(Seqv2,x,ekvi2);
plot([ekvi1 ekvi2+37.5],[ek1 ek2], 'k--')
title('Napětí u horního okraje')
grid on
xlabel('vzdálenost od kraje [mm]')
ylabel('napětí [MPa]')
legend('sigma(x)', 'sigma(t)', 'sigma(eqv)')

figure

%-----

```

```
%GRAF PRO MOMENTY V DESCE:
```

```
radialni=0:0.01:184;  
rad=subs(Mr,r,radialni);  
tecny=0:0.01:184;  
tec=subs(Mt,r,tecny);  
plot(radialni,rad,'g')  
title('Momenty v desce')  
grid on  
xlabel('poloměr [mm]')  
ylabel('Moment [N.m]')  
hold on  
plot(tecny,tec)  
legend('Mr(r)', 'Mt(r)')
```

```
figure
```

```
%-----
```

```
%GRAF PRO RADIÁLNÍ NAPĚTÍ V DESCE:
```

```
radialni1=0:0.01:184;  
rad1=subs(Sr,r,radialni1);  
plot(radialni1,rad1,'r')
```

```
hold on
```

```
%GRAF PRO TEČNÉ NAPĚTÍ V DESCE:
```

```
tecny1=0:0.01:184;  
tecl=subs(St,r,tecny1);  
plot(tecny1,tecl)
```

```
hold on
```

```
%GRAF PRO EKVIVALENTNÍ NAPĚTÍ (deska):
```

```
ekviv1=0:0.01:184;  
ekv1=subs(Sekv_d,r,ekviv1);  
plot(ekviv1,ekv1,'k--')  
title('Napětí v desce')  
grid on  
xlabel('poloměr [mm]')  
ylabel('Napětí [MPa]')
```

```
legend('sigma(r)', 'sigma(t)', 'sigma(ekv)')
```

```
figure
```

```
%-----
```

```
%PRŮHYB DESKY:  
  
pruhyb=0:0.01:184;  
pruh=subs(-Wd,r,pruhyb);  
plot(pruhyb,pruh)  
title('Průhyb desky')  
grid on  
xlabel('poloměr [mm]')  
ylabel('Průhyb [mm]')
```

## C Skript na výpočet tlakové nádoby u dolního dna (vetknutí)

```

%VÝPOČET TLAKOVÉ NÁDOBY VE VETKNUTÍ
% 3.....zesílený lem skořepiny
% 4.....dlouhá skořepina
clear

syms x A1 A2 A3 A4 A5 A6 real % hodnoty v symbolickém tvaru

%KONSTANTY:
pk=0.3; %Poissonovo číslo
E=2*10^5; %modul pružnosti pro ocel [MPa]
p=1.63; %tlak [MPa]
R1=184; %poloměr zesíleného lemu [mm]
R2=182.75; %poloměr dlouhé skořepiny [mm]
h1=5; %tloušťka zesíleného lemu [mm]
h2=2.5; %tloušťka dlouhé skořepiny [mm]
u=37.5; %délka zesíleného lemu [mm]

%KONSTANTY VZORCE:
D3=(E*h1^3)/(12*(1-pk^2)); %tuhost 3
D4=(E*h2^3)/(12*(1-pk^2)); %tuhost 4
B3=sqrt(sqrt((3*(1-pk^2))/(R1^2*h1^2))); %součinitel útlumu
3
B4=sqrt(sqrt((3*(1-pk^2))/(R2^2*h2^2))); %součinitel útlumu
4

T3x=(p*R1)/2; %osová síla 3
T4x=(p*R2)/2; %osová síla 4
Wp3=(1/(4*B3^4))*(-(pk*T3x)/(D3*R1)+(p/D3)); %part. řeše-
ní 3
Wp4=(1/(4*B4^4))*(-(pk*T4x)/(D4*R2)+(p/D4)); %part. řeše-
ní 4

Sa3=(p*R1)/(2*h1); %axiální napětí, (membránové) v silnější
části
St3=(p*R1)/h1; %tečné napětí, (membránové) v silnější části
Sa4=(p*R2)/(2*h2); %axiální napětí, (membránové) ve slabší
části
St4=(p*R2)/h2; %tečné napětí, (membránové) ve slabší části

%ROVNICE
W3=(exp(-
B3*x))*(A1*sin(B3*x)+A2*cos(B3*x))+(exp(B3*x))*(A3*sin(B3*x)
)-A4*cos(B3*x))+Wp3; %průhyb 3
W4=(exp(-B4*x))*(A5*sin(B4*x)+A6*cos(B4*x))+Wp4; %průhyb 4
Mx3=D3*diff(W3,2,x); %osový moment 3

```

```

Mx4=D4*diff(W4,2,x); %osový moment 4
Mt3=pk*Mx3; %obvodový moment 3
Mt4=pk*Mx4; %obvodový moment 4

%ROVNICE(anulované O.P.):
r1=subs(W3,x,0); %průhyb u vetknutí = 0
r2=subs((diff(W3,x)),x,0); %natočení u vetknutí = 0
r3=subs((diff(W3,2,x)*D3),x,u)-subs((diff(W4,2,x)*D4),x,0);
r4=subs(W3,x,u)-subs(W4,x,0); %průhyb 3 = průhyb 4
r5=subs((diff(W3,3,x)*D3),x,u)-subs((diff(W4,3,x)*D4),x,0);
    %příčná síla 3 = příčná síla 4
r6=subs((diff(W3,x)),x,u)-subs((diff(W4,x)),x,0); %natočení
    3 = natočení 4

%ŘEŠENÍ ROVNIC

reseni=solve(r1,r2,r3,r4,r5,r6,A1,A2,A3,A4,A5,A6);

%HODNOTY JEDNOTLIVÝCH KONSTANT:

a1=double(reseni.A1);
a2=double(reseni.A2);
a3=double(reseni.A3);
a4=double(reseni.A4);
a5=double(reseni.A5);
a6=double(reseni.A6);

%ZESÍLENÁ ČÁST
W3k=(exp(-
B3*x))*(a1*sin(B3*x)+a2*cos(B3*x))+(exp(B3*x))*(a3*sin(B3*x)
)-a4*cos(B3*x))+Wp3; %průhyb 3
Mo3=subs(Mx3,{A1,A2,A3,A4},{a1,a2,a3,a4}); %moment 3 (do-
    sazení do Mx3)
Sx3=(6*subs(Mx3,{A1,A2,A3,A4},{a1,a2,a3,a4}))/((h1^2)+Sa3;
    %osové napětí 3
So3=(6*subs(Mt3,{A1,A2,A3,A4},{a1,a2,a3,a4}))/((h1^2)+St3;
    %obvodové napětí 3
Seqv3=((sqrt(2))/2)*sqrt(((Sx3-So3)^2)+((So3+p)^2)+((-p-
Sx3)^2)); %ekvivalentní napětí (HMH)
Mx3k=subs(Mx3,{A1 A2 A3 A4},{a1 a2 a3 a4}); %osový moment
    konečný 3 (dosazeno za A1 A2 ....)
Mt3k=subs(Mt3,{A1 A2 A3 A4},{a1 a2 a3 a4}); %obvodový mo-
    ment konečný 3 (dosazeno za A1 A2 ....)

%SLABŠÍ ČÁST
W4k=(exp(-B4*x))*(a5*sin(B4*x)+a6*cos(B4*x))+Wp4; %průhyb 4
Mo4=subs(Mx4,{A5,A6},{a5,a6}); %moment 4 (dosazeni za
    Mx4)

```

```

Sx4=(6*subs(Mx4,{A5,A6},{a5,a6}))/ (h2^2)+Sa4; %osové napětí
4
So4=(6*subs(Mt4,{A5,A6},{a5,a6}))/ (h2^2)+St4; %obvodové na-
pětí 4
Seqv4=((sqrt(2))/2)*sqrt(((Sx4-So4)^2)+((So4+p)^2)+((-p-
Sx4)^2)); %ekvivalentní napětí (HMH)
Mx4k=subs(Mx4,{A5 A6},{a5 a6}); %osový moment konečný 4
(dosazeno za A1 A2 ....)
Mt4k=subs(Mt4,{A5 A6},{a5 a6}); %obvodový moment konečný 4
(dosazeno za A1 A2 ....)

%-----

%GRAFY PRO PRŮHYB
pruhyb3=0:0.01:37.5;
pr3=subs(W3k,x,pruhyb3);
pruhyb4=0:0.01:120;
pr4=subs(W4k,x,pruhyb4);
plot([pruhyb3 pruhyb4+37.5],[pr3 pr4])
title('Průhyb u vetknutí')
grid on
xlabel('vzdálenost od kraje [mm]')
ylabel('přírůstek na poloměru [mm]')

figure

%-----

%GRAF PRO OSOVÝ MOMENT
osovy3=0:0.01:37.5;
o3=subs(Mx3k,x,osovy3);
osovy4=0:0.01:80;
o4=subs(Mx4k,x,osovy4);
plot([osovy3 osovy4+37.5],[o3 o4],'g')

hold on

%GRAG PRO OBVODOVÝ MOMENT
obvodovy3=0:0.01:37.5;
obv3=subs(Mt3k,x,obvodovy3);
obvodovy4=0:0.01:80;
obv4=subs(Mt4k,x,obvodovy4);
plot([obvodovy3 obvodovy4+37.5],[obv3 obv4])
title('Moment u vetknutí')
grid on
xlabel('vzdálenost od kraje [mm]')
ylabel('moment [N.m]')
legend('Mx','Mt')

```



figure

%-----

**%GRAF PRO OSOVÉ NAPĚTÍ**

```
osove3=0:0.01:37.5;  
os3=subs(Sx3,x,osove3);  
osove4=0:0.01:90;  
os4=subs(Sx4,x,osove4);  
plot([osove3 osove4+37.5],[os3 os4],'r');
```

hold on

**%GRAF PRO OBVODOVÉ NAPĚTÍ**

```
obvodove3=0:0.01:37.5;  
ob3=subs(So3,x,obvodove3);  
obvodove4=0:0.01:90;  
ob4=subs(So4,x,obvodove4);  
plot([obvodove3 obvodove4+37.5],[ob3 ob4])
```

hold on

**%GRAF PRO EKVIVALENTNÍ NAPĚTÍ**

```
ekvi3=0:0.01:37.5;  
ek3=subs(Seqv3,x,ekvi3);  
ekvi4=0:0.01:90;  
ek4=subs(Seqv4,x,ekvi4);  
plot([ekvi3 ekvi4+37.5],[ek3 ek4],'k--')  
title('Napětí u vetknutí')  
grid on  
xlabel('vzdálenost od kraje [mm]')  
ylabel('napětí [MPa]')  
legend('sigma(x)', 'sigma(t)', 'sigma(eqv)')
```

## D Skript na výpočet průměrů poměrného prodloužení, skutečného tlaku a vykreslení grafů

```
%STŘEDNÍ HODNOTY GRAFU 2. TENZOMETRU, SKUT. TLAK, GRAFY

% Před spuštěním skriptu je nutné uložit do Matlabu data z
měření (.xlsx)

% v matici A jsou intervaly jednotlivých pom. prodloužení
1. tenzometru
A = [1 45; 80 230; 260 420; 445 610;
     620 790; 810 965; 985 1155; 1180 1340;
     1345 1530; 1550 1730; 1750 1910; 1915 2090;
     2100 2260; 2280 2450; 2465 2625; 2645 2790; 2840 2900];

% v matici B jsou intervaly jednotlivých pom. prodloužení
2. tenzometru
B = [1 35; 90 230; 270 410; 450 590;
     630 780; 800 950; 980 1150; 1180 1330;
     1360 1530; 1550 1720; 1750 1900; 1940 2080;
     2110 2260; 2300 2450; 2460 2620; 2660 2800; 2860 2900];

% v matici C jsou intervaly jednotlivých pom. prodloužení
3. tenzometru
C = [1 28; 80 240; 270 420; 445 600;
     620 780; 800 960; 990 1145; 1180 1335;
     1360 1520; 1550 1720; 1750 1905; 1940 2080;
     2115 2265; 2285 2445; 2465 2625; 2650 2805; 2850 2900];

prumer_tenzometru_1 = zeros(17,1); % prázdná matice pro zá-
pis 17 řádků v 1 sloupci

for ii = 1:17

prumer_tenzometru_1(ii) = mean(data(A(ii,1):A(ii,2), 5));
% výpočet průměru a intervalů a zápis do matice

end

prumer_tenzometru_1 % výpis průměru z tenzometru 1

%-----
```

```

prumer_tenzometru_2 = zeros(17,1); % prázdná matice pro zá-
                                pis 17 řádků v 1 sloupci

for ii = 1:17

prumer_tenzometru_2(ii) = mean(data(B(ii,1):B(ii,2), 4));
% výpočet průměru a intervalů a zápis do matice

end

prumer_tenzometru_2 % výpis průměru z tenzometru 2

%-----

prumer_tenzometru_3 = zeros(17,1); % prázdná matice pro zá-
                                pis 17 řádků v 1 sloupci

for ii = 1:17

prumer_tenzometru_3(ii) = mean(data(C(ii,1):C(ii,2), 2));
% výpočet průměru a intervalů a zápis do matice

end

prumer_tenzometru_3 % výpis průměru z tenzometru 3

%-----

% ZMĚNA ZDÁNLIVÉHO TLAKU NA SKUTEČNÝ

% matice hodnot z manometru
Z = [0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 14; 12; 10; 8; 6; 4; 2;
0 ];

S = zeros(17, 1); % prázdná matice pro zápis 17 řádků v 1
                sloupci

% konstanta
k = 1.695526799;

for ii = 1 : 17

    S(ii) = [((Z(ii,1))/k)]; % výpočet skutečného tlaku

end

S % výpis skutečného tlaku v matici S

%-----

```

```
% GRAFY ZÁVISLOSTI TENZOMETRICKÉHO POMĚRNÉHO PRODLOUŽENÍ NA  
SKUT. TLAKU
```

```
plot (S, prumer_tenzometru_1, 'k+-')  
grid on  
title ('Tenzometr 1')  
xlabel ('skutečný tlak [bar]')  
ylabel ('poměrné prodloužení [um/m]')
```

```
figure
```

```
plot (S, prumer_tenzometru_2, 'k+-')  
grid on  
title ('Tenzometr 2')  
xlabel ('skutečný tlak [bar]')  
ylabel ('poměrné prodloužení [um/m]')
```

```
figure
```

```
plot (S, prumer_tenzometru_3, 'k+-')  
grid on  
title ('Tenzometr 3')  
xlabel ('skutečný tlak [bar]')  
ylabel ('poměrné prodloužení [um/m]')
```