

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta stavební

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Brno, 2023

Bc. Michal Kučera



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STAVEBNÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

## ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

# STOCHASTICKÉ DISKRÉTNÍ MODELOVÁNÍ ROZVOJE PORUŠENÍ V BETONOVÝCH KONSTRUKCÍCH

STOCHASTIC DISCRETE MODELING OF PROGRESSIVE DAMAGE IN CONCRETE STRUCTURES

## DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

## AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Michal Kučera

## VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. Miroslav Vořechovský, Ph.D.

BRNO 2023

# Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav stavební mechaniky  
Student: **Bc. Michal Kučera**  
Vedoucí práce: **prof. Ing. Miroslav Vořechovský, Ph.D.**  
Akademický rok: 2022/23  
Studijní program: N0732A260026 Stavební inženýrství – konstrukce a dopravní stavby

Děkan Fakulty Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## **Stochastické diskrétní modelování rozvoje porušení v betonových konstrukcích**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Student se seznámí s modely poškození v nelineární mechanice se zaměřením na modelování mechanické odezvy betonu a podobných granulárních materiálů s neuspořádanou vnitřní strukturou. Porovná výhody a nevýhody spojitých a diskrétních přístupů a seznámí se s diskrétním modelem založených na pracích G. Cusatisse. Dále se student seznámí s vlivem velikosti na nominální pevnost konstrukcí, a to zejména s energetickým a deterministickým vlivem velikosti a statistických vlivem velikosti na pevnost.

Student využije dostupnou výpočtovou platformu pro numerickou studii chování dříve experimentálně testovaných betonových nosníků tvaru psí kosti o různých velikostech; konkrétně se zaměří unikátní sadu testovanou van Vlietem, která má poměr rozměrů geometricky podobných nosníků 1/32. Pro tyto nosníky sestaví potřebné modely a provede studii odezvy s deterministickými vstupními parametry (až na náhodnou vnitřní strukturu) a poté se pokusí vysvětlit silný vliv velikosti na pevnosti pomocí náhodné prostorové proměnlivosti pevnosti a houževnatosti materiálu za použití modelu náhodného pole. Výsledky zkoumání stručně shrne.

### **Cíle a výstupy diplomové práce:**

Práce se zabývá využitím deterministického i stochastického modelování s vlivem nahodilosti materiálových parametrů k napodobení série experimentálních zkoušek betonových těles tvaru psí kosti při jednoosém excentrickém tahu zaměřujících se na vliv velikosti konstrukce na její mechanické vlastnosti, především na nominální pevnost. (Size effect). Úloha bude řešena jako úloha rovinné napjatosti pomocí dostupných diskrétních výpočetních metod.

### **Seznam doporučené literatury a podklady:**

- [1] Vořechovský, M. Interplay of size effects in concrete specimens under tension studied via computational stochastic fracture mechanics. *International Journal of Solids and Structures* (Elsevier), 44(9):2715-2731, DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.08.019, 2007.
- [2] Vořechovský, M.; Sadílek, V. Computational modeling of size effects in concrete specimens under uniaxial tension. *International Journal of Fracture* (Springer), 154(1-2):27-49, 2008. DOI: 10.1007/s10704-009-9316-9.
- [3] van Mier J, van Vliet M (2003) Influence of microstructure of concrete on size/scale effects in tensile fracture. *Eng Fract Mech* 70:2281–2306
- [4] Eliáš, J.; Vořechovský, M., Fracture in random quasibrittle media: I. Discrete meso-scale simulations of load capacity and fracture process zone. *Engineering Fracture Mechanics* (Elsevier), 235: 107160. doi: 10.1016/j.engfracmech.2020.107160, ISSN 0013-7944, 2020
- [5] Cusatis G, Bažant ZP, Cedolin L. Confinement-shear lattice model for concrete damage in tension and compression: I. Theory. *J Engng Mech – ASCE* 2003;129(12):1439–48 [ISSN 0733-9399].
- [6] Cusatis G, Bažant ZP, Cedolin L. Confinement-shear lattice CSL model for fracture propagation in concrete. *Comput Method Appl M* 2006;195(52):7154–71 [ISSN 0045-7825].
- [7] Cusatis G, Cedolin L. Two-scale study of concrete fracturing behavior. *Engng Fract Mech* 2007;74(12):3–17 [ISSN 0013-7944].
- [8] Cusatis G, Pelessone D, Mencarelli A. Lattice discrete particle model (LDPM) for failure behavior of concrete. I: Theory. *Cem Concr Comp* 2011;33(9):881–90 [ISSN 0958-9465]
- [9] Eliáš, J.; Vořechovský, M.; Skoček, J; Bažant, Z. Stochastic discrete meso-scale simulations of concrete fracture: Comparison to experimental data. *Engineering Fracture Mechanics* (Pergamon), doi: 10.1016/j.engfracmech.2015.01.004 135:1-16, 2015
- [10] Vořechovský, M.; Eliáš, J., Fracture in random quasibrittle media: II. Analytical model based on extremes of the averaging process. *Engineering Fracture Mechanics* (Elsevier), 235:107155, doi: 10.1016/j.engfracmech.2020.107155, ISSN 0013-7944, 2020
- [11] van Vliet M (2000) Size effect in tensile fracture of concrete and rock. PhD thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands
- [12] van Vliet M, van Mier J (1998) Experimental investigation of size effect in concrete under uniaxial tension. In: Mihashi H, Rokugo K (eds) *FRAMCOS-3*. Aedificatio Publishers, Japan, pp 1923–1936
- [13] van Vliet M, van Mier J (1999) Effect of strain gradients on the size effect of concrete in uniaxial tension. *Int J Fract* 95:195–219
- [14] van Vliet M, van Mier J (2000a) Experimental investigation of size effect in concrete and sandstone under uniaxial tension. *Eng Fract Mech* 65:165–188
- [15] van Vliet M, van Mier J (2000b) Size effect of concrete and sand-stone. *Eng Fract Mech* 45:91–108
- [16] Vořechovský, M. Simulation of simply cross correlated random fields by series expansion methods. *Structural safety* (Elsevier), 30(4):337-363, 2008

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku.

V Brně, dne 11. 4. 2022

L. S.

---

prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.  
vedoucí ústavu

---

prof. Ing. Miroslav Vořechovský, Ph.D.  
vedoucí práce

---

prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc., MBA, dr. h. c.  
děkan

## ABSTRAKT

Práce se zabývá statistickou pevností konstrukce z kvazikřehkého materiálu, konkrétně z betonu. Zvláštní pozornost je věnovaná vlivu velikosti konstrukce na pevnost a na celý proces porušování materiálu v průběhu zatěžování. Mechanika těchto procesů je modelována s použitím diskretních modelů a tyto modely jsou uvažovány i v pravděpodobnostní variantě s prostorově proměnlivými materiálovými parametry. Prostorová variabilita je pak modelována pomocí náhodných polí. Práce objasňuje vliv rozptýleného poškození v objemu konstrukce před dosažením maximálního zatížení na další průběh disipativních procesů, zejména na tvar lomové procesní zóny a následně na její interakci s náhodnou proměnlivostí parametrů materiálu u excentricky tažených těles tvaru psí kosti. Kromě nástrojů stochastické počítačové lomové mechaniky je představen i analytický model založený na průměrování a následné analýze minima náhodného pole.

## KLÍČOVÁ SLOVA

diskretní modelování, stochastické modelování, vliv velikosti, kvazikřehké materiály, porušování betonu, lomová procesní zóna, náhodné pole

## ABSTRACT

The work focuses on the statistical strength of structures made of quasi-brittle materials, specifically concrete. Special attention is paid to the influence of the size of the structure on strength and on the entire process of material failure during loading. The mechanics of these processes are modeled using discrete models, and these models are also considered in a probabilistic variant with spatially variable material parameters. Spatial variability is then modeled using random fields. The work clarifies the effect of diffuse damage in the volume of the structure before reaching the maximum load on the further course of dissipative processes, especially on the shape of the fracture process zone and subsequently on its interaction with the random variability of material parameters in eccentrically drawn dogbone-shaped bodies. In addition to the tools of stochastic computer fracture mechanics, an analytical model based on averaging and subsequent analysis of the minimum of the random field is presented.

## KEYWORDS

discrete modeling, stochastic modeling, size effect, quasi-brittle materials, damage of concrete structures, fracture process zone, random field

KUČERA, Michal. *Stochastické diskretní modelování rozvoje porušení v betonových konstrukcích*. Brno, 2021, 63 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce: prof. Ing. Miroslav Vořechovský, Ph.D.

## PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

Brno .....

.....

podpis autora

## PODĚKOVÁNÍ

Chtěl bych především poděkovat vedoucímu mé diplomové práce panu prof. Ing. Miroslavu Vořechovskému, Ph.D. za odborné vedení a ochotu a panu Ing. Václavu Sadílkovi Ph.D za technickou pomoc při zpracování dat. Děkuji také své rodině za velkou podporu během studia.

Tato práce vznikla za finanční podpory Grantové agentury České Republiky v rámci projektu č. 22-06684K (Stochastická únava betonu řešená přístupy založenými na disipaci energie s ohledem na vzájemné působení časových a teplotních účinků)

Brno .....

.....

podpis autora



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Cíle</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Stochastické diskrétní modely</b>	<b>12</b>
3.1	Mezo - úrovněové diskrétní modely . . . . .	12
3.2	Geometrie . . . . .	14
3.3	Mechanika diskrétních modelů . . . . .	15
3.3.1	Rovnice rovnováhy . . . . .	15
3.3.2	Konstitutivní zákon . . . . .	16
3.4	Stochastický model . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Oblast rozptýleného poškození</b>	<b>22</b>
4.1	Diskrétní modelování vlivu velikosti . . . . .	22
4.2	Vliv rozptýleného poškození na proces zatěžování kritického průřezu .	25
<b>5</b>	<b>Rozsah lomové procesní zóny (FPZ)</b>	<b>30</b>
5.1	Metodika měření . . . . .	31
5.2	Vliv velikosti na tvar FPZ . . . . .	32
5.3	Disipace energie v oblastech rozptýleného poškození . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Interakce lomové procesní zóny s náhodným polem lokální pevnosti</b>	<b>38</b>
6.1	Vliv autokorelační délky náhodného pole na nominální pevnost těles .	39
6.1.1	Vliv velikosti na nominální pevnost . . . . .	41
6.2	Modelování a výsledky . . . . .	43
6.2.1	Vliv parametrů náhodného pole na nominální pevnost . . . . .	43
<b>7</b>	<b>Analytický model statistického vlivu velikosti</b>	<b>47</b>
7.1	Průměr náhodného pole v lomové procesní zóně . . . . .	47
7.2	Průměrování dvojrozměrného náhodného pole . . . . .	49
7.3	Nominální pevnost jako minimum efektivní pevnosti . . . . .	50
7.4	Výsledky analytického modelu . . . . .	52
7.4.1	Závislost střední nominální pevnosti na autokorelační délce .	52
7.4.2	Závislost střední nominální pevnosti na velikosti těles . . . . .	54
<b>8</b>	<b>Diskuze</b>	<b>56</b>
<b>9</b>	<b>Závěr</b>	<b>57</b>

<b>Literatura</b>	<b>58</b>
<b>Seznam symbolů, veličin a zkratk</b>	<b>60</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>63</b>

# 1 Úvod

Při návrhu a posouzení stavebních konstrukcí do výpočtu vždy vstupují vlastnosti použitého materiálu, zejména jejich tahová, tlaková a smyková pevnost a jejich deformační charakteristiky. Mechanická odezva skutečných materiálů je příliš komplexní na to, abychom jejich chování popisovali exaktně, proto se využívá empirických zkoušek, standardizovaných zkušebních těles. Protože však mají skutečné konstrukce několikanásobně větší rozměry, než jsou rozměry zkušebních těles, je nutné rozumět tomu, jak se chování materiálu v konstrukci, vzhledem k její velikosti mění. Tento jev je známý jako *vliv velikosti* a u heterogenních kvazikřehkých materiálů, jako jsou například betony a některé geomateriály, se jím již několik dekád zabývá řada autorů, a to jak jeho energetickými, tak i statistickými zdroji.

S rostoucí komplexností výpočetních metod roste i schopnost těmto komplikovaným jevům porozumět. Ukazuje se, že jsou pro popis velikostních vlivů konstrukcí z betonu zvláště vhodné diskrétní modely zachycující heterogenní charakter materiálu, opatřené náhodným polem materiálových parametrů. V rámci autorovy bakalářské práce [1] byly proto použity stochastické diskrétní modely pro modelování těles z prostého betonu tvaru kosti (v anglické literatuře *Dogbone*) různých velikostí, zatížených excentrickým tahem, podle experimentálních zkoušek provedených v rámci dizertační práce van Vliet [2].

Cílem předložené práce je na práci [1] navázat a zaměřit se na dílčí problémy, se kterými se práce potýkala. Zaměříme se na vliv rozptýlených poruch vznikajících před dosažením maximálního zatížení, ukážeme si, jak problém vzniká, a jaký má dopad na pevnosti modelovaných těles. Dále se zaměříme na vliv velikosti tělesa na tvar a velikost *lomové procesní zóny* v betonu. Popíšeme si způsob měření lomové procesní zóny u diskrétních modelů a výsledky vyhodnotíme.

Vliv velikosti na tvar lomové procesní zóny v betonu má důležitý význam při modelování statistického vlivu velikosti. V rámci publikace Vořechovský; Eliáš [3] je představený analytický model pro interakci náhodného pole s lomovou procesní zónou. V rámci předložené práce je analytický model stručně popsán a aplikován pro vliv velikosti s měnící se procesní zónou, výsledky jsou porovnány s výsledky stochastických diskrétních modelů.

## 2 Cíle

- Představení stochastických diskrétních modelů
- Řešení vybraných problémů při modelování vlivu velikosti:
  - Vliv rozptýleného poškození na proces zatěžování kritického průřezu
  - Vliv velikosti na lomovou procesní zónu
  - Interakce lomové procesní zóny s polem náhodných materiálových parametrů
- Představení analytických modelů pro modelování vlivu velikosti

## 3 Stochastické diskrétní modely

Nejprve si přiblížíme základní koncept stochastických diskrétních modelů používaných v předložené práci. Diskrétními modely je v našem kontextu myšlena rodina výpočetních metod v základě stojící na metodě konečných prvků, kde však:

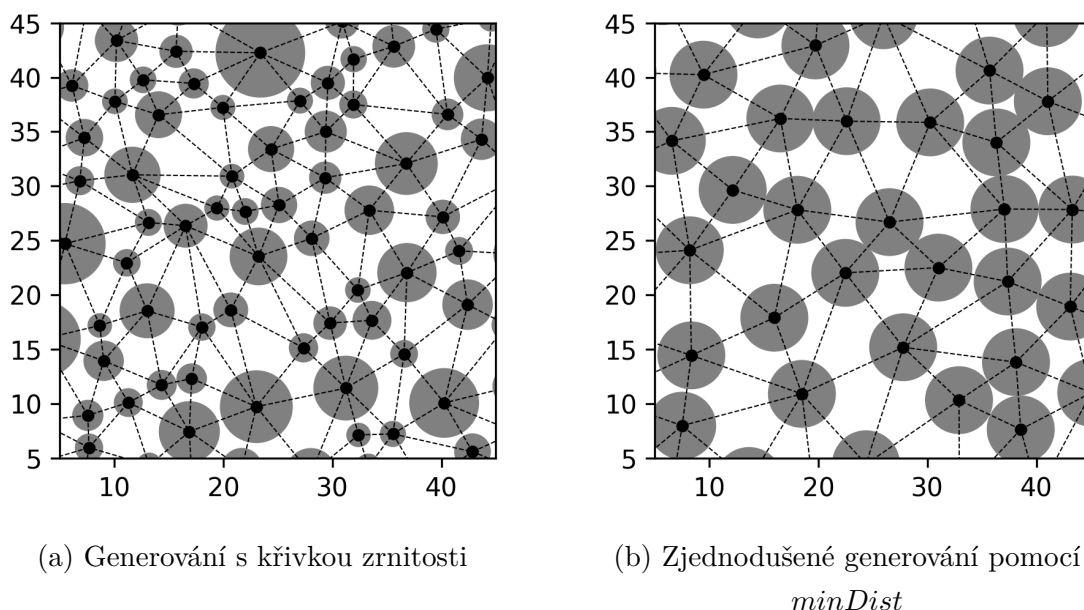
1. Výsledná pole posunů nejsou spojitá
2. Napětí a deformace jsou vyjádřeny vektorově

Diskrétní modely se dělí na síťové modely (tvořené prutovými vazbami) a částicové modely (kde volné částice reprezentují chování nekohezních materiálů). Stochastickými modely pak myslíme spojitě, nebo diskrétní modely, kde jsou parametry popisující chování materiálu prostorově náhodně proměnlivé. V kapitole si představíme síťové diskrétní mezo - úroňové modely, opatřené izotropním náhodným polem materiálových parametrů. Modely bez náhodného pole budeme označovat jako modely *deterministické*, i přes to, že uspořádání prutů určitou nahodilost nese.

### 3.1 Mezo - úroňové diskrétní modely

Síťové diskrétní modely, použité v předkládané práci pro modelování těles z prostého betonu, jsou tvořeny pruty reprezentujícími ve své podstatě konečné prvky. Pruty mohou reprezentovat strukturu samotného kameniva, výplňovou matici a rozhraní mezi kamenivem, nebo mohou sloužit pouze jako diskretizační nástroj pro kontinuum, aniž by existoval vztah mezi rozměrem prutu a skutečnou vnitřní strukturou modelovaného materiálu. V předkládané práci využíváme typ mezo-úroňových diskrétních modelů, kde velikost prutu odpovídá velikosti těch zrn kameniva, které jsou větší než námi stanovená hranice. Mezi velkými zrny jsou malá zrna a rozhraní mezi zrny a maticí (interfacial transitional zone, ITZ), která mají jinou porozitu, a tedy i významně rozdílné vlastnosti od běžné matrice (výplňového materiálu). Kromě vysokopevnostních betonů se trhliny nejčastěji propagují skrze ITZ. U vysokopevnostních betonů lze pozorovat i rozlomení kamenů, u běžných betonů dochází k propojení sítě trhlín, která vzniká právě na rozhraní zrn a cementové matrice.

Na řešení úloh lineární pružnosti se ideálně hodí spojitě modely. Diskrétní modely mají s vystižením hladkých elastických polí potíže, neboť z podstaty nejsou vypočtená pole diferencovatelná (*displacement jumps*). Lze ale říci, že v okamžiku, kdy dochází k rozvoji poškození, začnou být diskrétní modely vhodnější. Spojitě modely mají značné potíže s modelováním přechodu od rozptýleného charakteru poškození do vzniku lokalizované trhliny a nejsou obecně schopny věrně reflektovat vliv neuspořádané vnitřní struktury. Zavádění heterogenity do spojitých modelů s cílem narušit vnitřní symetrie (např za pomoci organického tvaru dělení na konečné



Obr. 3.1: Zrna kameniva diskrétního modelu vygenerována generátory preprocesoru OAS

prvky) nebo zavedení náhodně proměnlivosti materiálových parametrů [4] může pomoci iniciovat nelineární procesy a částečně napodobit rozptyl v lokální i globální odezvě na mechanické namáhání. Mnohem elegantnější je ale reflektovat neuspořádanou vnitřní strukturu rovnou v geometrii modelu. V betonu je nejvýraznější měřítko heterogenity na úrovni rozlišení jednotlivých velkých zrn (*mesoscale*).

U heterogenních materiálů, jako je například beton, nebo některé geomateriály, jsou mechanické vlastnosti výrazně ovlivněny částicovým uspořádáním. Jejich vnitřní struktura do značné míry diktuje posloupnost disipativních jevů v materiálu a související redistribuci napětí.

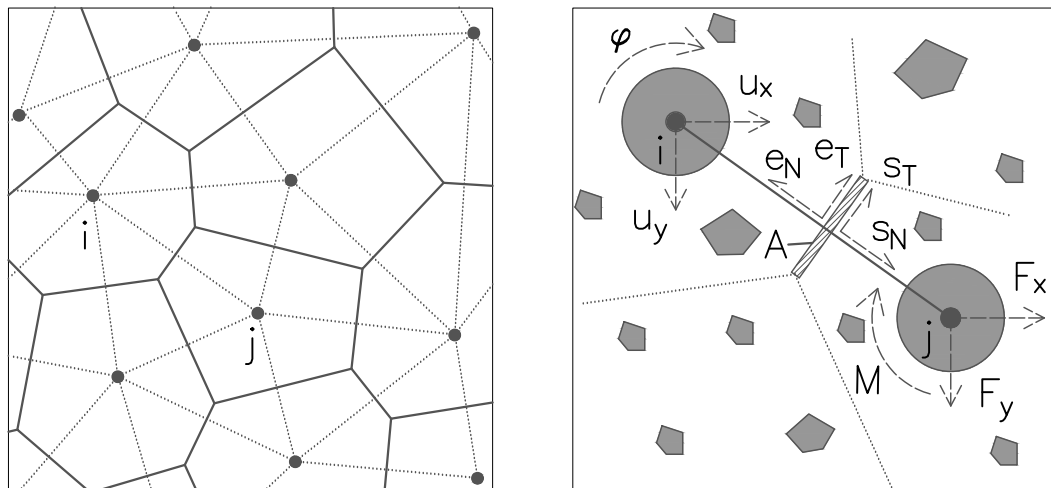
Námi použité mezo-úrovňové modely nejsou schopny rozlišit jednotlivé paralelní trhliny mezi velkými zrny. Všechny elastické i disipativní procesy jsou shrnuty a vyjádřeny konstitutivními zákony mezi párem sousedících zrn, jejichž těžiště jsou explicitně reprezentovány. Je tedy zapotřebí stanovit mez velikosti zrn, pod kterou už geometrie nebude explicitně vystižena a materiálové chování pod touto úrovní vtělit do konstitutivního zákona vazeb mezi modelovanými zrny. Pozorování za pomoci akustické emise dokazuje, že k poškozování vazeb dochází v reálném betonu již po relativně nízké úrovni průměrného napětí a zdroje signálu akustické emise jsou rozptýleny prakticky v celém objemu těles, ve kterých je nenulové průměrné napětí. Toto difúzní rozrušování materiálu diskrétní modely vystihují zcela přirozeně a nečiní jim potíže i přechod k lokalizovaným deformacím s nárůstem poškození v úzkých pásích vnímaných jako izolované makro-trhliny. Je to právě popsána schopnost

modelu popsat jednotným přístupem přechod od rozptýleného poškození k lokalizaci deformace, která činí použitou třídu diskretních modelů ideální pro studium jevů s objemy přesahujícími malé uskupení zrn až po konstrukce velikosti přibližně jednotky metrů. Větší konstrukce nejsou s takto detailním modelem řešitelné kvůli příliš velkým paměťovým nárokům a nárokům na množství aritmetických operací při řešení rovnic rovnováhy (maticové výpočty).

## 3.2 Geometrie

Diskretní modely jsou tvořeny generovanými body, jejichž spojnice tvoří střednice prutů. Na obrázku 3.1, varianta a), vidíme zrna generována podle křivky zrnitosti s nastaveným minimálním ( $d_{\min}$ ) a maximálním ( $d_{\max}$ ) průměrem kružnice, která reprezentuje velikost zrna. Zrna o průměru  $d < d_{\min}$  a objem, zabraný cementem a vodou je reprezentován volným prostorem mezi generovanými zrny. Na obrázku 3.1, varianta b), vidíme zjednodušenou strukturu, kde mají všechna zrna velikost  $\text{minDist}$ . Tento zjednodušený přístup umožňuje jednoduchou implementaci efektivnějších algoritmů pro kontrolu překrývání zrn, jako je například  $k$ - $d$  tree algoritmus. Prostor s takto vygenerovanými středy zrn se rozdělí vhodnou tesalací. Na obrázku 3.2 vlevo vidíme námi použitou voroného tesalaci, která protíná každý prut v polovině jeho délky. Tento přístup můžeme použít u obou variant generování zrn z obrázku 3.1. Krom voroného tesalace lze užívat komplexnější přístupy, jako je power tesalace, (známa též jako Laguerreho tesalace [5]), nebo LDPM tesalace [6]. Obě přispívají tesalaci v okolí zrna podle jeho velikosti, tudíž jsou vhodné pro generování zrn podle varianty a).

Na obrázku 3.2 vpravo vidíme vyňatý prut reprezentující vazbu mezi dvěma zrny a zatížený silovými a deformačními účinky. Stěna voroného tesalace, která prut v polovině protíná, tvoří jednu svojí plochou (v rovině délkou)  $A$  průřezovou plochu diskretního prutu a také tvoří stykovou plochu, na které jsou definovány konstitutivní vztahy mezi napětovými a deformačními vektory  $\mathbf{s}$  a  $\mathbf{e}$ . Veškeré drobné kamenivo, mezi zrny  $i$  a  $j$ , znázorněné na obrázku 3.2, které je menší než  $\text{minDist}$ , respektive  $d_{\min}$  je reprezentováno konstitutivními vztahy na stykové ploše  $A$ . Pro přesnější zachycení mechanické odezvy těchto jemných částic využíváme nahodilost materiálových parametrů vysvětlenou v kapitole 3.4.



Obr. 3.2: Vlevo: rozdělení prostoru se středy zrn voroného tesalací, vpravo: silové a deformační působení na diskretní prut

### 3.3 Mechanika diskretních modelů

#### 3.3.1 Rovnice rovnováhy

Nejdříve si představme dva sousedící body spojené prutem diskretního modelu s indexy  $i$  a  $j$ . Protože budeme pracovat v rovině, každý z bodů má tři stupně volnosti. Dva posuny  $u_x$ ,  $u_y$  a rotaci  $\varphi$ . Na každý z bodů působí účinky vnějšího zatížení vyvolané přilehlými pruty, konkrétně síly  $F_x$ ,  $F_y$  a otáčivý moment  $M$ . Těmto vnějším účinkům, které můžeme zapsat jako vektor  $\mathbf{F}_{\text{ext}}^e$  vzdorují účinky vyvolané působením samotného prutu  $\mathbf{F}_{\text{int}}^e$ . Jestliže neuvažujeme dynamické účinky, musí platit rovnováha

$$\mathbf{F}_{\text{e,ext}} = \mathbf{F}_{\text{e,int}} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{F}_{\text{e,int}} = \mathbf{K}_e(\mathbf{u}_e) \mathbf{u}_e \quad (3.2)$$

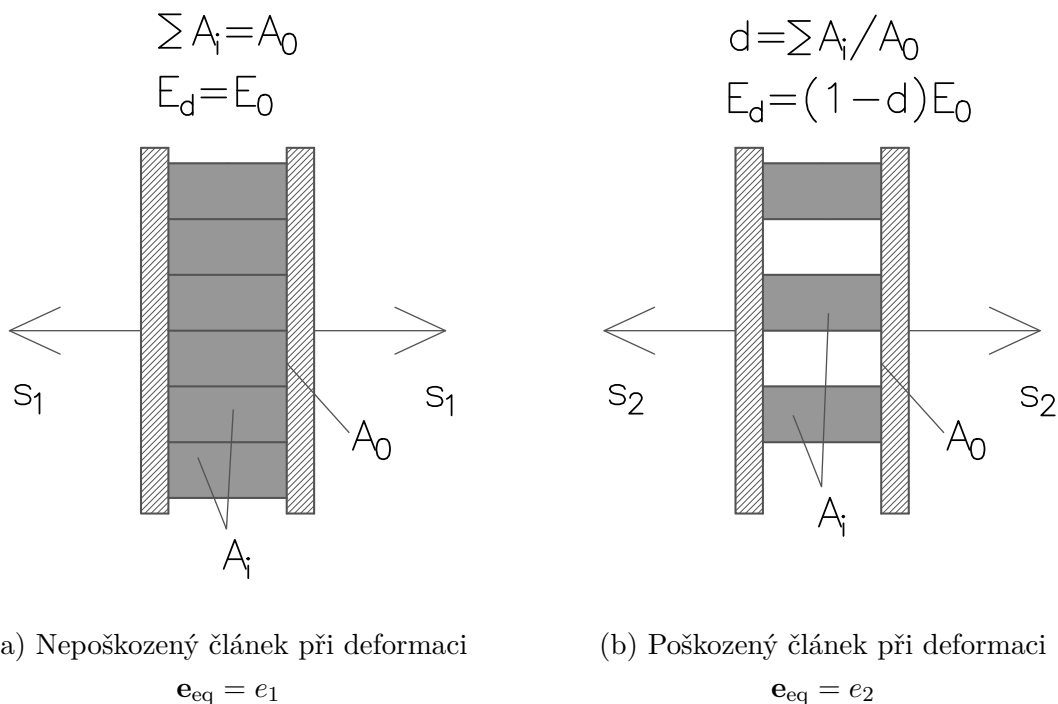
kde

$$\mathbf{F}_{\text{e,ext}} = \{F_{i,x} \ F_{i,y} \ F_{j,x} \ F_{j,y} \ M_i \ M_j\}^T \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u}_e = \{u_{i,x} \ u_{i,y} \ u_{j,x} \ u_{j,y} \ \varphi_i \ \varphi_j\}^T \quad (3.4)$$

a  $\mathbf{K}_e(\mathbf{u}_e)$  je matice tuhosti prutu s indexem  $e$ . Všimněme si, že je  $K_e$  funkcí posunů  $\mathbf{u}_e$ . To je způsobeno geometrickou, ale především materiálovou nelinearitou, kterou si popíšeme v sekci 3.3.2. Dále sestavíme globální matici tuhosti a sestavíme podmínku





Obr. 3.3: Princip redukce modulu pružnosti parametrem poškození

rovnováhy pro celý systém diskrétního modelu

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}) = \sum_{e=1}^n \mathbf{K}_e(\mathbf{u}_e) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{K}(\mathbf{u}) \mathbf{u} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}^k = \mathbf{K}(\mathbf{u}_k) \mathbf{u}_k \quad (3.7)$$

kde rovnice (3.6) tvoří soustavu nelineárních rovnic. Řešič OAS rozdělí úlohu na konečný počet kroků  $k$  a soustavu (3.7) řeší pomocí iterační metody *Newton-Raphson*. Ta úlohu (3.7) převede na  $N$  lineárních rovnic, kde  $N$  je počet iterací. Na každou z  $N$  lineárních rovnic řešič využívá *metodu konjugovaných gradientů*.

### 3.3.2 Konstitutivní zákon

Nyní se zaměříme na samotný prut spojující body  $i$  a  $j$ , od jehož chování se odvíjí matice prutu  $\mathbf{K}_e$ . Prut si můžeme představit jako tuhý, rozdělený v polovině stěnou tesalační buňky. Tato styková plocha má velikost  $A_e$  a určuje průřezovou plochu

prutu. Vzájemný posun bodů  $i$  a  $j$  se na stykové ploše projeví jako deformace

$$\mathbf{e} = \frac{1}{l_e} [\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i + \mathbf{C}(\varphi_i, \varphi_j)] \quad (3.8)$$

$$l_e = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2 \quad (3.9)$$

kde  $\mathbf{e}$  značí deformační vektor a  $\mathbf{C}(\varphi_i, \varphi_j)$  přírůstek pootočením  $\varphi_i, \varphi_j$ . Délka prutu  $l_e$  je dána vztahem (3.9) a  $\|\cdot\|_2$  značí Euklidovskou normu (standardní metrika druhého řádu). Rovnice (3.8) tak tvoří geometricko - deformační zákon zvoleného modelu. Všimněme si, že u diskrétních modelů je deformace popsána jednoduše jako vektor  $\mathbf{e}$  a nikoli jako tenzor, jak je tomu u spojitých modelů. Působení vektoru  $\mathbf{e}$  se na stykové ploše  $A_e$  projeví vektorem napětí  $\mathbf{s}$ . Vztah mezi napětím a deformací popisuje takzvaný konstitutivní zákon, který si zde pro diskrétní modely stručně popíšeme.

U vektorového popisu můžeme konstitutivní zákon vyjádřit jednoduše jako

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} s_N \\ s_L \end{Bmatrix} = E_d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{e} = (1 - d) E_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_N \\ e_L \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

kde indexy  $N$  a  $L$  značí normálový a smykový směr na stykové ploše  $A_e$ ,  $E_0$  značí materiálový parametr modulu pružnosti a  $\alpha$  poměr modulů pružnosti

$$\alpha = \frac{E_N}{E_T} \quad (3.11)$$

$$\nu = \frac{1 - \alpha}{4 + \alpha} \quad (3.12)$$

kde  $E_N = E_0$  značí normálový a  $E_T$  smykový modul pružnosti. Parametr  $\alpha$  tedy určuje jakýsi lokální parametr příčné kontrakce a lze jej převést na makroskopický *poissonův součinitel* vztahem (3.12).

Parametr  $d \in \langle 0, 1 \rangle$  v konstitutivním vztahu (3.10) je parametr poškození. Při zatěžování konstrukce z kvazikřehkého materiálu dojde v některých lokálních bodech k překročení maximální pevnosti a ke vzniku mikrotrhlin. Materiál v místě mikrotrhlin nepřenáší napětí a musí tedy dojít k redistribuci napětí do okolních vazeb. Protože se na přenosu podílí průřezová plocha zmenšená o plochu mikrotrhliny, dojde k redukci tuhosti a také pevnosti, kterou může poškozený průřez přenést.

Význam parametru poškození si vysvětlíme na jednoduchém schématu 3.3. Na obrázku můžeme vidět stykovou oblast zatíženou z obou stran normálovým napětím  $s_N$ . Představme si, že je styková oblast o průřezu  $A$  tvořena  $N$  podoblastmi s průřezovou plochou  $A_i$ . Situace je vyobrazena v kroku  $k$  a kroku  $k + 1$ . V kroku  $k$  je průřezová plocha rovna výchozí ploše  $A = A_0$ . Mezi krokem  $k$  a  $k + 1$  však dojde k porušení některého z průřezů  $A_i$ . Styková plocha v kroku  $k + 1$  se tedy změní

$$A = \sum_{i=1}^{N-1} A_i \quad (3.13)$$

Parametr poškozění  $d$  vyjádříme jako podíl změněné plochy vůči ploše původní a použijeme pro redukci modulu pružnosti:

$$d = \frac{A}{A_0} \quad (3.14)$$

$$E_d = (1 - d) E_0 \quad (3.15)$$

Vývoj parametru  $d$  lze v různých aplikacích definovat různě. V rámci práce využíváme materiál *Confinement shear lattice*, zkráceně *CSL*, popsáný v článku Eliáš; Vořechovský [7]. V *CSL* materiálu je parametr poškozění  $d$  definovaný jako funkce

$$d = 1 - \frac{\mathbf{s}_{\text{eq}}}{E_0 \mathbf{e}_{\text{eq}}} \quad (3.16)$$

kde  $\mathbf{e}_{\text{eq}}$  reprezentuje výslednici přetvoření působící na stykovou plochu:

$$\mathbf{e}_{\text{eq}} = \sqrt{e_N^2 + \alpha e_M^2} \quad (3.17)$$

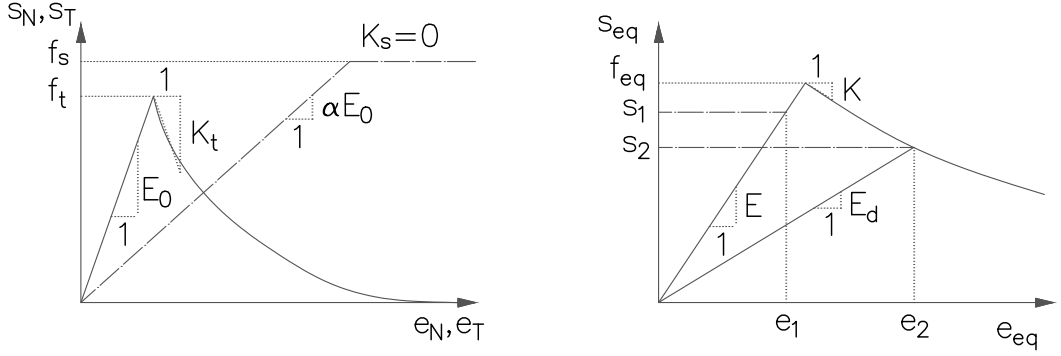
Člen  $E_0 \mathbf{e}_{\text{eq}}$  v rovnici (3.17) tedy reprezentuje napětí, kterého by bylo dosaženo u čistě lineárního materiálu. Tímto myšleným napětím podělíme skutečné napětí v poškozěném materiálu, označované jako ekvivalentní napětí  $\mathbf{s}_{\text{eq}}$ . Závislost  $\mathbf{s}_{\text{eq}}$  a  $\mathbf{e}_{\text{eq}}$  je podle článku zajištěna jako minimum z hodnot podle článku Cusatis; Pelessone; Mencarelli [6]:

$$\mathbf{s}_{\text{eq}} = \min \left\{ \begin{array}{l} (1 - d_{\text{prev}}) E_0 \mathbf{e}_{\text{eq}} \\ f_{\text{eq}} \exp \left( \frac{S}{f_{\text{eq}}} \left\langle \chi - \frac{f_{\text{eq}}}{E_0} \right\rangle \right) \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

Horní výraz zajišťuje lineární závislost  $\mathbf{s}_{\text{eq}}(\mathbf{e}_{\text{eq}})$  před dosažením maximálního zatížení a také lineární závislost poškozěného materiálu při odtěžování. Parametr  $d_{\text{prev}}$  reprezentuje poškozění z předchozího kroku. Spodní výraz rovnice (3.18) zajišťuje exponenciální změkčení po překročení maximálního zatížení, kde  $f_{\text{eq}}$  značí ekvivalentní pevnost, určující hranici maximální pevnosti,  $S$  je počáteční směrnice sestupné větve diagramu a  $\chi$  charakterizuje historii dosaženého přetvoření

$$\chi = \sqrt{\max(e_N^2) + \alpha \max(e_M^2)} \quad (3.19)$$

kde  $\max(e_N^2)$  a  $\max(e_M^2)$  jsou maximální velikosti složek přetvoření, kterých bylo v minulosti zatěžováním dosaženo. Počáteční směrnice  $S$  se skládá z normálové a smykové směrnice, které řídí duktilitu materiálu jak v normálovém, tak smykovém



(a) Plně: závislost  $s_N(e_N)$  při  $\omega = \pi/2$ ,  
Čárkovaně: závislost  $s_T(e_T)$  při  $\omega = 0$ ,

(b) Závislost  $s_{eq}(e_{eq})$ , čteně odtížení

Obr. 3.4: Konstitutivní zákon použitého diskrétního modelu

směru:

$$S = -S_N \left[ 1 - \left( \frac{\omega - \pi/2}{\omega_0 - \pi/2} \right)_t^\eta \right] \quad \text{kde} \quad \eta_t = \frac{\ln(S_N / (S_N - S_T))}{\ln(1 - 2\omega_0/\pi)} \quad (3.20)$$

$$S_N = \frac{2E_0 f_t^2 l_e}{2E_0 G_t - f_t^2 l_e} \quad (3.21)$$

$$S_T = \frac{18\alpha E_0 f_t^2 l_e}{32\alpha E_0 G_t - 9f_t^2 l_e} \quad (3.22)$$

Kde  $S_N$  a  $S_T$  jsou normálové a smykové směrnicí a  $G_t$  je materiálový parametr lomové energie, reprezentující množství energie potřebné k vytvoření povrchu  $1 \text{ m}^2$  trhliny v materiálu. Tímto parametrem řídíme houževnatost materiálu. Spodní výraz konstitutivního zákona (3.18) řídí člen  $\left\langle \chi - \frac{f_{eq}}{E_0} \right\rangle$ , který reprezentuje maximální přetvoření nelineární části pracovního diagramu. Je důležité, aby použitý model reflektoval, že se pevnost materiálu v normálovém  $N$  a smykovém  $M$  směru liší. Ekvivalentní pevnost  $f_{eq}$  je tedy funkcí úhlu mezi smykovou a normálovou deformační složkou:

$$f_{eq} = f_t \frac{-\sin(\omega) + \sqrt{\sin^2(\omega) + 4\alpha \cos^2(\omega)/r_{st}^2}}{2\alpha \cos^2(\omega)/r_{st}^2} \quad (3.23)$$

$$r_{st} = f_s/f_t \quad (3.24)$$

Kde materiálové charakteristiky  $f_t$  a  $f_s = 3f_t$  jsou lokální tahová a smyková pevnost prutu. Pracovní diagram jak smykového tak normálového působení diskrétního prutu vidíme na obrázku 3.4.

### 3.4 Stochastický model

Zatím jsme pozornost zaměřili na diskretní modely s konstantními materiálovými parametry. Hlavní limitace zmíněných modelů spočívá v tom, že s množstvím vygenerovaných zrn výrazně roste výpočetní doba, a je tedy nutné zavést hranici minimální velikosti zrna, kterou bude model reprezentovat (v našem případě tedy  $minDist = 6$  mm). Z toho důvodu do modelů zavádíme dodatečnou proměnlivost materiálových parametrů, čímž reprezentujeme náhodné uspořádání zrn o průměru  $d < minDist$ . V bakalářské práci [1] je tedy krom diskretních modelů s konstantními materiálovými parametry představena i série modelů  $A_n^R-F_n^R$ . Geometrie modelů je totožná s modely série  $A_n-F_n$ , avšak materiálové parametry  $f_t$  a  $G_t$  jsou funkcí normálně rozděleného náhodného pole  $H(\mathbf{x})$ . Vzhledem k tomu, že náhodné pole má stejnou střední hodnotu parametru, jako je její deterministická hodnota, jediný volný parametr pole je směrodatná odchylka  $\delta_h$  a autokorelační funkce. Autokorelační funkci volíme v jednotném předepsaném tvaru (čtvercová exponenciální funkce) a k její úplné definici tedy postačí jediný parametr: autokorelační délka  $l_\rho$ . Při uvedené volbě popisu prostorové variability máme k dispozici pouze dva parametry: rozptyl  $\delta_h^2$  a autokorelační délku  $l_\rho$ . Pomocí náhodného pole  $H(\mathbf{x})$  je možno reprezentovat i nehomogenitu betonové směsi způsobenou konkrétním hutněním, nerovnoměrnou hydratací, smršťováním atd. Použitý řešič zůstává totožný jako při výpočtech s předchozími sériemi. Další podrobnosti o aplikaci náhodného pole jsou uvedeny v rámci zmíněné bakalářské práce [1] nebo v článcích [4, 8].

Ukažme si základní vlastnosti stacionárního normálního náhodného pole  $H(\mathbf{x})$ . hustotu normálního rozdělení v libovolném bodě jednoznačně popisuje dvojice parametrů: střední hodnota a rozptyl. Sdruženou hustotu normálně rozděleného pole pak stačí popsat pomocí autokorelace, tedy korelací (nebo obecně kovariancí) mezi každým párem dvou diskretizačních bodů řešené domény.

Materiálové parametry diskretního prutu jsou v použitém modelu uvažovány následujícími funkcemi výchozích materiálových parametrů  $f_0$ ,  $G_0$  a náhodného pole  $H(\mathbf{x})$  [7]

$$f_t(\mathbf{x}) = f_0 H(\mathbf{x}) \quad (3.25)$$

$$G_t(\mathbf{x}) = G_0 H(\mathbf{x})^2 \quad (3.26)$$

Výchozí materiálové parametry  $f_0$ ,  $G_0$  hrají úlohu středních hodnot náhodných polí  $f_t(\mathbf{x})$  a  $G_t(\mathbf{x})$ . Protože jako střední hodnotu pole  $H(\mathbf{x})$  volíme  $\mu_h = 1$ , směrodatná odchylka plně určuje normální rozdělení náhodné veličiny  $X_i$  na libovolné souřadnici  $\mathbf{x}_i$  náhodného pole  $H(\mathbf{x})$ . Korelaci mezi náhodnou veličinou  $X_i$  v bodě  $\mathbf{x}_i$  a náhodnou

veličinou  $X_j$  v bodě  $\mathbf{x}_j$  můžeme vyjádřit Pearsonovým korelačním koeficientem

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{COV(X_i, X_j)}{\delta_h(X_i)\delta_h(X_j)} \quad (3.27)$$

kde  $COV(X_i, X_j)$  je kovariance mezi veličinou  $X_i$  a  $X_j$  a  $\delta_h$  jsou k nim příslušné směrodatné odchylky. Tento korelační vztah lze poté předeepsat jako funkci vzdálenosti bodů  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$  a autokorelační délky

$$\rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, l_\rho) = \rho(\boldsymbol{\tau}, l_\rho) = \exp \left[ - \left( \frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|_n}{l_\rho} \right)^2 \right] = \exp \left[ - \left( \frac{\|\boldsymbol{\tau}\|_n}{l_\rho} \right)^2 \right] \quad (3.28)$$

kde  $\|\cdot\|_n$  je Euklidovská norma  $n$ -té dimenze a  $\boldsymbol{\tau}$  je vektor mezi souřadnicemi  $\mathbf{x}_i$  a  $\mathbf{x}_j$ . Představená autokorelační funkce vede na stacionární náhodné pole vzhledem ke korelaci, a toto pole je diferencovatelné, neboť první derivace zvolené čtvercově exponenciální autokorelační funkce je pro nulovou vzdálenost rovna nule.

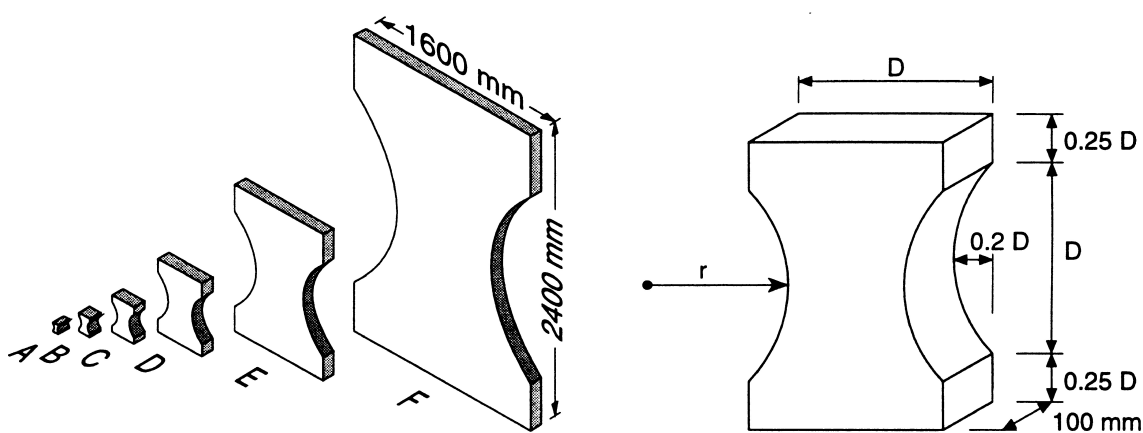
Náhodné pole  $H(\mathbf{x})$  s takto předepsanou autokorelační funkcí  $\rho(\boldsymbol{\tau}, l_\rho)$  lze tedy *plně definovat* směrodatnou odchylkou  $\delta_h$  a autokorelační délkou  $l_\rho$ .

Pokud je autokorelační délka zvolená jako nekonečná, jsou jednotlivé realizace náhodných polí  $f_t(\mathbf{x})$  a  $G_t(\mathbf{x})$  konstantní funkce po celém objemu řešeného tělesa. To ovšem neznamená, že parametry vazeb mezi páry zrn mají stejné vlastnosti. Uvedená náhodná pole vstupují jako hodnoty, ze kterých jsou pak parametry vazeb vypočteny navíc s ohledem na lokální geometrii prutů a styčných ploch [7]. Také je nutno zmínit, že z parametrů  $f_t(\mathbf{x})$  a  $G_t(\mathbf{x})$  určených pro normálový směr jsou lokálně přepočteny navíc i parametry smykové. Ty tím pádem rovněž tvoří obecně náhodná pole, ale jejich fluktuace není nezávislá od prostorově proměnlivých polí  $f_t(\mathbf{x})$  a  $G_t(\mathbf{x})$ , ale je mezi funkční závislost, více viz [7] nebo sekce 3.3.2.

## 4 Oblast rozptýleného poškození

V rámci bakalářské práce autora [1] byla modelována tělesa podle experimentální zkoušky vlivu velikosti v rámci disertační práce van Vliet [2] a navazujícího článku van Vliet; van Mier [9], a to jak s konstantními materiálovými parametry, tak s náhodným polem přestaveným například v sekci 3.4. Modely s konstantními materiálovými parametry nyní využijeme pro studium vzniku plošně rozptýleného poškození a jeho význam při modelování vlivu velikosti. V kapitole si nejdříve experimentální zkoušky a použité diskrétní modely tvaru kosti přiblížíme a poté se budeme věnovat oblasti rozptýlených poruch.

### 4.1 Diskrétní modelování vlivu velikosti



Type	A	B	C	D	E	F
D (mm)	50	100	200	400	800	1600
r (mm)	36.25	72.5	145	290	580	1160

Obr. 4.1: Schéma těles tvaru kosti z článku [9]

Práce [2, 9] se zabývají experimentálním zkoumáním vlivu velikosti za pomoci geometricky podobných zkušebních těles z betonu s poměrem 1:32 mezi největším a nejmenším tělesem. Geometrická podobnost se týká pouze dvou škálovaných rozměrů, neboť tloušťka těles 100 mm byla pro všechna tělesa shodná, viz obr. 4.1. Autoři experimentu zvolili tělesa tvaru kosti, která byla zatížena mírně excentrickým tahem skrze volně rotující horní a dolní povrchy. Tělesa jsou uprostřed výšky plynule zúžena, aby byla vyloučena napěťová porucha v blízkosti podpor. Drobnou excentricitou je do nosníku vnesen malý ohybový moment, který zaručí, že k porušení dojde vždy na jedné straně zkoušeného tělesa (excentrické zatížení můžeme vidět na

obrázku 4.7). Tělesa jsou značena podle velikosti písmeny A–F. Velikost těles autoři vyjadřují charakteristickým rozměrem  $D$ , který se pohybuje od  $D = 50$  mm (těleso A) po velikost  $D = 1600$  mm (těleso F). Série experimentálních těles je znázorněna na obrázku 4.1. Pro vyjádření pevnosti zkoušených těles autoři definují veličiny *nominální napětí* jako

$$\sigma_N = \frac{F}{A_0} \quad (4.1)$$

kde  $F$  je síla naměřené při zatěžovací zkoušce a  $A_0$  je původní nezdeformovaná průřezová plocha v polovině výšky nosníku. Maximální nominální napětí, které může těleso přenést, označujeme jako *nominální pevnost*  $f_N$ .

Tělesa byla v rámci autorovy bakalářské práce [1] modelována v několika variantách, odlišujícími se patřičnými indexy. Uvažujme tedy následující série rovinných modelů:

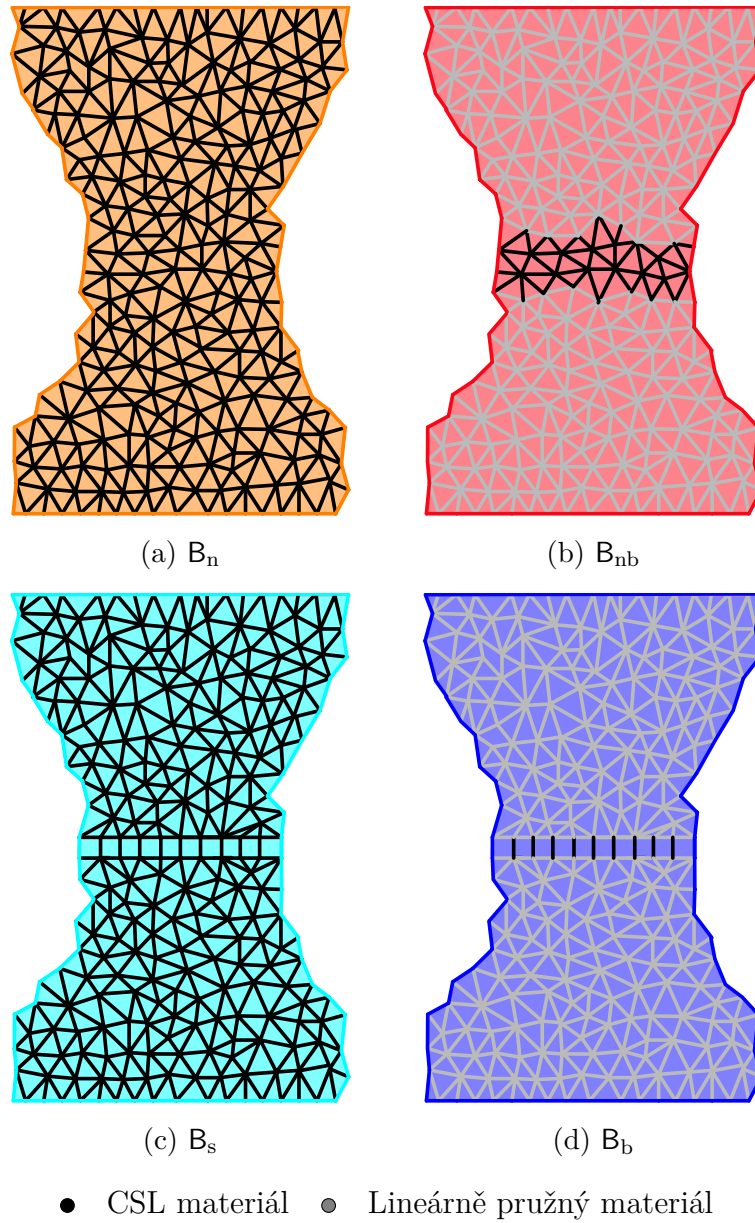
- $A_n-F_n$ 
  - náhodné uspořádání zrn po celé ploše modelů
  - CSL materiál s konstantními parametry po celé ploše modelů
- $A_{nb}-F_{nb}$ 
  - náhodné uspořádání zrn po celé ploše modelů
  - CSL materiál s konstantními parametry pouze v kritickém průřezu
- $A_s-F_s$ 
  - v polovině výšky modelů řada rovnoběžných svislých prutů
  - CSL materiál s konstantními parametry po celé ploše modelu
- $A_b-F_b$ 
  - v polovině výšky modelů řada rovnoběžných svislých prutů
  - CSL materiál s konstantními parametry pouze v kritickém průřezu prutů
- $A_n^R-F_n^R$ 
  - náhodné uspořádání zrn po celé ploše modelů
  - CSL materiál s náhodným polem materiálových parametrů (viz kapitola 6)

Příklady jednotlivých sérií lze vidět na obrázku 4.2.

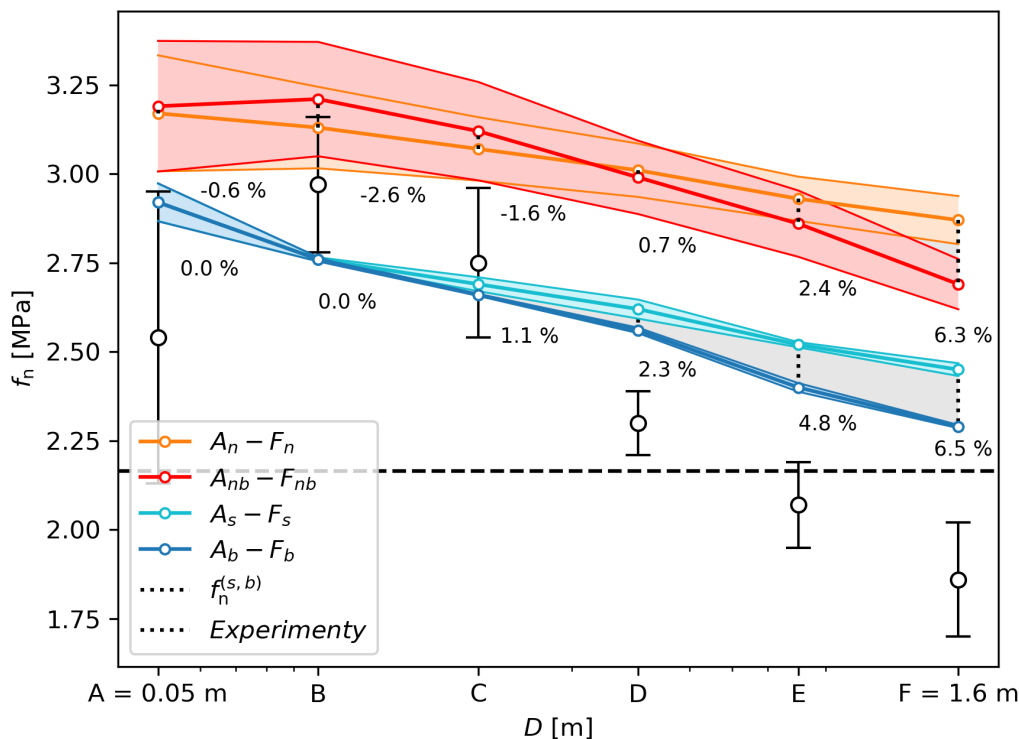
V bakalářské práci [1] byly představeny výsledky výpočtů série deterministických diskretních modelů (bez náhodného pole)  $A_n-F_n$ . Materiálové parametry byly naladěny na:  $f_t = 3.27$  MPa,  $G_t = 100$  J/m<sup>2</sup>,  $E_0 = E_N = 55$  MPa,  $\alpha = 0.3$ . Smykové parametry  $f_s$ ,  $G_s$ ,  $E_s$  jsou na tahové parametry navázány (viz sekce 3.3.2).

Jedním z problémů, na který uvedená práce poukázala, je nesoulad mezi výsledky deterministických výpočtů provedených pomocí metod nelineární výpočtovou mechanikou kontinua v systému ATENA a výsledky obdrženy pomocí zde studovaného diskretního modelu. Oba modely využívají podobného konstitutivního modelu,





Obr. 4.2: Diskrétní modely těles tvaru kosti  $B_i$ , index značí typ série



Obr. 4.3: Závislost  $f_N(D)$  vybraných sérií diskrétních modelů

kteřý je založen na mechanice poškození. Výsledky obdržené s ATENA [4] vykazují mnohem silnější závislost pevnosti na velikosti (deterministický/energetický vliv velikosti). Naproti tomu výsledky obdržené s diskrétním modelem vykazují energetický vliv velikosti na pevnost značně oslabený, viz obr. 4.3. Tomuto problému se budeme v rámci následující sekce věnovat.

## 4.2 Vliv rozptýleného poškození na proces zatěžování kritického průřezu

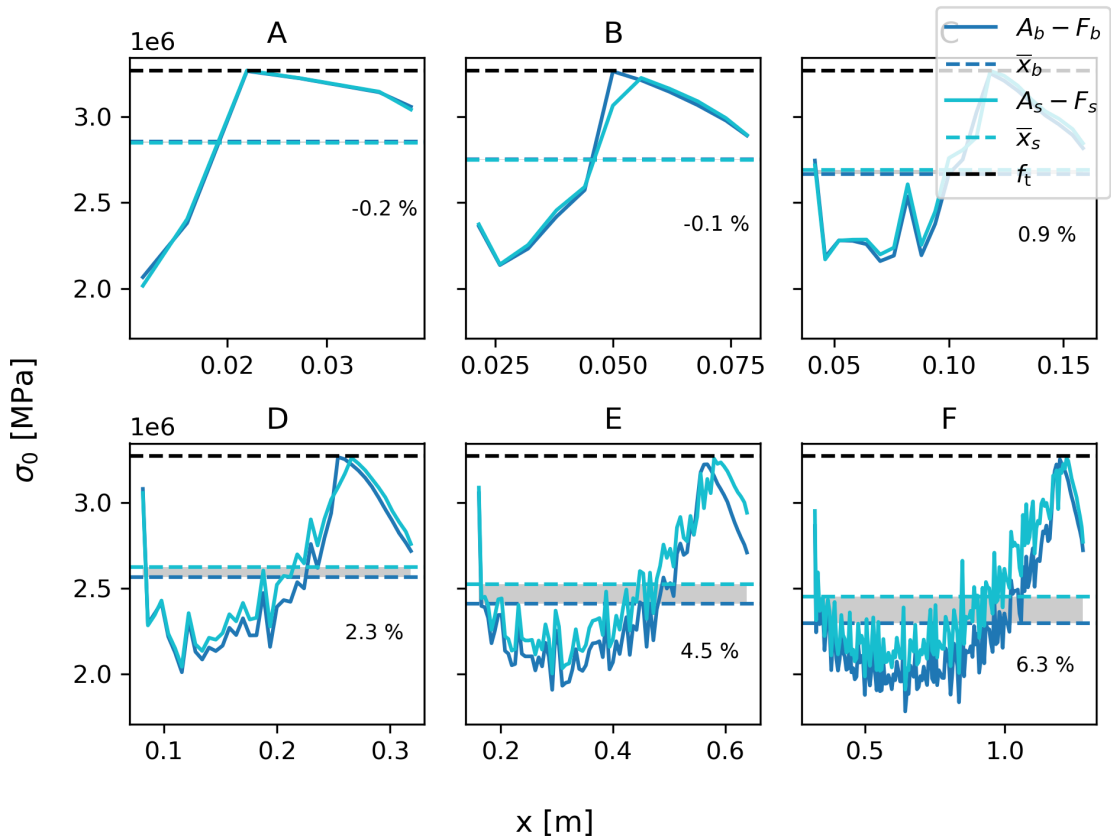
Zůstaňme zatím na úrovni deterministických modelů, ve kterých největší průměrné hlavní tahové napětí vzniká v kritickém průřezu těles, tedy v místě krčku (nejužšího průřezu). Podél tohoto průřezu lze v elasticitě snadno stanovit průběh napětí, který má tvar písmene „U“ s tím, že vlivem mírné excentricity zatěžovací síly je napětí na pravém okraji výrazně vyšší než na levém okraji, viz obr. 4.4. Předepsaná okrajová podmínka na horním a dolním povrchu tělesa způsobuje vznik napětí, které je přenášeno přes objem konstrukce až na kritický průřez. Horní a dolní povrch nosníku se může volně natáčet, musí však zůstat rovinný. Proces zatěžování okrajů tělesa

je v silné interakci s nelineárními procesy nejenom v kritickém průřezu, ale i v objemu mezi krčkem a okraji tělesa. Pokud bychom uvažovali jednoduché napětové kritérium pro inicializaci poškození tak, jak je tomu u spojitého modelu v programu ATENA, k prvnímu oslabení dojde právě v oblasti krčku na pravé straně. Toto oslabení tuhosti (poškození) se projeví postupem napětové špičky směrem doleva a proces poškozování si lze představit jako jakýsi zip postupující od pravého konce krčku směrem doleva. Největší napětí tedy zůstává vždy v kritickém průřezu, okolní materiál zůstává elastický a pouze zprostředkovává přenos sil z okrajů tělesa. Stejného scénáře lze dosáhnout tím, že v diskrétním modelu umožníme poškození pouze v kritickém průřezu a ostatní vnitřní vazby budou modelovány jako elastické, bez možnosti poškození (série  $A_b-F_b$ ).

Výpočty provedené s modely různých velikostí pak vykazují poměrně silnou monotónní závislost nominální pevnosti na velikosti modelovaného tělesa: s rostoucí velikostí nejvyšší dosažená síla dělená plochou kritického průřezu klesá a limitně se blíží spodní mezi. Spodní mez je pak dána prostě dosažením napětového kritéria (tahové pevnosti) v pravém bodě kritického průřezu. Diskrétní modely ale vykazují citelně slabší vliv velikosti na nominální pevnost než spojitě modely. Pokles nominální pevnosti s rostoucí velikostí je u diskrétních modelů viditelně méně strmý, viz obr. 4.3. Z popisu mechanismu energetického vlivu velikosti v literatuře (např. [10, 11]) je patrné, že jsou energetické zákony vlivu velikosti citlivé na velikost gradientů pole napětí v okolí oblasti FPZ. Podrobněji se vlivem gradientů napětového pole u nosníků tvaru kosti zabývá [9].

Při jednoosé tahové zkoušce prizmatického prutu je napětí po průřezu konstantní, a platí tedy  $\nabla\sigma_y(x, y, z) = \vec{0}$ . U nosníků obecné geometrie a zatížení popsaných mechanikou pružnosti je gradientní pole napětí po objemu tělesa obecné a napětí často vykazuje lokální špičky, zde nazývané jako napětové koncentrátoři. U diskrétních modelů je však krom zatížení a geometrie patrný další faktor, který může mít na gradientní pole napětí zásadní vliv. V okamžiku maximálního zatížení, můžeme v blízkosti porušení tělesa pozorovat oblast rozptýleného poškození, dále značenou ORP, přes kterou se vnáší napětí do oblasti lokalizované poruchy mnohem homogenněji, než pokud by takovému rozptýlenému poškození bylo zabráněno například předepsáním čistě elastického materiálu (viz obr. 4.7) Rozložení poškození lze kvantifikovat histogramy 4.6. Při sestavování histogramů byly odebrány pruty s nulovým poškozením a pruty v místě kritického průřezu. Z histogramů je patrné, že se hodnota průměrného poškození v oblasti rozptýlených poruch pohybuje okolo  $\bar{d} = 0.2$ . Průměrná hodnota modulu pružnosti v těchto oblastech je tedy  $\bar{E}_{orp}$ , kde  $\bar{E}_{orp} = (1 - \bar{d})E_0$ , viz obrázek 4.6.

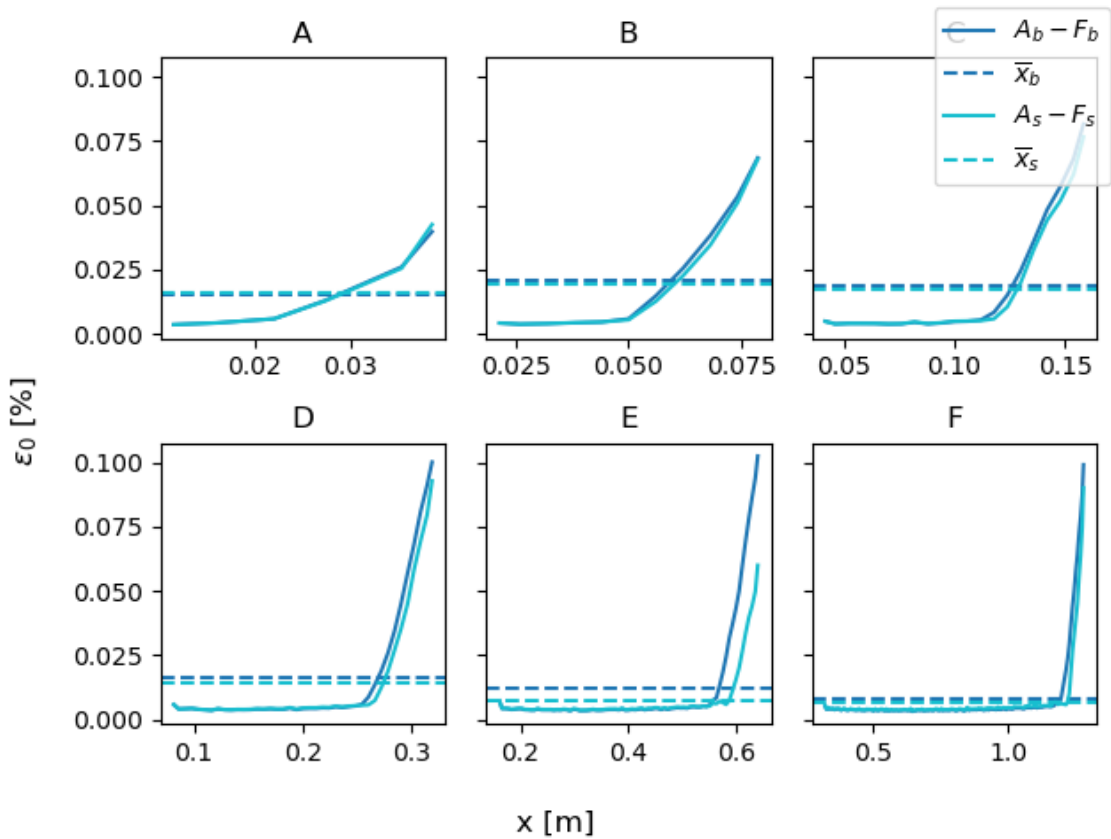
Pro oddělení vlivu popsaného změkčení použijeme sérii diskrétních modelů  $A_b$  až  $F_b$ , kde vnutíme porušení tělesa v nám vybraném místě pomocí řady rovnoběžných



Obr. 4.4: Průběhy  $s_N$  v polovině výšky nosníku

prutů v polovině výšky nosníku a nelineární materiál umístíme pouze do tohoto námi vytvořeného kritického průřezu. Výsledky zkoušek takto upravených modelů porovnáme s obdobnými modely ( $A_s-F_s$ ), kde je však nelineární materiál po celém objemu tělesa, a je tak umožněn vznik oblasti rozptýleného poškození. Z výsledků 4.3 je jasné, že zmíněná oblast rozptýlených poruch u série  $A_s-F_s$  energetický vliv velikosti zásadně oslabuje. Tento homogenizační efekt byl zcela přehlédnut v člancích [4, 12], kde v deterministických variantách modelů vůbec nedocházelo ke změkčení mimo kritický průřez.

Na obrázku 4.4 vidíme průběhy prutových napětí  $s$  a prutových deformací  $e$  po kritickém průřezu série  $A_b-F_b$ . Čárkovanou čarou je značena průměrná hodnota prutového napětí  $\bar{s}$ , která přibližně odpovídá hodnotě  $f_N$  ve výsledcích 4.3. Neplatí však  $\bar{s} = f_N$ , protože prutové napětí  $\bar{s}$  je ovlivněno již zdeformovaným průřezem, zatímco  $f_N = \sigma_{N,\max} = F_{\max}/A_0$ , kde  $A_0$  značí plochu původního, nezdeformovaného průřezu. Můžeme vidět, že u nosníků, kde je umožněn vznik porušené oblasti ORP, dochází k zvýšení průměrné pevnosti  $\bar{s}$  pouze u nosníků vyšších velikostí, čemuž odpovídají i rozdílné pevnosti v grafu na obr. 4.3. Důvodem je, že u nosníků větších velikostí zasahuje oblast  $d$  do ještě neporušené části nosníku, s výrazným gradientem

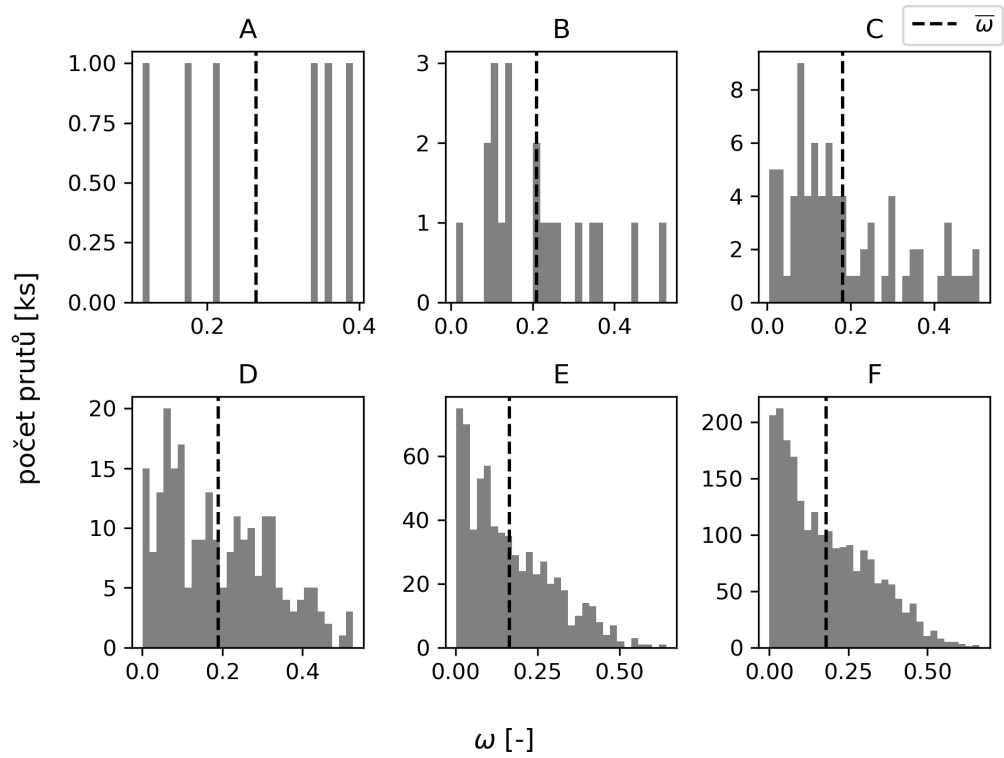


Obr. 4.5: Průběhy  $\epsilon_N$  v polovině výšky nosníku

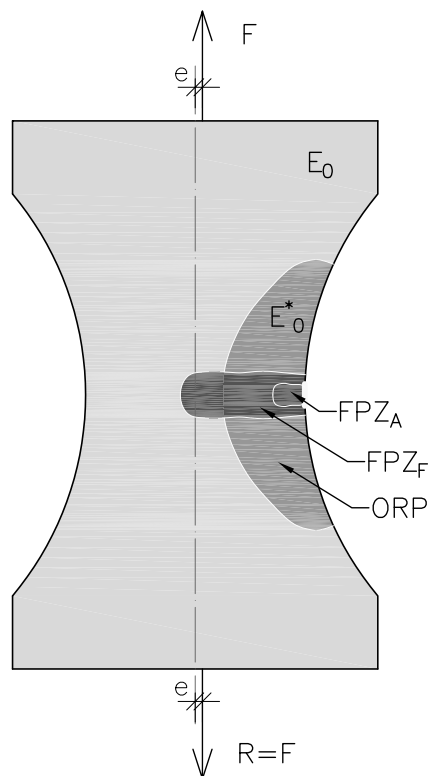
napětí, který je tímto značně oslaben. U nosníku menších velikostí zasahuje ORP do části nosníku porušené lokalizovanou trhlinou (kde je gradient napětí již značně oslaben) a efekt zvýšené pevnosti se tedy nedostavuje.

Z uvedeného vyplývá, že důležitou roli při způsobu porušení tělesa hraje délka lokalizované trhliny, jejíž růst následně vede k porušení celého průřezu. Jeden ze způsobů, jak tuto délku zachytit, může být měření vzdálenosti maximální hodnoty napětí od líce modelu. U sérií nosníků  $A_s-F_s$  a  $A_b-F_b$  můžeme vést řez řadou rovno-  
běžných prutů a odečítat přímo napětí s měřením v jejich integračních bodech.

Protože má délka lokalizované trhliny důležitý význam, bylo by vhodné ji měřit i u série bez řady prutů  $A_n-F_n$ . Zde je měření napětí komplikovanější. Prutové napětí s nebývá u náhodně natočených prutů v okolí kořene trhliny dostatečně lokalizované, proto se nabízí pro lokalizaci trhliny použít styčnickové napětí, počítané jak vektorový součet napětí prutů sbíhajících se v místě středu zrna. Tento přístup se však neobejde bez problémů. Nosníky zatížené tahem, totiž vykazují napěťové špičky i na okrajích oblasti, která je vznikem trhliny odtížena.



Obr. 4.6: Rozdělení poškození po ORP



Obr. 4.7: Rozdělení poškození po ORP

## 5 Rozsah lomové procesní zóny (FPZ)

Vzhledem k tomu, že měření tvaru lokalizované poruchy pomocí špiček napětí je nespolehlivé, ovšem tvar poruchy je pro nás důležitý i pro studium její interakce s náhodným polem v následující sekci, je vhodné pro práci s lokalizovanou poruchou zvolit robustnější přístup. Na poruchu se tedy můžeme dívat jako na oblast, kde dochází ke zvýšené intenzitě disipace energie. Takovou oblast nazýváme procesní zónou, nebo zkráceně FPZ - *fracture process zone*.

Výpočet vnitřní energie po objemu  $V$  můžeme zapsat:

$$w = \int_V W \, dV \quad (5.1)$$

kde  $W$  je hustota vnitřní energie. V mechanice kontinua definujeme  $W$  tenzorově jako:

$$W = \int_V \boldsymbol{\sigma} \, d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.2)$$

kde  $\boldsymbol{\sigma}$  je tenzor napětí a  $\boldsymbol{\varepsilon}$  tenzor deformace. Při práci s diskrétními modely však zvolíme pro výpočet celkové hustoty vnitřní energie vektorový popis, kde  $\mathbf{s}$  je vektor napětí a  $\mathbf{e}$  je deformační vektor. Integrál dále řešíme numericky lichoběžníkovým pravidlem, kde  $i = 0, 1, 2, 3 \dots k$  je časový krok:

$$W^{\text{celk}} = \int_0^k \mathbf{s}(t')^T \dot{\mathbf{e}} \, dt \approx \sum_{i=0}^k \frac{1}{2} [(\mathbf{s}_{i-1} + \mathbf{s}_i) (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i-1})] \quad (5.3)$$

$$W^{\text{el}} = \frac{1}{2} \mathbf{s}_k^T \mathbf{e}_k \quad (5.4)$$

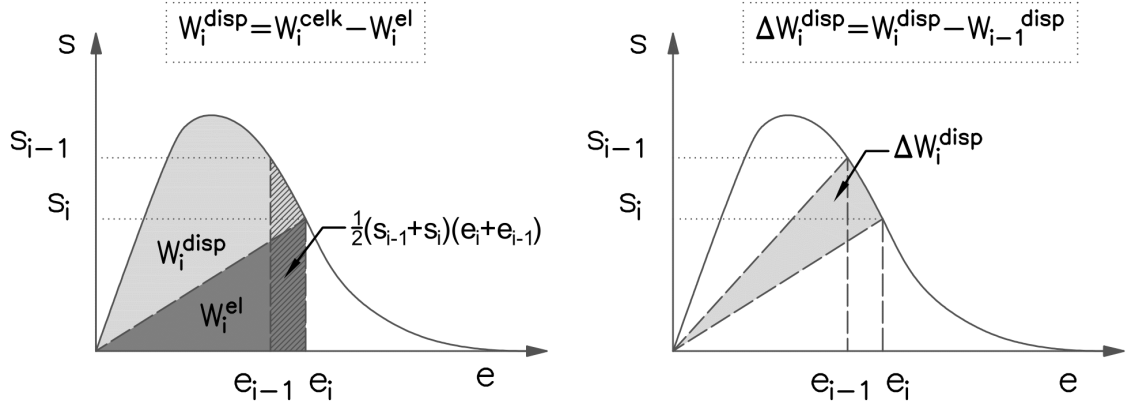
Hustotu disipované energie pak jednoduše stanovíme jako  $W^{\text{dis}} = W^{\text{celk}} - W^{\text{el}}$ , kde  $W^{\text{el}}$  značí hustotu elastické energie viz výraz (5.4).

Oblast FPZ odpovídající maximální síle budeme nadále identifikovat pomocí aktuální disipaci aktivity. Konkrétně pro identifikaci území FPZ budeme potřebovat změnu disipované energie mezi krokem  $k_0$  a krokem  $k_0 - 1$  kde  $k_0$  je krok při dosažení maximálního zatížení. Změna hustoty disipované energie v kroku  $k_0$  je tedy

$$\Delta W^{\text{disp}} = W_{k_0}^{\text{disp}} - W_{k_0-1}^{\text{disp}} \quad (5.5)$$

Pro stanovení vnitřních energií  $\Delta w^{\text{disp}}$ ,  $w^{\text{disp}}$ ,  $w^{\text{celk}}$ ,  $w^{\text{el}}$  v prutu dosadíme hustoty  $\Delta W^{\text{disp}}$ ,  $W^{\text{disp}}$ ,  $W^{\text{celk}}$ ,  $W^{\text{el}}$  do vztahu (5.1) a vyřešíme pro  $j$ -tý prut diskrétního modelu, kde  $A_j$  je průřezová plocha a  $l_j$  je a délka prutu diskrétního modelu.

$$w_j = \int_V W_j \, dV = A_j l_j W_j \quad (5.6)$$



Obr. 5.1: Hustoty energií v pracovním diagramu  $j$ -tého prutu diskretního modelu

## 5.1 Metodika měření

Náhodné uspořádání prutů diskretních modelů nepřináší nahodilost pouze do nominálních pevností, ale jistou nahodilost vnáší i do tvaru a polohy procesní zóny. Protože se chceme zaměřit na typickou realizaci procesní zóny, je potřeba výsledky průměrovat z více realizací.

Veličina  $\Delta w^{\text{disp}}$  je definovaná na krokovém intervalu  $\langle k_0 - 1, k_0 \rangle$ . Je třeba brát v úvahu, že použitý řešič OAS uvažuje krok  $k$  jako funkci času  $t$  a časovou diferencí  $\Delta t_{k-1,k}$  mezi kroky  $k - 1$  a  $k$  řešič přizpůsobuje rychlosti výpočtu a nastaveným tolerancím. Veličiny  $\Delta w^{\text{disp}}$  více realizací jsou tedy vzájemně neporovnatelné a je třeba je před vzájemným průměrováním normovat. Jako normalizační veličina nám poslouží součet celkové disipační energie po celém tělese, tedy

$$\Delta \bar{w}_j^{\text{disp}} = \frac{\Delta w_j^{\text{disp}}}{\sum_{j=0}^n w_{k_0,j}^{\text{disp}}} \quad (5.7)$$

kde  $j$  je index prutu a  $k_0$  krok v okamžiku maximálního zatížení.

Dalším problémem, se kterým se musíme před průměrováním jednotlivých realizací vypořádat, je fakt, že se poloha oblasti FPZ při každé realizaci liší. Abychom dosáhli toho, aby se středy FPZ jednotlivých realizací vzájemně překrývaly, posuneme souřadnice všech prutů prutu o vektor  $\Delta \mathbf{x}$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j &= \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{x} &= \mathbf{x}_{w=w_{\max}} - \mathbf{v} \end{aligned} \quad (5.8)$$

kde  $\mathbf{x}_0$  je původní a  $\mathbf{x}_j$  opravený vektor souřadnic  $j$ -tého prutu a  $\Delta \mathbf{x}$  je rozdíl souřadnice prutu s maximální hodnotou  $\Delta \bar{w}^{\text{disp}}$  a referenčního vektoru  $\mathbf{v}$ , který



je součtem vektorů  $\mathbf{v}_0 = \left\{0.8D, \frac{3}{4}D\right\}^T$  a vektoru  $\mathbf{v}_b$  charakterizující vodorovnou vzdálenost souřadnice  $\mathbf{x}_{w=w_{\max}}$  od líce nosníku, viz obr. (5.2).

Protože se souřadnice jednotlivých prutů liší, rozdělíme povrch tělesa sítí  $l \times m$  čtvercových ploch o rozměru  $a \times b$ . Čtvercové plochy jsou dále v práci označovány slovem *bin* (z anglického slova koš používaného pro oblast v histogramech). Každý jednotlivý prut přiřadíme k příslušnému binu  $b$  podle upravených souřadnic  $\mathbf{x}_j$ .

$$\Delta w_{\text{bin}}^{\text{disp}} = \sum_{j: \mathbf{x}_j \in \Lambda_b} \Delta \bar{w}_j^{\text{disp}} \quad (5.9)$$

kde  $\Lambda_b$  je prostor náležící binu s indexem  $b$ . Pro grafické znázornění je vhodné zajistit, aby byl součet zobrazovaných veličin všech binů rovný 1.0. Veličinu  $\Delta w_{\text{bin}}^{\text{disp}}$  tedy podruhé normujeme podle binu s největší hodnotou  $\Delta w_{\text{bin},\max}^{\text{disp}}$ .

$$\Delta \bar{w}_{\text{bin}}^{\text{disp}} = \frac{\Delta w_{\text{bin},j}^{\text{disp}}}{\Delta w_{\text{bin},\max}^{\text{disp}}} \quad (5.10)$$

Pro zobrazení výsledků se veličina  $\Delta \bar{w}_{\text{bin}}^{\text{disp}} \in \langle 0, 1 \rangle$  rozdělí do podintervalů

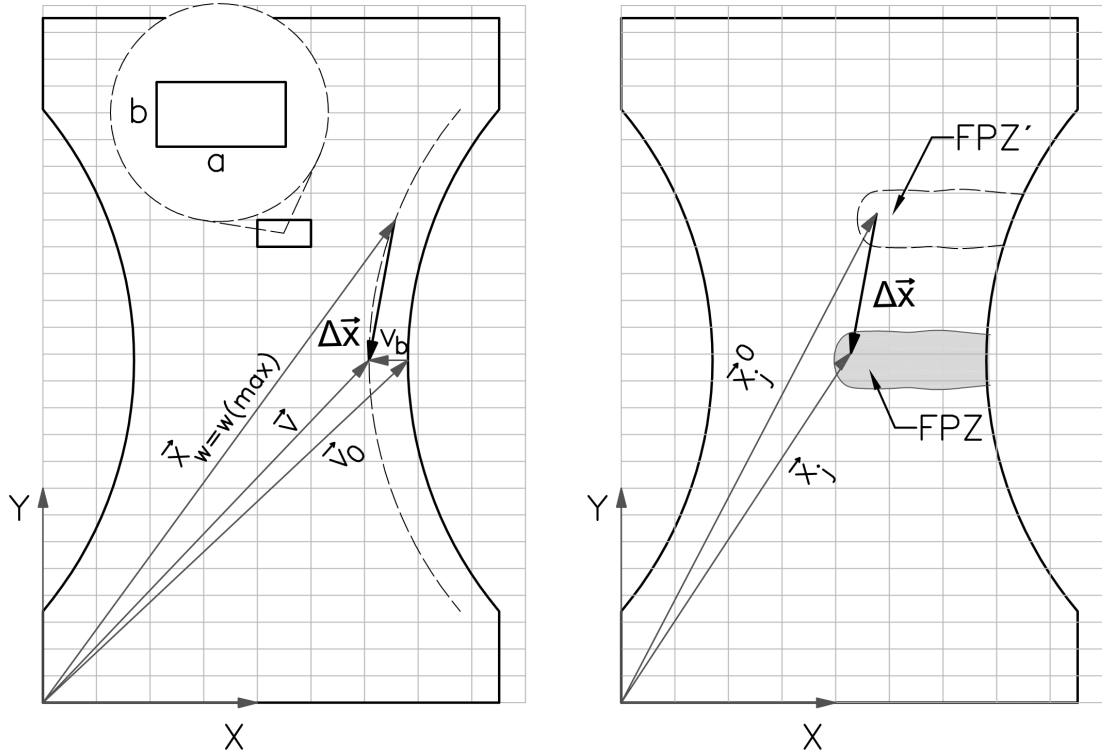
$$I_i = \left\langle \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right\rangle \quad (5.11)$$

kde  $i = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  a  $n$  je počet podintervalů. Je třeba brát v potaz, že jednotlivé biny fungují jako průměrovací oblast, a že tedy volba rozměrů  $a, b$  má vliv na plochu, na které se hodnota spadající do intervalu  $I_i$  zobrazuje. Při porovnávání tvaru FPZ těles různých velikostí je tedy nutné použít stejné rozměry binu.

Uvedená metodika se opírá o měření procesní zóny těles tříbodového ohybu z článku [7]. V rámci diplomové práce byla vytvořena vlastní implementace výše uvedených metod pro CSL materiál a zatěžovací zkoušku tělesa tvaru kosti v jazyce python. Výsledky jsou prezentovány v následující sekci.

## 5.2 Vliv velikosti na tvar FPZ

Vztahy popisující energetický vlivu velikosti na strukturální pevnost uvažují velikost procesní zóny jako charakteristickou délku materiálu, a tedy neměnnou vůči velikosti zatěžovaného tělesa. Z experimentálních měření metodou DIC - *Digital image correlation* na tříbodově ohýbaném nosníku se zářezem je však určitá závislost délky procesní zóny na velikosti nosníku pozorována s tím, že šířka FPZ zůstala konstantní [13]. Totéž je pozorováno v nedávné studii, kde autor měřil tvar FPZ u nosníků se zářezem pomocí spojitého a mezo-úrovňového numerického modelu [14].



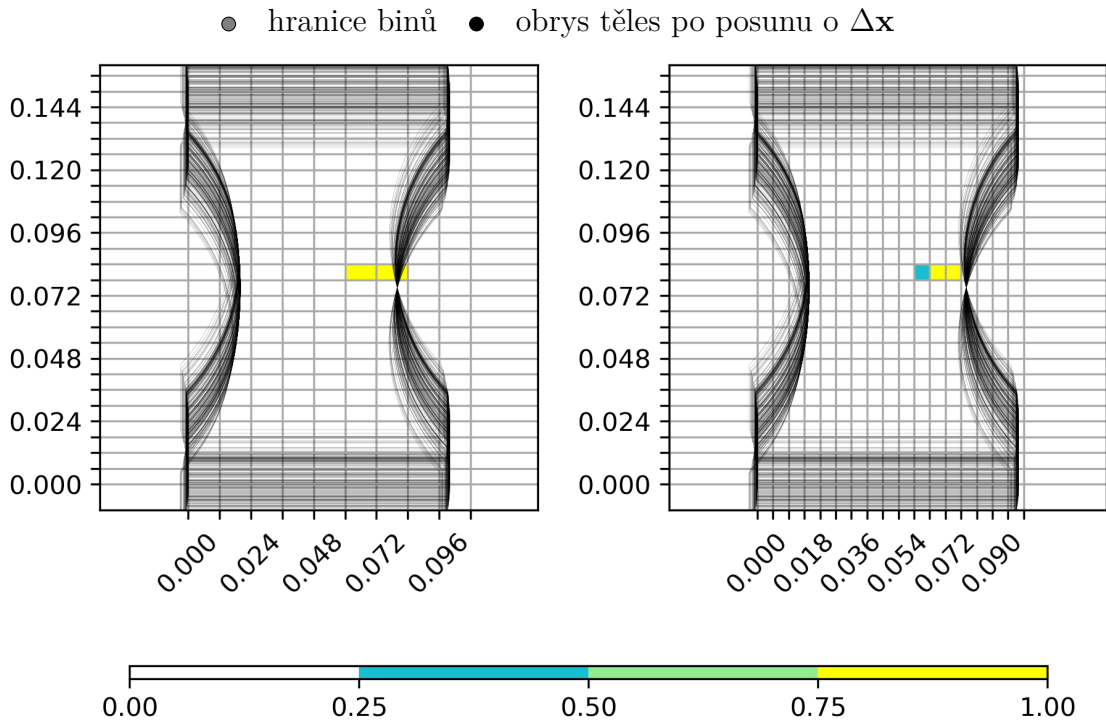
Obr. 5.2: Vlevo: definice vektoru  $\Delta \mathbf{x}$  pomocí souřadnice  $\mathbf{x}_{w=w_{max}}$ , vpravo: aplikace vektoru  $\Delta \mathbf{x}$  pro posun  $j$ -tého prutu

Na obrázku 5.3 je  $\Delta \bar{w}_{bin}^{disp}$  zobrazena na tělese  $B_n$  pro dvě různé délky binů  $a$ . Výšku binu je vhodné uvažovat vždy jako  $b = minDist$ , protože víme, že je makrotrhlina z principu mechaniky diskretních modelů (kapitola 3) lokalizovaná do pásu o šířce  $minDist$ . Počet intervalů  $I_i$  je  $n = 4$ . Obrisy modelů značené černou linií znázorňují polohu FPZ jednotlivých realizací vůči modelům.

Protože nás zajímá především porovnání tvaru FPZ těles různých velikostí mezi sebou, zavedeme souřadnice

$$\mathbf{x}_j^{rel} = |\mathbf{x}_j - \mathbf{v}| \quad (5.12)$$

a jednotlivé velikosti vykreslíme ve stejném měřítku pro dvě různé velikosti binů, viz obrázky 5.4 a 5.6. Délku FPZ můžeme definovat délkou oblasti  $\Delta \bar{w}_{bin}^{disp}$  na intervalu  $I_1 = \langle 0.25, 0.5 \rangle$  ve směru  $x$ . Délky budeme značit  $l_{FPZ}$  a můžeme její vývoj porovnat s délkami získanými pomocí špiček napětí  $l_\sigma$ . Pozorovaný vliv velikosti těles na tvar procesní zóny bude hrát důležitou roli v interakci s náhodným polem v sekci 6 a při sestavování analytického modelu v kapitole 7.

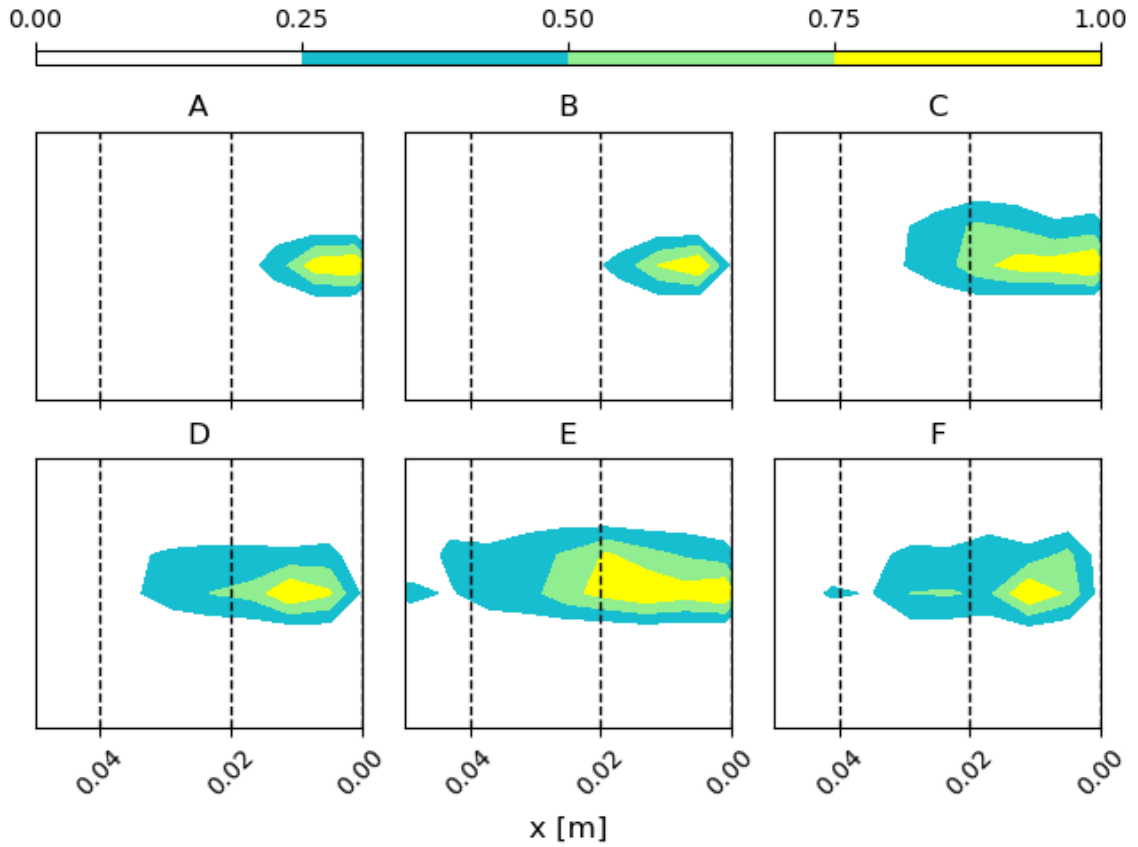


Obr. 5.3: Vliv délky binu na  $\Delta \bar{w}_{\text{bin}}^{\text{disp}}$ , vlevo:  $a \times b = 12 \times 6$  mm, vpravo:  $a \times b = 6 \times 6$  mm, velikost  $B_n$

### 5.3 Disipace energie v oblastech rozptýleného poškození

Z kapitoly 4 je zřejmé, že kromě oblasti FPZ má na výslednou odezvu zatěžovaného nosníku vliv oblast ORP a její interakce s procesní zónou. Nástroj pro měření disipace energie po objemu nosníku nám dává možnost sledovat krom tvaru a velikosti FPZ i velikost ORP a pomůže nám pozorovat, jak se jednotlivé oblasti na disipaci energie v nosníku vzájemně podílí.

Protože se chceme zaměřit na ORP, která se významně rozvíjí především před dosažením maximálního zatížení v kroku  $k_0$ , budeme místo energetického inkrementu  $\Delta w^{\text{disp}}$  tentokrát pracovat s celkovou disipovanou energií naakumulovanou ke kroku maximálního zatížení  $w_{k_0,j}^{\text{disp}}$ . Veličinu vztáhneme na rozměrový parametr  $D^2$ , tím získáme jednotkovou energii na objem nosníku a obdobně jako u energetického inkrementu rozdělíme do binů. Dále je potřeba celkovou disipovanou energii rozdělit



Obr. 5.4: Tvar a velikosti FPZ těles A<sub>n</sub>- F<sub>n</sub>, velikost binu  $a \times b = 6 \times 6$  mm

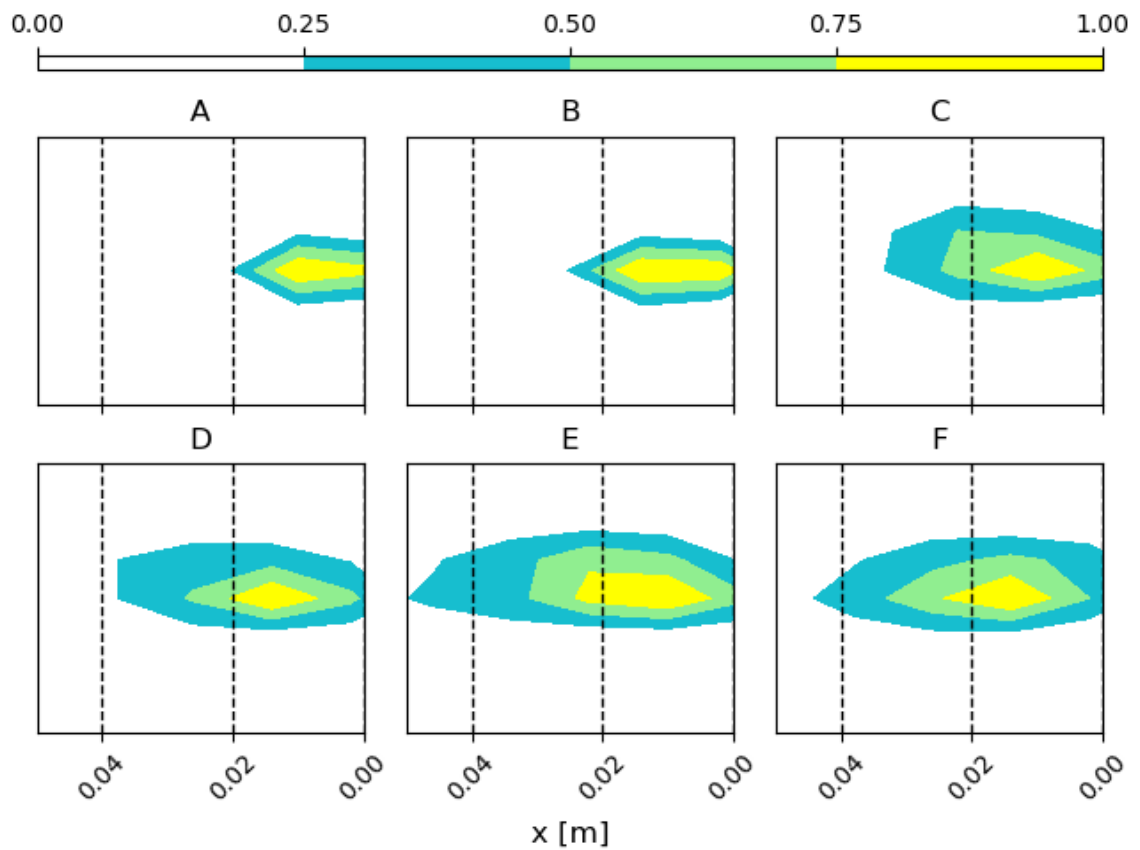
na příspěvek procesní zóny a příspěvek ORP.

$$w_{\text{FPZ}}^{\text{disp}} = \frac{\sum_j w_{\text{bin},j}^{\text{disp}}}{D^2}; w_{\text{bin},j}^{\text{disp}} \geq 0.25 w_{\text{bin,max}}^{\text{disp}} \quad (5.13)$$

$$w_{\text{ORP}}^{\text{disp}} = \frac{\sum_j w_{\text{bin},j}^{\text{disp}}}{D^2}; w_{\text{bin},j}^{\text{disp}} < 0.25 w_{\text{bin,max}}^{\text{disp}} \quad (5.14)$$

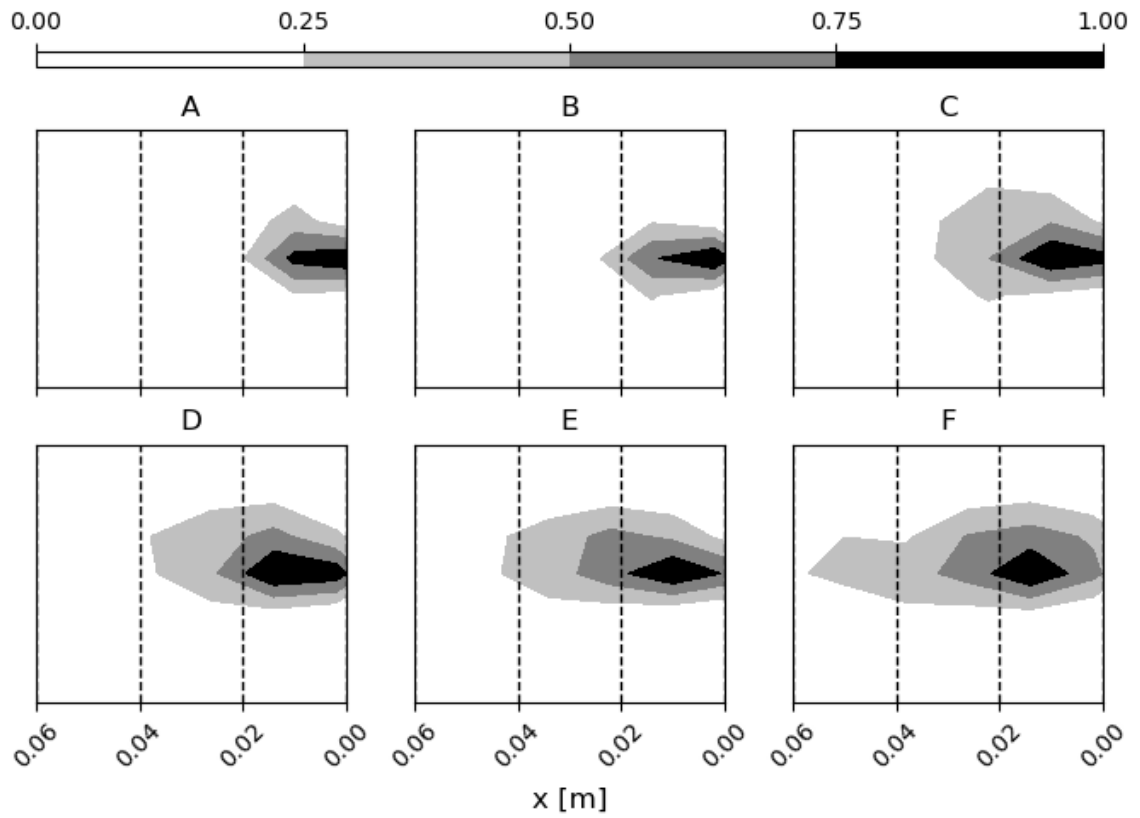
kde  $w_{\text{FPZ}}^{\text{disp}}$  je normovaný součet disipované energie v procesní zóně,  $w_{\text{ORP}}^{\text{disp}}$  je totéž v oblasti rozptýlených poruch a  $w_{\text{bin,max}}^{\text{disp}}$  je disipovaná energie v binu s maximální hodnotou  $w_{\text{bin}}^{\text{disp}}$ . Podíl disipace energie v jednotlivých oblastech je vyneseno do grafu na obr. 5.4. Z výsledků je patrné, že se podíl celkové disipované energie ku objemu nosníku s rostoucí velikostí tělesa snižuje. Tento trend není nijak překvapivý a pouze podtrhává, že s velikostí zatěžovaných těles klesá jejich celková duktilita a nosníky větších rozměrů se stávají křehčí. To je patrné již například z porovnání globálních pracovních diagramů nosníků velikosti A a F. Je to dáno především procesní zónou, jejichž množství disipované energie na objem nosníku s velikostí výrazně klesá. Vyplývá to především z faktu, že šířka FPZ zůstává nezávislá na velikosti tělesa a zvětšování její délky je vůči zvětšení rozměrů těles nevýrazné. (5.4, 5.6)

Zajímavé je všimnout si, že u velikostí B–F má větší podíl na disipaci energie

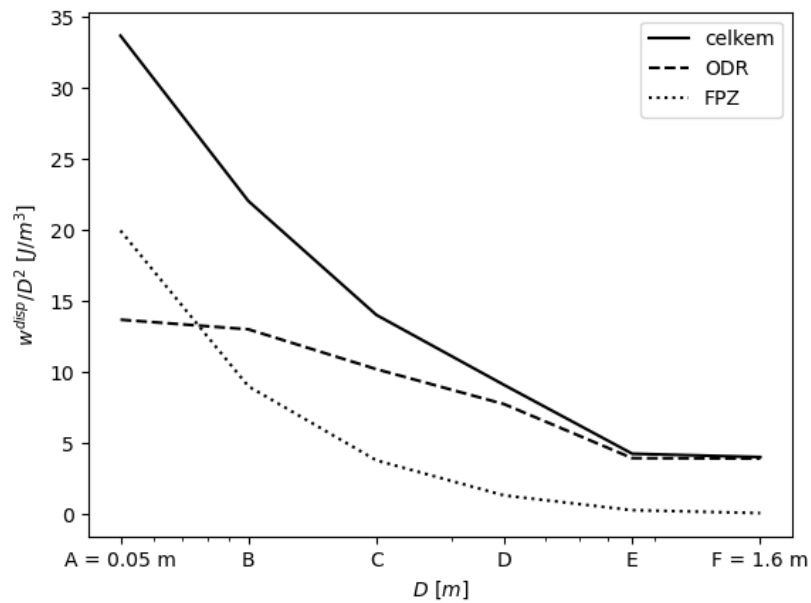


Obr. 5.5: Tvar a velikosti FPZ těles  $A_n$ -  $F_n$ , velikost binu  $a \times b = 12 \times 6$  mm

právě oblast rozptýlených poruch. Disipace v této oblasti s velikostí nosníku také mírně klesá. Z toho lze usuzovat že i objem, který ORP zaujímá se poměrově vůči velikosti tělesa s velikostí mírně snižuje, to může být důležité především u analytického modelu v kapitole 7.



Obr. 5.6: Oblast celkové disipované energie akumulované ke kroku  $k$ , tělesa  $A_n$ -  $F_n$ , velikost binu  $a \times b = 12 \times 6$  mm



Obr. 5.7: Podíl procesní zóny a oblasti rozptýlených poruch na celkové disipaci energie

## 6 Interakce lomové procesní zóny s náhodným polem lokální pevnosti

Doposud jsme se zabývali tzv. deterministickými modely, tedy s modely, u nichž parametry konstitutivního zákona byly v objemu (ploše) uvažovaných těles konstantní. Kvůli náhodnému uspořádání center modelovaných zrn a s tím související tesselaaci prostoru, jsou parametry jednotlivých prutů, jako je úhel  $\omega$ , průřezová plocha  $A_e$ , nebo délka prutu  $l_e$  u každé realizace náhodné. Vliv této geometrické variability je ale malý (Eliáš; Vořechovský; Skoček; Bažant [15]). Materiálové parametry jsou na geometrii nezávislé a výsledné mechanické parametry vazeb se po zohlednění geometrie vazeb příliš neliší.

Fakt, že experimentálně naměřené výsledky zkoušek skutečných betonových těles vykazují značný rozptyl přesahující malý rozptyl získaný s „deterministickými“ modely motivuje zavedení dalšího zdroje rozptylu. Pokud odhlédneme od možností měnit charakter náhodného geometrického uspořádání zrn, jako jediný zdroj se nabízí rozptyl výchozích parametrů konstitutivního zákona.

Pro kontrolovaný pravděpodobnostní popis náhodné prostorové variability se často využívají náhodná pole, kde kromě pravděpodobnostní hustoty parametrů jednotlivých bodů v prostoru uvažujeme ještě jejich statistikou závislost vyjádřenou autokorelací (viz sekce 3.4). V pracích [15] a [7] proto byly provedeny studie s diskrétními modely, ve kterých výchozí parametry konstitutivního zákona následovaly model náhodného pole. Takový přístup byl autorem práce zvolen rovněž v bakalářské práci [1], v rámci které bylo spočteno několik realizací s různou kombinací parametrů náhodného pole. Protože se však odezva modelů na různé parametry  $[l_\rho, \delta_h]$  jevila komplexně a protože z článku Vořechovský; Eliáš [3] víme, že má na výslednou nominální pevnost těles  $f_N$  pro různé  $l_\rho$  vliv i tvar lomové procesní zóny, je potřeba, podívat se na problém komplexněji.

V nynější kapitole si nastíníme teorii interakce proměnlivosti materiálu se lomovou procesní zónou, a to jak závislost pevnosti na velikosti těles, tak i na samotné autokorelační délce  $l_\rho$ . Následně si představíme parametrickou studii 18 dvojic parametrů  $[l_\rho, \delta_h]$  na nominální pevnost diskrétních modelů tvaru kosti. V kapitole 7 se na interakce proměnlivosti materiálu s FPZ podíváme hlouběji skrz analytický model z článku [3].

## 6.1 Vliv autokorelační délky náhodného pole na nominální pevnost těles

Pokud při zatížení diskrétního modelu dojde k překročení maximálního napětí v některém z prutů, jeho tuhost se ponížší (vnese se poškození) a přenášené napětí se s rostoucí deformací prutu snižuje. Síly, které byly v prutu před dosažením jeho maximální únosnosti naakumulované, přebírají pruty v jeho okolí. Tento proces přerozdělení napětí pokračuje do stavu, kdy skupina poškozených prutů vytvoří lokalizovanou poruchu a dosáhne se maximálního zatížení. Pro přesnější uchopení „lokalizované trhliny“ zavedeme pojem *referenční objem materiálu*  $V_{RVE}$ . Pokud dojde k porušení všech prutů v objemu  $V_{RVE}$ , vznikne lokalizovaná trhlina a po překročení maximálního zatížení se trhlina propaguje až do úplného uvolnění napětí, tedy porušení tělesa. Význam pojmu RVE se může v různé literatuře lišit, například od pojmu RVE používaného v homogenizaci. Volba parametrů náhodného pole  $l_\rho$  a  $\delta_h$  výrazně ovlivňuje oblast, kterou se bude lokalizovaná porucha propagovat, a také udává odpor, který bude materiál lokalizované trhlině klást. Je patrné, že se porucha bude propagovat v oblastech na okraji nosníku s nejnižšími hodnotami materiálových parametrů  $f_t$ ,  $G_t$ . Velikost těchto oslabených oblastí je dána autokorelační délkou náhodného pole a dá se tedy očekávat, že o nominální pevnosti tělesa bude rozhodovat vztah mezi rozměry těchto oslabených oblastí a rozměry lokalizované trhliny, tedy objemu  $V_{RVE}$ . Pro zjednodušení uvažujme objem  $V_{RVE}$  jako kvádr, tedy

$$V_{RVE} = l_{rve} \times b_{rve} \times 1 \quad (6.1)$$

kde  $l_{rve}$  je délka a  $b_{rve}$  šířka objemu  $V_{RVE}$ . Hloubku  $V_{RVE}$  u rovinných modelů uvažujeme jako jednotkovou.

Pro analýzu interakce  $V_{RVE}$  s autokorelační délkou zatím uvažujme tyto limitní případy:

- $l_\rho \rightarrow \minDist$
- $l_\rho \rightarrow \infty$
- $l_\rho \rightarrow l_{\rho,crit}$

kde  $l_{\rho,crit}$  je kritická hodnota autokorelační délky, při které nosník vykazuje nejnižší průměrnou pevnost  $\bar{f}_N$ . Dále si popíšeme zmíněné krajní případy podrobněji, a to jak při samotné změně autokorelační délky náhodného pole, tak při změně rozměru tělesa  $D$ .

Nejdříve se podívejme na situaci, kdy ponecháme velikost tělesa neměnnou a budeme pracovat pouze s autokorelační délkou  $l_\rho$ . Pokud bychom ponechali předpoklad, že se konstrukce zřítí po porušení jednoho nejslabšího elementu, bude při snižování



$l_\rho$  docházet ke snižování  $f_N$ , dokud se náhodné pole nedostane na rozlišení diskrétního modelu, tedy  $l_\rho = \text{minDist}$ . U spojitých modelů by hranicí pro  $l_\rho$  byla velikost konečného prvku (značíme například  $h$ ), přičemž pokud bychom teoreticky mohli dosáhnout  $h \rightarrow 0$  a  $l_\rho \rightarrow 0$ , úloha by vedla na klasickou Weibullovu teorii (viz sekce 6.1.1) a blížila by se tedy k nule i průměrná nominální pevnost:

$$\lim_{l_\rho \rightarrow 0} \bar{f}_N(l_\rho) = 0 \quad (6.2)$$

Ve skutečnosti je však k porušení tělesa potřeba porušit určitý reprezentativní objem nosníku,  $V_{\text{RVE}}$ , pro který platí  $V_{\text{RVE}} \propto V_{\text{FPZ}}$  a  $l_{\text{rve}} \propto l_{\text{FPZ}}$  kde  $V_{\text{FPZ}}$  je objem obsazený lomovou procesní zónou a  $l_{\text{rve}}$  je délka  $V_{\text{RVE}}$ . Úměrnost délek  $l_{\text{rve}}$  a  $l_{\text{FPZ}}$  vychází z předpokladu, že jsou šířky a hloubky objemů totožné. O pevnosti nosníku tedy nerozhoduje pevnost jednoho prutu, nýbrž průměrná pevnost po objemu  $V_{\text{RVE}}$ , což vztah mezi  $l_\rho$  a  $\bar{f}_N$  výrazně mění. Pokud totiž  $l_\rho \rightarrow \text{minDist}$ , bude sice lokalita porušení vybírána z  $N$  nezávislých prutů, zároveň však bude platit  $l_\rho \ll l_{\text{rve}}$ . O porušení tudíž nebude rozhodovat extrémní hodnota jednoho prutu, nýbrž jakási průměrná hodnota pevnosti získaná z náhodného pole  $H(\mathbf{x})$  po délce  $l_{\text{rve}}$ . Pokud se budeme blížit limitě  $l_\rho/l_{\text{rve}} \rightarrow 0$ , bude pro každou realizaci průměrná hodnota  $H(\mathbf{x})$  po objemu  $V_{\text{RVE}}$  rovna střední hodnotě náhodného pole  $\mu_h = 1$ . Náhodné pole tedy nebude mít za těchto předpokladů při  $l_\rho \rightarrow \text{minDist}$  na průměrnou pevnost  $\bar{f}_N^D$  a směrodatnou odchylku  $\delta_N^D$  výsledků diskrétních modelů žádný vliv, a to nehlédě na volbu  $\delta_h$ . Vztah (6.2) tedy opravíme na

$$\lim_{l_\rho \rightarrow \text{minDist}} \bar{f}_N(l_\rho, \delta_h) = \bar{f}_N^D \quad (6.3)$$

$$\lim_{l_\rho \rightarrow \text{minDist}} \delta_N(l_\rho, \delta_h) = \delta_N^D \quad (6.4)$$

kde  $\bar{f}_N^D$  je průměrná pevnost diskrétních modelů bez náhodného pole.

Nyní se podívejme na opačný extrém, tedy situaci, kdy  $l_\rho \rightarrow \infty$ . Zde se funkce náhodného pole redukuje na

$$H_\infty(\mathbf{x}) = H_\infty \quad (6.5)$$

kde  $H_\infty$  je skalární náhodná veličina. V tomto případě bude tvar a lokalita poruchy nezávislá na realizaci náhodného pole a tudíž lze i na dva hlavní zdroje nahodilosti, tedy náhodné uspořádání prutů a realizaci náhodného pole hledět jako na dvě nezávislé náhodné veličiny. Náhodná veličina odpovídající nominální pevnosti jednotlivých realizací je tedy součin

$$f_N = f_N^D H_\infty \quad (6.6)$$

První dva centrální momenty součinu dvou nezávislých náhodných veličin pak získáme jednoduše podle [7] jako:

$$\lim_{l_\rho \rightarrow \infty} f_N(l_\rho, \delta_h) = f_N^D \mu_h = f_N^D \quad (6.7)$$

$$\lim_{l_\rho \rightarrow \infty} \delta_N(l_\rho, \delta_h) = \sqrt{\delta_D^2 \delta_h^2 + (f_N^D)^2 \delta_h^2 + \delta_D^2 \mu_h^2} = \sqrt{\delta_D^2 \delta_h^2 + (f_N^D)^2 \delta_h^2 + \delta_D^2} \quad (6.8)$$

kde  $\mu_{f_N, \infty}$  je střední hodnota a  $\delta_{f_N, \infty}$  směrodatná odchylka nominální pevnosti  $f_N$  stochastického diskrétního modelu při autokorelační délce náhodného pole  $l_\rho \rightarrow \infty$ . Všimněme si ze vztahu (6.7), že výsledná střední pevnost nezávisí na volbě  $\delta_h$ .

Další významnou autokorelační délkou je pro nás limita  $l_\rho \rightarrow l_{\rho, crit}$ . Pokud bychom zavedli speciální případ, kdy  $l_{rve} = b_{rve}$ , tedy objem  $V_{RVE}$  by se v rovině promítl jako čtverec, byla by hodnota kritické autokorelační délky rovna  $l_{\rho, crit} = l_{rve} = b_{rve}$ . Náhodné pole s takovou autokorelační délkou umožňuje výběr lokalizované poruchy oblasti s nízkou pevností a zároveň nedochází k významnému průměrování po objemu  $V_{RVE}$ .

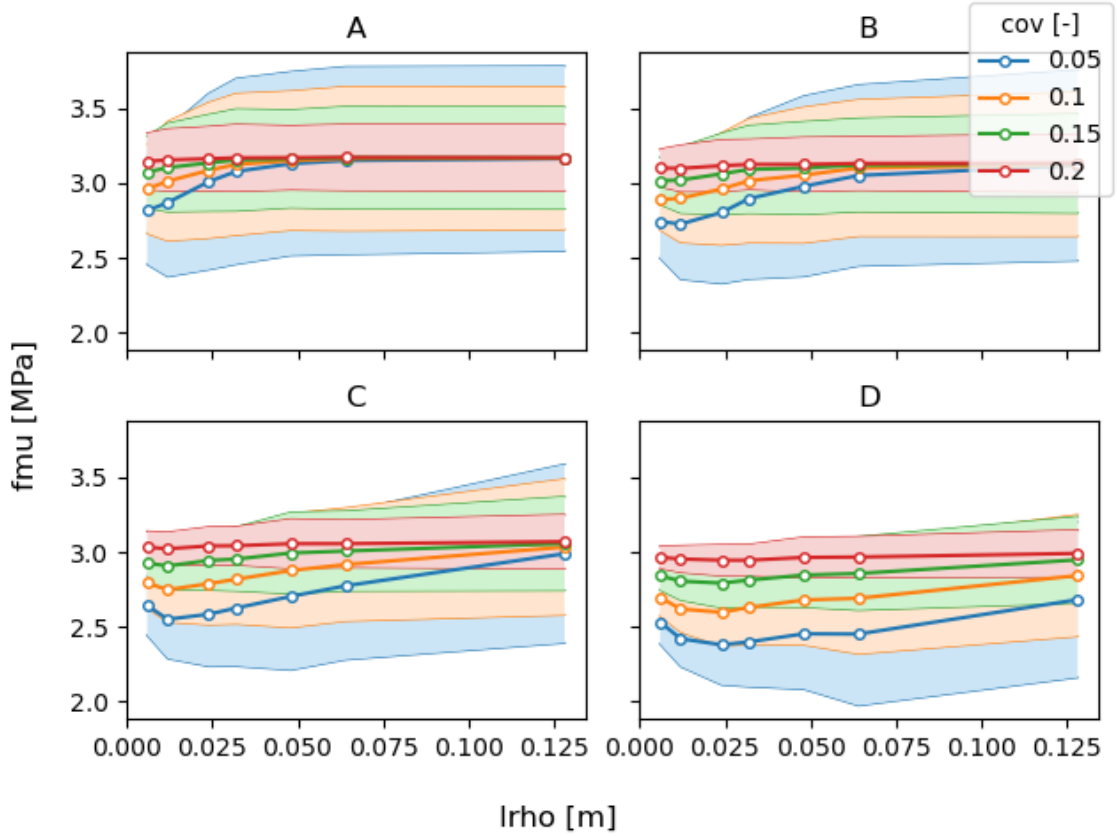
V našem případě však podmínka  $l_{\rho, crit} = l_{rve} = b_{rve}$  neplatí, protože šířka reprezentativního objemu, stejně jako šířka lomové procesní zóny, je rovna velikosti diskrétního prutu, tedy přibližně 6 mm. Jak už jsme si vysvětlili, směru  $l_{rve}$  je nejméně příznivá situace, kdy  $l_\rho = l_{rve}$ . Ve směru  $b_{rve}$  to platí obdobně s tím rozdílem, že šířka  $b_{rve}$  ovlivňuje i podíl mezi šířkou poruchy ( $b_{rve}$ ) a výškou nosníku, ze které se místo s nejnižší pevností materiálu vybírá, tím se tedy zvyšuje pravděpodobnost, s jakou se trhлина bude propagovat v extrémně oslabeném místě. Nejméně příznivá hodnota autokorelační délky, je tedy jaký si rovnovážný stav mezi stavu  $l_\rho = l_{rve}$  a  $l_\rho = b_{rve}$ , pro kritickou autokorelační délku tedy platí:

$$b_{rve} < l_{\rho, crit} < l_{rve} \quad (6.9)$$

Vliv různých parametrů náhodného pole  $l_\rho$ ,  $\delta_h$  je pro nosníky tříbodového ohybu se zářezem a bez zářezu modelován stochastickými diskrétními modely v rámci práce [7].

### 6.1.1 Vliv velikosti na nominální pevnost

Nyní nahlédněme na situaci, kdy ponecháme  $l_{rve}$  a  $l_\rho$  neměnné a zvětšujeme charakteristický rozměr modelu  $D$ . V tomto případě je podíl  $l_\rho/l_{rve}$  neměnný, takže případné průměrování náhodného pole přes objem  $V_{RVE}$  je na  $D$  nezávislé. U nosníků malých velikostí je hodnota náhodného pole  $H(\mathbf{x})$  po objemu nosníku téměř konstantní. Realizace náhodného pole se tedy blíží realizaci náhodné veličiny  $H$  se střední hodnotou 1, střední pevnost  $f_N$  se u malých velikostí též blíží  $\bar{f}_N^D$ . Při



Obr. 6.1: Závislost  $f_N(l_\rho)$ , diskrétních modelů velikostí A–D, pro různé  $\delta_h$

$D \rightarrow \infty$  se tedy korelace náhodného pole stane vůči rozměru modelu zanedbatelná a úlohu lze jednoduše transformovat na úlohu klasické Weibullové statistické teorie pevnosti, kde se těleso skládá z  $N$  referenčních objemů  $V_{\text{RVE}}$  s nezávislými náhodnými pevnostmi. Závislost střední hodnoty  $\bar{f}_N(D^2)$  vede u Weibullové teorie na mocninný zákon

$$\bar{f}_N = k_0 D^{-\frac{2}{m}} \quad (6.10)$$

kde  $k_0$  charakterizuje geometrii konstrukce a  $m$  je parametr tvaru Weibullova rozdělení. Ze vztahu (6.10) je patrné, že při zvětšování rozměru  $D$  k nekonečnu, se nominální pevnost bude limitně blížit nule.

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \bar{f}_N(D^2) = 0 \quad (6.11)$$

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \delta_h(D^2) = 0 \quad (6.12)$$

Zatím jsme uvažovali  $l_{\text{rve}}$  a tedy i  $l_{\text{FPZ}}$  nezávislou na velikosti  $D$ . Z kapitoly 5.2 však víme, že u těles menších velikostí tento předpoklad neplatí. Protože předpokládáme, že minimální nominální pevnost je závislá na délce  $l_{\text{rve}}$ , dá se předpokládat, že na velikosti tělesa  $D$  bude závislá i hodnota autokorelační délky, při které bude těleso

vykazovat nejnižší nominální pevnost. Pokud bychom si představili extrémní příklad, tedy například, že platí  $l_{FPZ} \propto D$ , zvětšovala by se s velikostí nosníku i průměrovací oblast náhodného pole  $H(\mathbf{x})$  a situace by tedy byla ekvivalentní situaci, kdy měníme  $l_\rho$  a  $D$  zůstává neměnná.

## 6.2 Modelování a výsledky

### 6.2.1 Vliv parametrů náhodného pole na nominální pevnost

Pro ověření výše uvedených předpokladů pro tahovou zkoušku tělesa tvaru kosti je v rámci práce sestavena parametrická studie modelů série  $A_n-D_n$  opatřených náhodnými poli  $[H(x)]_{l_\rho, i, \delta_i}$ , s parametry:

$$\vec{l}_\rho = \{0.006 \quad 0.012 \quad 0.024 \quad 0.032 \quad 0.064 \quad 0.128\}^T \quad (6.13)$$

$$\vec{\delta} = \{0.05 \quad 0.1 \quad 0.15 \quad 0.2\}^T \quad (6.14)$$

Velikosti  $E_n$ ,  $F_n$  jsou ze studie vyřazeny, protože je generování náhodného pole pro nosníky takových rozměrů výpočtově náročné. Dále je vhodné zmínit, že nejnižší hodnota autokorelační délky je stanovena na  $l_\rho = \text{minDist}$ . Již při této autokorelační délce má náhodné pole charakter nekorelovaného pole a tedy volba  $l_\rho < \text{minDist}$  nemá z podstaty zvolených modelů význam.

Protože je generování náhodných polí výpočetně náročné, je vhodné využít toho, že směrodatná odchylka pouze mění intenzitu vygenerovaného pole [7]. Gaussovské rozdělení se střední hodnotou  $\mu_0 = 0$  a směrodatnou odchylkou  $\delta_{h0}$  lze jednoduše transformovat na rozdělení s požadovanou směrodatnou odchylkou  $\delta_{hi}$ . Vygenerujeme tedy náhodná pole pro potřebné  $\vec{l}_\rho$  a jednou referenční směrodatnou odchylku  $\delta_{h0}$ , a pro další směrodatné odchylky přepočteme vztahem:

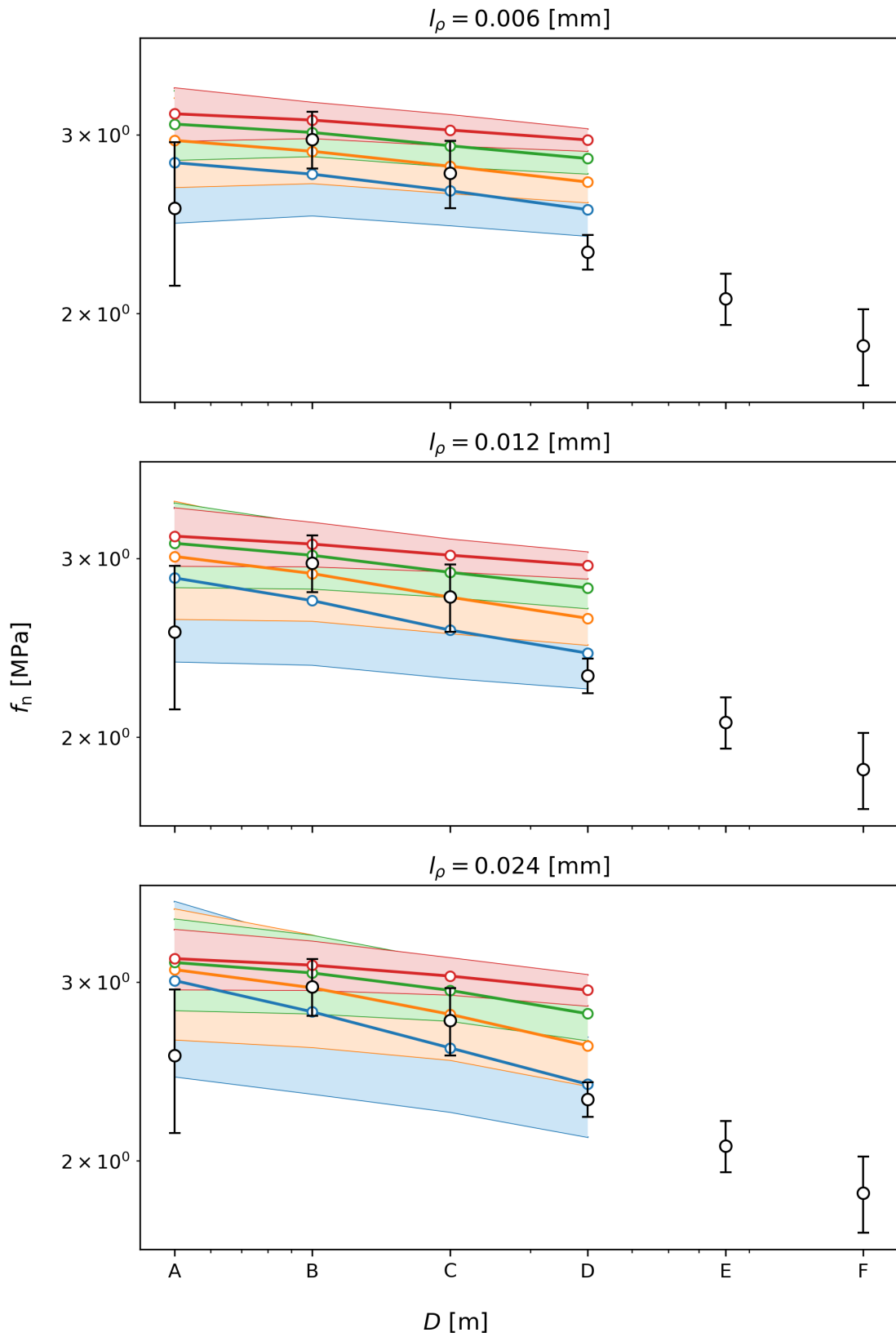
$$[H(\mathbf{x})]_{\delta_i} = 1 + \left([H(\mathbf{x})]_{\delta_0} - 1\right) \frac{\delta_i}{\delta_0} \quad (6.15)$$

kde  $[H(\mathbf{x})]_{\delta_0}$  je vygenerované pole a  $[H(\mathbf{x})]_{\delta_i}$  je náhodné pole  $i$ -té směrodatné odchylky.

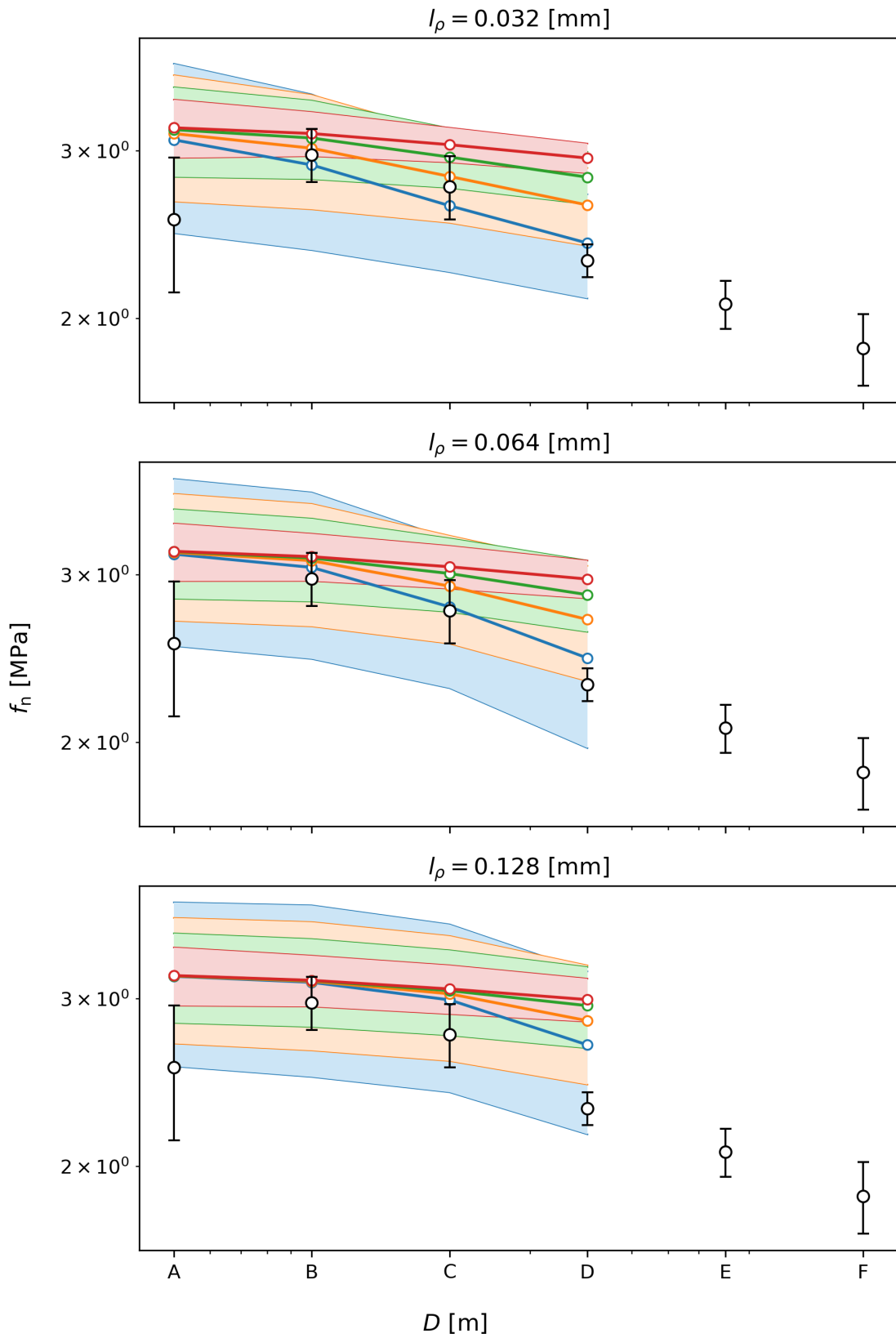
Podívejme se na výsledky vlivu změny  $l_\rho$  na nominální pevnost pro tělesa  $A_n^R-F_n^R$  6.1. U velikosti modelů  $A_n^R-C_n^R$  je u vyšších autokorelačních délek jasná konvergence pevnosti k hodnotě  $f_N^D$ , získané modely bez náhodného pole. Totéž platí pro větší nosníky  $E_n^R-F_n^R$  u menších autokorelačních délek. Autokorelační délky vedoucí k nejnižším pevnostem jsou označeny čárkovanou čarou. U velikosti  $A$  se dá předpokládat, že  $l_{\min} < \text{minDist}$ . Hodnoty  $l_{\min}$  tedy nelze u velikosti  $A$  dosáhnout. Následně se s velikostí těles hodnota  $l_{\min}$  zvětšuje, kde u velikosti  $E$  začne změna její hodnoty

stagnovat. Víme, že  $l_{\min} \approx l_{\text{rve}}$ , výsledky tedy potvrzují závislost  $l_{\text{rve}}$ , a tedy i  $l_{\text{FPZ}}$  na charakteristickém rozměru nosníku  $D$ , diskutovanou v kapitole 5.2.

Nyní se zaměříme na výsledky závislostí  $f_N$  na velikosti těles 4.3. U těles A–D si lze u autokorelační délky  $l_\rho = \text{minDist}$  všimnout, že jsou výsledky pro různé  $\delta_h$  téměř rovnoběžné. Je to dáno tím, že u velikostí A–D délka  $l_\rho = \text{minDist}$  není daleko od délky  $l_{\text{rve}}$ . Realizace s poli různých směrodatných odchylek tedy nemají tendenci konvergovat k  $f_N^D$ . Se zvyšující se  $l_\rho$  však již u menších velikostí začíná  $l_\rho$  délku  $l_{\text{rve}}$  výrazně převyšovat a hodnota  $f_N(\delta_h)$  konverguje k  $f_N^D$ .



Obr. 6.2: Závislost  $f_N(D)$ , diskrétních modelů velikostí A–D, pro různé  $l_\rho$



Obr. 6.3: Závislost  $f_N(D)$ , diskrétních modelů velikostí A–D, pro různé  $l_\rho$

## 7 Analytický model statistického vlivu velikosti

V předchozích kapitolách je vykreslena interakce náhodného pole s lokalizovanou poruchou pro excentricky tažené těleso tvaru kosti, a to jak pro limitní případy limitní případy autokorelačních délek  $l_\rho$ , tak i ve vztahu s rozptylem  $\delta_h$  a charakteristického rozměru těles  $D$ . Tyto předpoklady jsme si poté ověřili na řadě zkoušek diskrétních modelů, opatřených náhodným polem materiálové proměnlivosti. Ověření stochastickými diskrétními modely má však své limity:

- a) Rozsah velikostí modelů je omezený, tudíž nelze zkoumat odezvu těles extrémních velikostí
- b) Nelze zkoumat speciální případ reprezentativního objemu, kdy  $l_{\text{rve}} = b_{\text{rve}}$
- c) Nelze zkoumat vliv závislosti  $l_{\text{rve}}(D)$  na nominální pevnost.

V článku [3] je představen analytický model vztahu mezi parametry náhodného pole  $l_\rho$  a  $\delta_h$  a nominální pevnosti  $f_N$ . Model je postaven na výpočtu minima klouzavého průměru náhodného pole  $H(x)$ , tedy pole průměrovaného po oblasti  $V_{\text{RVE}}$ . Protože se snažíme spíš potvrdit trend naměřených výsledků, než-li o přesné výsledky, nahradíme těleso tvaru kosti excentricky zatíženým kvádrem a umožníme tím použití zjednodušené verze modelu, popsané v následujících sekcích. Model je v rámci předložené práce stručně popsán a implementován pro vliv velikosti excentricky taženého tělesa tvaru kvádrů v jazyce `python`.

Pro sestavení analytického vyjádření závislosti  $f_N(l_\rho, \delta_h)$  je uvažována *Efektivní pevnost*  $f_{\text{eff}}$ , která charakterizuje průměrnou pevnost po objemu  $V_{\text{RVE}}$ . Pokud v libovolném bodě tělesa dojde k překročení této  $f_{\text{eff}}$ , nastane kolaps konstrukce. Pro stanovení, jestli došlo k překročení efektivní pevnosti, musíme zavést příslušnou veličinu efektivního napětí  $\sigma_{\text{eff}}$  jako hodnotu prutového napětí  $s$  v těžišti uvažovaného objemu  $V_{\text{RVE}}$ . Dále nastíníme výpočet efektivní pevnosti průměrováním náhodného pole  $H(\mathbf{x})$ .

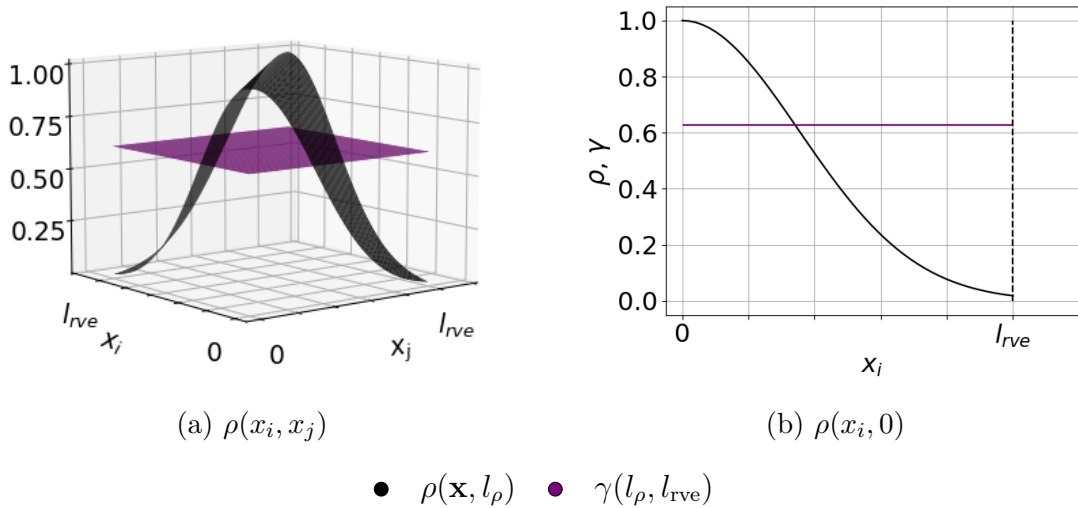
### 7.1 Průměr náhodného pole v lomové procesní zóně

O pevnosti zkoušeného tělesa nerozhoduje pevnost jediného diskrétního prutu, ale průměr pevností po objemu  $V_{\text{RVE}}$ .

Nejdříve si odvození efektivní pevnosti ukažme na řetězu prutů jediné dimenze. Náhodné pole  $H(\mathbf{x})$  se nám zjednoduší na funkci  $H(x)$  a objem  $V_{\text{RVE}}$  je dán jediným rozměrem  $l_{\text{rve}}$ . Průměr funkce  $H(x)$  v bodě  $x$  po délce  $l_{\text{rve}}$  spočteme integrací

$$\bar{H}(x) = \frac{1}{l_{\text{rve}}} \int_{x-0.5 l_{\text{rve}}}^{x+0.5 l_{\text{rve}}} H(x) dx \quad (7.1)$$





Obr. 7.1: Hodnota redukční funkce pro danou  $l_{rve}$

Průměrováním  $H(\mathbf{x})$  dochází k redukci směrodatné odchyly a k modifikaci autokorelační funkce, zatímco střední hodnota stacionárního náhodného pole je zachována. Redukce směrodatné odchyly závisí na autokorelační funkci  $\rho(x_i, x_j)$  a průměrovací délce  $l_{rve}$ . Hodnotu redukce pro danou  $l_{rve}$  vyjádříme jako průměrnou hodnotu funkce  $\rho(x_i, x_j)$ , omezené průměrovací délkou, tedy  $x_i < l_{rve}$ ;  $x_j < l_{rve}$ . Průměrnou hodnotu takto omezené autokorelační funkce tedy spočteme jednoduše dvojným integrálem

$$\gamma(l_{rve}, \rho) = \frac{1}{l_{rve}^2} \int_0^{l_{rve}} \int_0^{l_{rve}} \rho(x_j - x_i) dx_i dx_j \quad (7.2)$$

kde  $\gamma(l_{rve}, \rho)$  je redukční funkce. Grafické znázornění redukční funkce je vidět na obr. 7.1. Abychom mohli redukční funkci vyjádřit parametrem  $\tau$ , zjednodušíme dvojný integrál transformací souřadnic  $x_j - x_i = \tau$  a získanou funkci použijeme pro redukcí variace původního nezprůměrovaného pole  $\delta_h^2$

$$\gamma(l_{rve}, l_\rho) = \frac{2}{l_{rve}} \int_0^{l_{rve}} \left[ 1 - \frac{\tau}{l_{rve}} \rho(\tau, l_\rho) \right] d\tau \quad (7.3)$$

$$\bar{\delta}_h^2 = \gamma(l_{rve}, l_\rho) \delta_h^2 \quad (7.4)$$

kde  $\bar{\delta}_h$  je redukovaná směrodatná odchylka a  $\gamma(l_{rve}, l_\rho)$  je redukční funkce.

Víme, že určitý integrál patří mezi lineární zobrazení, tedy

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (7.5)$$

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \quad (7.6)$$

Z definice (7.1) je tedy jasné, že mezi lineární zobrazení patří i průměrovací proces  $H(\mathbf{x}) \rightarrow \bar{H}(\mathbf{x})$ . Platí, že pokud aplikuji lineární transformaci na náhodné pole  $H(x)$ , musí zůstat součin parametru  $(\delta_h^2/\mu_h^2)$  a dvojnásobku plochy pod  $\rho(\boldsymbol{\tau}, l_\rho)$  invariantní [16]:

$$\left(\delta_h^2/\mu_h^2\right) \left[2 \int_0^\infty \rho(\boldsymbol{\tau}, l_\rho) d\boldsymbol{\tau}\right] = \left(\delta_h^2/\mu_h^2\right) \theta(\rho) = \text{konst.} \quad (7.7)$$

kde  $\theta(\rho)$  se označuje jako *míra fluktuace* náhodného pole. Pokud tedy průměrovací proces zredukuje lokální rozptyl pole, dojde k adekvátnímu zvětšení míry fluktuace, a tedy i změně autokorelační funkce. Novou autokorelační délku zprůměrovaného pole  $\bar{H}(\mathbf{x})$ , získáme podílem původní autokorelační délky redukční funkce.

$$l_{\text{eff}} = \frac{l_\rho}{\gamma(l_{\text{rve}}, l_\rho)} \quad (7.8)$$

## 7.2 Průměrování dvojrozměrného náhodného pole

Zatím jsme se zabývali průměrováním náhodného pole fluktuujícího podél jediné dimenze. Pokud chceme úlohu rozšířit na rovinný model, musíme průměrovat pole dvou proměnných  $H(\mathbf{x}) = H(x, y)$  a rozšířit průměrovací oblast o šířku  $b_{\text{rve}}$ . Průměrování pak lze zapsat obdobně jak je popsáno v rovnici (7.1), tedy

$$\bar{H}(x, y) = \frac{1}{l_{\text{rve}} b_{\text{rve}}} \int_{y-0.5 b_{\text{rve}}}^{y+0.5 b_{\text{rve}}} \int_{x-0.5 l_{\text{rve}}}^{x+0.5 l_{\text{rve}}} H(x, y) dx dy \quad (7.9)$$

Protože nás zajímá především oblast nosníku, kde může dojít k lokalizaci trhliny, zaměříme se pouze na svislý pruh ohraničený vzdáleností  $l_{\text{rve}}$  od pravého líce nosníku. Protože nás zajímá průběh pole v tomto pruhu, zaměříme se na řez polem  $\bar{H}(0.5 b_{\text{rve}}, y)$ . Je však nutné zdůraznit, že řez  $\bar{H}(0.5 b_{\text{rve}}, y)$  je ovlivněn vlastnostmi pole i ve směru  $x$ . Průměrování ve směru  $x$  totiž ovlivňuje bodovou variaci  $\delta_h^2$ , která není závislá na směru. Bodový rozptyl zprůměrovaného pole tedy spočítáme jednoduše jako

$$\bar{\delta}_h^2 = \gamma(l_{\text{rve}}, l_\rho) \gamma(b_{\text{rve}}, l_\rho) \delta_h^2 \quad (7.10)$$

Zde jsou uplatněny dvě redukční funkce pro dva ortogonální směry průměrování. Na rozdíl od rozptylu, autokorelační funkce je vektorové veličiny a lze je tedy rozložit do směru  $x$  a  $y$

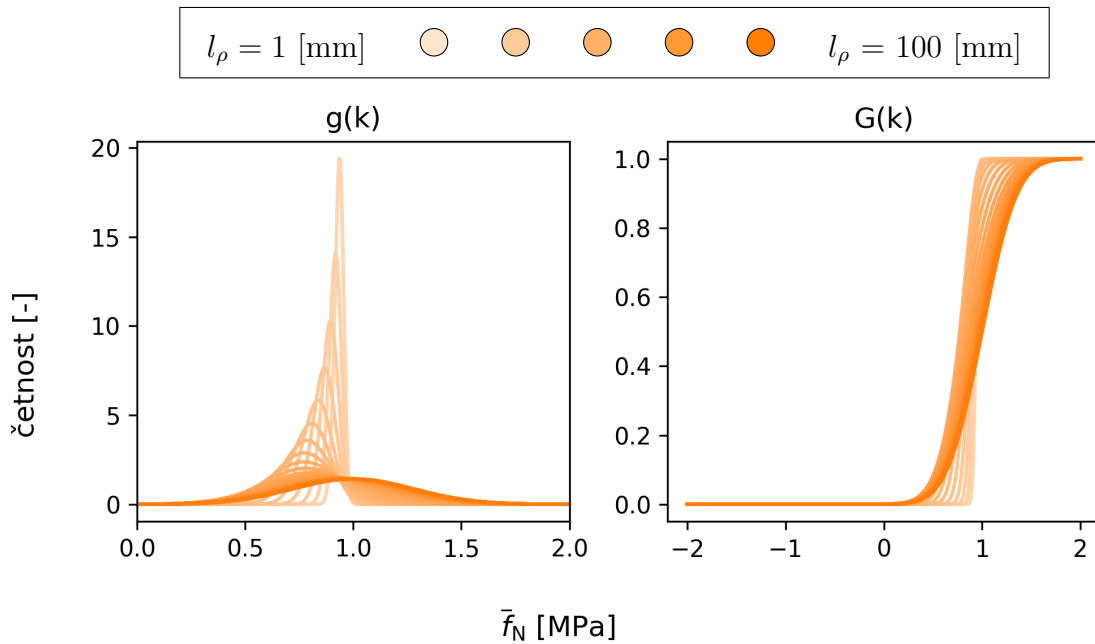
$$\bar{\rho}(\boldsymbol{\tau}, V_{\text{RVE}}) = \bar{\rho}(\tau_y, b_{\text{rve}}) \bar{\rho}(\tau_x, l_{\text{rve}}) \quad (7.11)$$

I pro míru fluktuace pole  $\bar{H}(\mathbf{x})$  můžeme tedy psát

$$\bar{\theta}(\tau_y) = 2 \int_0^\infty \bar{\rho}(\tau_y, b_{\text{rve}}, l_\rho) d\tau_y \quad (7.12)$$

Kde  $\bar{\theta}(\tau_y)$  a  $\rho(\tau_y, b_{\text{rve}}, l_\rho)$  jsou míra fluktuace a autokorelační délka zprůměrovaného pole  $\bar{H}(x, y)$  ve směru  $y$ .

### 7.3 Nominální pevnost jako minimum efektivní pevnosti

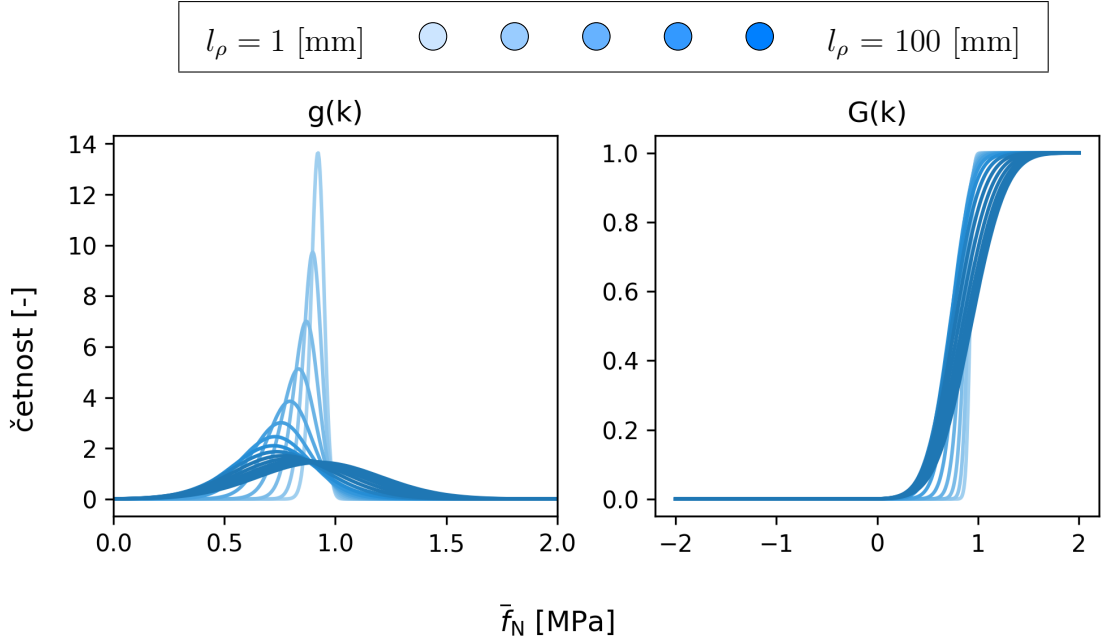


Obr. 7.2: Hustota pravděpodobnosti a distribuční funkce překročení pevnostního prahu  $k$  při  $l_{rve} = 30$  mm,  $b_{rve} = 6$  mm

V předchozí sekci jsme si uvedli výpočet efektivní pevnosti u excentricky taženého nosníku tvaru kvádrů. Pokud efektivní napětí  $\sigma_{\text{eff}}(\mathbf{x})$ , vyvolané daným zatížením překročí v libovolném bodě nosníku jeho efektivní pevnost, dojde k poruše konstrukce. U obecné geometrie nosníku například těleso tvaru kosti má  $\sigma_{\text{eff}}(\mathbf{x})$  obecný průběh. Pro excentricky tažený kvádr tvoří průběh  $\sigma_{\text{eff}}(\mathbf{x})$  rovinu, která je skloněná ve směru  $x$ . Zajímá-li nás pouze průběh ve směru  $y$ , můžeme efektivní napětí pro kvádr uvažovat jako konstantní funkci  $\sigma_{\text{eff}}(y) = k$ .

Zajímá nás tedy pravděpodobnost, s jakou minimální hodnota realizace náhodného procesu  $H(y)$  podkročí práh  $k$  na úseku délky  $L_{\text{eff}}$ .  $L_{\text{eff}}$  je jednoduše uvažována jako výška zatěžovaného nosníku. Distribuční funkce této pravděpodobnosti  $G(k, L) = P[\min H(y) < k]$  je odvozena v rámci dizertační práce Ove Ditlevsena [17]. Řešení vychází z upravené teorie extrémních hodnot, která má aplikaci v modelu nejslabšího článku. Exponent je nahrazen za takzvanou *hazardní funkci*  $h(x) = [\phi(x)/(1 - \Phi(x))]$  známou ze *survival analysis*:

$$G(k, L) = P[\min H(y) < k] = 1 - [1 - \Phi(u)] \exp\left[-\frac{\phi(u)}{1 - \Phi(u)} \lambda L_{\text{eff}}\right] \quad (7.13)$$



Obr. 7.3: Hustota pravděpodobnosti a distribuční funkce překročení pevnostního prahu  $k$  při  $l_{rve} = 30$  mm,  $b_{rve} = 30$  mm

kde  $u = \left[ (k - \bar{\mu}_h) / \bar{\delta}_h \right]$  vyjadřuje úpravu prahu  $k$  pro střední hodnotu  $\bar{\mu}_h \neq 0$  a součinitel  $\lambda$  se dá popsat jako převrácená hodnota délky statisticky „nezávislých úseků“ náhodného procesu  $H(x)$  a závisí na křivosti autokorelační funkce zprůměrovaného pole v bodě  $\tau = 0$ , tedy  $\ddot{\rho}_h(0)$ :

$$\lambda = \sqrt{-\frac{\ddot{\rho}_h(0)}{2\pi}} \quad (7.14)$$

Součin  $\lambda L_{\text{eff}}$  ze vztahu (7.3) tedy vyjadřuje jakýsi počet „nezávislých úseků“ na délce  $L_{\text{eff}}$ . Rovnice (7.13) distribuční funkce pravděpodobnosti  $P[\min H(y) < k]$  je pro různě velké délky průměrovacích oblastí  $l_{rve}$  vykreslena na obrázku 7.3 vpravo. Můžeme si všimnout, že pro menší průměrovací délky je funkce více strmá. Tomu odpovídají i příslušné funkce hustoty pravděpodobnosti  $g(k, L)$ . Ty získáme jako derivaci  $dG(k, L)/dk$ :

$$g(k, L) = \frac{1}{\bar{\delta}_h} \left[ \phi(u) (1 - \lambda L_{\text{eff}} u) + \frac{\phi(u)}{1 - \Phi^2(u)} \lambda L_{\text{eff}} \right] \exp \left[ -\frac{\phi(u)}{1 - \Phi(u)} \lambda L_{\text{eff}} \right] \quad (7.15)$$

Výsledné funkce hustot pravděpodobnosti překročení efektivní pevnosti prahem efektivního napětí  $k$  pro různé  $l_\rho$  vidíme na obrázku 7.3 vlevo. Funkce hustoty pravděpodobnosti samozřejmě zahrnuje veškeré možné realizace efektivní pevnosti, z ní už můžeme jednoduše spočítat střední hodnotu:

$$\mu_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} k g(k, L) dk. \quad (7.16)$$

Tím jsme získali analytický vztah pro výpočet průměrné hodnoty efektivní pevnosti, kde dojde k překročení prahem efektivního napětí  $\sigma_{\text{eff}}(y)$  při  $N \rightarrow \infty$ , kde  $N$  je počet realizací náhodného procesu  $H(x)$ . Rozptyl efektivní pevnosti při  $N \rightarrow \infty$  je pak jednoduše:

$$\delta_{\min}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} k^2 g(k, L) dk - \mu_{\min}^2 \quad (7.17)$$

Veličiny  $\mu_{\min}$  a  $\delta_{\min}^2$  zde figurují jako první a druhý kvadratický moment náhodné veličiny a člen  $\mu_{\min}^2$  v rovnici (7.17), který zajišťuje, aby byl rozptyl počítán k hodnotě  $\mu_{\min}^2$ , zde figuruje jako přírůstek *Steinerovy věty*.

## 7.4 Výsledky analytického modelu

### 7.4.1 Závislost střední nominální pevnosti na autokorelační délce

Pro výpočet závislosti  $f_N(l_\rho)$  budeme uvažovat dvě varianty  $b_{\text{rve}}$ :

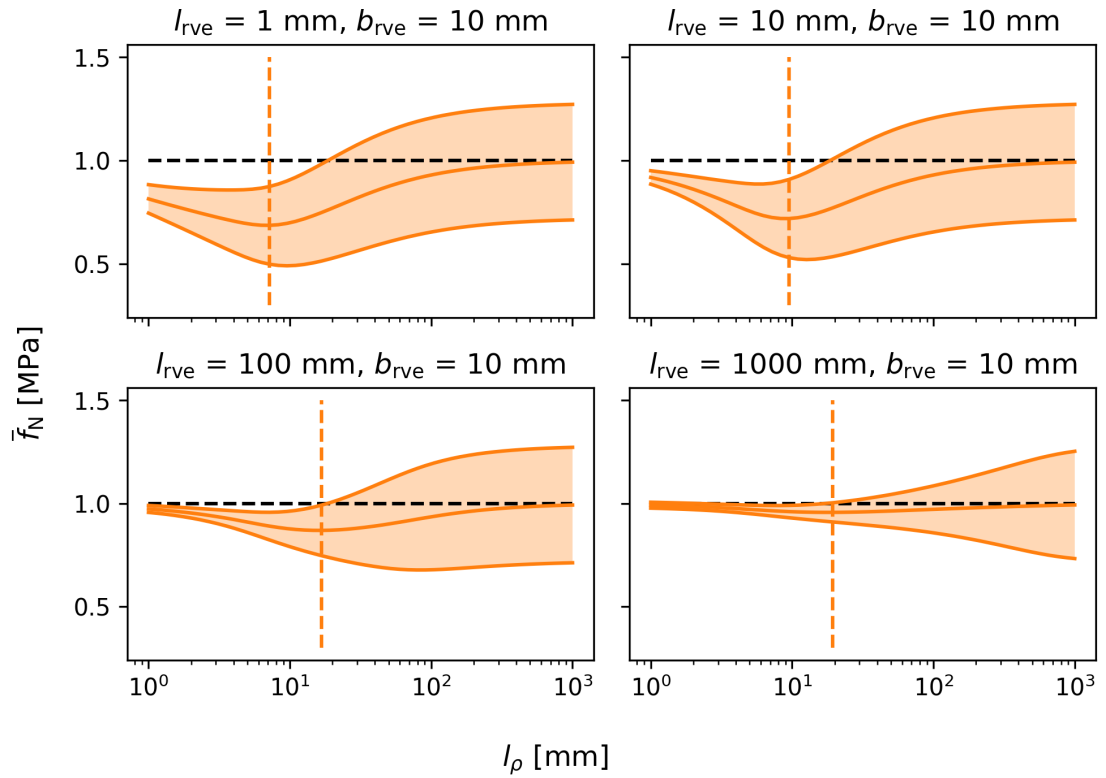
- a)  $b_{\text{rve}} = \text{minDist}$
- b)  $b_{\text{rve}} = l_{\text{rve}}$

kde  $l_{\text{rve}}$  uvažujeme  $\{1, 10, 100, 1000\}$  mm. První varianta (a) odpovídá šířce  $V_{\text{RVE}}$  u diskrétních modelů, druhá varianta (b) slouží k ověření předpokladů ze sekce 6.1. Efektivní délku  $L_{\text{eff}}$  zde uvažujeme jako 100 mm a směrodatnou odchylku  $\delta_n = 0.3$ . Počítáme s rozpětím autokorelačních délek  $l_\rho = 1 - 10^3$  mm.

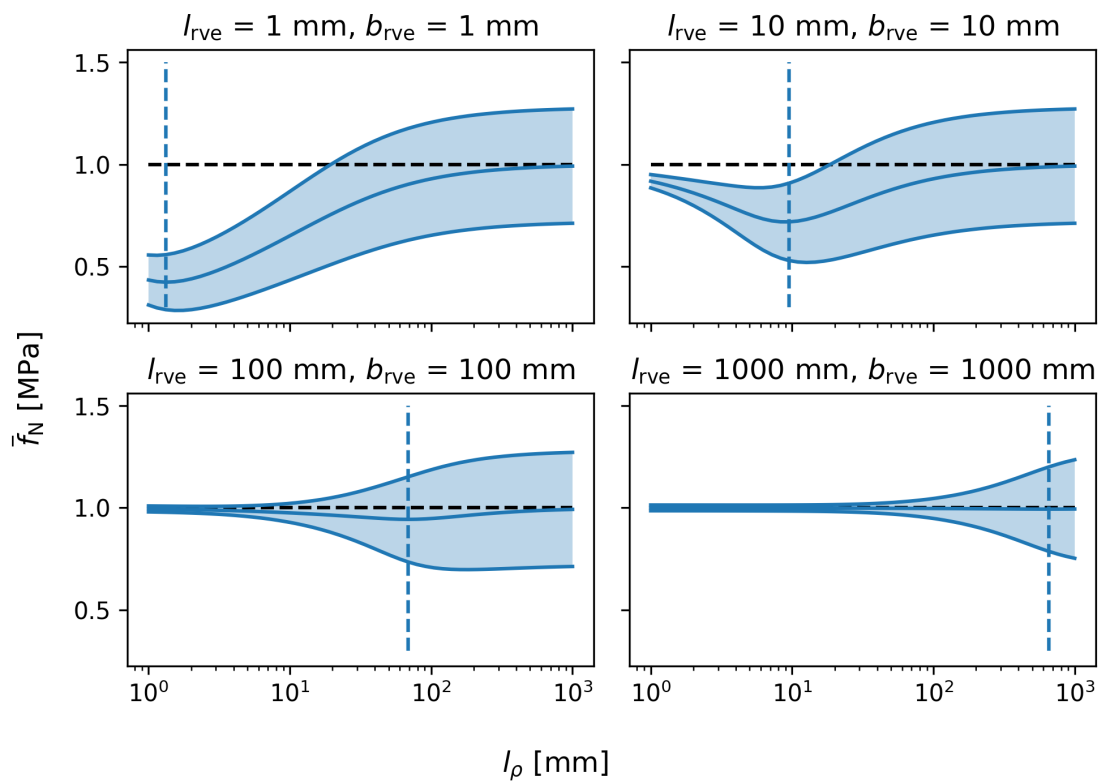
Nejdříve pro každou kombinaci  $l_{\text{rve}}$  a  $b_{\text{rve}}$  sestavíme distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti podle vztahů (7.13), (7.15). Některé z nich vidíme na grafech na obr. 7.3. Pro stanovení střední hodnoty pevnosti  $\bar{f}_N$  a rozptylu  $\delta^2$  využijeme definice (7.16) a (7.17). Integrály řešíme numericky.

Když se podíváme na tvar rozdělovacích funkcí (7.15) na obrázku 7.3 můžeme si všimnout, že při nižších hodnotách  $l_\rho$  vykazuje efektivní pevnost nízký rozptyl a střední hodnota se blíží  $\mu_{\min} = 1$ . Po mírném zvýšení  $l_\rho$  se rozptyl mírně zvětšuje a rozdělení se začíná posouvat směrem k nižšímu pevnostem. Při dalším zvětšování  $l_\rho$  začne střední hodnota opět stoupat až zpátky na hodnotu  $\mu_{\min} = 1$ . To je však doprovázeno prudkým nárůstem rozptylu, jak je na grafu vidět. Aby byla závislost zmiňovaných veličin více patrná, jsou v grafech na obr. 7.4 vykresleny přímo závislosti  $\bar{f}_N$ ,  $\delta^2$  na  $l_\rho$ . Svislá čárkovaná čára značí kritickou autokorelační délku  $l_{\rho, \text{crit}}$ .

Porovnáme-li výsledky varianty a) a b), všimněme si, že u varianty b), se potvrzuje předpoklad zmíněný v sekci 6.1, že pokud je délka reprezentativního objemu rovna jeho šířce, je kritická délka  $l_{\rho, \text{crit}}$  rovna (přibližně) délce, respektive šířce  $V_{\text{RVE}}$ . U varianty a) je drobný posun  $l_{\rho, \text{crit}}$  vzhledem k vyšším  $l_{\text{rve}}$  pozorován také. Všimněme si také, že u obou variant hodnota  $\bar{f}_N$  u vyšších autokorelačních délek blíží  $\bar{f}_N \approx 1$ .



(a)  $b_{rve} = minDist$



(b)  $b_{rve} = l_{rve}$

Obr. 7.4: Závislost  $\bar{f}_N$  a  $\delta_h$  analytického modelu na autokorelační délce

## 7.4.2 Závislost střední nominální pevnosti na velikosti těles

V rámci sekce 5.2 jsme si ukázali, že vlivem vztahu mezi okrajem tělesa a lomovou procesní zónou může u těles (především menších velikostí) docházet k jisté závislosti FPZ na velikosti  $D$ . Z kapitoly 6 víme, že má lomová procesní zóna, respektive  $V_{\text{RVE}}$  na střední hodnotu nominální pevnosti  $f_N$  zásadní vliv, a proto se nabízí otázka, jak by různé (hypotetické) funkce vývoje lomové procesní zóny, mohly průměrnou pevnost  $\bar{f}_N$  a rozptyl  $\delta_h$  těles ovlivnit. Pro sledování závislosti pevnosti a rozptylu na charakteristickém rozměru  $D$ , rovněž použijeme výrazy (7.16) a (7.17) s tím rozdílem, že místo parametru  $l_\rho$ , budeme měnit délku úseku, na kterém překročení efektivní pevnosti  $\sigma_{\text{eff}}$  hledáme. Při volbě  $L_{\text{eff}}$  vycházíme z výšky těles tvaru kosti z článku [9] (obr. 4.1), tedy  $L_{\text{eff}} = 1.5 D$ . Autokorelační délku volíme  $l_\rho = 100$  mm. šířku  $V_{\text{RVE}}$  volíme  $b_{\text{rve}} = \text{minDist}$  a  $l_{\text{rve}}$  volíme jako funkci  $D$  ve variantách.

a)  $l_{\text{rve}} = \text{konst.} = 50$  [mm]

b)  $l_{\text{rve}} = a D = 0.15 D$

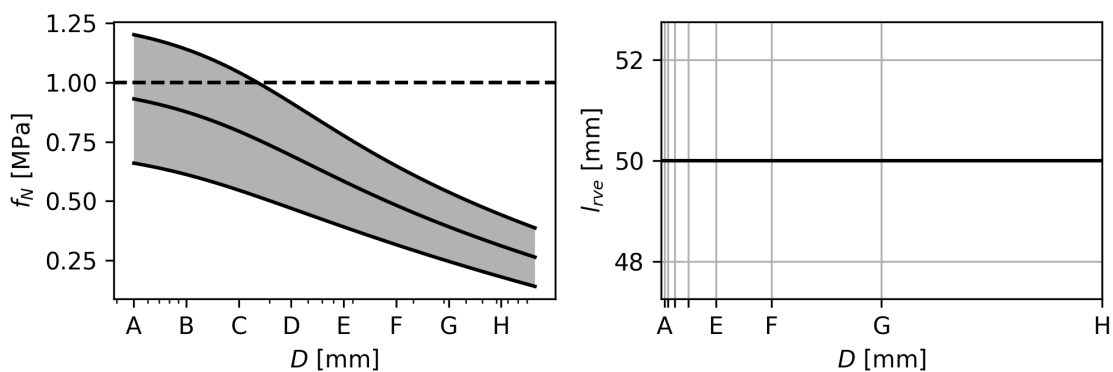
c)  $l_{\text{rve}} = b \sqrt{D} = 6 \sqrt{D}$

Výsledky jsou vykresleny na obr. 7.5. Jak je popsáno v sekci 6.1.1, u malých velikostí je hodnota náhodného pole  $H(\mathbf{x})$ , a tedy i zprůměrovaného  $\bar{H}(\mathbf{x})$  po objemu nosníku konstantní. Na náhodné pole  $\bar{H}(\mathbf{x})$  se tedy můžeme dívat jako realizaci náhodné veličiny jedné proměnné o střední hodnotě 1. A protože i  $f_t = 1$ , bude se hodnota střední pevnosti u malých velikostí pro všechny tři varianty blížit  $\bar{f}_N = 1$ .

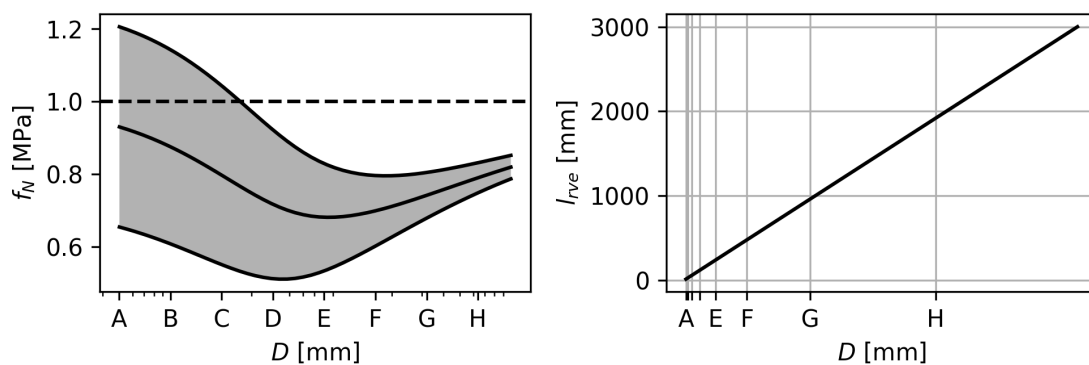
Varianta a) s konstantní hodnotou  $l_{\text{rve}}$ , respektive neměnným tvarem lomové procesní zóny odpovídá klasickému pojetí statistického vlivu velikosti, popsaného například v publikaci [4]. U větších nosníků je autokorelační délka vůči rozměru zanedbatelná a můžeme vidět, že úloha skutečně vede na mocninnou závislost (v logaritmických osách zobrazenou jako přímka) podle Weibullové teorie, jak je stručně popsáno v sekci 6.1.1.

U varianty b) je situace výrazně jiná. Lineární závislost  $l_{\text{rve}}(D)$  způsobí, že u extrémně velkých nosníků se proměnlivost materiálu přes procesní zónu velkých rozměrů výrazně průměruje, což může podle zavedených předpokladů hypoteticky způsobit částečný návrat pevnosti s výrazným snížením rozptylu. Taková závislost  $l_{\text{rve}}(D)$  může být pozorována u porušení po stabilním růstu trhliny, které je typické například pro vyztužené betony [10].

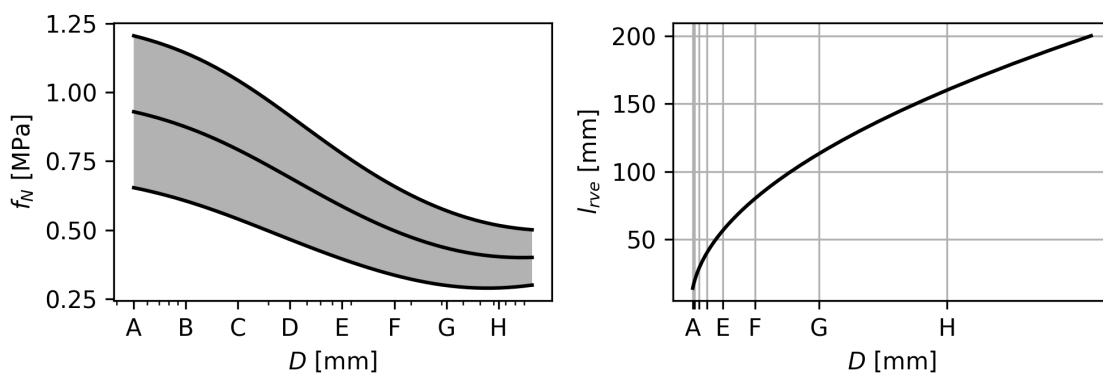
Ve variantě c) je závislost  $l_{\text{rve}}(D)$  volena jako odmocninový zákon. Takový vývoj FPZ se nejvíce blíží pozorování v kapitole 5.2. Vývoj pevnosti a rozptylu je zde podobný variantě a) s tím rozdílem, že u extrémně velkých velikostí dochází ke snížení poklesu pevnosti. U rozptylu k takto výrazné změně nedochází.



(a)  $l_{rve} = 50$  [mm]



(b)  $l_{rve} = 0.15 D$



(c)  $l_{rve} = 6 \sqrt{D}$

Obr. 7.5: Závislost  $\bar{f}_N$ ,  $\delta_h$  a  $l_{rve}$  analytického modelu na rozměru  $D$



## 8 Diskuze

Nyní si zrekapitulujme prezentované výsledky. Práce se v úvodu zabývá využitím diskrétních modelů s konstantními materiálovými parametry pro studii vlivu rozptýleného poškození na výsledky experimentu zaměřeného na vliv velikosti tažených těles. Ukázali jsme si, že u velkých nosníků zasahuje ORP do oblasti s vysokým gradientem napětí a snižováním tohoto gradientu snižuje koncentraci napětí v nosníku a zvyšuje tím jeho nominální pevnost. U nosníků malých velikostí zasahuje ORP do lomové procesní zóny, tedy již poškozeného materiálu, kde je již napětí spíše rovnoměrné. (obrázky 4.4, 4.7) Tento jev způsobuje oslabení energetického vlivu velikosti u tažených těles tvaru kosti, které bylo pozorováno v bakalářské práci autora [1].

Dále jsme u zmíněných modelů měřili tvar lomové procesní zóny FPZ v betonu. Poukázali jsme na to, že je u nosníků malých velikostí procesní zóna ovlivněna okrajem nosníku a zabírá tedy menší část celkového objemu, než je tomu u větších velikostí. To jsme si ověřili sledováním množství disipované energie v a mimo procesní zónu, vykreslené do grafu 5.7.

V rámci prezentované práce pak byly použity diskrétní modely s lokálním polem náhodných materiálových parametrů různých rozptylů a autokorelačních délek pro sledování odezvy nominální pevností, rozptylu a dopady interakce tvaru lomové procesní zóny s náhodnou proměnlivostí materiálu, a tedy výslednou nominální pevnost.

Převzali jsme analytický model závislost nominální pevnosti na parametrech náhodného pole, který stojí na principu klouzavého průměrování pole po oblasti reprezentativního objemu  $V_{RVE}$  a následné analýze minima takto vzniklého náhodného pole. Model jsem použili pro studium vlivu velikosti s měnící se průměrovací oblastí  $V_{RVE}$ . Z výsledků vyplývá možné oslabení statistického vlivu velikosti u větších nosníků.

Protože je problematika, kterou se práce zabývá široká, je zde prostor pro navazující práci. Například je možné vytvořit jednoduchý analytický model energetického vlivu velikosti, který bude vliv změkčujících oblastí brát v úvahu, nebo význam rozptýleného poškození u diskrétních modelů rozšířit na jiné typy zkoušek, jako je například čtyř bodový ohyb nosníku. Také je možné použít analytický model, odvodit pro nekonstantní průběh napětí a aplikovat ho například přímo na tažený nosník tvaru kosti.

## 9 Závěr

V rámci diplomové práce jsme si představili stochastické diskrétní modely a jejich použití pro modelování vlivu velikosti tažených těles tvaru kosti a s tím spojenými dílčími problémy. Teoretické předpoklady jsme ověřili jak s výsledky diskrétních modelů tak analytickým modelem.

## Literatura

1. KUČERA, M. *Stochastické diskrétní modelování porušování betonových konstrukcí*. 2022. Bachelor's Thesis. Brno University of Technology.
2. VAN VLIET, M. R. *Experimental investigation of size effect in concrete and sandstone under uniaxial tension*. 2000. Dis. pr. Delft University of Technology.
3. VOŘECHOVSKÝ, M.; ELIÁŠ, J. Fracture in random quasibrittle media: II. Analytical model based on extremes of the averaging process. *Engineering Fracture Mechanics*. 2020, roč. 235, s. 107155. ISSN 0013-7944. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107155>.
4. VOŘECHOVSKÝ, M. Interplay of size effects in concrete specimens under tension studied via computational stochastic fracture mechanics. *International Journal of Solids and Structures (Elsevier)*. 2007, roč. 44, č. 9, s. 2715–2731. ISSN 0020-7683. Dostupné z DOI: [10.1016/j.ijsoistr.2006.08.019](https://doi.org/10.1016/j.ijsoistr.2006.08.019).
5. WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. *Power diagram*. 2023. Dostupné také z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Power\\_diagram](https://en.wikipedia.org/wiki/Power_diagram). [Online; accessed 1-January-2023].
6. CUSATIS, G.; PELESSONE, D.; MENCARELLI, A. Lattice Discrete Particle Model (LDPM) for failure behavior of concrete. I: Theory. *Elsevier Ltd*. 2011, s. 881–890.
7. ELIÁŠ, J.; VOŘECHOVSKÝ, M. Fracture in random quasibrittle media: I. Discrete mesoscale simulations of load capacity and fracture process zone. *Engineering Fracture Mechanics*. 2020, roč. 235, s. 107160. ISSN 0013-7944. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107160>.
8. ELIÁŠ, J.; VOŘECHOVSKÝ, M. Fracture in random quasibrittle media: I. Discrete meso-scale simulations of load capacity and fracture process zone. *Engineering Fracture Mechanics*. 2020, roč. 235, s. 107160. ISSN 0013-7944. Dostupné z DOI: [10.1016/j.engfracmech.2020.107160](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107160).
9. VAN VLIET, M. R.; VAN MIER, J. G. Experimental investigation of size effect in concrete and sandstone under uniaxial tension. *Elsevier Ltd*. 2000, s. 165–188.
10. BAŽANT., Z. P.; CHEN, E.-P. Scaling of Structural Failure. *Applied Mechanics Reviews*. 1997, roč. 50, č. 10, s. 593–627. ISSN 0003-6900. Dostupné z DOI: [10.1115/1.3101672](https://doi.org/10.1115/1.3101672).

11. BAŽANT, Z. P.; VOŘECHOVSKÝ, M.; NOVÁK, D. Asymptotic Prediction of Energetic-Statistical Size Effect from Deterministic Finite-Element Solutions. *Journal of Engineering Mechanics*. 2007, roč. 133, č. 2, s. 153–162. Dostupné z DOI: [10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2007\)133:2\(153\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:2(153)).
12. VOŘECHOVSKÝ, M.; SADÍLEK, V. Computational modeling of size effects in concrete specimens under uniaxial tension. *International Journal of Fracture*. 2008, roč. 154, č. 1-2, s. 27–49. Dostupné z DOI: [10.1007/s10704-009-9316-9](https://doi.org/10.1007/s10704-009-9316-9).
13. WU, Z.; RONG, H.; ZHENG, J.; XU, F.; DONG, W. An experimental investigation on the FPZ properties in concrete using digital image correlation technique. *Engineering Fracture Mechanics*. 2011, roč. 78, č. 17, s. 2978–2990. ISSN 0013-7944. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2011.08.016>.
14. ZHOU, R.; CHEN, H.-M. Mesoscopic investigation of size effect in notched concrete beams: The role of fracture process zone. *Engineering Fracture Mechanics*. 2019, roč. 212, s. 136–152. Dostupné z DOI: [10.1016/j.engfracmech.2019.03.028](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.03.028).
15. ELIÁŠ, J.; VOŘECHOVSKÝ, M.; SKOČEK, J.; BAŽANT, Z. Stochastic discrete meso-scale simulations of concrete fracture: Comparison to experimental data. *Engineering Fracture Mechanics*. 2015, roč. 135, s. 1–16. ISSN 0013-7944. Dostupné z DOI: [10.1016/j.engfracmech.2015.01.004](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.01.004).
16. VANMARCKE, E. *Random Fields*. WORLD SCIENTIFIC, 2010. Dostupné z DOI: [10.1142/5807](https://doi.org/10.1142/5807).
17. DITLEVSEN, O. Extremes of realizations of continuous time stationary stochastic processes on closed intervals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1966, roč. 14, č. 3, s. 463–474. ISSN 0022-247X. Dostupné z DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(66\)90006-0](https://doi.org/10.1016/0022-247X(66)90006-0).

# Seznam symbolů, veličin a zkratek

<b>FPZ</b>	Lomová procesní zóna - Fracture process zone
<b>OAS</b>	Výpočetní program Open Academic Solver
<b>ORP</b>	Oblast rozptýleného poškození
<b>DIC</b>	Digital image corelation
$D$	proměnná šířka vzorků
$bin$	Čtvercová oblast
$E_0$	Lokální modul pružnosti
$E_d$	Redukovaný modul pružnosti
$\bar{E}_{orp}$	Průměrný modul pružnosti p oblasti rozptýleného požkození
$E_t$	Lokální modul pružnosti v tahu
$E_s$	Lokální modul pružnosti ve smyku
$f_N$	Nominální pevnost
$\bar{f}_N$	Průměrná nominální pevnost
$f_t$	Lokální tahová pevnost na stykové plošce mezi dvěma zrny.
$f_s$	Lokální smyková pevnost na stykové plošce mezi dvěma zrny.
$G_t$	Lokální lomová energie v tahu na stykové plošce mezi dvěma zrny.
$G_s$	Lokální lomová energie ve smyku na stykové plošce mezi dvěma zrny.
$\alpha$	Součinitel definující vztah mezi $E_t$ a $E_s$
$\nu$	Poissonovo číslo.
$minDist$	Minimální vzdálenost spojnic prutových elementů
$\mathbf{x}$	Souřadnice
$\mu_h$	Střední hodnota náhodného pole $H(\mathbf{x})$
$\bar{\mu}_h$	Střední hodnota náhodného pole $\bar{H}(\mathbf{x})$
$X$	Náhodná veličina
$\rho(\boldsymbol{\tau}, l_\rho)$	Korelační funkce
$\theta(\rho)$	Míra fluktace
$H(\mathbf{x})$	Náhodné pole
$\bar{H}(\mathbf{x})$	Průměrované náhodné pole
$\bar{X}$	Střední hodnota
$COV(\sigma_N)$	Kovariance nominální pevnosti
$G(k, L)$	Distribuční funkce překročení prahu $k$ náhodným procesem $H(x)$
$g(k, L)$	Funkce hustoty překročení prahu $k$ náhodným procesem $H(x)$
$L_{eff}$	Efektivní délka
$\lambda$	Parametr délky nezávislého úseku náhodného procesu
$V_{RVE}$	Reprezentativní objem
$l_{rve}$	Délka reprezentativního objemu
$b_{rve}$	Šířka reprezentativního objemu

$V_{\text{FPZ}}$	Reprezentativní objem
$\mu_h$	Střední hodnota náhodného pole
$\delta_h$	Směrodatná odchylka nominální pevnosti
$\bar{\delta}_h$	Směrodatná odchylka nominální pevnosti
$\bar{\mu}_h$	Směrodatná odchylka nominální pevnosti
$f_{\text{eff}}$	Efektivní pevnost referenčního objemu
$\sigma_{\text{eff}}$	Efektivní pevnost referenčního objemu
$\delta_N$	Směrodatná odchylka nominální pevnosti
$l_\rho$	Autokorelační délka
$l_{\rho,\text{crit}}$	Kritická autokorelační délka, při minimální nominální pevnost
$l_{\text{eff}}$	Efektivní autokorelační délka
$\gamma$	Redukční funkce
$l_{\text{FPZ}}$	Délka procesní zóny
$l_{\text{min}}$	Autokorelační délka při minimální nominální pevnosti
$l_\sigma$	Vzdálenost špičky napětí od líce nosníku
$w$	Práce
$W$	Hustota práce
$W^{\text{celk}}$	Celková hustota vnitřní práce
$W^{\text{disp}}$	Hustota disipované vnitřní práce
$W^{\text{el}}$	Hustota elastické vnitřní práce
$\Delta W^{\text{disp}}$	Přírůstek hustoty elastické vnitřní práce
$w^{\text{celk}}$	Celková vnitřní práce
$w^{\text{disp}}$	Disipovaná vnitřní práce
$w^{\text{el}}$	Elastická vnitřní práce
$\Delta w^{\text{disp}}$	Přírůstek elastické vnitřní práce
$\Delta \bar{w}^{\text{disp}}$	Normovaný přírůstek elastické vnitřní práce
$\Delta w_{\text{bin}}^{\text{disp}}$	Přírůstek vnitřní energie v binu
$\Delta \bar{w}_{\text{bin}}^{\text{disp}}$	Normovaný přírůstek vnitřní energie v binu
$\Delta w_{\text{bin,max}}^{\text{disp}}$	Maximální hodnota přírůstku energie v binu
$w_{\text{bin,max}}^{\text{disp}}$	Maximální hodnota akumulované energie v binu
$w_{\text{bin}}^{\text{disp}}$	Přírůstek disipované energie v binu
$w_{\text{FPZ}}^{\text{disp}}$	Akumulovaná energie v lomové procesní zóně
$w_{\text{ORP}}^{\text{disp}}$	Akumulovaná energie v oblasti rozptýleného poškození
$\Lambda_j$	Prostor náležící binu
$d$	Parametr poškození
$\bar{d}$	Průměrné poškození v oblasti rozptýlených poruch
$\sigma$	Tenzor napětí
$\varepsilon$	tenzor deformace
$s$	Vektor prutového napětí

$\bar{s}$	Průměrné prutové napětí
$\sigma_N$	Nominální napětí
$s_{eq}$	Ekvivalentní napětí
$e_{eq}$	Ekvivalentní přetvoření
$f_{eq}$	Ekvivalentní pevnost
$S$	Počáteční směrnice sestupné větve pracovního diagramu
$\chi$	Maximální dosažená hodnota ekvivalentního přetvoření
$\omega$	úhel mezi normálovým a smykovým neformačním účinkem
$r_{st}$	Podíl mezi smykovou a normálovou pevností
$s$	Vektor prutového napětí
$e$	Vektor prutové deformace

# Seznam obrázků

3.1	Zrna kameniva diskretního modelu vygenerována generátory preprocessoru OAS . . . . .	13
3.2	Vlevo: rozdělení prostoru se středy zrn voroného tesalací, vpravo: silové a deformační působení na diskretní prut . . . . .	15
3.3	Princip redukce modulu pružnosti parametrem poškození . . . . .	16
3.4	Konstitutivní zákon použitého diskretního modelu . . . . .	19
4.1	Schéma těles tvaru kosti z článku [9] . . . . .	22
4.2	Diskretní modely těles tvaru kosti $B_i$ , index značí typ série . . . . .	24
4.3	Závislost $f_N(D)$ vybraných sérií diskretních modelů . . . . .	25
4.4	Průběhy $s_N$ v polovině výšky nosníku . . . . .	27
4.5	Průběhy $e_N$ v polovině výšky nosníku . . . . .	28
4.6	Rozdělení poškození po ORP . . . . .	29
4.7	Rozdělení poškození po ORP . . . . .	29
5.1	Hustoty energií v pracovním diagramu $j$ -tého prutu diskretního modelu	31
5.2	Vlevo: definice vektoru $\Delta \mathbf{x}$ pomocí souřadnice $\mathbf{x}_{w=w_{max}}$ , vpravo: aplikace vektoru $\Delta \mathbf{x}$ pro posun $j$ -tého prutu . . . . .	33
5.3	Vliv délky binu na $\Delta \bar{w}_{bin}^{disp}$ , vlevo: $a \times b = 12 \times 6$ mm, vpravo: $a \times b = 6 \times 6$ mm, velikost $B_n$ . . . . .	34
5.4	Tvar a velikosti FPZ těles $A_n$ - $F_n$ , velikost binu $a \times b = 6 \times 6$ mm . .	35
5.5	Tvar a velikosti FPZ těles $A_n$ - $F_n$ , velikost binu $a \times b = 12 \times 6$ mm . .	36
5.6	Oblast celkové disipované energie akumulované ke kroku $k$ , tělesa $A_n$ - $F_n$ , velikost binu $a \times b = 12 \times 6$ mm . . . . .	37
5.7	Podíl procesní zóny a oblasti rozptýlených poruch na celkové disipaci energie . . . . .	37
6.1	Závislost $f_N(l_\rho)$ , diskretních modelů velikostí A–D, pro různé $\delta_h$ . . .	42
6.2	Závislost $f_N(D)$ , diskretních modelů velikostí A–D, pro různé $l_\rho$ . . .	45
6.3	Závislost $f_N(D)$ , diskretních modelů velikostí A–D, pro různé $l_\rho$ . . .	46
7.1	Hodnota redukční funkce pro danou $l_{rve}$ . . . . .	48
7.2	Hustota pravděpodobnosti a distribuční funkce překročení pevnostního prahu $k$ při $l_{rve} = 30$ mm, $b_{rve} = 6$ mm . . . . .	50
7.3	Hustota pravděpodobnosti a distribuční funkce překročení pevnostního prahu $k$ při $l_{rve} = 30$ mm, $b_{rve} = 30$ mm . . . . .	51
7.4	Závislost $\bar{f}_N$ a $\delta_h$ analytického modelu na autokorelační délce . . . . .	53
7.5	Závislost $\bar{f}_N$ , $\delta_h$ a $l_{rve}$ analytického modelu na rozměru $D$ . . . . .	55