UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Analytické řešení Apolloniovy úlohy

Tomáš Machar

Olomouc 2024 vedoucí práce: Mgr. David Nocar, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a uvedl veškerou použitou literaturu a zdroje.

V Olomouci dne 8. 4. 2024 Tomáš Machar

Poděkování

Děkuji panu Mgr. Davidu Nocarovi, Ph.D. za nabídku zajímavého tématu k bakalářské práci a za vedení při jeho zpracování.

Anotace

Jméno a příjmení:	Tomáš Machar
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. David Nocar, Ph.D.
Rok obhajoby:	2024

Název práce:	Analytické řešení Apolloniovy úlohy
Název v angličtině:	Analytical Solution of Apollonius' Problem
Anotace práce:	Bakalářská práce se zabývá analytickým řešením Apolloniovy úlohy. Popisuje, jak je možné k tomuto typu řešení přistupovat, jak lze tuto úlohu popsat soustavami rovnic a následně je vyřešit. Tato práce rozebírá různé případy Apolloniovy úlohy a poskytuje řešení každého z nich.
Klíčová slova:	Apolloniova úloha, bod, kružnice, přímka, soustava rovnic
Anotace v angličtině:	This thesis deals with analytical solution of Apollonius' problem. It describes how this type of solution can be approached, how this problem can be described by systems of equations and then solved. This thesis discusses various cases of Apollonius' problem and provides a solution for each of them.
Klíčová slova v angličtině:	Apollonius' Problem, circle, line, point, system of equations
Přílohy vázané na práci:	–
Rozsah práce:	43 stran
Jazyk práce:	Český jazyk

Obsah

Seznam zkratek

AU – Apolloniova úloha

KSS – kartézský souřadnicový systém

kkk – tři zadané kružnice

kkB – dvě zadané přímky a jeden bod

kBB – dva zadané body a jedna kružnice

kkp – dvě zadané kružnice a jedna přímka

kpp – dvě zadané přímky a jedna kružnice

BBB – tři zadané body

ppp – tři zadané přímky

BBp – dva zadané body a jedna přímka

Bpp – dvě zadané přímky a jeden bod

kBp – zadaná kružnice, bod a přímka

1 Úvod

Apolloniova úloha (AU) je matematický problém spočívající v tom, že máme zadány tři prvky, kterými může být kružnice, bod nebo přímka. Naším úkolem je najít kružnici, která by se každého z těchto prvků dotýkala. Úlohu můžeme rozdělit na různé případy podle toho, jakou kombinaci prvků máme zadanou.

Cílem práce je předvést čtenářům analytický přístup k AU a poskytnout jim ukázku řešení každého případu této úlohy. Analytické řešení bude spočívat v tom, že geometrickou úlohu vyjádříme soustavou rovnic. Vznikne nám tak algebraická úloha, kterou vyřešíme a dostaneme odpověď na původní geometrický problém. V této práci jsem při řešení a úpravách rovnic používal software Maxima a všechny obrázky jsem vytvořil v programu GeoGebra.

V první části práce jsou popsány a rozebrány dosavadní poznatky a postupy analytického řešení AU úlohy. Dále si ukážeme, jak by bylo možné přistupovat k situaci, kdy se mezi zadanými prvky objevují přímky. V poslední části využijeme poznatky z předchozích částí, zaměříme se na každý případ AU zvlášť a ukážeme si možnost jeho řešení.

V české literatuře neexistuje mnoho zdrojů, které by se zabývaly analytickým řešení AU a když se ním nějaký zabývá, tak nepopisuje všechny případy této úlohy. Navíc ani v anglicky psané literatuře se mi nepovedlo najít zdroje, které by popisovaly analytické řešení pro každý případ AU. Konkrétně jsem nenašel žádný zdroj řešící případy, kdy se mezi zadanými prvky objevují přímky. Tato práce může být přínosem v tom, že obsahuje soubor analytických řešení všech případů AU.

2 Apolloniova úloha

Autorem AU je starověký řecký matematik Apollonius z Pergy. Žil přibližně v letech 262 až 190 př. n. l. Narodil se ve městě Perga, které se nacházelo na jihu dnešního Turecka. V mládí odešel do Alexandrie, kde studoval pod vedením Euklidových následovníků. Část svého života strávil v Efezu a Pergamu, což byla starověká řecká města nacházející se na západě dnešního Turecka. Ke konci svého života se vrátil do Alexandrie, kde zemřel jako uznávaný matematik, který si vysloužil přezdívku „Velký geometr“ (Robertson a O'Connor, 1999).

Apollonius je známý svým dílem „Kónia“, ve kterém pojednává o kuželosečkách. Dílo obsahovalo osm svazků, z nichž se většina zachovala dodnes (Nocar, 2019). Dále napsal dvousvazkové dílo „O dotycích“ a v něm formuloval úlohu, které dnes říkáme AU. Vzhledem k tomu, že se toto dílo do dnešní doby nezachovalo, neznáme originální znění této úlohy, ani přesně nevíme, jak Apollonius tuto úlohu řešil. O AU víme díky tomu, že byla obsažena ve spisech, které psal Pappos Alexandrijský (Reichl a Všetička, 2023).

AU lze dnes formulovat více způsoby. Mohli bychom ji formulovat například takto: *Sestrojte kružnici ke třem zadaným prvkům tak, aby se dotýkala každého z nich. Zadané prvky mohou tvořit kružnice, body nebo přímky.*

Ve speciálních případech lze za kružnici považovat i bod a přímku. Z kružnice s nulovým poloměrem získáme bod a zvětšujeme-li poloměr kružnice do nekonečna, dostáváme přímku. Také hledaná kružnice může mít nulový nebo nekonečný poloměr. Kdybychom měli například zadány tři kolineární body, tak hledanou kružnici dostaneme ve formě přímky, která těmito body prochází. Uvažujeme-li i tyto speciální případy kružnic, tak je lze zadání úlohy zjednodušit a zmiňovat v něm pouze kružnice. Zadaní tedy můžeme psát následovně:

„*Sestrojte kružnici, která se dotýká tří zadaných kružnic.*“ (Nocar, 2019, s. 3)

Řešením úlohy se v průběhu času zabývali různí lidé. Například případy se třemi zadanými body a se třemi zadanými přímkami dokázal vyřešit už Euklides. Podle Pappose úlohu vyřešil sám Apollonius s výjimkou případu tří kružnic (s konečným poloměrem větším než nula). S řešením tohoto případu přišel jako první francouzský matematik Viète v 16. století (Sklenáriková, 2004).

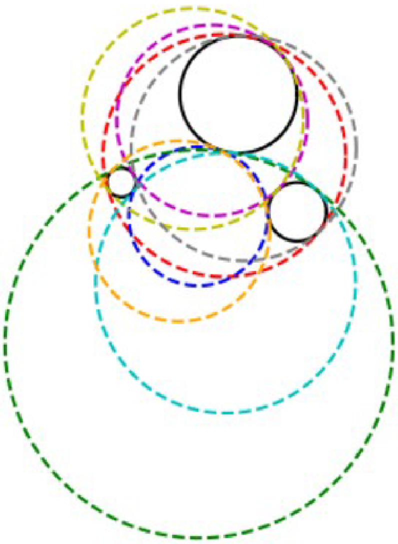
3 Souhrn dosavadních řešení

Při řešení naší úlohy budeme pracovat s kružnicemi, body a přímkami. Polohy těchto prvků budeme vztahovat vůči kartézskému souřadnicovému systému (KSS). Pro přehlednost budeme jako kružnice označovat jen ty s konečným poloměrem větším než nula. Speciální případy kružnic s nulovým a nekonečným poloměrem budeme označovat jako bod a přímka.

Úlohu, lze rozdělit na několik případů podle toho, jestli máme zadané kružnice, body, přímky, nebo nějakou jejich kombinaci. Pro přehlednost použijeme pro jednotlivé případy značení, které používá Pirklová (2013). Skutečnost, že je v úloze zadaná kružnice, označíme písmenem k, bod označíme písmenem B a přímku písmenem p. Pokud budeme mít například zadané dvě kružnice a jednu přímku, tak tuto situaci označíme jako kkp. Všechny možnosti si můžeme vypsat a lehce se přesvědčíme, že jich je celkem deset:

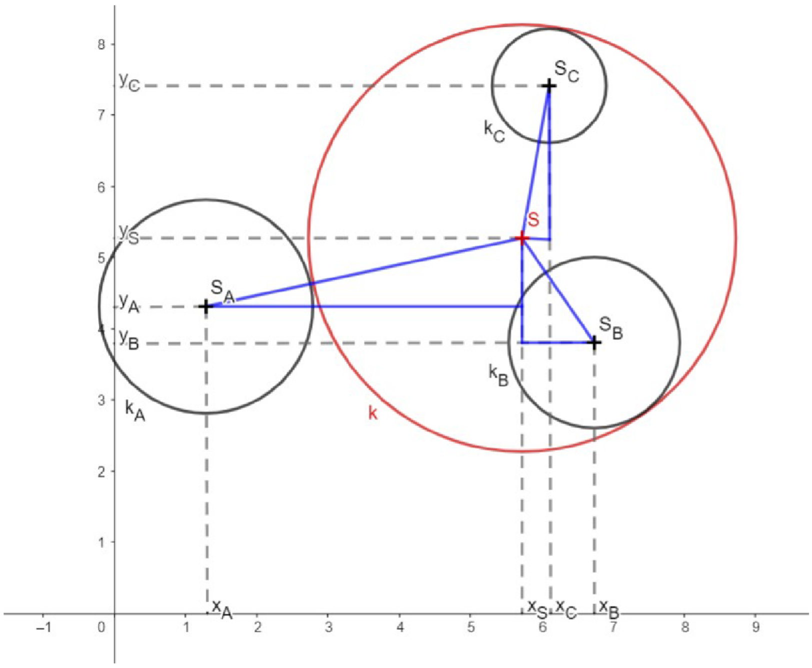
kkk, kkB, kBB, kkp, kpp, BBB, ppp, BBp, Bpp, kBp.

Nejdřív se zaměříme na možnost kkk. Takováto úloha má obecně osm řešení. Počet řešení vyplývá z toho, že hledaná kružnice může mít s každou zadanou kružnicí dvě možnosti dotyku. Tedy buď vnitřní dotyk, nebo vnější dotyk. Počet možných poloh hledané kružnice lze vyjádřit jako trojčlenné variace s opakováním ze dvou prvků, což se rovná osmi možnostem. Konkrétní počet řešení bude záviset na tom, jak jsou rozmístěny zadané kružnice a na velikosti jejich poloměrů. Například když jedna kružnice leží uvnitř druhé a druhá uvnitř třetí, tak úloha nebude mít žádné řešení (Nocar, 2019).



Obrázek 1: Osm různých řešení úlohy.

Ve více zdrojích se udává podobné odvození vztahů mezi hledanou a zadanými kružnicemi, kterým nakonec dostáváme soustavu rovnic (3.1). Autorem odvození, ze kterého budeme vycházet je Johansen (2014). Mějme nyní tři kružnice zadané v KSS. Zadané kružnice označíme jako $k_A(S_A, r_A)$, $k_B(S_B, r_B)$, $k_C(S_C, r_C)$ a hledanou kružnici jako $k(S, r)$. Vzdálenost mezi středy zadaných a hledané kružnice lze určit pomocí Pythagorovy věty. K výpočtu použijeme pravoúhlý trojúhelník, kde vzdálenost mezi středy tvoří přeponu, první odvěsna je dána rozdíly x-ových souřadnic středů a druhá rozdíly y-ových souřadnic středů tak, jak je ukázáno na Obr. 2. Vzdálenost středů kružnic lze napsat buď jako $|r+r_i|$, nebo jako $|r-r_i|$, kde $i=A, B, C$. Znaménko + značí, že kružnice k leží ve vnější oblasti kružnice k_i a zároveň kružnice k_i leží ve vnější oblasti kružnice k. Znaménko − značí, že buď k leží ve vnitřní oblasti kružnice k_i, nebo naopak k_i leží ve vnitřní oblasti k. Například na Obr. 2 pro vzdálenost mezi středy S a S_A platí $|r+r_A|$ a vzdálenost středů S a S_B je $|r-r_B|$.



Obrázek 2: Vztah mezi zadanými a hledanou kružnicí.

Využitím výše zmíněných poznatků lze vztah mezi zadanými a hledanou kružnicí obecně vyjádřit soustavou rovnic

$$
\begin{aligned}
(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2 &= (r \pm r_A)^2 \\
(x_S - x_B)^2 + (y_S - y_B)^2 &= (r \pm r_B)^2 \\
(x_S - x_C)^2 + (y_S - y_C)^2 &= (r \pm r_C)^2.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Kombinacemi znamének + a − mezi poloměry na pravé straně soustavy rovnic lze získat různé výsledky. Počet možností, jak znaménka nakombinovat opět odpovídá trojčlenným variacím s opakováním ze dvou prvků, což se rovná osmi možnostem. Všemi kombinacemi znamének plus a mínus získáme tedy osm soustav tří kvadratických rovnic o třech neznámých a jejich řešením najdeme hledané kružnice.

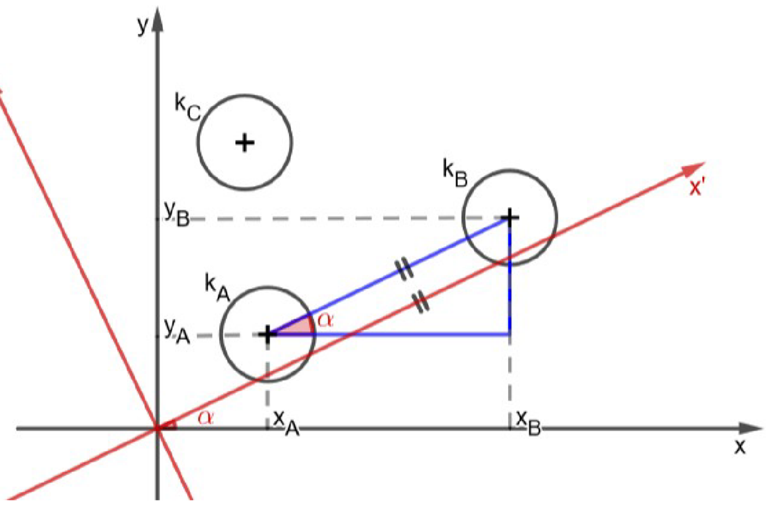
3.1 Řešení s transformací souřadnic

Soustavu rovnic (3.1) lze řešit více způsoby. Podíváme na způsob, který uvádí Johansen (2014). Řešení zde začíná tak, že nejprve transformujeme KSS, ve kterém jsou kružnice vyjádřeny. Následně kružnice vyjádříme v novém, transformovaném KSS. Díky tomu získáme jednodušší soustavu rovnic, se kterou se bude dál lépe pracovat.

Transformace souřadnic se provede pomocí rotace a translace. V postupu se rotace provádí tak, že původní KSS otočíme tak, aby x-ová osa byla rovnoběžná se spojnicí středů dvou zadaných kružnic. Nejprve si tedy vybereme dvě kružnice, například k_A a k_B. Úhel rotace lze získat vztahem

$$\alpha = \arctan \frac{|y_A - y_B|}{|x_A - x_B|}. \tag{3.2}$$

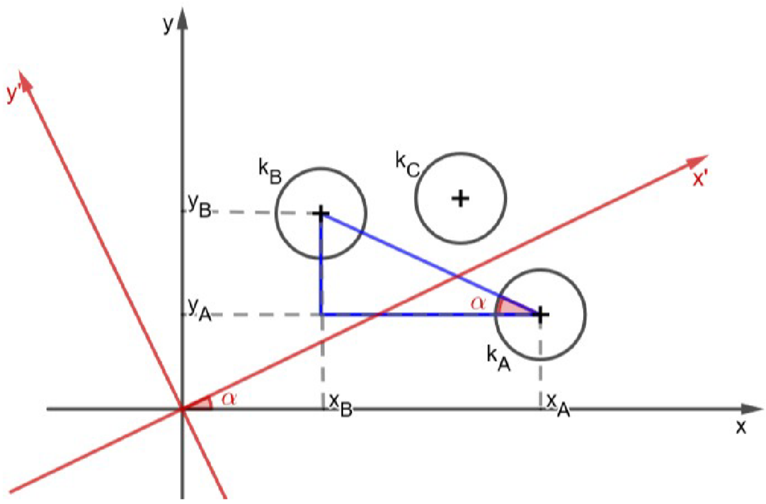
Střed rotace je střed původního KSS. Rotací získáme nový systém, který označíme KSS$'$.



Obrázek 3: Červenou barvou je znázorněný KSS$'$ získaný rotací.

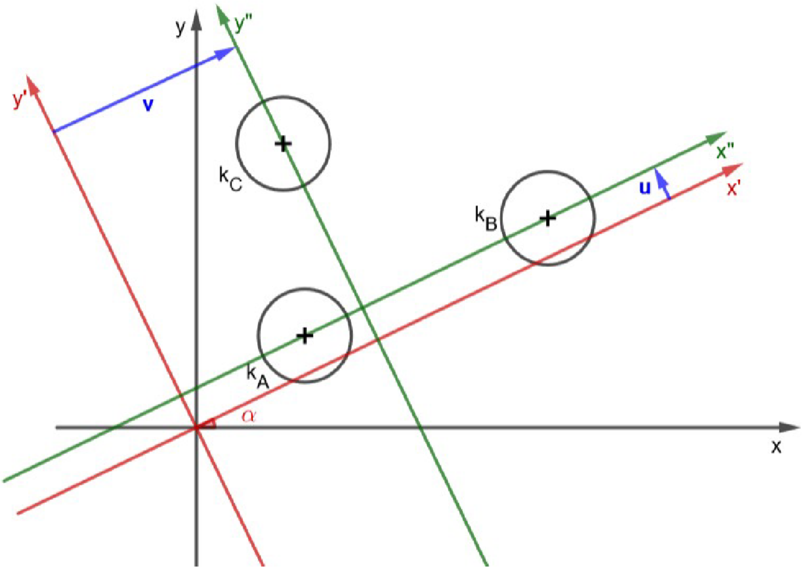
K tomuto postupu ještě doplníme, že je potřeba dát si pozor, abychom podle vztahu (3.2) vypočítali úhel pro správný směr rotace. Je totiž rozdíl, jestli provádíme rotaci KSS v kladném směru (proti směru hodinových ručiček) nebo v záporném směru. Řekněme, že chceme provést rotaci v kladném směru. Na Obr. 3 je situace, kdy máme vhodně zvolený úhel α a rotaci v kladném směru lze provést. Na Obr. 4 máme situaci, kdy je nevhodně zvolený úhel α a rotace v kladném směru by pro naše potřeby nefungovala.

Chceme-li tedy provádět rotaci v kladném směru, můžeme použít podmínku pro výběr dvou kružnic tak, abychom zajistili, že transformace bude úspěšná. Podmínka může být taková, že pro výpočet úhlu rotace ze vztahu (3.2) použijeme kružnice k_A a k_B, pro které platí $x_A < x_B \wedge y_A \leq y_B$. Touto podmínkou bychom ale nebyli schopni vyřešit situaci, kdy jsou zadány tři kružnice, jejichž středy mají stejnou x-ovou souřadnici. Tuto situaci by šlo vyřešit zvlášť tak, že bychom vynechali rotaci a přešli přímo k translaci.



Obrázek 4: Špatně zvolený úhel pro rotaci v kladném směru.

Nyní postup pokračuje translací. Nově vzniklý KSS$'$ transformujeme tak, že x-ová osa bude procházet středy kružnic k_A, k_B a y-ová osa bude procházet středem kružnice k_C. Takže vlastně potřebujeme osu x$'$ posunout o vektor $\mathbf{u}=(0, y'_A)=(0, y'_B)$ a osu y$'$ o vektor $\mathbf{v}=(x'_C, 0)$. Translací z KSS$'$ vznikne KSS$''$ a v tomto systému vyjádříme původní soustavu rovnic.



Obrázek 5: Transformace KSS na KSS$''$.

Díky provedeným transformacím a vyjádření kružnic v KSS$''$ si zjednodušíme původní soustavu rovnic (3.1), protože se zde několik členů bude rovnat nule. Nová soustava je ve tvaru

$$\begin{aligned}(x_S''-x_A'')^2+(y_S'')^2&=(r\pm r_A)^2\\(x_S''-x_B'')^2+(y_S'')^2&=(r\pm r_B)^2\\(x_S'')^2+(y_S''-y_C'')^2&=(r\pm r_C)^2.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Translace a rotace jsou izometrie, tedy zobrazení, které nemění vzdálenost dvou bodů. To znamená, že není potřeba po transformaci měnit značení poloměrů v (3.3), protože jejich velikost zůstává stejná. Vidíme, že jsme se díky transformacím zbavili tří členů z původní soustavy rovnic, protože platí $y_A''=y_B''=x_C''=0$.

V postupu, ze kterého vycházíme, se píše, že po vyřešení soustavy rovnic může nastat situace, kdy dostaneme jako výsledek kružnici se záporným poloměrem, ale nepovažuje se to za chybu. Autor udává, že znaménko výsledného poloměru závisí na tom, jaké znaménko použijeme mezi poloměry na pravé straně soustavy rovnic (3.3) a také na tom, jaká je poloha hledané kružnice vůči zadaným kružnicím. Tedy jestli má hledaná kružnice se zadanými vnější nebo vnitřní dotyk.

Ukažme si příklad, na kterém si zkusíme autorovu myšlenku o záporných poloměrech objasnit. Mějme situaci, kdy hledáme kružnici na Obr. 2. Hledaná kružnice má vnější dotyk s kružnicí k_A a vnitřní dotyk a kružnicemi k_B a k_C. Pro nalezení kružnice tedy použijeme soustavu rovnic

$$(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2 = (r + r_A)^2$$
$$(x_S - x_B)^2 + (y_S - y_B)^2 = (r - r_B)^2$$
$$(x_S - x_C)^2 + (y_S - y_C)^2 = (r - r_C)^2.$$

Jenže hledanou kružnici bychom našli i podle soustavy

$$(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2 = (r - r_A)^2$$
$$(x_S - x_B)^2 + (y_S - y_B)^2 = (r + r_B)^2$$
$$(x_S - x_C)^2 + (y_S - y_C)^2 = (r + r_C)^2.$$

Jediný rozdíl by byl v tom, že bychom poloměr dostali s opačným znaménkem, protože platí

$$(r - r_i)^2 = (-r + r_i)^2 \text{ a } (r + r_i)^2 = (-r - r_i)^2.$$

Pokud v soustavě rovnic budou všechna znaménka mezi poloměry opačná, tak lze najít stejnou kružnici, pouze nám u ní vyjde záporný poloměr. Dostaneme-li výsledek se záporným poloměrem, neznamená to chybu, ale jen to, že jsme při hledání dané kružnice použili v soustavě rovnic mezi poloměry kombinaci znamének, kde jsou všechna opačná, než by měla být pro správné vyjádření polohy nalezené kružnice.

Výše jsme již zmínili, že kombinací znamének mezi poloměry existuje osm. Všechny možnosti si teď shrneme v tabulce, kde jsou možné kombinace označeny čísly 1 až 8, znaménko plus ve sloupci r_A znamená, že se v dané kombinaci bude r_A přičítat k r a mínus by znamenalo odčítání r_A od r, to samé platí i pro sloupce r_B a r_C.

Tabulka 1: Kombinace znamének mezi poloměry v soustavě rovnic.

	r_A	r_B	r_C
1	+	+	+
2	+	+	−
3	+	−	+
4	+	−	−
5	−	+	+
6	−	+	−
7	−	−	+
8	−	−	−

Jak již bylo řečeno, je jedno, jestli z Tab. 1 použijeme kombinaci 4 nebo 5. Obě možnosti lze využít k nalezení kružnice na Obr. 2. Výsledek se bude lišit pouze ve znaménku hledaného poloměru. Stejným způsobem by to fungovalo i s kombinacemi 3 a 6, které mají navzájem opačnou kombinaci znamének. To samé platí pro kombinace 2 a 7 i pro 1 a 8. Z toho plyne, že k hledání řešení není potřeba použít všech osm možností z Tab. 1, pokud si uvědomíme, co znamená záporná hodnota poloměru. K nalezení všech řešení si tedy vystačíme například s prvními čtyřmi kombinacemi.

Jako poslední krok postupu autor provádí transformaci z KSS$''$ zpět do KSS, aby v tomto původním systému vyjádřil nalezené souřadnice středů a poloměry hledaných kružnic.

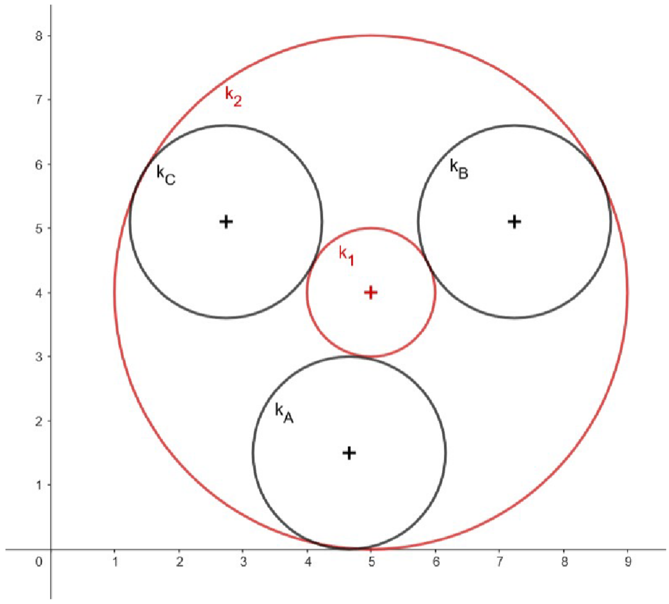
3.2 Přímé řešení

Další postup řešení uvádí Courant a Robbins (1996). V tomto postupu se vychází, stejně jako v předchozím případě, ze soustavy tří rovnic (3.1). Při řešení se zde nevyužívá žádné transformace souřadnic a soustavu rovnic řešíme přímo. Tento postup budeme podrobněji řešit v následující kapitole, nyní si ho jen stručně popíšeme.

Nejprve si v soustavě (3.1) zvolíme nějakou kombinaci znamének $\pm$ a od rovnice v prvním řádku zvlášť odečteme druhou a třetí rovnici. Získáme tak dvě lineární rovnice o neznámých hodnotách x_S, y_S a r. Z těchto dvou rovnic si vyjádříme x_S a y_S v závislosti na r. Takto vyjádřené předpisy následně dosadíme za x_S a y_S do rovnice v prvním řádku soustavy (3.1). Získáme tak kvadratickou rovnici o neznámé r. Z kvadratické rovnice dostaneme hledanou hodnotu poloměru r v závislosti na zadaných hodnotách. Nakonec ji dosadíme do předpisů pro x_S a y_S, tím získáme parametry hledané kružnice.

Kvadratická rovnice o neznámé r může mít dvě řešení, takže to vypadá, že bychom řešením soustavy rovnic mohli získat až dvě hledané kružnice. V postupu se uvádí, že sice lze získat dvě řešení, ale v takovém případě bude jedno z nich vždy záporné a toto záporné řešení nebudeme uvažovat. Řešením soustavy rovnic tedy dostaneme maximálně jedno řešení. Následně použijeme soustavu s jinou kombinací znamének, soustavu vyřešíme a dostaneme další řešení. Už jsme si uvedli, že kombinací znamének existuje osm. Takže tímto způsobem lze získat obecně osm hledaných kružnic.

Je vidět, že se u tohoto postupu používá jiný přístup k poloměru se záporným znaménkem než u minulého řešení. Tvrdí se zde, že když při řešení kvadratické rovnice s poloměry dostaneme dva výsledky, tak jeden z nich bude vždy záporný. Zkusme si toto tvrzení objasnit, pomůžeme si k tomu následujícím obrázkem.



Obrázek 6: Dvě hledané kružnice.

Na Obr. 6 kružnici k_1 najdeme první kombinací znamének z Tab. 1 a kružnici k_2 osmou kombinací. Jenže první a osmá kombinace mají všechna znaménka na stejných pozicích opačná. Takže první kombinací bychom našli i kružnici k_2, pouze se záporným poloměrem a naopak osmou kombinací bychom našli k_2 s kladným poloměrem a k_1 se záporným poloměrem. V tomto případě jsme použitím první nebo osmé kombinace znamének získali kružnice, kde jedna má tři vnější dotyky se zadanými kružnicemi a druhá tři vnitřní dotyky. Jednu kružnici jsme vždy dostali s kladným a druhou se záporným poloměrem. Stejným způsobem by to fungovalo i u ostatních kružnic hledaných pomocí ostatních kombinací znamének.

Máme tedy dvě možnosti. První možnost znamená, že budeme uvažovat i výsledky se zápornými poloměry a k hledání řešení použijeme pouze čtyři vhodně zvolené kombinace znamének (například první čtyři z Tab. 1). Druhá možnost je taková, že použijeme pouze kladné poloměry, ale při hledání řešení použijeme všech osm kombinací znamének. Podle obou možností lze získat až osm různých řešení.

Zmíněné postupy nefungují pouze pro kružnice. Pokud bychom v soustavě (3.1) dosadili za některé (nebo klidně i za všechny) poloměry zadaných kružnic nulu, tak z těchto kružnic získáme body. Nově vzniklou situaci lze řešit stejným způsobem jako případ se třemi kružnicemi. V případě bodů může dojít i k určitému zjednodušení, protože v soustavě rovnic nemusíme řešit znaménko $\pm$ mezi poloměry. Kdybychom měli například zadány dva body a jednu kružnici, tak soustava rovnic vypadá následovně

$$(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2 = r^2$$
$$(x_S - x_B)^2 + (y_S - y_B)^2 = r^2$$
$$(x_S - x_C)^2 + (y_S - y_C)^2 = (r \pm r_C)^2.$$

Vidíme, že v tomto konkrétním případě máme pouze dvě kombinace znamének $+r_C$ a $-r_C$.

Postupy popsané v této kapitole fungují pouze pro kružnice a body, ale nefungují pro přímky. Analytické řešení AU pro přímky se neobjevuje v žádné námi známé literatuře. Veškerá nalezená literatura o analytickém řešení se věnuje pouze případy s kružnicemi a body.

4 Vztahy pro zadané přímky

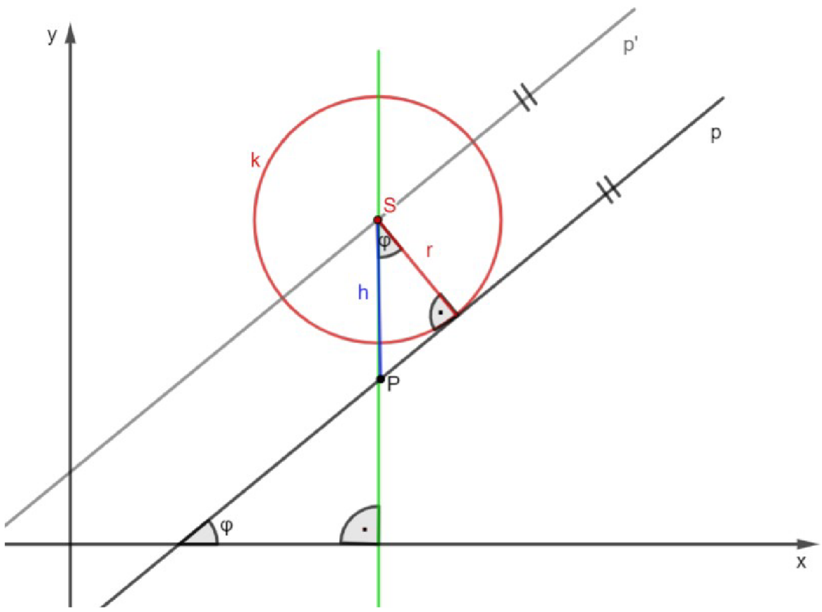
K tomu, abychom byli schopni vyřešit všechny případy AU, musíme najít nějaký způsob, jak postupovat, když se mezi zadanými prvky budou objevovat přímky. Potřebujeme tedy najít nějakou rovnici, která bude vyjadřovat vztah mezi zadanou přímkou a hledanou kružnicí. Také chceme, aby se s touto rovnicí dalo dobře pracovat. Potřebujeme, aby bylo možné danou rovnici následně zařadit do soustavy obsahující další rovnice, které vyjadřují vztahy mezi ostatními zadanými prvky a hledanou kružnicí a abychom byli schopni tuto soustavu následně vyřešit.

V této kapitole si odvodíme rovnice, které bude možné použít v případě zadaných přímek. Následně s použitím těchto nových vztahů a poznatků z minulé kapitoly budeme schopni vyjádřit soustavou tří rovnic každý z deseti možných případů AU.

Mějme přímku p ve směrnicovém tvaru vyjádřenou rovnicí

$$y=ax+b, \tag{4.1}$$

kde a je směrnice a b konstanta určující místo, ve kterém přímka protíná osu y. Nyní se zaměříme na situaci, kdy je směrnice a větší než nula. Tato situace je znázorněna na následujícím obrázku.



Obrázek 7: Hledaná kružnice a zadaná rostoucí přímka.

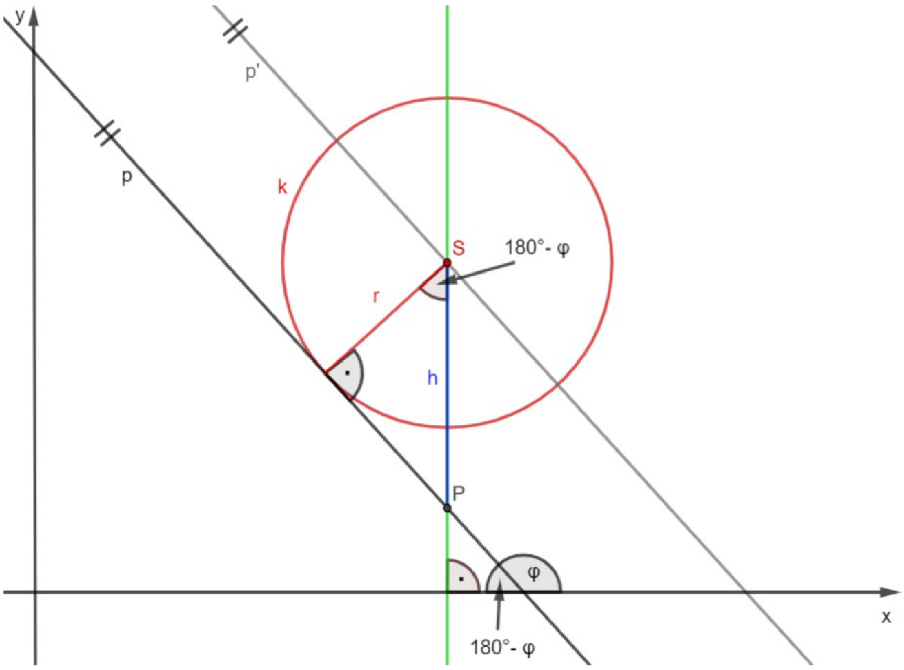
Na Obr. 7 vidíme přímku p, hledanou kružnici k a zelenou přímku, která prochází středem hledané kružnice a je kolmá na x-ovou osu. Dále je zde vyznačena odchylka ϕ, pro kterou platí $\phi = \tan a$.

Zajímá nás, jaká bude velikost $h=|PS|$. Z Obr. 7 vidíme, že platí $\cos\phi=r/h$ a tedy $h=r/\cos\phi$. Pokud ještě vyjádříme odchylku ϕ pomocí směrnice a, tak dostáváme vztah

$$h=\frac{r}{\cos(\arctan a)}. \tag{4.2}$$

Pokud h přičteme k pravé straně rovnice (4.1), tak získáme přímku $p'\colon y=ax+b+h$, která prochází středem kružnice k.

Přímka p může mít také zápornou směrnici a, což je znázorněno na následujícím obrázku.



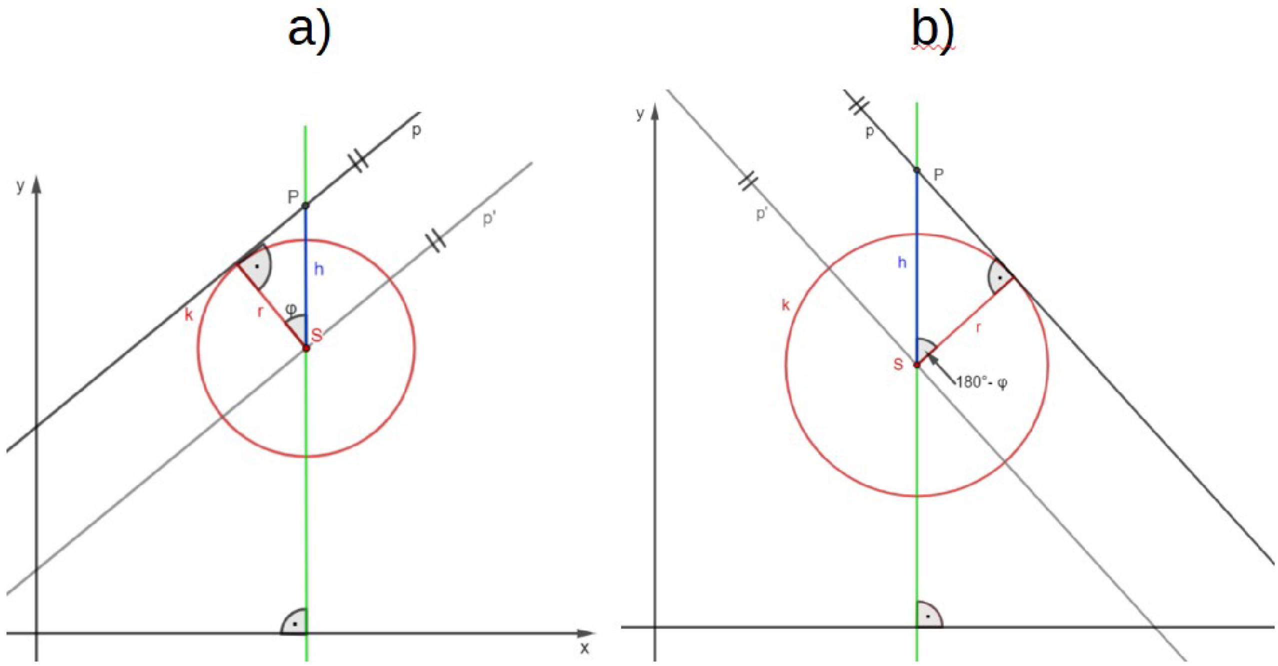
Obrázek 8: Hledaná kružnice a zadaná klesající přímka.

Pro vyjádření h na Obr. 8 použijeme rovnosti $\cos(180°-\phi)=-\cos\phi=r/h$. Takže v případě záporné směrnice dostáváme

$$h=-\frac{r}{\cos(\arctan a)} \tag{4.3}$$

a přímka p' bude mít opět předpis $y=ax+b+h$.

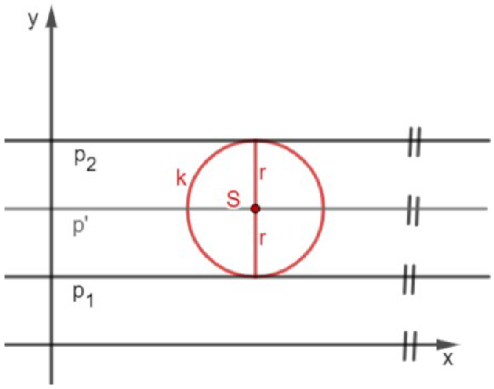
Vztahy (4.2) a (4.3) jsme si pomocí Obr. 7 a Obr. 8 odvodili pro přímky, které se dotýkaly kružnice k „zdola“. Tedy y-ová souřadnice bodu dotyku kružnice a přímky byla menší než y-ová souřadnice středu kružnice. Mohlo by to být i naopak a přímka by se kružnice dotýkala „shora“ tak, jak ukazuje Obr. 9.



Obrázek 9: a) Rostoucí přímka, která se dotýká kružnice „shora“. b) Klesající přímka dotýkající se kružnice „shora“.

Pro h na Obr. 9a by opět platil vztah (4.2), ale přímce p' by v tomto případě odpovídala rovnice $y = ax + b - h$. Tedy k tomu, abychom posunuli přímku p tak, aby procházela středem kružnice k, je potřeba z pravé strany (4.1) odečíst h. V případě Obr. 9b bude h odpovídat vztah (4.3) a předpis pro p' opět získáme tak, že od pravé strany (4.1) odečteme h, tak jako v případě na Obr. 9a. Odečítaní můžeme nahradit tím, že místo odečtení h vyjádřeného vztahem (4.2) lze přičíst h vyjádřené vztahem (4.3) a naopak.

Situace, kdy je směrnice a nulová, je zobrazena na Obr. 10. Zde přímku p' dostaneme tak, že v případě přímky p_1 přičteme k pravé straně rovnice (4.1) poloměr hledané kružnice r. Analogicky v případě přímky p_2 od pravé strany rovnice (4.1) poloměr r odečteme. Obě tyto varianty lze obsáhnout pomocí předpisu p': $y = ax + b + h$, kde $h = \pm r = \pm \frac{r}{\cos 0} = \pm \frac{r}{\cos(\arctan a)}$. Lze tedy použít stejné rovnice, které pro p' platí v případě rostoucích a klesajících přímek.



Obrázek 10: Ukázka přímek rovnoběžných s x-ovou osou.

Vidíme, že pro každou přímku ve tvaru (4.1) lze najít přímku procházející středem hledané kružnice pomocí předpisu

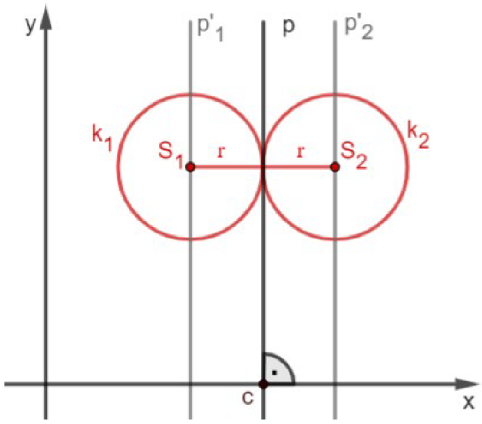
$$y=ax+b\pm\frac{r}{\cos(\arctan a)}, \tag{4.4}$$

kde lze za proměnné x a y dosadit souřadnice středu kružnice x_S a y_S. Po dosazení a úpravě dostaneme rovnici

$$ax_S-y_S+b=\pm\frac{r}{\cos(\arctan a)}. \tag{4.5}$$

To je rovnice, pomocí které lze obecně vyjádřit vztah mezi hledanou kružnicí a zadanou přímkou, kterou je možné vyjádřit ve směrnicovém tvaru.

Jestliže máme přímku p danou předpisem $x=c$, kde c je reálná konstanta, pak nelze použít vztah (4.5), protože přímku p nelze zapsat ve směrnicovém tvaru. Tato situace je znázorněna na následujícím obrázku.



Obrázek 11: Ukázka přímek, které jsou kolmé na x-ovou osu.

Na Obr. 11 vidíme, že hledaná kružnice k může být nalevo nebo napravo od přímky p. Středem kružnice k_1 (k_2) bude procházet přímka p_1' (p_2') daná předpisem $x=c-r$ ($x=c+r$). V tomto případě tedy obecně popíšeme vztah mezi přímkou p a kružnicí k pomocí rovnice

$$x_S - c = \pm r. \tag{4.6}$$

V této kapitole jsme si ukázali, že vztah mezi zadanou přímkou a hledanou kružnicí lze vyjádřit lineární rovnicí (4.5) o třech neznámých x_S, y_S a r, která má na pravé straně kombinaci znamének plus a mínus. Ve speciální případě, kdy přímku nelze vyjádřit ve směrnicovém tvaru, nahradíme vztah (4.5) vztahem (4.6).

5 Soubor řešení jednotlivých případů

V této kapitole rozdělíme AU na různé případy podle toho, jakou máme zadanou kombinaci kružnic, přímek a bodů. Ve třetí kapitole jsou všechny tyto případy vypsané a víme, že je jich celkem deset. U každého případu si ukážeme, jak bychom mohli postupovat při jeho řešení a jaký výsledek dostaneme.

5.1 Případ kkk

Začneme případem kkk, máme tedy tři zadané kružnice $k_A(S_A, r_A)$, $k_B(S_B, r_B)$, $k_C(S_C, r_C)$ a hledanou kružnici $k(S, r)$. Pro řešení tohoto případu vyjdeme ze soustavy (3.1) a aplikujeme na ni postup, který uvádí Courant a Robbins (1996). Toto řešení jsme již nastínili v předchozí kapitole. Zde se ale pokusíme o podrobné rozvedení jednotlivých kroků.

Rovnice ze soustavy (3.1) nejprve roznásobíme

$$x_S^2 + y_S^2 - 2x_S x_A - 2y_S y_A + x_A^2 + y_A^2 = r^2 \pm 2r r_A + r_A^2, \tag{5.1}$$

$$x_S^2 + y_S^2 - 2x_S x_B - 2y_S y_B + x_B^2 + y_B^2 = r^2 \pm 2r r_B + r_B^2, \tag{5.2}$$

$$x_S^2 + y_S^2 - 2x_S x_C - 2y_S y_C + x_C^2 + y_C^2 = r^2 \pm 2r r_C + r_C^2. \tag{5.3}$$

Z kombinace znamének $\pm$ nyní ve všech třech rovnicích použijeme možnost $+$. Dále odečtením rovnice (5.2) od (5.1) získáme rovnici (5.4) a podobně odečtením rovnice (5.3) od (5.1) dostáváme (5.5).

$$2(y_B - y_A)y_S + 2(x_B - x_A)x_S - y_B^2 + y_A^2 - x_B^2 + x_A^2 = 2(r_A - r_B)r - r_B^2 + r_A^2 \tag{5.4}$$

$$2(y_C - y_A)y_S + 2(x_C - x_A)x_S - y_C^2 + y_A^2 - x_C^2 + x_A^2 = 2(r_A - r_C)r - r_C^2 + r_A^2 \tag{5.5}$$

Máme teď dvě lineární rovnice s neznámými x_S, y_S a r. Následně si vyjádříme x_S z rovnice (5.4)

$$x_S = \frac{2(y_A - y_B)y_S + 2(r_A - r_B)r + y_B^2 - y_A^2 + x_B^2 - x_A^2 - r_B^2 + r_A^2}{2(x_B - x_A)}$$

a dosadíme do rovnice (5.5). Po zjednodušení a vyjádření y_S dostáváme rovnici ve tvaru

$$y_S = \frac{2\left[(r_B - r_A)x_C + (r_A - r_C)x_B + (r_C - r_B)x_A\right]r + (x_B - x_A)y_C^2 + (x_A - x_C)y_B^2}{2\left[(x_B - x_A)y_C + (x_A - x_C)y_B + (x_C - x_B)y_A\right]} +$$

$$+ \frac{(x_C - x_B)y_A^2 + (x_B - x_A)x_C^2 + (-x_B^2 + x_A^2 + r_B^2 - r_A^2)x_C + x_A x_B^2 + (-x_A^2 - r_C^2 + r_A^2)x_B + (r_C^2 - r_B^2)x_A}{2\left[(x_B - x_A)y_C + (x_A - x_C)y_B + (x_C - x_B)y_A\right]}.$$

Nyní zavedeme substituce

$K_1 = 2\left[(r_B - r_A)x_C + (r_A - r_C)x_B + (r_C - r_B)x_A\right]$,

$K_2 = (x_B - x_A) y_C^2 + (x_A - x_C) y_B^2 + (x_C - x_B) y_A^2 + (x_B - x_A) x_C^2 +$
$+ (-x_B^2 + x_A^2 + r_B^2 - r_A^2) x_C + x_A x_B^2 + (-x_A^2 - r_C^2 + r_A^2) x_B + (r_C^2 - r_B^2) x_A ,$
$K_3 = 2 \left[(x_B - x_A) y_C + (x_A - x_C) y_B + (x_C - x_B) y_A \right].$

Díky substitucím lze závislost y_S na r psát ve tvaru

$$y_S = \frac{K_1 r + K_2}{K_3}. \tag{5.6}$$

Vztah (5.6) nyní dosadíme za y_S do předpisu pro x_S, který jsme dostali ze vztahu (5.4) a upravíme

$$x_S = \frac{2(-K_1 y_B + K_1 y_A - K_3 r_B + K_3 r_A) r + K_3 (y_B^2 - y_A^2 + x_B^2 - x_A^2 - r_B^2 + r_A^2) + 2 K_2 (y_A - y_B)}{2 K_3 (x_B - x_A)}.$$

Opět použijeme substituce

$L_1 = 2(-K_1 y_B + K_1 y_A - K_3 r_B + K_3 r_A),$
$L_2 = K_3 (y_B^2 - y_A^2 + x_B^2 - x_A^2 - r_B^2 + r_A^2) + 2 K_2 (y_A - y_B),$
$L_3 = 2 K_3 (x_B - x_A).$

Závislost x_S na r lze nyní vyjádřit vztahem

$$x_S = \frac{L_1 r + L_2}{L_3}. \tag{5.7}$$

V následujícím kroku dosadíme vztahy (5.6) a (5.7) za proměnné y_S a x_S do vztahu (5.1) a dostaneme kvadratickou rovnici s proměnnou r

$$A_1 r^2 + B_1 r + C_1 = 0, \tag{5.8}$$

kde

$A_1 = (K_3^2 - K_1^2) L_3^2 - K_3^2 L_1^2,$
$B_1 = 2 K_1 L_3^2 (K_3 y_A - K_2) + 2 K_3^2 (L_1 L_3 x_A + L_3^2 r_A - L_1 L_2),$
$C_1 = K_3^2 (-L_3^2 y_A^2 - L_3^2 x_A^2 + 2 L_2 L_3 x_A + L_3^2 r_A^2 - L_2^2) + L_3^2 (2 K_2 K_3 y_A - K_2^2).$

Z rovnice (5.8) získáme dvě hodnoty poloměru r ve tvaru

$$r_1 = \frac{-B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4 A_1 C_1}}{2 A_1}, \quad r_2 = \frac{-B_1 - \sqrt{B_1^2 - 4 A_1 C_1}}{2 A_1}. \tag{5.9}$$

Jak jsme již psali v předchozí kapitole, pouze jedna hodnota poloměru r bude kladná. Kladná hodnota pro nás bude představovat hledaný poloměr kružnice a zápornou hodnotu nebudeme používat.

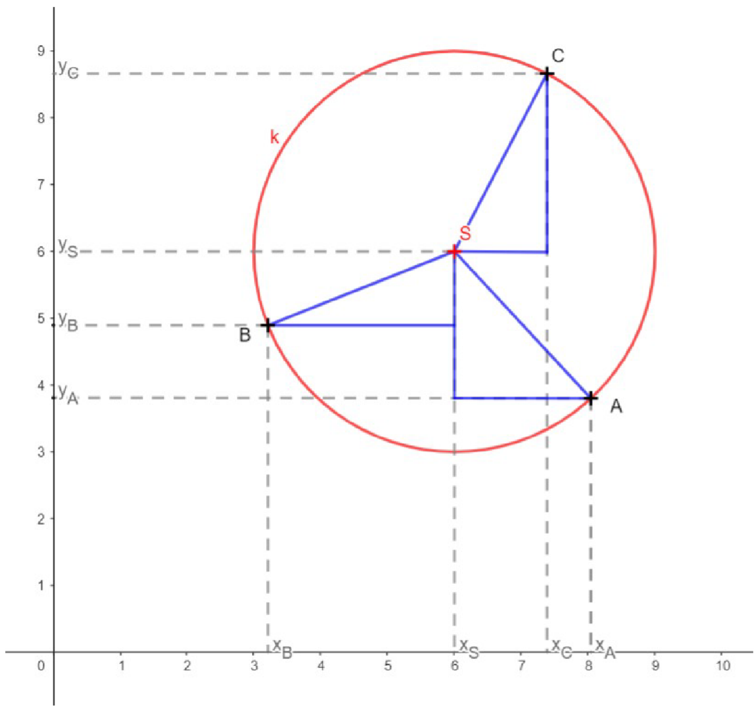
Tímto způsobem jsme tedy našli poloměr hledané kružnice r. Tuto hodnotu následně dosadíme do (5.6) a (5.7). Získáme tak i souřadnice středu hledané kružnice x_S a y_S v závislosti na známých hodnotách poloměrů a souřadnic středů zadaných kružnic. Popsaným postupem můžeme určit jednu hledanou kružnici. Dále bychom u rovnic (5.1), (5.2) a (5.3) použili jinou kombinaci znamének $\pm$ a celý postup zopakovali. Tím bychom mohli získat další kružnici.

Jak jsme si již v předchozí kapitole řekli, možných kombinací znamének $\pm$ existuje osm, což znamená, že lze získat až osm hledaných kružnic.

Soustava rovnic (5.1) až (5.3) obsahuje znaménka $\pm$, pro ukázkové řešení jsme u všech rovnic použili znaménko +. Stejným způsobem budeme postupovat i v dalších případech. Takže až budeme mít další rovnice se znaménkem $\pm$, tak pro ukázkové řešení budeme vždy používat znaménko +.

5.2 Případ BBB

Dále budeme řešit případ BBB, máme tedy zadány tři body $A[x_A, y_A]$, $B[x_B, y_B]$, $C[x_C, y_C]$ a opět k nim hledáme kružnici $k(S, r)$. Vztahy mezi zadanými body a kružnicí lze opět vyjádřit pomocí Pythagorovy věty, v tomto případě se ale vzdálenost mezi bodem a středem kružnice bude rovnat délce poloměru hledané kružnice.



Obrázek 12: Vztahy mezi zadanými body a hledanou kružnicí.

Soustavu (3.1) lze v případě BBB přepsat do tvaru

$$\begin{aligned}(x_S-x_A)^2+(y_S-y_A)^2&=r^2\\(x_S-x_B)^2+(y_S-y_B)^2&=r^2\\(x_S-x_C)^2+(y_S-y_C)^2&=r^2.\end{aligned} \qquad (5.10)$$

Jediný rozdíl oproti (3.1) je tedy ten, že na pravé straně všech tří rovnic je pouze poloměr r a není zde potřeba kombinovat znaménka plus a mínus.

Při řešení budeme postupovat tak, že v soustavě (5.10) odečteme rovnici v druhém řádku od rovnice v prvním řádku a dostaneme vztah (5.11), následně odečtením rovnice ze třetího řádku od rovnice v prvním řádku dostaneme (5.12).

$$2(x_B-x_A)x_S+2(y_B-y_A)y_S-y_B^2+y_A^2-x_B^2+x_A^2=0 \qquad (5.11)$$

$$2(x_C-x_A)x_S+2(y_C-y_A)y_S-y_C^2+y_A^2-x_C^2+x_A^2=0 \qquad (5.12)$$

Získali jsme tak dvě lineární rovnice o dvou neznámých x_S a y_S. Tyto dvě rovnice vyřešíme například tak, že z (5.11) vyjádříme x_S a dosadíme do (5.12). Z rovnice (5.12) následně vyjádříme y_S v závislosti na zadaných hodnotách. Takto vyjádřené y_S dosadíme zpět do rovnice (5.11), ze které si nyní vyjádříme i x_S v závislosti na zadaných hodnotách. Dostáváme tak

$$x_S=\frac{M_2N_3-M_3N_2}{M_1N_2-M_2N_1}, \qquad (5.13)$$

$$y_S=\frac{M_3N_1-M_1N_3}{M_1N_2-M_2N_1}, \qquad (5.14)$$

kde

$M_1=2(x_B-x_A)$,

$M_2=2(y_B-y_A)$,

$M_3=-y_B^2+y_A^2-x_B^2+x_A^2$,

$N_1=2(x_C-x_A)$,

$N_2=2(y_C-y_A)$,

$N_3=-y_C^2+y_A^2-x_C^2+x_A^2$.

Rovnice (5.13) a (5.14) dosadíme za x_S a y_S v rovnici v prvním řádku soustavy (5.10) a dostaneme

$$\left(\frac{M_2N_3-M_3N_2}{M_1N_2-M_2N_1}-x_A\right)^2+\left(\frac{M_3N_1-M_1N_3}{M_1N_2-M_2N_1}-y_A\right)^2=r^2.$$

Výslednou hodnotu poloměru hledané kružnice získáme ve tvaru

$$r=\sqrt{\left(\frac{M_2N_3-M_3N_2}{M_1N_2-M_2N_1}-x_A\right)^2+\left(\frac{M_3N_1-M_1N_3}{M_1N_2-M_2N_1}-y_A\right)^2}. \qquad (5.15)$$

Před odmocninou na pravé straně rovnice (5.15) by mohlo být znaménko $\pm$, to by pro nás ale nemělo význam, protože v případě mínus bychom našli úplně stejnou kružnici jako při použití znaménka plus, pouze by měla záporný poloměr.

Zjistili jsme tedy, že v případě, kdy jsou zadány tři body, lze obecně získat jednu hledanou kružnici, jejíž střed má souřadnice vyjádřené vztahy (5.13), (5.14) a poloměr je vyjádřen vztahem (5.15).

5.3 Případ kkB

Nyní se zaměříme na případ kkB. Máme zadán jeden bod $A[x_A, y_A]$ a dvě kružnice $k_B(S_B, r_B)$ a $k_C(S_C, r_C)$. Vztahy mezi zadanými kružnicemi, bodem a hledanou kružnicí vyjádříme rovnicemi

$$(x_S-x_A)^2+(y_S-y_A)^2=r^2, \tag{5.16}$$

$$(x_S-x_B)^2+(y_S-y_B)^2=(r\pm r_B)^2, \tag{5.17}$$

$$(x_S-x_C)^2+(y_S-y_C)^2=(r\pm r_C)^2. \tag{5.18}$$

Rovnice (5.16) až (5.18) budeme řešit pro situaci, kdy bude na pravé straně dvou posledních rovnic mezi poloměry znaménko plus. Opět od rovnice (5.16) odečtěme (5.17), čímž získáme (5.19) a rozdílem rovnic (5.16) a (5.18) získáme (5.20).

$$2(y_B-y_A)y_S+2(x_B-x_A)x_S-y_B^2+y_A^2-x_B^2+x_A^2+2r_Br+r_B^2=0 \tag{5.19}$$

$$2(y_C-y_A)y_S+2(x_C-x_A)x_S-y_C^2+y_A^2-x_C^2+x_A^2+2r_Cr+r_C^2=0 \tag{5.20}$$

Dále ze (5.19) vyjádříme x_S v závislosti na y_S, r a výsledek dosadíme za x_S do (5.20). Z (5.20) po dosazení vyjádříme závislost y_S na r a to, co nám vyjde, dosadíme zpět do (5.19) za y_S, což nám umožní vyjádřit také x_S pouze v závislosti na r. Souřadnice x_S a y_S dostáváme ve tvaru

$$x_S=\frac{(O_2P_3+O_1P_1)r+O_3P_3+O_1P_2}{O_4P_3}, \tag{5.21}$$

$$y_S=\frac{P_1r+P_2}{P_3}, \tag{5.22}$$

kde

$O_1=2(y_A-y_B)$,

$O_2=-2r_B$,

$O_3=y_B^2-y_A^2+x_B^2-x_A^2-r_B^2$,

$O_4=2(x_B-x_A)$,

$P_1=-2(O_2x_C-O_2x_A+O_4r_C)$,

$P_2 = O_4(y_C^2 - y_A^2 + x_C^2 - x_A^2 - r_C^2) + 2O_3(x_A - x_C)$,
$P_3 = 2O_4(y_C - y_A) + 2O_1(x_C - x_A)$.

Následně dosadíme (5.21) za x_S a (5.22) za y_S v rovnici (5.16). Dostaneme tak kvadratickou rovnici o neznámé r ve tvaru

$$A_2 r^2 + B_2 r + C_2 = 0, \tag{5.23}$$

kde

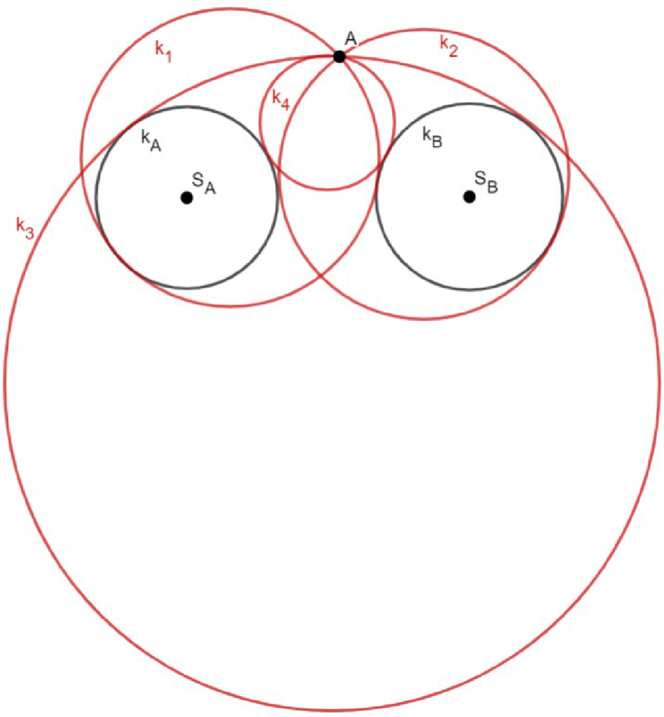
$A_2 = (P_3^2 - P_1^2)Q_3^2 - P_3^2 Q_1^2$,
$B_2 = -2(P_1 Q_3^2 Q_4 + P_3^2 Q_1 Q_2)$,
$C_2 = -Q_3^2 Q_4^2 - P_3^2 Q_2^2$,
$Q_1 = O_2 P_3 + O_1 P_1$,
$Q_2 = O_3 P_3 + O_1 P_2 - O_4 P_3 x_A$,
$Q_3 = O_4 P_3$,
$Q_4 = P_2 - P_3 y_A$.

Z rovnice (5.23) získáváme dvě hodnoty hledaného poloměru

$$r_1 = \frac{-B_2 + \sqrt{B_2^2 - 4A_2 C_2}}{2A_2}, \quad r_2 = \frac{-B_2 - \sqrt{B_2^2 - 4A_2 C_2}}{2A_2}. \tag{5.24}$$

Stejně jako u případu kkk může být pouze jedna z těchto dvou hodnot poloměru kladná. Kladnou hodnotu bychom opět dosadili zpět do vztahů (5.21) a (5.22). Získáme tak jednu hledanou kružnici.

U rovnic (5.16), (5.17) a (5.18) lze znaménka plus a mínus nakombinovat čtyřmi způsoby. Dostáváme tedy čtyři různé soustavy rovnic a případ kkB má obecně čtyři různá řešení. Příklad čtyř řešení je ukázán na následujícím obrázku.



Obrázek 13: Ke dvěma zadaným kružnicím a jednomu bodu máme čtyři hledané kružnice.

5.4 Případ kBB

V případě kBB, kdy máme zadanou kružnici $k_A(S_A, r_A)$ a body $B[x_B, y_B]$, $C[x_C, y_C]$, pro nalezení hledané kružnice použijeme rovnice

$$(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2 = (r \pm r_A)^2, \tag{5.25}$$

$$(x_S - x_B)^2 + (y_S - y_B)^2 = r^2, \tag{5.26}$$

$$(x_S - x_C)^2 + (y_S - y_C)^2 = r^2. \tag{5.27}$$

Odečtením rovnice (5.26) od (5.25) získáme (5.28) a rozdílem rovnic (5.25) a (5.27) získáme (5.29).

$$2(y_B - y_A) y_S + 2(x_B - x_A) x_S - y_B^2 + y_A^2 - x_B^2 + x_A^2 - 2 r_A r - r_A^2 = 0 \tag{5.28}$$

$$2(y_C - y_A) y_S + 2(x_C - x_A) x_S - y_C^2 + y_A^2 - x_C^2 + x_A^2 - 2 r_A r - r_A^2 = 0 \tag{5.29}$$

Nyní máme dvě lineární rovnice o třech neznámých (5.28) a (5.29). Vyjádříme si z nich x_S a y_S v závislosti na r stejným způsobem, jako jsme to udělali u případu kkB, kde jsme měli rovnice (5.19) a (5.20). Po vyjádření dostáváme vztahy

$$x_S = \frac{T_1 r + T_2}{T_3}, \tag{5.30}$$

$$y_S = \frac{R_1 r + R_2}{R_3}, \tag{5.31}$$

kde

$R_1 = 2(r_A x_B - r_A x_C)$,

$R_2 = x_A x_B^2 - (x_A - x_B)(y_C^2 + x_C^2) - (x_C - x_A) y_B^2 - (x_B - x_C) y_A^2 - (x_B^2 - x_A^2 + r_A^2) x_C - (x_A^2 - r_A^2) x_B$,

$R_3 = 2[(x_B - x_A) y_C + (x_A - x_C) y_B + (x_C - x_B) y_A]$,

$T_1 = 2(R_1 y_A - R_1 y_B + R_3 r_A)$,

$T_2 = (y_B^2 - y_A^2 + x_B^2 - x_A^2 + r_A^2) R_3 + 2(y_A - y_B) R_2$,

$T_3 = 2 R_3 (x_B - x_A)$.

Vztahy (5.30) a (5.31) dosadíme do (5.25) a dostaneme rovnici

$$A_3 r^2 + B_3 r + C_3 = 0, \tag{5.32}$$

kde

$A_3 = T_1^2 R_3^2 - T_3^2 (R_3^2 - R_1^2)$,

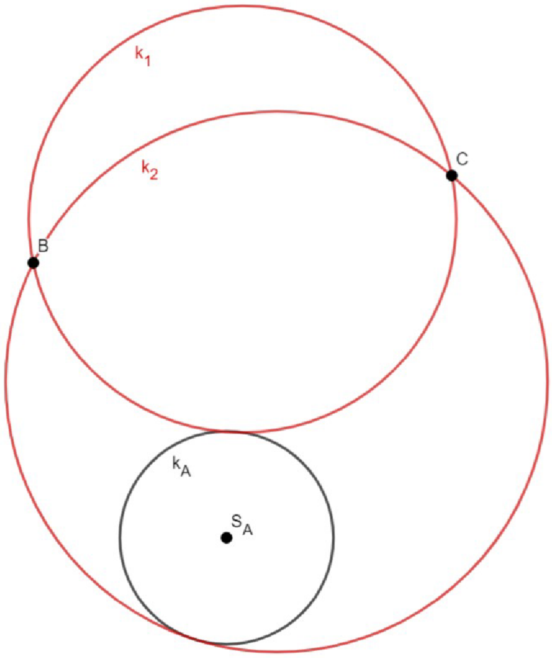
$B_3 = 2[(T_1 T_2 - T_1 T_3 x_A - T_3^2 r_A) R_3^2 - R_1 T_3^2 y_A R_3 + R_1 T_3^2 R_2]$,

$C_3 = [(y_A^2 + x_A^2 - r_A^2) R_3^2 - 2 y_A R_2 R_3 + R_2^2] T_3^2 + (T_2^2 - 2 T_2 x_A T_3) R_3^2$.

Z rovnice (5.32) získáváme dvě hodnoty poloměru r ve tvaru

$$r_1 = \frac{-B_3 + \sqrt{B_3^2 - 4 A_3 C_3}}{2 A_3}, \quad r_2 = \frac{-B_3 - \sqrt{B_3^2 - 4 A_3 C_3}}{2 A_3}. \tag{5.33}$$

Stejně jako v předchozím případě může být vždy pouze jedna z těchto hodnot kladná. Díky znaménku $\pm$ v rovnici (5.25) lze v případě kBB získat obecně dvě řešení.



Obrázek 14: Dvě červené kružnice se dotýkají dvou zadaných bodů a jedné zadané kružnice.

5.5 Případ ppp

Díky vztahům, ke kterým jsme dospěli ve čtvrté kapitole, si můžeme ukázat i řešení případů obsahujících přímky. Řešení těchto příkladů si ukážeme na přímkách, které lze zapsat ve směrnicovém tvaru.

Začneme případem ppp. Máme zadány tři přímky s předpisy

$$\begin{aligned} p_A &: y = a_A x + b_A, \\ p_B &: y = a_B x + b_B, \\ p_C &: y = a_C x + b_C \end{aligned} \tag{5.34}$$

a k nim hledáme kružnici $k(S, r)$. Pro nalezení této kružnice použijeme soustavu rovnic, ve které budou jednotlivé rovnice odpovídat vztahu (4.5). Abychom si zjednodušili zápis, upravíme tento vztah použitím substituce $s = \frac{1}{\cos(\arctan a)}$. Soustava rovnic tak získá tvar

$$a_A x_S - y_S + b_A = \pm s_A r \tag{5.35}$$

$$a_B x_S - y_S + b_B = \pm s_B r \tag{5.36}$$

$$a_C x_S - y_S + b_C = \pm s_C r. \tag{5.37}$$

Soustavu můžeme začít řešit tak, že od rovnice (5.35) zvlášť odečteme rovnici (5.36) a rovnici (5.37). Dostáváme tak rovnice

$$(a_A - a_B) x_S - b_B + b_A = (s_A - s_B) r, \tag{5.38}$$

$$(a_A - a_C) x_S - b_C + b_A = (s_A - s_C) r. \tag{5.39}$$

Následně si ze vztahu (5.38) vyjádříme r a dosadíme do (5.39). Dostaneme tak rovnici

$$(a_A - a_C) x_S - b_C + b_A = (s_A - s_C) \frac{(a_B - a_A) x_S + b_B - b_A}{s_B - s_A}, \tag{5.40}$$

což je lineární rovnice o jedné neznámé x_S a tuto neznámou z rovnice vyjádříme ve tvaru

$$x_S = \frac{(b_B - b_A) s_C + (b_A - b_C) s_B + (b_C - b_B) s_A}{(a_B - a_A) s_C + (a_A - a_C) s_B + (a_C - a_B) s_A}. \tag{5.41}$$

Nyní potřebujeme ještě najít neznáme y_S a r. Vztah (5.41) dosadíme zpět do (5.38), získáme rovnici

$$(a_A - a_B) \frac{(b_B - b_A) s_C + (b_A - b_C) s_B + (b_C - b_B) s_A}{(a_B - a_A) s_C + (a_A - a_C) s_B + (a_C - a_B) s_A} - b_B + b_A = (s_A - s_B) r,$$

ze které po úpravách dostaneme poloměr hledané rovnice

$$r = \frac{(a_B - a_A) b_C + (a_A - a_C) b_B + (a_C - a_B) b_A}{(a_B - a_A) s_C + (a_A - a_C) s_B + (a_C - a_B) s_A}. \tag{5.42}$$

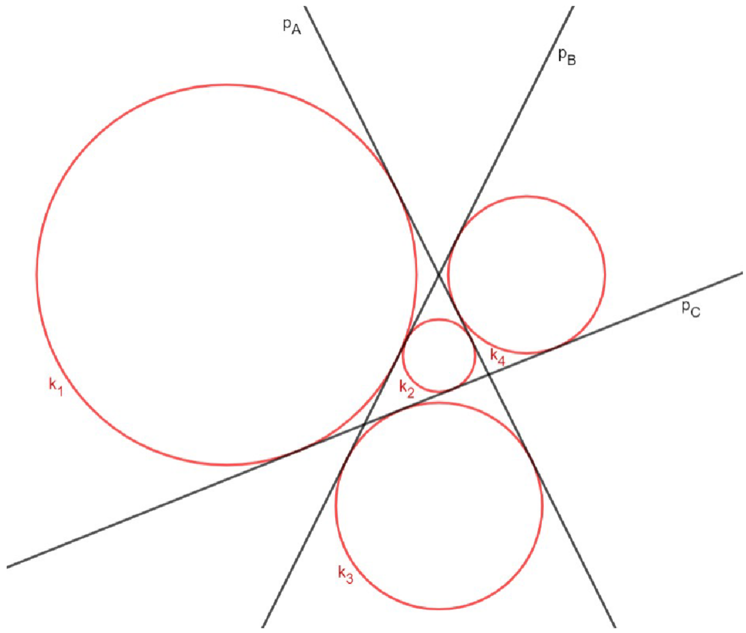
Následně vztahy (5.41) a (5.42) dosadíme do (5.35). Tím vznikne rovnice

$$a_A \frac{(b_B - b_A) s_C + (b_A - b_C) s_B + (b_C - b_B) s_A}{(a_B - a_A) s_C + (a_A - a_C) s_B + (a_C - a_B) s_A} + b_A = s_A \frac{(a_B - a_A) b_C + (a_A - a_C) b_B + (a_C - a_B) b_A}{(a_B - a_A) s_C + (a_A - a_C) s_B + (a_C - a_B) s_A} + y_S$$

a po úpravách této rovnice dostáváme y-ovou souřadnici středu hledané kružnice

$$y_S = \frac{(a_B b_A - a_A b_B) s_C + (a_A b_C - a_C b_A) s_B + (a_C b_B - a_B b_C) s_A}{(a_B - a_A) s_C + (a_A - a_C) s_B + (a_C - a_B) s_A}. \tag{5.43}$$

V případě, že jsme na pravých stranách rovnic (5.35) až (5.37) použili znaménka plus, tak jsme dostali poloměr hledané kružnice a souřadnice jejího středu vyjádřené pomocí vztahů (5.42), (5.41) a (5.43). Požitím jiných kombinací znamének $\pm$ bychom mohli stejným způsobem získat další řešení.



Obrázek 15: Tři přímek se dotýkají čtyři kružnice.

5.6 Případ kkp

Nyní budeme řešit případ kkp. Máme zadanou přímku $p_A: y = a_A x + b_A$ a dvě kružnice $k_B(S_B, r_B)$, $k_C(S_C, r_C)$. Vznikne nám soustava rovnic

$$a_A x_S - y_S + b_A = \pm s_A r, \tag{5.44}$$

$$(x_S - x_B)^2 + (y_S - y_B)^2 = (r \pm r_B)^2, \tag{5.45}$$

$$(x_S - x_C)^2 + (y_S - y_C)^2 = (r \pm r_C)^2. \tag{5.46}$$

Od rovnice (5.45) odečteme (5.46), dostaneme tak lineární rovnici

$$2(y_C - y_B) y_S + 2(x_C - x_B) x_S - y_C^2 + y_B^2 - x_C^2 + x_B^2 = 2(r_B - r_C) r - r_C^2 + r_B^2. \tag{5.47}$$

Z (5.44) si vyjádříme x_S v závislosti na neznámých hodnotách y_S a r

$$x_S = \frac{y_S + s_A r - b_A}{a_A} \tag{5.48}$$

a následně dosadíme do rovnice (5.47), ve které teď budeme mít pouze neznámé y_S a r.

Po úpravách si z této rovnice vyjádříme y_S ve tvaru

$$y_S = \frac{U_1 r + U_2}{U_3}, \tag{5.49}$$

kde

$U_1 = 2 s_A x_C - 2 s_A x_B + 2 a_A r_C - 2 a_A r_B,$
$U_2 = -a_A y_C^2 + a_A y_B^2 - a_A x_C^2 - 2 b_A x_C + a_A x_B^2 + 2 b_A x_B + a_A r_C^2 - a_A r_B^2,$
$U_3 = -2 a_A y_C + 2 a_A y_B - 2 x_C + 2 x_B.$

Nyní vztah (5.49) dosadíme do (5.48) a vyjádříme si x_S v závislosti na neznámé r

$$x_S = \frac{(U_3 s_A + U_1) r - U_3 b_A + U_2}{U_3 a_A}. \tag{5.50}$$

Vztahy (5.50) a (5.49) dosadíme do (5.45), dostaneme tak kvadratickou rovnici o neznámé r, která má tvar

$$A_4 r^2 + B_4 r + C_4 = 0, \tag{5.51}$$

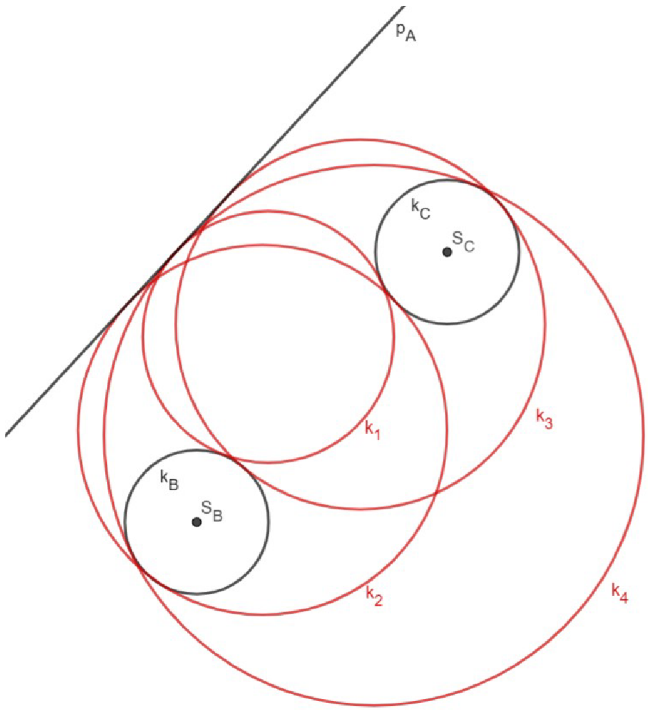
kde

$A_4 = U_3^2 s_A^2 + 2 U_1 U_3 s_A + (U_1^2 - U_3^2) a_A^2 + U_1^2,$
$B_4 = -2 a_A^2 (U_1 U_3 y_B + U_3^2 r_B) - 2 (U_3^2 a_A s_A + U_1 U_3 a_A) x_B + 2 (U_2 U_3 - U_3^2 b_A) s_A +$
$+ 2 U_1 (-U_3 b_A + U_2 a_A^2 + U_2),$
$C_4 = U_3^2 a_A^2 (y_B^2 + x_B^2) + 2 a_A (U_3^2 b_A - U_2 U_3) x_B + U_3^2 b_A^2 - 2 U_2 U_3 b_A + U_2^2 -$
$- (2 U_2 U_3 y_B + U_3^2 r_B^2 U_2^2) a_A^2.$

Rovnice (5.51) má řešení

$$r_1 = \frac{-B_4 + \sqrt{B_4^2 - 4 A_4 C_4}}{2 A_4} \quad \text{a} \quad r_2 = \frac{-B_4 - \sqrt{B_4^2 - 4 A_4 C_4}}{2 A_4}. \tag{5.52}$$

Nalezené poloměry bychom následně dosadili do vztahů (5.49) a (5.50). Tím bychom získali parametry hledané kružnice. Opět bychom mohli nalézt další řešení použitím dalších kombinací znamének $\pm$ u rovnic (5.44) až (5.46).



Obrázek 16: Dvou zadaných kružnic a jedné přímky
se dotýkají čtyři červené kružnice.

5.7 Případ kpp

V dalším případě máme zadanou kružnici $k_A(S_A, r_A)$ a dvě přímky $p_B: y = a_B x + b_B$, $p_C: y = a_C x + b_C$. Pro nalezení kružnice, která by se těchto prvků dotýkala použijeme rovnice

$$(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2 = (r \pm r_A)^2, \tag{5.53}$$

$$a_B x_S - y_S + b_B = \pm s_B r, \tag{5.54}$$

$$a_C x_S - y_S + b_C = \pm s_C r. \tag{5.55}$$

Soustavu rovnic pro tento případ lze řešit následovně. Nejprve si z (5.54) vyjádříme neznámou x_S ve tvaru

$$x_S = \frac{y_S + s_B r - b_B}{a_B} \tag{5.56}$$

a pak ji dosadíme do rovnice (5.55), ze které si následně vyjádříme y_S v závislosti na r.

$$y_S = \frac{(a_B s_C - a_C s_B) r - a_B b_C + a_C b_B}{a_C - a_B} \tag{5.57}$$

Takto vyjádřené y_S dosadíme zpět do vztahu (5.56) a po úpravách dostáváme i x_S v závislosti pouze na neznámé r.

$$x_S=\frac{(s_C-s_B)r-b_C+b_B}{a_C-a_B} \tag{5.58}$$

Po dosazení vztahů (5.57) a (5.58) do (5.53) dostáváme kvadratickou rovnici, kterou lze po úpravách psát ve tvaru

$$A_5 r^2+B_5 r+C_5=0, \tag{5.59}$$

kde

$$A_5=(a_B^2+1)s_C^2-2(a_B a_C+1)s_B s_C+(a_C^2+1)s_B^2-a_C^2+2a_B a_C-a_B^2,$$

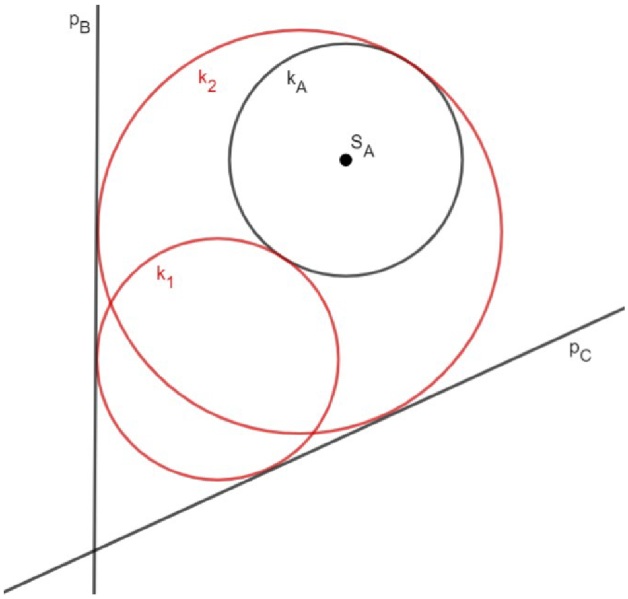
$$\begin{aligned}B_5&=2\left[(a_B^2-a_B a_C)s_C+(a_C^2-a_B a_C)s_B\right]y_A+\left[(a_B-a_C)s_C+(a_C-a_B)s_B\right]x_A+\\&+2\left[(a_B a_C+1)b_B-(a_B^2+1)b_C\right]s_C+2\left[(a_B a_C+1)b_C-(a_C^2+1)b_B\right]s_B+2(2a_B a_C-a_C^2-a_B^2)r_A,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_5&=(a_C-a_B)^2 y_A^2+2\left[(a_B a_C-a_B^2)b_C+(a_B a_C-a_C^2)b_B\right]y_A+(a_C-a_B)^2 x_A^2+(a_C^2+1)b_B^2+\\&+2\left[(a_C-a_B)b_C+(a_B-a_C)b_B\right]x_A-(a_C-a_B)^2 r_A^2+(a_B^2+1)b_C^2-2(a_B a_C+1)b_B b_C.\end{aligned}$$

Podobně jako v předchozím případě dostaneme řešení rovnice (5.59) v podobě

$$r_1=\frac{-B_5+\sqrt{B_5^2-4A_5C_5}}{2A_5},\ r_2=\frac{-B_5-\sqrt{B_5^2-4A_5C_5}}{2A_5}. \tag{5.60}$$

Nalezené poloměry bychom opět dosadili do vztahů (5.57), (5.58) a dostali bychom hledanou kružnici.



Obrázek 17: Dvě červené kružnice se dotýkají černé kružnice a přímek.

5.8 Případ BBp

U dalšího případu máme zadanou jednu přímku $p_A: y=a_A x+b_A$ a dva body $B[x_B, y_B]$, $C[x_C, y_C]$. K těmto zadaným prvkům budeme mít soustavu rovnic ve tvaru

$$a_A x_S - y_S + b_A = \pm s_A r, \tag{5.61}$$

$$(x_S - x_B)^2 + (y_S - y_B)^2 = r^2, \tag{5.62}$$

$$(x_S - x_C)^2 + (y_S - y_C)^2 = r^2. \tag{5.63}$$

Soustavu rovnic začneme řešit tak, že od (5.62) odečteme (5.63), dostaneme tak rovnici

$$2(y_C - y_B) y_S + 2(x_C - x_B) x_S - y_C^2 + y_B^2 - x_C^2 + x_B^2 = 0. \tag{5.64}$$

Vidíme, že jsme tak dostali rovnici bez neznámé r, následně si z ní vyjádříme x_S v závislosti na neznámé y_S

$$x_S = \frac{2(y_C - y_B) y_S - y_C^2 + y_B^2 - x_C^2 + x_B^2}{2(x_B - x_C)}. \tag{5.65}$$

Poslední vztah dosadíme do rovnice (5.61) a vyjádříme si z ní r v závislosti na y_S. Po úpravách dostáváme

$$r = \frac{2(a_A y_C - a_A y_B + x_C - x_B) y_S - a_A (y_C^2 + y_B^2 - x_C^2 + x_b^2) - 2 b_A (x_C + x_B)}{2(s_A x_B - s_A x_C)}. \tag{5.66}$$

Nyní vztahy (5.65) a (5.66) dosadíme do (5.62). Dostaneme tak rovnici

$$A_6 y_S^2 + B_6 y_S + C_6 = 0, \tag{5.67}$$

kde

$$\begin{aligned}
A_6 = {} & 4(s_A^2 - a_A^2) y_C^2 + 8\left[(a_A^2 - s_A^2) y_B - a_A x_C + a_A x_B\right] y_C + 4(s_A^2 - a_A^2) y_B^2 + 8(x_C - x_B) a_A y_B + \\
& + 4(s_A^2 - 1) x_C^2 + 8(1 - s_A^2) x_B x_C + 4(s_A^2 - 1) x_B^2,
\end{aligned}$$

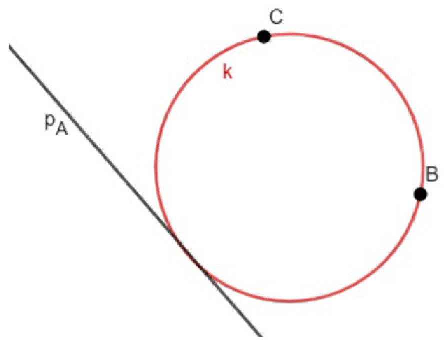
$$\begin{aligned}
B_6 = {} & 4(a_A^2 - s_A^2) y_C^3 + 4\left[(s_A^2 - a_A^2) y_B + a_A x_C - a_A x_B\right] y_C^2 + \\
& + 4\left[(s_A^2 - a_A^2) y_B^2 + (a_A^2 - s_A^2) x_C^2 + 2(s_A^2 x_B + a_A b_A) x_C - (s_A^2 + a_A^2) x_B^2 - 2 a_A b_A x_B\right] y_C + 4(a_A^2 - s_A^2) y_B^3 + \\
& + 4(a_A x_B - a_A x_C) y_B^2 + 4\left[-(s_A^2 + a_A^2) x_C^2 + 2(s_A^2 x_B - a_A b_A) x_C + (a_A^2 - s_A^2) x_B^2 + 2 a_A b_A x_B\right] y_B + 4 a_A x_C^3 + \\
& + 4(2 b_A - a_A x_B) x_C^2 - 4(a_A x_B^2 + 4 b_A x_B) x_C + 4 a_A x_B^3 + 8 b_A x_B^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_6 = {} & (s_A^2 - a_A^2) y_C^4 + 2\left[(a_A^2 - s_A^2) y_B^2 + (s_A^2 - a_A^2) x_C^2 + 2(s_A^2 x_B + a_A b_A) x_C + (s_A^2 + a_A^2) x_B^2 + 2 a_A b_A x_B\right] y_C^2 + \\
& + (s_A^2 - a_A^2) y_B^4 + 2\left[(s_A^2 + a_A^2) x_C^2 + 2(a_A b_A - s_A^2 x_B) x_C + (s_A^2 - a_A^2) x_B^2 - 2 a_A b_A x_B\right] y_B^2 + (s_A^2 - a_A^2) x_C^4 + \\
& + 4(-s_A^2 x_B - a_A b_A) x_C^3 + 2\left[(3 s_A^2 + a_A^2) x_B^2 + 2 a_A b_A x_B - 2 b_A^2\right] x_C^2 + 4(-s_A^2 x_B^3 + a_A b_A x_B^2 + 2 b_A^2 x_B) x_C + \\
& + (s_A^2 - a_A^2) x_B^4 - 4 a_A b_A x_B^3 - 4 b_A^2 x_B^2.
\end{aligned}$$

Řešením rovnice (5.67) získáme y-ovou souřadnici středu hledané kružnice ve tvaru

$$y_{S1} = \frac{-B_6 + \sqrt{B_6^2 - 4 A_6 C_6}}{2 A_6} \quad \text{nebo} \quad y_{S2} = \frac{-B_6 - \sqrt{B_6^2 - 4 A_6 C_6}}{2 A_6}. \tag{5.68}$$

Podobně jako v předchozích případech bychom dosazením této souřadnice do vztahů (5.65) a (5.66) dostali i x-ovou souřadnici středu a poloměr hledané kružnice.



Obrázek 18: Červená kružnice se dotýká zadané přímky a dvou zadaných bodů.

5.9 Případ Bpp

U tohoto případu máme zadaný jeden bod $A[x_A, y_A]$ a dvě přímky $p_B: y=a_B x+b_B$, $p_C: y=a_C x+b_C$. Vztah mezi těmito prvky a hledanou kružnicí vyjádříme soustavou rovnic

$$(x_S-x_A)^2+(y_S-y_A)^2=r^2, \tag{5.69}$$

$$a_B x_S-y_S+b_B=\pm s_B r, \tag{5.70}$$

$$a_C x_S-y_S+b_C=\pm s_C r. \tag{5.71}$$

V tomto případě budeme při řešení soustavy postupovat stejně jako u případu kpp. Z rovnice (5.70) si vyjádříme x_S a dosadíme do (5.71), odkud si následně vyjádříme y_S v závislosti na neznámé r ve tvaru

$$y_S=\frac{(a_B s_C-a_C s_B)r-a_B b_C+a_C b_B}{a_C-a_B}. \tag{5.72}$$

Takto vyjádřené y_S dosadíme zpět do předpisu vyjadřujícího x_S a po úpravách dostáváme

$$x_S=\frac{(s_C-s_B)r-b_C+b_B}{a_C-a_B}. \tag{5.73}$$

Následně vztahy (5.72) a (5.73) dosadíme do (5.69) a dostaneme rovnici

$$A_7 r^2+B_7 r+C_7=0, \tag{5.74}$$

kde

$$A_7=(a_B^2+1)s_C^2-2(a_B a_C+1)s_B s_C+(a_C^2+1)s_B^2-a_C^2+2a_B a_C-a_B^2,$$

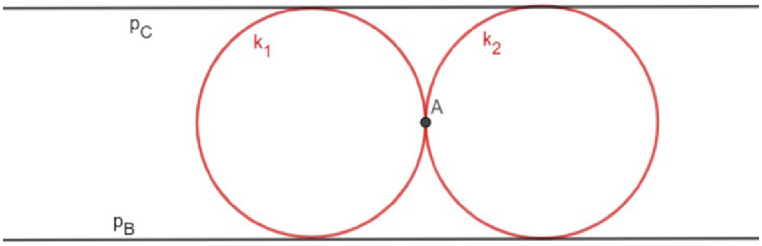
$$\begin{aligned}B_7=&2\left[(a_B^2-a_B a_C)s_C+(a_C^2-a_B a_C)s_B\right]y_A+2\left[(a_B-a_C)s_C+(a_C-a_B)s_B\right]x_A+\\&+2\left[-(a_B^2+1)b_C+(a_B a_C+1)b_B\right]s_C+2\left[(a_B a_C+1)b_C-(a_C^2+1)b_B\right]s_B,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_7=&(a_C-a_B)^2 y_A^2+2\left[(a_B a_C-a_B^2)b_C+(a_B a_C-a_C^2)b_B\right]y_A+(a_C-a_B)^2 x_A^2+\\&+2\left[(a_C-a_B)b_C+(a_B-a_C)b_B\right]x_A+(a_B^2+1)b_C^2-(2a_B a_C+2)b_B b_C+(a_C^2+1)b_B^2.\end{aligned}$$

Z rovnice (5.74) získáme poloměr hledané kružnice ve tvaru

$$r_1=\frac{-B_7+\sqrt{B_7^2-4A_7C_7}}{2A_7} \quad \text{nebo} \quad r_1=\frac{-B_7-\sqrt{B_7^2-4A_7C_7}}{2A_7} \tag{5.75}$$

a nakonec bychom nalezený poloměr opět dosadili do vztahů (5.72) a (5.73).



Obrázek 19: Ke dvěma rovnoběžným přímkám a jednomu bodu máme dvě hledané kružnice.

5.10 Případ kBp

U posledního případu máme zadanou kombinaci tří různých prvků. Máme kružnici $k_A(S_A, r_A)$, bod $B[x_B, y_B]$ a přímku $p_C: y = a_C x + b_C$. Vznikne nám soustava rovnic

$$(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2 = (r \pm r_A)^2, \tag{5.76}$$

$$(x_S - x_B)^2 + (y_S - y_B)^2 = r^2, \tag{5.77}$$

$$a_C x_S - y_S + b_C = \pm s_C r. \tag{5.78}$$

Při řešení této soustavy lze postupovat stejně jako u příkladu kkp. Od rovnice (5.76) odečteme (5.77), čímž dostaneme jednu lineární rovnici ve tvaru

$$2(y_B - y_A) y_S + 2(x_B - x_A) x_S - y_B^2 + y_A^2 - x_B^2 + x_A^2 = 2 r_A r + r_A^2. \tag{5.79}$$

Z rovnice (5.78) si vyjádřím x_S a dosadím do (5.79), vznikne tak rovnice o neznámých y_S a r. Z nově vzniklé rovnice vyjádříme y_S. Po úpravách dostáváme

$$y_S = \frac{V_1 r + V_2}{V_3}, \tag{5.80}$$

kde

$V_1 = 2(s_A x_B - s_A x_A - a_C r_A)$,

$V_2 = a_C(-y_B^2 + y_A^2 - x_B^2 + x_A^2 - r_A^2) - 2 b_C x_B + 2 b_C x_A$,

$V_3 = 2(a_C y_A - x_B + x_A - a_C y_B)$.

Vztah (5.80) dosadíme zpět do předpisu pro x_S, který jsme si vyjádřili z rovnice (5.78) a dostáváme tak

$$x_S = \frac{(V_3 s_A + V_1) r - V_3 b_C + V_2}{V_3 a_C}. \tag{5.81}$$

Dosazením (5.80) a (5.81) do (5.76) získáme kvadratickou rovnici

$$A_8 r^2 + B_8 r + C_8 = 0, \tag{5.82}$$

kde

$A_8 = V_3^2 s_A^2 + 2 V_1 V_3 s_A + (V_1^2 - V_3^2) a_C^2 + V_1^2,$

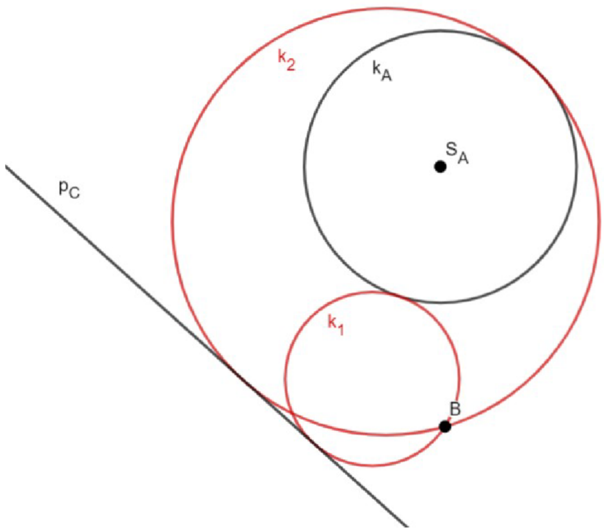
$B_8 = 2 V_1 V_2 - 2 V_1 V_3 a_C^2 y_A - 2(V_3^2 a_C s_A + V_1 V_3 a_C) x_A + 2(V_2 V_3 - V_3^2 b_C) s_A - 2 V_1 V_3 b_C +$
$+ 2 V_1 V_2 a_C^2 - 2 V_3^2 a_C^2 r_A,$

$C_8 = V_3^2 a_C^2 y_A^2 - 2 V_2 V_3 a_C^2 y_A + V_3^2 a_C^2 x_A^2 + 2(V_3^2 a_C b_C - V_2 V_3 a_C) x_A - V_3^2 a_C^2 r_A^2 + V_3^2 b_C^2 + V_2^2 a_C^2 +$
$+ V_2^2 - 2 V_2 V_3 b_C.$

Stejně jako v předchozích případech řešením rovnice (5.82) zjistíme, že poloměru hledané kružnice odpovídají vztahy

$$r_1 = \frac{-B_8 + \sqrt{B_8^2 - 4 A_8 C_8}}{2 A_8} \quad \text{a} \quad r_1 = \frac{-B_8 - \sqrt{B_8^2 - 4 A_8 C_8}}{2 A_8}, \tag{5.83}$$

které následně dosadíme do vztahů (5.80), (5.81) a tím získáme všechny potřebné parametry hledané kružnice.



Obrázek 20: Dvě červené kružnice se dotýkají tří zadaných prvků.

6 Závěr

Cíle bakalářské práce bylo dosaženo, protože tato práce ukazuje čtenářům, jak lze analyticky řešit AU a také obsahuje soubor řešení všech deseti případů.

Na začátku práce se čtenář mohl seznámit s tím, co to AU je, jak ji můžeme formulovat a na jaké případy může být rozdělena. Dále byly představeny a rozebrány přístupy ostatních autorů k řešení této úlohy, které byly zaměřeny hlavně na problematiku tří zadaných kružnic. Vzhledem k tomu, že tyto přístupy nebylo možné použít pro případy, kdy jsou v AU zadány přímky, tak v následující části představuji odvození vztahů, kterými je možné tento problém vyřešit. V poslední kapitole byl čtenáři představen soubor řešení všech případů AU.

U každého případu je v poslední kapitole uvedena soustava tří rovnic, která vyjadřuje vztah mezi zadanými prvky a hledanou kružnicí, která by se těchto prvků dotýkala. U většiny těchto rovnic byla možnost použít buď znaménko plus, nebo mínus. Pro každou soustavu rovnic ukazuji řešení pouze pro jednu kombinaci znamének, protože ostatní kombinace by se řešily analogicky a vypisovat postupy pro všechny kombinace by bylo zbytečné.

Snažil jsem se jasně popsat každý krok postupu ukázaných řešení, aby čtenář přesně viděl, jak dojít k výsledku u libovolného případu AU.

Seznam použité literatury

COURANT, Richard a ROBBINS, Herbert. *What Is Mathematics?* 2. vyd. Oxford University Press, 1996. ISBN 0-19-510519-2.

JOHANSEN, Claus. *Apollonius' Problem.* Denmark, 2014. Dostupné z: http://claus-jo.dk/Apollonius_Uk.html

NOCAR, David. *Metody řešení Apolloniových úloh pomocí ICT*. Olomouc: UP, 2019. Dostupné z:https://www.pdf.upol.cz/fileadmin/userdata/PdF/VaV/2019_2020/Nocar_studijni_text_2019.pdf

PIRKLOVÁ, Petra. *Apolloniovy úlohy.* Liberec: TUL, 2013. Dostupné z: https://kma.fp.tul.cz/images/stories/vyuka/pirklova-prednasky/Apolloniovy_ulohy.pdf

REICHL, Jaroslav a VŠETIČKA, Martin. Apollonius z Pergy. In: *Encyklopedie fyziky* [online]. Reichl, c2006 - 2023, s. 1430 [cit. 2023-11-30]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1430-apollonius-z-pergy

ROBERTSON, E. F. a O'CONNOR, J. J. Apollonius of Perga. *MacTutor* [online]. 1999 [cit. 2023-11-30]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Apollonius/

SKLENÁRIKOVÁ, Zita. K metódam riešenia Apolloniovej úlohy. In: *Matematika v proměnách věků III, Edice Dějiny matematiky.* Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2004.