



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ S VYUŽITÍM METOD PŘESÍŤOVÁNÍ V MKP PROGRAMU ABAQUS

COMPUTATIONAL MODELING BY USING THE REMESHING METHOD IN FEM PROGRAM ABAQUS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Tomáš Zářecký

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Petr Kubík, Ph.D.

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Tomáš Zářecký
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	Ing. Petr Kubík, Ph.D.
Akademický rok:	2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Výpočtové modelování s využitím metod přesíťování v MKP programu Abaqus

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V rešeršní části práce se student zaměří na metodu konečných prvků a metody přesíťování. V další části práce budou vybrané metody přesíťování použity při simulaci jednoduchých procesů v MKP programu Abaqus. Student dále provede analýzu výsledků a vyhodnotí vybrané metody.

Cíle bakalářské práce:

- Popis metody konečných prvků a metod přesíťování
- Aplikace vybraných metod přesíťování
- Analýza výsledků a vyhodnocení vybraných metod

Seznam doporučené literatury:

Abaqus Documentation version 6.14. Dassault Systèmes, 2014.

HAZELL E. Numerical and Experimental Studies of Shallow Cone Penetration in Clay, Doctoral thesis, University of Oxford, 2008.

DONEA J. et al. "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods". Encyclopedia of Computational Mechanics. Fundamentals. Vol. 1. John Wiley & Sons Ltd, 2004. isbn: 0-470-84699-2.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá teoretickým základem metody konečných prvků a metodami přesítování, které jsou dostupné v programu Abaqus. Jedná se o adaptivní přesítování, mapování řešení a ALE adaptivní síťování. Vybrané metody jsou ukázány na několika úlohách. Výsledky jsou porovnány s analytickým řešením a s řešením bez využití metod přesítování.

Klíčová slova

Metoda konečných prvků, metody přesítování, Abaqus.

Abstract

This thesis is about theoretical basics of finite element method and remeshing methods available in Abaqus. These are adaptive remeshing, mesh-to-mesh solution mapping and ALE adaptive meshing. Selected methods are shown in several exercises. Results are compared to the analytical solution and the solution without use of remeshing methods.

Key words

Finite element method, remeshing methods, Abaqus.

Bibliografická citace

ZÁŘECKÝ, T. *Výpočtové modelování s využitím metod přesítování v MKP programu Abaqus*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018, 44 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Petr Kubík, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Výpočtové modelování s využitím metod přesítování v MKP programu Abaqus* vypracoval samostatně pod vedením Ing. Petra Kubíka, Ph.D. s použitím odborné literatury a dalších zdrojů uvedených v seznamu použitých zdrojů.

V Brně dne 23. května 2018

Tomáš Zářecký

Poděkování

Tímto bych velice rád poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce, panu Ing. Petru Kubíkovi, Ph.D. především za cenné rady, věcné připomínky a také jeho ochotu a čas věnovaný při tvorbě bakalářské práce.

Dále bych chtěl poděkovat rodině, blízkým a přátelům za podporu během celého studia.

Obsah

Úvod	15
1 Metoda konečných prvků	17
1.1 Historie.....	17
1.2 Teoretický základ.....	17
1.2.1 Rovnice rovnováhy	18
1.2.2 Rovnice geometrické	18
1.2.3 Konstitutivní vztahy	18
1.2.4 Okrajové podmínky	19
1.3 Princip MKP	19
1.3.1 Základní myšlenka.....	20
1.4 Znázornění postupu řešení	20
1.4.1 Aproximace posuvů nad konečným prvkem	20
1.4.2 Matice tuhosti prvku	21
1.4.3 Matice zatížení prvku	23
1.4.4 Celkové matice tuhosti a zatížení	23
1.4.5 Základní rovnice MKP	24
1.5 Tělesové prvky.....	24
1.5.1 Lineární trojúhelník	25
1.5.2 Prostorový čtyřstěn	27
1.5.3 Izoparametrická formulace prvků.....	28
2 Metody přesítování	30
2.1 Adaptivní přesítování (adaptive remeshing)	30
2.2 Mapování řešení (mesh-to-mesh solution mapping)	31
2.3 ALE adaptivní síťování (ALE adaptive meshing)	31
3 Úlohy s využitím adaptivního přesítování	33
3.1 Příklad 1	33
3.1.1 Model materiálu.....	33
3.1.2 Analytické řešení	33
3.1.3 Řešení pomocí 2D modelu	34
3.1.4 Řešení pomocí 3D modelu	36
3.2 Příklad 2.....	38
3.2.1 Analytické řešení	38
3.2.2 Řešení pomocí 3D modelu	38
3.3 Shrnutí.....	39

4	Úloha s využitím ALE adaptivního síťování	40
4.1	Výpočtový model	40
4.2	Porovnání výsledků	41
4.3	Shrnutí	42
	Závěr	43
	Seznam použitých zdrojů	44

Úvod

Tato práce se věnuje metodě konečných prvků a metodám přesítování, které jsou dostupné v programu Abaqus. Hlavním výsledkem jsou dva příklady na využití adaptivního přesítování a jedna úloha na využití ALE metody přesítování.

S rozvojem počítačové techniky se začali stále více používat numerické metody pro řešení nejrůznějších problémů z různých oblastí fyziky. Zejména v posledních dvaceti letech je metoda konečných prvků (MKP) jednou z nejpoužívanějších numerických metod, které se používají pro řešení úloh a problémů v oblasti mechaniky.

Metody přesítování jsou velmi významným pomocníkem při řešení nejrůznějších problémů pomocí výpočtového modelování. Tato práce se věnuje metodám dostupným v programu Abaqus. Lze zde nalézt teoretické informace o třech způsobech úpravy sítě (adaptivní přesítování, mapování řešení a ALE adaptivní síťování). Výhody použití vybraných metod jsou ukázány na několika příkladech, včetně porovnání výsledků s řešením bez použití přesítování.

1 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků je numerická metoda, díky které můžeme simulovat průběhy napětí, deformací, proudění tepla a tekutin, záření, vlastních frekvencí atd. O této problematice lze nalézt mnoho publikací, za zmínění stojí jedna z prvních knih o MKP O. C. Zienkiewiczze [1], která je zároveň jednou z nejcitovanějších v této problematice.

Při vlastní realizaci řešení přímé úlohy pružnosti lze vybírat ze dvou možností. První je starší a přesná analytická metoda. Jedná se o spojitě řešení, počet prvků je nekonečný. Výsledkem je obecná funkční závislost mezi vstupními a výstupními veličinami. Po vyřešení je možné snadno posoudit závislosti parametrů.

U numerické metody jde o tzv. řešení diskrétní, jenž má konečný počet prvků. Jedná se o metodu přibližnou, nikdy se nedosáhne takové přesnosti jako u metody analytické. Inženýr musí posoudit do jaké míry nepřesnosti ovlivňují výsledek. Tímto způsobem lze řešit jakkoli komplikovanou úlohu, která jde popsat matematicky. Jedinými omezeními jsou časové možnosti a kapacita hardwaru. Výsledek se váže ke specificky zadanému příkladu a při jakékoliv změně se musí celé řešení opakovat. V dnešní době tato metoda převažuje, zejména díky vyspělé počítačové technice. [2, 3, 7]

1.1 Historie

Mezi numerickými metodami v oblasti inženýrských výpočtů má metoda konečných prvků naprosto dominantní postavení, které si získala velmi krátce po jejím vzniku, zejména díky její univerzálnosti. Zrod MKP se váže k roku 1956 a publikaci [4], i když nějaké myšlenky algoritmu této metody byly publikovány již v roce 1943 [5]. K obrovskému rozkvětu přispělo spojení s číslicovým počítačem v průběhu 50. let. Název metody byl poprvé užit v článku [6] roku 1960.

Rozmach metody konečných prvků vedl k vývoji velkého množství počítačového softwaru využívajícího algoritmu této metody. Mezi nejúspěšnější programy se řadí ABAQUS, ANSYS, ADINA a NASTRAN. [2]

1.2 Teoretický základ

Základní princip metody konečných prvků spočívá v diskretizaci¹ tělesa na mnoho malých částí o určité velikosti (konečné prvky) [2]. Složitější tvary jsou převedeny na jednodušší (např. trojúhelníky, čtyřúhelníky). Nespornou výhodou je, že jednoduché tvary jsou matematicky snadno popsitelné. Dále je charakteristický počet a poloha uzlů, které společně s prvky tvoří síť. Čím je síť hustší, tím je vyšší přesnost a náročnost výpočtu.

Metoda konečných prvků je variační metoda, která vychází z Lagrangeova variačního principu. Napěťová analýza v obecném prostorovém příkladu představuje patnáct neznámých funkcí proměnných x, y, z . Obecné rovnice pružnosti (rovnováhy, geometrické a konstitutivní) navzájem vážou tyto funkce. Musí být také doplněny o okrajové podmínky. Pomocí vzájemného dosazování rovnic získáme vztahy, které v deformační variantě obsahují pouze neznámé posuvy. Ty se počítají ve všech uzlech definované sítě. Přetvoření a napětí se získá právě z těchto posuvů. Neznámé funkce jsou:

posuvy:	u, v, w
přetvoření:	$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$
napětí:	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$.

¹ převod problému hledání spojitých funkcí na problém nalezení konečného počtu parametrů, díky kterým se hledané funkce přibližně aproximují [2]

1.2.1 Rovnice rovnováhy

Tyto rovnice představují podmínky rovnováhy elementárního vnitřního prvku, na který nepůsobí pouze složky napětí, ale i vnější objemová síla o složkách o_x, o_y, o_z [$N \times m^{-3}$], kterou může být např. síla gravitační. Rovnice rovnováhy reprezentují závislost mezi složkami napětí, která musí být vždy splněna.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + o_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + o_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + o_z &= 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

1.2.2 Rovnice geometrické

Vyjadřují vztahy, které vytváří vazbu mezi složkami posuvů a přetvoření. Jsou uvedeny ve tvaru, který je použitelný za podmínky malých přetvoření (10^{-2} a méně).

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\tag{1.2}$$

1.2.3 Konstitutivní vztahy

Udávají vztah mezi deformací a napjatostí. Jsou uvedeny v nejobvyklejším tvaru pro Hookovský² materiál. Dvě nezávislé materiálové konstanty (modul pružnosti v tahu E a Poissonovo číslo μ) definují vlastnosti tohoto materiálu.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}\end{aligned}\tag{1.3}$$

² homogenní, lineárně pružný a izotropní materiál, v každém bodě, respektive směru má stejné vlastnosti, v případě odlehčení se vrací do původního stavu

Modul pružnosti ve smyku G lze vyjádřit pomocí vztahu:

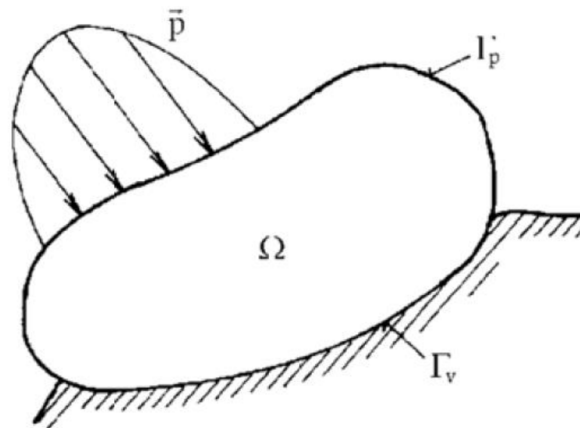
$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (1.4)$$

1.2.4 Okrajové podmínky

Jak již bylo zmíněno, uvedený systém rovnic je potřeba doplnit okrajovými podmínkami, které mohou být buď geometrické, nebo silové. V jednom místě a směru nemůžeme předepsat obě z uvedených podmínek. Geometrické okrajové podmínky vyjadřují zadání posuvů na části povrchu tělesa Γ_v (viz obr. 1.1). Z charakteru uložení tělesa, známých posuvů okolních těles apod. můžeme tyto posuvy určit. Pokud je označíme $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, platí:

$$\Gamma_v: u = \bar{u}, v = \bar{v}, w = \bar{w} \quad (1.5)$$

Časté jsou homogenní geometrické podmínky $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w}$.



Obr. 1.1: Obecně zatížené těleso. [2]

Rovnováha mezi vnitřními a vnějšími silami elementárního prvku ležícího na hranici řešené oblasti Γ_p je vyjádřena okrajovými silovými podmínkami. Jestliže je vnější plošné zatížení $p^T = [p_x, p_y, p_z]$ zadáno na Γ_p a jednotkový vektor normály k povrchu má složky $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, pak platí:

$$\Gamma_p: \begin{aligned} p_x &= \sigma_x \alpha_x + \tau_{xy} \alpha_y + \tau_{xz} \alpha_z \\ p_y &= \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{yz} \alpha_z \\ p_z &= \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z \end{aligned} \quad (1.6)$$

V úlohách řešených deformační variantou MKP se na části povrchu, na kterých jsme nepředepsali žádnou podmínku implicitně zadá homogenní silová okrajová podmínka. Za předpokladu „přesného“ řešení je na tomto povrchu normálové a smykové napětí nulové, pomocí čehož můžeme kontrolovat přesnost numerických výsledků. [2, 8]

1.3 Princip MKP

Deformační varianta metody konečných prvků vychází z Lagrangeova variačního principu, který lze formulovat: „Mezi všemi funkcemi posuvů, které zachovávají spojitost tělesa a splňují geometrické okrajové podmínky, se realizují ty, které udělají celkové potenciální energii Π stacionární hodnotu.“

Π lze vyjádřit jako:

$$\Pi = W - P \quad (1.7)$$

kde W je energie napjatosti tělesa Ω .

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T \times \varepsilon \times dV \quad (1.8)$$

P je potenciál vnějšího zatížení

$$P = \int_{\Omega} u^T \times o \times dV + \int_{\Gamma_p} u^T \times p \times dS \quad (1.9)$$

1.3.1 Základní myšlenka

Celková potenciální energie Π je obecně závislá na spojitých funkcích u, v, w proměnných x, y, z . Každá z nich vyjadřuje nekonečné množství v nekonečně mnoha bodech vyšetřované oblasti. Aby mohla být úloha řešena numericky, funkce musí být vyjádřeny v závislosti na konečném počtu parametrů. V metodě konečných prvků jsou aproximační funkce posuvů vyjádřeny jako součet známých funkcí $N_i(x, y, z), N_j(x, y, z), N_k(x, y, z)$. Jsou označovány jako báze funkce, které se násobí neznámými koeficienty u_i, v_j, w_k , což fyzikálně jsou složky posuvů v uzlových bodech sítě.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{i=1}^l N_i(x, y, z) \times u_i \\ v(x, y, z) &= \sum_{j=1}^m N_j(x, y, z) \times v_j \\ w(x, y, z) &= \sum_{k=1}^n N_k(x, y, z) \times w_k \end{aligned} \quad (1.10)$$

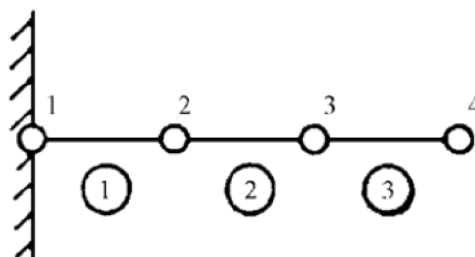
Dosazením těchto rovnic do vztahu (1.7) se vyjádření závislé na funkcích změni na vyjádření závislé na konečném počtu parametrů, které určíme pomocí soustavy rovnic získané z podmínky stacionární hodnoty Π . [2]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial w_n} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow u_1, u_2, \dots, w_n \quad (1.11)$$

1.4 Znázornění postupu řešení

1.4.1 Aproximace posuvů nad konečným prvkem

Při užití metody konečných prvků je nezbytné řešenou oblast rozdělit na konečný počet prvků (podoblastí) a uzlů. Posuvy jsou popsány jednoduchou funkcí nad prvky. V uzlech jsou definovány deformační parametry. Prvky a uzly tvoří síť, která svojí hustotou výrazně ovlivňuje výsledek.



Obr. 1.2: Diskretizace. [2]

Prut na obr. 1.2 byl rozdělen na 3 prvky a 4 uzly, je namáhán pouze ve směru své osy. Nad každou podoblastí je definována funkce, která popisuje chování prvku. Pro prvek jedna platí:

$$u(x) = N \times \delta \quad (1.12)$$

kde

$N = [N_1, N_2]$ je matice bázových funkcí posuvů a

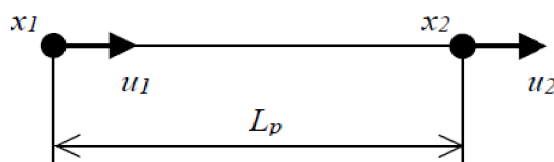
$\delta = [u_1, u_2]^T$ je matice deformačních parametrů.

Explicitní tvar bázových funkcí je:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \\ N_2 &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned} \quad (1.13)$$

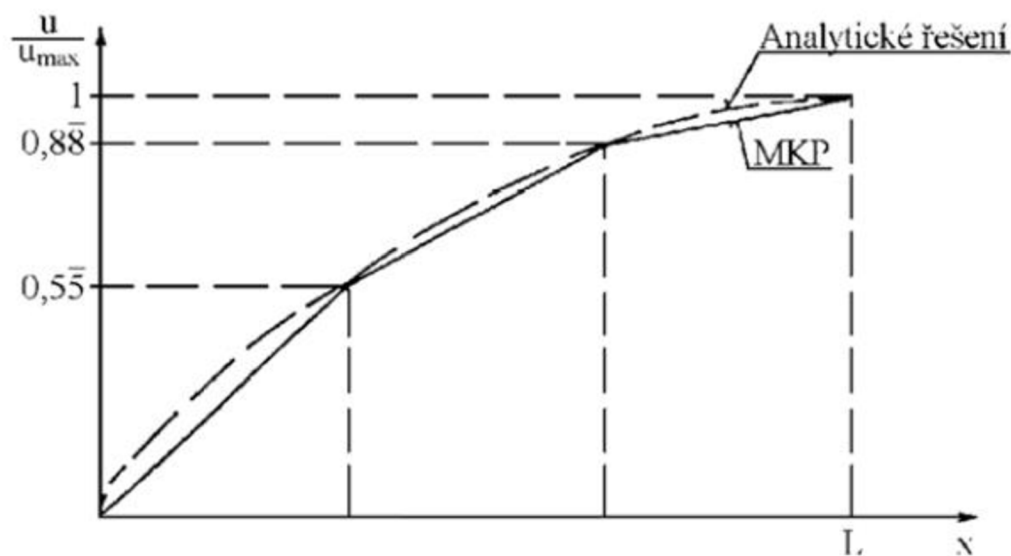
kde x_1, x_2 jsou souřadnice uzlových bodů (obr. 1.3). Posuv libovolného bodu prvku je dán posuvy jeho uzlových bodů:

$$u(x) = N_1(x) \times u_1 + N_2(x) \times u_2 \quad (1.14)$$



Obr. 1.3: Osově namáhaný prutový prvek. [2]

Posuvy na ostatních prvcích jsou aproximovány stejným způsobem. Výsledný průběh posuvů je aproximován a blíží se analytickému řešení (obr. 1.4).



Obr. 1.4: Srovnání numerického a analytického řešení posuvů. [2]

1.4.2 Matice tuhosti prvku

Konečnou hodnotu celkové potenciální energie Π můžeme získat jako součet příspěvků od jednotlivých prvků, protože se jedná o integrální veličinu.

$$\Pi = \sum_{i=1}^3 \Pi_i \quad (1.15)$$

Pro prvek číslo jedna platí:

$$\Pi_1 = W_1 - P_1 \quad (1.16)$$

a energie napjatosti prvku číslo 1 je

$$W_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \sigma \varepsilon S dx \quad (1.17)$$

Napětí a přetvoření z rovnice (1.17) musí být vyjádřeno pomocí posuvů, čehož docílíme dosazením aproximace (1.12) do vztahu (1.18), což je geometrická rovnice.

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (1.18)$$

$$\varepsilon = \frac{d}{dx} (N \times \delta) = B \times \delta \quad (1.19)$$

kde

$$B = \frac{dN}{dx} = \frac{1}{x_2 - x_1} [-1, 1] \quad (1.20)$$

značí matici, která udává tvar funkce přetvoření nad prvkem. Pokud je délka prvku $L_p = x_2 - x_1$, potom:

$$B = \frac{1}{L_p} [-1, 1] \quad (1.21)$$

Matice B vznikla derivací N, z čehož vyplývá, že při lineární aproximaci posuvů je průběh přetvoření nad prvkem konstantní. Jeho hodnota je $\varepsilon = \frac{u_2 - u_1}{L_p}$. To samé platí pro napětí, kdy pomocí Hookova zákona (1.22) dostaneme:

$$\sigma = E \times \varepsilon \quad (1.22)$$

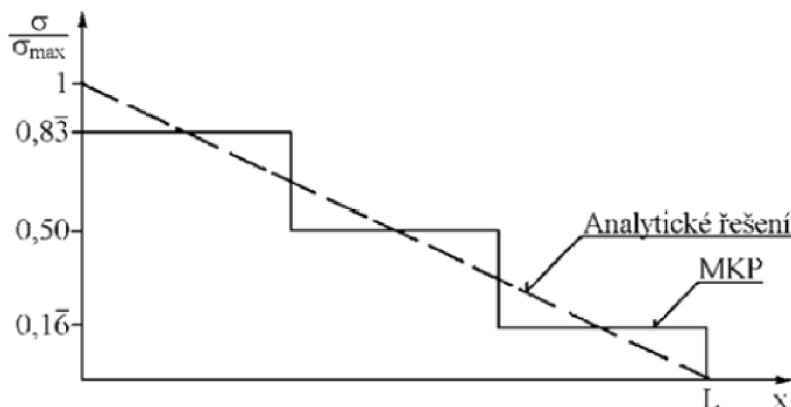
$$\sigma = E \times B \times \delta = \delta^T \times B^T \times E \quad (1.23)$$

Prvky s lineární aproximací posuvů poskytují výsledky napětí a přetvoření po prvcích konstantní (obr. 1.5). Dosazením (1.19) a (1.23) do vztahu (1.17) získáme po upravení energii napjatosti prvku číslo 1:

$$W_1 = \frac{1}{2} \delta^T \times \left(ES \int_{x_1}^{x_2} B^T B dx \right) \times \delta = \frac{1}{2} \delta^T \times k \times \delta \quad (1.24)$$

k je prvková matice tuhosti, jejíž prvky mají fyzikální rozměr tuhosti.

$$k = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$



Obr. 1.5: Srovnání numerického a analytického řešení napětí. [2]

1.4.3 Matice zatížení prvku

Potenciál vnějšího zatížení ze vztahu (1.16) je:

$$P_1 = \int_{x_1}^{x_2} u \rho g S dx \quad (1.26)$$

Potenciál lze úpravami a dosazením do vztahu (1.12) vyjádřit:

$$P_1 = \delta^T \times f \quad (1.27)$$

kde f vyjadřuje prvkovou matici vnějšího zatížení, jejíž prvky značí celkovou objemovou sílu působící na prvek. Zabezpečuje diskretizaci spojitého zatížení, protože tato síla je rozdělena a soustředěna do uzlů.

$$f = \frac{1}{2} \rho g S L_p \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

1.4.4 Celkové matice tuhosti a zatížení

Pomocí matic k, f lze snadno vyjádřit energii napjatosti i potenciál zatížení v závislosti na posuvech prvku číslo 1. Pro ostatní prvky se toto vyjádření provede obdobně. Pokud je vyšetřovaný prut rozdělen na prvky o stejné délce, modul pružnosti, průřez a hustota materiálu jsou konstantní, tak jsou matice k, f těchto prvků totožné s těmi prvku číslo 1. Dále je vhodné sdružit všechny deformační parametry do jediné, tzv. globální matice deformačních posuvů:

$$U = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T \quad (1.29)$$

Protože je nutné energii napjatosti prvního prvku vyjádřit podobně jako ve vztahu (1.24),

$$W_1 = \frac{1}{2} U^T \times K_1 \times U \quad (1.30)$$

je nezbytné matici tuhosti prvního prvku rozšířit o požadovaný počet řádků a sloupců:

$$K_1 = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Rozšířené matice ostatních prvků mají tvar:

$$K_2 = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

$$K_3 = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Celková energie napjatosti:

$$W = \sum_{i=1}^3 W_i = \frac{1}{2} U^T \times (K_1 + K_2 + K_3) \times U = \frac{1}{2} U^T \times K \times U \quad (1.33)$$

kde celková matice tuhosti řešené oblasti:

$$K = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

Celková matice zatížení F se získá vyjádřením celkového potenciálu vnějšího zatížení jako součtu příspěvků od jednotlivých prvků:

$$P = \sum_{i=1}^3 P_i = U^T \times (F_1 + F_2 + F_3) = U^T \times F \quad (1.35)$$

$$F = \frac{1}{2} \rho g S L_p \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

1.4.5 Základní rovnice MKP

Celková potenciální energie závislá na konečném počtu deformačních parametrů může být zapísána tímto způsobem:

$$\Pi = \frac{1}{2} U^T \times K \times U - U^T \times F \quad (1.37)$$

Z Lagrangeova variačního principu vyplývá, že Π nabývá stacionární hodnoty. Toto tvrzení vede k podmínce:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U} = 0 \quad (1.38)$$

Po parciálních derivacích podle u_1, u_2, u_3, u_4 vznikne soustava čtyř lineárních rovnic

$$K \times U = F \quad (1.39)$$

Tato soustava nemá jednoznačné řešení, protože matice K je singulární³. Z tohoto důvodu je nutné vždy předepisovat okrajové podmínky, jinak by došlo k numerickému zhroucení výpočtu (dělení nulou).

Vazba prutu v názorném příkladu (Obr. 1.2) odpovídá okrajové podmínce $u_1 = 0$. Proto musí být deformační parametr u_1 vynechán z matice neznámých parametrů (je to známá veličina). Dále je nutné vypustit první rovnici ze soustavy (1.39), z čehož vyplyne vypuštění prvního řádku a sloupce matice soustavy a prvního řádku matice zatížení. Tím je získána základní rovnice MKP, v níž jsou všechny matice nesingulární. Rovnice (1.41) představují výsledný tvar matic. [2, 7]

$$K \times U = F \quad (1.40)$$

$$K = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

$$F = \frac{1}{2} \rho g S L_p \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

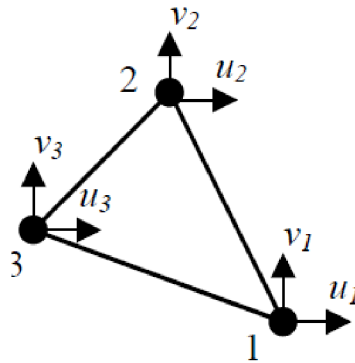
1.5 Tělesové prvky

Pomocí těchto prvků se provádí diskretizace v rovině i prostoru. Nejjednodušším zástupcem v rovinných úlohách je prvek trojúhelníkový s lineárními bázovými funkcemi, jehož prostorová varianta se nazývá čtyřuzlový čtyřstěn.

³ determinant matice K je nulový

1.5.1 Lineární trojúhelník

Tento prvek má tři uzly ve svých vrcholech a šest deformačních parametrů viz obr. 1.6. Je často využíván, hlavně díky své jednoduchosti. Důsledkem konstantních průběhů napětí a přetvoření je ve srovnání s jinými rovinnými prvky nepřesný. Aby bylo dosaženo podobných výsledků, je třeba zvýšit hustotu sítě.



Obr. 1.6: Lineární trojúhelník. [2]

Složky posuvů u, v jsou nezávislé a nad prvkem aproximovány polynomem stejného typu. Ukázána bude aproximace složky u . Vztah (1.42) znázorňuje základní tvar aproximační funkce.

$$u(x, y) = a_1 + a_2 \times x + a_3 \times y = G^T \times a \quad (1.42)$$

Matice $G = [1, x, y]^T$ vyjadřuje tvar polynomu, matice $a = [a_1, a_2, a_3]^T$ neznámé koeficienty. Vodorovné složky posuvů ve vrcholech zapsané do matice deformačních parametrů $\delta_u = [u_1, u_2, u_3]^T$ lze vyjádřit pomocí známých souřadnic vrcholů.

$$\delta_u = S \times a \quad (1.43)$$

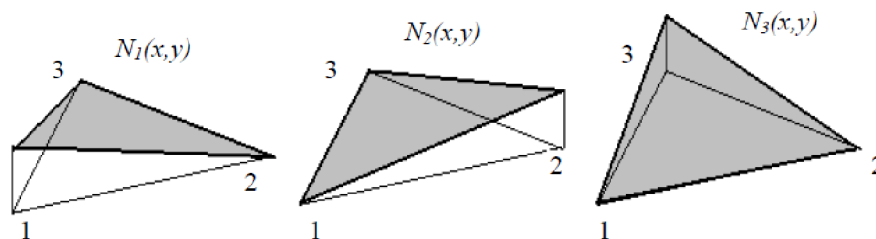
$$S = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

S je matice souřadnic vrcholů. Obvyklé vyjádření aproximované funkce u závislé na deformačních parametrech ve vrcholech získáme vyjádřením a z rovnice (1.43) a dosazením do (1.42).

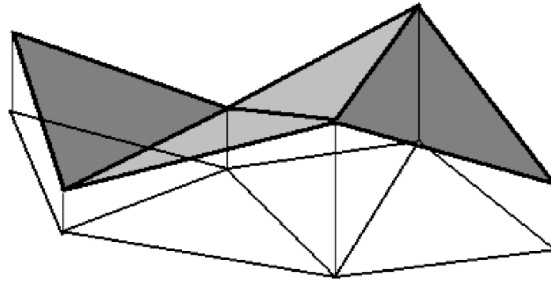
$$u(x, y) = G^T \times S^{-1} \times \delta_u = N_u \times \delta_u \quad (1.44)$$

$$N_u = [N_1 \quad N_2 \quad N_3]$$

Bázové funkce N_i jsou lineární funkce nad trojúhelníkem, jenž mají jednotkovou hodnotu v i -tém vrcholu a nulovou ve dvou zbývajících (obr. 1.7). Sousední prvky sdílejí na hranicích uzly i deformační parametry, tudíž je při užití aproximace (1.44) ve funkčních hodnotách pole posuvů spojitě a po částech lineární (obr. 1.8).



Obr. 1.7: Bázové funkce trojúhelníkového prvku. [2]



Obr. 1.8: Aproximace posuvů nad trojúhelníkovým prvkem. [2]

Druhá složka posuvů v je obvykle aproximována podobně. Maticově to lze zapsat následujícím způsobem.

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = N \times \delta \quad (1.45)$$

$$\delta = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3]^T$$

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

Pro získání matice tuhosti je nutné vyjádřit napětí a přetvoření pomocí nezávislé funkce posuvů. Pomocí geometrických rovnic a konstitutivních vztahů se získají složky přetvoření.

$$\varepsilon = L \times N \times \delta = B \times \delta \quad (1.46)$$

Kde $\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z]^T$ je matice složek přetvoření,

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \text{ matice diferenciálních operátorů vztahů (1.2) a}$$

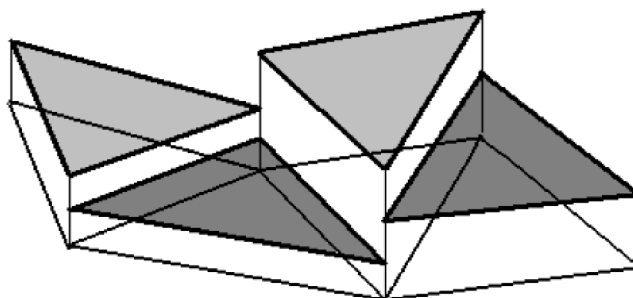
$B = L \times N$ matice tvarových funkcí přetvoření.

Za předpokladu platnosti Hookova zákona lze získat složky napětí v rovině $\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z]^T$.

$$\sigma = D \times \varepsilon = D \times B \times \delta \quad (1.47)$$

Podle druhu úlohy (rovinná deformace, rovinná napjatost, rotačně symetrická úloha) může matice materiálových konstant D být různého tvaru. Průběhy složek přetvoření a napětí jsou po prvcích konstantní s nespojitostmi na hranicích mezi prvky (obr. 1.9). Matice tuhosti trojúhelníkového prvku získáme dosazením σ, ε do výrazu pro energii napjatosti. S je plocha prvku, t tloušťka.

$$k = \iint_S B^T D B t \, dx \, dy = B^T D B t S \quad (1.48)$$



Obr. 1.9: Průběh složek napětí a přetvoření nad trojúhelníkovým prvkem. [2]

1.5.2 Prostorový čtyřstěn

Jak již bylo řečeno, prostorovou variantou lineárního trojúhelníku je čtyřstěn neboli tetraedr (Obr. 1.10). Složky posuvů u, v, w jsou aproximovány lineární funkcí tří prostorových souřadnic. Pro posuv u platí:

$$u(x, y, z) = a_1 + a_2 \times x + a_3 \times y + a_4 \times z = G^T \times a \quad (1.49)$$

$G = [1, x, y, z]^T$ vyjadřuje tvar polynomu, $a = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$ jsou neznámé koeficienty. Stejným způsobem jako u lineárního trojúhelníku lze psát následující vztahy:

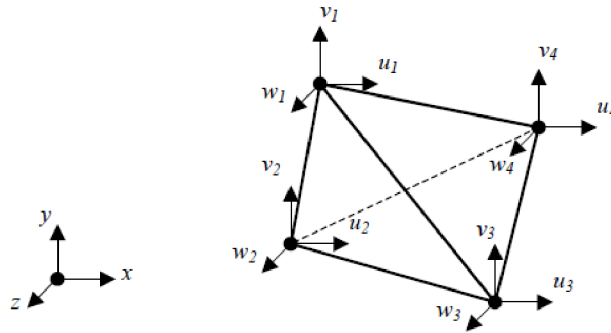
$$\delta_u = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$$

$$\delta_u = S \times a \quad (1.50)$$

$$(x, y, z) = G^T \times S^{-1} \times \delta_u = N_u \times \delta_u \quad (1.51)$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$N_u = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$



Obr. 1.10: Prostorový čtyřstěn. [2]

Lineární bázové funkce N_i mají totožné vlastnosti s bázovými funkcemi lineárního trojúhelníku. Posuv prvku je zcela určen dvanácti deformačními parametry.

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = N \times \delta \quad (1.52)$$

$$\delta = [u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3, u_4, v_4, w_4]^T$$

$$N = [N_1 \times E \quad N_2 \times E \quad N_3 \times E \quad N_4 \times E]$$

E je jednotková matice rozměru 3×3 . Matice přetvoření a napětí jsou odvozeny stejným způsobem jako u lineárního trojúhelníku. Tvar matice diferenciálních operátorů L odpovídá geometrickým vztahům (1.2) v obecném prostorovém případě.

$$\varepsilon = L \times N \times \delta = B \times \delta \quad (1.53)$$

$$\sigma = D \times \varepsilon = D \times B \times \delta \quad (1.54)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^T$$

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T$$

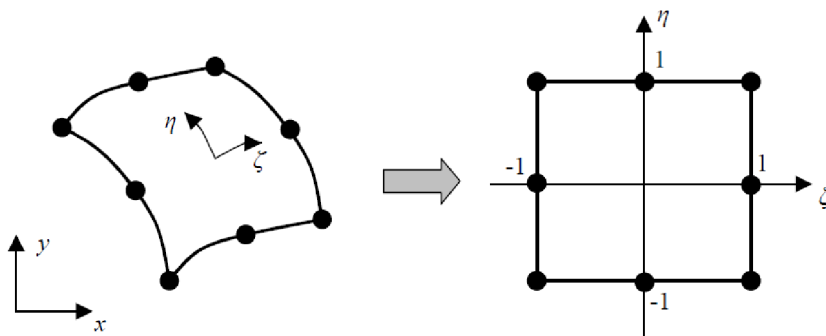
$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$k = \iiint B^T D B dV = B^T D B V \quad (1.55)$$

V je objem prvku, k prvková matice tuhosti. Průběhy složek napětí a přetvoření jsou stejně jako u lineárního trojúhelníku po prvcích konstantní, s nespojitostmi na hranicích. Čtyřstěn je vhodný ke generování komplikovaných prostorových sítí, protože ho lze jako jediný prvek použít k automatickému pokrytí objemů těles složitých tvarů.

1.5.3 Izoparametrická formulace prvků

Dříve uvedené prvky měly jednoduchý tvar a lineární báze funkce, takže se jejich matice tuhosti daly integrovat analyticky. U prvků s více komplikovaným tvarem a báze funkce s aproximačními polynomy vyšších stupňů je nezbytné použít numerickou integraci prvkových matic, přičemž se využívá transformace geometrie z kartézského systému souřadnic x, y na jednotkový prvek v přirozeném souřadném systému křivočarých souřadnic ξ, η (obr. 1.11). Tento postup lze přirovnat k integraci plochy kruhu, kdy z kartézských souřadnic přecházíme do polárních. Integrační meze se značně zjednoduší. Po definování transformačních vztahů mezi souřadnicemi (1.56) lze získat matici tuhosti rovinného osmiuzlového čtyřúhelníku.



Obr. 1.11: Izoparametrický prvek v kartézském a přirozeném souřadném systému. [2]

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B t \det J d\xi d\eta \quad (1.57)$$

Jakobián transformace:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Pro složky posuvů v souladu s (1.44) a (1.45) platí následující vztahy, kde u_i, v_i jsou posuvy uzlových bodů.

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \times u_i \\ v(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \times v_i \end{aligned} \quad (1.58)$$

Je vhodné analogickým způsobem definovat i vztahy (1.56), kde x_i, y_i jsou souřadnice uzlových bodů.

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{N}_i(\xi, \eta) \times x_i \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \hat{N}_i(\xi, \eta) \times y_i \end{aligned} \quad (1.59)$$

Pokud platí $N_i = \hat{N}_i$, pak je stejným polynomem se stejným počtem parametrů popsána geometrie prvku i pole posuvů, z čehož vychází název izoparametrický prvek, který je základem všech MKP programů. Lze se setkat také s prvky sub-, nebo superparametrickými, kdy je geometrie popsána méně nebo více parametry než posuvy.

Izoparametrické prvky jsou členěny do tzv. rodin podle typu bazových funkcí. Jsou to např. prvky s lineárním základem bazové funkce (lineární prutový prvek, bilineární čtyřúhelník, osmiuzlový prostorový šestistěn), nebo s kvadratickým základem bazové funkce (kvadratický prutový prvek, rovinné kvadratické prvky, prostorové kvadratické prvky). [2, 9]

2 Metody přesítování

Výsledky vyplývající ze sítě, která se pouze blíží té optimální, mohou být výrazně nepřesné. Kvůli tomu vznikly metody, jenž napomáhají optimalizovat síť tak, aby bylo dosaženo co nejlepšího poměru přesnosti výsledků a náročnosti výpočtů. V programu Abaqus se lze setkat se třemi metodami, které se liší například v tom, zda zjemňují jedinou síť, nebo po určitém kroku vytvářejí síť novou.

2.1 Adaptivní přesítování (adaptive remeshing)

Tato metoda je využívána hlavně ke kontrole přesnosti výsledků analýz, ale v některých případech ji lze použít i ke kontrole příliš velkého zkroucení prvků. Zahrnuje opakující se generování odlišných sítí, z nichž je nakonec vybrána ta, která nejvíce vyhovuje požadavkům uživatele.

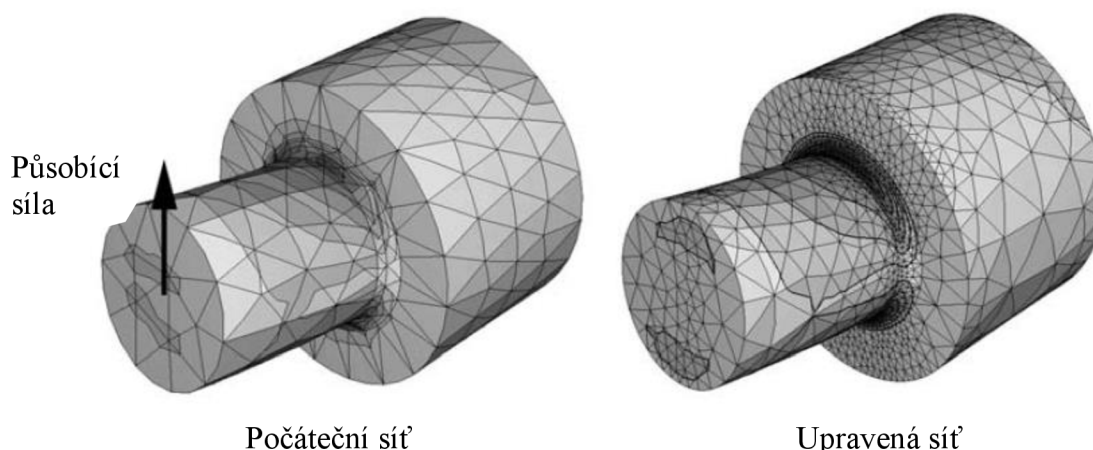
Nezbytné je definovat přesítovací pravidlo (remeshing rule) [10]. Lze ho přiřadit celému tělesu, nebo jen určitém oblastem. Toto pravidlo určuje krok, během něhož bude aplikováno přesítování, výstupní proměnné indikátorů chyb, cíle indikátorů chyb, metodu dimenzování a omezení velikosti prvků. Dále musí být určen proces adaptivity, během kterého se Abaqus pokusí splnit cíle definované v přesítovacích pravidlech.

Při specifikování cíle indikátoru chyb lze vybírat ze tří metod kontroly chyby. Tou první je metoda jednotné chyby, kdy je pro kontrolu dimenzování k dispozici jeden indikátor η . Celková chyba je jednotná pro celou oblast, v které je aplikováno přesítovací pravidlo. Je nutné specifikovat hodnotu chyby, nebo lze zvolit automatický cíl, který se rovná 1 %.

Druhá metoda se nazývá kontrola minima a maxima. Pro kontrolu dimenzování jsou k dispozici dva cíle. V oblasti největší hodnoty řešení (např. napětí) je to η_{max} . V oblasti nejmenší hodnoty řešení η_{min} . Přípustnou velikost chyby lze specifikovat pro každou oblast zvlášť, nebo je možné zvolit automatický cíl chyby, který je pro obě oblasti 1 %.

Poslední možností je výchozí metoda a parametry, při níž Abaqus automaticky určí, kterou ze dvou metod zmíněných výše vybrat, protože každý indikátor chyby má přiřazenou výchozí metodu.

Generování sítí probíhá do té doby, než je dosaženo všech cílů, nebo maximálního počtu iterací přesítování. Výsledek použití této metody lze pozorovat na obr. 2.1.

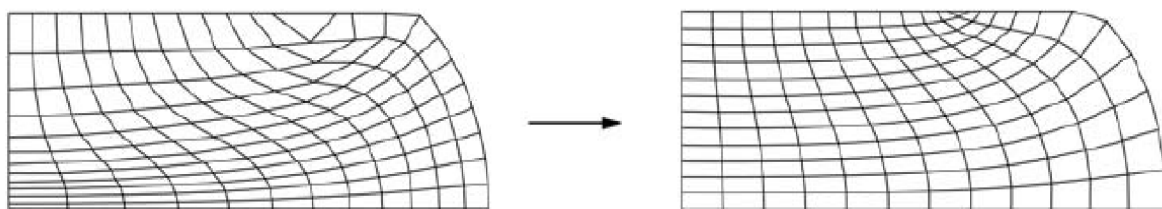


Obr. 2.1: Změna sítě využitím metody adaptivního přesítování. [10]

2.2 Mapování řešení (mesh-to-mesh solution mapping)

Tento způsob lze využít v případech veliké deformace ke kontrole překroucení prvků [10]. Síť, která je již výrazně zdeformovaná, je nahrazena novou sítí s lepší kvalitou, na které následně analýza pokračuje (obr. 2.2). Na rozdíl od metody adaptivního přesítování každá změna sítě přispívá do celkového výsledku analýzy, takže není možné si zvolit jednu nejvíce vyhovující síť.

Při každé změně sítě dojde ke zkreslení řešení. Pokud je výrazné pro celkový výsledek, může to být následek příliš hrubé sítě, nebo se musí zdeformovaná síť nahradit dříve, než jsou prvky příliš zkrouceny. Aplikace této metody je složitější, jelikož nestačí využít funkcí, které jsou k nalezení přímo v programu Abaqus, ale je nutné zapsat určité funkce do vstupního souboru.

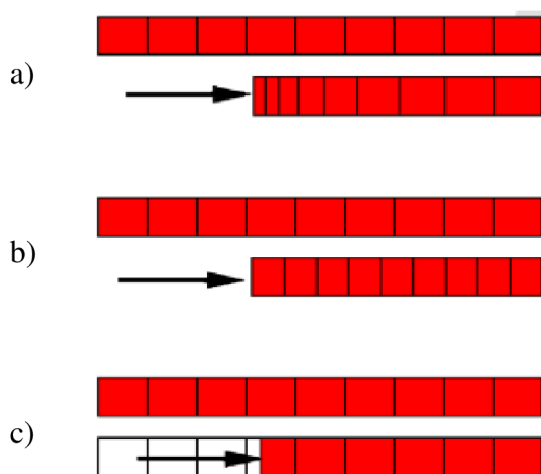


Obr. 2.2: Nahrazení sítě s nepřijatelným zkroucením prvků novou sítí. [10]

2.3 ALE adaptivní síťování (ALE adaptive meshing)

Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) adaptivní síťování zajišťuje kontrolu překroucení sítě. Lze ji užít v případech, kdy hrozí ztráta materiálu, nebo když nastane velká deformace. Na rozdíl od předchozích metod přesítování, ALE funguje pouze na původně vytvořené sítí, která je postupně zjemňována během kroků analýzy. Původní síť musí obsahovat dostatečné množství prvků, aby byla efektivní po celou dobu analýzy, protože se uzly pouze přemísťují a nedochází ke změně jejich počtu.

Tato metoda kombinuje rysy dvou způsobů analýz (Lagrangeův a Eulerův). Lagrangeův princip spočívá v tom, že se uzly pohybují s materiálem, síť se deformuje. Pro tento typ analýzy je snadné zadat okrajové podmínky. V Eulerově přístupu jsou uzly zafixovány na stejném místě a materiál proplouvá sítí, takže nedochází k jejímu deformování. V ALE je pohyb sítě omezen na pohyb materiálu pouze na okrajích tělesa, jinak jsou pohyby materiálu a sítě nezávislé. Pohyby materiálu a sítě lze pozorovat na obr. 2.3. [10, 11, 12]



Obr. 2.3: Pohyb sítě a materiálu: a) Lagrangeova metoda, b) ALE metoda a c) Eulerova metoda. [11]

Při využití metody ALE je nejdříve s formulací prvků, okrajovými podmínkami, silami atd. zacházeno jako při standardní Lagrangeově analýze (sít se deformuje společně s materiálem). Následně začne zjemňování sítě, která se již pohybuje nezávisle na materiálu (Eulerova analýza) [13]. Po dostatečném zjemnění se proměnné řešení přemapují na novou síť.

Přemístění uzlů a vznik nové sítě (mesh-update procedure) se skládá z několika odlišných algoritmů a nastavení (např. kritéria přesítění). Je nutné specifikovat v který moment a které uzly přemísťovat, algoritmy zjemňování a geometrické aspekty (zlepšení geometrie, jemnost zakřivení).

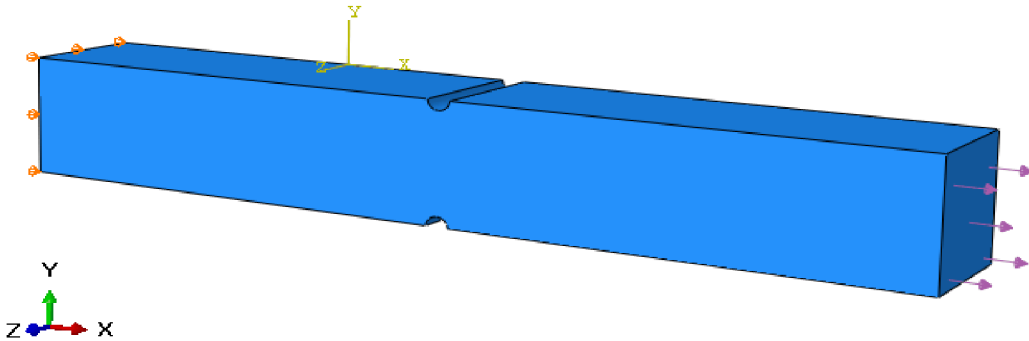
Funkce jemnosti zakřivení slouží k přemístění více prvků do oblastí velikého zakřivení. Pro přemístění uzlů existuje několik algoritmů. Dvěma nejzákladnějšími algoritmy jsou hmotnostně-objemový průměr středů prvků a průměr pozic sousedních uzlů spojených hranou prvku. Více komplikovaný algoritmus je založen na průměru vyššího řádu 8 nejbližších uzlů (2D případ).

Přesítovací kritérium při užití metody ALE není založeno jako v případě adaptivního přesítování na určování chyby. V tomto případě pouze definuje, jak často je nezbytné provést přesítění.

3 Úlohy s využitím adaptivního přesíťování

3.1 Příklad 1

V této úloze je několika různými způsoby spočteno napětí v okolí vrubu prutu s čtvercovým průřezem namáhaným na tah (obr. 3.1). Šířka a výška prutu je 30 mm , délka 200 mm . Poloměr zaoblení vrubu $R = 2,5\text{ mm}$. Na jednom konci je zabráněno posuvu ve směru osy x , na druhém konci je prut zatížen napětím $\sigma = 100\text{ MPa}$ ve směru osy x . Při řešení v programu Abaqus je využito symetrie, aby došlo ke zkrácení výpočtových časů.



Obr. 3.1: Prut čtvercového průřezu namáhaný tahem.

3.1.1 Model materiálu

V celé kapitole 3 je použit lineární elastický izotropní a homogenní model materiálu. Při vytváření modelu materiálu v programu Abaqus je nezbytné zadat Poissonův poměr $\mu = 0,33$ a Youngův modul pružnosti $E = 210\,000\text{ MPa}$.

3.1.2 Analytické řešení

Prut je zatížen napětím o velikosti $\sigma = 100\text{ MPa}$. Zátěžnou sílu lze určit následujícím vztahem.

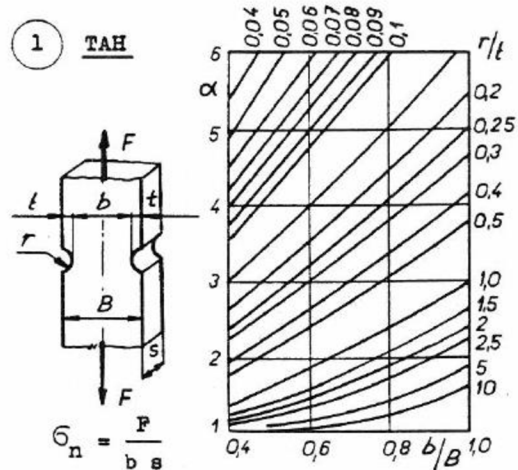
$$F = \sigma \times S = 100 \times 30 \times 30 = 90\,000\text{ N}$$

Nominální napětí v místě vrubu:

$$\sigma_{nom} = \frac{F}{S} = \frac{90\,000}{30 \times 25} = 120\text{ MPa}$$

Pro získání maximálního napětí v místě vrubu je nutné nominální napětí vynásobit součinitelem koncentrace napětí α , který lze odečíst z obr. 3.2. Jelikož $r/t = 1$ a $b/B = 0,83$, $\alpha = 2,5$.

$$\sigma_{max} = \sigma_{nom} \times \alpha = 120 \times 2,5 = 300\text{ MPa}$$



Obr. 3.2: Nomogram součinitele koncentrace pro plochý prut se zápichem namáhaný tahem. [14]

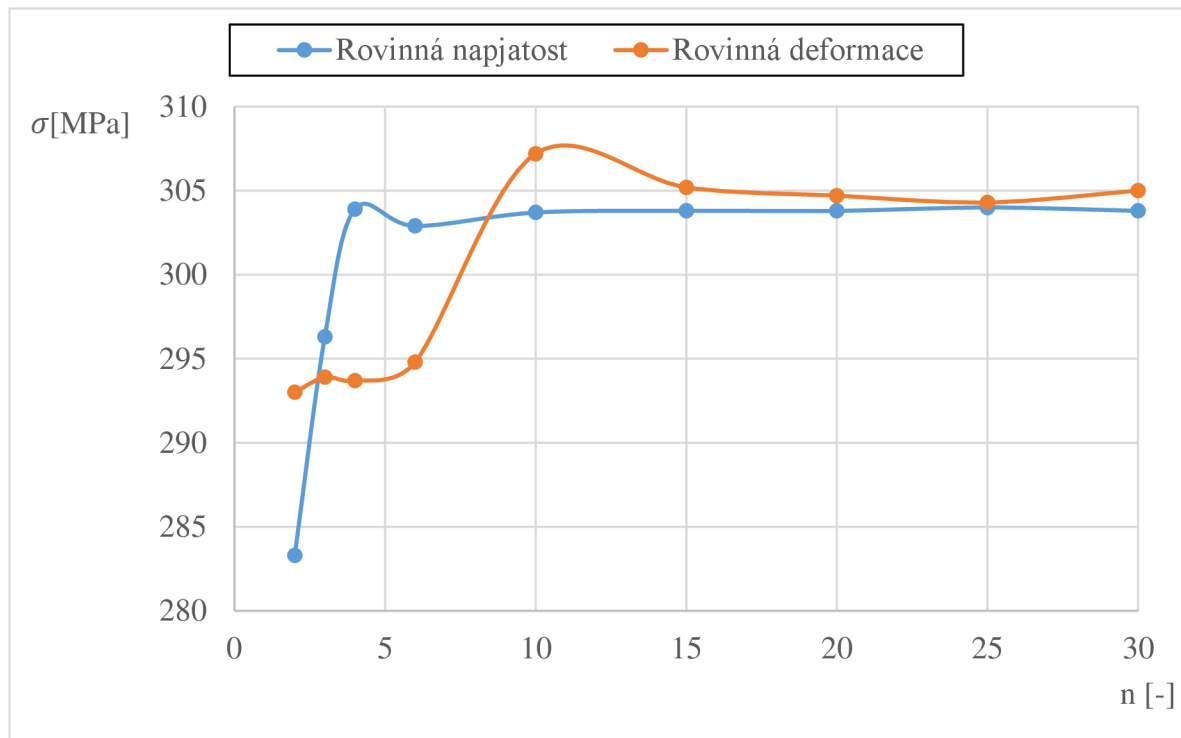
3.1.3 Řešení pomocí 2D modelu

V této části je využito rovinné deformace (obsahuje složky deformace pouze v rovině xy , je bráněno deformaci ve směru osy z , $\varepsilon_z = 0, \sigma_z \neq 0$) a rovinné napjatosti (obsahuje složky napětí v rovině xy , může se deformovat ve směru osy z , $\varepsilon_z \neq 0, \sigma_z = 0$). Nejdříve je síť modelu v okolí vrubu ručně zjemňována. Získané hodnoty jsou zaznamenány v tabulce 1. Napětí získané využitím rovinné deformace je označeno σ_{RD} , využitím rovinné napjatosti σ_{RN} , n je počet uzlů na hranách v okolí vrubu.

Tabulka 1: Hodnoty napětí při různých počtech uzlů hran v okolí vrubu.

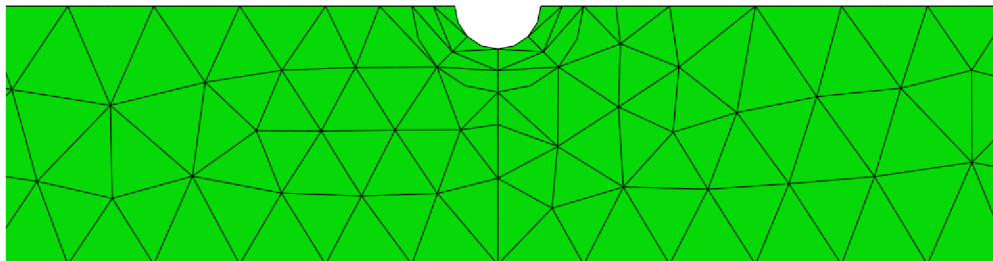
n [-]	σ_{RD} [MPa]	σ_{RN} [MPa]
2	293,0	283,3
3	293,9	296,3
4	293,7	303,9
6	294,8	302,9
10	307,2	303,7
15	305,2	303,8
20	304,7	303,8
25	304,3	304
30	305,0	303,8

Na obr. 3.3 lze pozorovat, jak se zjemňováním sítě výsledné napětí přibližně blíží hodnotě napětí spočítaného pomocí analytického řešení. Síť v okolí vrubu vybraných iterací jsou zobrazeny na obr. 3.4 a 3.5.

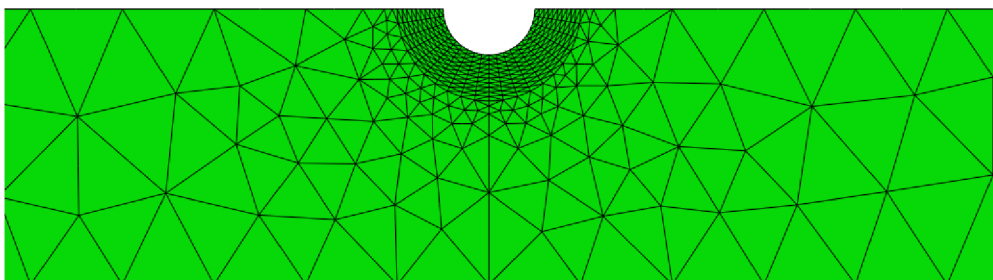


Obr. 3.3: Graf závislosti výsledného napětí na počtu uzlů na hranách v okolí vrubu.

Na obr. 3.3 lze snadno pozorovat, že hodnota výsledného napětí se od počtu uzlů $n = 15$ téměř nemění. Při použití vyššího počtu uzlů je síť zbytečně moc jemná a při výpočtech složitějších úloh by došlo k velkému nárůstu výpočtového času.



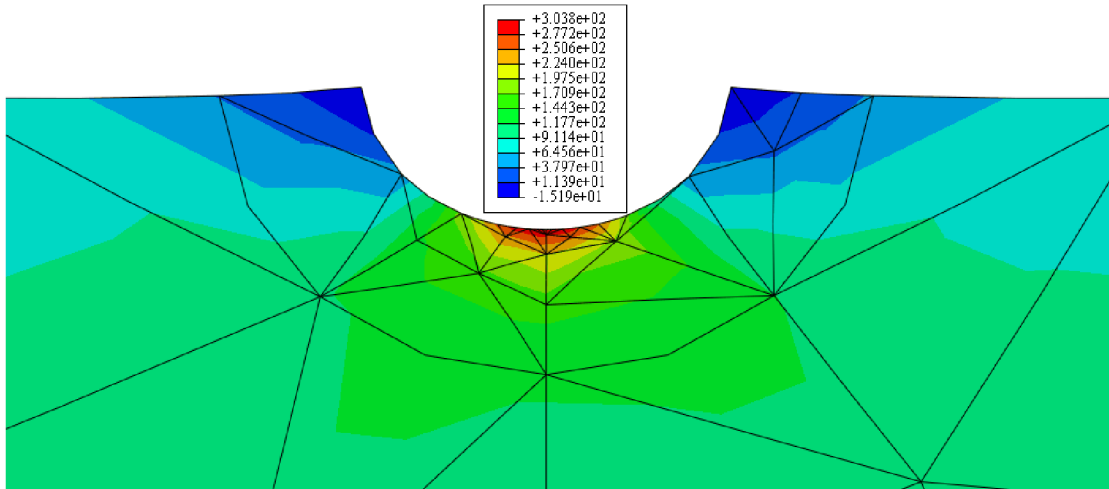
Obr. 3.4: Síť v okolí vrubu při $n = 2$.



Obr. 3.5: Síť v okolí vrubu při $n = 10$.

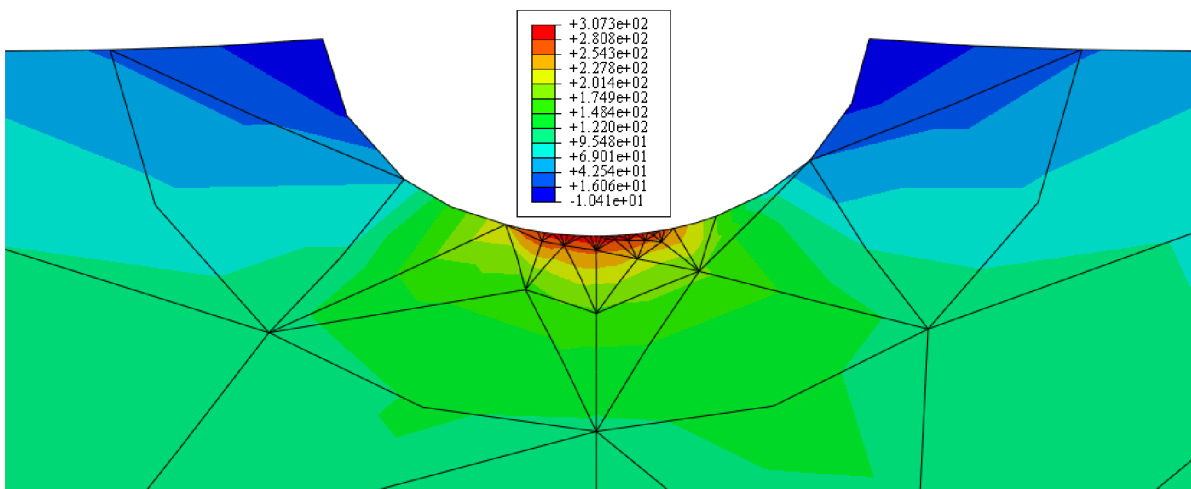
Jelikož je obtížné odhadnout, kdy je síť dostatečně jemná, je výhodnější využít funkce adaptivního přesíťování. Přesíťovací pravidlo přiřazené celému modelu má za indikátor chyby redukované napětí. Cílem indikátoru chyb je pomocí metody kontroly minima a maxima dosáhnout hodnot $\eta_{max} = 1\%$ a $\eta_{min} = 5\%$. Pro vyhodnocení touto metodou je dále nezbytné vytvořit proces adaptivity, kde lze definovat počet iterací.

Při využití rovinné napjatosti se vyhovělo definovaným požadavkům ve čtvrté iteraci. Výsledné osově napětí má hodnotu $\sigma = 303,8 \text{ MPa}$ a je vykresleno na obr. 3.6. Použitým prvkem je šestiuzlový kvadratický trojúhelník s názvem CPS6.



Obr. 3.6: Výsledné osově napětí.

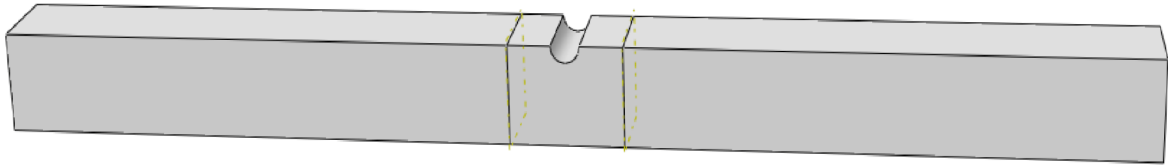
Při využití rovinné deformace je aplikován totožný postup, pouze byla upravena hodnota $\eta_{max} = 0,5 \%$. Cíle se dosáhlo v šesté iteraci s výsledkem $\sigma = 307,3 \text{ MPa}$. Výsledné osově napětí je na obr. 3.7. Použitým prvkem je šestiuzlový kvadratický trojúhelník s názvem CPE6.



Obr. 3.7: Výsledné osově napětí.

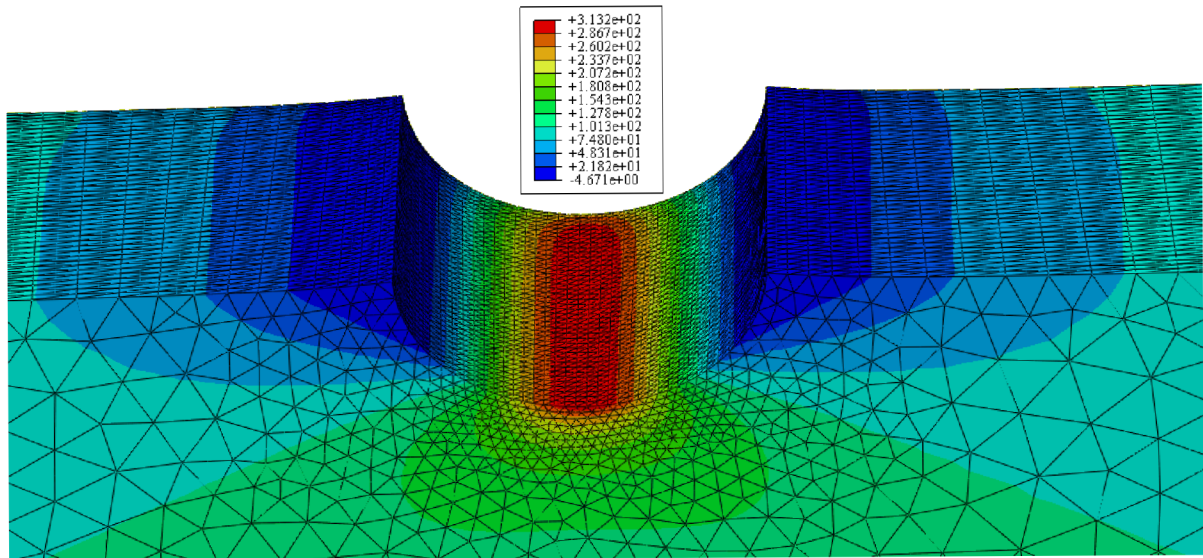
3.1.4 Řešení pomocí 3D modelu

Pro zjištění napětí v okolí vrubu jsou využity dvě roviny symetrie, tudíž stačí sestrojít jedna čtvrtina modelu, který se následně pomocí rovin rozdělil na tři oblasti (obr. 3.8). Přesíťovací pravidlo je aplikováno pouze na oblast v okolí vrubu. Indikátorem chyby je redukováné napětí. Cíle indikátoru chyby má být dosaženo pomocí metody jednotné chyby, přičemž její požadovaná hodnota je $\eta = 0,5 \%$.



Obr. 3.8: Model rozdělený na tři oblasti.

Požadované chyby je dosaženo ve třetí iteraci s výslednou hodnotou napětí $\sigma = 313,2 \text{ MPa}$ (obr. 3.9). Použitým prvkem je desetiuzlový kvadratický čtyřstěn, který má označení C3D10.



Obr. 3.9: Výsledné osové napětí.

3.2 Příklad 2

V této úloze je spočteno napětí v okolí vrubu prutu čtvercového průřezu namáhaného ohybem. Šířka a výška je rovna 30 mm , délka je 200 mm , poloměr vrubu $R = 2,5\text{ mm}$. Na jednom konci je zabráněno posuvům a na druhém je prut zatížen ohybovým momentem $M = 300\text{ Nm}$, proti směru osy z .

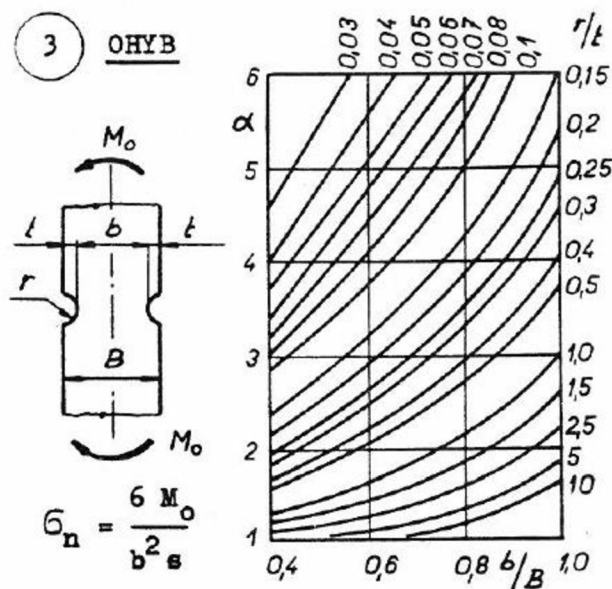
3.2.1 Analytické řešení

Prut je zatížen ohybovým momentem o velikosti $M = 300\text{ Nm}$. Nominální napětí v místě vrubu:

$$\sigma_{nom} = \frac{6 \times M}{b^2 \times s} = \frac{6 \times 300 \times 10^3}{25^2 \times 30} = 96\text{ MPa}$$

Pro získání maximálního napětí v místě vrubu je nutné nominální napětí vynásobit součinitelem koncentrace napětí α , který lze odečíst z obr. 3.10. Jelikož $r/t = 1$ a $b/B = 0,83$, $\alpha = 2,2$.

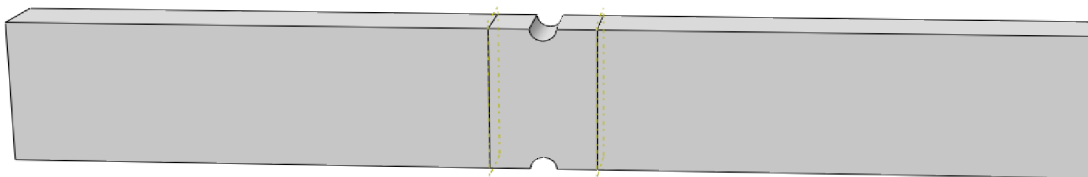
$$\sigma_{max} = \sigma_{nom} \times \alpha = 96 \times 2,2 = 211,2\text{ MPa}$$



Obr. 3.10: Nomogram součinitele koncentrace pro plochý prut se zápichem namáhaný ohybem. [14]

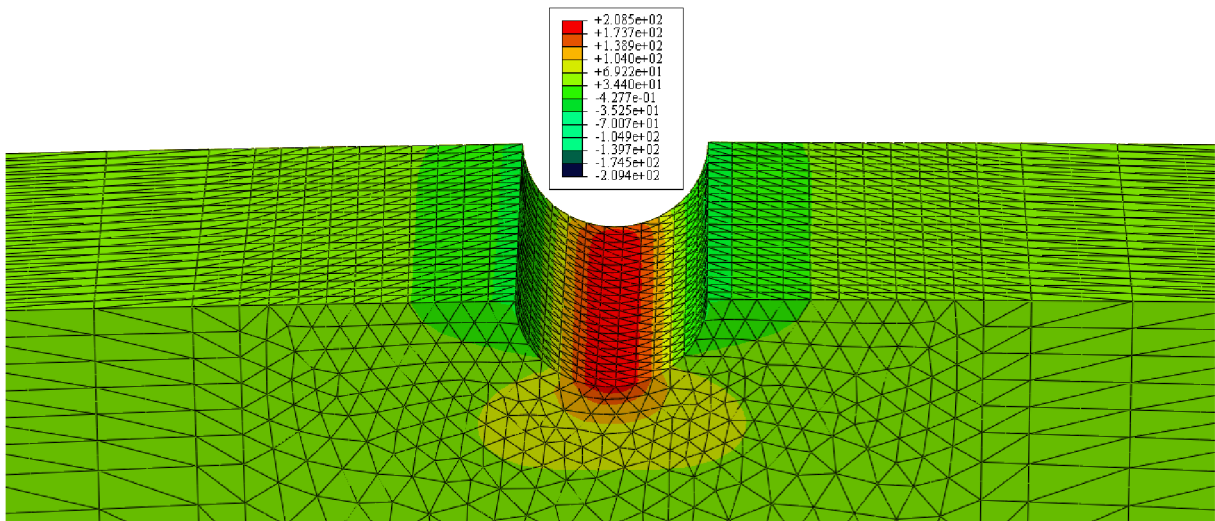
3.2.2 Řešení pomocí 3D modelu

Při řešení pomocí 3D modelu je využito jedné roviny symetrie, takže je sestrojena polovina modelu. Z tohoto důvodu je nutné model zatížit pouze poloviční hodnotou ohybového momentu ($M' = 150\text{ Nm}$). Přesíťovací pravidlo je přiřazeno oblasti v okolí vrubu (obr. 3.11). Indikátorem chyby je zvoleno redukované napětí. Cíle indikátoru chyby má být dosaženo pomocí metody jednotné chyby, přičemž její požadovaná hodnota je $\eta = 0,5\%$.



Obr. 3.11: Model rozdělený na tři oblasti.

Požadované chyby je dosaženo ve druhé iteraci, přičemž výsledné osově napětí má hodnotu $\sigma = 208,5 \text{ MPa}$ (obr. 3.12). Použitým prvkem je desetiuzlový kvadratický čtyřstěn s označením C3D10.



Obr. 3.12: Výsledné osově napětí.

3.3 Shrnutí

Při použití adaptivního přesíťování není potřeba zdlouhavě manuálně měnit velikost prvků, protože to program provede automaticky. Zároveň na základě předem definovaného indikátoru chyby s určitou hodnotou chyby vybere síť, která je dostatečně jemná pro dosažení přijatelného výsledku, ale není jemná příliš moc, což by vedlo k velkému nárůstu výpočtového času. Při namáhání tahem se všechny výsledné hodnoty liší v řádu jednotek MPa . Při namáhání ohybem se výsledná hodnota získaná pomocí 3D modelu od analytického řešení liší o necelé 3 MPa .

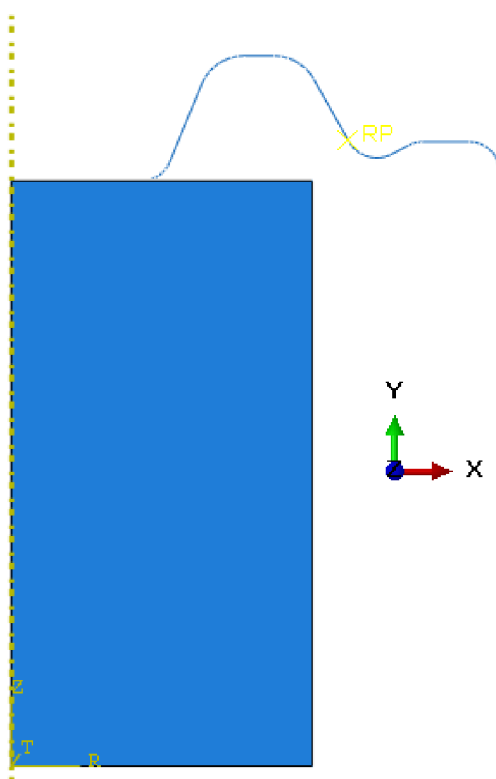
4 Úloha s využitím ALE adaptivního síťování

Tento příklad, při němž dochází k velkým deformacím, porovnává výsledky dosažené pomocí ALE adaptivního přesíťování a bez něj. Jedná se o simulaci tváření materiálu za studena. Z původního válcového polotovaru vznikne vlivem nástroje rotačně symetrická součást s poměrně komplikovaným tvarem.

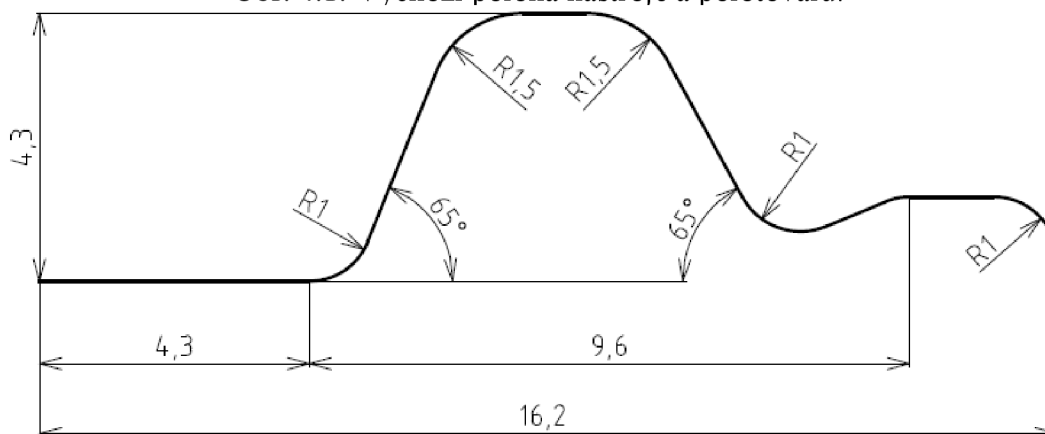
4.1 Výpočtový model

Původní poloha nástroje a polotovaru je na obr. 4.1. Je využito rotační symetrie a symetrie v rovině xz , tudíž stačí sestavit polovinu celkového modelu.

Nástroj modelovaný jako nedeformovatelná křivka se pohybuje proti směru osy y , čímž se váleček deformuje a dochází ke změně jeho tvaru. Celkový posuv nástroje je 15 mm. Geometrie a rozměry nástroje jsou na obr. 4.2. Váleček má průměr $d = 20 \text{ mm}$ a výšku $h = 40 \text{ mm}$.



Obr. 4.1: Výchozí poloha nástroje a polotovaru.



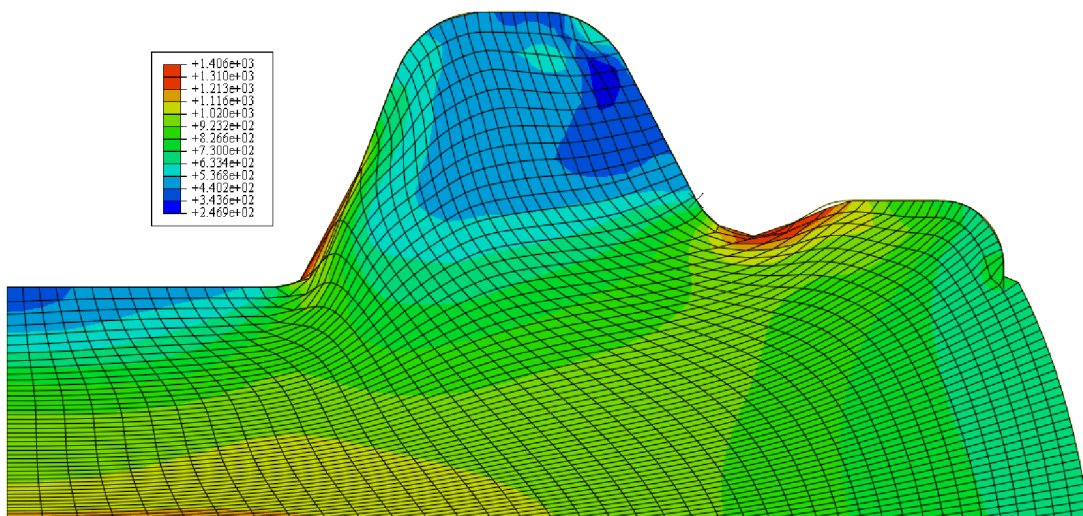
Obr. 4.2: Geometrie a rozměry nástroje v mm .

Je použit homogenní izotropní elasto-plastický model materiálu. Při definování materiálu v programu Abaqus je nutné zadat hustotu $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, Poissonův poměr $\mu = 0,33$, Youngův modul pružnosti $E = 210\,000 \text{ MPa}$, mez kluzu $R_e = 300 \text{ MPa}$ a také plastický modul $E_p = 500 \text{ MPa}$.

Pro diskretizaci nástroje je použit dvouuzlový lineární prvek RAX2. Celkový počet prvků sítě nástroje je 432, uzlů 433. U válce je použit čtyřuzlový bilineární osově symetrický čtyřúhelník s označením CAX4R. Celkový počet prvků je 3200, uzlů 3321. Celkový čas analýzy je $t = 0,1 \text{ s}$.

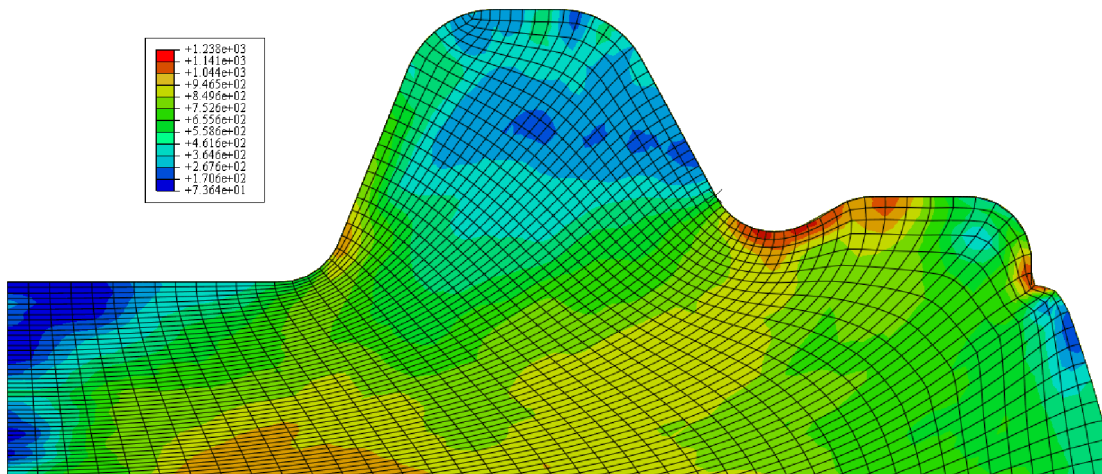
4.2 Porovnání výsledků

Při modelování bez ALE metody přesíťování dochází k velkému zdeformování prvků zejména v místech zaoblení (obr. 4.3), síť válcového tělesa se dostává kvůli velké deformaci až za nástroj a dochází k velké distorzi prvků. Celkový výpočtový čas je $t_{v1} = 5 \text{ h } 51 \text{ min}$.



Obr. 4.3: Výsledné redukované napětí.

Při provedení úlohy s aplikováním ALE metody přesíťování na váleček je dosaženo přesnějšího výsledku díky zhuštění sítě v kritických místech (obr. 4.4). Síť deformovaného válce v místech zaoblení kopíruje tvar nástroje. Celkový výpočtový čas je $t_{v2} = 4 \text{ h } 8 \text{ min}$, což je méně než při provedení analýzy bez přesíťování, které je provedeno celkem 20636krát (při každém pětistém kroku).



Obr. 4.4: Výsledné redukované napětí.

4.3 Shrnutí

Bez použití ALE metody přesíťování dochází zejména v místech zaoblení k velké distorzi prvků, které se dostávají až za nástroj a špatně kopírují jeho tvar. Při pohledu na obr. 4.4 je na první pohled zřejmá výhoda použití ALE metody přesíťování, díky které dochází ke zhušťování sítě v oblastech, ve kterých je to zapotřebí, tedy zejména oblasti zaoblení nástroje. Prvky sítě válečku nepodléhají velké distorzi a velmi dobře kopírují tvar nástroje. Z tohoto důvodu je dosaženo přesnějšího výsledku, konečné redukované napětí je téměř o 200 MPa nižší.

Závěr

Hlavním cílem této práce bylo shrnout základní informace o metodě konečných prvků, metodách přesítování dostupných v programu Abaqus a aplikovat je na několik základních úloh tak, aby byly na první pohled zřejmé výhody využití těchto metod.

První dvě kapitoly jsou věnovány rešerši výše zmíněné problematiky. Třetí kapitola se věnuje metodě adaptivního přesítování, která je znázorněna na dvou úlohách. V obou případech se jedná o prut čtvercového průřezu, který je namáhaný na tah a ohyb. Je zde výpočet pomocí 2D modelu, 3D modelu a také analytické řešení. Všechny výsledné hodnoty se liší v řádu jednotek MPa, tudíž lze výsledek považovat za uspokojivý. Hlavní výhodou použití metody adaptivního přesítování je nalezení sítě s předem definovanou chybou určité veličiny, přičemž je síť automaticky zjemňována, zejména v kritických oblastech (např. okolí vrubu). Výsledná síť se vyznačuje nejlepším poměrem přesnosti výsledku a výpočtového času.

V poslední kapitole je na jedné úloze představena ALE metoda přesítování. Při využití této metody nedochází k nárůstu počtu prvků, ale pouze k jejich přesouvání, čímž dojde ke zhuštění sítě v oblastech, kde je to zapotřebí. Díky tomu nedochází k veliké distorzi prvků a materiál deformované součásti snadno kopíruje geometrii nástroje, což je zřejmé na první pohled z obrázků výsledného redukovaného napětí. Analýza byla nejdříve provedena bez aplikování ALE metody přesítování a následně s ní.

Seznam použitých zdrojů

- [1] ZIENKIEWICZ, O.C a Y.K CHEUNG. *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1967, 272 s.
- [2] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech* [online]. Učební text FSI VUT Brno, 2011, 112 s. [cit 2018-04-27]. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/images/opory/MKP%20v%20inzenyrskych%20vypoctech/RIV.pdf>
- [3] ANDĚL, Tomáš. *Využití výpočtového prostředí Salome Meca při řešení úloh mechaniky těles* [online]. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016, 72 s. [cit 2018-04-27]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=128044
- [4] TURNER, M. J., R. W. CLOUGH, H. C. MATRIN a L. J. TOPP. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*. 23. 1956, (9), 805-823.
- [5] R. COURANT. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society* [online]. 1943, 49(1), 1-23. ISSN 0002-9904.
- [6] CLOUGH, R. W. The finite element in plane stress analysis. *American Society of Civil Engineers*. Pittsburgh. 1960, (2).
- [7] KOLÁŘ, Vladimír, Jiří KRATOCHVÍL, František LEITNER a Alexander ŽENÍŠEK. *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků*. 2. přeprac. vyd. Praha: SNTL, 1979, 542 s.
- [8] ONDRÁČEK, Emanuel. *Mechanika těles: pružnost a pevnost. II*. Vyd. 4., přeprac., V Akademickém nakladatelství CERM 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006, 262 s. ISBN 80-214-3260-8.
- [9] KOLÁŘ, Vladimír, Ivan NĚMEC a Viktor KANICKÝ. *FEM: principy a praxe metody konečných prvků*. Praha: Computer Press, 1997, 401 s. ISBN 80-7226-021-9.
- [10] *Abaqus documentation version 6.14*. Dassault Systèmes, 2014.
- [11] MASHAYEKHI, Mohammad. *Numerical Methods in Solid Mechanics: Adaptive meshing* [online]. [cit. 2018-05-02]. Dostupné z: <http://mashayekhi.iut.ac.ir/sites/mashayekhi.iut.ac.ir/files/u32/presentation8.pdf>
- [12] HAZELL, E. Numerical and Experimental Studies of Shallow Cone Penetration in Clay. 2008. Doctoral thesis. University of Oxford.
- [13] ZETTERBERG, Mikaela a Jonas FALESKOG. A critical overview of machining simulations in ABAQUS. 2014.
- [14] JANÍČEK, Přemysl. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. Brno: CERM, 2004, 287 s. ISBN 80-214-2592-X.