VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STAVEBNÍ
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

STATIKA, DYNAMIKA A KINEMATIKA KONTAKTŮ TĚLES

STATICS, DYNAMICS AND KINEMATICS OF MULTIBODY CONTACTS

DISERTAČNÍ PRÁCE
DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE Ing. HYNEK ŠTEKBAUER
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE doc. Ing. IVAN NĚMEC, CSc.
SUPERVISOR

BRNO 2023

KLÍČOVÁ SLOVA

kontakt, metoda konečných prvků, explicitní dynamika, kladkový element, kontaktní vazby, penaltová metoda, metoda Lagrangeových multiplikátorů

KEYWORDS

contact, finite element method, explicit dynamics, pulley element, contact constraints, penalty method, method of Lagrange Multipliers

Ústav stavební mechaniky
Fakulta stavební
Vysoké učení technické v Brně
Česká republika

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

Ing. Hynek Štekbauer *Statika, dynamika a kinematika kontaktů těles*. Brno, 2023. 102 s. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce doc. Ing. Ivan Němec, CSc.

OBSAH

1 ÚVOD

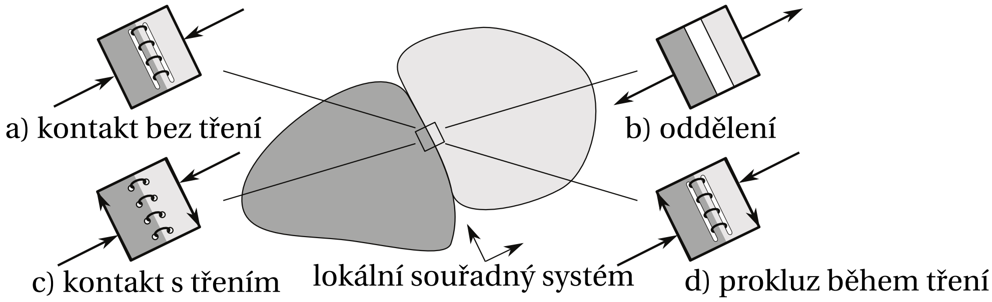
Mechanickým kontaktem rozumíme dotyk dvou či více těles, během kterého dochází k různým typům interakce, jako je přenos hybnosti, tepla, či jiných druhů energie [19]. Tělesa se během pohybu mohou libovolně dotýkat svými povrchy, nemůže však docházet k jejich vzájemné penetraci. Tuto základní charakteristiku mechanického kontaktu nazýváme podmínkou nepenetrability či neprostupnosti těles. V mechanice deformovatelných těles představuje kontakt obzvláště náročný problém. Lze na něj nahlížet jako na zvláštní druh okrajové podmínky, která ovšem působí na předem neznámé hranici, má neznámou velikost a musí splňovat třetí Newtonův zákon akce a reakce [36]. Proto se však nejedná o okrajovou podmínku v pravém slova smyslu, ale její stanovení je součástí řešení. To navíc komplikuje fakt, že na kontaktním rozhraní dochází k diskontinuitě posunutí.

Podobně jako u jiných problémů matematické fyziky popsaných parciálními diferenciálními rovnicemi, existuje jen omezené množství analytických řešení úloh lineární elasticity s kontaktem [14, 19, 50]. Proto se v inženýrské praxi k řešení často využívá numerických přístupů, nejčastěji na bázi metody konečných prvků (MKP) [4, 32]. MKP je metoda prostorové diskretizace parciálních diferenciálních rovnic. V širším slova smyslu se v inženýrské komunitě pod pojmem MKP rozumí víceúčelový softwarový nástroj pro řešení multi-fyzikálních úloh. Ve stavební praxi se MKP využívá nejčastěji pro řešení statických a dynamických, lineárních i nelineárních úloh mechaniky kontinua. A je to právě ošetření kontaktních podmínek, které dosud představuje otevřený problém v nelineární konečnoprvkové analýze [63].

Z pohledu MKP se kontakt dělí podle typu diskretizace na: node-to-node, node-to-segment a segment-to-segment. Diskretizace typu node-to-node [60] předpokládá konformní konečnoprvkové sítě, tj. sítě jejichž hraniční uzly si odpovídají. Obecnější případ nekonformních sítí ošetřuje diskretizace typu node-to-segment [65, 67], která zabraňuje penetraci uzlu na jedné straně kontaktního rozhraní do segmentu, tj. hranice elementu, na straně druhé. Nejpokročilejším typem diskretizace je segment-to-segment [30, 41, 42, 67], která kontaktní podmínky formuluje v integrálním smyslu.

Bez ohledu na typ diskretizace lze mechanický kontakt rozdělit na jednostranný (unilaterální) a dvoustranný (bilaterální) [63]. Rozhraní jednostranného kontaktu je schopno přenést pouze tlakové zatížení. Při tahovém namáhání dochází k oddělení těles, jak je schematicky zobrazeno na obrázku 1.1b. Naopak, dvoustranný kontakt je schopen přenést jak tlakové tak tahové napětí, viz obrázek 1.1a. Oba tyto základní typy kontaktu mohou nebo nemusí zohledňovat tření na kontaktním rozhraní. Pokud není uvažováno tření, tak se tělesa mohou volně bez odporu pohybovat v tečném směru ke kontaktnímu rozhraní, tj. nevznikají žádné tečné síly, viz opět obrázek 1.1a. A naopak, při uvažování tření vznikají tečné síly, jejichž velikost je svázána s tečnými posuvy konstitutivním modelem tření. Nejznámějším takovým modelem je Coulombovo tření, které rozlišuje dva stavy — slepení a skluz. Pokud tečné síly nepřekročí jistou mez, je tření ve stavu slepení, což schematicky ukazuje obrázek 1.1c. Při překročení této meze dojde ke skluzu, viz obrázek 1.1d. Při ošetření třecího kontaktu v MKP se pak rozlišuje mezi třením s malými nebo velkými skluzy podle toho, zda může docházet k tečnému pohybu v rámci jednoho či několika konečných prvků, které kontaktní rozhraní diskretizují. Je důležité poznamenat, že kontaktní rozhraní díky třetímu Newtonovu zákonu akce a reakce nekoná mechanickou práci. Jedinou výjimkou je stav skluzu, během kterého tečné síly konají práci na skluzech a dochází tak k disipaci mechanické energie.

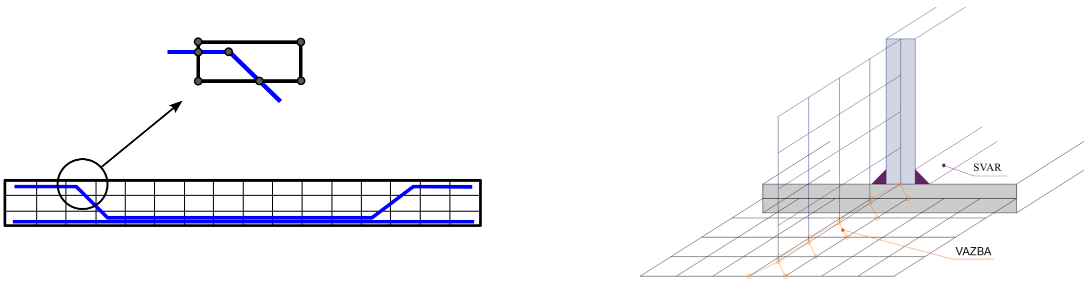
Za speciální typ kontaktu lze považovat případ, kdy kritická mez tečného napětí není definována a tělesa jsou tak trvale spojena bez možnosti prokluzu. Toho se nejčastěji využívá pro spo-



Obrázek 1.1: Analogie mezi kontaktem a vnitřním dělením tělesa: a) kontakt bez tření přenáší pouze tlakové síly v lokálním souřadném systému, b) jakýkoliv tah vede k vymizení kontaktního rozhraní, c) kontakt se třením může přenášet smyková napětí, d) při Coulombově tření, ve stavu bez prokluzu zde není žádný prokluz, dokud není dosaženo kritického smykového napětí. [63]

jování konformních resp. nekonformních konečnoprvkových sítí. V případě konformních sítí lze jednotlivé vazbové podmínky předepisovat v podobě lineárních rovnic pro odpovídající si páry uzlů. Poznamenejme, že v komerčních systémech jako je *NASTRAN* [44], *ANSYS* [1] a další, se tento typ vazeb označuje termínem multi-point constraint.

V případě nekonformních sítí nachází tento typu kontaktu široké uplatnění nejen pro modelování nejrůznějších konstrukčních spojů (lepené, svarové, nýtové, šroubové, apod.), ale i pro modelování komplexnějších problémů stavební praxe, jako jsou např. železobetonové kompozity. Vybrané příklady jsou zobrazeny na obrázku 1.2, kde vlevo vidíme model provázání ocelové výztuže s betonovou částí konstrukce v systému *ATENA* [18]. Vpravo je pak příklad svarového spoje modelovaného v systému *IDEA StatiCa* [47].



a) připojení výztuže [18]

b) nahrazení svaru [47]

Obrázek 1.2: Možná využití pevného kontaktu/vazby při modelování konstrukcí.

Na obecnější úrovni lze problém lineární i nelineární elasticity s kontaktem kategorizovat jako optimalizační úlohu s vázaným extrémem [23]. Existuje celá řada metod řešení, ovšem ve výpočtové mechanice kontaktu se zdaleka nejčastěji používá penaltová metoda [16, 20, 46] a metoda Lagrangeových multiplikátorů [17, 40, 63]. Princip penaltové metody spočívá v převedení optimalizační úlohy s vázaným extrémem na úlohu s volným extrémem tak, že se vazbová podmínka vynásobí pokutovým parametrem a přičte se k cílové funkci. Tato metoda je oblíbená pro svou jednoduchost a výpočetní nenáročnost, protože nezvyšuje počet neznámých. Nevýhodou je potřeba volit hodnotu penaltového parametru, která je závislá na řešené úloze. Příliš malá hodnota způsobuje nepřesné splnění vazbových podmínek a naopak příliš velká hodnota vede na špatně podmíněný systém lineárních rovnic.

Metoda Lagrangeových multiplikátorů patří mezi klasické metody pro řešení optimalizačních úloh s vázaným extrémem. Na rozdíl od penaltové metody vynucuje vazbové podmínky přesně. Za nevýhodu této metody se někdy považuje fakt, že zvyšuje počet neznámých a vede na indefinitní systém lineárních rovnic, tj. problém sedlového bodu, pro jehož řešení je potřeba využít odpovídajících řešičů.

Neméně důležitou oblastí výpočtové mechaniky kontaktu je dynamický kontakt. Rychlé rázové děje a nelineární post-stabilitní analýzy, jako je např. náraz letounu do stavební konstrukce, se nejčastěji v časové oblasti diskretizují explicitními časovými schématy [58]. Výhodou explicitní časové integrace je, že v případě diagonální matice hmotnosti se systém lineárních rovnic stává lineárně nezávislým a každou rovnici tak lze řešit samostatně, čehož lze využít k masivní paralelizaci řešení. Oproti tomu hlavní nevýhodou explicitních časových schémat je jejich podmíněná stabilita, která limituje maximální velikost časového kroku, se kterým lze stabilně integrovat. Dá se ukázat, že kritický časový krok je přímo úměrný nejmenší periodě celého systému resp. maximální vlastní frekvenci konečnoprvkové sítě [4]. Kontaktní rozhraní je velmi často kritickým místem, které určuje kritický časový krok celého systému. S rostoucí tuhostí kontaktního rozhraní se snižuje perioda systému, resp. roste jeho největší vlastní frekvence, a úměrně tomu se snižuje kritický časový krok. Limitním případem je dokonale tuhý kontakt, pro který je kritický časový krok nulový a v takovém případě nelze stabilně integrovat.

Z výše popsaného je patrné, že ošetření explicitního dynamického kontaktu představuje otevřený problém, jehož vyřešení je hlavní ambicí této disertační práce. Předkládaný text je strukturován do 6 kapitol včetně úvodu a závěru. Nejprve je shrnut současný stav poznání v relevantních oblastech výpočtové mechaniky. Na základě rešerše odborné literatury bylo identifikováno několik cílů této disertační práce, které jsou představeny v kapitola 3. V rámci metodologie jsou podrobněji popsány použité metody a ukázány jejich slabiny, které jsou řešeny v hlavní části této práce. V nejobsáhlejší kapitole 4 jsou prezentovány vlastní výsledky výzkumu, kterých bylo v rámci disertační práce dosaženo. Jsou zde popsány principy nově navržených metod a vylepšení stávajících přístupů, které byly implementovány v rámci řešiče na bázi konečných prvků, jenž je využíván jako výpočetní jádro v komerčních programech *Dlubal RFEM* a *SCIA Engineer*. Implementace byla následně verifikována na celé řadě numerických příkladů, které prokazují přesnost navržených metod a správnost jejich implementace.

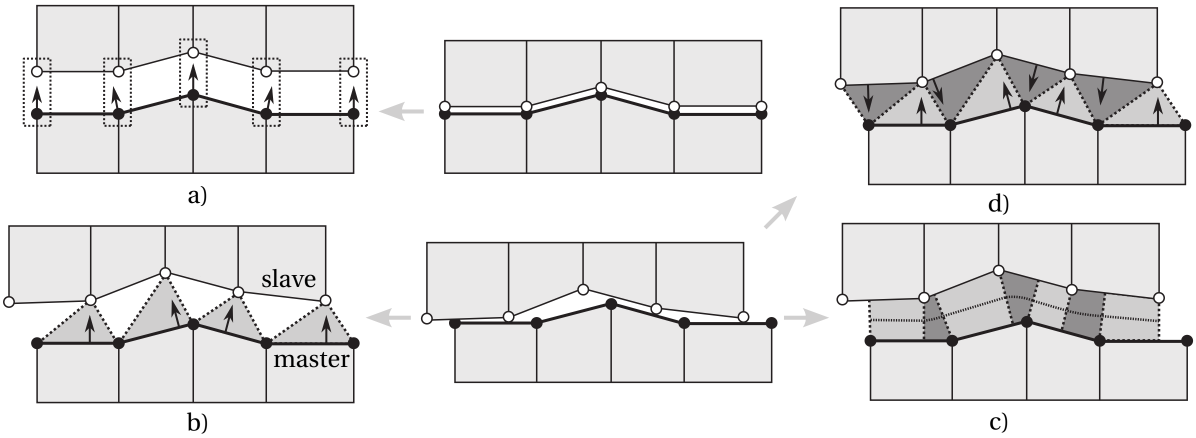
2 MODELOVÁNÍ KONTAKTU

Pro výpočet kontaktních úloh v metodě konečných prvků je klíčová diskretizace kontaktu, která určuje kontaktní elementy přenášející síly mezi tělesy. Existují různé způsoby jak diskretizovat rozhraní mezi povrchy, které definují kontakt a jsou sami o sobě již diskretizovány. Rozlišujeme tři typy diskretizace:

- Node-to-node (NTN),
- Node-to-segment (NTS),
- Segment-to-segment (STS).

NTN je nejjednodušší [24], nejstarší a stabilní diskretizace [9] je použitelná pouze pro konformní sítě, kde má každý uzel na jednom kontaktním povrchu odpovídající uzel na druhém kontaktním povrchu [63], jedná se tedy pouze o propojení mezi dvojicí uzlů, jak je znázorněno na obrázku 2.1a. Směr kontaktu pro každou dvojici uzlů je určen minimálně jedním vektorem, obvykle normálou jednoho z povrchů. Kontakt NTN může být využit pouze v případě malých deformací. Tento typ diskretizace přenáší kontaktní napětí korektně přes kontaktní rozhraní [49] a splňuje tak tzv. patch test.

Diskretizaci NTS lze již použít pro velké deformace [12]. Jedná se o víceúčelovou diskretizační techniku [15], použitelnou i pro nekonformní sítě. Kontakt je tvořen kontaktními dvoji-



Obrázek 2.1: Znázornění různých druhů diskretizací kontaktů: a) node-to-node, dvojice uzlů a směr kontaktu; b) node-to-segment, slave uzly a jim příslušící master segmenty; c) segment-to-segment, kontaktní elementy a mezilehlá integrační linie; d) contact domain diskretizace, kontaktní elementy [63].

cemi sestávajících se z uzlu (slave) a segmentu (master), na který je uzel projektován (viz obrázek 2.1b). Takováto projekce může být problematická z pohledu citlivosti řešení na náhlý přechod slave uzlu z jednoho segmentu na jiný v průběhu výpočtu, lze ji však vylepšit za pomoci vyhlazování master segmentů [57]. NTS ve své základní formulaci neprochází patch testem [8, 49], tento nedostatek lze však řešit využitím two-pass techniky [12], kdy jsou kontaktní dvojice hledány dvakrát, protože oba povrchy slouží jako slave i master k vytvoření dvou vrstev kontaktních elementů. Tato technika ale může mýt příčinou přeurčitosti soustavy [38], nesplňuje takzvanou Babuška–Brezziho podmínku a také může vést k tzv. locking problému [23]. Podrobnější informace o patch testu kontaktů pro NTS diskretizaci lze nalézt v [6]. Existují i modifikace NTS diskretizace, které patch testem prochází pro penaltovou metodu [55, 65] i pro metodu Lagrangeových multiplikátorů [55]. Technika contact domain navrhnuta v [13, 38], je založena na symetrické NTS diskretizaci a tvarových funkcích kontaktních elementů. Zóna mezi kontaktními povrchy je vyplněna kontaktními prvky (obrázek 2.1d) a tvoří tak vrstvu, ve které je kontaktní problém řešen. Tato formulace je stabilní a prochází patch testem, ale její trojrozměrnou implementaci nelze aplikovat pro libovolně dělené kontaktní povrchy [37].

STS diskretizace znázorněná na obrázku 2.1c byla prvně navržena v [45] a následně pro dvourozměrný příklad definována v [67]. Kontakt je definován přes celé elementy v kontaktu. Diskretizace byla úspěšně použita v kombinaci s mortar metodou pro neshodné sítě inspirované domain decomposition metodou [52]. Jedná se o stabilní techniku procházející patch testem, ale její implementace pro všeobecné příklady představuje problém [30, 41, 42, 62, 61]. Samostatná diskretizační technika je potřeba pro Nitscheho metodu [5, 56], kde Gaussovy body jednoho povrchu hrají roli slave uzlů. Porovnání Nitscheho a mortar techniky lze nalézt v [10]. Mortar metoda spočívá buď v zavedení mezilehlé kontaktní plochy, kde je definováno kontaktní napětí, nebo využití jednoho z kontaktních povrchů jako mortar plochy [54]. Tato formulace vede na popis kontaktu se třením pro velké prokluzy a velké deformace, prochází patch testem pro rozdílné sítě a na rozdíl od NTS netrpí na locking problém [63]. Další využití STS přístupu bylo prezentováno v [40], kde jsou na mezilehlém kontaktním povrchu definovány uzly, prostřednictvím kterých jsou vynuceny kontaktní podmínky na uzlech příslušných segmentů, za pomoci Lagrangeových multiplikátorů.

I přes zmíněné nedostatky je diskretizace NTS nejpoužívanější pro popis kontaktu mezi rozdílnými sítěmi konečných prvků [66] a stále se rozšiřuje její aplikace na širší pole úloh [28, 54].

V této práci jsou využity diskretizace NTN a NTS.

3 CÍLE DISERTAČNÍ PRÁCE

Cíle této disertační práce byly na základě spolupráce autora s firmou *FEM consulting* dány především požadavky stavební praxe po konkrétních řešeních jež by umožnila lepší a přesnější výpočty stavebních a strojních konstrukcí. Tématem práce jsou statika, dynamika a kinematika kontaktů těles, a právě vývoj a implementace kontaktů do řešiče na bázi konečných prvků dali vzniknout těmto konkrétním cílům:

1. ***Návrh nových metod pro explicitní dynamický kontakt.***

   Budou navrženy nové obecné metody pro vynucení vazbových podmínek kontaktu v explicitní dynamice tak, aby bylo možné integrovat vyšším časovým krokem při zachování stability řešení a zároveň umožnit řešit pohybové rovnice jako soustavu nezávislých rovnic, což je hlavní výhoda explicitních metod. Konvenční metody jako penaltová metoda či metoda Langangeových multiplikátorů budou nahrazeny jinými přístupy. První navržená metoda bude vycházet z kinematiky entit, které jsou v kontaktu a z obecných kinematických principů. Druhá metoda bude založena na výpočtu změny energie, jež je způsobena kontaktními silami na rozhraní kontaktu.

2. ***Návrh originálního kladkového konečnoprvkového elementu.***

   Budou definovány základní vazbové podmínky, které mají široké využití v rámci modelování konstrukcí za pomoci metody konečných prvků. S využitím těchto základních vazeb budou definovány rovnice pro vytvoření kladkového konečněprvkového elementu simulující mechanické chování kladky se zanedbáním vlivu poloměru, jenž umožní efektivní výpočet modelů umožňujících takovéto zjednodušení. Správnost řešení bude dokumentována na porovnání s analytickým řešením. Element kladky bude dále rozšířen o možnost zohlednění geometrické nelinearity a také nelinearity v podobě tření.

3. ***Implementace a verifikace navržených metod do řešiče na bázi konečných prvků.***

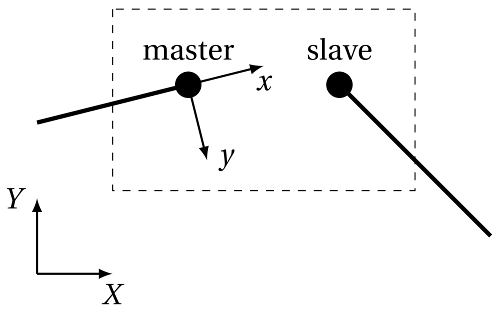
   Všechny teoreticky popsané přístupy uvedené v této práci budou zapracovány do komplexního systému firmy *FEM consulting*, což sebou obnáší i návrh vhodných definic vstupních a výstupních rozhraní pro zadávání modelu i zobrazování dopočítaných výsledků. V práci budou uvedeny příklady vypočítané prostřednictvím vyvinutých funkcí a demonstrují tak implementaci navržených řešení.

4 VÝSLEDKY

Tuto kapitolu lze považovat za ústřední část celé disertační práce, ve které jsou podrobně prezentovány všechny výsledky, kterých bylo dosaženo ve snaze naplnit cíle definované v kapitole 3. Námětem k výzkumu byla především autorova předchozí zkušenost s řešením kontaktních úloh a vývojem numerických metod v rámci konečnoprvkového řešiče vyvíjeného firmou *FEM consulting*. Při snaze rozšířit stávající ošetření kontaktu založeného na diskretizaci typu node-to-node ze statické rovněž na dynamickou analýzu se nepříznivě projevil vliv podmíněné stability explicitní časové integrace. Konvenční metody pro vynucení kontaktních podmínek nejsou pro explicitní dynamiku optimální. Penaltová metoda ztrácí schopnost konvergence se vzrůstající hodnotou penaltového parametru a řešení často vykazuje falešné oscilace kinematických veličin i kontaktních sil. Kritický časový krok je navíc nepřímo úměrný velikosti penalty, což zvyšuje časové nároky numerického řešení. Hlavní nevýhodou metody Lagrangeových multiplikátorů v explicitní dynamice je fakt, že v každém časovém kroku je třeba řešit implicitně soustavu rovnic, což zpomaluje řešení a znehodnocuje to tak hlavní výhodu explicitního přístupu. Toto vedlo autora k návrhu vlastního řešení právě popsaného problému, které je podrobně prezentováno v této kapitole. Nejprve je problematika stability explicitní integrace řešena pro případ kontaktní diskretizace typu node-to-node v podkapitole 4.1. Dále je popsána implementace kontaktní diskretizace typu node-to-segment pro statické úlohy v podkapitole 4.2, aby mohla být v další části práce rozšířena také pro dynamické problémy. Následuje proto detailní popis výpočtu okamžiku kontaktu, který je esenciální pro dvě nově navržené metody řešící dynamický kontakt typu node-to-segment, a sice kinematického pojetí kontaktu popsaného v podkapitole 4.3 a metody založené na bilanci energie v podkapitole 4.4. Neméně důležitou součástí práce je podkapitola 4.5, která je věnovaná problematice vazbových podmínek. Výzkum v této oblasti vyústil v definici vlastního kladkového elementu popsaném v oddílu 4.5.1.

4.1 KONTAKT NODE-TO-NODE

Node-to-node diskretizace je jednoduchá a stabilní diskretizační metoda [66] pro shodné sítě [63] a je použita v programech *RFEM* a *SCIA* pro modelování kloubů. Node-to-node kontakt je definován dvojicí uzlů (master a slave) a transformační maticí, která určuje směr kloubu (viz obrázek 4.1).



Obrázek 4.1: Node-to-node kontakt (master a slave) a lokální souřadný systém v master uzlu, charakterizující směr kloubu [78].

Lokální matice tuhosti kloubu je dána buď penaltovou metodou (podkapitola **??**) jako

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A}, \tag{4.1}$$

kde

$$\mathbf{W} = \mathrm{diag}(w_1, ..., w_6), \tag{4.2}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I_3} & 0 & -\mathbf{I_3} & 0 \\ 0 & \mathbf{I_3} & 0 & -\mathbf{I_3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

kde $w_1, ..., w_n$ jsou váhy penalty pro tuhé směry kloubu, případně lze metodou Lagrangeových multiplikátorů určit lokální matici tuhosti kloubu stejnou maticí **A** jako v (4.3).

V případě potřeby lze matici tuhosti kontaktu **K** upravit v příslušném stupni volnosti, a nahradit váhu penalty w libovolnou tuhostí c pro libovolný směr. Nahradíme-li první stupeň volnosti w_1 v matici (4.2) tuhostí c získáme

$$\mathbf{W} = \mathrm{diag}(c, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6). \tag{4.4}$$

Transformační matice kloubu

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

je složena z matic směrových kosinů **T** mezi globálním a lokálním souřadným systémem

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C_{x,X} & C_{x,Y} & C_{x,Z} \\ C_{y,X} & C_{y,Y} & C_{y,Z} \\ C_{z,X} & C_{z,Y} & C_{z,Z} \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

kde $C_{i,J}$ znamená kosinus svíraný osami i a J. Vzdálenost mezi uzly je zohledněna v transformační matici rozšířené o matici excentricity **E**

$$\mathbf{T}_{RE} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{TE} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Matice excentricity

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & e_z & -e_y \\ -e_z & 0 & e_x \\ e_y & -e_x & 0 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

se skládá z excentricit a je antisymetrická.

Obecně lze říci, že v konstrukci máme tři základní typy kloubů: tuhý kloub; tuhý kloub lineárně poddajný v určitých směrech; nelineární kloub.

Prvním je tuhý kloub simulující nekonečně tuhé spojení dvou uzlů. Tuhý kloub nemá sám o sobě v metodě konečných prvků žádný smysl, protože tento typ spojení může být jednoduše modelován prvky se společným uzlem. Je však zapotřebí, pokud jsou některé stupně volnosti kloubu poddajné. Druhým typem je lineární kloub s danou tuhostí v daném stupni volnosti. Třetím a nejobecnějším typem je nelineární kloub, jehož chování může být předepsáno funkcí nebo závislostí jednoho směru na jiném stupni volnosti (např. tření).

4.1.1 Modifikace algoritmu z důvodu stability

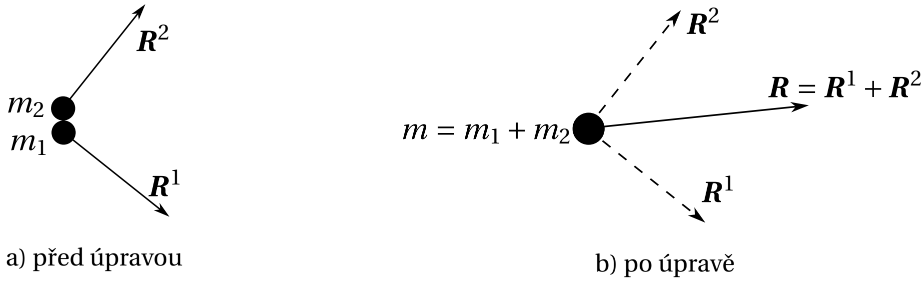
Explicitní metoda je pouze podmíněně stabilní. *Courantovo-Friedrichsovo-Levyho* kritérium stability pro časový krok mezi dvojicí uzlů je dáno jejich vzdáleností l, tuhostí $\mathbf{k}$ a hmotností $\mathbf{m}$ v uzlech a pro prut délky l lze napsat

$$\Delta t \leq \frac{l}{\sqrt{\frac{\max(\mathbf{k})}{\min(\mathbf{m})}}}. \tag{4.9}$$

Toto kritérium stability dokumentuje problém, jenž nastává při tuhém spojení dvou uzlů. Dosadíme-li do rovnice (4.9) nulovou délku $l = 0$ m, pak pro splnění kritéria stability musíme počítat s nulovým časovým krokem. To je nemožné a i při malých vzdálenostech mezi uzly dostáváme při splnění tohoto kritéria neprakticky malý časový krok. Proto byla navržena modifikace algoritmu, poprvé autorem představená v [78], která umožňuje tuhému kloubu modelovanému pomocí node-to-node kontaktu korektní a časově nenáročný výpočet explicitní metodou.

Základní myšlenkou této modifikace je ztotožnění sil a hmot působící na dvojici kontaktních uzlů, pokud je kontakt vyhodnocen jako tuhý. Grafické znázornění pro kontakt tuhý ve všech směrech ukazuje obrázek 4.2.

Horní index $(\bullet)^j$ je využitý k popisu prvního a druhého uzlu v node-to-node kontaktu a nabývá tak pouze hodnot 1 a 2. Spodní index $(\bullet)_G$ značí globální souřadný systém, L lokální souřadný systém a index $(\bullet)_{temp}$ dočasnou proměnnou.



Obrázek 4.2: Ztotožnění sil a hmot.

$$\mathbf{R}_G^{j\,T} = \begin{bmatrix} r_{ux} & r_{uy} & r_{uz} & r_{\varphi x} & r_{\varphi y} & r_{\varphi z} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$\mathbf{R}_L^j = \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{R}_G^j \tag{4.11}$$

$$\mathbf{R}_{temp}^j = \mathbf{R}_L^j \tag{4.12}$$

Pro všechny tuhé směry q v $\mathbf{R}_L^j$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_L^1(q) &= \mathbf{R}_L^1(q) + \mathbf{R}_{temp}^2(q), \\ \mathbf{R}_L^2(q) &= \mathbf{R}_L^2(q) + \mathbf{R}_{temp}^1(q), \end{aligned} \tag{4.13}$$

kde $q \in \langle 1;6 \rangle \subset \mathbb{N}$ pro úlohu s šesti stupni volnosti v uzlů, přičemž index q reprezentuje složky vektoru (od 1 pro r_{ux} po 6 pro $r_{\varphi z}$).

$$\mathbf{R}_G^j = \mathbf{T}_R{}^T \cdot \mathbf{R}_L^j \tag{4.14}$$

Podobná operace je provedena i s hmotami.

$$\mathbf{M}_L^j = \mathrm{diag}(m_{Lx}, m_{Ly}, m_{Lz}, m_{L\varphi x}, m_{L\varphi y}, m_{L\varphi z}) \tag{4.15}$$

$$\mathbf{M}_L^j = \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{M}_G^j \cdot \mathbf{T}_R \mathbf{F}^T. \tag{4.16}$$

Matice $\mathbf{M}_L^j$ není bezpodmínečně diagonální, proto je ji v případě potřeby nutno diagonalizovat. Její hodnoty jsou uloženy v dočasném poli pro následné použití

$$\mathbf{M}_{temp}^j = \mathbf{M}_L^j. \tag{4.17}$$

Pro všechny tuhé směry q v $\mathbf{M}_L^j$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_L^1[q,q] &= \mathbf{M}_L^1[q,q] + \mathbf{M}_{temp}^2[q,q], \\ \mathbf{M}_L^2[q,q] &= \mathbf{M}_L^2[q,q] + \mathbf{M}_{temp}^1[q,q], \end{aligned} \tag{4.18}$$

kde $q \in \langle 1;6 \rangle \subset \mathbb{N}$. Hmoty jsou poté transformovány nazpět do globálního souřadného systému a diagonalizovány v případě potřeby

$$\mathbf{M}_G^j = \mathbf{T}_R{}^T \cdot \mathbf{M}_L^j \cdot \mathbf{T}_R. \tag{4.19}$$

Po takovéto modifikaci jsou dopočítány deformace za využití metody centrálních diferencí. Dále jsou popsány modifikace potřebné pro některé specifické případy. Jedná se například o modifikaci pro klouby, které jsou v některých směrech tuhé a bez tuhých podpor v jakémkoliv směru. Tuze podepřené a podmínečně tuze podepřené uzly musí být také speciálně ošetřeny. Deformace vypočítané za pomoci metody centrálních diferencí jsou transformovány do lokálního souřadného systému kloubu a vyšetřeny na dva speciální případy.

$$\mathbf{U}_G^{j\,T} = \begin{bmatrix} u_x^j & u_y^j & u_z^j & \varphi_x^j & \varphi_y^j & \varphi_z^j \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

$$\mathbf{U}_L^j = \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{U}_G^j \tag{4.21}$$

$$\mathbf{U}_{temp}^j = \mathbf{U}_L^j \tag{4.22}$$

Nejprve je provedena identifikace podepřených kloubů v daném stupni volnosti, poté je deformace z tuze podepřených uzlů přisouzena druhému z dvojice uzlů ve všech tuhých směrech q kloubu. Pokud je tuze podepřen druhý uzel

$$\mathbf{U}_L^1(q) = \mathbf{U}_{temp}^2(q), \tag{4.23}$$

a obráceně, pokud je tuze podepřen první uzel

$$\mathbf{U}_L^2(q) = \mathbf{U}_{temp}^1(q). \tag{4.24}$$

Poté jsou vyhodnoceny nelineární klouby zadané funkcí. Uživatel může definovat limitní tuhost, která je brána jako tuhá.

Tuhá větev funkce, s tuhostí přesahující limitní tuhost, je vyobrazena na obrázku 4.3. Pokud deformace d mezi kontaktními uzly překročí limitní hodnotu $d_{\lim}$ ($d_{\lim}$ = 1 mm pro obrázek 4.3), kde d je x-tý element vektoru $\mathbf{D}$

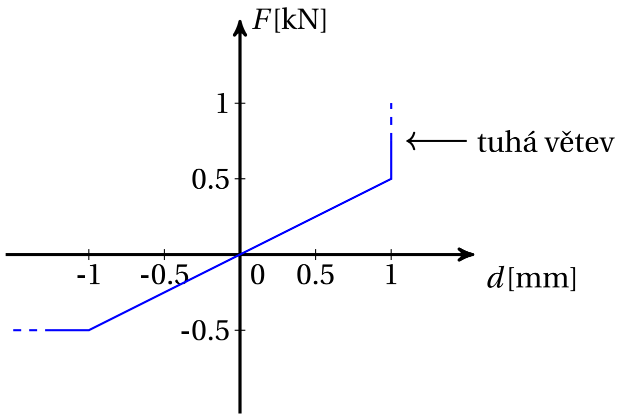
$$\mathbf{D} = \mathbf{U}_L^2 - \mathbf{U}_L^1, \tag{4.25}$$

jsou lokální deformace přepočítány tak, aby splňovaly tuto limitní hodnotu $d_{\lim}$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_L^1(x) &= \mathbf{U}_L^1(x) \cdot \frac{d_{\lim}}{d}, \\ \mathbf{U}_L^2(x) &= \mathbf{U}_L^2(x) \cdot \frac{d_{\lim}}{d}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

a transformovány zpět do globálního souřadného systému

$$\mathbf{U}_G^j = \mathbf{T}_R{}^T \cdot \mathbf{U}_L^j. \tag{4.27}$$



Obrázek 4.3: Funkce nelineárního kloubu s tuhou větví (větev je tužší než limitní tuhost) ukazuje závislost síly F na posunutí d v daném směru. Podobnou závislost lze předepsat pro moment a pootočení. [78]

Zrychlení a rychlosti je potřeba přepočítat pro modifikované posuny $\mathbf{U}_G^j$ zpětně

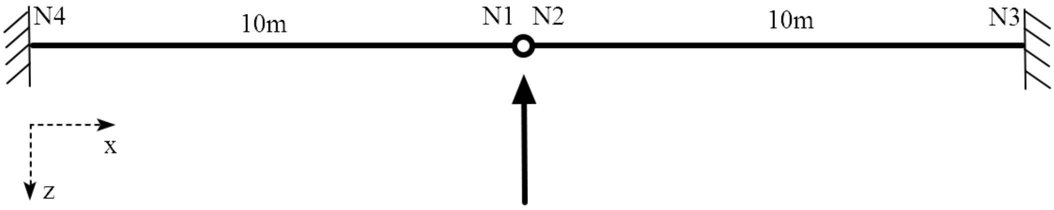
$$\dot{u}_{n+\frac{1}{2}}^j = \frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{\Delta t_{n+\frac{1}{2}}} \tag{4.28}$$

$$\Delta \dot{u}^j = \dot{u}_{n+\frac{1}{2}}^j - \dot{u}_{n-\frac{1}{2}}^j \tag{4.29}$$

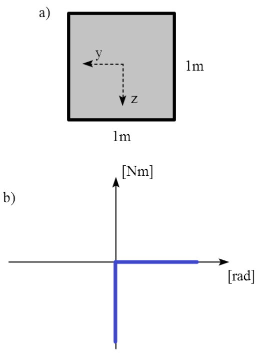
$$\ddot{u}_n^j = \frac{\Delta \dot{u}^j}{\Delta t_n}. \tag{4.30}$$

Příklad

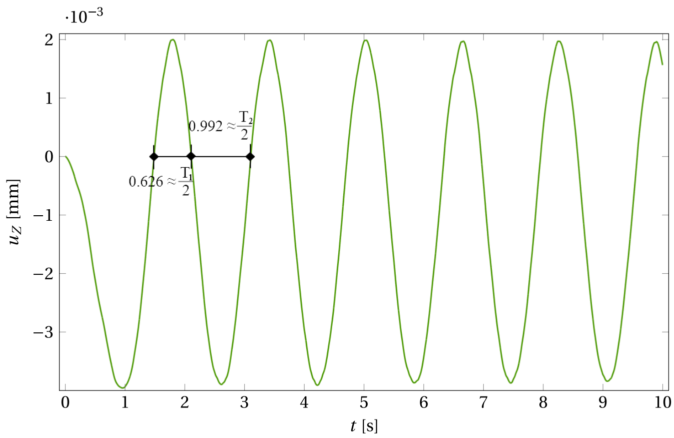
Výpočetní model je převzat z [75] a popsán na obrázku 4.4. Pruty jsou definovány čtvercovým průřezem (obrázek 4.5a) a materiálem s $E = 1$ MPa a $\nu = 0.5$. Kloub mezi pruty (mezi uzly N1 a N2) je modelován jako tuhý v translačních směrech a rotační směry φ_x a φ_z jsou volné. Ve směru φ_y je předepsána nelinearita zadána grafem (obrázek 4.5b). Vlastní frekvence pro posun kloubu ve směru Z je $f_1 = 0.505$ Hz pro negativní část funkce a $f_2 = 0.797$ Hz pro pozitivní část funkce. Kloub je zatížen silou -1 N ve směru Z po dobu 0.991 s. Výpočetní časový krok je 0.001 s.



Obrázek 4.4: Model dvou konzol spojených nelineárním kloubem mezi uzly N1 a N2. Uzel N2 je zatížen silou 1 N ve směru -Z. [75]



Obrázek 4.5: Čtvercový průřez s délkou strany 1 m nalevo (a) a graf nelineárního kloubu napravo (b).



Obrázek 4.6: Výsledek posunutí uzlu N1 a N2 ve směru Z s vyznačenými časy pro tuhé a volné chování kloubu [75].

Data převzatá z [75] jsou zobrazeny na obrázku 4.6. Výsledky příkladu ukazují správné posunutí kloubu ve směru Z. Negativní posuny jsou -4 mm pro pozitivní část funkce kloubu s periodou $T_1 = 1.982$ s, což odpovídá frekvenci f_1. Pozitivní posuny jsou 2 mm pro negativní část funkce kloubu s periodou $T_2 = 1.255$ s, což odpovídá frekvenci f_2.

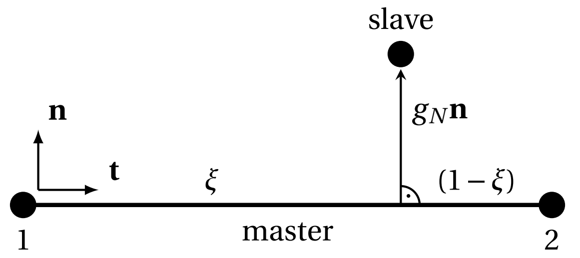
4.2 KONTAKT NODE-TO-SEGMENT

Diskretizace node-to-segment umožňuje — ze své podstaty a na základě robustnosti — široké využití pro modelování kontaktních úloh. Princip tohoto typu diskretizace bude pro jednoduchost vysvětlen pro 2D případ a lineární elementy na obrázku 4.7. Kontaktní pár je definován mezi master segmentem a slave uzlem. Souřadný systém kontaktu pro lineární master segment ve 2D vychází z vektoru určeného počátečním a koncovým uzlem $\mathbf{m} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, délky $l = ||\mathbf{m}||$, kde společně s jednotkovým tečným vektorem $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{m}}{l}$ a jednotkovou kolmicí $\mathbf{n}$ k $\mathbf{t}$ tvoří souřadný systém kontaktu. Slave uzel leží na kolmici k **m** ve vzdálenosti g_N od něj, přičemž kolmice leží ve vzdálenosti ξ od uzlu 1, a $\xi \in \langle 0;1\rangle$.

Pro dvě tělesa v kontaktu po nalezení dvojice slave uzlu a master elementu je vytvořen kontaktní element. Aktivní kontakt přispívá k virtuální práci členem $\delta\Pi_c$. Ve své diskrétní podobě pro kontakt na obrázku 4.7 má příspěvek tvar

$$\delta\Pi_c = F_N \delta g_N, \tag{4.31}$$

kde F_N představuje normálovou kontaktní sílu. Matice tuhosti kontaktu je získána z linearizace



Obrázek 4.7: Geometrie kontaktu node-to-segment.

$$\Delta\delta\Pi_c = \Delta F_N \delta g_N + F_N \Delta\delta g_N, \tag{4.32}$$

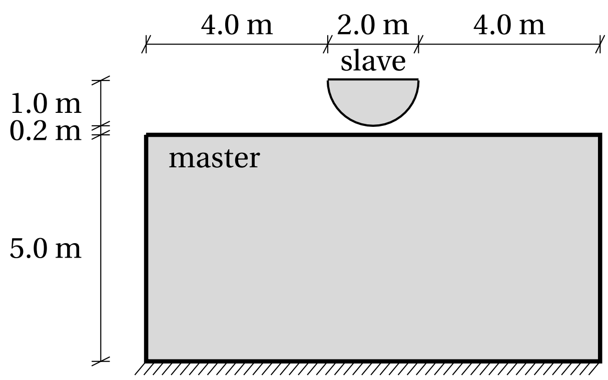
kde symbol Δ indikuje linearizaci. Konkrétní podoba členu F_N opět závisí na zvolené metodě a člen $\boldsymbol{A}$ použitý k její definici má tvar

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & 0 & -(1-\xi)\mathbf{n} & 0 & -\xi\mathbf{n} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.33}$$

Podrobný popis odvození pro metodu Lagrangeových multiplikátorů i penaltovou metodu je uveden v [63], řada výjimkových případů je podrobněji popsána například v [66].

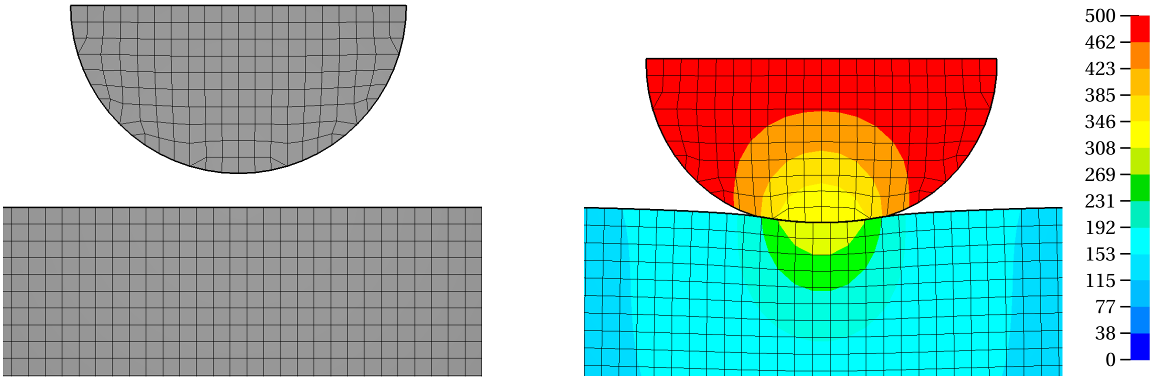
Ukázky implementace

Pomocí tohoto přístupu byly spočítány dva modely s využitím kontaktu node-to-segment mezi dvojicí entit. Příklady jsou převzaty z [71].
První ukázka představuje kontakt mezi 2D elementy, model je složen z půlkruhu, jenž je zatlačován do desky, geometrie je popsána na obrázku 4.8. Výpočetní síť konečných prvků je v detailu vyobrazena na obrázku 4.9a. Výsledek společně s vyobrazením deformací je na obrázku 4.9b. Stejného principu lze využít i pro obecnou 3D geometrii, jako důkaz je zde znázorněn i příklad kontaktu, kdy je koule zatlačena do membrány. Membrána je čtvercového tvaru o délce strany 5 m a je podepřena liniovými podporami na všech okrajových liniích, koule má poloměr $r = 0.5$ m a je umístěna 0.5 m nad membránou (viz obrázek 4.10), do které je poté zatlačena. Velikost předepsané deformace je 1 m ve svislém směru Z, což je 0.5 m pod počáteční rovinou membrány, jak je vyobrazeno na obrázku 4.11.



Obrázek 4.8: Geometrie modelu 1 [71].

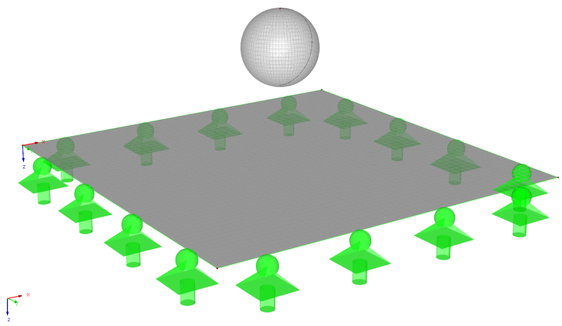
Stejného principu lze využít i pro obecnou 3D geometrii, jako důkaz je zde znázorněn i příklad kontaktu, kdy je koule zatlačena do membrány. Membrána je čtvercového tvaru o délce strany 5 m a je podepřena liniovými podporami na všech okrajových liniích, koule má poloměr $r = 0.5$ m a je umístěna 0.5 m nad membránou (viz obrázek 4.10), do které je poté zatlačena. Velikost předepsané deformace je 1 m ve svislém směru Z, což je 0.5 m pod počáteční rovinou membrány, jak je vyobrazeno na obrázku 4.11.



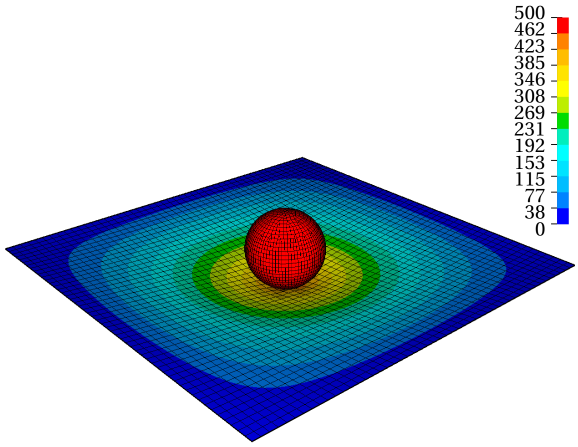
a) před výpočtem

b) výsledné celkové deformace u_{tot} [mm]

Obrázek 4.9: Detail těles v kontaktu se sítí konečných prvků [71].



Obrázek 4.10: Model kontaktu mezi 3D entitami (membránou a koulí) [71].



Obrázek 4.11: Deformace u [cm] od počátku kontaktu po konec výpočtu [71].

4.3 KINEMATICKÉ POJETÍ DYNAMICKÉHO KONTAKTU

V rámci podkapitoly 4.2 došlo k implementaci kontaktu node-to-segment, který však způsobuje obtíže z pohledu stability . Protože přístup popsaný v oddílu 4.1.1 již nelze jednoduše aplikovat na obecnější kontakt node-to-segment, byl navržen nový přístup k řešení kontaktu v explicitní metodě vycházející z kinematického pojetí dynamického kontaktu. Základem navržené metody je princip zachování hybnosti.

Na stejném principu zachování hybnosti na kontaktním rozhraní již vznikly metody publikované v [2, 53]. Přístup uvedený v [2] využívá k vynucení předepsaných podmínek rozšířené Lagrangeovy multiplikátory, což vyžaduje iterační řešení soustavy rovnic, které je v explicitní metodě nežádoucí. Druhý přístup uvedený v [53] nevyžaduje řešení soustavy rovnic, sami autoři ale uvádějí, že přístup zvyšuje energii soustavy a také může docházet k umělému semknutí entit v kontaktu pro neelastickou kolizi. Museli proto zavést umělé snížení vypočítaných kontaktních sil pro zachování nulové změny energie v průběhu výpočtu a dále zavést dodatečnou změnu rychlostí entit v kontaktu, aby nedocházelo k nechtěnému semknutí.

Nově navržená metoda, poprvé představena v [74], nepočítá primárně kontaktní síly, ale z důvodu jejího specifického využití v explicitní metodě dochází po výpočtu pohybových rovnic ke korekci deformací uzlů na kontaktním rozhraní. Počítají se přímo deformace, rychlosti a zrychlení uzlů za předpokladu:

- nepenetrability $g_n \geq 0$,
- výpočtu přesného okamžiku kolize $t_c \in \langle t_n; t_{n+1} \rangle$,
- rozdělení výpočetního časového kroku Δt na dva podkroky, sestávající z intervalů $\langle t_n; t_c \rangle$ a $\langle t_c; t_{n+1} \rangle$,
- zachování hybnosti entit v kontaktu $\sum \mathbf{p} = \text{konst.}$,
- dokonale neelastické kolize.

Navržený přístup byl postupně použit v řadě funkcionalit, což vedlo ke zlepšení stability i výsledků a každé této části je věnován samostatný oddíl. Aplikace kinematického pojetí dynamického kontaktu je postupně popsána na problému nelineárních podpor (viz oddíl 4.3.1), poté na node-to-node kontaktu v oddílu 4.3.2 následovaného obecnějším node-to-segment kontaktem v oddílu 4.3.3 až po specifické případy většího počtu slave uzlů na jednom segmentu v oddílu 4.3.4 a kontaktu dvou hran v oddílu 4.3.5.

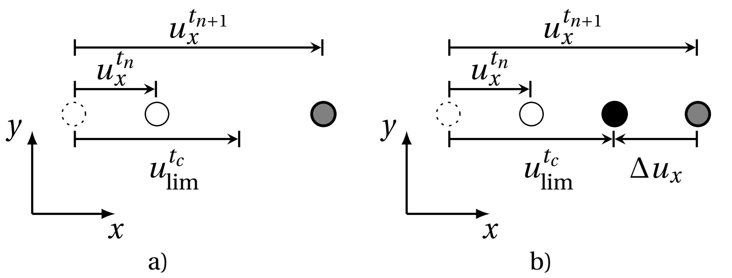
4.3.1 Nelineární podpory

Při řešení časových analýz s nelineárními podporami se ukázal závažný problém, a to zvládnutí přechodu z pružné části na absolutně tuhou. Jedná se například o podpory tuhé pouze v jednom směru (tah/tlak) či podpory zadané nelineární funkcí s tuhou větví. Přistoupilo se proto ke stabilizaci tohoto jevu za pomoci kinematické metody.

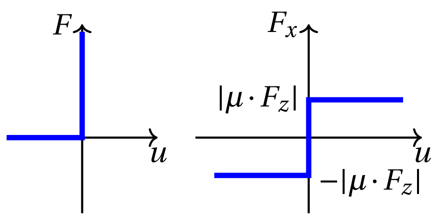
Pro výpočet uzlu podepřeného v libovolném směru nelineární podporou (v ukázkovém příkladu ve směru x) jsou nejprve spočteny deformace běžným způsobem dle rovnice (**??**) (viz obrázek 4.12a). Poté je zkontrolováno, zda se deformace uzlu nedostala do tuhé oblasti podpory ($u_x > u_{\text{lim}}$), a pokud k takovému překročení došlo, je na uzel aplikována korekce a jeho poloha upravena tak, aby odpovídala definici podpory

$$\Delta u = u_{\text{lim}} - u, \qquad \Delta v = \frac{\Delta u}{\Delta t}, \qquad \Delta a = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{4.34}$$

V tomto případě $u_x = u_{\text{lim}}$, jak je znázorněno na obrázku 4.12b. V obecnosti se tento přístup aplikuje např. na jednostranně tuhé podpory, podpory s nelineární funkcí, jež obsahují tuhé větve či podpory s třením (viz obrázek 4.13). Takto popsaná korekce je vždy prováděna v lokálním směru podpor.



Obrázek 4.12: Výpočet a korekce nelineárně tuhé podpory.



Obrázek 4.13: Příklady nelineárních funkcí podpor.

V případě existence více podpor v jednom místě, je třeba provést výpočet jednotlivých dílčích silových složek pro správné hodnoty reakcí v příslušných podporách. K tomu je využíváno následujícího postupu. Příspěvek každého tuhého směru q každé podpory j, které podpírají stejný uzel, je převeden z lokálního souřadného systému podpory do globálního souřadného systému prostřednictvím transformační matice $\mathbf{T}$.

$$\mathbf{S}_G^j = \mathbf{T}^T \mathbf{S}_L^j \mathbf{T}, \tag{4.35}$$

kde matice $\mathbf{S}_L^j$ představuje matici členů příslušející tuhým směrům podpory v lokálním souřadném systému. Účinky $\mathbf{S}_G^j$ jsou sečteny do výsledné matice charakterizující příspěvky tuhých směrů všech podpor v globálním souřadném systému

$$\mathbf{S}_G = \sum_j \mathbf{S}_G^j. \tag{4.36}$$

Matice $\mathbf{S}_G$ se využije k nalezení řešení soustavy

$$\mathbf{S}_G \mathbf{f}_G = \mathbf{r}, \tag{4.37}$$

kde $\mathbf{r}$ jsou nevyvážené síly v daném uzlu a výsledkem jsou reakce $\mathbf{f}_G$ od tuhých směrů podpor v daných globálních směrech. Dílčí reakce $\mathbf{f}_G^j$ pro každou podporu je třeba dopočítat ze vztahu

$$\mathbf{f}_G^j = \mathbf{S}_G^j \mathbf{f}_G \tag{4.38}$$

a následně je transformovat zpět do souřadného systému dané podpory

$$\mathbf{f}_L^j = \mathbf{T}_j \mathbf{f}_G^j. \tag{4.39}$$

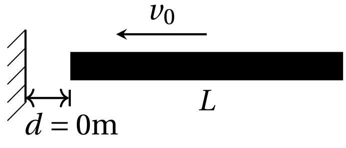
Verifikace řešení

Správnost navrženého algoritmu je demonstrována na příkladu Signoriniho dynamického problému pro 1D (viz obrázek 4.14). Jedná se o náraz prutu na tuhou překážku (modelováno jednostrannou podporou působící pouze v tlaku). Prut má délku $L = 1\mathrm{m}$, $E = 1\mathrm{MPa}$, průřez o ploše $A = 1\mathrm{m}^2$, hustotu $\rho = 1\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, počáteční rychlost $v_0 = 1\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ a nachází se v nulové vzdálenosti od podpory. Prut je rozdělen na 100 konečných prvků a maximální vlastní frekvence modelu $\omega_{max} = 200\ \mathrm{s}^{-1}$. Vypočtené hodnoty jsou porovnány s penaltovou metodou, jejíž výsledky jsou, stejně jako příklad, převzaty z [26]. Pro zobrazení výsledků jsou použity bezrozměrné jednotky

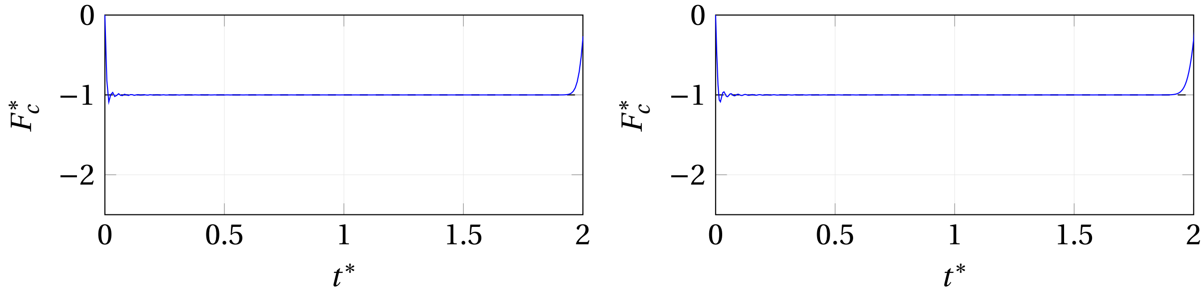
$$t^* = \frac{c_0 t}{L} \qquad F_c^* = \frac{c_0 F_c}{v_0 E A}, \tag{4.40}$$

kde F_c je kontaktní síla, t^* a F_c^* jsou bezrozměrné jednotky času a kontaktní síly a c_0 daných vztahem $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ značí rychlost šíření vln v prutu.

Obrázky 4.15 a 4.16 dokládají výhody kinematické metody oproti penaltové metodě. Zatímco kinematická metoda dovoluje spočítat daný příklad s $C_r = 0.82$ (viz obrázek 4.16a), penaltová metoda s tímto časovým krokem diverguje (jak je ukázáno v [26]). Z dalšího porovnání plyne dosažení přesnějších výsledků kinematickou metodou, a to navíc bez nutnosti volby penalty β_s, kde $\beta_s = w/k$ (viz [26]).

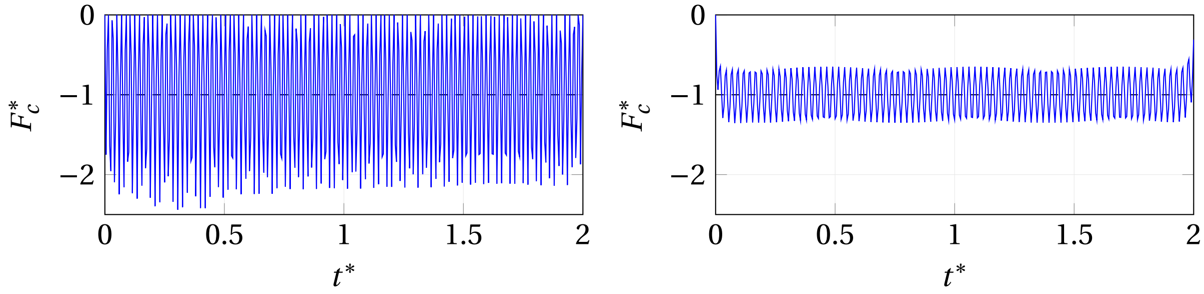


Obrázek 4.14: Signoriniho problém.



a) $C_r = 0.82$ b) $C_r = 0.5$

Obrázek 4.15: Výsledky kontaktní síly spočítané kinematickou metodu.



c) $C_r = 0.5$, $\beta_s = 3.5$ d) $C_r = 0.5$, $\beta_s = 1.5$

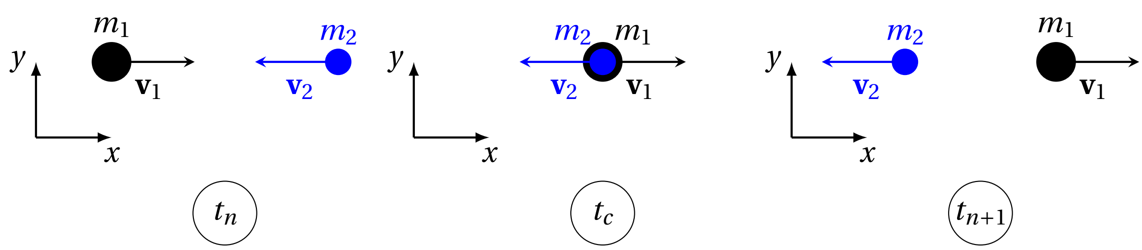
Obrázek 4.16: Výsledky kontaktní síly spočítané penaltovou metodou.

4.3.2 Kontakt node-to-node

Postup výpočtu pro kontakt node-to-node bude vysvětlen na dvojici uzlů 1 a 2 z obrázku 4.17. Napřed je spočítána deformace uzlů pro jeden časový krok v intervalu $\langle t_n; t_{n+1}\rangle$. Pokud v rámci tohoto časového kroku dojde ke kontaktu v čase $t_c \in \langle t_n; t_{n+1}\rangle$, je takto spočtený časový krok rozdělen na dva dílčí podkroky. První podkrok spočívá ve výpočtu pohybových rovnic v časovém úseku $\langle t_n; t_c\rangle$. Druhý podkrok již probíhá za podmínky neelastické kolize dvou hmotných bodů v časovém intervalu $\langle t_c; t_{n+1}^{new}\rangle$, kde index $(\bullet)^{new}$ označuje novou konfiguraci v daném čase a časově je $t_{n+1}^{new} = t_{n+1}$. Nová rychlost uzlů $v_{1,2}^{new}$, použitá v druhém podkroku, se vypočítá jako

$$\boldsymbol{v}_{1,2}^{new} = \frac{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2}{m_1 + m_2}, \tag{4.41}$$

kde m_1 a m_2 jsou hmotnosti uzlů a $\boldsymbol{p}_1$ s $\boldsymbol{p}_2$ jsou hybnosti uzlů před kolizí spočtených jako $\boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i$.



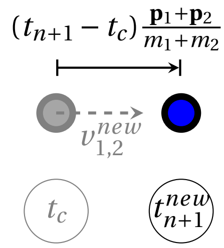
Obrázek 4.17: Penetrace kontaktu dvojice uzlů.

Výpočet posunutí, ke kterému dojde v intervalu $\langle t_c; t_{n+1}^{new} \rangle$, je dán vztahem

$$\Delta \boldsymbol{u}_c = \Delta t \boldsymbol{v}_{1,2}^{new} = (t_{n+1} - t_c) \frac{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2}{m_1 + m_2}, \tag{4.42}$$

jak je znázorněno na obrázku 4.18. Celkové posunutí v rámci jednoho časového kroku pro uzly v kontaktu je dáno vztahem

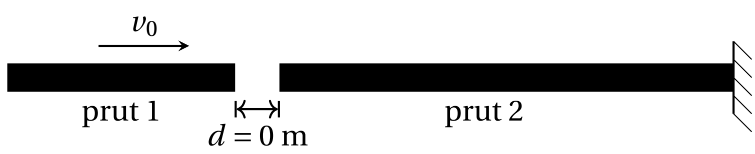
$$\Delta \boldsymbol{u}_i = (t_c - t_n) \boldsymbol{v}_i + (t_{n+1} - t_c) \frac{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2}{m_1 + m_2}. \tag{4.43}$$



Obrázek 4.18: Výpočet nové polohy uzlů.

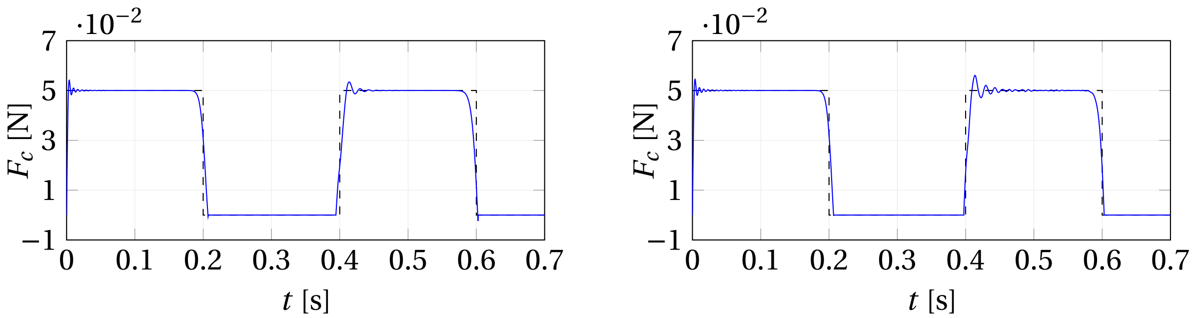
Verifikace řešení

Navržený přístup je porovnán s penaltovou metodou, konkrétně s příkladem uveřejněným v [16], kde je studován vliv velikosti penalty na příkladu dvou různě dlouhých elastických prutů, mezi kterými dojde ke kontaktu (viz obrázek 4.19). Délky prutů jsou $L_1 = 10$ m a $L_2 = 20$ m, modul pružnosti $E_1 = E_2 = 100$ Pa, hustota $\rho_1 = \rho_2 = 0.01$ kg/m^3, plocha průřezů $A_1 = A_2 = 1$ m^2, vzdálenost mezi pruty $d = 0$ m a délka konečných prvků $L_{\mathrm{elem}} = 0.2$ m. Počáteční rychlost $v_0 = 0.1$ m/s má pouze první prut směrem k druhému prutu.



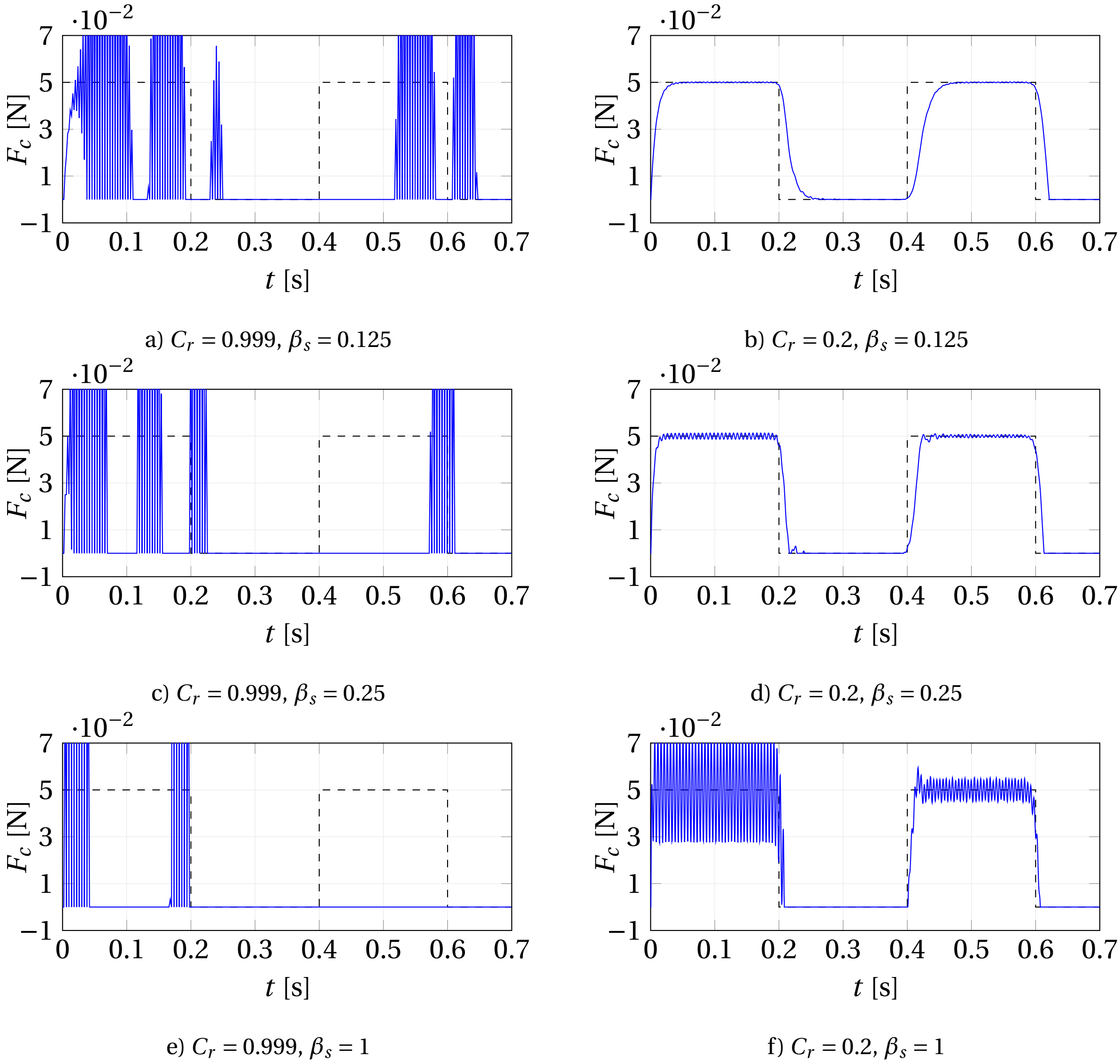
Obrázek 4.19: Výpočetní model dle Huňka [16].

Verifikace je provedena porovnáním kontaktní síly F_c spočtené za pomoci kinematické metody (viz obrázek 4.20) s penaltovou metodou (viz obrázek 4.21). Data pro penaltovou metodu jsou převzata z [26]. Z porovnání jasně vyplývá výhoda nově navržené metody, kdy je dosaženo uspokojivých výsledků bez nutnosti určování jakýchkoliv vstupních parametrů tak jako u penaltové metody. Nejpartnější je v daném příkladu rozdíl pro $C_r = 0.999$, kdy penaltová metoda ve své základní variantě není schopna dosáhnout relevantních výsledků pro jakoukoliv hodnotu penalty β_s, kde $\beta_s = w/k$ (viz [26]).



a) $C_r = 0.999$ b) $C_r = 0.2$

Obrázek 4.20: Výsledky kontaktní síly pro kinematickou metodu.



a) $C_r = 0.999$, $\beta_s = 0.125$
b) $C_r = 0.2$, $\beta_s = 0.125$
c) $C_r = 0.999$, $\beta_s = 0.25$
d) $C_r = 0.2$, $\beta_s = 0.25$
e) $C_r = 0.999$, $\beta_s = 1$
f) $C_r = 0.2$, $\beta_s = 1$

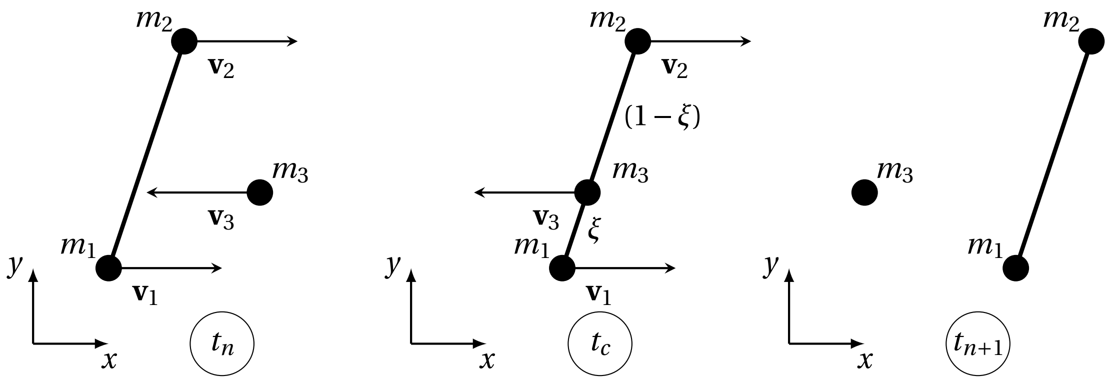
Obrázek 4.21: Výsledky kontaktní síly pro penaltovou metodu.

4.3.3 Kontakt node-to-segment

Kinematická metoda byla dosud prezentována na 1D případech. Její zobecnění pro vícerozměrné problémy bude popsáno v tomto oddílu. Princip navrženého kinematického přístupu pro stabilizaci kontaktu může být popsán na příkladu jednoduchého 2D NTS kontaktu (viz obrázek 4.22). Předpokládejme, že v čase t_n nedochází k žádné penetraci uzlu 3 se segmentem 1-2. Jakmile je zjištěna penetrace v čase t_{n+1}, musí se přistoupit k výpočtu přesného času, při kterém došlo k proniku. Je vypočítán přesný okamžik, při kterém došlo k penetraci, stejně tak i konfigurace v tomto čase.

Výsledný čas t_c odpovídá konfiguraci vyobrazené na obrázku 4.22 (t_c). Takto získaná konfigurace je využita k výpočtu nové upravené konfigurace v čase t_{n+1}^{new}. Na základě Newtonových pohybových zákonů můžeme využít hybnost kontaktu

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3, \tag{4.44}$$



Obrázek 4.22: Penetrace kontaktu [74].

kde

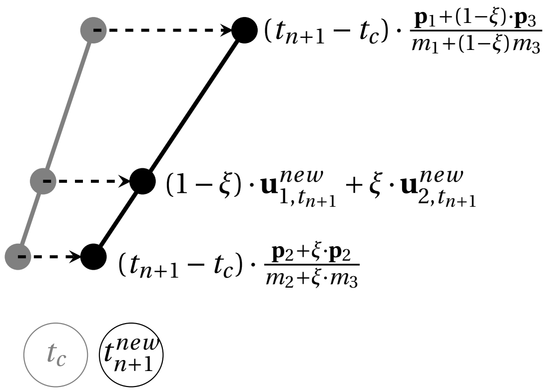
$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i. \tag{4.45}$$

Sloučením rovnic (4.44) a (4.45) získáme

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3. \tag{4.46}$$

Celková hybnost této soustavy $\mathbf{p}$ je konstantní

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^{new} \implies \Delta\mathbf{p} = 0. \tag{4.47}$$



Obrázek 4.23: Výpočet nové polohy uzlů [74].

Z důvodu potřeby jednoznačnosti řešení je nutné rozlišit typ kolize těchto entit. Základní dělení typů kolize je na elastickou a neelastickou. Z důvodu aplikace navrhovaného přístupu v systému na bázi konečných prvků, v němž předmětem řešení hlavně stavební a strojní konstrukce, a kde jsou v kontaktu pouze dílčí částí prostorově diskretizovaných a deformovatelných těles, je využito druhého, dokonale neelastického typu, kde dochází ke změně kinetické energie na jinou formu energie, např. na potenciální energii či teplo v důsledku tření. Při uvažování neelastické kolize je během zpracování kontaktu hybnost slave uzlu $\mathbf{p}_3$ rozdělena do master uzlů 1 a 2.

$$\mathbf{p}_1^{new} = \mathbf{p}_1 + (1-\xi)\cdot\mathbf{p}_3, \qquad \mathbf{p}_2^{new} = \mathbf{p}_2 + \xi\cdot\mathbf{p}_3. \tag{4.48}$$

Hybnosti $\mathbf{p}_{1,2}^{new}$ jsou pouze imaginární hybnosti v master uzlech vycházející z předpokladu roznosu hybnosti slave uzlu do master segmentu a slouží k dopočítání nových rychlostí. Deformace jsou dopočítány ze vztahu $\mathbf{u} = \Delta t\,\mathbf{v}$. Nová hybnost slave uzlu $\mathbf{p}_3^{new}$ je dopočítána ze vztahu

$$\mathbf{p}_3^{new} = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{v}_1^{new} m_1 - \mathbf{v}_2^{new} m_2}{m_3}, \tag{4.49}$$

kde rychlosti $\mathbf{v}_{1,2}^{new}$ lze vyjádřit z rovnice (4.45)

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{m_i}. \tag{4.50}$$

Z důvodu linearizace pohybových rovnic mohou být deformace vypočítány jako

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{new}_{1,t_{n+1}} &= \mathbf{u}_{1,t_c} + (t_{n+1} - t_c)\cdot \mathbf{v}^{new}_{1,t_{n+1}},\\
\mathbf{u}^{new}_{2,t_{n+1}} &= \mathbf{u}_{2,t_c} + (t_{n+1} - t_c)\cdot \mathbf{v}^{new}_{2,t_{n+1}},\\
\mathbf{u}^{new}_{3,t_{n+1}} &= (1-\xi)\cdot \mathbf{u}^{new}_{1,t_{n+1}} + \xi\cdot \mathbf{u}^{new}_{2,t_{n+1}},
\end{aligned} \tag{4.51}$$

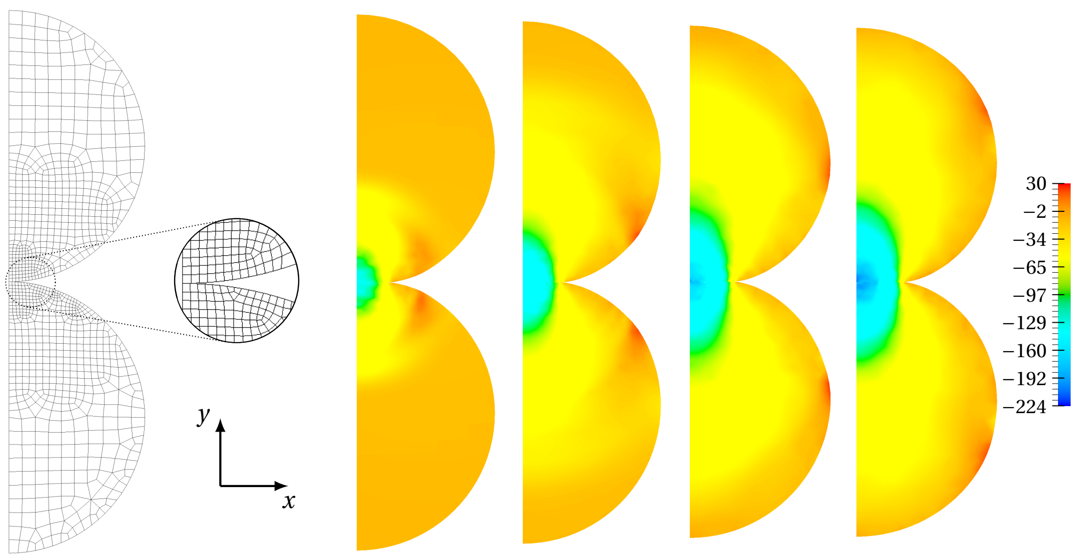
kde $\mathbf{v}^{new}_{i,t_{n+1}}$ lze vyjádřit z dosazení rovnice (4.45) do rovnice (4.48)

$$\mathbf{v}^{new}_{1,t_{n+1}} = \frac{\mathbf{p}_1 + (1-\xi)\cdot \mathbf{p}_3}{m_1 + (1-\xi)m_3}, \qquad \mathbf{v}^{new}_{2,t_{n+1}} = \frac{\mathbf{p}_2 + \xi\cdot \mathbf{p}_3}{m_2 + \xi\cdot m_3}. \tag{4.52}$$

Verifikace řešení

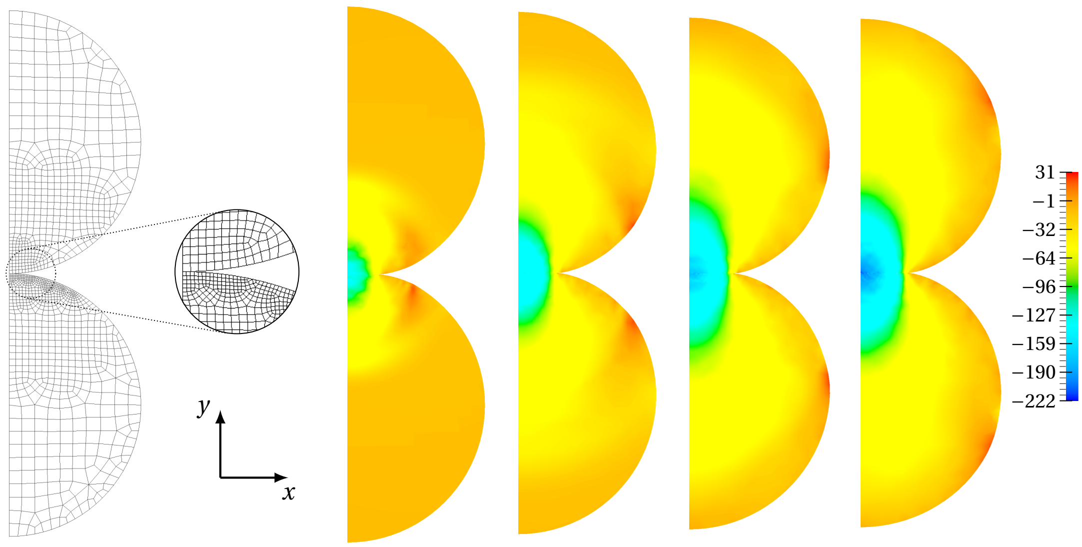
Verifikace řešení je provedena na 2D Hertzově úloze dvou válců o poloměru $r = 4$ m z lineárně elastického materiálu s modulem pružnosti $E = 1$ GPa, Poissonovým součinitelem $\nu = 0.2$ a hustotou $\rho = 1\ \mathrm{kg\cdot m^{-1}}$. Válce se dotýkají v jednom bodě a mají počáteční rychlost $v_0^{1,y} = -v_0^{2,y} = -2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Z důvodu symetrie je zohledněna pouze polovina každého válce. Je zvolen výpočetní krok $\Delta t = 1e^{-4}$ s. Model je převzat z [25, 39], analytické řešení příkladu z [19, 31, 39] (spočítané za předpokladu malých deformací a žádného šíření vln). Výsledky spočtené za pomoci penaltové metody jsou převzaty z [11].

Úloha je za pomoci kinematické metody spočítána pro dvě různě veliké sítě, délka hrany elementu na hraně se slave uzly má v prvním případě délku $L_{\text{slave}} = 0.1$ m a v druhém případě délku $L_{\text{slave}} = 0.05$ m, jak je vyobrazeno na obrázku 4.24a a obrázku 4.25a.



a) Síť konečných prvků   b) Šíření vln a napětí $\sigma_y [\mathrm{N/m^2}]$ v časech $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ [s]

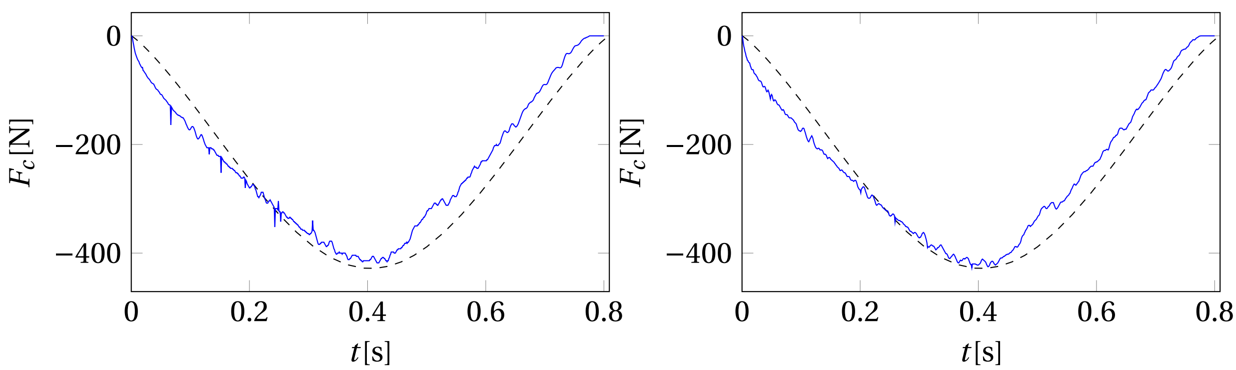
Obrázek 4.24: Výsledky napětí σ_y v čase s délkou prvků na rozhraní kontaktu $L_{\text{slave}} = 0.1$ m.



a) Síť konečných prvků

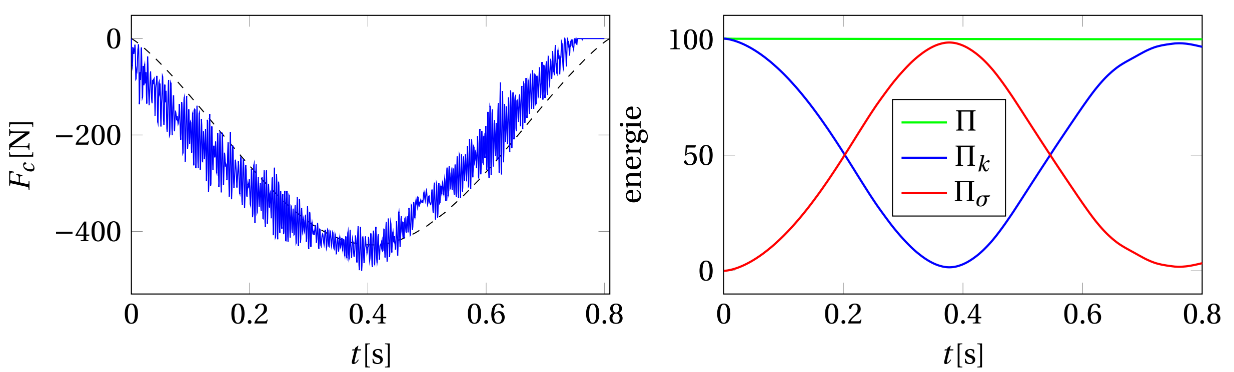
b) Šíření vln a napětí $\sigma_y\,[\mathrm{N/m^2}]$ v časech $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ [s]

Obrázek 4.25: Výsledky napětí σ_y v čase s délkou prvků na rozhraní kontaktu $L_{\text{slave}} = 0.05$ m.



a) Kinematická metoda - $L_{\text{slave}} = 0.1$ m

b) Kinematická metoda - $L_{\text{slave}} = 0.05$ m



c) penaltová metoda - $w = 1e^5$

d) Kinematická metoda - bilance energie

Obrázek 4.26: Výsledky kontaktní síly spočítané Kinematickou metodou (a, b), penaltovou metodou (c) a bilance energie pro Kinematickou metodu (d).

4.3.4 Více slave uzlů na jednom segmentu

Výše uvedený postup dává dobré výsledky, je přehledný a jednoduše pochopitelný. Tento přístup však není korektní, dojde-li ke kontaktu více než jednoho slave uzlu s jedním segmentem. Dřívější kontakt teoreticky ovlivní celou konfiguraci a není zaručeno dosažení podmínek neelastického typu. Postup by pro dodržení přesného výpočtu bylo třeba zobecnit a pracovat ve více intervalech podle postupného výskytu kontaktu přes celou kontaktní doménu. Takovéto řešení bylo vyhodnoceno jako neperspektivní z důvodu náročnosti implementační i výpočetní. V rámci aktuální linearizace každého jednoho časovém kroku Δt je raději přistoupeno ke zjednodušení a ovlivnění konfigurace z důvodu kolize více slave uzlů s jednou master entitou v různých časech $t_{,i} \in \langle t_n; t_{n+1})$ je zanedbáno.

Kontakt slave uzlu se segmentem vyvolává změnu hybnosti v segmentu

$$\Delta \mathbf{p}_1 = (1-\xi)\cdot \mathbf{p}_3, \qquad \Delta \mathbf{p}_2 = \xi \cdot \mathbf{p}_3. \tag{4.53}$$

Tyto změny hybnosti $\Delta \mathbf{p}_1$ a $\Delta \mathbf{p}_2$ lze kumulovat pro libovolný počet slave uzlů, proto je napřed vypočten vliv všech slave uzlů na příslušné master segmenty za pomoci obecnějšího předpisu

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \sum_i (1-\xi_i)\cdot \mathbf{p}_i, \qquad \Delta \mathbf{p}_2 = \sum_i \xi_i \cdot \mathbf{p}_i \tag{4.54}$$

a až poté jsou vypočítány deformace, rychlosti a zrychlení všech uzlů v kontaktu. K výpočtu nových hybností slave uzlů již nelze využít rovnici (4.49), protože by obecně vedla na systém o více neznámých nežli rovnic. Proto je využito předpokladu neelastického kontaktu a je vypočítána rychlost slave uzlu ze vztahu

$$\mathbf{v}_i^{new} = (1-\xi_i)\cdot \mathbf{v}_1^{new} + \xi_i \cdot \mathbf{v}_2^{new}. \tag{4.55}$$

Takto dopočítaná rychlost poté slouží k výpočtu zrychlení

$$\mathbf{a}_i^{new} = \mathbf{a}_i + \frac{\mathbf{v}_i^{new} - \mathbf{v}_i}{t_{n+1} - t_c}, \tag{4.56}$$

a polohy

$$\mathbf{u}_i^{new} = \mathbf{u}_i + (\mathbf{v}_1^{new} - \mathbf{v}_1)\cdot (t_{n+1} - t_c). \tag{4.57}$$

4.3.5 Kontakt dvou hran

Při výpočtu kontaktů entit ve 3D již nastávají situace, kdy je formulace kontaktu NTS nedostačující či vede k opomenutí určitých případů vzájemného postavení kontaktních entit. Konkrétním případem je kontakt mimoběžných hran. Pro zpřesnění výpočtu je proto umožněno uvažovat také s kontaktem hrany na master segment, jak ukazuje obrázek 4.27.

Poloha bodů kontaktu K_1 a K_2 na příslušných hranách lze vypočítat z průniku dvou linií. Poloha bodů kontaktu je vyjádřena jako

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{K_1}(\xi_{K_1}) &= \xi_{K_1}\cdot \mathbf{X}_A + (1-\xi_{K_1})\cdot \mathbf{X}_B, \\ \mathbf{X}_{K_2}(\xi_{K_2}) &= \xi_{K_2}\cdot \mathbf{X}_C + (1-\xi_{K_2})\cdot \mathbf{X}_D. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Poloha průniku je dána parametry ξ_{K_1} a ξ_{K_2} získanými z řešení rovnice $\mathbf{X}_{K_1} = \mathbf{X}_{K_2}$, kde po dosazení do (4.58) získáme

$$\xi_{K_1}\cdot \mathbf{X}_A + (1-\xi_{K_1})\cdot \mathbf{X}_B = \xi_{K_2}\cdot \mathbf{X}_C + (1-\xi_{K_2})\cdot \mathbf{X}_D. \tag{4.59}$$

Vypočítá se přesný čas t_c, kdy došlo ke kontaktu, a tomu odpovídající polohy bodů A, B, C, D.

Zda bod průsečíku K, který lze nyní ztotožnit s K_1 a K_2 ($K = K_1 = K_2$), leží na hranách AB a CD, je zjištěno dosazením $\mathbf{X}_K$ do rovnic (4.58) a následným vyčíslením ξ_{K_1} a ξ_{K_2}

$$\begin{aligned} \xi_{K_1} &\in \langle 0; 1\rangle \implies K_1 \in AB, \\ \xi_{K_2} &\in \langle 0; 1\rangle \implies K_2 \in CD. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Výpočet změny hybnosti je dopočítán z předpokladu kontaktu dvou tuhých linií a stejné koncové rychlosti $\mathbf{v}_{K_1} = \mathbf{v}_{K_2}$ pro místa kontaktu. Pro každou hranu se vypočte její hmotnost

$$m_1 = m_A + m_B, \qquad m_2 = m_C + m_D \tag{4.61}$$

a rychlost, která se při přechodu do lokálního souřadného systému kontaktu bez tření zjednoduší na rychlosti $\mathbf{v}_i = \{v_{1,t}; v_{1,k}; v_{1,\phi}\}$ v místech

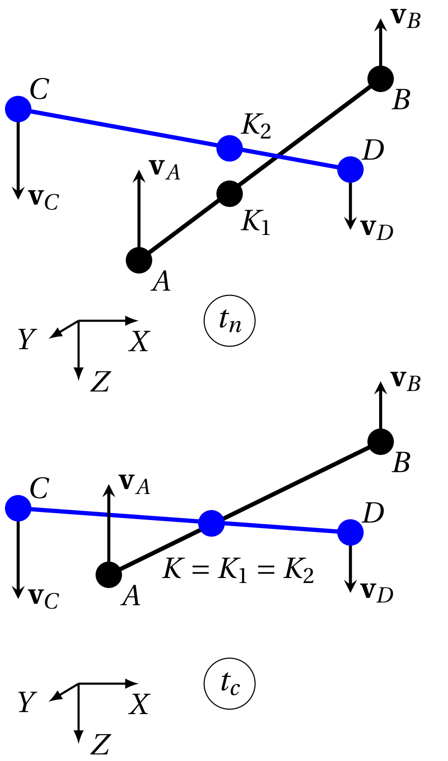
$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1(\xi_1) &= \xi_1 \cdot \mathbf{X}_A + (1-\xi_1)\cdot \mathbf{X}_B, \\ \mathbf{X}_2(\xi_2) &= \xi_2 \cdot \mathbf{X}_C + (1-\xi_2)\cdot \mathbf{X}_D. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Pro zohlednění vzdáleností těžišť od místa kontaktu

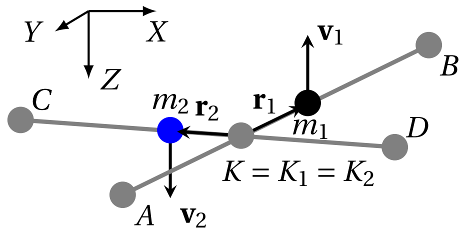
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{X}_{K_1} - \mathbf{X}_1, \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{X}_{K_2} - \mathbf{X}_2, \tag{4.63}$$

jsou dopočítány momenty setrvačnosti příslušných linií

$$\begin{aligned} I_1 &= m_A \cdot \xi_1^2 + m_B \cdot (1-\xi_1)^2, \\ I_2 &= m_C \cdot \xi_2^2 + m_D \cdot (1-\xi_2)^2 \end{aligned} \tag{4.64}$$



Obrázek 4.27: Hrana na hranu.



Obrázek 4.28: Kondenzace linie do uzlu.

a rychlosti v bodech K_1 a K_2 vyjádřeny právě těmito parametry

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{K_1} &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_1 \cdot \omega_1, \\ \mathbf{v}_{K_2} &= \mathbf{v}_2 + \mathbf{r}_2 \cdot \omega_2, \\ \mathbf{v}_i^{\text{new}} &= \mathbf{v}_i + \frac{\Delta \mathbf{p}}{m_i}, \\ \omega_i^{\text{new}} &= \omega_i + \frac{\Delta \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_i}{I_i}. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Z podmínky rovnosti $\mathbf{v}_1^{\text{new}} = \mathbf{v}_2^{\text{new}}$ je vyjádřena změna hybnosti v místě kontaktu

$$\Delta \mathbf{p}_{K_1} = \frac{\mathbf{v}_{K_2} - \mathbf{v}_{K_1}}{\frac{1}{m_1} + \frac{\mathbf{r}_1^2}{I_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{\mathbf{r}_2^2}{I_2}}, \qquad \Delta \mathbf{p}_{K_2} = \frac{\mathbf{v}_{K_1} - \mathbf{v}_{K_2}}{\frac{1}{m_1} + \frac{\mathbf{r}_1^2}{I_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{\mathbf{r}_2^2}{I_2}}. \tag{4.66}$$

Výpočet změny hybnosti $\Delta\mathbf{p}_A$ a $\Delta\mathbf{p}_B$ lze provést s využitím rovnice

$$\Delta\mathbf{p}_A^{new} = (1-\xi_{K_1})\cdot\Delta\mathbf{p}_{K_1}, \qquad \Delta\mathbf{p}_B^{new} = \xi_{K_1}\cdot\Delta\mathbf{p}_{K_1}. \tag{4.67}$$

Stejným způsobem lze provést i výpočet $\Delta\mathbf{p}_C$ a $\Delta\mathbf{p}_D$

$$\Delta\mathbf{p}_C^{new} = (1-\xi_{K_2})\cdot\Delta\mathbf{p}_{K_2}, \qquad \Delta\mathbf{p}_D^{new} = \xi_{K_2}\cdot\Delta\mathbf{p}_{K_2}. \tag{4.68}$$

Z těchto změn lze dopočítat nové rychlosti a jim odpovídající zrychlení a polohy dle (4.55) až (4.56).

4.3.6 Shrnutí

Prezentované kinematické pojetí dynamického kontaktu pro explicitní metodu vede k dobrým výsledkům pro všechny prezentované případy, zachovává konstantní celkovou energii soustavy v průběhu řešení a překonává se stabilitou explicitní metody pro kontaktní úlohy. Prezentovaný přístup dopočítává deformace za pomoci zohlednění přesného času nárazu t_c každého kontaktu. Deformace, rychlosti a zrychlení jsou dopočítány s pomocí rozdělení výpočetního časového kroku $\Delta t \in \langle t_n; t_{n+1}\rangle$ na interval před nárazem $\langle t_n; t_c\rangle$ a po nárazu $\langle t_c; t_{n+1}\rangle$. V intervalu po nárazu se předpokládá dokonale neelastická kolize. Navržený přístup také umožňuje zohlednění kontaktů více slave uzlů s jednou master entitou v rámci stejného časového kroku, jak bylo prokázáno na numerickém příkladu. Metoda nevyžaduje aplikaci penaltové metody či Lagrangeových multiplikátorů, vnitřní iterace ani řešení soustavy rovnic.

4.4 ENERGETICKÁ METODA

Z důvodů snahy o vyřešení problémů se stabilitou explicitní metody pro kontaktní úlohy byla nezávisle na kinematickém přístupu popsaném v podkapitole 4.3 vyvinuta i druhá metoda přistupující k řešení jiným způsobem, a to z pohledu konzervace celkové energie soustavy [69, 70, 76].

Existující algoritmy založené na principu konzervace energie jsou navrženy a popsány například v [27], kde je dosaženo rovnosti energie za pomoci Lagrangeových multiplikátorů, které vynucují podmínku na rychlostech, ale jsou modifikovány geometrické podmínky a není zachována nepenetrabilita. Na tuto práci bylo navázáno v [68], kde bylo řešení rozšířeno ještě o regularizaci za pomoci penalty. Dále byl v [60] prezentován přístup pro NTN kontakt, s potřebou speciálního přístupu pro modifikaci sítě v průběhu výpočtu. Oproti tomu zde je prezentován obecnější NTS kontakt, kde navíc není třeba modifikovat síť pro zachování kompatibility jako u NTN kontaktu, jak již bylo popsáno v podkapitole 2.

V této metodě se počítá přímo člen reprezentující práci kontaktu $\delta\Pi_c$ takovým způsobem, aby celková energie soustavy Π_n na začátku časového kroku a její nová hodnota Π_{n+1} na konci časového kroku zůstala stejná a její změna $\Delta\Pi$ byla rovna nule

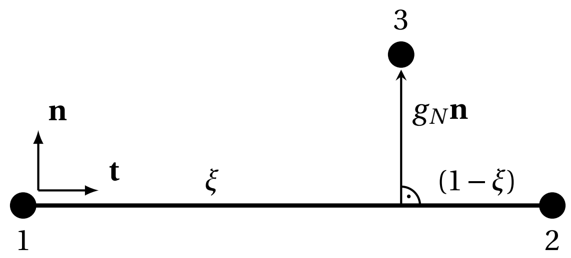
$$\Delta\Pi = \Pi_{n+1} - \Pi_n = 0. \tag{4.69}$$

Pro správné vyčíslení rovnice (4.69) je třeba znát a vypočítat všechny změny všech složek energie, jež jsou ovlivněny působením kontaktní síly.

Nově navržený algoritmus, prezentovaný autorem práce poprvé kompletně v [76], se oproti výše zmíněným liší hlavně v tom, že veškeré změny energie jsou vyjádřeny jako proměnné kontaktní síly $\Delta\Pi(\mathbf{f}_c)$. Výpočet je pro názornost popsán na 2D řešení odpovídající obrázku 4.29, je však plně rozšiřitelný i do 3D.

Změna celkové energie soustavy $\Delta\Pi$ způsobena kontaktními silami v rámci jednoho časového kroku skládající se ze změn kinetické energie $\Delta\Pi_k$, potenciální elastické energie $\Delta\Pi_\sigma$ a potenciální polohové energie $\Delta\Pi_p$ musí být rovna nule,

$$\Delta\Pi = \Delta\Pi_k + \Delta\Pi_\sigma + \Delta\Pi_p = 0. \tag{4.70}$$



Obrázek 4.29: Geometrie jednoho kontaktu node-to-segment.

Rovnici (4.70) lze rozepsat do jednotlivých příspěvků zvlášť pro každý kontakt s, kde kontaktní síla každého kontaktu $\mathbf{f}_{c,s}$ způsobuje dílčí změny energie $\Delta\Pi_s$

$$\Delta\Pi_s(\mathbf{f}_{c,s}) = \Delta\Pi_{k,s}(\mathbf{f}_{c,s}) + \Delta\Pi_{\sigma,s}(\mathbf{f}_{c,s}) + \Delta\Pi_{p,s}(\mathbf{f}_{c,s}) = 0. \tag{4.71}$$

Další popis již z důvodu přehlednosti neobsahuje index $(\bullet)_s$, protože výpočet lze provádět individuálně pro každý kontakt zvlášť a výsledné kontaktní síly vznikají sumací účinků jednotlivých kontaktů do výsledného vektoru $\mathbf{G}$, který reprezentuje člen $d\Pi_c$ z (**??**). Postup výpočtu je tedy popsán na jednom kontaktu.

4.4.1 Nalezení místa kontaktu

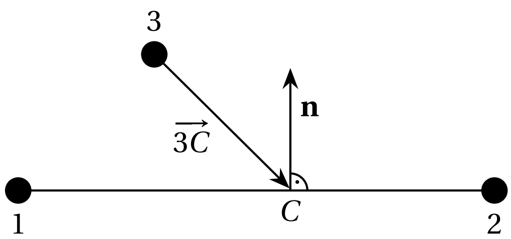
K určení místa i přesného času, kdy nastane penetrace kontaktu, je využito rychlostí a poloh v rámci daného výpočetního kroku. Je zavedena veličina Δt_c odpovídající délce působení kontaktní síly v rámci daného časového kroku

$$\Delta t_c \in \langle 0; \Delta t\rangle, \qquad \Delta t_c = t_{n+1} - t_c. \tag{4.72}$$

4.4.2 Směr kontaktní síly

Při výpočtu směru kontaktní síly se vychází ze směru pohybu uzlu a příslušného segmentu v kontaktu. Ve 2D je třeba určit čtyři neznámé složky dvou vektorů rychlosti $\mathbf{v}_3$ a $\mathbf{v}_C$, zatímco jsou k dispozici pouze tři rovnice: dvě pro zachování hybnosti a jedna pro zachování energie. Mezi uzlem 3 a bodem C je uvažováno působení kontaktní síly dle 3. Newtonova zákona [36], mající stejnou velikost, avšak opačný směr. Uvažují se proto dva limitní případy. V prvním je tření absolutní a nedochází k žádnému prokluzu mezi uzlem a segmentem, což vede k odrazu uzlu 3 a bodu C ve stejném relativním směru jako před nárazem, avšak s opačným znaménkem. Na uzel 3 bude působit kontaktní síla $|\mathbf{f}_c^a|$ ve směru vektoru $\overrightarrow{C3}$ a na bod C bude působit síla $|\mathbf{f}_c^a|$ ve směru $\overrightarrow{3C}$ ($\overrightarrow{3C} = -\overrightarrow{C3}$). Index $(\bullet)^a$ značí řešení pro absolutní tření.
Lze tedy určit jednotkový vektor $\mathbf{e}_c$ jako

$$\mathbf{e}_c^a = \frac{\mathbf{f}_c^a}{|\mathbf{f}_c^a|} = \frac{\mathbf{v}_{C3}}{|\mathbf{v}_{C3}|}. \tag{4.73}$$



Obrázek 4.30: Určení směru působení kontaktní síly na segment.

Druhým limitním případem je nulové tření v místě nárazu. V tomto případě musí mít kontaktní síla směr normály $\mathbf{n}$ (viz obrázek 4.30) k segmentu, přičemž úhel dopadu a odrazu je stejný a symetrický právě kolem normály segmentu umístěné v místě nárazu.

$$\mathbf{e}_c^0 = \frac{\mathbf{f}_c^0}{|\mathbf{f}_c^0|} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}, \tag{4.74}$$

kde index $(\bullet)^0$ slouží pro označení nulového tření. Všechny ostatní případy nacházející se někde mezi těmito extrémy lze chápat jako kombinaci obou limitních případů, a proto je vyjádřen přechod mezi nimi za pomoci váhového koeficientu $\kappa \in \langle 0; 1 \rangle$, jenž kombinuje oba přístupy pro výpočet

$$\mathbf{e}_c = \frac{\mathbf{f}_c}{|\mathbf{f}_c|}, \tag{4.75}$$

kde

$$\mathbf{f}_c = \kappa \mathbf{f}_c^a + (1-\kappa)\mathbf{f}_c^0. \tag{4.76}$$

Určení přesné hodnoty κ není předmětem této práce a slouží pouze jako alternativa k ostatním modelům tření, jako např. klasické Coulombovo tření [7], vč. varianty zohledňující rychlost [59], modely dle LuGre a Dahla [33] či dalším z nespočtu variant tření [29].

4.4.3 Změna kinetické energie

Kinetická energie Π_k je přímo závislá na změně rychlostí jednotlivých uzlů v kontaktu a lze ji s využitím Einsteinovy sumační konvence $I \in \{1, 2, 3\}$ zapsat

$$\Pi_k = \frac{1}{2} m_I \mathbf{v}_I \mathbf{v}_I, \qquad \Pi_k^* = \frac{1}{2} m_I \mathbf{v}_I^* \mathbf{v}_I^*, \tag{4.77}$$

$$\Delta\Pi_k = \Pi_k^* - \Pi_k = \frac{1}{2} m_I \mathbf{v}_I^* \cdot \mathbf{v}_I^* - \frac{1}{2} m_I \mathbf{v}_I \cdot \mathbf{v}_I = \frac{1}{2} m_I (2\mathbf{v}_I \cdot \Delta\mathbf{v}_I + \Delta\mathbf{v}_I \cdot \Delta\mathbf{v}_I). \tag{4.78}$$

Ze změny hybnosti

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{f}\Delta t_c, \tag{4.79}$$

kde $\mathbf{f}$ je síla a Δt_c je čas po kterou síla působí, lze vyjádřit změnu rychlosti

$$\Delta\mathbf{v} = \frac{\mathbf{f}}{m}\Delta t_c. \tag{4.80}$$

S využitím rovnic (4.53) a (4.80) může být vyjádřena změna rychlosti v uzlech 1, 2 a 3 způsobená silou působící na segment

$$\Delta\mathbf{v}_1 = -\frac{\mathbf{f}_c}{m_1}(1-\xi)\Delta t_c, \qquad \Delta\mathbf{v}_2 = -\frac{\mathbf{f}_c}{m_2}\xi\Delta t_c, \qquad \Delta\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{f}_c}{m_3}\Delta t_c. \tag{4.81}$$

Dosazením (4.81) do (4.78) je získán výraz, který lze upravit do konečné podoby

$$\begin{aligned}\Delta\Pi_k = &\frac{1}{2}m_1\left(-\frac{2\mathbf{f}_c\cdot\mathbf{v}_1}{m_1}(1-\xi)+\frac{\mathbf{f}_c\cdot\mathbf{f}_c}{m_1^2}(1-\xi)^2\Delta t_c{}^2\right) \\ &+\frac{1}{2}m_2\left(-\frac{2\mathbf{f}_c\cdot\mathbf{v}_2}{m_2}\xi+\frac{\mathbf{f}_c\cdot\mathbf{f}_c}{m_2^2}\xi^2\Delta t_c{}^2\right)+\frac{1}{2}m_3\left(\frac{2\mathbf{f}_c\cdot\mathbf{v}_3}{m_3}+\frac{\mathbf{f}_c\cdot\mathbf{f}_c}{m_3^2}\Delta t_c{}^2\right) \\ =&-\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{f}_c(1-\xi)\Delta t_c+\frac{\mathbf{f}_c\cdot\mathbf{f}_c}{2m_1}(1-\xi)^2\Delta t_c{}^2 \\ &-\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{f}_c\xi\Delta t_c+\frac{\mathbf{f}_c\cdot\mathbf{f}_c}{2m_2}\xi^2\Delta t_c{}^2+\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{f}_c\Delta t_c+\frac{\mathbf{f}_c\cdot\mathbf{f}_c}{2m_3}\Delta t_c{}^2.\end{aligned} \tag{4.82}$$

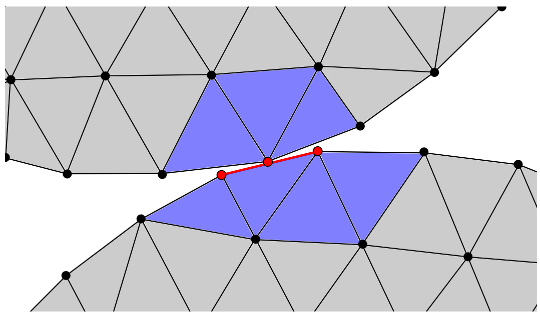
4.4.4 Změna potenciální elastické energie

Potenciální elastická energie se vlivem kontaktní síly mění v rámci jednoho časového kroku pouze v elementech j (na obrázku 4.31 vyznačeny modře), kterým přísluší alespoň jeden z uzlů kontaktu (1, 2, 3), protože pouze tyto uzly jsou touto silou ovlivněny. Tuto energii lze zapsat jako

$$\Delta\Pi_\sigma = \sigma_j \Delta\epsilon_j, \tag{4.83}$$

kde σ_j je vektor napětí a $\Delta\epsilon_j$ je vektor přírůstku přetvoření na prvcích j od kontaktní síly $\mathbf{f}_c$. Popíšeme-li tuto změnu pro jednoduchost například na lineárních příhradových prutech, kde dolní index $(\bullet)_i$ určuje číslo prutu, L_{0i} je původní délka prutu, L_i je délka prutu na začátku časového kroku a L_i^* je změněná délka na konci časového kroku, pak lze energii pro popsaný příklad vyjádřit jako

$$\begin{aligned}\Pi_\sigma =&\frac{1}{2}E_iA_i\left(\frac{L_i-L_{0i}}{L_{0i}}\right)^2=\frac{E_iA_i}{2L_{0i}^2}\Delta L_i^2, \\ \Pi_\sigma^* =&\frac{1}{2}E_iA_i\left(\frac{L_i^*-L_{0i}}{L_i^*}\right)^2=\frac{E_iA_i}{2L_{0i}^2}\Delta L_i^{*2}, \\ \Delta\Pi_\sigma =&\Pi_\sigma^*-\Pi_\sigma=\frac{E_iA_i}{2L_{0i}^2}\left(2\Delta L_i+\Delta L_i^*\right)\Delta L_i^*,\end{aligned} \tag{4.84}$$



Obrázek 4.31: Elementy zahrnuté do výpočtu změny potenciální elastické energie jednoho kontaktu.

kde E_i je Youngův modul pružnosti a A_i je průřezová plocha příslušného prutu i.

4.4.5 Změna potenciální polohové energie

Tato změna lze vyjádřit jako práce vnějších sil na posunutí uzlů 1, 2, 3. Jestliže

$$\Delta\mathbf{u}_1=-\frac{\mathbf{f}_c}{m_1}(1-\xi)\Delta t_c{}^2,\qquad \Delta\mathbf{u}_2=-\frac{\mathbf{f}_c}{m_2}\xi\Delta t_c{}^2,\qquad \Delta\mathbf{u}_3=\frac{\mathbf{f}_c}{m_3}\Delta t_c{}^2, \tag{4.85}$$

pak je změna potenciální polohové energie rovna

$$\Delta\Pi_p = -\Delta\mathbf{u}_I\mathbf{f}_I^{\text{ext}} = \frac{\mathbf{f}_c\cdot\mathbf{f}_1^{\text{ext}}}{m_1}(1-\xi)\Delta{t_c}^2 + \frac{\mathbf{f}_c\cdot\mathbf{f}_2^{\text{ext}}}{m_2}\xi\Delta{t_c}^2 - \frac{\mathbf{f}_c\cdot\mathbf{f}_3^{\text{ext}}}{m_3}\Delta{t_c}^2, \tag{4.86}$$

kde horní index $(\bullet)^{\text{ext}}$ značí vnější síly.

4.4.6 Výpočet velikosti kontaktní síly

Velikost kontaktní síly $|\mathbf{f}_c|$ se vypočítá z celkové změny energie způsobené touto silou

$$\Delta\Pi = \Delta\Pi_k(\mathbf{f}_c) + \Delta\Pi_\sigma(\mathbf{f}_c) + \Delta\Pi_p(\mathbf{f}_c) = 0. \tag{4.87}$$

Všechny změny uvedené energie jsou funkce kontaktní síly

$$\mathbf{f}_c = |\mathbf{f}_c|\mathbf{e}_c. \tag{4.88}$$

Změna celkové energie je tak funkce velikosti kontaktní síly $|\mathbf{f}_c|$ a času trvání nárazu Δt_c

$$\Delta\Pi(|\mathbf{f}_c|,\Delta t_c) = \Delta\Pi_k(|\mathbf{f}_c|,\Delta t_c) + \Delta\Pi_\sigma(|\mathbf{f}_c|,\Delta t_c) + \Delta\Pi_p(|\mathbf{f}_c|,\Delta t_c) = 0. \tag{4.89}$$

Velikost kontaktní síly je vypočítána z rovnice (4.89). Následně je kontaktní síla přepočítána na přírůstek uzlových sil

$$\Delta\mathbf{f}_1 = \Delta\mathbf{v}_A\frac{m_1}{\Delta t_c} = -\mathbf{f}_c(1-\xi), \qquad \Delta\mathbf{f}_2 = \Delta\mathbf{v}_2\frac{m_2}{\Delta t_c} = -\mathbf{f}_c\xi, \qquad \Delta\mathbf{f}_3 = \Delta\mathbf{v}_3\frac{m_3}{\Delta t_c} = \mathbf{f}_c. \tag{4.90}$$

4.4.7 Shrnutí

Důležitou charakteristikou tohoto přístupu je respektování bilance energie na diskretizované soustavě. Každý aktivní kontakt je vyhodnocen zvlášť (viz obrázek 4.31) a účinky následně sečteny do výsledného vektoru $\mathbf{G}$. Vektor $\mathbf{G}$ je dán sumou všech kontaktních sil $\mathbf{f}_c$ a jedná se o vyčíslení sil z rovnice (**??**). Celý postup je pro názornost popsán Algoritmem 2.

Vstup: Δt_c, β, charakteristiky pro výpočet napětí příslušných k elementů, $\mathbf{p}_I(0)$, $\mathbf{v}_I$, m_I pro $I \in \{1,2,3\}$

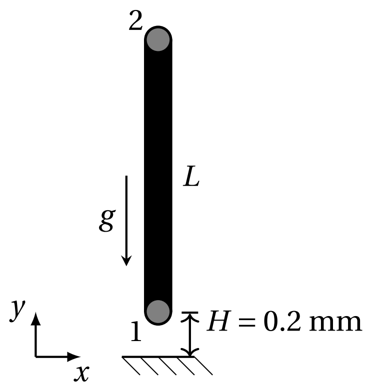
Výstup: změny uzlových sil $\Delta\mathbf{f}_1$, $\Delta\mathbf{f}_2$ a $\Delta\mathbf{f}_3$, jež jsou součástí výsledného vektoru $\mathbf{G}$

1 nalezení průniku a času nárazu dle podkapitoly **??** z poloh a rychlostí příslušných uzlů;
2 určení směru kontaktních sil $\mathbf{e}_C$ dle oddílu 4.4.2 z poloh a rychlostí;
3 výpočet změny kinetické energie $\Delta\Pi_k(\mathbf{f}_c)$ dle oddílu 4.4.3 z hmot a rychlostí (4.82);
4 výpočet změny potenciální elastické energie $\Delta\Pi_\sigma(\mathbf{f}_c)$ dle oddílu 4.4.4 z poloh a fyzikálních charakteristik příslušných elementů (4.84);
5 výpočet změny potenciální polohové energie $\Delta\Pi_p(\mathbf{f}_c)$ dle oddílu 4.4.5 z hmot a sil působících v uzlech (4.86);
6 výpočet velikosti kontaktní síly $\mathbf{f}_c$ ze změny celkové energie $\Delta\Pi = \Delta\Pi_k(\mathbf{f}_c) + \Delta\Pi_\sigma(\mathbf{f}_c) + \Delta\Pi_p(\mathbf{f}_c) = 0$;
7 výpočet změny uzlových sil $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ a $\mathbf{f}_3$ od kontaktní síly dle (4.90);

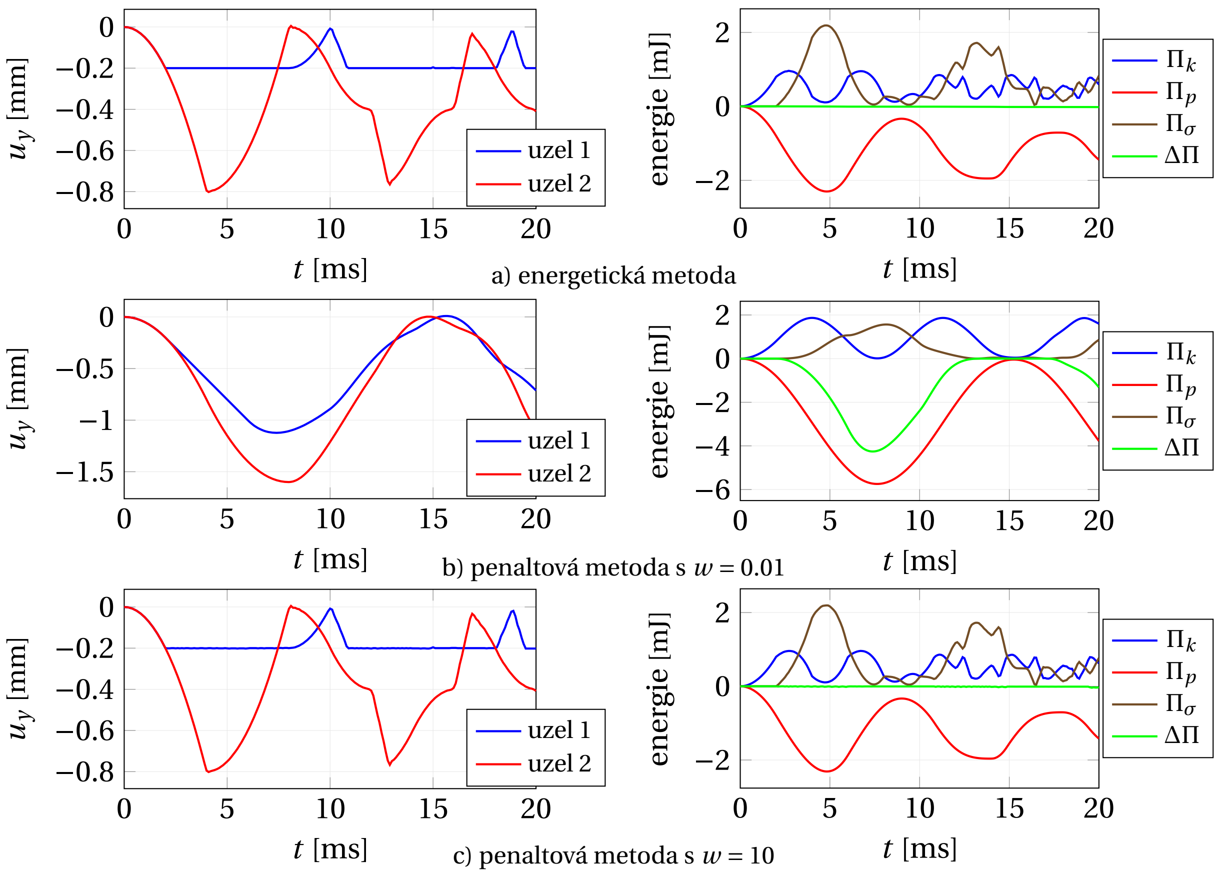
Algoritmus 2: Výpočet změny uzlových sil $\Delta\mathbf{f}_1$, $\Delta\mathbf{f}_2$ a $\Delta\mathbf{f}_3$ od kontaktní síly.

Příklad a porovnání s penaltovou metodou

Verifikace algoritmu proběhla na příkladu elastického prutu narážejícího na tuhý segment, jenž je popsán v [43]. Tuhý segment je podepřen na jeho koncích. Vstupní hodnoty byly převzaty z [59] a zároveň slouží pro porovnání výsledků s penaltovou metodou. Obrázek 4.32 ukazuje model nosníku o délce $L = 2$ m, průřezové ploše $A = 10^{-5}$ m^2, s Youngovým modulem $E = 2000$ Pa a hustotě $\rho = 2000$ kg/m^3, rozděleného na 100 elementů s hmotou diskretizovanou do uzlů. Prut je puštěn z výšky $H = 0.0002$ m směrem k tuhé podložce při gravitačním zrychlení ve svislém směru $g = 100$ m/s^2. Pro analýzu je použitý výpočetní časový krok $\Delta t = 1 \cdot 10^{-8}$ s. Kontakt je uvažován bez tření. Výsledky vyobrazené na obrázku 4.33 jsou převzaty z [76]. Obrázek 4.33a zobrazuje deformace uzlů 1, 2 a vývoj jednotlivých složek energie v čase. Tyto deformace odpovídají analytickému řešení uvedeného v [59] a graf energií potvrzuje zachování celkové energie v čase. Takto dosažené výsledky mohou být porovnány s penaltovou metodou uvedenou v [59] a znázorněnou na obrázku 4.33b a obrázku 4.33c. Vzájemné srovnání výsledků z obrázku 4.33b a obrázku 4.33c ukazuje závislost výsledků na velikosti volené penalty w, a dále lze sledovat vývoj deformací uzlů 1 a 2 v čase a jim příslušící změny energie. Výsledky poukazují na to, že pouze správně zvolené w vede ke shodě s analytickým řešením.



Obrázek 4.32: Elastický prut dopadající na tuhou podložku.



Obrázek 4.33: Deformace uzlů 1 a 2, společně s jednotlivými složkami energie pro energetickou metodu (a), penaltovou metodu s $w = 0.01$ (b) a penaltovou metodu s $w = 0$ (c).

4.5 SVÁZÁNÍ STUPŇŮ VOLNOSTI

Jedná se o obecný přístup sloužící k definici kinematických podmínek, primárně používaném pro definování okrajových podmínek. Kromě okrajových podmínek je však tento přístup aplikovatelný pro širší spektrum úloh. Konkrétně lze tuto metodu využít i pro modelování různých druhů vazeb, kterých je v rámci této podkapitoly využito i pro definici nového kladkového elementu.

V této části jsou popsány implementované typy vazeb, zapracované vždy ve dvou variantách, využívající buď penaltovou metodu a nebo metodu Lagrangeových multiplikátorů.

Následující příklady typů vazeb budou vždy uvažovat s provázáním uzlů s šesti stupni volnosti (postupně: tří translační ve směrech os x, y, z a tři rotační kolem těchto os φ_x, φ_y a φ_z). Horní index $(\bullet)^1$ a $(\bullet)^2$ slouží jako identifikátor uzlu. Vazby lze teoreticky předepsat v libovolném souřadném systému, který se také může v průběhu výpočtu měnit v závislosti na jeho definici (neměnný a měnící se v průběhu výpočtu v závislosti na jednom či více řídících uzlech).

Násobitel

Tento typ vazby umožňuje definovat násobitele mezi zvolenými stupni volnosti. V případě stejných deformací se jedná o předpis

$$
\begin{aligned}
u_x^2 &= 1 \cdot u_x^1, & \varphi_x^2 &= 1 \cdot \varphi_x^1,\\
u_y^2 &= 1 \cdot u_y^1, & \varphi_y^2 &= 1 \cdot \varphi_y^1,\\
u_z^2 &= 1 \cdot u_z^1, & \varphi_z^2 &= 1 \cdot \varphi_z^1.
\end{aligned} \tag{4.91}
$$

Pokud má být deformace ve směru x v druhém uzlu 3krát větší než v uzlu prvním, změnil by se první řádek v (4.91) na

$$
u_x^2 = 3 \cdot u_x^1. \tag{4.92}
$$

Diafragma

Vazba tohoto typu představuje tuhé chování, avšak pouze v rámci jedné roviny. Chceme-li zavést diafragma mezi uzly v rovině xy, má vazba předpis

$$
\begin{aligned}
u_x^2 &= u_x^1 - \varphi_z^1 \cdot \Delta y,\\
u_y^2 &= u_y^1 + \varphi_z^1 \cdot \Delta x,\\
\varphi_z^2 &= \varphi_z^1.
\end{aligned} \tag{4.93}
$$

Tuhý prut

Vazba simulující tuhý prut lze předepsat při uvažování lokálního souřadného systému s osou x soumeznou s osou prutu jako

$$
\begin{aligned}
u_x^2 &= u_x^1 - \varphi_z^1 \cdot \Delta y + \varphi_y^1 \cdot \Delta z, & \varphi_x^2 &= \varphi_x^1,\\
u_y^2 &= u_y^1 + \varphi_z^1 \cdot \Delta x, & \varphi_y^2 &= \varphi_y^1,\\
u_z^2 &= u_z^1 - \varphi_y^1 \cdot \Delta x, & \varphi_z^2 &= \varphi_z^1.
\end{aligned} \tag{4.94}
$$

Pevná vzdálenost

Vazba uchovává neměnnou vzdálenost mezi uzly, osu x tvoří spojnice prvního a druhého uzlu.

$$u_x^2 = u_x^1 \tag{4.95}$$

Tuhé těleso

Tato podmínka předepisuje chování bodů jakožto pohyb tuhého tělesa, a mezi všemi body v této vazbě je vzájemně předepsána pevná vzdálenost a stejná rotace.

$$\begin{aligned} u_x^2 &= u_x^1 - \varphi_z^1 \cdot \Delta y + \varphi_y^1 \cdot \Delta z, \qquad & \varphi_x^2 &= \varphi_x^1, \\ u_y^2 &= u_y^1 + \varphi_z^1 \cdot \Delta x - \varphi_x^1 \cdot \Delta z, \qquad & \varphi_y^2 &= \varphi_y^1, \\ u_z^2 &= u_z^1 + \varphi_x^1 \cdot \Delta y - \varphi_y^1 \cdot \Delta x, \qquad & \varphi_z^2 &= \varphi_z^1. \end{aligned} \tag{4.96}$$

Optimalizace vazeb

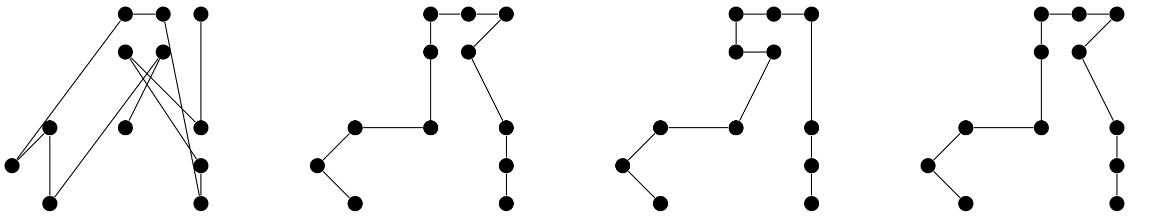
Při aplikaci vazeb typu tuhé těleso či diafragma na množinu uzlů, je vazba závislá na vzájemné vzdálenosti jednotlivých uzlů. Způsob vzájemného propojení uzlů je proto také významný, jelikož nevhodné propojení uzlů s sebou může přinášet řadu negativních vlivů. Náhodné propojení vyobrazené na obrázku 4.34a může z důvodu závislosti tuhosti na vzdálenosti vazby u penaltové metody vést k nepřesnému řešení, propojení každého uzlu s každým uzlem zase k problému špatně podmíněné soustavy. Proto se provázání uzlů volí tak, že uzly jsou spojeny vazbami ve smyslu nejkratší možné spojnice mezi těmito uzly, čímž se sníží výskyt zbytečně rozdílných vzdáleností v rámci jedné množiny uzlů.

Takto zvolený způsob propojení byl zapracován napřed za pomoci přesného řešení (viz obrázek 4.34b), později byl však z důvodu výpočetní náročnosti popsané v tabulce 4.1 doplněn o možnost určení tohoto propojení za využití optimalizačního algoritmu mravenčích kolonií (ACO - Ant Colony Optimization) pro jeho jednoduchou implementaci a lepší výkon u většího počtu propojovaných uzlů při dosažení dostačující přesnosti.

Algoritmus	**Časová náročnost**
dynamický (přesné řešení)	$O(n^2 \times 2^n)$
ACO (1 iterace)	$O(n)$ [64]

Tabulka 4.1: Časová náročnost použitých algoritmů.

ACO je metaheuristický přístup, kde je optimalizace prováděna prostřednictvím modelování mravenčích feromonů, jejichž hodnoty jsou analyzovány a upravovány v každé iteraci, v závislosti na jednoduchých parametrech definovaných jako míra vypařování feromonu ρ, exponent vlivu feromonu α a exponent vlivu vzdálenosti β. Ukázka výsledků způsobených úpravou ρ jde vidět na obrázku 4.34 při porovnání obrázku 4.34c a obrázku 4.34d. Podrobnější popis algoritmu lze nalézt například v [34, 51].



a) náhodné spojení, $d = 32.183$ m

b) spojení za pomoci přesného řešení, $d = 15.479$ m

c) spojení za pomoci algoritmu ACO $\rho = 0.1$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $d = 16.064$ m

d) spojení za pomoci algoritmu ACO $\rho = 0.15$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $d = 15.479$ m

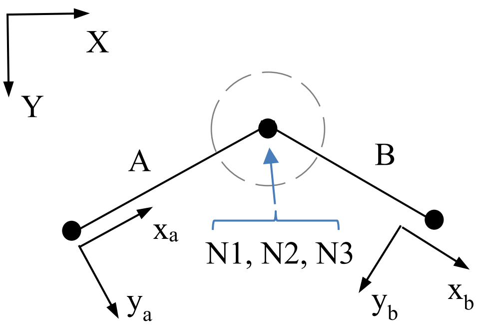
Obrázek 4.34: Výsledky různých způsobů spojení uzlů, včetně výsledné délky d.

4.5.1 Element kladky

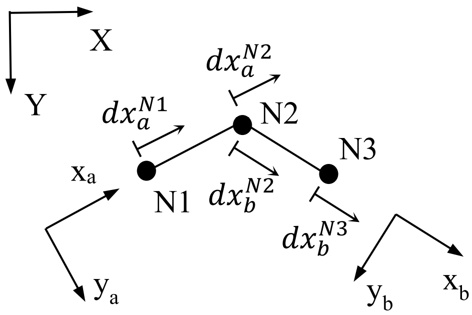
Kladky jsou využity v mnoha budovách a konstrukcích z důvodu jejich konstrukční jednoduchosti a mechanických výhod při přenosu sil. Soustava kladek často tvoří rozsáhlý a komplikovaný systém, což vedlo k návrhu řady řešení pro jejich modelování [3, 21, 22, 48]. Tento element byl autorem práce poprvé představen v [72]. Nově vytvořený element kladky nepotřebuje pracovat s tuhostí lan připojených ke kladce, což vede na algoritmus jednoduše implementovatelný do řešičů na bázi konečných prvků.

Definice elementu kladky

Element kladky je definován transformačními maticemi připojených lanových prvků a třemi uzly (viz obrázek 4.35). Tři uzly zahrnují dva koncové uzly lan (N1, N3) a jeden uzel reprezentující kladku (N2). Poloměr kladky je zanedbán a všechny tři uzly jsou soumezné. [72]



Obrázek 4.35: Idealizovaná soustava využívající element kladky [72, 73].



Obrázek 4.36: Element kladky [72].

Transformační matice každého lanového elementu je definována jako

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{T}_a \mathbf{X}, \tag{4.97}$$

kde

$$\mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} T_{a11} & T_{a12} & T_{a13} \\ T_{a21} & T_{a22} & T_{a23} \\ T_{a31} & T_{a32} & T_{a33} \end{bmatrix}. \tag{4.98}$$

K popisu elementu poslouží obrázek 4.36 s fiktivně vzdálenými uzly N1, N2 a N3 (z důvodu názornosti). Chování elementu je definováno rovnicí

$$dx_a^{N1} - dx_a^{N2} = dx_b^{N2} - dx_b^{N3}. \tag{4.99}$$

Rovnice elementu (4.99) je při implementaci definována maticí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} T_{a11} & T_{a21} & T_{a31} & (T_{B11} - T_{a11}) & (T_{B21} - T_{a21}) & (T_{B31} - T_{a31}) & T_{B11} & T_{B21} & T_{B31} \end{bmatrix}. \tag{4.100}$$

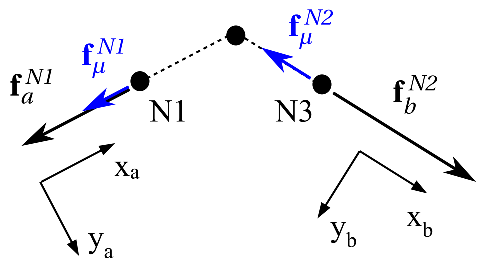
Rovnice (4.100) se využívá při implementaci přes penaltovou metodu i přes metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vliv tření v čepu kladky je možné zohlednit výpočtem třecí síly, která je aplikována na koncové uzly lan N1 a N3 dle vztahů

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ab} &= \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_b, \\ \mathbf{f}_\mu^{N1} &= +\mathrm{sgn}(dx_a^{N1} - dx_a^{N2})\mu|\mathbf{f}_{ab}|\frac{|\mathbf{f}_a^{N1}|}{|\mathbf{f}_a^{N1}| + |\mathbf{f}_b^{N3}|}\mathbf{f}_a^{N1}, \\ \mathbf{f}_\mu^{N3} &= -\mathrm{sgn}(dx_a^{N3} - dx_a^{N2})\mu|\mathbf{f}_{ab}|\frac{|\mathbf{f}_b^{N3}|}{|\mathbf{f}_a^{N1}| + |\mathbf{f}_b^{N3}|}\mathbf{f}_b^{N3}, \end{aligned} \tag{4.101}$$

kde μ je součinitel tření a funkce $\mathrm{sgn}(\bullet)$ se počítá jako

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{když } x > 0 \\ 0 & \text{když } x = 0 \\ -1 & \text{když } x < 0. \end{cases} \tag{4.102}$$

Jednotlivé síly $\mathbf{f}_\mu^{N1}$, $\mathbf{f}_\mu^{N2}$, $\mathbf{f}_a^{N1}$ a $\mathbf{f}_b^{N2}$ ze vztahů (4.101) jsou vyobrazeny na obrázku 4.37.

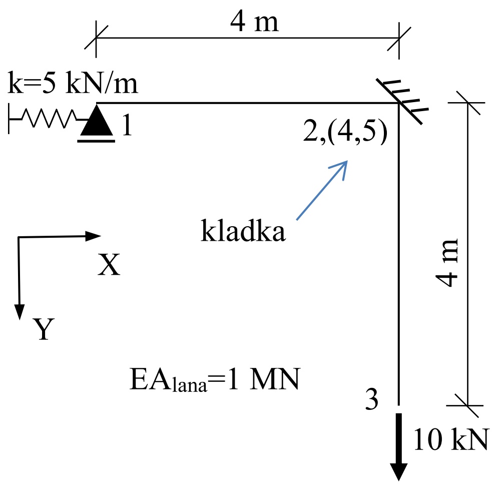


Obrázek 4.37: Znázornění tření na kladce.

Příklad

Model použitý k verifikaci elementu kladky je vyobrazen na obrázku 4.38 a převzat z článku autora [72]. Podpora v uzlu 1 má tuhost 5 kN/m ve směru X, podpora v uzlu 2 je tuhá ve všech směrech a uzel 3 je zatížen silou 10 kN ve směru Y. Kladka je umístěna v uzlu 2 a vnitřní uzly 4 a 5 jsou vytvořeny k umožnění využití elementu kladky. Normálová tuhost průřezu lana je 1 MPa. Výpočet byl proveden v programu *RFEM*. Vypočítané posuny uvedené v tabulce níže jsou stejné pro obě metody. Výsledky odpovídají analytickému řešení.

Uzly	1		3	
Směr	dX	dY	dX	dY
Posun - analytické řešení	2.00 m	0.00 m	0.00 m	2.08 m
Posun - Lagrangeovy multiplikátory	2.00 m	0.00 m	0.00 m	2.08 m
Posun - penaltová metoda ($w = 2.5 \cdot 10^{11}$)	2.00 m	0.00 m	0.00 m	2.08 m



Obrázek 4.38: Příklad využívající element kladky [72].

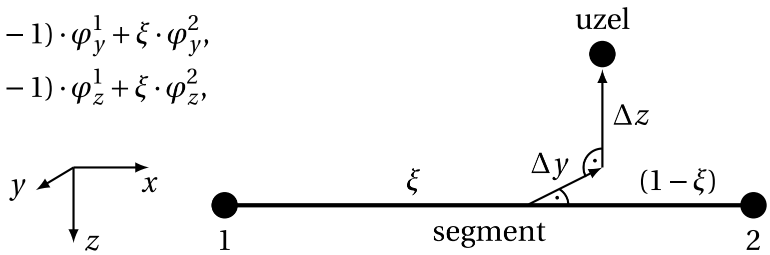
4.5.2 Relativní poloha

Vazba umožňuje definici tuhého provázání deformací a liší se liší od vazby pro tuhé těleso z oddílu 4.5 především relativní definicí polohy slave uzlu oproti master elementu a také tím, že se nedefinuje pouze mezi dvojicí uzlů. Tato vazba lze předepsat mezi dvojici uzel-segment, přičemž segment může tvořit jakákoliv linie, plocha či těleso. Souřadný systém je vždy ztotožněn se souřadným systémem master segmentu.

Segment 1D

Spojení uzlu a 1D segmentu si lze představit jako spojení uzlu s linií (viz obrázek 4.39). Vzdálenost kolmo k linii (směr os y a z) je konstantní, zatímco poloha kolmice od prutu k bodu je definována tak, aby byly její relativní vzdálenosti k uzlům prutu vždy ve stejném poměru. Vazba je definována v souřadném systému, kdy je osa linie soumezná s osou x.

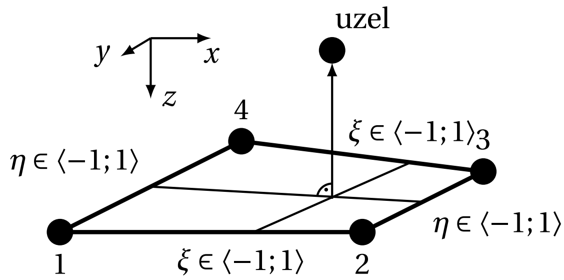
$$
\begin{aligned}
u_x^{slave} &= (\xi-1)\cdot u_x^1 + \xi\cdot u_x^2 - \left((\xi-1)\cdot\varphi_z^1 + \xi\cdot\varphi_z^2\right)\cdot\Delta y + \left((\xi-1)\cdot\varphi_y^1 + \xi\cdot\varphi_y^2\right)\cdot\Delta z,\\
u_y^{slave} &= (\xi-1)\cdot u_y^1 + \xi\cdot u_y^2 + \left((\xi-1)\cdot\varphi_z^1 + \xi\cdot\varphi_z^2\right)\cdot\Delta x - \left((\xi-1)\cdot\varphi_x^1 + \xi\cdot\varphi_x^2\right)\cdot\Delta z,\\
u_z^{slave} &= (\xi-1)\cdot u_z^1 + \xi\cdot u_z^2 + \left((\xi-1)\cdot\varphi_x^1 + \xi\cdot\varphi_x^2\right)\cdot\Delta y - \left((\xi-1)\cdot\varphi_y^1 + \xi\cdot\varphi_y^2\right)\cdot\Delta x,\\
\varphi_x^{slave} &= (\xi-1)\cdot\varphi_x^1 + \xi\cdot\varphi_x^2,\\
\varphi_y^{slave} &= (\xi-1)\cdot\varphi_y^1 + \xi\cdot\varphi_y^2,\\
\varphi_z^{slave} &= (\xi-1)\cdot\varphi_z^1 + \xi\cdot\varphi_z^2,
\end{aligned}
\tag{4.103}
$$



Obrázek 4.39: Geometrie relativního připojení uzlu na 1D segment.

Segment 2D

Připojení uzlu k 2D segmentu je pro názornost popsáno i definováno v lokálním souřadném systému 2D elementu (viz obrázek 4.40). Vzdálenost kolmo k segmentu (směr lokální osy z) je konstantní, poloha kolmice od elementu k bodu je definována relativní vzdálenosti k uzlům pro zachování stejného poměru. Váhy jednotlivých uzlů jsou pro čtyřhran definovány jako



Obrázek 4.40: Geometrie relativního připojení uzlu na 2D segment.

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \quad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta).$$

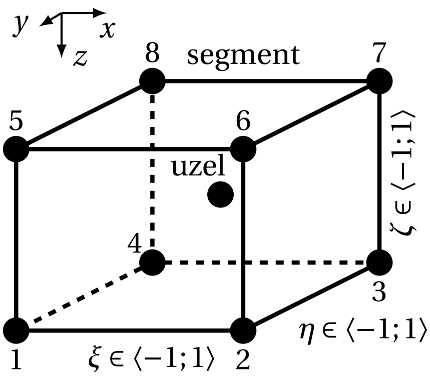
$$\begin{aligned} u_x^{slave} &= \Big(\sum_{i=1}^{m} N_i \cdot u_x^i\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{m} N_i \cdot \varphi_y^i\Big) \cdot \Delta z, \\ u_y^{slave} &= \Big(\sum_{i=1}^{m} N_i \cdot u_y^i\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{m} N_i \cdot \varphi_x^i\Big) \cdot \Delta z, \\ u_z^{slave} &= \sum_{i=1}^{m} N_i \cdot u_z^i, \\ \varphi_x^{slave} &= \sum_{i=1}^{m} N_i \cdot \varphi_x^i, \\ \varphi_y^{slave} &= \sum_{i=1}^{m} N_i \cdot \varphi_y^i, \\ \varphi_z^{slave} &= \sum_{i=1}^{m} N_i \cdot \varphi_z^i, \end{aligned} \tag{4.104}$$

kde m je počet vrcholů.

Segment 3D

Váhy jednotlivých uzlů odpovídají použitým tvarovým funkcím daného tělesového prvku, pro šestistěn jsou definovány jako

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta), \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta), \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta), \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta), \\ N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta), \\ N_6 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta), \\ N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta), \\ N_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_x^{slave} &= \sum_{i=1}^{m} N_i \cdot u_x^i, \\ u_y^{slave} &= \sum_{i=1}^{m} N_i \cdot u_y^i, \\ u_z^{slave} &= \sum_{i=1}^{m} N_i \cdot u_z^i, \\ \varphi_x^{slave} &= \sum_{i=1}^{m} N_i \cdot \varphi_x^i, \\ \varphi_y^{slave} &= \sum_{i=1}^{m} N_i \cdot \varphi_y^i, \\ \varphi_z^{slave} &= \sum_{i=1}^{m} N_i \cdot \varphi_z^i, \end{aligned} \tag{4.105}$$



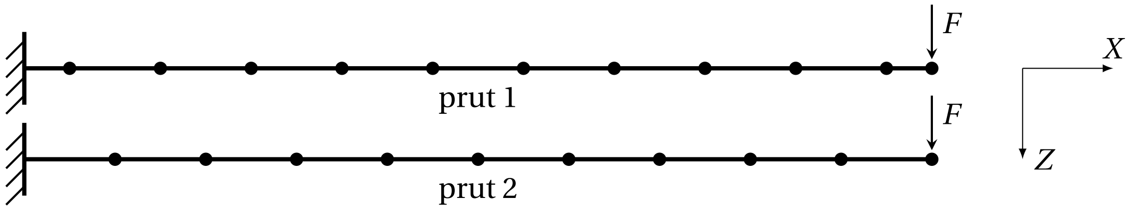
Obrázek 4.41: Geometrie relativního připojení uzlu na 3D segment.

kde m je počet vrcholů. Pro ostatní tvary prostorových prvků lze využít například tvarové funkce uvedené v [32].

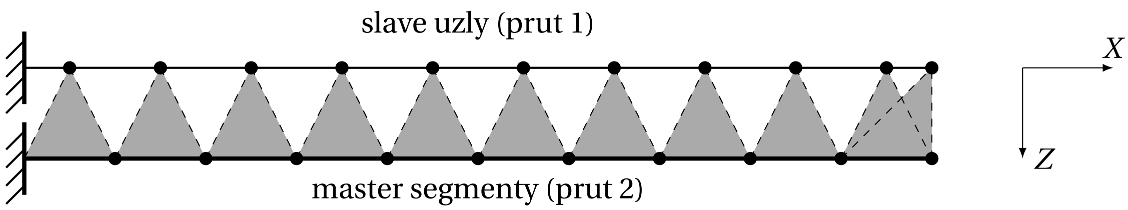
Příklad 1

V příkladu převzatém z [77] je relativní vazbou modelován svar. Model je popsán na obrázku 4.42. Dvojice prutů je dána obdelníkovým průřezem (viz obrázek 4.45a) a materiálem s $E = 1$ MPa a $\nu = 0.5$. Pruty jsou tuze podepřeny na své levé straně ve všech směrech a mají délku 10 m. Vertikální vzdálenost mezi těžišti obou prutů je 1 m. Pruty 1 a 2 jsou zatíženy stejnou silou $F = 5N$. Svar mezi pruty (master segment definovaný prutem 2 a slave uzly na prutu 1) je modelován jako tuhý a kontaktní dvojice jsou vyobrazeny na obrázku 4.43.

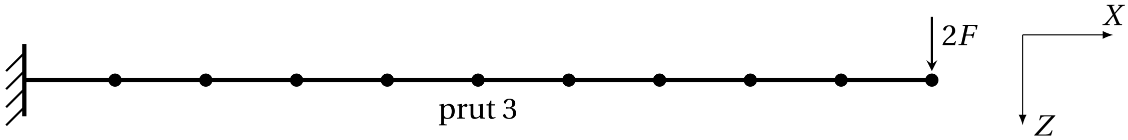
Ke kontrole výsledků slouží konzolový prut 3 (obrázek 4.44) se stejnou geometrií jako prut 2 s obdelníkovým průřezem (obrázek 4.45b) a silovým zatížením rovnému $2F$. Pro správně spojené pruty 1 a 2 musíme dostat na prutu 3 stejné deformace jako dostáváme na prutu 2.



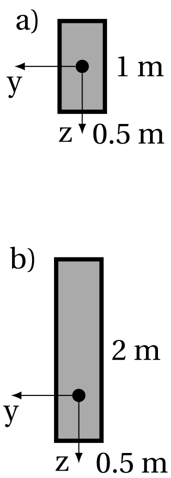
Obrázek 4.42: Model spojených konzolových prutů zatížených na jejich koncích silami $F = 5$ N ve směru Z [77].



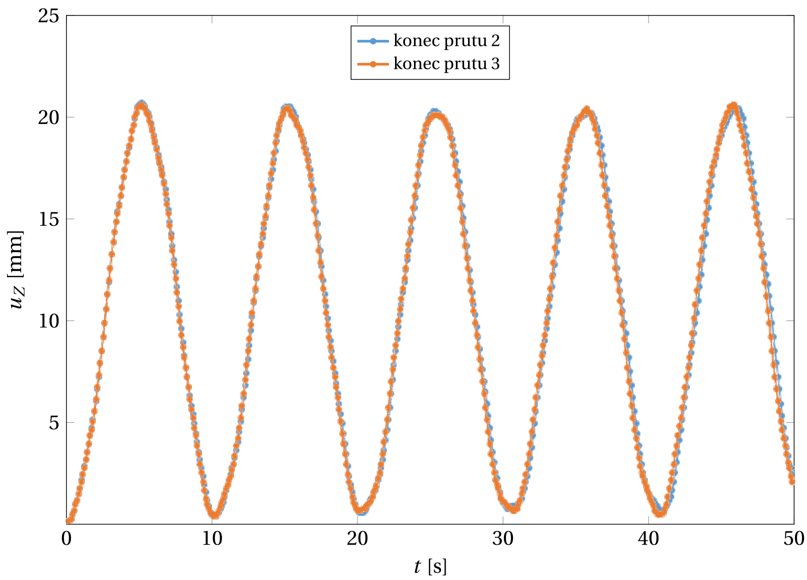
Obrázek 4.43: Vizualizace kontaktu mezi pruty [77].



Obrázek 4.44: Model konzolového prutu 3 zatíženého na konci silou $2F = 10$ N ve směru Z [77].



Obrázek 4.45: Obdélníkové průřezy s výškou 1 m nalevo (a) a s výškou 2 m napravo (b), mající shodnou šířku průřezu 0.5 m.



Obrázek 4.46: Výsledky posunutí koncových uzlů prutů 2 a 3 ve směru u_Z v čase [77].

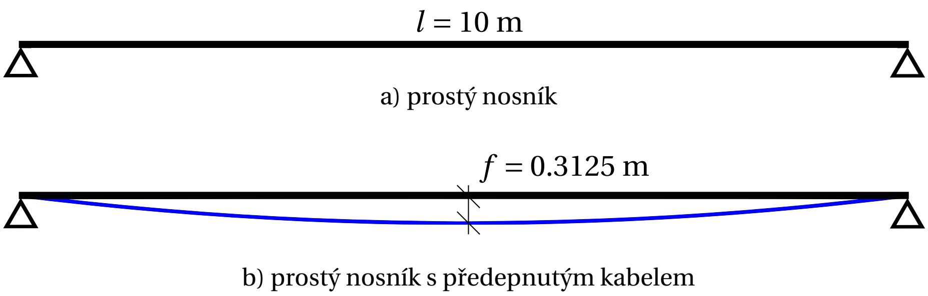
Na tomto modelu byla provedena lineární Newmarkova časová analýza s využitím pouze vlastní tíhy a konstantního zatížení silami po dobu 50 sekund. Výsledky jsou vyobrazeny na obrázku 4.46.

Výsledky tohoto příkladu ukazují správné deformace v koncových uzlech prutu 2 a 3. Deformace v obou koncových uzlech jsou 22.7 mm a graf také ukazuje, že uzly mají stejnou periodu.

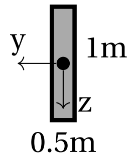
Příklad 2

Tento příklad demonstruje jednu z možností využití vazeb z pododdílu 4.5.2, konkrétně umožnění modelování předpínací výztuže jakožto samostatného elementu s přímým provázáním na příslušný prutový prvek.

Příklad porovnává dva modely znázorněné na obrázku 4.47. Jedná se o prostý nosník délky l = 10 m zatížený vlastní tíhou (viz obrázek 4.47a) s upraveným modelem, který navíc obsahuje předpjatý kabel (viz obrázek 4.47b). Nosník má obdélníkový průřez (obrázek 4.48) z betonu C30/37, předpínací kabel má kruhový průřez o průměru 6 mm z oceli St1420/1570.



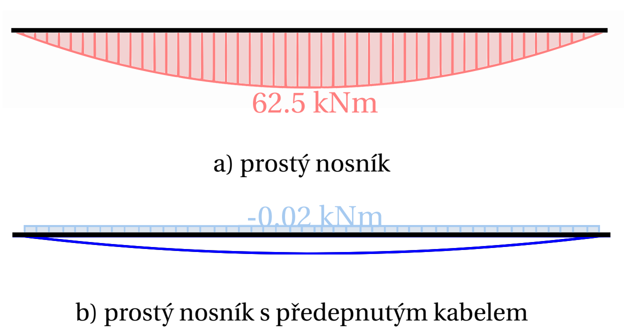
Obrázek 4.47: Znázornění dvou porovnávaných prutových modelů, kde varianta a) je prostý nosník a model b) navíc obsahuje předpjatý kabel.



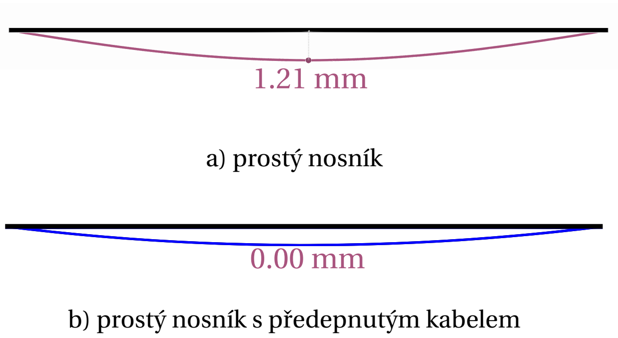
Obrázek 4.48: Průřez nosníku.

Geometrie a předpětí kabelu bylo zvoleno dle [35] tak, aby byl pokud možno vyrušen vliv vlastní tíhy na nosník. Byla proto zvolena parabolická dráha se vzepětím f = 0.3125 m a předpínací silou 200 kN. Nosník a kabel jsou rozděleny na 50 prvků. V druhém modelu jsou uzly kabelu připojeny k prvkům nosníku dle pododdílu 4.5.2.

Obrázek 4.49 ukazuje průběh výsledných ohybových momentů M_y vzniklých od výše popsaného zatížení. U varianty b) lze pozorovat odchylku pouze 0.032 % od požadované korekce původních 62.5 kNm. Změna průběhu ohybových momentů M_y má přímý vliv i na výslednou deformaci nosníku znázorněnou na obrázku 4.50, kde lze pozorovat vynulování průhybu v rámci sledované přesnosti.



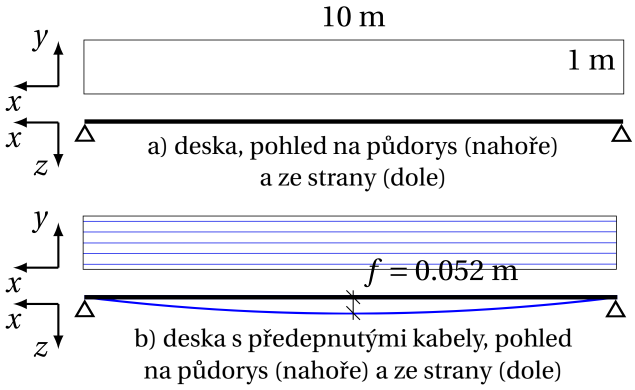
Obrázek 4.49: Výsledné ohybové momenty M_y.



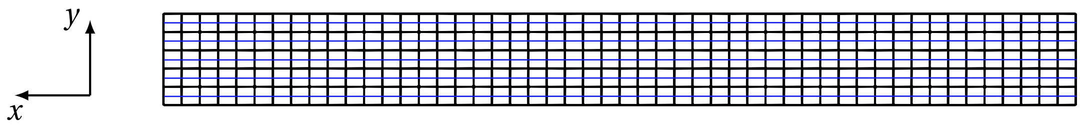
Obrázek 4.50: Výsledky průhybů.

Příklad 3

Tento příklad představuje využití vazby pro 2D prvky z pododdílu 4.5.2. Jsou porovnány dva modely z obrázku 4.51, v obou případech jde o desku s délkou 10 m, šířkou 1 m a tloušťkou 0.2 m z betonu C30/37. Deska je zatížena pouze vlastní tíhou. Tato deska je ve své druhé variantě navíc vyztužena pěti předpínacími kabely kruhového průřezu o průměru 6 mm z oceli St1420/1570, rozloženými ekvidistantně po 0.2 m s geometrií paraboly opět tak, aby byl vyrušen vliv vlastní tíhy dle [35]. Kabel má vzepětí $f = 0.052$ m a je předepnut na 200 kN. Deska i kabely jsou rozděleny na 50 prvků po své délce a deska na 5 elementů po své šířce, jak je znázorněno na obrázku 4.52.

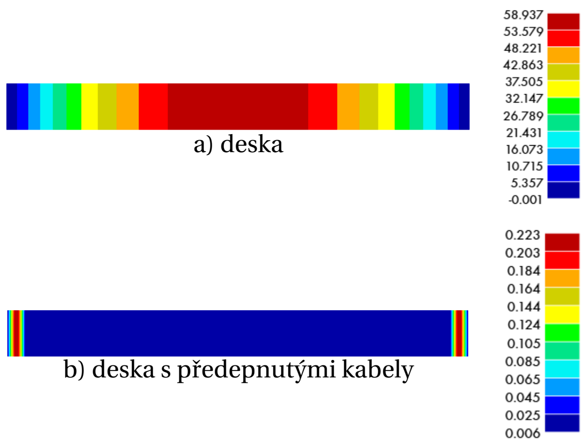


Obrázek 4.51: Znázornění dvou porovnávaných skořepinových modelů desky se statickým schématem prostého nosníku, kde varianta a) je pouze z betonu a model b) navíc obsahuje předpjaté kabely.

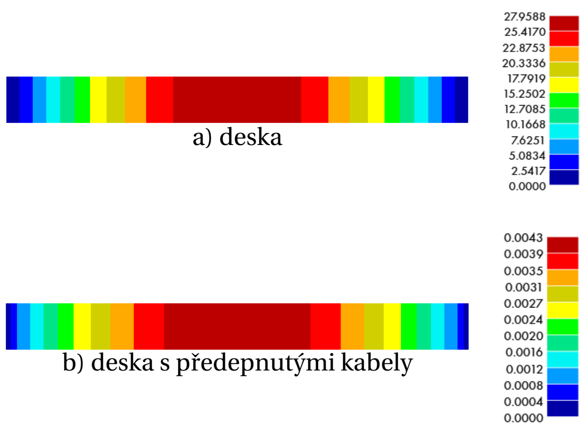


Obrázek 4.52: Použitá síť konečných prvků.

V druhém modelu jsou uzly kabelů připojeny k prvkům desky za pomoci definice relativní polohy uzlu k plošnému prvku. Obrázek 4.53 ukazuje průběh výsledných ohybových momentů M_x vzniklých od výše popsaného zatížení. Průhyby jsou znázorněny na obrázku 4.54. Příklad demonstruje možnost využití vazeb z pododdílu 4.5.2 k modelování předpínací výztuže jakožto samostatného elementu s přímým napojením na příslušné 2D prvky.



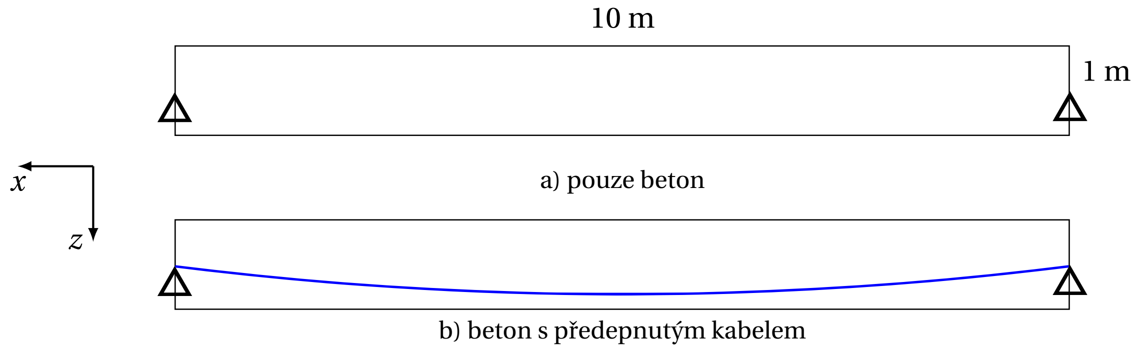
Obrázek 4.53: Výsledné ohybové momenty M_x [kNm/m].



Obrázek 4.54: Výsledky průhybů u_z [mm].

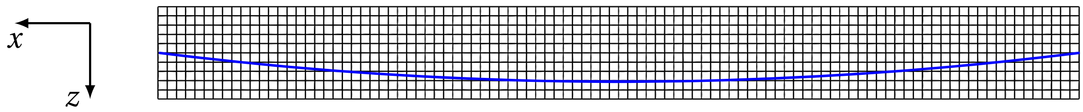
Příklad 4

Tento příklad je shodný s příkladem z pododdílu 4.5.2, prostý nosník je však na rozdíl od něj modelován z objemových prvků. Kabel je opět modelován za pomoci 1D elementů, jež jsou k 3D nosníku připojeny s využitím vazby pro 3D prvky z pododdílu 4.5.2. Oba modely jsou znázorněny na obrázku 4.55.

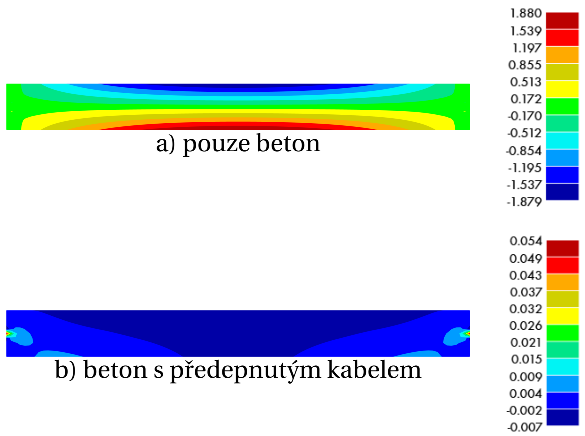


Obrázek 4.55: Znázornění dvou porovnávaných objemových modelů se statickým schématem prostého nosníku, kde varianta a) je pouze z betonu a model b) navíc obsahuje předpjatý kabel.

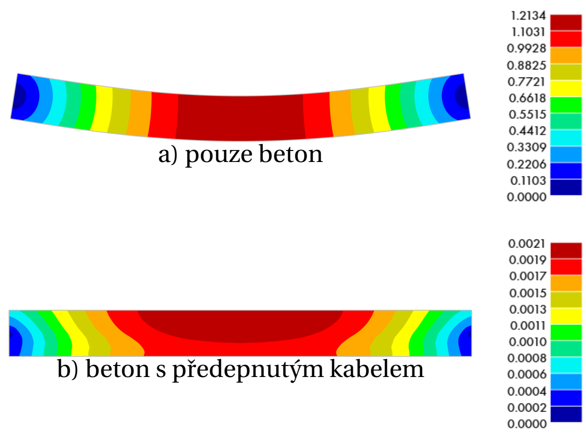
Délka hrany 3D prvků i prvků kabelu je 0.1 m a kompletní síť konečných prvků je znázorněna na obrázku 4.56. Obrázek 4.57 ukazuje průběh výsledného napětí σ_x. Celkové deformace jsou znázorněny na obrázku 4.58. Příklad ukazuje možnost využití definice relativní polohy uzlu v objemovém prvku k modelování předpínací výztuže a zároveň i přímé porovnání s řešením za využití pouze 1D elementů (viz pododdíl 4.5.2).



Obrázek 4.56: Použitá síť konečných prvků.



Obrázek 4.57: Výsledné ohybové momenty σ_x [N/mm^2].



Obrázek 4.58: Výsledky celkových deformací u [mm].

5 ZÁVĚR

Předkládaná disertační práce se věnovala ošetření kontaktních vazbových podmínek v metodě konečných prvků. V úvodní části byl shrnut současný stav poznání v této problematice, kde po zformulování počáteční okrajové úlohy s kontaktem v silné a slabé formě byla pozornost věnována prostorové diskretizaci metodou konečných prvků a následně časové diskretizaci. Nejen na základě kritické rešerše dostupné literatury, ale i inženýrské praxe autora ve firmě *FEM consulting*, bylo identifikováno několik otevřených problémů, které byly zformulovány do podoby tří cílů.

Prvním a současně hlavním cílem této práce bylo navrhnout a otestovat nový přístup k řešení dynamických kontaktních problémů při použití explicitní časové integrace. Je dobře známo, že běžně používané přístupy pro vynucení kontaktních podmínek vedou často ke zhoršení stability explicitního časového integračního schématu, což je nutno kompenzovat zmenšením výpočetního časového kroku. Rovněž dochází k vnesení chyb do výpočtu v podobě falešných oscilací posunutí na kontaktním rozhraní a kontaktních sil, které lze eliminovat např. laděním hodnot vstupních veličin v případě penaltové metody nebo nutností řešit soustavu rovnic v případě metody Lagrangeových multiplikátorů. Pro vyřešení tohoto problému byly v závislosti na použité diskretizaci kontaktu navrženy tři přístupy. První metoda, která byla popsána v podkapitole 4.1, je určena především pro absolutně tuhé stejně jako lineárně a nelineárně poddajné kontaktní vazby typu kloub a je založena na ztotožnění uzlů. Těžištěm celé práce ja pak druhá navržená metoda, jejíž hlavní myšlenkou byla úvaha nad příčinou vzniku výše popsaných oscilací. Při explicitní časové integraci se z rovnováhy sil v určitém časovém kroku t_n vypočítá zrychlení, pomocí kterého se aktualizují kinematické veličiny v čase t_{n+1}. Přitom se předpokládá, že kontaktní síly jsou po celou dobu časového kroku Δt konstantní. To však nemusí být pravda, protože ke kontaktu, a tím pádem ke skokové změně kontaktních sil, může dojít v libovolném okamžiku z intervalu (t_n, t_{n+1}). Druhá navržená metoda je založena na stanovení okamžiku kontaktu t_c a výpočtu kinematických veličin na základě zachování hybnosti. Metoda byla podrobně popsána v rámci podkapitoly 4.3, kde byl tento přístup systematicky vysvětlen od příkladu podpor, přes kontakt node-to-node až po obecný kontakt node-to-segment, včetně popisu speciálních případů pro kontakt vícero uzlů se stejným segmentem a styku hran v prostoru. A konečně třetí navrhovaná metoda vychází z výpočtu změny energie, jež je způsobena kontaktními silami na rozhraní kontaktu. Konkrétní postup výpočtu jednotlivých složek energie a jejich využití v rámci této metody popisuje podkapitola 4.4.

Vedle problematiky ošetření kontaktu při explicitní časové integraci byly v rámci předkládané práce, konkrétně v oddílech 4.5 až 4.5.2, studovány a implementovány nejrůznější typy vazbových podmínek mající široké využití ve stavební praxi při modelování konstrukcí za pomoci metody konečných prvků. Například provázání prutové výztuže se sítí konečných prvků modelující betonovou část konstrukce a tvořící tak společně železobetonový kompozit [18], nebo nahrazení svaru při modelování přípojů ocelových konstrukcí [47]. Při zapracování provázání obecné množiny uzlů do jedné vazby bylo využito optimalizačních algoritmů popsaných v oddílu 4.5. Příklady vybraných druhů vazeb jsou uvedeny v pododdílech 4.5.2 až 4.5.2, kde modelují připojení předpínacího kabelu k betonové části konstrukce.

Studium těchto základních vazeb dalo vzniknout druhému cíli této práce — návrhu originálního kladkového konečnoprvkového elementu, jenž by umožnil zanedbat vliv poloměru kladky, a poskytnout tak možnost efektivnějšího výpočtu modelů umožňující takové zjednodušení. V oddílu 4.5.1 byly zformulovány rovnice pro vytvoření kladkového konečněprvkového elementu, které umožňují modelovat mechanismus kladky včetně zohlednění nelinearity způsobené zohledněním vlivu tření při pohybu lana přes kladku. Nově navržený element byl verifikován pomocí dostupného analytického řešení.

A konečně třetím cílem této práce bylo všechny teoreticky popsané a navržené přístupy implementovat do komplexního řešiče na bázi konečných prvků firmy *FEM consulting* za pomoci jazyků *C#* a *FORTRAN*, což s sebou obnášelo i návrh vhodných definic vstupních a výstupních rozhraní pro zadávání modelu i zobrazování dopočítaných výsledků. Nový kladkový element a vazbové rovnice byly implementovány za pomoci dvou běžně používaných metod — penaltové metody a metody Lagrangeových multiplikátorů. Všechny příklady uvedené v kapitole 4 byly vypočítány prostřednictvím vyvinutých funkcí a demonstrují tak implementaci i korektnost navržených řešení.

Rozšíření nově navržených metod pro explicitní dynamiku o vliv tření na kontaktu a pokročilejší mapování kontaktního rozhraní včetně rozšíření o další typy diskretizace kontaktu bude předmětem dalšího vývoje.

S ohledem na cíle stanovené v kapitole 3 lze konstatovat, že veškeré cíle práce byly splněny.

LITERATURA

[1] Ansys, ANSYS Help, 2020 R2, Ansysm Inc., Canonsburg, Pennsylvania, United States, 2020.

[2] ARMERO, F. a PETŐCZ, E. Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 1998, **158**, 269-300. Dostupné z: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782597002569.

[3] AUFAURE, M. A finite element of cable passing through a pulley. *Computers & Structures*. Elsevier, 1993, **46**(5), 807-812. ISSN 0045-7949.

[4] BATHE, K.J. *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, New Jersey, 2009.

[5] BECKER, R., HANSBO, P. A STENBERG, R. A finite element method for domain decomposition with non-matching grids, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2003, **37**, 209–225.

[6] CRISFIELD, M.A. Re-visiting the contact patch test. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000, **48**, s. 435–449.

[7] ECK, C., JARUŠEK, J. a SOFONEA, M. A dynamic visco-elasto-plastic unilateral contact problems with normal damped response and Coulomb friction. *European Journal of Applied Mathematics*. 2010, **21**, 221–251.

[8] EL-ABBASI, N. A BATHE, K.J. Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm. *Computers & Structures*. 2001, **79**(16), 1473-1486. ISSN 00457949. DOI:10.1016/S0045-7949(01)00048-7.

[9] FRANCAVILLA, A. A ZIENKIEWICZ, O.C. A note on numerical computation of elastic contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1975, **9**, 913–924.

[10] FRITZ, A., HÜEBER, S. A WOHLMUTH, B.I. A comparison of mortar and Nitsche techniques for linear elasticity. *CALCOLO*. 2004, **41**, s. 115–137.

[11] GONZÁLEZ, J.A., KOPAČKA, J., KOLMAN, R. A PARK, K.C. Partitioned formulation of contact-impact problems with stabilized contact constraints and reciprocal mass matrices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2021, **122**(17), 4609-4636. ISSN 0029-5981. DOI:10.1002/nme.6739.

[12] HALLQUIST, J.O., GOUDREAU, G.L. A BENSON D.J. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1985, **51**(1–3), s. 107–137.

[13] HARTMANN, S., OLIVER, J., CANTE, J.C., WEYLER, R. A HERNÁNDEZ, J.A. A contact domain method for large deformation frictional contact problems. Part 2: numerical aspect. *Computer Methods in*

Applied Mechanics and Engineering. 2009 **198**, 2607– 2631.
[14] HERTZ, H. On the contact of elastic solids. *Z. Reine Angew. Mathematik*. 1881, **92**, 156-171.
[15] HUGHES, T.R.J., TAYLOR, R.L. A KANOKNUKULCHAI, W. A finite element method for large displacement contact and impact problems, in BATHE K., ODEN J., WUNDERLICH W., WILSON E. (eds), Formulations and Computational Algorithms in FE Analysis, MIT Press, 468–495, 1977.
[16] HUNĚK, I. On a penalty formulation for contact-impact problems. *Computers & Structures*. 1993, **48**, 193-203. Dostupné z: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045794993904127.
[17] CHOULY, F., FABRE, M., HILD, P., MLIKA, R., POUSIN, J. a RENARD, Y. An Overview of Recent Results on Nitsche's Method for Contact Problems. *Lecture Notes In Computational Science And Engineering*. 2017, s. 93-141.
[18] JENDELE, L. a ČERVENKA, J. On the solution of multi-point constraints - Application to FE analysis of reinforced concrete structures. *Computers & Structures*. 2009, **87**(15), 970-980. DOI:10.1016/j.compstruc.2008.04.018.
[19] JOHNSON, K.L. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1987. Dostupné z: https://books.google.at/books?id=Do6WQlUwbpkC.
[20] JOINES, J. a HOUCK, C. On the use of non-stationary penalty functions to solve nonlinear constrained optimization problems with GA's. In: *Proceedings Of The First IEEE Conference On Evolutionary Computation, 1994. IEEE World Congress On Computational Intelligence.*. 1994, **2**, s. 579-584.
[21] JU, F. A CHOO, Y. Dynamic Analysis of Tower Cranes. *Journal of Engineering Mechanics. American Society of Civil Engineers*. 2005, **131**(1), 88-96. ISSN 0733-9399.
[22] JU, F. A CHOO, Y. Super element approach to cable passing through multiple pulleys. *Mechanics International Journal of Solids and Structures*. Elsevier, 2005, **42**(11-12), 3533-3547. ISSN 0020-7683.
[23] KIKUCHI, N. A ODEN, J.T. *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.
[24] KLARBRING, A. A BJÖRKMAN, G. A mathematical programming approach to contact problems with friction and varying contact surface. *Computers & Structures*. 1988, **30**, 1185-1198. Dostupné z: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045794988901629.
[25] KOPAČKA, J. *Efficient and robust numerical solution of contact problems by the finite element method*. PhD Thesis. 2018. Dostupné z: https://www.it.cas.cz/files/u2130/PhD_thesis.pdf.
[26] KOPAČKA, J., TKACHUK, A., GABRIEL, D., KOLMAN, R., BISCHOFF, M. a PLEŠEK, J. On stability and reflection-transmission analysis of the bipenalty method in contact-impact problems: A one-dimensional, homogeneous case study. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*. 2017, **113**, 1607-1629. Dostupné z: https://doi.org/10.1002/nme.5712 DOI:10.1002/nme.5712.
[27] LAURSEN, T. A. a CHAVLA, V. Desing of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1997, **40**, 863-886.
[28] LEE, K. Dynamic contact analysis technique for rapidly sliding elastic bodies with node-to-segment contact and differentiated constraints. *Computer Mechanics*. 2014, **53**, 789–806.
[29] LIU, Y.F., LI, J., ZHANG, Z.M., HU, X.H. a ZHANG, W.J. Experimental comparison of five friction models on the same test-bed of the micro stick-slip motion system. *Mechanical Sciences*. 2015, **6**, 15–28.
[30] MCDEVITT, T.W. A LAURSEN, T.A. A mortar-finite element formulation for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000, **48**, 1525–1547.
[31] MIYAZAKI, Y. A PARK, K.C. A formulation of conserving impact system based on localized Lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2006, **68**(1), 98-124. ISSN 00295981. DOI:10.1002/nme.1703.
[32] NĚMEC, I., KOLÁŘ, V., ŠEVČÍK, I., VLK, Z., BLAAUWENDRAAT, J., BUČEK, J., TEPLÝ, B., NOVÁK, D. a ŠTEMBERA, V. *Finite Element Analysis of Structures, Principles and Praxis*. Copyright Shaker Verlag 2010.
[33] NA, J., CHEN, Q. a REN, X. Adaptive Identification and Control of Uncertain Systems with Non-smooth Dynamics. Academic Press, Cambridge (Massachusetts), 2018.
[34] NADIPALLY, M. Chapter 2 - Optimization of Methods for Image-Texture Segmentation Using Ant Colony Optimization. *Intelligent Data Analysis For Biomedical Applications*. 2019, s. 21–47. Dostupné z: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128155530000021.

[35] NAVRÁTIL, J. Prestressed concrete structure. *Prestressed Concrete Structures.* 2006, 184s.

[36] NEWTON, I. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Adv.b.39.1), Jussu Societatis Regiæ ac Typis Joseph Streater, London, 1687.

[37] OLIVER, J., HARTMANN, S., CANTE, J., WEYLER, R. A HERNÁNDEZ, J. On a new 3D contact domain method for large deformation contact problems. *Plenary Lecture at IV European Conference on Computational Mechanics.* Congress Centre, France, 16–21 May 2010. Dostupné z: http://www.eccm2010.org/cv/pdf/oliver.pdf.

[38] OLIVER, J., HARTMANN, S., CANTE, J.C., WEYLER, R. A HERNÁNDEZ, J.A. A contact domain method for large deformation frictional contact problems. Part 1: Theoretical basis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 2009, **198**(33-36), s. 2591-2606. ISSN 00457825. DOI:10.1016/j.cma.2009.03.006.

[39] OTTO, P., DE LORENZIS, L. a UNGER, J.F. Explicit dynamics in impact simulation using a NURBS contact interface. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 2019, **121**(6), 1248-1267. ISSN 0029-5981. DOI:10.1002/nme.6264.

[40] PARK, K. C., C. A. FELIPPA A REBEL, G. A simple algorithm for localized construction of non-matching structural interfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 2002, **53**(9), 2117-2142. ISSN 0029-5981. DOI:10.1002/nme.374.

[41] PUSO, M.A. A 3D mortar method for solid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 2004, **59**, 315–336.

[42] PUSO, M.A. A LAURSEN, T.A. Mesh tying on curved interfaces in 3D. *Engineering Computations.* 2003, **20**, 305–319.

[43] SHI, P. The restitution coefficient for a linear elastic rod. *Mathematical and Computer Modelling.* 1998, **28**, 427–435.

[44] Siemens, AG. *NX Nastran User's Guide.* Siemens Product Lifecycle Management Software Inc, 2014.

[45] SIMO, J., WRIGGERS, P. A TAYLOR, R. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 1985, **50**, 163–180.

[46] SMITH, A. a COIT, D. Constraint-Handling Techniques C5.2 Penalty functions. *Computer Science.* 1997.

[47] Structural design software tor steel and concrete. IDEA StatiCa. (n.d.), [získáno 12.8.2022] Dostupné z: https:/www.ideastatica.com.

[48] TAYLOR, R., MIKULAS JR., M. A HEDGEPETH, J. A linearized discrete radius pulley model for finite element analysis. In: *35th Structures, Structural Dynamics, and Materials and Co-located Conferences*, Hilton Head, SC, U.S.A., 1994, **6**, s. 2599-2606.

[49] TAYLOR, R.L. A PAPADOPOULOS, O. On a patch test for contact problems in two dimensions. In: *WRIGGERS P., WAGNER W. (eds), Nonlinear Computational Mechanics*, Springer, s. 690–702, 1991.

[50] TIMOSHENKO, s. Theory of Elasticity [by] S.P. Timoshenko [and] J.N. Goodier. McGraw-Hill [1969, ©1970],1977. Dostupné z: https://books.google.at/books?id=YrBazQEACAAJ.

[51] WANG, Y. a HAN, Z. Ant colony optimization for traveling salesman problem based on parameters optimization. *Applied Soft Computing.* 2021, **107**. ISSN 15684946. DOI:10.1016/j.asoc.2021.107439.

[52] WOHLMUTH, B.I. *Discretization Methods and Iterative Solvers Based on Domain Decomposition.* Berlin: Springer, 1991. ISBN 3-540-41083-X.

[53] WONG, S., HAMOUDA, A. a HASHMI, M.S.J. Kinematic Contact-Impact Algorithm with Friction. *International Journal Of Crashworthiness.* 2010, **6**(1), 65-82. ISSN 1358-8265. DOI:10.1533/cras.2001.0163.

[54] WRIGGERS, P. *Computational Contact Mechanics.* 2nd ed. New York: Springer, 2006. ISBN 978-3-540-32608-3.

[55] WRIGGERS, P. *Nonlinear Finite Element Methods.* Springer Berlin Heidelberg, 2008. Dostupné z: https://books.google.cz/books?id=IaV0wgG2jacC.

[56] WRIGGERS, P. A ZAVARISE, G. A formulation for frictionless contact problems using a weak form introduced by Nitsche. *Computational Mechanics.* 2008, **41**, Springer, 407–420, 2008.

[57] WRIGGERS, P., L. KRSTULOVIC-OPARA A KORELC, J. Smooth C1-interpolations for two-dimensional

frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* **51**(12), 1469-1495. ISSN 00295981. DOI:10.1002/nme.227.

[58] WU, B., DENG, L., WANG, Z. a YANG, X. Stability analysis of central difference method for dynamic real-time substructure testing. In: *2009 American Control Conference.* 2009, s. 5216-5221. DOI:10.1109/ACC.2009.5160346.

[59] WU, S. R. A variational principle for dynamic contact with large deformation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 2009, **198**, 2009–2015.

[60] XU, D. a HJELMSTAD, K. A New Node-to-Node Approach to Contact/Impact Problems for Two Dimensional Elastic Solids Subject to Finite Deformation. Newmark Structural Engeneering Laboratory, report NSEL-009, University of Illinois, Urbana-Champaign, 2008.

[61] YANG, B. A LAURSEN, T.A. A large deformation mortar formulation of self contact with finite sliding. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 2008, **197**, 756–772, 2008.

[62] YANG, B., LAURSEN, T.A. A MENG, X. Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 2005, **62**, 1183–1225.

[63] YASTREBOV, V.A. *Numerical methods in contact mechanics.* Hoboken, NJ: Wiley, 2013. Numerical methods in engineering series. ISBN 978-1-84821-519-1.

[64] YU, X. a ZHANG, T. Convergence and Runtime of an Ant Colony Optimization Model. *Information Technology Journal.* 2009, **8**, 354-359. Dostupné z: https://doi.org/10.3923/itj.2009.354.359.

[65] ZAVARISE, G. A DE LORENZIS, L. A modified node-to-segment algorithm passing the contact patch test. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 2009, **79**, 379–416.

[66] ZAVARISE, G. A LORENZIS, L. The node-to-segment algorithm for 2D frictionless contact: Classical formulation and special cases. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 2009, **198**(41-44), 3428-3451. DOI: 10.1016/j.cma.2009.06.022. ISSN 00457825. Dostupné z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782509002278.

[67] ZAVARISE, G. A WRIGGERS, P. A segment-to-segment contact strategy. *Mathematical and Computer Modelling.* 1998, **28**(4-8), 497-515. ISSN 08957177. DOI:10.1016/S0895-7177(98)00138-1.

[68] ZOLGHADR JAHROMI, H. a IZZUDDIN, B. A. Energy conserving algorithms for dynamic contact analysis using Newmark methods. *Computers & Structures.* 2013, **118**, 74-89.

SEZNAM PUBLIKACÍ

[69] NĚMEC, I., ŠTEKBAUER, H., LANG, R., ZEINER, M. a BURKART, D. A correct and efficient algorithm for impact of bodies. In: *SNA2021* Ostrava: Institute of Geonics CAS, 2021. s. 51-55. ISBN: 978-80-86407-82-1.

[70] NĚMEC, I., VALA, J., ŠTEKBAUER, H., JEDLIČKA, M. a BURKART, D. New methods in collision of bodies analysis. In: *Programs and Algorithms of Numerical Mathematics 22.* Praha: Matematický ústav AV ČR, 2023. s. 8801-8816. ISBN: 978-80-85823-71-4.

[71] ŠTEKBAUER, H. Kontakt mezi MKP prvky. In: *Juniorstav 2018.* Brno, Česká republika: 2018. s. 627-632. ISBN: 978-80-86433-69-1.

[72] ŠTEKBAUER, H. The Pulley Element, In: *Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Civil Engineering Series.* 2016, **16**(2), s. 161-164. ISSN 1804-4824.

[73] ŠTEKBAUER, H. The pulley element. In: *Modelování v mechanice 2016.* Ostrava, Česká republika: 2016. s. 1-4. ISBN: 978-80-248-3917-2.

[74] ŠTEKBAUER, H. a NĚMEC, I. Stabilization of contact penetration in the explicit method. In: *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2020, ICNAAM 2020.* American Institute of Physics, 2022. s. 1-4. ISBN: 978-0-7354-4182-8. ISSN: 0094-243X. DOI:10.1063/5.0081574.

[75] ŠTEKBAUER, H. a NĚMEC, I. Improved Stability of a Node-to-node Algorithm in the Explicit Method. In: *International Conference of Numerical Analysis and Applied Methematics 2018, ICNAAM 2018. American Institute of Physics,* 2019, s. 1-4. ISBN 978-073541854-7. ISSN 0094243X. DOI:10.1063/1.5114322.

[76] ŠTEKBAUER, H., NĚMEC, I., LANG, R., BURKART, D. a VALA, J. On a new computational algorithm for impacts of elastic bodies. *Applications of Mathematics*. 2022, **67**(6), 775-804. DOI:10.21136/AM.2022.0129-21.
[77] ŠTEKBAUER, H. a NĚMEC, I. Modeling of welded connections using Lagrange multipliers. In: *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2019, ICNAAM 2019*. American Institute of Physics, 2020. s. 1-4. ISBN: 978-0-7354-4025-8. ISSN: 0094-243X. DOI:10.1063/5.0031396.
[78] ŠTEKBAUER, H. a VLK, Z. The modification of a node-to-node algorithm for the modelling of beam connections in RFEM and SCIA using the explicit method. In: *Dynamics of Civil Engineering and Transport Structures and Wind Engineering - DYN-WIND 2017. MATEC Web of Conferences*. 2017, **107**(60), s. 1-6. ISSN 2261-236X. DOI: 10.1051/matecconf/201710700060.

PŘEHLED PUBLIKAČNÍCH AKTIVIT

ČLÁNKY DO ČASOPISŮ S IMPAKT FAKTOREM V DATABÁZI WEB OF SCIENCE

1. ŠTEKBAUER, H., NĚMEC, I., LANG, R., BURKART, D. a VALA, J. On a new computational algorithm for impacts of elastic bodies. *APPLICATIONS OF MATHEMATICS*, 2022, **67**(6), 775-804. ISSN: 0862-7940. DOI:10.21136/AM.2022.0129-21.

ČLÁNKY DO ČASOPISŮ V DATABÁZI SCOPUS

1. ŠTEKBAUER, H. a NĚMEC, I. A New Cable-Pulley Algorithm in RFEM. *Strojnícky časopis – Journal of Mechanical Engineering*. 2016, **66**(2), 89-94. ISSN 2450-5471. DOI:10.1515/scjme-2016-0022.

KONFERENČNÍ PŘÍSPĚVKY V DATABÁZI WEB OF SCIENCE

1. ŠTEKBAUER, H. a NĚMEC, I. Modeling of welded connections using Lagrange multipliers. In: *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2019, ICNAAM 2019*. American Institute of Physics, 2020. s. 1-4. ISBN: 978-0-7354-4025-8. ISSN: 0094-243X. DOI:10.1063/5.0031396.
2. ŠTEKBAUER, H. a NĚMEC, I. Improved stability of a node-to-node algorithm in the explicit method. In: *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2018, ICNAAM 2018*. American Institute of Physics, 2019. s. 1-4. ISBN: 978-0-7354-1854-7. DOI:10.1063/1.5114322.
3. ŠTEKBAUER, H., VLK, Z. a VALA, J. On some implicit numerical integration schemes in structural dynamics. In: *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2017, ICNAAM 2017*. American Institute of Physics, 2018. s. 1-4. ISBN: 978-0-7354-1690-1. ISSN: 0094-243X. DOI:10.1063/1.5044024.
4. ŠTEKBAUER, H. a VLK, Z. The modification of a node-to-node algorithm for the modelling of beam connections in RFEM and SCIA using the explicit method. In: *Dynamics of Civil Engineering and Transport Structures and Wind Engineering - DYN-WIND 2017. MATEC Web of Conferences*. 2017, **107**(60), s. 1-6. ISSN 2261-236X. DOI: 10.1051/matecconf/201710700060.
5. NĚMEC, I., ŠTEKBAUER, H., VANĚČKOVÁ, A. a VLK, Z. Explicit and implicit method in nonlinear seismic analysis. In: *Dynamics of Civil Engineering and Transport Structures and Wind Engineering - DYN-WIND 2017. MATEC Web of Conferences*. 2017, **107**(66), s. 1-8. ISBN: 9781510841147. ISSN: 2261-236X. DOI: 10.1051/matecconf/201710700066.
6. ŠTEKBAUER, H. a NĚMEC, I. A finite element algorithm of cables on pulleys. In: *Advances and Trends in Engineering Sciences and Technologies*. Slovenská republika: 2016. s. 273–278. ISBN: 978-1-138-03224-8. DOI:10.1201/9781315393827-48.

KONFERENČNÍ PŘÍSPĚVKY V DATABÁZI SCOPUS

1. NĚMEC, I., ŠTEKBAUER, H., JEDLIČKA, M. a BURKART, D. The energy and kinematic methods in impacts of bodies analysis. In: *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2022, ICNAAM 2022*. American Institute of Physics, 2023. s. 1-4. ISBN: 978-0-7354-4182-8. ISSN: 0094-243X. (in print)
2. ŠTEKBAUER, H. a NĚMEC, I. Stabilization of contact penetration in the explicit method. In: *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2020, ICNAAM 2020*. American Institute of Physics, 2022. s. 1-4. ISBN: 978-0-7354-4182-8. ISSN: 0094-243X. DOI:10.1063/5.0081574.

PUBLIKACE DO RECENZOVANÝCH PERIODIK

1. ŠTEKBAUER, H. The Pulley Element. *Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Civil Engineering Series*, 2016, **16**(2), 161-164. ISSN: 1804-4824.
2. NĚMEC, I., TRCALA, M., ŠEVČÍK, I. a ŠTEKBAUER, H. New Formula for Geometric Stiffness Matrix Calculation. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2016, **2016**(4), 733-748. ISSN: 2327-4379.
3. LANG, R., NĚMEC, I. a ŠTEKBAUER, H. Navrhování tvarů membránových konstrukcí a výpočet střihových vzorů. *TZB-info*, 2017, s. 1-9. ISSN: 1801-4399.

DALŠÍ PUBLIKACE

1. NĚMEC, I., VALA, J., ŠTEKBAUER, H., JEDLIČKA, M. a BURKART, D. New methods in collision of bodies analysis. In: *Programs and Algorithms of Numerical Mathematics 22*. Praha: Matematický ústav AV ČR, 2023. s. 8801-8816. ISBN: 978-80-85823-71-4.
2. NĚMEC, I., ŠTEKBAUER, H., LANG, R., ZEINER, M. a BURKART, D. A correct and efficient algorithm for impact of bodies. In: *SNA2021* Ostrava: Institute of Geonics CAS, 2021. s. 51-55. ISBN: 978-80-86407-82-1.
3. ŠTEKBAUER, H. Kontakt mezi MKP prvky. In: *Juniorstav 2018*. Brno, Česká republika: 2018. s. 627-632. ISBN: 978-80-86433-69-1.
4. ŠTEKBAUER, H. a VLK, Z. Dynamic simulation of a cableway in RFEM. In: *APPLIED MECHANICS 2017*. Brno, česká republika: 2017. s. 113-116. ISBN: 978-80-87434-08-6.
5. ŠTEKBAUER, H. a NĚMEC, I. An algorithm for cable-pulley system. In: *2nd International Conference on Engineering Sciences and Technologies*. Košice, Slovenská republika: 2016. s. 1-4. ISBN: 978-80-553-2564-4.
6. ŠTEKBAUER, H. The pulley element. In: *Modelování v mechanice 2016*. Ostrava, Česká republika: 2016. s. 1-4. ISBN: 978-80-248-3917-2.
7. ŠTEKBAUER, H. a NĚMEC, I. A new cable-pulley algorithm in RFEM. In: *Applied Mechanics 2016*. Banská Štiavnica, Slovenská republika: 2016. s. 53-54.
8. ŠTEFAŇÁK, J. a ŠTEKBAUER, H. Aplikace pro zkoušení zemních hřebíků. In: *Juniorstav 2016*, Sborník abstraktů. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, 2016. s. 1-9. ISBN: 978-80-214-5312-8.
9. NĚMEC, I. a ŠTEKBAUER, H. Dynamic Analysis of Cables on Pulleys Using the New Algorithm. In: *Engineering Mechanics 2015*. Svratka, Česká republika: 2015. s. 212-213. ISBN: 978-80-86246-42-0.
10. ŠTEFAŇÁK, J. a ŠTEKBAUER, H. Aplikace pro vedení protokolu o zkoušce horninové kotvy. In: *Juniorstav 2015*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, 2015. s. 1-9. ISBN: 978-80-214-5091-2.

SOFTWARE

1. MIČA, L., ŠTEFAŇÁK, J. a ŠTEKBAUER, H.: DYNASTAT, DYNASTAT. Datové uložiště ústavu. http://geotech.fce.vutbr.cz/TA04031092vysledky.pdf.
2. MIČA, L., ŠTEKBAUER, H. a ŠTEFAŇÁK, J.: Kotvy; Kotvy. http://www.geokotvy.cz/download.html.

CURRICULUM VITAE

OSOBNÍ ÚDAJE

Jméno a příjmení, titul:	Hynek Štekbauer, Ing.
Adresa trvalého bydliště:	Sadová 1247 74258, Příbor Česká republika
Telefon:	+420 724 122 665
E-mail:	128232@vut.cz
Datum narození:	6. 4. 1989
Národnost:	Česká

PRACOVNÍ ZKUŠENOSTI

07/2014 – dosud	*FEM consulting, s.r.o.* **Pozice:** Výzkumný pracovník - programátor **Náplň práce:** Výzkum a vývoj algoritmů pro analýzu konstrukcí založených na metodě konečných prvků
10/2019 – 01/2020	*Dlubal Software GmbH, Německo* **Pozice:** Programátor a test engineer (pracovní stáž) **Náplň práce:** Programování a testování numerických metod pro analýzu konstrukcí
05/2014 – 12/2015	*VUT v Brně, Fakulta stavební* **Pozice:** Tvorba aplikačního softwaru **Náplň práce:** Tvorba softwaru pro posouzení hřebů a kotev
10/2013 – 12/2014	*Nemetschek Scia, s.r.o.* **Pozice:** Test Engineer **Náplň práce:** Testování softwaru pro výpočet stavebních konstrukcí
07/2013 – 08/2013	*Stráský, Hustý a partneři, s.r.o.* **Pozice:** Projektant **Náplň práce:** Tvorba výkresů a návrh železobetonových konstrukcí
06/2011 – 08/2011	*INOSTAV BRNO, a.s.* **Pozice:** Stavební technik **Náplň práce:** Koordinace, příprava a řízení realizace stavebních prací

VZDĚLÁNÍ

02/2015 – dosud	*VUT v Brně, Fakulta stavební* **Studijní program:** Stavební inženýrství, navazující doktorský **Obor:** Konstrukce a dopravní stavby **Téma disertační práce:** Statika, dynamika a kinematika kontaktů těles. **Školitel:** doc. Ing. Ivan Němec, CSc.
09/2013 – 02/2015	*VUT v Brně, Fakulta stavební* **Studijní program:** Stavební inženýrství, navazující magisterský **Obor:** Konstrukce a dopravní stavby **Téma diplomové práce:** Vypracování algoritmu a příslušného programového modulu pro statické a dynamické řešení lan na kladkách **Školitel:** doc. Ing. Ivan Němec, CSc.
09/2009 – 06/2013	*VUT v Brně, Fakulta stavební* **Studijní program:** Stavební inženýrství, bakalářský **Obor:** Konstrukce a dopravní stavby **Téma bakalářské práce:** Výpočet únosnosti a deformací silničního mostu a porovnání s naměřenými hodnotami **Školitel:** Ing. Petr Šafář, CSc.
09/2005 – 06/2009	*Gymnázium Příbor* **Maturitní zkouška:** Český jazyk, Anglický jazyk, Fyzika, Matematika

PEDAGOGICKÁ PRAXE

02/2017 – 06/2017	*Vysoké učení technické, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky* výuka v rámci povinné praxe doktorského studijního programu **Cvičení z předmětu Základy stavební mechaniky**
09/2016 – 12/2016	*Vysoké učení technické, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky* výuka v rámci povinné praxe doktorského studijního programu **Cvičení z předmětu Nelineární mechanika**
02/2016 – 06/2016	*Vysoké učení technické, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky* výuka v rámci povinné praxe doktorského studijního programu **Cvičení z předmětu Základy stavební mechaniky**
09/2015 – 12/2015	*Vysoké učení technické, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky* výuka v rámci povinné praxe doktorského studijního programu **Cvičení z předmětu Nelineární mechanika**
02/2015 – 06/2015	*Vysoké učení technické, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky* výuka v rámci povinné praxe doktorského studijního programu **Cvičení z předmětu Základy stavební mechaniky**

ÚČAST NA ŘEŠENÍ VĚDECKÝCH PROJEKTŮ

03/2020 – 02/2021	*Projekt spec. výzkumu FAST-S-20-6294* **Název:** Výpočtová predikce porušení cementových kompozitů při dynamickém zatěžování **Řešitel:** prof. Ing. Jiří Vala, CSc.
03/2019 – 02/2020	*Projekt spec. výzkumu FAST-S-19-5878* **Název:** Výpočtová analýza vzniku a šíření trhlin v kvazikřehkých materiálech rozšířenou metodou konečných prvků (XFEM) **Řešitel:** prof. Ing. Jiří Vala, CSc.
03/2018 – 02/2019	*Projekt spec. výzkumu FAST-S-18-5184* **Název:** Vlastnosti vybraných implicitních metod v dynamice stavebních konstrukcí **Řešitel:** prof. Ing. Jiří Vala, CSc.
03/2017 – 02/2018	*Juniorský projekt spec. výzkumu FAST-J-17-4720* **Název:** Vypracování algoritmu pro kontakt mezi MKP prvky **Řešitel:** Ing. Hynek Štekbauer
01/2016 – 12/2018	*Projekt MPO OPPIK CZ.01.1.02/0.0/0.0/15_019/0004929* **Název:** Algoritmizace návrhu počátečního tvaru membránových konstrukcí a jejich statická a dynamická analýza **Řešitel:** doc. Ing. Ivan Němec, CSc.
07/2014 – 06/2015	*Projekt MPO OPPI CZ.1.03/2.2.00/23.00705* **Název:** Rozvoj progresivních metod v mechanice těles **Řešitel:** doc. Ing. Ivan Němec, CSc.

ABSTRAKT

Disertační práce se věnuje problematice dynamického kontaktu a kinematických vazeb mezi různými entitami a s ní spojenou implementací pro statickou a dynamickou konečnoprvkovou analýzu. Důvodem vývoje v této oblasti jsou vzrůstající nároky na funkcionalitu MKP systémů a rovněž přesnost a rychlost výpočetních modelů. V práci je nejprve řešena problematika vynucení kontaktních podmínek v explicitní dynamice. Jsou navrženy nové metody s ohledem na stabilitu explicitního časového integračního schématu tak, aby nebyla potřeba zmenšovat výpočetní časový krok, ladit vstupní veličiny či řešit rozsáhlý systém rovnic. Přístupy vychází buď ze základních kinematických principů, nebo ze zákona zachování mechanické energie. Dále je pozornost věnována různým typům vazbových podmínek mající široké využití ve stavební praxi. Jejich porozumění je výchozím bodem pro následnou definici nově navrženého konečného elementu kladky. Správnost všech teoreticky navržených metod a jejich implementace je demonstrována na numerických příkladech.

ABSTRACT

The dissertation deals with the problem of dynamic contact and kinematic constraints between various entities and the related issues of its implementation for static and dynamic finite element analysis. The reason for the development in this area is the increasing demands on functionality of FEM softwares and also accuracy and performance of computational models. Firstly, the problem of enforcing contact conditions in explicit dynamics is addressed. New methods are proposed with respect to the stability of the explicit time integration scheme so that there is no need to reduce the computational time step, adjust the input variables or solve a large system of equations. These methods are based either on basic kinematic principles or on the energy conservation law. Furthermore, attention is paid to different types of constraint conditions having a wide application in civil engineering practice. Understanding them is the starting point for the subsequent definition of the newly designed finite element of the pulley. The correctness of all theoretically proposed methods and their implementation is demonstrated by numerical examples.