UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

## Fourierovy řady

**Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky**
Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Sonja Truhlářová**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovnictví/pojišťovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2019

# BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

**Autor:** Sonja Truhlářová

**Název práce:** Fourierovy řady

**Typ práce:** Bakalářská práce

**Pracoviště:** Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

**Vedoucí práce:** RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.

**Rok obhajoby práce:** 2019

**Abstrakt:** Tato bakalářská práce se zabývá teorií Fourierových řad a jejich základními vlastnostmi. Teoretické poznatky jsou v práci ilustrovány konkrétními příklady. V práci jsou také ukázány aplikace Fourierových řad při hledání součtů číselných řad a při řešení diferenciálních rovnic. Příklady jsou v práci prokládány grafy vytvořenými v matematickém programu Maple.

**Klíčová slova:** číselné řady, funkční řady, Fourierovy řady, bodová a stejnoměrná konvergence, řešení diferenciálních rovnic, program Maple

**Počet stran:** 53

**Počet příloh:** 0

**Jazyk:** český

# BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

**Author:** Sonja Truhlářová

**Title:** Fourier series

**Type of thesis:** Bachelor's

**Department:** Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

**Supervisor:** RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.

**The year of presentation:** 2019

**Abstract:** This bachelor's thesis is focused on theory of Fourier series and their basic properties. The theoretical knowledge is illustrated by concrete examples. This bachelor's thesis also contains an application of Fourier series to calculate summation of numeric series and to solve differential equations. The examples are illustrated by graphs created in mathematical program Maple.

**Key words:** numerical series, functional series, Fourier series, pointwise and uniform convergence, solutions of differential equations, program Maple

**Number of pages:** 53

**Number of appendices:** 0

**Language:** Czech

**Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením paní RNDr. Martiny Pavlačkové, Ph.D. a že jsem všechny použité zdroje uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ........................ ................................................

podpis

# Obsah

**Poděkování**

Ráda bych poděkovala vedoucí bakalářské práce paní RNDr. Martině Pavlačkové, Ph.D za metodické vedení a cenné rady při jejím vypracování.

# Úvod

Pro mou bakalářskou práci jsem si zvolila téma Fourierovy řady, protože se mi zdály z pohledu praktického využití velice zajímavé a ve výukových plánech jsou nastíněny jen velmi okrajově. Toto téma jsem si tedy vybrala proto, abych se o problematice Fourierových řad dozvěděla více informací.

Fourierovy řady jsou pojmenovány po matematikovi a fyzikovi Jeanu – Baptistu Josephu Fourierovi, který se narodil ve francouzském městě Auxerre a žil v letech 1768 – 1830. Fourier podstoupil vzdělání pro budoucí učitele na tehdy nově vzniklé École Normale, kde jej ovlivnili významní matematici (např. Lagrange, Laplace a Monge). Zabýval se teorií vedení tepla, kterou zpracoval v pracech Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides a Théorie analytique de la chaleur (viz [7],[8]). Ve svém výzkumu navázal na Jeana le Ronda d´Alemberta, Leonarda Eulera a Daniela Bernoulliho a vyjádřil myšlenku, že každá funkce se dá vyjádřit pomocí trigonometrických řad funkcí, které definoval a integroval na intervalu $(-\Pi, \Pi)$. Tyto řady se nazývají Fourierovy řady a jejich koeficienty jsou Fourierovy koeficienty. Později se o Fourierovu práci zajímal Johann Peter Gustav Lejeune Dirichtet. Ten se zabýval konvergencí Fourierových řad, dokázal, pro které funkce jsou Fourierova tvrzení pravdivá a dále jeho myšlenky rozvíjel. Další zajímavosti o osobě Fouriera lze nalézt např. v článku [14] nebo v knihách [1], [13].

Cílem mé bakalářské práce je seznámit se se základními pojmy Fourierových řad a ukázat si jejich praktické využití při stanovení součtů číselných řad a při řešení diferenciálních rovnic.

Bakalářská práce je rozdělena do čtyř kapitol. První dvě kapitoly jsou věnovány popisu teoretických pojmů a ve zbývajících kapitolách si prakticky ukážeme, jak lze Fourierovy řady využít.

V první části si nejprve představíme číselné řady a řady funkcí. Popíšeme zde důležité vlastnosti číselných řad a vysvětlíme si bodovou a stejnoměrnou konvergenci řad funkcí. Budeme se zajímat také o to, za jakých podmínek můžeme posloupnosti a řady funkcí integrovat a derivovat.

V druhé části se budeme zabývat už samotnými Fourierovými řadami. Nejprve si připomeneme pojmy periodicita a parita a poté si vysvětlíme základní pojmy týkající se Fourierových řad a ukážeme si, jak se Fourierovy řady chovají vůči ortogonálním systémům. Poté si nastíníme, za jakých podmínek tyto řady konvergují bodově nebo stejnoměrně.

Následující část bude věnována příkladům. Nejprve si vypočítáme několik příkladů „ručně“ a poté si detailně popíšeme příklady, které budeme řešit pomocí programu Maple. Příklady budou doplněny ilustrativními grafy.

Poslední kapitola bude zaměřena na aplikace Fourierových řad. Nejdříve si vysvětlíme a na příkladech ilustrujeme, jak můžeme s pomocí Fourierových řad stanovit součty některých číselných řad. Poté si ukážeme, jak lze Fourierovy řady využít při řešení diferenciálních rovnic.

# Kapitola 1

# Číselné řady a řady funkcí

V této kapitole se seznámíme se základními pojmy a vlastnostmi číselných řad a řad funkcí, které budou použity v následující kapitole věnované Fourierovým řadám. Představíme si zde bodovou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí a tyto poznatky využijeme u konvergencí řad. Při tvorbě kapitoly byly využity zejména zdroje [3] a [5].

## 1.1. Základní pojmy číselných řad

Dříve než se budeme zabývat řadami funkcí, uvedeme si základní poznatky týkající se číselných řad.

**Definice 1.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných čísel. Symbol*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ nebo } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

*nazýváme nekonečnou číselnou řadou. Posloupnost* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$*, kde*

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ \cdots,\ s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ \cdots$$

*nazýváme posloupnost částečných součtů této řady. Existuje-li vlastní limita* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$*, řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a má součet* $s$*. Neexistuje-li vlastní limita* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$*, řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

**Poznámka 1.** *Je-li* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, *řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje k* $+\infty$. *Je-li* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$, *řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje k* $-\infty$.

**Věta 1.** *Jestliže řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

*Důkaz.* Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, a protože $a_n = s_n - s_{n-1}$, plyne odtud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = (s - s) = 0$. $\square$

**Poznámka 2.** *Tvrzení této věty platí pouze jednosměrně. Pokud* $\lim a_n = 0$, *nemůžeme říct, že řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. Příkladem je např. řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, *jejíž členy mají nulovou limitu, přestože tato řada diverguje.*

**Věta 2.** *Nechť* $p \in \mathbb{N}$. *Řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n$ *současně buď konvergují nebo divergují. Jestliže konvergují, pak platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n.$$

Důkaz této věty lze nalézt např. v [3].

**Poznámka 3.** *Předchozí věta nám říká, že konečný počet členů nemá vliv na konvergenci, resp. divergenci, řady. Pokud tedy předpoklad neplatí jen pro konečný počet členů, řekneme, že platí pro skoro všechna* $n$ *(platí až od jistého indexu). V následujícím textu budeme při vyšetřování konvergence, resp. divergence, místo* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *psát zjednodušeně* $\sum a_n$.

Jedním z nejčastěji uváděných kritérií garantujících konvergenci číselných řad je Cauchyovo-Bolzanovo kritérium konvergence.

**Lemma 1** (Cauchyovo-Bolzanovo kritérium konvergence)**.** *Řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní právě tehdy, když posloupnost jejich částečných součtů je cauchyovská,* *tj. když pro libovolné $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a libovolné $m \in \mathbb{N}$ platí*

$$|s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \epsilon.$$

Důkaz tohoto lemmatu lze najít např. v [4].

**Poznámka 4.** *Dalšími kritérii používanými pro zjištění konvergence číselných řad jsou např. kritérium srovnávací, podílové nebo integrální (viz např. [3]). Pro srovnávací kritérium se často používají řady typu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$. Tyto řady konvergují pro $a > 1$ a divergují pro $a \leq 1$.*

## 1.2. Bodová a stejnoměrná konvergence řad funkcí

V této kapitole se budeme zabývat konvergencemi posloupností funkcí a funkčních řad. Nejdříve si musíme zadefinovat bodovou a stejnoměrnou konvergenci u posloupností funkcí. Z těchto definic konvergencí pak vychází definice pro bodovou a stejnoměrnou konvergenci řad funkcí.

**Definice 2.** *Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $I$ a $x_0 \in I$ je libovolné. Je-li číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, říkáme, že posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní v bodě $x_0$.*
*Řekneme, že posloupnost funkcí bodově konverguje k funkci $f(x)$ na intervalu $I$, jestliže konverguje v každém bodě $x \in I$, tj. jestliže ke každému $x \in I$ a každému $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Píšeme $\lim f_n(x) = f(x)$ pro $x \in I$ nebo $f_n \to f$ na $I$.*

**Definice 3.** *Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $I$. Symbol*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ nebo } f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \tag{1.1}$$

*nazýváme nekonečnou řadou funkcí. Posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$, nazýváme posloupností částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.*

*Jestliže posloupnost částečných součtů* $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje pro všechna* $x \in I$, *řekneme, že řada* (1.1) *bodově konverguje na intervalu* $I$ *a funkci* $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ *nazýváme součtem řady* $\sum f_n(x)$ *na intervalu* $I$.

**Poznámka 5.** *Při vyšetřování bodové konvergence řad funkcí je důležité znát interval, na kterém tuto konvergenci vyšetřujeme. Maximální množinu bodů, v níž řada funkcí bodově konverguje, nazýváme oborem konvergence řady funkcí* $\sum f_n(x)$.

U posloupností funkcí a funkčních řad vyšetřujeme kromě bodové konvergence také silnější typ konvergence - konvergenci stejnoměrnou.

**Definice 4.** *Řekneme, že posloupnost funkcí* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně k funkci* $f(x)$ *na intervalu* $I$, *jestliže ke každému* $\epsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *a všechna* $x \in I$ *platí* $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
*Píšeme* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $I$.

**Definice 5.** *Řekneme, že řada funkcí* $\sum f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na intervalu* $I$ *ke svému součtu* $s(x)$, *jestliže posloupnost* $\{s_n(x)\}$ *jejích částečných součtů stejnoměrně konverguje na* $I$ *k funkci* $s(x)$.

**Poznámka 6.** *V definicích bodové a stejnoměrné konvergence si můžeme povšimnout, že tyto pojmy se liší pouze v pořadí kvantifikátorů. U bodové konvergence závisí číslo* $n_0 \in \mathbb{N}$ *na kladném* $\epsilon$ *a na bodě* $x \in I$. *U stejnoměrné konvergence závisí číslo* $n_0 \in \mathbb{N}$ *jen na kladném* $\epsilon$.

Stejně jako u číselných řad je jedním z kritérií garantující (stejnoměrnou) konvergenci Cauchyovo-Bolzanovo kritérium.

**Lemma 2** (Cauchyovo-Bolzanovo kritérium konvergence pro řady funkcí)**.** *Řada funkcí* $\sum f_n(x)$ *je na intervalu* $I$ *stejnoměrně konvergentní právě tehdy, když ke každému* $\epsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro všechna* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *libovolné* $m \in \mathbb{N}$ *a každé* $x \in I$ *platí*

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| < \epsilon.$$

*Důkaz.* Podle definice řada $\sum f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na $I$ k $s(x)$ právě tehdy, když posloupnost částečných součtů $s_n(x)$ řady $\sum f_n(x)$ stejnoměrně konverguje k $s(x)$. Tato podmínka je splněna právě tehdy, když pro každé $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, libovolné $m \in \mathbb{N}$ a každé $x \in I$ platí

$$|s_{n+m}(x) - s_n(x)| = |f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| < \epsilon.$$

□

Přímo z lemmatu plyne jedno z nejčastěji používaných kritérií garantujících stejnoměrnou konvergenci řad - Weierstrassovo kritérium.

**Věta 3** (Weierstrassovo kritérium)**.** *Nechť $\{f_n(x)\}$ je posloupnost funkcí na intervalu $I$. Nechť existuje posloupnost nezáporných čísel $\{a_n\}$ taková, že řada $\sum a_n$ konverguje a platí*

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

*pro všechna $x \in I$ a $n \in \mathbb{N}$.*
*Pak řada $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na $I$.*

*Důkaz.* Nechť jsou splněny podmínky věty. Zvolme $\epsilon > 0$ libovolné. Podle Cauchyovo-Bolzanovo kritéria konvergence existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ a libovolné $m \in \mathbb{N}$ platí $s_{n+m} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m} < \epsilon$. Pak pro $n \geq n_0$, libovolné $m \in \mathbb{N}$ a každé $x \in I$ platí

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+m}(x)| < \epsilon.$$

□

### 1.2.1. Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností a řad funkcí

V této části si ukážeme, proč je vhodné studovat nejen bodovou, ale i stejnoměrnou konvergenci funkčních posloupností a řad. Konkrétně se budeme zabývat zachováním spojitosti nebo integrováním a derivováním členů funkčních posloupností a řad.

**Věta 4.** *Nechť posloupnost funkcí* $\{f_n(x)\}$ *stejnoměrně konverguje na intervalu* $I$ *k funkci* $f$. *Jsou-li všechny funkce* $f_n(x)$ *spojité na* $I$, *je i* $f(x)$ *spojitá na* $I$.

**Poznámka 7.** *Pokud by funkční posloupnost spojitých funkcí konvergovala pouze bodově, pak bodová limita takovéto funkční posloupnosti nemusí být spojitou funkcí. Nejčastěji uváděným příkladem je posloupnost* $\{x^n\}$ *na intervalu* $[0, 1]$, *která bodově konverguje k nespojité funkce, přestože jsou všechny její členy spojité funkce.*

**Věta 5.** *Nechť posloupnost funkcí* $\{f_n(x)\}$ *stejnoměrně konverguje na intervalu* $[a, b]$ *k funkci* $f$. *Jsou-li všechny funkce* $f_n(x)$ *Riemannovsky integrovatelné na* $[a, b]$, *je i* $f(x)$ *integrovatelná na* $[a, b]$ *a platí* $\int_a^b f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$, *tj.*

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

**Věta 6.** *Nechť* $\{f_n(x)\}$ *je posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu* $I$ *derivaci, nechť* $\{f_n(x)\}$ *konverguje bodově na* $I$ *a* $\{f_n'(x)\}$ *konverguje stejnoměně na* $I$. *Pak funkce* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *má na* $I$ *derivaci a platí* $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$, *tj.*

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Důkazy Vět 4- 6 lze najít např. v [5].

**Věta 7.** *Nechť řada funkcí* $\sum f_n(x)$ *stejnoměrně konverguje na intervalu* $I$ *a má součet* $s(x)$. *Jsou-li všechny funkce* $f_n(x)$ *spojité na* $I$, *je i* $s(x)$ *spojitá na* $I$.

*Důkaz.* Nechť $\{s_n(x)\}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum f_n(x)$. Podle předpokladu je $s_n \rightrightarrows s$ na $I$. Navíc je každá funkce $s_n$ spojitá na $I$, protože je součtem konečného počtu funkcí spojitých na $I$. Tvrzení pak přímo plyne z Věty 4. □

**Věta 8.** *Nechť řada funkcí* $\sum f_n(x)$ *stejnoměrně konverguje na intervalu* $[a, b]$ *a má zde součet* $s(x)$. *Jsou-li všechny funkce* $f_n(x)$ *Riemannovsky integrovatelné* *na $[a,b]$, je i $s(x)$ integrovatelná na $[a,b]$ a platí*

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx, tj. \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

*Důkaz.* Je-li $\{s_n(x)\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum f_n(x)$, pak $s_n \rightrightarrows s$ na $[a,b]$. Každá funkce $s_n(x)$, což je součet konečného počtu integrovatelných funkcí, je integrovatelná na $[a,b]$. Podle Věty 5 je $s(x)$ integrovatelná na $[a,b]$. Navíc platí

$$\begin{aligned}\int_a^b s(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b f_1(x) + \cdots + f_n(x)dx\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.\end{aligned}$$

□

**Věta 9.** *Nechť $\{f_n(x)\}$ je posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu $I$ derivaci. Dále nechť $\sum f_n(x)$ konverguje bodově na $I$ a $\sum f_n'(x)$ konverguje stejnoměrně na $I$. Pak funkce $s(x) = \sum f_n(x)$ má derivaci na $I$ a platí*

$$s'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

*Důkaz.* Je-li $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum f_n(x)$, pak $\{s_n\}$ konverguje na $I$ a $\{s_n'\}$ konverguje stejnoměrně na $I$. Podle Věty 6 má funkce $s(x) = \sum f_n(x)$ derivaci na $I$ a platí

$$s'(x) = \lim_{n\to\infty} s_n'(x) = \lim_{n\to\infty} (f_1'(x) + \cdots + f_n'(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

□

# Kapitola 2

# Fourierovy řady

V této kapitole si nejdříve připomeneme, co znamená periodická funkce a parita funkce a poté se seznámíme se základními pojmy Fourierových řad a popíšeme si vztah těchto řad vzhledem k ortogonálním systémům. Při tvorbě této kapitoly byly využity zejména zdroje [2], [5] a [13].

**Definice 6.** *Funkce* $f : R \to R$ $(resp. f : R \to C)$ *s definičním oborem* $D_f \subset \mathbb{R}$ *se nazývá periodická, jestliže existuje číslo* $p \in (0, \infty)$ *takové, že*

$$a)\ x \in D_f \iff x + p \in D_f,$$

$$b)\ f(x+p) = f(x)\ \forall x \in D_f.$$

*Číslo* $p$ *se nazývá perioda funkce* $f$*.*

**Poznámka 8.** *Je-li* $p$ *perioda fce* $f$*, je také* $m \cdot p$ *perioda fce* $f$*, kde* $m$ *je libovolné přirozené číslo. Nejmenší perioda funkce* $f$ *se nazývá primitivní perioda funkce* $f$*. Periodické fce* $\sin x$ *a* $\cos x$ *mají primitivní periodu* $2\pi$*. Periodické funkce* $\operatorname{tg} x$ *a* $\operatorname{cotg} x$ *mají primtivní periodu* $\pi$*.*

**Příklad 1.** *Je-li* $\omega > 0$*, ukažme, že funkce* $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$ *jsou periodické s periodou* $p = \frac{2\pi}{\omega}$*.*

**Řešení.** *Je-li* $p > 0$ *periodou, pak*

$$\cos(\omega t) = \cos(\omega(t+p)),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

*Protože je kosinus periodická funkce s periodou $2\pi$, platí*

$$\cos(\omega t) = \cos(\omega t + 2\pi),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

*Tudíž*

$$\cos(\omega(t+p)) = \cos(\omega t + 2\pi),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

*Z toho plyne, že*

$$\omega t + \omega p = \omega t + 2\pi,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\textit{neboli } p = \frac{2\pi}{\omega},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

*Obdobně dokážeme pro funkci sinus.*

**Definice 7.** *Funkce $f$ se nazývá sudá, jestliže*

$$a)\ x \in D_f \iff -x \in D_f,$$

$$b)\ f(-x) = f(x)\ \forall x \in D_f.$$

*Funkce $f$ se nazývá lichá, jestliže*

$$a)\ x \in D_f \iff -x \in D_f,$$

$$b)\ f(-x) = -f(x)\ \forall x \in D_f.$$

**Poznámka 9.** *Funkce sinus je lichá funkce. Graf liché funkce je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic. Funkce kosinus je sudá funkce. Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy $y$.*

**Definice 8.** *Funkce $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ se nazývá po částech spojitá na $\langle a,b\rangle$, lze-li interval $\langle a,b\rangle$ rozložit na konečný počet podintervalů, v nichž je $f$ spojitá, přičemž v koncových bodech každého podintervalu má nespojitost 1. druhu.*

**Věta 10.** *Nechť funkce $f$ je periodická s periodou $p > 0$. Jestliže je funkce $f$ po částech spojitá na intervalu $\langle 0,p\rangle$, pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je*

$$\int_0^p f(t)dt = \int_\alpha^{\alpha+p} f(t)dt.$$

*Důkaz.* Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, pak existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \cdot p \leq \alpha \leq (k+1)p$. Pak je

$$\int_{\alpha}^{\alpha+p} f(t)dt = \int_{\alpha}^{(k+1)p} f(t)dt + \int_{(k+1)p}^{\alpha+p} f(t)dt. \tag{2.1}$$

Dále pak platí

$$\int_{\alpha}^{(k+1)p} f(t)dt = \left| \begin{matrix} t = u + kp \\ dt = du \end{matrix} \right| = \int_{\alpha-kp}^{p} f(u+kp)du = \int_{\alpha-kp}^{p} f(u)du,$$

a

$$\int_{(k+1)p}^{\alpha+p} f(t)dt = \left| \begin{matrix} t = u + (k+1)p \\ dt = du \end{matrix} \right| = \int_{0}^{\alpha-kp} f(u+(k+1)p)du =$$

$$= \int_{0}^{\alpha-kp} f(u)du.$$

Tvrzení věty pak plyne přímo z (2.1) vzhledem k tomu, že $f(u) = f(u+kp) = f(u+(k+1)p)$ pro každé $u \in \mathbb{R}$. □

**Poznámka 10.** *Z Definice 6 a Věty 10 plyne, že stačí znát periodickou funkci v intervalu $\langle 0, p\rangle$ a známe již její funkční předpis na celém $\mathbb{R}$. Periodickou funkci s periodou $p > 0$ lze tedy vytvořit z libovolné funkce dané v intervalu $\langle 0, p\rangle$. Platí totiž: je-li $t \in \mathbb{R}$, $kp \leq t < (k+1)p$, kde $k$ je celé číslo, pak můžeme definovat*

$$f(t) = f(t - kp)$$

*a $t - kp \in \langle 0, p\rangle$. O takto vytvořené funkci mluvíme jako o periodickém prodloužení funkce $f$ dané v intervalu $\langle 0, p\rangle$. Používáme obvykle i stejné označení $f$ pro vlastně dvě funkce (lišící se definičním oborem).*

## 2.1. Základní pojmy Fourierových řad

V této části si nejprve zadefinujeme trigonometrickou řadu a trigonometrický polynom s periodami $2\pi$ a $2l$. Dále se budeme zabývat důležitou vlastností systému funkcí $\{1, \sin nx, \cos nx\}$ - ortogonalitou.

**Definice 9.** *Nechť* $a_0 \in \mathbb{R}$ *a* $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$. *Funkční řadu ve tvaru*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \tag{2.2}$$

*nazveme trigonometrickou řadou s periodou* $2\pi$.
*Funkční řadu ve tvaru*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(\frac{k\pi}{l}x) + b_k \sin(\frac{k\pi}{l}x), \tag{2.3}$$

*kde* $l \in (0, +\infty)$, *nazveme triginometrickou řadou s periodou* $2l$.

**Poznámka 11.** *Řadu* (2.2) *lze převést na řadu* (2.3) *pomocí substituce* $t = \frac{\pi}{l}x$, *přičemž* $t \in (-\pi, \pi) \Leftrightarrow x \in (-l, l)$ *nebo* $t \in (0, 2\pi) \Leftrightarrow x \in (0, 2l)$.

**Definice 10.** *Částečný součet řady* (2.2), *respektivě řady* (2.3), *nazveme trigonometrický polynom s periodou* $2\pi$, *respektivě* $2l$.

**Definice 11.** *Jsou-li všechny* $a_k, k \in \mathbb{N}_0$, *rovny nule, nazýváme řadu* (2.2),*respektivě řadu* (2.3), *sinovou trigonometrickou řadou.*
*Jsou-li všechny* $b_k, k \in \mathbb{N}$, *rovny nule, nazýváme řadu* (2.2), *respektivě řadu* (2.3), *kosinovou trigonometrickou řadou.*

**Věta 11.** *Konverguje-li trigonometrická řada* (2.2), *respektivě řada* (2.3), *k funkci* $f$, *pak* $f$ *má stejnou periodu jako řada* (2.2), *respektivě řada* (2.3).
*Konverguje-li sinová, respektivě kosinová řada k funkci* $f$ *na intervalu, který je symetrický kolem* 0, *pak* $f$ *je lichá, respektivě sudá.*

*Důkaz.* Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt např. v [15]. □

**Definice 12.** *Řekneme, že dvě funkce* $f$ *a* $g$ *definované na* $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ *jsou ortogonální na* $\langle a, b\rangle$, *jestliže* $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$.

**Definice 13.** *Řekneme, že systém funkcí* $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ *je ortogonální na* $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$, *jestliže* $\int_a^b f_m(x)f_n(x)dx = 0$, $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$.

**Věta 12.** *Systém funkcí*

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots \tag{2.4}$$

*je ortogonální na libovolném intervalu délky* $2\pi$*.*

*Systém funkcí*

$$1, \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right), \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right), \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right), \dots, \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \dots \tag{2.5}$$

*je ortogonální na libovolném intervalu délky* $2l, l > 0$*.*

*Důkaz.* Přímým výpočtem lze ověřit, že příslušné integrály jsou nulové. Stačí spočítat pro systém funkcí (2.4) a pomocí substituce $t = \frac{\pi}{l}x$ dostaneme tvrzení pro systém funkcí (2.5).

Stačí si tedy uvědomit, že platí

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)\, dt$$

pro každou $2\pi - periodickou$ funkci $f$ a ověřit následující rovnosti:

$$\int_0^{2\pi} \cos kt\, dt = 0,$$

tj., že 1 je ortogonální na $\cos kt, \forall k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} \sin kt\, dt = 0,$$

tj., že 1 je ortogonální na $\sin kt, \forall k \in \mathbb{N}$. Navíc je potřeba dokázat, že platí

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \sin nt\, dt = 0, \ \mathit{pro}\ k \neq n,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cos nt\, dt = 0, \ \mathit{pro}\ k \neq n,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \sin nt\, dt = 0, \ \mathit{pro}\ k \neq n,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \cos nt \, dt = 0, \ \textit{pro} \ k = n.$$

Ověříme výše uvedené rovnosti:

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \, dt = \left[\frac{\sin kt}{k}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{k}\left(\sin 2k\pi - \sin 0\right) = \frac{1}{k}\left(0-0\right) = 0, \, \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \, dt = -\left[\frac{\cos kt}{k}\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{k}\left(\cos 2k\pi - \cos 0\right) = \frac{1}{k}\left(1-1\right) = 0, \, \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \sin nt \, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\sin\left(k+n\right)t - \sin\left(k-n\right)t\right) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{\cos\left(k+n\right)t}{k+n}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\cos\left(k-n\right)t}{k-n}\right]_0^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{k+n}\left(\cos 2\pi\left(k+n\right) - \cos 0\right) + \frac{1}{k-n}\left(\cos 2\pi\left(k-n\right) - \cos 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{k+n}\left(1-1\right) + \frac{1}{k-n}\left(1-1\right)\right) = 0, \, \forall k, n \in \mathbb{N}, \, k \neq n$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cos nt \, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\cos\left(k+n\right)t + \cos\left(k-n\right)t\right) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\sin\left(k+n\right)t}{k+n}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\sin\left(k-n\right)t}{k-n}\right]_0^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+n}\left(\sin 2\pi\left(k+n\right) - \sin 0\right) + \frac{1}{k-n}\left(\sin 2\pi\left(k-n\right) - \sin 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+n}\left(0-0\right) + \frac{1}{k-n}\left(0-0\right)\right) = 0, \, \forall k, n \in \mathbb{N}, \, k \neq n$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \sin nt \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\cos\left(k-n\right)t - \cos\left(k+n\right)t\right) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\sin\left(k-n\right)t}{k-n}\right]_0^{2\pi} - \left[\frac{\sin\left(k+n\right)t}{k+n}\right]_0^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-n}\left(\sin 2\pi\left(k-n\right) - \sin 0\right) - \frac{1}{k+n}\left(\sin 2\pi\left(k+n\right) - \sin 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-n}\left(0-0\right) + \frac{1}{k+n}\left(0-0\right)\right) = 0, \ \forall k, n \in \mathbb{N}, \ k \neq n$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \cos kt \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\sin 2kt\right) \, dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos 2kt}{2k}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k}\left(1-1\right)\right) = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

□

**Definice 14.** *Nechť funkce $f$ je integrovatelná na $\langle a, a+2\pi\rangle$. Trigonometrická řada (2.2) s koeficienty ve tvaru*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) \, dt, \, a_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) \cos kt \, dt, \ \forall k \in \mathbb{N}$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) \sin kt \, dt, \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.6}$$

*se nazývá Fourierova řada funkce $f$ na $\langle a, a+2\pi\rangle$. Koeficienty (2.6) se nazývají Fourierovy koeficienty funkce $f$ na $\langle a, a+2\pi\rangle$.*

**Poznámka 12.** *Píšeme*

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt \ \ na \ \ \langle a, a+2\pi\rangle$$

*Poznamenejme, že pravá strana předchozího výrazu nemusí k funkci $f(t)$ konvergovat ani bodově, ani stejnoměrně.*

**Definice 15.** *Nechť funkce $f$ je integrovatelná na $\langle a, a+2l\rangle$. Trigonometrická řada (2.3) s koeficienty ve tvaru*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\,dx,\, a_k = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\cos\left(k\frac{\pi}{l}x\right)\,dx,\ \forall k \in \mathbb{N} \\ b_k &= \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin\left(k\frac{\pi}{l}x\right)\,dx,\ \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{2.7}$$

*se nazývá Fourierova řada funkce $f$ na $\langle a, a+2l\rangle$. Koeficienty (2.7) se nazývají Fourierovy koeficienty funkce $f$ na $\langle a, a+2l\rangle$.*

**Poznámka 13.** *Píšeme*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(k\frac{\pi}{l}x\right) + b_k\sin\left(k\frac{\pi}{l}x\right)\right) \ \ na \ \ \langle a, a+2l\rangle$$

*Poznamenejme, že pravá strana předchozího výrazu nemusí k funkci $f(t)$ konvergovat ani bodově, ani stejnoměrně.*

**Poznámka 14.** *K funkci $f$ lze určit Fourierovu řadu na intervalu $\langle a, a+2l\rangle$, pokud je funkce $f$ integrovatelná na intervalu $\langle a, a+2l\rangle$.*

**Věta 13.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť trigonometrická řada (2.2) stejnoměrně konverguje na $\langle a, a+2\pi\rangle$ k funkci $f$. Pak platí vztahy (2.6), tj.*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx,\, a_k = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx,\ \forall k \in \mathbb{N} \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx,\ \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

*Tedy trigonometrická řada (2.2) je Fourierovou řadou funkce $f$ na $\langle a, a+2\pi\rangle$.*

*Důkaz.* Platí následující rovnost ve stejnoměrné konvergenci pro $t \in \langle a, a+2\pi\rangle$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt) = f(t) \tag{2.8}$$

Vzhledem ke stejnoměrné konvergenci lze použít Větu 8 a integrovat člen po členu:

$$\int_a^{a+2\pi} \frac{a_0}{2}\, dt + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^{a+2\pi} \cos nt\, dt}_{=0} + \underbrace{b_n \int_a^{a+2\pi} \sin nt\, dt}_{=0}$$

$$= \int_a^{a+2\pi} f(t)\, dt,$$

kde pro rovnosti u druhého a třetího členu byla použita Věta 12. Odtud

$$\pi a_0 = \int_a^{a+2\pi} f(t)\, dt,$$

a tudíž

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) dt.$$

Vztah (2.8) vynásobíme funkcí $\cos kt$ pro pevně zvolené $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_0}{2} \cos kt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt \cos kt + b_n \sin nt \cos kt = f(t) \cos kt.$$

Jak plyne z Lemma 2, předchozí řada opět stejnoměrně konverguje na $\langle a, a + 2\pi \rangle$ a lze integrovat člen po členu:

$$\underbrace{\int_a^{a+2\pi} \frac{a_0}{2} \cos kt\, dt}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_a^{a+2\pi} \cos nt \cos kt\, dt}_{=0,\, pro\ \ k \neq n} + b_n \underbrace{\int_a^{a+2\pi} \sin nt \cos kt\, dt}_{=0}$$

$$= \int_a^{a+2\pi} f(t) \cos kt\, dt.$$

Pro rovnosti u prvního, druhého a třetího členu byla použita Věta 12.

Tedy

$$a_k \int_a^{a+2\pi} \cos kt \cos kt\, dt = \int_a^{a+2\pi} f(t) \cos kt\, dt \tag{2.9}$$

Jelikož

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2 kt\, dt = \int_a^{a+2\pi} \frac{1 + \cos(2kt)}{2}\, dt = \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin(2kt)}{4k} \right]_a^{a+2\pi} = \pi,$$

z rovnice (2.9) plyne, že

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) \cos kt \, dt.$$

Pro určení $b_k$ postupujeme obdobně, jenom na začátku vztah (2.8) vynásobíme funkcí $\sin kt$. $\square$

**Věta 14.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $l \in (0, \infty)$ a nechť trigonometrická řada (2.3) stejnoměrně konverguje na $\langle a, a+2l \rangle$ k funkci $f$. Pak platí vztahy (2.7), tj.*

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \, dx, a_k = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \left( \frac{k\pi}{l} x \right) \, dx, \; \forall k \in \mathbb{N}$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin \left( \frac{k\pi}{l} x \right) \, dx, \; \forall k \in \mathbb{N}.$$

*Tedy trigonometrická řada (2.3) je Fourierovou řadou funkce $f$ na $\langle a, a+2l \rangle$.*

*Důkaz.* Tvrzení věty se dokáže podobně jako u Věty 13. $\square$

Nyní se budeme zabývat tím, jak se uvedené vztahy pro výpočet koeficientů $a_k, b_k$ zjednoduší, je-li funkce $f(x)$ lichá nebo sudá.

**Věta 15.** *Nechť funkce $f$ je integrovatelná na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.*
*Je-li $f$ sudá, má její Fourierova řada tvar*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \; \textit{kde } a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \; \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

*Je-li $f$ lichá, má její Fourierova řada tvar*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \; \textit{kde } b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \; \forall k \in \mathbb{N}$$

*Důkaz.* Obecně platí: Je-li funkce g integrovatelná a sudá (resp.lichá) na intervalu $\langle -h, h \rangle$, pak

$$\int_{-h}^{h} g(x) \, dx = 2 \int_0^{h} g(x) \, dx, \; \textit{resp.} \; \int_{-h}^{h} g(x) \, dx = 0.$$

Tvrzení věty nyní plyne z toho, že je-li $f$ sudá, je $f(x)\cos kx$ sudá, $f(x)\sin kx$ lichá a je-li $f$ lichá, je $f(x)\cos kx$ lichá, $f(x)\sin kx$ sudá. $\square$

**Poznámka 15.** *Nechť funkce $f$ je integrovatelná na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$. Položíme-li pro $x \in \langle -\pi, 0)$ $f(x) = f(-x)$, zkonstruujeme sudé rozšíření funkce $f$ na interval $\langle -\pi,\pi\rangle$. Fourierově řadě sudého rozšíření funkce $f$ říkáme rozvoj funkce $f$ v kosinovou řadu na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$.*
*Je-li funkce $f$ integrovatelná na $\langle 0,\pi\rangle$ a položíme-li $f(0) = 0, f(x) = -f(-x)$ pro $x \in \langle -\pi, 0)$, sestrojíme liché rozšíření funkce $f$ na interval $\langle -\pi,\pi\rangle$. Fourierova řada lichého rozšíření funkce $f$ se nazývá rozvoj funkce $f$ v sinovou řadu na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$.*

**Věta 16.** *Nechť funkce $f$ je integrovatelná na $\langle -l,l\rangle$, $l > 0$:*
*1) Je-li funkce $f$ sudá na $\langle -l,l\rangle$, pak její Fourierova řada na $\langle -l,l\rangle$ je řada kosinová. Pro Fourierovy koeficienty funkce $f$ platí vzorce:*

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx, a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\,dx, b_k = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

*2) Je-li funkce $f$ lichá na $\langle -l,l\rangle$, pak její Fourierova řada na $\langle -l,l\rangle$ je řada sinová. Pro Fourierovy koeficienty funkce $f$ platí vzorce:*

$$a_0 = 0, a_k = 0, b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\,dx,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

**Poznámka 16.** *Je-li funkce $f$ periodická s periodou $2l > 0$ a má derivaci, pak $f'$ je také periodická funkce s periodou $2l$. Je-li funkce $f$ po částech spojitá v intervalu $\langle 0, 2l\rangle$, pak funkce $\int_0^x f(t)\,dt$ nemusí být periodická. Je-li však $\int_0^{2l} f(t)\,dt = 0$, pak i primitivní funkce k periodické funkci je periodická. Všimněme si, že podmínka znamená, že koeficient $a_0 = 0$.*

Nyní si uvedeme vztahy mezi Fourierovou řadou dané funkce, její derivací a primitivní funkcí.

**Věta 17.** *Nechť funkce $f$ je periodická s periodou $2l > 0$ a nechť je po částech spojitá a má po částech spojitou derivaci. Je-li*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \right)$$

*Fourierova řada funkce $f$, pak platí:*

*a) Má-li funkce $f'$ po částech spojitou derivaci, pak Fourierova řada funkce $f'$ má tvar*

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} b_k \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) - \frac{k\pi}{l} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

*b) je-li $a_0 = 0$, pak Fourierova řada funkce $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ má tvar*

$$F(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{b_k}{\frac{k\pi}{l}} \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) + \frac{a_k}{\frac{k\pi}{l}} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

*Důkaz.* Tvrzení $a$) plyne ze vztahů:

$$\frac{2}{2l} \int_0^{2l} f'(x) \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\, dx = \frac{1}{l} \left[ f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \right]_0^{2l} +$$

$$\frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \frac{k\pi}{l} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\, dx = \frac{k\pi}{l} b_k,$$

$$\frac{2}{2l} \int_0^{2l} f'(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\, dx = \frac{1}{l} \left[ f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \right]_0^{2l} -$$

$$\frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \frac{k\pi}{l} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\, dx = -\frac{k\pi}{l} a_k$$

neboť $f(0) = f(2l)$. Tvrzení $b$) plyne z $a$), jestliže si uvědomíme, že $F'(x) = f(x)$. □

**Poznámka 17.** *Pokud $a_0$ není rovno 0, pak se Fourierova řada v případě b) hledá tak, že se původní Fourierova řada zintegruje a poté se funkce $y = x$, která se v předpisu objeví, nahradí její Fourierovou řadou.*

## 2.2. Bodová a stejnoměrná konvergence Fourierových řad

V této kapitole si uvedeme podmínky postačující pro bodovou a stejnoměrnou konvergenci Fourierovy řady (2.2) s koeficienty ve tvaru (2.6), resp. konvergenci Fourierovy řady (2.3) s koeficienty ve tvaru (2.7).

**Věta 18.** *Nechť funkce $f$ je po částech spojitá na intervalu $\langle a, a+2l\rangle$, kde $a \in \mathbb{R}, l > 0$. Potom její Fourierova řada na $\langle a, a+2l\rangle$ konverguje k funkci $f$ středně kvadraticky, tj.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{a+2l} (f(x) - Q_n(x))^2 \, dx = 0,$$

*kde*

$$Q_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left( a_k \cos\left(\frac{k\pi}{l} x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right)\right)$$

*je $n$-tý částečný součet řady (2.7).*

Důkaz této věty lze nalézt např. v [9].

**Definice 16.** *Funkce $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ se nazývá po částech hladká na $\langle a, b\rangle$, lze-li interval $\langle a, b\rangle$ rozložit na konečný počet podintervalů, v nichž je $f'$ spojitá a $f$ a $f'$ mají v koncových bodech každého podintervalu konečné jednostranné limity.*

**Poznámka 18.** *V následujícím textu budeme značit $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ symbolem $f(x_0^+)$, resp. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ symbolem $f(x_0^-)$.*

**Věta 19.** *Nechť funkce $f$ je po částech hladká na $\langle a, a+2l\rangle, a \in \mathbb{R}, l > 0$, pak Fourierova řada funkce $f$ na $\langle a, a+2l\rangle$ bodově konverguje k funkci $f$ v každém bodě $x \in (a, a+2l)$, v němž je $f$ spojitá.*
*V bodech nespojitosti $x_i \in (a, a+2l)$ konverguje Fourierova řada k aritmetickému průměru limit zprava a zleva v $x_i$, tj. k číslu $\frac{f(x_i^-)+f(x_i^+)}{2}$.*
*V krajních bodech $a, a+2l$ konverguje Fourierova řada k číslu $\frac{f(a^+)+f((a+2l)^-)}{2}$.*

*Důkaz.* Důkaz této věty lze nalézt např. v [12]. $\square$

**Věta 20.** *Nechť funkce* $f$ *je spojitá a po částech hladká na* $\langle a, a+2l\rangle$ *a nechť* $f(a) = f(a+2l)$. *Pak Fourierova řada stejnoměrně konverguje (a také absolutně konverguje) k funkci* $f$ *na* $\langle a, a+2l\rangle$.

*Důkaz.* Důkaz této věty lze nalézt např. v [12]. $\square$

# Kapitola 3

# Řešené příklady

Následující část bakalářské práce bude obsahovat příklady, na nichž si ukážeme, jak se koeficienty Fourierových řad hledají. Nejprve budou příklady počítány "ručně" a poté s využitím programu Maple. Při tvorbě této kapitoly byly využity zejména zdroje [6] a [11].

**Příklad 2.** *Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = x$ na intervalu $(-\pi, \pi)$ a ukažte, k jaké funkci řada konverguje na $(-\infty, \infty)$.*

**Řešení.** *Vzhledem k tomu, že je funkce $f(x)$ spojitá a hladká na intervalu $(-\pi, \pi)$, konverguje její Fourierova řada na $(-\pi, \pi)$ bodově k funkci $f(x)$.*
*Podle vztahů (2.6) vyčíslíme koeficienty této řady.*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2}\right] = 0$$

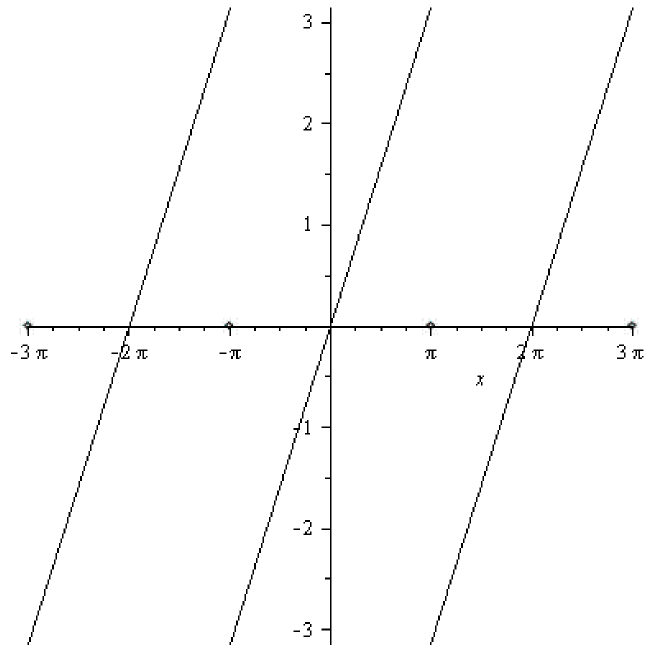
$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(kx)\;dx = \left|\begin{matrix} v = x & v' = 1 \\ u' = \cos(kx) & u = \frac{1}{k}\sin(kx)\end{matrix}\right| = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\left[x\sin(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\;dx\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\left[\pi\sin(k\pi) - \pi\sin(k(-\pi))\right] + \frac{1}{k^2}\left[\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi}\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k^2}\left[\cos(k\pi) - \cos(k(-\pi))\right]\right] = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\ dx = \left| \begin{matrix} v = x & v' = 1 \\ u' = \sin(kx) & u = -\frac{1}{k}\cos(kx) \end{matrix} \right| = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[ -\frac{1}{k}\left[ x\cos(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\ dx \right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[ -\frac{1}{k}\left[ \pi\cos(k\pi) + \pi\cos(k(-\pi)) \right] + \frac{1}{k^2}\left[ \sin(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} \right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[ -\frac{2\pi}{k}\cos(k\pi) \right] = -\frac{2\cos(k\pi)}{k} = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}.
\end{aligned}
$$

*Vypočtené hodnoty korespondují s tím, že je funkce na intervalu* $(-\pi, \pi)$ *lichá a tudíž je nutné, aby se* $a_k = 0$ *pro každé* $k = 0, 1, \cdots$.
*Fourierova řada funkce* $f(x) = x$ *na* $(-\pi, \pi)$ *má tvar:*

$$
x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx).
$$

*V bodech* $\pm\pi$ *nalezená Fourierova řada konverguje k aritmetickému průměru jednostraných limit v bodech* $-\pi, \pi$ *(viz Věta 19), tj. k hodnotě* $0$. *Součet takto získané Fourierovy řady na celé reálné ose je pak určen* $2\pi$*-peridickým rozšířením funkce* $f$ *ze základního intervalu* $\langle -\pi, \pi \rangle$ *(viz Obrázek 3.1).*




Obrázek 3.1: Graf $2\pi$-periodického rozšíření funkce $f(x) = x$

**Příklad 3.** *Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.*

**Řešení.** *Funkce $f(x)$ je spojitá a hladká na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ a platí $f(-\pi) = f(\pi)$, konverguje tedy její Fourierova řada na $\langle -\pi, \pi \rangle$ stejnoměrně k funkci $f(x)$. Podle vztahů (2.6) bychom opět mohli vyčíslit koeficienty této řady.*

*Protože funkce $f(x)$ je sudá na $\langle -\pi, \pi \rangle$, platí $b_k = 0$ pro $k = 1, 2, \cdots$ a dále*

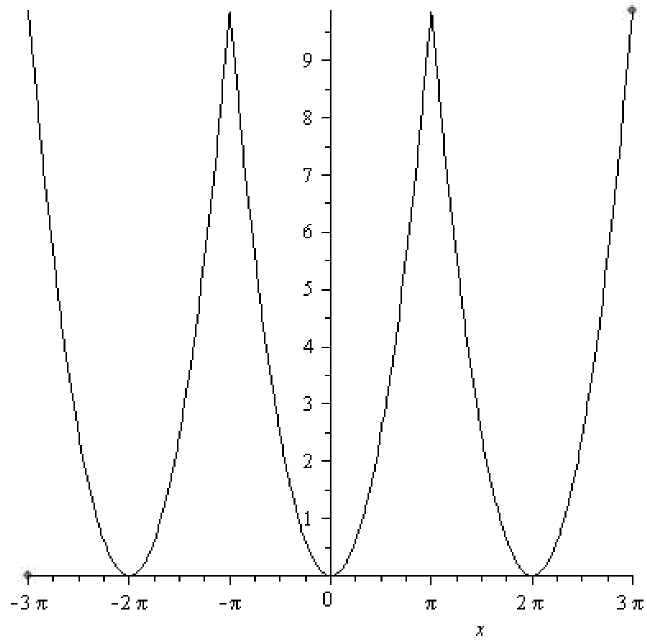
$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \, dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\pi^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(kx)\,dx = \begin{vmatrix} v = x^2 & v' = 2x \\ u' = \cos(kx) & u = \frac{1}{k}\sin(kx)\end{vmatrix} = \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\left[x^2\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x\sin(kx)\,dx\right] = \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k}\left[\pi^2\sin(k\pi) - 0^2\sin(0)\right] - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x\sin(kx)\,dx\right] = \\
&= -\frac{4}{k\pi}\int_0^{\pi} x\sin(kx)\,dx = \begin{vmatrix} v = x & v' = 1 \\ u' = \sin(kx) & u = -\frac{1}{k}\cos(kx)\end{vmatrix} = \\
&= -\frac{4}{k\pi}\left[\left[x\left(-\frac{1}{k}\right)\cos(kx)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos(kx)\,dx\right] = \\
&= -\frac{4}{k^2\pi}\left[-\left[\pi\cos(k\pi) - 0\cos(0)\right] + \left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^{\pi}\right] = \\
&= \frac{4}{k^2}\cos(kx) = \frac{4}{k^2}(-1)^k .
\end{aligned}
$$

*Fourierova řada funkce $f(x) = x^2$ má na $\langle -\pi, \pi\rangle$ tvar:*

$$
x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx) .
$$

*V bodech $\pm\pi$ nalezená Fourierova řada konverguje přímo k funkčním hodnotám, protože se tyto hodnoty rovnají. Součet takto získané Fourierovy řady na celé reálné ose je pak určen $2\pi$-peridickým rozšířením funkce $f$ ze základního intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ (viz Obrázek 3.2).*




Obrázek 3.2: Graf $2\pi$-periodického rozšíření funkce $f(x) = x^2$

**Příklad 4.** *Najděte Fourierovu řadu funkce* $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ *na intervalu* $(-\pi, \pi)$*, kde A,B,C jsou libovolné reálné konstanty.*

**Řešení.** *Koeficienty Fourierovy řady bychom mohli vypočítat ze vztahů* (2.6)*. Místo toho ale využijeme Fourierovy řady funkcí* $f(x) = x^2$ *a* $f(x) = x$ *na intervalu* $(-\pi, \pi)$*, které jsme počítali v Příkladu 2 a v Příkladu 3. Na intervalu* $(-\pi, \pi)$ *tedy platí:*

$$Ax^2 + Bx + C = A\left[\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)\right] + B\left[2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)\right] +$$

$$+ C = \frac{A\pi^2}{3} + 4A\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx) + 2B\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) + C.$$

**Příklad 5.** *Najděte Fourierovu řadu funkce* $f(x) = e^x$ *na intervalu* $(0, 1)$*. Konverguje nalezená Fourierova řada k* 1*-periodickému rozšíření funkce* $f(x)$ *na* $\mathbb{R}$ *bodově nebo i stejnoměrně?*

**Řešení.** *Vzhledem k tomu, že je funkce* $f(x)$ *spojitá a hladká na intervalu* $(0, 1)$*, konverguje její Fourierova řada na* $(0, 1)$ *bodově k funkci* $f(x)$*.*

*Podle vztahů (2.7) vyčíslíme koeficienty této řady.*

$$a_0 = 2\int_0^1 e^x \, dx = 2\left[e^x\right]_0^1 = 2\left(e-1\right).$$

*Nyní pomocí metody per partes vypočítáme pro každé $k \in \mathbb{N}$ určitý integrál*

$$\int_0^1 e^x cos\left(2k\pi x\right) \, dx,$$

*který dále využijeme pro výpočet koeficientů $a_k$.*

$$\int_0^1 e^x \cos\left(2k\pi x\right) \, dx = \left| \begin{matrix} v = e^x & v' = e^x \\ u' = \cos\left(2k\pi x\right) & u = \frac{1}{2k\pi}\sin\left(2k\pi x\right) \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2k\pi}\left[e^x \sin\left(2k\pi x\right)\right]_0^1 - \frac{1}{2k\pi}\int_0^1 e^x \sin\left(2k\pi x\right) \, dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} v = e^x & v' = e^x \\ u' = \sin\left(2k\pi x\right) & u = -\frac{1}{2k\pi}\cos\left(2k\pi x\right) \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2k\pi}\left[e^1 \sin\left(2k\pi\right) - e^0 \sin\left(0\right)\right]$$

$$- \frac{1}{2k\pi}\left(-\frac{1}{2k\pi}\left[e^x \cos\left(2k\pi x\right)\right]_0^1 + \frac{1}{2k\pi}\int_0^1 e^x \cos\left(2k\pi x\right) \, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(2k\pi\right)^2}\left(\left[e^1 \cos\left(1\right) - e^0 \cos\left(0\right)\right] - \int_0^1 e^x \cos\left(2k\pi x\right) \, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(2k\pi\right)^2}\left(\left[e-1\right] - \int_0^1 e^x \cos\left(2k\pi x\right) \, dx\right).$$

*Z toho plyne:*

$$\int_0^1 e^x \cos\left(2k\pi x\right) \, dx + \frac{1}{\left(2k\pi\right)^2}\int_0^1 e^x \cos\left(2k\pi x\right) \, dx = \frac{1}{\left(2k\pi\right)^2}\left(e-1\right)$$

$$\int_0^1 e^x \cos\left(2k\pi x\right) \, dx = \frac{e-1}{\left(2k\pi\right)^2 + 1}.$$

*Nyní pomocí metody per partes vypočítáme pro každé $k \in \mathbb{N}$ určitý integrál*

$$\int_0^1 e^x \sin(2k\pi x)\ dx,$$

*který bude použit pro výpočet koeficientů $b_k$.*

$$\int_0^1 e^x \sin(2k\pi x)\ dx = -\frac{1}{2k\pi}\left[e^x \cos(2k\pi x)\right]_0^1 + \frac{1}{2k\pi}\int_0^1 e^x \cos(2k\pi x)\ dx =$$

$$= -\frac{1}{2k\pi}$$

$$\left(\left[e^1 \cos(2k\pi) - e^0 \cos(0)\right] - \frac{1}{2k\pi}\left[e^x \sin(2k\pi x)\right]_0^1 + \frac{1}{2k\pi}\int_0^1 e^x \sin(2k\pi x)\ dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{2k\pi}\left([e-1] + \frac{1}{2k\pi}\left[e^1 \sin(2k\pi) - e^0 \sin(0)\right] + \frac{1}{2k\pi}\int_0^1 e^x \sin(2k\pi x)\ dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{2k\pi}\left([e-1] + \frac{1}{2k\pi}\int_0^1 e^x \sin(2k\pi x)\ dx\right).$$

*Z toho plyne:*

$$\int_0^1 e^x \sin(2k\pi x)\ dx + \frac{1}{(2k\pi)^2}\int_0^1 e^x \sin(2k\pi x)\ dx = -\frac{1}{2k\pi}(e-1)$$

$$\int_0^1 e^x \sin(2k\pi x)\ dx = \frac{2k\pi(1-e)}{(2k\pi)^2+1}.$$

*Dále pak:*

$$a_k = 2\int_0^1 e^x \cos(2k\pi x)\ dx = 2\frac{e-1}{(2k\pi)^2+1},$$

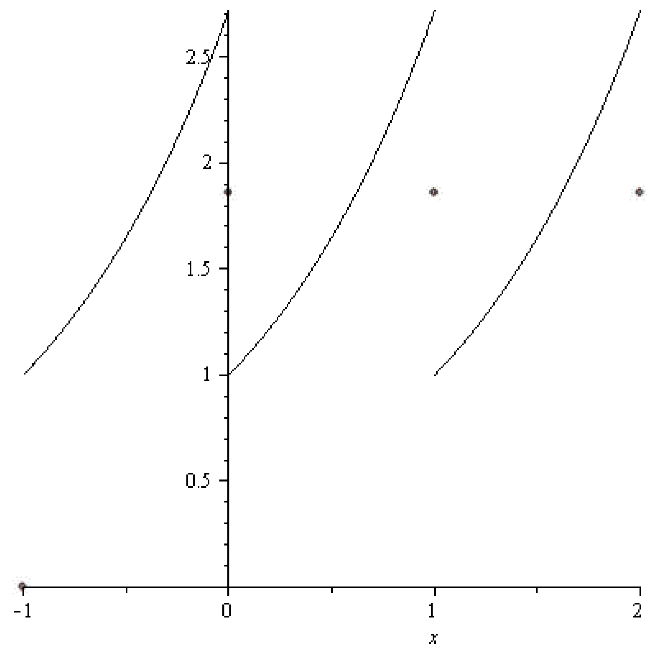
$$b_k = 2\int_0^1 e^x \sin(2k\pi x)\ dx = 2\frac{2k\pi(1-e)}{(2k\pi)^2+1}.$$

*Fourierova řada funkce $f(x) = e^x$ má na $(0,1)$ tvar:*

$$e^x = e - 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2(e-1)}{(2k\pi)^2+1}\cos(2k\pi x) + \frac{4k\pi(1-e)}{(2k\pi)^2+1}\sin(2k\pi x)\right) =$$

$$= e - 1 + 2(e-1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k\pi)^2+1}\left(\cos(2k\pi x) - 2k\pi\sin(2k\pi x)\right).$$

*Tato Fourierova řada konverguje k* 1*-peridickému rozšíření funkce* $f$ *na* $\mathbb{R}$ *(viz Obrázek 3.3) pouze bodově, protože* $f(0) \neq f(1)$.




Obrázek 3.3: Graf 1-periodického rozvoje funkce $f(x) = e^x$

**Příklad 6.** *Najděte Fourierovu řadu funkce* $f(x) = x^3$ *na intervalu* $(-\pi, \pi)$. *Využijte Fourierovy řady funkcí* $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ *a znalosti integrace Fourierových řad.*

**Řešení.** *V Příkladu 3 jsme spočítali, že platí:*

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)\,.$$

*Nyní tuto řadu zintegrujeme:*

$$\int_0^x t^2\,dt = \int_0^x \left( \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kt) \right) dt.$$

$$\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^x = \left[\frac{1}{3}\pi^2 t\right]_0^x + \left[4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \sin(kt)\right]_0^x$$

$$\frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}\pi^2 x + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \sin(kx). \tag{3.1}$$

*Z Příkladu 2 víme, že Fourierova řada funkce $f(x) = x$ má tvar:*

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx).$$

*Nyní tuto řadu dosadíme do předchozí zintegrované řady (3.1):*

$$\frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}\pi^2 \left(2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)\right) + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \sin(kx).$$

*A vyjádříme si $x^3$:*

$$x^3 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1} 2\pi^2}{k} + \frac{(-1)^k 12}{k^3}\right) \sin(kx).$$

*Tato řada konverguje bodově na $(-\pi, \pi)$ k funkci $f(x) = x^3$, protože je $f(x)$ na daném intervalu spojitá a hladká.*

## 3.1. Řešené příklady s programem Maple

V této části bakalářské práce si podrobně rozebereme, jak lze vyřešit výše zmíněné příklady pro $f(x) = x$ a $f(x) = e^x$ s využitím programu Maple.

Nejdříve se zaměříme na Příklad 2, tj. hledáme Fourierovu řadu pro funkci $f(x) = x$.

**Příklad 7.** *Najděte s využitím programu Maple Fourierovu řadu funkce $f(x) = x$ na intervalu $(-\pi, \pi)$.*

**Řešení.** *Nejprve spočítáme $a_0$:*

$> a[0] := 1/Pi * int(x, x = -Pi..Pi);$

$$a_0 := 0$$

*Dále spočítáme koeficient $a_k$. Jelikož se jedná o lichou funkci, musí být $a_k$ (stejně jako $a_0$) rovno 0. Nastavíme, že $k$ je z množiny celých čísel:*

$> assume(k, integer);$

*A ověříme výpočtem nulovost těchto koeficientů:*

$> a[k] := 1/Pi * int(x * cos(k * x), x = -Pi..Pi);$

$$a_k := 0$$

*Nyní vypočítáme koeficienty $b_k$:*

$> b[k] := 1/Pi * int(x * sin(k * x), x = -Pi..Pi);$

$$b_k := \frac{2\,(-1)^{1+k}}{k}$$

*Fourierova řada funkce $f(x) = x$ má tedy tvar:*

$> x = a[0]/2 + Sum(a[k] * cos(k * x) + b[k] * sin(k * x), k = 1..infinity);$

$$x := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{1+k} \sin(kx)}{k}$$

*Abychom mohli vykreslit některý z částečných součtů Fourierovy řady, tj. některý z Fourierových polynomů, do grafu, definujeme funkci $four$, která pro daný parametr $r$ vytvoří funkci proměnné $x$ z prvních $r$ členů Fourierovy řady.*

$> four := r- > a[0]/2 + sum(a[k] * cos(k * x) + b[k] * sin(k * x), k = 1..r);$

$$four := r \to \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{r} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

*Například pro $r = 10$ má Fourierův polynom funkce $x$ tvar:*

$> F[10](x) = four(10);$

$$F_{10}(x) = 2\sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(4x) + \frac{2}{5}\sin(5x) - \frac{1}{3}\sin(6x) + \frac{2}{7}\sin(7x) - \frac{1}{4}\sin(8x) + \frac{2}{9}\sin(9x) - \frac{1}{5}\sin(10x)$$

*Pro kreslení grafů si musíme nejprve načíst knihovnu plots:*

$> with(plots):$

*Abychom mohli grafy funkce $f(x) = x$ a polynomu $F(10)$ zobrazit do jednoho grafu, uložíme nejdříve graf funkce $f(x) = x$ např. do proměnné $graf1$:*

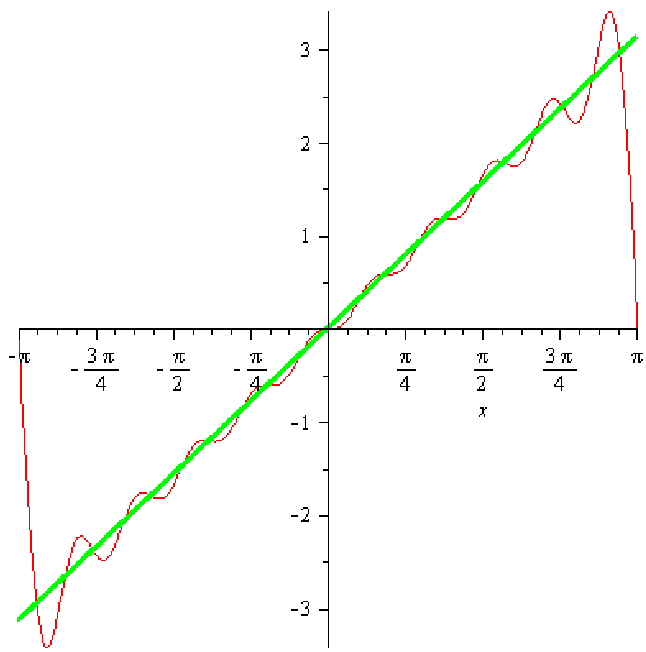
$> graf1 := plot(x, x = -Pi..Pi, color = green, thickness = 3):$

*A graf polynomu $F(10)$ uložíme např. do proměnné $graf2$:*

$> graf2 := plot(four(10), x = -Pi..Pi, color = red);$

*Pro zobrazení těchto grafů do jednoho grafu použijeme příkaz display:*

$> display(graf2, graf1);$




Obrázek 3.4: Graf funkce $f(x) = x$ a příslušný Fourierův polynom 10. tého řádu na intervalu $(-\pi, \pi)$

**Příklad 8.** *Najděte s využitím programu Maple Fourierovu řadu funkce $f(x) = e^x$ na intervalu $(0, 1)$.*

**Řešení.** *Nejprve tedy spočítáme $a_0$:*

$> a[0] := 2 * int(exp(x), x = 0..1);$

$$a_0 := -2 + 2e$$

*Nastavíme, že k je z množiny celých čísel:*

$> assume(k, integer);$

*Dále spočítáme koeficienty $a_k$:*

$> a[k] := 2 * int(exp(x) * cos(2 * k * Pi * x), x = 0..1);$

$$a_k := \frac{2(-1+e)}{1+4k^2\pi^2}$$

*Nyní vypočítáme koeficienty $b_k$:*

$> b[k] := 2 * int(exp(x) * sin(2 * k * Pi * x), x = 0..1);$

$$b_k := -\frac{4k\pi(-1+e)}{1+4k^2\pi^2}$$

*Fourierova řada funkce $f(x) = e^x$ má tedy tvar:*

$> e^x = a[0]/2 + Sum(a[k] * cos(2k * \pi x) + b[k] * sin(2k * \pi x), k = 1..infinity);$

$$e^x := -1 + e + \sum_{k=1}^{\infty} \left( 2\frac{2(-1+e)\cos(2k\pi x)}{1+4k^2\pi^2} - \frac{4k\pi(-1+e)\sin(2k\pi x)}{1+4k^2\pi^2} \right)$$

*Nyní vykreslíme Fourierovy polynomy do grafu. Definujeme funkci $four$, která pro daný parametr p vytvoří funkci proměnné x z prvních p členů Fourierovy řady.*

$> four := p- > a[0]/2 + sum(a[k] * cos(2\pi k * x) + b[k] * sin(2\pi k * x), k = 1..p);$

$$four := p \to \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{p} (a_k \cos(2\pi kx) + b_k \sin(2\pi kx))$$

*Například pro $p = 3$ má Fourierův polynom funkce $x$ tvar:*

$> F[3](x) = four(3);$

$$F_3(x) := -1 + e + \frac{2(-1+e)\cos(2\pi x)}{1+4\pi^2} - \frac{4\pi(-1+e)\sin(2\pi x)}{1+4\pi^2} + \frac{2(-1+e)\cos(4\pi x)}{1+16\pi^2} - \frac{8\pi(-1+e)\sin(4\pi x)}{1+16\pi^2} + \frac{2(-1+e)\cos(6\pi x)}{1+36\pi^2} - \frac{12\pi(-1+e)\sin(6\pi x)}{1+36\pi^2}$$

*Pro kreslení grafů si musíme nejprve načíst knihovnu plots:*

$> with(plots):$

*Nyní si do jednoho obrázku nakreslíme graf funkce* $f(x) = e^x$ *a Fourierovy polynomy stupňů* $2, 3, 10, 100$.

*Abychom mohli grafy funkce* $e^x$ *a Fourierových polynomů zobrazit do jednoho grafu, uložíme nejdříve graf funkce* $f(x) = e^x$ *např. do proměnné* $graf1$*:*

$> graf1 := plot(exp(x), x = 0..1, color = green, thickness = 3):$

*A grafy Fourierových polynomů uložíme do proměnných*

$graf2, graf3, graf10, graf100$*:*

$> graf2 := plot(four(2), x = 0..1, color = red);$

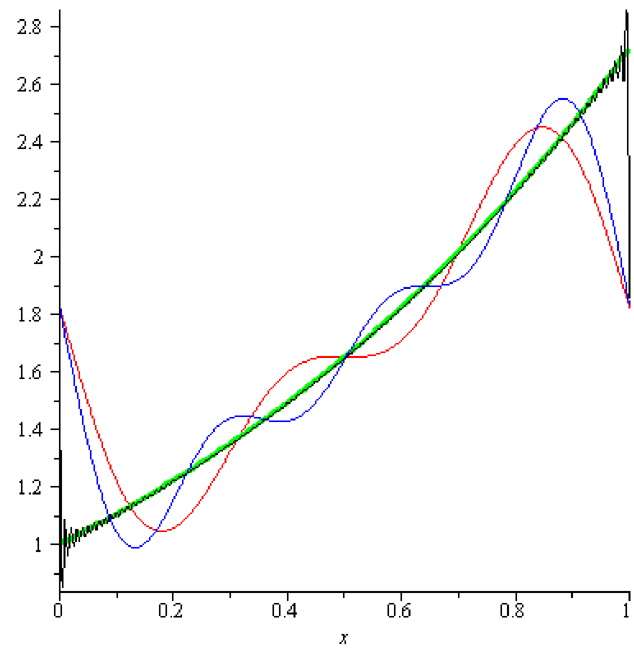
$> graf3 := plot(four(3), x = 0..1, color = blue);$

$> graf10 := plot(four(10), x = 0..1, color = orange);$

$> graf100 := plot(four(100), x = 0..1, color = black);$

*Pro zobrazení těchto grafů do jednoho grafu použijeme příkaz display:*

$> display(graf2, graf1, graf3, graf10, graf100);$




Obrázek 3.5: Graf funkce $f(x) = e^x$ a příslušné Fourierovy polynomy 2. tého, 3. tého, 10. tého a 100. tého řádu na intervalu $(0, 1)$

# Kapitola 4

# Aplikace Fourierových řad

V následující části práce se budeme zabývat tím, jakým způsobem lze Fourierovy řady využít. Nejprve si ukážeme, jak lze s využitím Fourierových řad odvodit součty některých nekonečných číselných řad a poté si v krátkosti ukážeme, jak lze Fourierovy řady použít při řešení diferenciálních rovnic. Při tvorbě kapitoly byly využity zejména zdroje [2] a [10].

## 4.1. Využití Fourierových řad pro stanovení součtů číselných řad

U většiny číselných řad pouze určujeme, zda je daná řada konvergentní (tj. má konečný součet) nebo je divergentní. Není to z důvodu, že by nás hodnota součtu řady nezajímala, ale proto, že u většiny číselných řad (pomineme-li geometrické řady s kvocientem $q \in (-1, 1)$) jejich součty nedokážeme jednoduše najít.
V této části práce si ukážeme, jak lze součty některých číselných řad určit pomocí funkčních Fourierových řad.

Uvažujeme např. funkci $f(x) = x^2$ definovanou na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ a její přísluš-
nou Fourierovu řadu (viz Příklad 3).

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx) .$$

Dosadíme-li do této Fourierovu řady za $x$ číslo 0, získáme číselnou řadu:

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(0)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Vzhledem k tomu, že Fourierova řada konverguje k funkci $f(x)$ na $\langle-\pi,\pi\rangle$ (dokonce stejnoměrně), platí, že:

$$f(0)=0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Odtud už snadno získáme součet číselné řady:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=-\frac{\pi^2}{12}.$$

Zvolíme-li $x=\pi$, zjistíme stejným způsobem, že platí:

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(k\pi)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}(-1)^k=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\pi^2.$$

Odtud už je snadné získat součet číselné řady:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

**Příklad 9.** *Pomocí Fourierovy řady funkce $f(x)=x$ na intervalu $(-\pi,\pi)$ najděte součet číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n+1}}{2n-1}$.*

**Řešení.** *Využijeme zde toho, že už dříve (viz Příklad 2) jsme zjistili příslušnou Fourierovu řadu k funkci $f(x)=x$ na intervalu $(-\pi,\pi)$.*

$$x=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx).$$

*Zvolíme $x=\frac{\pi}{2}$ a dosadíme do Fourierovy řady:*

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1+1}}{2n-1}(-1)^{n+1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n+1}}{2n-1}.$$

*Vzhledem k tomu, že Fourierova řada funkce $f(x) = x$ konverguje na intervalu $(-\pi, \pi)$ bodově, platí:*

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{2n-1}.$$

*Odsud už jednoduše zjistíme součet číselné řady:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

**Poznámka 19.** *Při výpočtu jsme využili toho, že pro sudé $k$ ($k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$) platí $\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ a toho, že pro liché $k$ ($k = 2n-1$, $n \in \mathbb{N}$) platí $\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}$.*

**Příklad 10.** *Pomocí Fourierovy řady funkce $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, \pi\rangle \\ -x, & x \in \langle -\pi, 0) \end{cases}$ najděte součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.*

**Řešení.** *Nejprve zjistíme Fourierovu řadu funkce $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, \pi\rangle \\ -x, & x \in \langle -\pi, 0) \end{cases}$.*
*Pro funkční hodnotu v bodě $-x$ platí $f(-x) = f(x)$, to znamená, že funkce je sudá a $b_k = 0$.*
*Dále vypočítáme koeficienty $a_0$ a $a_k$.*

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cdot \cos(kx)\ dx = \left| \begin{matrix} v = x & v' = 1 \\ u' = \cos(kx) & u = \frac{1}{k}\sin(kx) \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k}\left[x\sin(kx)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin(kx)\ dx\right] = \frac{2}{k\pi}\left[\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \begin{cases} 0 & pro\, k\ sudé \\ -\frac{4}{k^2\pi} & pro\, k\ liché \end{cases}.$$

*Fourierova řada funkce* $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, \pi \rangle \\ -x, & x \in \langle -\pi, 0) \end{cases}$ *na* $\langle -\pi, \pi \rangle$ *má tedy tvar:*

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\cos\left[(2n-1)\,x\right]}{(2n-1)^2},\ x \in \langle -\pi, \pi \rangle\,.$$

*Nyní dosadíme za* $x$ *číslo* $\pi$*:*

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left[(2n-1)\,\pi\right]}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

*Vzhledem k tomu, že Fourierova řada konverguje na* $\langle -\pi, \pi \rangle$ *k funkci* $f(x)$ *(dokonce stejnoměrně), platí:*

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

*Odsud dostaneme součet číselné řady:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

## 4.2. Využití Fourierových řad při řešení diferenciálních rovnic

V této části si v krátkosti nastíníme další možnou aplikaci Fourierových řad - jejich využití při řešení diferenciálních rovnic.

**Definice 17.** *Obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu rozumíme rovnici ve tvaru*

$$F(x, y(x), y^{'}(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0, \tag{4.1}$$

*kde* $F : D(F) \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$.

**Definice 18.** *Nechť* $F : D(F) \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, $h : I \subset \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ *je interval. Řekneme, že funkce* $h$ *je řešením obyčejné diferenciální rovnice* (4.1) *na intervalu* $I$, *jestliže* $\forall x \in I$ *platí* $F(x, h(x), h^{'}(x), \cdots, h^{(n)}(x)) = 0$.

Jedním z typů rovnic, které se dají řešit pomocí rozvoje ve Fourierovy řady, jsou lineární diverenciální rovnice 2. řádu.

**Definice 19.** *Nechť* $a_0, a_1, a_2, f : J \to \mathbb{R}$ *jsou spojité na intervalu* $J \subset \mathbb{R}, a_2(x) \not\equiv 0$ *na* $J$. *Pak rovnici*

$$a_2(x)y^{''} + a_1(x)y^{'} + a_0(x)y = f(x) \tag{4.2}$$

*nazýváme lineární diferenciální rovnicí* 2. *řádu. Funkcím* $a_i$ *říkáme koeficienty. Jsou-li* $a_i$ *pro všechna* $i = 0, 1, 2$ *konstantní funkce, nazýváme* (4.2) *lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty. Funkci* $f$ *říkáme pravá strana diferenciální rovnice. Je-li* $f \equiv 0$ *na* $J$, *nazýváme rovnici* (4.2) *homogenní, v opačném případě nehomogenní.*

**Věta 21.** *Uvažujeme homogenní lineární diferenciální rovnici* 2. *řádu s konstantními koeficienty, tzn. rovnici*

$$a_2y^{''} + a_1y^{'} + a_0y = 0, \tag{4.3}$$

*kde* $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. *Je-li* $\tilde{\lambda}$ *kořenem tzv. charakteristické rovnice diferenciální rovnice* (4.3), *tj. kvadratické rovnice*

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \tag{4.4}$$

*je funkce mající předpis* $e^{\tilde{\lambda}x}$ *řešením rovnice* (4.3).

*Důkaz.* Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt např. v [2]. □

**Poznámka 20.** *Je-li reálný* $\tilde{\lambda}$ *kořen, je to jasné, pokud je komplexní, i pak tvrzení platí, ale předpis* $e^{\tilde{\lambda}x}$ *je předpisem komplexní funkce reálné proměnné.*

**Věta 22.** *Každé řešení rovnice* (4.2) *je ve tvaru*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) \ \ \forall x \in J,\, c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

*kde* $\{y_1, y_2\}$ *jsou lineárně nezávislá řešení přidružené homogenní rovnice a* $y_p$ *je (jakékoliv) řešení rovnice* (4.2).

*Důkaz.* Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt např. v [10]. □

**Poznámka 21.** *K určení všech řešení rovnice* (4.2) *stačí tedy nalézt 2 lineárně nezávislá řešení příslušné homogenní rovnice a jedno tzv. partikulární řešení rovnice* (4.2).

Obvykle se partikulární řešení diferenciálních rovnic hledají např. metodou variace konstant. Na následujícím jednoduchém příkladu si ukážeme, jak by se dalo toto partikulární řešení nalézt pomocí rozvoje ve Fourierovu řadu.

**Příklad 11.** *Najděte partikulární řešení diferencální rovnice*

$$y^{''}(x) - 3y(x) = f(x), \tag{4.5}$$

*kde* $f(x)$ *je* $2\pi$*-periodické rozšíření funkce* $3x^2$ *ze základního intervalu* $\langle -\pi, \pi \rangle$, *pomocí rozvoje ve Fourierovu řadu.*

**Řešení.** *V Příkladu 3 jsme nalezli Fourierovu řadu funkce* $f(x) = x^2$ *ve tvaru:*

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx) \, .$$

*Proto lze pravou stranu uvažované diferenciální rovnice psát ve tvaru Fourierovy řady:*

$$3x^2 = \pi^2 + 12 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx) \, .$$

*Předpokládejme, že lze řešení rovnice* (4.5) *nalézt ve formě Fourierovy řady v obdobném tvaru, tj. že:*

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \, , \ kde \ a_k \in \mathbb{R} \ \ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \, .$$

*Pak* $y^{'}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -a_k k \sin(kx)$ *a* $y^{''}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -a_k k^2 \cos(kx)$.

*Dosazením do rovnice* (4.5) *získáme:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} -a_k k^2 \cos(kx) - \frac{3a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} 3a_k \cos(kx) = \pi^2 + 12 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx).$$

*Nyní porovnáme koeficienty:*

$$-\frac{3a_0}{2} = \pi^2 \Rightarrow a_0 = -\frac{2\pi^2}{3}$$

$$-a_k k^2 - 3a_k = \frac{(-1)^k 12}{k^2} \Rightarrow a_k \left(3 + k^2\right) = \frac{(-1)^{k+1} 12}{k^2}$$

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1} 12}{k^2 (3 + k^2)}, \ k \in \mathbb{N}.$$

*Partikulární řešení* $y(x)$ *diferenciální rovnice* (4.5) *lze tedy vyjádřit ve tvaru Fourierovy řady:*

$$y(x) = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 12}{k^2 (3 + k^2)} \cos(kx).$$

*Abychom zjistili, kde daná Fourierova řada konverguje k řešení diferenciální rovnice, můžeme použít např. Weierstrassovo kritérium (viz Věta 3).*

*Pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *a každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí, že* $\left| \frac{(-1)^{k+1} 12}{k^2(3+k^2)} \cos(kx) \right| \leq \frac{12}{k^4}$. *Řada* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{12}{k^4}$ *konverguje (viz Poznámka 4). Dle Weierstrassova kritéria tedy stejnoměrně konverguje řada* $-\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 12}{k^2(3+k^2)} \cos(kx)$. *Nalezené partikulární řešení je tudíž řešením dané diferenciální rovnice na celé reálné ose.*

# Závěr

Ve své bakalářské práci jsem se nejdříve obecně věnovala základním pojmům týkajících se číselných řad a řad funkcí a nastínila jsem, za jakých podmínek tyto řady konvergují. Poté jsem se zaměřila na Fourierovy řady a dříve popsané obecné pojmy jsem specifikovala pro tyto řady. Také jsem připomněla základní vlastnosti související s Fourierovými řadami, jako jsou periodicita a parita a nastínila jsem vztah Fourierových řad a ortogonálních systémů.

V druhé polovině bakalářské práce jsem na několika příkladech demonstrovala poznatky, kterým jsem se věnovala v teoretické části. Vybrala jsem si různorodé příklady, které ilustrovaly teorii týkající se Fourierových řad jak na intervalu délky $2\pi$, tak i na obecném intervalu délky $2l$. Tyto příklady jsem nejdříve počítala „ručně“ a poté jsem si vybrala dva z příkladů a vypočítala je detailně s pomocí programu Maple. Příklady jsem doplnila o grafy, které byly vykresleny také pomocí programu Maple.

Dále jsem se zaměřila na aplikace Fourierových řad. Nejprve jsem na několika příkladech ukázala, jak se dají Fourierovy řady využít k tomu, abychom zjistili součty číselných řad. Poté jsem popsala a na jednom příkladu ilustrovala, jak můžeme s pomocí Fourierových řad řešit diferenciální rovnice.

Během vytváření bakalářské práce jsem nastudovala základní problematiku Fourierových řad z různých zdrojů a naučila se, jak správně poznatky z rozličných zdrojů skombinovat do jednotného celku. Také jsem si prohloubila své znalosti týkající se výpočtu určitých integrálů, které jsem použila nejen v příkladech, ale i v důkazech. V praktické části jsem se přesvědčila, že Fourierovy řady se dají velmi dobře využít při hledání součtů řad nebo při řešení diferenciálních rovnic. Při zpracovávání své bakalářské práci jsem se rovněž naučila pracovat s programem Maple, zjistila jsem, že tento program je pro matematické obory velmi užitečný a díky tomu jej budu v budoucnu určitě využívat i dále. Také jsem se naučila, jak se rychle orientovat v cizojazyčných publikacích a prohloubila si své znalosti týkající se typografického systému TeX.

# Literatura


[1] Bhatia, R.: *Fourier series.* American Mathematical Society, Michigan, 2005.

[2] Brabec, J., Hrůza, B.: *Matematická analýza II.* Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1986.

[3] Brabec, J., Martan, F., Rozenský, Z.: *Matematická analýza I.* Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1985.

[4] Došlá, Z., Kuben, J.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné* Masarykova univerzita, Brno, 2004.

[5] Došlá, Z., Novák, V.: *Nekonečné řady (2. vydání).* Masarykova univerzita, Brno, 2007.

[6] Došlá, Z., Plch, R., Sojka, P.: *Nekonečné řady s programem Maple.* Masarykova univerzita, Brno, 2002.

[7] Fourier, J. B. J.: *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* . Institut de France, Paris, 1807.

[8] Fourier, J. B. J.: *Théorie Analytique de la Chaleur* . F.Didot, Paris, 1822.

[9] Jarník, V.: *Integrální počet II.* Academia, Praha, 1984.

[10] Kalas, J., Ráb, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice.* Masarykova univerzita, Brno, 2001.

[11] Nicolaides, R. A., Walkington, N. J.: *MAPLE: A Comprehensive Introduction.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[12] Novák, V.: *Nekonečné řady* . skriptum UJEP, Brno, 1981.

[13] Tolstov, G. P.: *Fourier series.* Martino Fine Books, Eastford, 2014.

[14] Veselý, J.: *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.* Vol. 52, 2007.

[15] Zygmund, A.: *Trigonometric series.* Cambridge University Press, London, 2002.