

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Tlmené kyvadlo s točivým momentom



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedúci diplomovej práce: **Prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.**
Vypracoval: **Bc. Katarína Daňková**
Študijný program: N1101 Matematika
Študijný odbor: Matematika a její aplikace
Forma štúdia: prezenčná
Rok odovzdania: 2015

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKÁCIA

Autor: Bc. Katarína Daňková

Názov práce: Tlmené kyvadlo s točivým momentom

Typ práce: Diplomová práca

Pracovisko: Katedra matematickej analýzy a aplikácií matematiky

Vedúci práce: Prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.

Rok obhajoby práce: 2015

Abstrakt: Diplomová práca je zameraná na tlmené kyvadlo s točivým momentom. Model takéhoto kyvadla má tvar diferenciálneho systému s parametrami. Obsahom tejto práce je vyšetriť tento model metódami dynamických systémov, metódy aplikovať na model kyvadla pre rôzne hodnoty parametrov a vytvoriť odpovedajúce fázové portréty. V závere práce interpretujeme fázové portréty a popíšeme podľa nich režimy pohybu kyvadla odpovedajúce rôznym orbitám vo fázovom portréte.

Kľúčové slová: Kyvadlo, točivý moment, dynamický systém, fázový portrét

Počet strán: 61

Počet príloh: 0

Jazyk: slovenský

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Bc. Katarína Daňková

Title: Damped pendulum with torque

Type of thesis: Master's thesis

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: Prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.

The year of presentation: 2015

Abstract: Master's thesis is focused on a damped pendulum with torque. Model of such the pendulum has a form of differential system with parameters. The subject of this thesis is to study the model by methods of dynamic systems, apply methods to the model of the pendulum for different parameter values and create corresponding phase portraits. In the end of thesis we will interpret phase portraits and according to them we will describe the models of the pendulum motion which correspond to different orbits in the phase portrait.

Key words: Pendulum, torque, dynamical system, phase portrait

Number of pages: 61

Number of appendices: 0

Language: Slovak

Prehlásenie

Prehlasujem, že diplomovú prácu som spracovala samostatne pod vedením pani prof. RNDr. Ireny Rachůnkovej, DrSc. a všetky použité zdroje som uviedla v zozname literatúry.

V Olomouci dňa

.....

podpis

Obsah

Zoznam obrázkov	6
Úvod	8
1 Odvodenie rovníc matematického kyvadla	10
2 Základné pojmy teórie dynamických systémov	13
2.1 Fázové portréty skalárnych dynamických systémov	14
2.2 Homogénny lineárny systém s konštantnými koeficientmi v rovine	16
2.3 Jordanov kanonický tvar matice \mathbf{A}	17
2.4 Planárne nelineárne dynamické systémy	18
2.5 Centrálna varieta	20
2.5.1 Symbol O	21
2.6 Elementárne bifurkácie skalárnych dynamických systémov	23
2.7 Bifurkácie planárnych dynamických systémov	26
3 Tlmené kyvadlo s točivým momentom	29
3.1 Kanonická rovnica kyvadla s točivým momentom	29
3.2 Konštrukcia centrálnej variety	34
3.3 Určenie bifurkácie	41
3.4 Fázové portréty kyvadla	48
Záver	60
Literatúra	61

Zoznam obrázkov

1.1	Kyvadlo.	11
3.1	Fázový portrét rovnice (3.14) v malom okolí počiatku.	36
3.2	Centrálna varieta W_{loc}^C a tok na nej pre rovnicu (3.7).	37
3.3	Fázový portrét rovnice (3.7).	37
3.4	Fázový portrét rovnice (3.18) v malom okolí počiatku.	39
3.5	Centrálna varieta W_{loc}^C a tok na nej pre rovnicu (3.15).	40
3.6	Fázový portrét rovnice (3.15).	40
3.7	$M = 0$: Hyperbolický kritický bod $(0, 0)$ je asymptoticky stabilné ohnisko-výlevka a hyperbolický kritický bod $(\pi, 0)$ je nestabilné sedlo.	50
3.8	$M = 0, 5$: Hyperbolický kritický bod $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ je asymptoticky stabilné ohnisko-výlevka a hyperbolický kritický bod $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ je nestabilné sedlo.	52
3.9	$M = 0, 97$: Hyperbolický kritický bod $(1, 33; 0)$ je asymptoticky stabilný uzol-výlevka a hyperbolický kritický bod $(1, 81; 0)$ je nestabilné sedlo.	53
3.10	$M = 1$: Bod $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ je nestabilný nehyperbolický kritický bod.	54
3.11	Pre hodnotu $M = 1, 5$ rovnica (3.2) nemá žiaden kritický bod.	55
3.12	$M = -0, 5$: Hyperbolický kritický bod $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ je asymptoticky stabilné ohnisko-výlevka a hyperbolický kritický bod $\left(-\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ je nestabilné sedlo.	56
3.13	$M = -0, 97$: Hyperbolický kritický bod $(-1, 33; 0)$ je asymptoticky stabilný uzol-výlevka a hyperbolický kritický bod $(-1, 81; 0)$ je nestabilné sedlo.	57
3.14	$M = -1$: Bod $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ je nestabilný nehyperbolický kritický bod.	58
3.15	Pre hodnotu $M = -1, 5$ rovnica (3.2) nemá žiaden kritický bod.	59

PodĀkovanie

Rada by som poĀkovala vedúcej diplomovej práce pani prof. RNDr. Irene Rachŕnkovej, DrSc. za obetavú spoluprácu i za čas, ktorý mi venovala pri konzultáciách.

Úvod

Témou diplomovej práce je tlmené kyvadlo s točivým momentom. Každý zavesený objekt, pohybujúci sa tam a späť, sa nazýva fyzikálnym kyvadlom. Špeciálny prípad fyzikálneho kyvadla je matematické kyvadlo, ktoré predstavuje záves zanedbateľnej hmotnosti vzhľadom na hmotnosť telesa, upevneného na jeho konci. O tlmenom kyvadle s točivým momentom hovoríme vtedy, ak uvažujeme odpor vzduchu, ktorý pôsobí proti smeru pohybu kyvadla a je úmerný uhlovej rýchlosti kyvadla, a točivý moment, ktorý môžeme popísať ako posúvanie kyvadla konštantnou silou, ktorá je kolmá na tyč.

Cieľom diplomovej práce je na základe fyzikálnych hypotéz odvodiť modely klasického kyvadla bez tlmenia, kyvadla s tlmením a tlmeného kyvadla s točivým momentom. Modely budú mať tvar diferenciálneho systému s parametrami, ktorý možno vyšetrovať metódami teórie dynamických systémov. Ďalším cieľom práce je popísať tieto metódy s využitím zadanej literatúry a následne ich aplikovať na modely kyvadla pre rôzne hodnoty parametrov a vytvoriť odpovedajúce fázové portréty vrátane diskusie o možných bifurkáciách. Nakoniec je potrebné previesť interpretáciu fázových portrétov a popísať podľa nich režimy pohybu kyvadla odpovedajúce rôznym orbitám vo fázovom portréte.

Diplomová práca je rozdelená do troch kapitol. V prvej kapitole odvodíme modely klasického kyvadla bez tlmenia, kyvadla s tlmením a tlmeného kyvadla s točivým momentom. V druhej kapitole popíšeme základné pojmy teórie dynamických systémov. V tretej kapitole sa zaoberáme tlmeným kyvadlom s točivým momentom. Odvodíme kanonickú rovnicu tohoto kyvadla, skonštruujeme centrálnu varietu,

určíme bifurkácie a interpretujeme fázové portréty kyvadla.

Obrázky v tejto práci boli nakreslené v programoch MATLAB a Graph.

Kapitola 1

Odvođenje rovníc matematického kyvadla

Každý zavesený objekt, pohybující sa tam a späť, sa nazýva fyzikálnym kyvadlom. Špeciálny prípad fyzikálneho kyvadla je *matematické kyvadlo*, ktoré predstavuje záves (napríklad vlákno alebo tyčka) zanedbateľnej hmotnosti vzhľadom na hmotnosť telesa, upevneného na jeho konci. Druhým koncom je záves pevne uchytený v priestore. Predpokladáme, že na kyvadlo nepôsobí žiadna vnútorná sila (napríklad odpor vzduchu) okrem gravitačnej.

Nech záves má konštantnú dĺžku $l > 0$ a nech na jeho konci je pripevnené teleso s hmotnosťou $m > 0$. Predpokladajme, že kyvadlo sa pohybuje vo vertikálnej rovine. Naším cieľom bude určiť uhol θ meraný v radiánoch medzi vertikálou a závesom v každom momente času t .

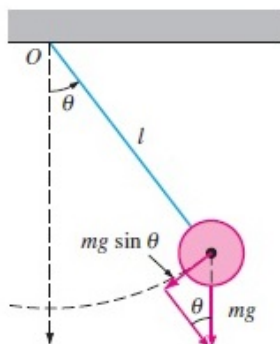
Zostavíme si rovnicu vzhľadom na hľadanú funkciu $\theta = \theta(t)$. Na začiatku nech má záves istú polohu $\theta(t_0) = \theta_0$. Vplyvom gravitačnej sily a v prípade, že $\theta_0 \neq 0$, kyvadlo sa začne pohybovať. Ak je $\theta(t) > 0$, ide o odchýlku vpravo, ak $\theta(t) < 0$, ide o odchýlku vľavo. Dĺžka s oblúka kružnice s polomerom l , zodpovedajúca stredovému uhlu θ , je $s = l\theta$. Uhlové zrýchlenie je dané vzťahom

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = l \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = l \cdot \theta''(t).$$

Z druhého Newtonovho zákona máme

$$F = am = ml \cdot \theta''(t).$$

Z obr. 1.1 vidíme, že veľkosť tangenciálnej zložky sily vyvolanej telesom s hmotnosťou m je $mg \sin \theta$.



Obrázok 1.1: Kyvadlo.

Porovnaním dvoch rôznych výrazov pre tangenciálne zložky sily dostávame

$$F_T = am = ml \cdot \theta''(t) = -mg \sin \theta(t)$$

a po úprave

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0. \quad (1.1)$$

Rovnica (1.1) sa nazýva *pohybová rovnica netlmeného matematického kyvadla*.

Ak by sme vzali do úvahy odpor vzduchu, ktorý pôsobí proti smeru pohybu kyvadla a je úmerný uhlovej rýchlosti kyvadla $\theta'(t)$, tak by sme dostali rovnicu

$$\theta''(t) + a\theta'(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0, \quad (1.2)$$

kde a je koeficient odporu vzduchu (predpokladáme, že je konštantný). Rovnica (1.2) predstavuje *pohybovú rovnicu tlmeného matematického kyvadla*.

Rovnice (1.1) a (1.2) sú nelineárne vzhľadom na prítomnosť výrazu $\sin \theta(t)$. Ich podrobnejšie štúdium bolo prevedené v ¹.

Nech záves kyvadla je stabilný. Ak budeme uvažovať aj točivý moment M , ktorý môžeme popísať ako posúvanie kyvadla konštantnou silou, ktorá je kolmá na tyč, a pre jednoduchosť položíme $a = 1$ a $l = g$, dostaneme rovnicu

$$\theta''(t) + \theta'(t) + \sin \theta(t) = M, \quad (1.3)$$

ktorá popisuje pohyb *planárneho kyvadla s tlmením a točivým momentom M* .

Chceme analyzovať možné bifurkácie kritických bodov takéhoto kyvadla. Diferenciálnu rovnicu (1.3) budeme vyšetrovať metódami teórie dynamických systémov.

¹Dvorská, K., *Fázové portréty matematického kyvadla*. Olomouc, 2012. Bakalárska práca. Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého, Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky.

Kapitola 2

Základné pojmy teórie dynamických systémov

Definície a vety v tejto kapitole sú prevzaté z monografií [1] a [2].

Systém diferenciálnych rovníc sa nazýva *autonómny systém*, ak je zapísaný v normálnom tvare a funkcie na pravých stranách tohto systému sú explicitne nezávislé od premennej t , tj., ak je ho možné zapísať v tvare

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

po zložkách

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\x_2'(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\&\vdots \\x_n'(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),\end{aligned}\tag{2.1}$$

kde $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', \dots, x_n')$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, ktorá je definovaná na nejakej oblasti Ω v priestore \mathbb{R}^n . Oblasť Ω sa nazýva *fázový priestor*, premenná t obsiahnutá v (2.1) implicitne sa nazýva *časová premenná* a premenné x_1, x_2, \dots, x_n sa nazývajú *priestorové (fázové) premenné*. Predpokladáme, že pravé strany systému (2.1) sú spojité, že parciálne derivácie $\partial f_i / \partial x_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, existujú a sú tiež spojité. Tieto predpoklady zaručujú, že každým bodom oblasti Ω prechádza práve jedno riešenie $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$.

Partikulárne riešenie $\mathbf{x} = \varphi(t)$ systému (2.1) môžeme interpretovať buď ako *graf funkcie* $\mathbf{x} = \varphi(t)$ v priestore $\mathbb{R} \times \Omega$ alebo ako krivku v priestore Ω danú parametricky rovnicou $\mathbf{x} = \varphi(t)$. V tom prípade sa taká krivka nazýva *orbita* systému (2.1). Orbita je kolmý priemet grafu funkcie $\mathbf{x} = \varphi(t)$ z priestoru $\mathbb{R} \times \Omega$ do priestoru Ω .

Definícia 1. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C(\mathbb{R} \times \Omega)$. Nech zobrazenie $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ má vlastnosti:

- (i) $\varphi(0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0$ pre $\forall \mathbf{x}^0 \in \Omega$,
- (ii) $\varphi(t + s, \mathbf{x}^0) = \varphi(t, \varphi(s, \mathbf{x}^0))$ pre $\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}^0 \in \Omega$,
- (iii) pre $\forall t \in \mathbb{R}$ existuje k zobrazeniu $\varphi(t, \cdot)$ inverzné zobrazenie $\varphi(-t, \cdot)$.

Potom $\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$ nazývame tok a pre každé pevné t zobrazenie $\varphi(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \Omega$ nazývame *dynamický systém*.

Definícia 2. Predpokladajme, že $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ je konštantný vektor v Ω taký, že

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= 0, \\ f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= 0. \end{aligned}$$

Potom vektor $\bar{\mathbf{x}}$ sa nazýva *kritický bod* systému (2.1).

2.1. Fázové portréty skalárnych dynamických systémov

Uvažujme skalárnu diferenciálnu rovnicu

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{2.2}$$

kde $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ a nech

$$x(0) = x_0, \tag{2.3}$$

kde $x_0 \in \Omega$. Riešenie úlohy (2.2), (2.3) na intervale $I \subset \Omega$ je funkcia $\varphi(t, x_0)$, ktorá spĺňa rovnicu (2.2) pre $\forall t \in I$ a vyhovuje podmienke (2.3), tj. platí

$$\begin{cases} \varphi'(t, x_0) = f(\varphi(t, x_0)), & t \in I, \\ \varphi(0, x_0) = x_0. \end{cases}$$

Kritický bod \bar{x} je definovaný ako riešenie rovnice $f(x) = 0$.

Definícia 3. Kritický bod \bar{x} diferenciálnej rovnice (2.2) sa nazýva *hyperbolický*, ak platí $f(\bar{x}) = 0 \wedge f'(\bar{x}) \neq 0$.

Kritický bod \bar{x} diferenciálnej rovnice (2.2) sa nazýva *nehyperbolický*, ak platí $f(\bar{x}) = 0 \wedge f'(\bar{x}) = 0$.

Fázový portrét skalárneho dynamického systému generovaného diferenciálnou rovnicou (2.2) možno získať z grafu funkcie f . Kritické body diferenciálnej rovnice (2.2) sú nulové body funkcie f a úsečky medzi nimi sú orbity. Ak rovnica (2.2) nemá žiadny kritický bod, potom fázový portrét má iba jedinú orbitu, a to celú os. Ak rovnica (2.2) má jeden kritický bod, potom fázový portrét má tri orbity, kritický bod a dve polopriamky ohraničené kritickým bodom. Ak rovnica (2.2) má dva alebo viac kritických bodov, potom fázový portrét tvoria kritické body, dve polopriamky a úsečky ohraničené kritickými bodmi. Podľa znamienka funkcie f určujeme šípky na orbitách. Ak v danom úseku je $f > 0$, potom šípka smeruje doprava, ak $f < 0$, tak šípka smeruje doľava. Ak vo fázovom portréte smerujú šípky z oboch strán ku kritickému bodu, potom tento bod je asymptoticky stabilný. V opačnom prípade, ak aspoň jedna šípka smeruje od kritického bodu, potom tento bod je nestabilný.

Ak \bar{x} je hyperbolický kritický bod, potom o jeho stabilite možno rozhodnúť i pomocou znamienka čísla $f'(\bar{x})$: ak $f'(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \bar{x}$ je asymptoticky stabilný, ak $f'(\bar{x}) > 0 \Rightarrow \bar{x}$ je nestabilný.

2.2. Homogénny lineárny systém s konštantnými koeficientmi v rovine

Budeme uvažovať systém v \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)), \\ x_2'(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)), \end{cases} \quad (2.4)$$

kde $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$. Nech $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ je kritický bod systému (2.4), tj. platí

$$f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0, \quad f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0.$$

Ak má vektorová funkcia $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ spojité parciálne derivácie na otvorenej množine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, potom je na Ω definovaná *Jacobiho maticová funkcia*, ktorá má tvar

$$D\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Definícia 4. Kritický bod $\bar{\mathbf{x}}$ systému (2.4) sa nazýva *hyperbolický*, ak je Jacobiho matica

$$D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix}$$

hyperbolická. Ak je táto matica nehyperbolická, potom kritický bod $\bar{\mathbf{x}}$ nazveme *nehyperbolický*.

Poznámka 1. Jacobiho maticu $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ označíme \mathbf{A} .

Definícia 5. Matica \mathbf{A} sa nazýva *hyperbolická*, ak jej vlastné čísla majú nenulové reálne časti. V opačnom prípade sa matica \mathbf{A} nazýva nehyperbolická.

Veta 1. *Nech $\bar{x} \in \Omega$ je hyperbolický kritický bod systému (2.4). Ak vlastné čísla matice \mathbf{A} majú záporné reálne časti, potom \bar{x} je asymptoticky stabilný.*

Veta 2. *Nech $\bar{x} \in \Omega$ je hyperbolický kritický bod systému (2.4). Ak aspoň jedno vlastné číslo matice \mathbf{A} má kladnú reálnu časť, potom \bar{x} je nestabilný.*

2.3. Jordanov kanonický tvar matice \mathbf{A}

Uvažujme maticu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

s reálnymi prvkami a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} .

Vlastné čísla matice \mathbf{A} vypočítame podľa vzorca

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} \mathbf{A} \pm \sqrt{(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - 4 \det \mathbf{A}}}{2},$$

kde $\operatorname{tr} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22}$ je stopa matice \mathbf{A} a $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ je determinant matice \mathbf{A} .

Pomocou vlastných čísel možno zostrojiť Jordanov kanonický tvar \mathbf{J} matice \mathbf{A} . Ak určíme tvar matice \mathbf{J} , potom môžeme určiť tvar *regulárnej transformačnej matice* $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix}$. Určíme ju z rovnice

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{J}.$$

I. Ak $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, potom

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

V tomto prípade existujú dva lineárne nezávislé *vlastné vektory* $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ príslušný k vlastnému číslu λ_1 a $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ príslušný k vlastnému číslu λ_2 .

II. Ak $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2$, potom platí:

– Ak \mathbf{A} nie je diagonálna matica, tak

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

V tomto prípade existuje jeden *vlastný vektor* $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ príslušný k vlastnému číslu λ_1 .

– Ak \mathbf{A} je diagonálna matica, tak

$$\mathbf{J} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

V tomto prípade je každý dvojrozmerný vektor *vlastným vektorom* matice \mathbf{A} .

III. Ak $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, potom

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

V tomto prípade neexistujú žiadne reálne *vlastné vektory* matice \mathbf{A} .

2.4. Planárne nelineárne dynamické systémy

Uvažujme systém

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)), \\ x_2'(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)), \end{cases} \quad (2.5)$$

a systém

$$\begin{cases} y_1'(t) = g_1(y_1(t), y_2(t)), \\ y_2'(t) = g_2(y_1(t), y_2(t)), \end{cases} \quad (2.6)$$

pričom $f_1, f_2 \in C^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$ a $g_1, g_2 \in C^1(V)$, $V \subset \mathbb{R}^2$.

Nech existuje *homeomorfizmus*

$$\mathbf{h} : U \rightarrow V$$

tak, že substitúcia

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

transformuje systém (2.5) na systém (2.6). To znamená, že orbity systému (2.5) ležiace v U sú jednoznačne zobrazené na orbity systému (2.6) ležiace vo V , pričom tok je zachovaný. Potom hovoríme, že systém (2.5) na U je *lokálne topologicky ekvivalentný* so systémom (2.6) na V .

Ak bod $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in U$ nie je kritickým bodom systému (2.5), potom sa nazýva *regulárny bod* systému (2.5).

Veta 3. [O lokálnom toku] *Nech $\bar{\mathbf{x}} \in U$ je regulárny bod systému (2.5). Potom existuje také jeho okolie $U_0 \subset U$, že systém (2.5) na U_0 je lokálne topologicky ekvivalentný so súčinným systémom v tvare*

$$\begin{cases} y_1'(t) = 1, \\ y_2'(t) = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

na nejakej otvorenej množine $V_0 \subset \mathbb{R}^2$.

Nech $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ je Jacobiho matica systému (2.5), tj.

$$D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix}$$

a nech $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in U$ je kritický bod systému (2.5). Položme

$$D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Teda

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad i, j = 1, 2.$$

Potom systém

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t), \\ y_2'(t) = a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) \end{cases} \quad (2.8)$$

sa nazýva *lineárna variačná rovnica* k systému (2.5) v bode (\bar{x}_1, \bar{x}_2) . Systém (2.8) má kritický bod $(0, 0)$.

Veta 4. [Grobman-Hartmannova] *Nech f_1, f_2 majú spojité druhé parciálne derivácie na U a nech (\bar{x}_1, \bar{x}_2) je hyperbolický kritický bod systému (2.5). Potom existuje okolie $U_0 \subset U$ bodu (\bar{x}_1, \bar{x}_2) a okolie $V_0 \subset \mathbb{R}^2$ bodu $(0, 0)$ tak, že systém (2.5) na U_0 je lokálne topologicky ekvivalentný so systémom (2.8) na V_0 .*

2.5. Centrálné variety

Uvažujme systém

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)). \quad (2.9)$$

Nech $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ je kritický bod rovnice (2.9), $U \subset \mathbb{R}^2$ je okolie bodu $\bar{\mathbf{x}}$ a $\mathbf{f} \in C^k(U)$, kde $k \geq 2$. Predpokladajme, že $\bar{\mathbf{x}}$ je nehyperbolický kritický bod, pričom Jacobiho matica $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ systému (2.9) má jedno vlastné číslo nulové a druhé nenulové. Potom fázový portrét lineárnej variačnej rovnice

$$\mathbf{y}'(t) = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y}(t) \quad (2.10)$$

obsahuje priamku \mathbf{p} skládajúcu sa z kritických bodov rovnice (2.10). Táto priamka prechádza počiatkom a má smer vektora \mathbf{p} , pričom vektor \mathbf{p} je vlastný vektor matice $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ príslušný k nulovému vlastnému číslu. Fázový portrét rovnice (2.9) potom obsahuje hladkú krivku, ktorá prechádza bodom $\bar{\mathbf{x}}$ a dotýka sa v bode $\bar{\mathbf{x}}$ priamky rovnobežnej s priamkou \mathbf{p} . Túto krivku nazývame *centrálna varieta* a značíme ju W_{loc}^C .

Tvar W_{loc}^C určujeme *metódou radov* a tok na W_{loc}^C určujeme pomocou skalárnej rovnice na W_{loc}^C .

Nech rovnica (2.9) je transformovaná na tvar

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)), \quad (2.11)$$

kde \mathbf{J} je Jordanov kanonický tvar matice $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ rovnice (2.9) a $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ spĺňa $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $D\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Rovnica (2.11) má nehyperbolický kritický bod $\mathbf{0} = (0, 0)$. Lineárna variačná rovnica príslušná k rovnici (2.11) má tvar

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{y}(t). \quad (2.12)$$

Veta 5. [O tvare W_{loc}^C v kanonickom prípade] *Existuje také $\delta > 0$, že v δ -okolí $U = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : |y_1| < \delta, |y_2| < \delta\}$ je centrálna varieta W_{loc}^C rovnice (2.11) daná nasledovne:*

$$W_{loc}^C : y_2 = h(y_1) = h(0) + \frac{1}{1!} \frac{dh}{dy_1}(0) \cdot y_1 + \frac{1}{2!} \frac{d^2h}{dy_1^2}(0) \cdot y_1^2 + O(y_1^3) \quad \text{pre } |y_1| < \delta,$$

pričom $h(0) = 0$ a $\frac{dh}{dy_1}(0) = 0$.

Veta 6. [O toku na W_{loc}^C v kanonickom prípade] *Nech $y_2 = h(y_1)$ je centrálna varieta W_{loc}^C rovnice (2.11) v okolí $\mathbf{0}$. Potom kritický bod $\mathbf{0}$ je stabilný (asymptoticky stabilný, nestabilný) práve vtedy, keď kritický bod $\bar{y}_1 = 0$ skalárnej diferenciálnej rovnice na W_{loc}^C , ktorá má tvar*

$$y_1'(t) = g_1(y_1(t), h(y_1(t))), \quad (2.13)$$

je stabilný (asymptoticky stabilný, nestabilný). Tok na W_{loc}^C je rovnaký ako tok vo fázovom portréte rovnice (2.13).

2.5.1. Symbol \mathbf{O}

Definícia 6. Nech funkcie f , g sú spojité na intervale $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a $0 \in (a, b)$. Zápisom

$$f(x) = O(g(x))$$

budeme označovať nasledujúcu vlastnosť funkcií f a g v okolí 0:

$$\exists \delta \in (0, \infty), \exists A \in (0, \infty) : |f(x)| \leq A|g(x)| \quad \text{pre } |x| < \delta.$$

Vlastnosti:

1. Ak platí, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, kde $|k| \in (0, \infty)$, potom $f(x) = O(g(x))$.

$$[\exists \delta \in (0, \infty) : |f(x)| \leq 2|k||g(x)| \quad \text{pre } |x| < \delta]$$

2. $\sin x = O(x)$; $cx = O(x)$, ak $c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$; $c_1x + c_2x^2 = O(x)$, ak $c_1 \neq 0$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) = 1, \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{cx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} c = c \neq 0,$$

$$\left. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c_1x + c_2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (c_1 + c_2x) = c_1 \neq 0 \right]$$

3. $\cos x = O(1)$; $x^{-1} + x^{-3} = O(x^{-3})$.

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) = 1, \right.$$

$$\left. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1} + x^{-3}}{x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1 \right]$$

4. Nech $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 \neq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq n$. Ak $f(x) = O(x^m)$, $g(x) = O(x^n)$, potom $c_1f(x) + c_2g(x) = O(x^m)$.

$$[|c_1f(x) + c_2g(x)| \leq A \cdot (|c_1||x^m| + |c_2||x^n|) \leq A \cdot (|c_1| + |c_2|\delta^{n-m})|x^m| \quad \text{pre } |x| < \delta]$$

5. Ak $f \in C^1[a, b]$, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, potom $f(x) = O(x)$.

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \neq 0 \right]$$

6. Ak $f \in C^{n+1}[a, b]$, $f(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$, $f^{(n+1)}(0) \neq 0$, potom $f(x) = O(x^{n+1})$.

$$\left[f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x)x^{n+1}, \text{ kde } \xi_x \right.$$

leží medzi 0 a x . Preto $\lim_{x \rightarrow 0} \xi_x = 0$.

$$\left. \text{Ďalej } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} f^{(n+1)}(\xi_x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(0) \neq 0. \right]$$

7. Nech rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ konverguje pre $|x| < \delta$ a nech $c_k \neq 0$. Nech $g(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n x^n$.

Potom $g(x) = O(x^k)$, $g'(x) = O(x^{k-1})$.

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{n=k}^{\infty} c_n x^n}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sum_{n=k}^{\infty} c_n x^{n-k} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (c_k + c_{k+1}x + c_{k+2}x^2 + \dots) = c_k \neq 0, \right.$$

$$g'(x) = \left(\sum_{n=k}^{\infty} c_n x^n \right)' = \sum_{n=k}^{\infty} (c_n x^n)' = \sum_{n=k}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$

$$\left. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{n=k}^{\infty} n c_n x^{n-1}}{x^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sum_{n=k}^{\infty} n c_n x^{n-k} \right) = k c_k \neq 0 \right]$$

2.6. Elementárne bifurkácie skalárnych dynamických systémov

Uvažujme diferenciálnu rovnicu závislú na jednom reálnom parametri c , ktorá má tvar

$$x'(t) = F(c, x(t)). \quad (2.14)$$

Predpokladajme, že rovnica (2.14) má kritický bod 0 pre $c = 0$, teda platí $F(0, 0) = 0$. Ďalej predpokladáme, že $F \in C^1(G)$ a G je otvorená množina v \mathbb{R}^2 , ktorá obsahuje bod $(0, 0)$.

Poznámka 2. Ak rovnica (2.14) má kritický bod $\bar{x} \neq 0$ pre nejakú hodnotu \bar{c} parametra c , potom rovnicu (2.14) pomocou substitúcií

$$y = x - \bar{x}, \quad a = c - \bar{c}$$

transformujeme na rovnicu tvaru

$$y'(t) = \tilde{F}(a, y(t)), \quad (2.15)$$

ktorá je závislá na reálnom parametri a a pre $a = 0$ má kritický bod 0. Potom

$$y'(t) = x'(t) = F(c, x(t)) = F(a + \bar{c}, y(t) + \bar{x}) = \tilde{F}(a, y(t)). \quad (2.16)$$

Predpokladáme, že pre rovnicu (2.14) poznáme fázový portrét pre $c = 0$ v okolí kritického bodu 0. Začneme meniť hodnoty parametra c . Buď tieto hodnoty začnú narastať z nulovej hodnoty do malých kladných hodnôt alebo klesať z nulovej hodnoty do malých (v absolútnej hodnote) záporných hodnôt.

Definícia 7. Ak sa pri zmenách hodnôt parametra c fázový portrét rovnice (2.14) v okolí bodu $x = 0$ zmení (tj. zmení sa počet kritických bodov alebo ich stabilita), hovoríme, že rovnica (2.13) je v bode $(c, x) = (0, 0)$ v *bifurkácii* a hodnotu $c = 0$ nazývame *bifurkačnou hodnotou*. Tu hovoríme o *lokálnej bifurkácii*, pretože fázové portréty rovnice (2.14) vyšetrujeme iba na okolí bodu $x = 0$.

Veta 7. *Nutnou podmienkou pre existenciu lokálnej bifurkácie je, aby kritický bod 0 bol nehyperbolický kritický bod, tj. aby platilo*

$$F(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 0. \quad (2.17)$$

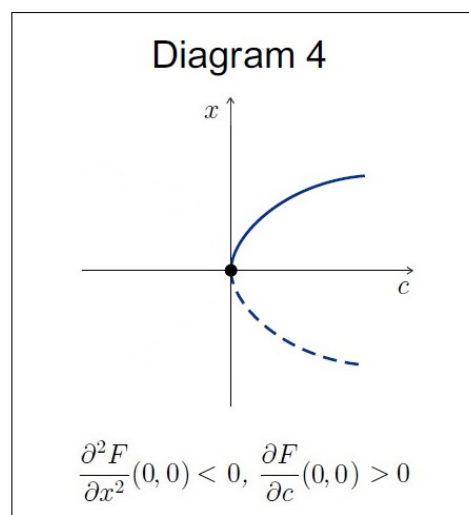
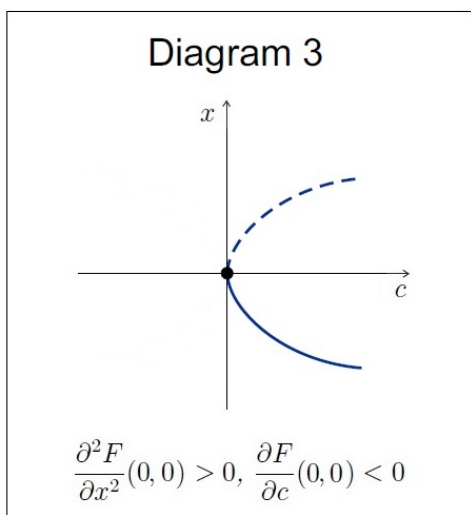
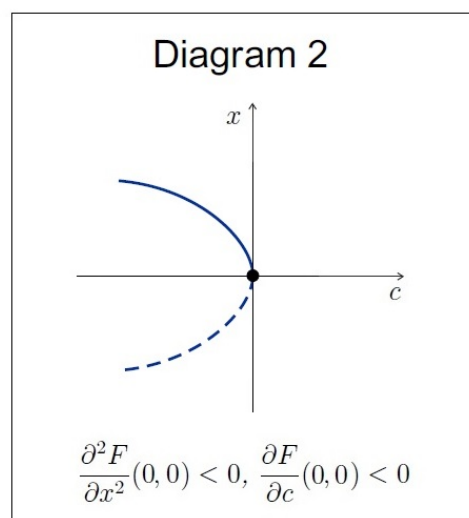
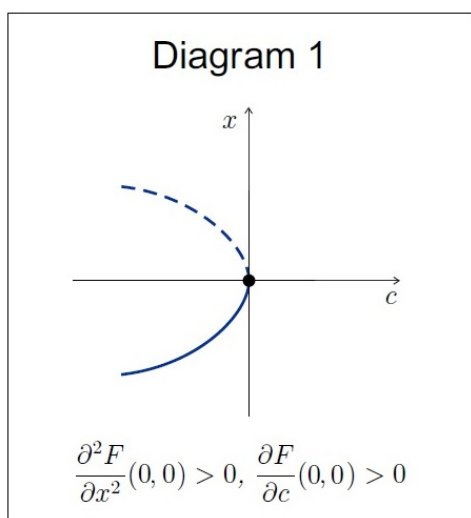
Najčastejší typ lokálnej bifurkácie u rovnice (2.14) je *sedlová bifurkácia*. Podmienky pre jej existenciu udáva nasledujúca veta.

Veta 8. [O sedlovej bifurkácii] *Nech $F \in C^2(G)$ splňuje (2.17) a navyše platí*

$$\frac{\partial F}{\partial c}(0,0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) \neq 0. \quad (2.18)$$

Potom má rovnica (2.14) v bode $(0,0)$ sedlovú bifurkáciu.

V závislosti na znamienkach parciálnych derivácií v (2.18) má táto bifurkácia jeden z bifurkačných diagramov 1 - 4:



2.7. Bifurkácie planárnych dynamických systémov

Uvažujme diferenciálnu rovnicu závislú na ℓ reálnych parametroch c_1, \dots, c_ℓ , $\ell \in \mathbb{N}$, ktorá má tvar

$$\begin{cases} x_1'(t) = & F_1(c_1, \dots, c_\ell, x_1(t), x_2(t)), \\ x_2'(t) = & -x_2(t) + F_2(c_1, \dots, c_\ell, x_1(t), x_2(t)). \end{cases} \quad (2.19)$$

Pre $\delta > 0$ nech $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < \delta\}$ je δ -okolie bodu $\mathbf{0} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$,

pre $c_0 > 0$ nech $\Lambda = \{(c_1, \dots, c_\ell) \in \mathbb{R}^\ell : \sum_{i=1}^{\ell} |c_i| < c_0\}$ je c_0 -okolie bodu $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^\ell$. Rovnicu (2.19) vyšetrujeme na množine $G = \Lambda \times U \subset \mathbb{R}^{\ell+2}$.

Predpokladáme, že $\mathbf{F} = (F_1, F_2) \in C^1(G)$, $F_i(0, 0, \dots, 0, x_1, x_2) = f_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2$, pričom $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ spĺňa $\mathbf{f}(0, 0) = \mathbf{0}$, $D\mathbf{f}(0, 0) = \mathbf{0}$. Vidíme, že rovnica (2.19) má vektorový tvar

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(\mathbf{c}, \mathbf{x}(t)), \quad (2.20)$$

kde $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ je v Jordanovom kanonickom tvare a $\mathbf{0} = (0, 0)$ je nehyperbolický kritický bod pre $c_1 = \dots = c_\ell = 0$ rovnice (2.19). V bode $(0, 0)$ môže nastať *bifurkácia*. Pre $(c_1, \dots, c_\ell) \neq \mathbf{0}$ hľadáme kritické body ako riešenia rovníc

$$\begin{aligned} F_1(c_1, \dots, c_\ell, x_1, x_2) &= 0, \\ -x_2 + F_2(c_1, \dots, c_\ell, x_1, x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Najprv vyšetrujeme rovnicu

$$\omega(c_1, \dots, c_\ell, x_1, x_2) = 0, \quad (2.21)$$

kde $\omega(c_1, \dots, c_\ell, x_1, x_2) = -x_2 + F_2(c_1, \dots, c_\ell, x_1, x_2)$. Pretože platí $\omega(0, \dots, 0, 0, 0) = 0$ a $\frac{\partial \omega}{\partial x_2}(0, \dots, 0, 0, 0) = -1$, tak podľa vety o implicitnej funkcii existuje riešenie rovnice (2.21)

$$x_2 = \psi(c_1, \dots, c_\ell, x_1), \quad \psi \in C(\Lambda \times (-\delta, \delta)). \quad (2.22)$$

Definujeme *bifurkačnú funkciu* ako

$$\mathcal{B}(c_1, \dots, c_\ell, x_1) = F_1(c_1, \dots, c_\ell, x_1, \psi(c_1, \dots, c_\ell, x_1)). \quad (2.23)$$

Rovnicu

$$\mathcal{B}(c_1, \dots, c_\ell, x_1) = 0 \quad (2.24)$$

nazývame *bifurkačná rovnica*.

Veta 9. *Zvoľme $\bar{\mathbf{c}} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_\ell) \in \Lambda$. Potom platí*

1. • *Bod \bar{x}_1 je riešením bifurkačnej rovnice (2.24) pre $\mathbf{c} = \bar{\mathbf{c}}$ práve vtedy, keď je \bar{x}_1 kritický bod skalárnej diferenciálnej rovnice*

$$x_1'(t) = \mathcal{B}(\bar{\mathbf{c}}, x_1(t)). \quad (2.25)$$

- *Bod \bar{x}_1 je kritickým bodom rovnice (2.25) práve vtedy, keď $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \psi(\bar{\mathbf{c}}, \bar{x}_1))$ je kritickým bodom diferenciálnej rovnice (2.19) pre $\mathbf{c} = \bar{\mathbf{c}}$.*

2. *Nech \bar{x}_1 je kritický bod rovnice (2.25) a platí*

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{c}}, x_1) < 0. \quad (2.26)$$

Potom bod $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \psi(\bar{\mathbf{c}}, \bar{x}_1))$ je asymptoticky stabilný hyperbolický kritický bod rovnice (2.19). (uzol-výlevka)

Nech \bar{x}_1 je kritický bod rovnice (2.25) a platí

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{c}}, x_1) > 0. \quad (2.27)$$

Potom bod $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \psi(\bar{\mathbf{c}}, \bar{x}_1))$ je nestabilný hyperbolický kritický bod rovnice (2.19). (sedlo)

Nech v rovnici (2.19) je iba jeden parameter c . Potom rovnica (2.19) má tvar

$$\begin{cases} x_1'(t) = F_1(c, x_1(t), x_2(t)), \\ x_2'(t) = -x_2(t) + F_2(c, x_1(t), x_2(t)) \end{cases} \quad (2.28)$$

a platí nasledujúca veta:

Veta 10. *Nech $\mathbf{F} \in C^2(G)$ a nech platí*

$$\frac{\partial F_1}{\partial c}(0, 0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}(0, 0, 0) \neq 0. \quad (2.29)$$

Potom pre $c = 0$ má rovnica (2.28) v bode $\mathbf{0}$ bifurkáciu sedlo-uzol. To znamená, že pre dostatočne malé $|c| \neq 0$ platí

- *ak je*

$$c \cdot \frac{\partial F_1}{\partial c}(0, 0, 0) \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}(0, 0, 0) < 0,$$

má rovnica (2.28) v okolí $\mathbf{0}$ dva hyperbolické kritické body, jeden je nestabilný (sedlo) a druhý je asymptoticky stabilný (uzol-výlevka),

- *ak je*

$$c \cdot \frac{\partial F_1}{\partial c}(0, 0, 0) \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}(0, 0, 0) > 0,$$

nemá rovnica (2.28) v okolí $\mathbf{0}$ žiadny kritický bod.

Kapitola 3

Tlmené kyvadlo s točivým momentom

3.1. Kanonická rovnica kyvadla s točivým momentom

V tejto kapitole budeme vyšetrovať rovnicu tlmeného kyvadla s točivým momentom, teda rovnicu

$$\theta''(t) + \theta'(t) + \sin \theta(t) = M, \quad (3.1)$$

ktorá bola odvodená v kapitole 1. K vyšetrovaniu použijeme teóriu dynamických systémov popísanú v kapitole 2.

Najprv rovnicu (3.1) prevedieme na systém v kanonickom tvare. Použijeme substitúcie

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \theta(t), \\ y_2(t) &= \theta'(t). \end{aligned}$$

Dostávame systém diferenciálnych rovníc

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t), \\ y_2'(t) = -y_2(t) - \sin y_1(t) + M. \end{cases} \quad (3.2)$$

Určíme kritické body zo sústavy rovníc

$$\begin{aligned} y_2 &= 0, \\ -y_2 - \sin y_1 + M &= 0, \end{aligned}$$

teda $\sin y_1 = M$. Keďže $\sin y_1$ je periodická funkcia s periódou 2π , uvažujeme hodnoty y_1 len na intervale $(-\pi, \pi]$.

- Pre $|M| > 1$, rovnica (3.2) nemá žiaden kritický bod.
- Pre $M = 1$, rovnica (3.2) má jeden kritický bod, a to $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
- Pre $M \in (0, 1)$, rovnica (3.2) má dva kritické body $(\bar{y}_1, 0)$, $(\bar{y}_2, 0)$, kde $\bar{y}_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a $\bar{y}_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
- Pre $M = 0$, rovnica (3.2) má dva kritické body $(0, 0)$ a $(\pi, 0)$.
- Pre $M \in (-1, 0)$, rovnica (3.2) má dva kritické body $(\bar{y}_1, 0)$, $(\bar{y}_2, 0)$, kde $\bar{y}_1 \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ a $\bar{y}_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
- Pre $M = -1$, rovnica (3.2) má jeden kritický bod, a to $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Bifurkácia nastane pre $M = 1$ alebo $M = -1$. Vyšetříme oba kritické body, určíme rovnicu závislú na jednom reálnom parametri v tvare (2.28) s kanonickou maticou $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a aplikujeme vety o centrálnej variete a vety o bifurkácii.

Predpokladajme, že $M = 1$ a uvažujme kritický bod $\bar{\mathbf{y}} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Použijeme nasledujúce substitúcie

$$\begin{aligned} M &= 1 + c, \\ z_1 &= y_1 - \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{\pi}{2} + z_1, \\ z_2 &= y_2 - 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = z_2, \end{aligned}$$

k prevedeniu kritického bodu $\bar{\mathbf{y}}$ na bod $\mathbf{0} = (0,0)$ s parametrom $c = 0$. Dosadíme do systému (3.2) a dostávame

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t), \\ z_2'(t) = -z_2(t) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + z_1(t)\right) + 1 + c = -z_2(t) - \left(\sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos z_1(t) + \sin z_1(t) \cdot \cos\frac{\pi}{2}\right) + 1 + c. \end{cases}$$

Po úprave máme systém $\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{g}(c, \mathbf{z}(t))$, tj.

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t), \\ z_2'(t) = -z_2(t) - \cos z_1(t) + 1 + c. \end{cases} \quad (3.3)$$

Lineárna variačná rovnica má tvar

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t), \\ z_2'(t) = -z_2(t), \end{cases}$$

teda matica \mathbf{A} nie je v kanonickom tvare, pretože má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vektorová funkcia \mathbf{g} systému (3.3) má tvar

$$\mathbf{g}(c, z_1, z_2) = (0, -\cos z_1 + 1 + c)^T.$$

Rovnicu (3.3) prevedieme na kanonický tvar pomocou transformácie $\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x}$, kde maticu \mathbf{P} dostaneme z rovnice $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{J}$. Najprv určíme determinant matice \mathbf{A} , stopu matice \mathbf{A} a vypočítame jej vlastné čísla, tj.

$$\det \mathbf{A} = 0,$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = -1,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} \mathbf{A} \pm \sqrt{(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - 4\det \mathbf{A}}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 0}}{2} = \frac{-1 \pm 1}{2},$$

teda $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -1$. Potom Jordanov kanonický tvar \mathbf{J} matice \mathbf{A} má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Z rovnice $\mathbf{AP} = \mathbf{PJ}$ určíme tvar regulárnej transformačnej matice \mathbf{P} .

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PJ}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_2 & r_2 \\ -p_2 & -r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -r_1 \\ 0 & -r_2 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = 0,$$

$$r_2 = -r_1.$$

Nech $p_1 = 1$, $r_2 = 1$, potom $\mathbf{p} = (1, 0)^T$ a $\mathbf{r} = (-1, 1)^T$. Matica \mathbf{P} má tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pretože platí $\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}(t)$ a $\mathbf{z}'(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}'(t)$, nelineárny systém (3.3) prejde po transformácii na tvar $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{g}(c, \mathbf{P}\mathbf{x}(t)))$, tj.

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(x_1(t) - x_2(t)) + 1 + c \end{pmatrix}.$$

Ak matica $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{pmatrix}$, potom maticu \mathbf{P}^{-1} určíme zo vzťahu

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{P}} \cdot \begin{pmatrix} r_2 & -r_1 \\ -p_2 & p_1 \end{pmatrix}.$$

Keďže $\det \mathbf{P} = 1$, potom $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a dostávame systém

$$\begin{cases} x_1'(t) = & -\cos(x_1(t) - x_2(t)) + 1 + c, \\ x_2'(t) = & -x_2(t) - \cos(x_1(t) - x_2(t)) + 1 + c. \end{cases} \quad (3.4)$$

Teraz pre $M = -1$ uvažujme kritický bod $\bar{\mathbf{y}} = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Budeme postupovať rovnako ako v predchádzajúcom prípade. Použijeme nasledujúce substitúcie

$$\begin{aligned} M &= -1 + c, \\ z_1 = y_1 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) &\Rightarrow y_1 = -\frac{\pi}{2} + z_1, \\ z_2 = y_2 - 0 &\Rightarrow y_2 = z_2, \end{aligned}$$

k prevedeniu kritického bodu $\bar{\mathbf{y}}$ na bod $\mathbf{0} = (0, 0)$ s parametrom $c = 0$. Dosadíme do systému (3.2) a dostávame

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t), \\ z_2'(t) = -z_2(t) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} + z_1(t)\right) - 1 + c = -z_2(t) - \left(\sin z_1(t) \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos z_1(t)\right) - 1 + c. \end{cases}$$

Po úprave máme systém

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t), \\ z_2'(t) = -z_2(t) + \cos z_1(t) - 1 + c. \end{cases} \quad (3.5)$$

Lineárna variačná rovnica má rovnaký tvar ako v predchádzajúcom prípade, a to

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t), \\ z_2'(t) = -z_2(t), \end{cases}$$

teda matica \mathbf{A} má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vektorová funkcia \mathbf{g} systému (3.5) má tvar

$$\mathbf{g}(c, z_1, z_2) = (0, \cos z_1 - 1 + c)^T.$$

Rovnaký tvar ako v predchádzajúcom prípade bude mať aj Jordanov kanonický tvar \mathbf{J} matice \mathbf{A} a regulárna transformačná matica \mathbf{P} , a teda aj matica \mathbf{P}^{-1} .

Potom systém (3.5) bude mať tvar

$$\begin{cases} x_1'(t) = \cos(x_1(t) - x_2(t)) - 1 + c, \\ x_2'(t) = -x_2(t) + \cos(x_1(t) - x_2(t)) - 1 + c. \end{cases} \quad (3.6)$$

3.2. Konštrukcia centrálnej variety

Pre $M = 1$ uvažujme systém (3.4) s $c = 0$, tj.

$$\begin{cases} x_1'(t) = & -\cos(x_1(t) - x_2(t)) + 1, \\ x_2'(t) = & -x_2(t) - \cos(x_1(t) - x_2(t)) + 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Rovnica (3.7) má vektorový tvar $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$, kde $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ je v Jordanovom kanonickom tvare, $\mathbf{0} = (0, 0)$ je nehyperbolický kritický bod rovnice (3.7) a $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ spĺňa $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $D\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, tj.

$$g_1(x_1, x_2) = -\cos(x_1 - x_2) + 1,$$

$$g_2(x_1, x_2) = -x_2 - \cos(x_1 - x_2) + 1,$$

potom

$$g_1(0, 0) = -\cos 0 + 1 = -1 + 1 = 0,$$

$$g_2(0, 0) = -\cos 0 + 1 = -1 + 1 = 0$$

a $D\mathbf{g}(x_1, x_2)$ má tvar

$$D\mathbf{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x_1 - x_2) & -\sin(x_1 - x_2) \\ \sin(x_1 - x_2) & -\sin(x_1 - x_2) \end{pmatrix},$$

a teda

$$D\mathbf{g}(0, 0) = \begin{pmatrix} \sin 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & -\sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podľa Vety 5 existuje centrálna varieta W_{loc}^C v okolí kritického bodu $\mathbf{0}$. W_{loc}^C hľadáme v tvare

$$W_{loc}^C : x_2 = h(x_1) = \underbrace{h(0)}_0 + \frac{1}{1!} \underbrace{\frac{dh}{dx_1}(0)}_0 \cdot x_1 + \frac{1}{2!} \underbrace{\frac{d^2h}{dx_1^2}(0)}_a \cdot x_1^2 + O(x_1^3),$$

tj.

$$h(x_1) = x_2 = ax_1^2 + O(x_1^3), \quad (3.8)$$

kde a je neznámy parameter.

Hodnotu a určíme nasledovne. Zderivovaním rovnice (3.8) (pozri vlastnosť 7, str. 23) dostávame

$$\frac{dh}{dx_1} = 2ax_1 + O(x_1^2). \quad (3.9)$$

Nech $(x_1(t), x_2(t))$ je riešením systému (3.4), pričom orbita tohoto riešenia leží na centrálnej variete W_{loc}^C . Potom platí

$$x_2(t) = h(x_1(t)), \quad t \in (-c, c), \quad c \in (0, \infty),$$

a teda platí rovnosť

$$x_2'(t) = \frac{dh}{dx_1}(x_1(t))x_1'(t), \quad t \in (-c, c). \quad (3.10)$$

Do rovnice (3.10) dosadíme za $\frac{dh}{dx_1}$ z rovnice (3.9) a za x_1' a x_2' rovnice zo systému (3.7). Potom dostávame

$$-x_2 - \cos(x_1 - x_2) + 1 = [2ax_1 + O(x_1^2)] \cdot [-\cos(x_1 - x_2) + 1]. \quad (3.11)$$

Funkciu $\cos(x_1 - x_2)$ si vyjadríme pomocou Taylorovho radu v bode $(0, 0)$, pričom vyššie mocniny zahrnieme do $O((|x_1| + |x_2|)^3)$, a teda

$$\begin{aligned} \cos(x_1 - x_2) &= \cos 0 + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial \cos(x_1 - x_2)}{\partial x_1}(0, 0) \cdot x_1 + \frac{\partial \cos(x_1 - x_2)}{\partial x_2}(0, 0) \cdot x_2 \right) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \cos(x_1 - x_2)}{\partial x_1^2}(0, 0) \cdot x_1^2 + 2 \frac{\partial^2 \cos(x_1 - x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) \cdot x_1 x_2 + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 \cos(x_1 - x_2)}{\partial x_2^2}(0, 0) \cdot x_2^2 \right) + O((|x_1| + |x_2|)^3). \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} \cos(x_1 - x_2) &= \cos 0 + (-\sin 0 \cdot x_1 + \sin 0 \cdot x_2) + \\ &+ \frac{1}{2} (-\cos 0 \cdot x_1^2 + 2 \cdot \cos 0 \cdot x_1 x_2 - \cos 0 \cdot x_2^2) + O((|x_1| + |x_2|)^3) \end{aligned}$$

a po úprave máme

$$\cos(x_1 - x_2) = 1 - \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + O((|x_1| + |x_2|)^3). \quad (3.12)$$

Do rovnice (3.11) dosadíme za funkciu $\cos(x_1 - x_2)$ jej Taylorov rozvoj z (3.12)

$$\begin{aligned} & -x_2 - \left(1 - \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + O((|x_1| + |x_2|)^3)\right) + 1 = \\ & = [2ax_1 + O(x_1^2)] \cdot \left[-\left(1 - \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + O((|x_1| + |x_2|)^3)\right) + 1\right]. \end{aligned}$$

Za x_2 dosadíme vzťah z rovnice (3.8), upravíme a dostávame

$$-ax_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 + O(x_1^3) = 0.$$

Porovnaním koeficientov pri jednotlivých mocninách x_1 dostávame

$$x_1^2: \quad -a + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2},$$

čo dosadíme do rovnice (3.8) a dostávame tvar centrálnej variety W_{loc}^C v okolí kritického bodu $\mathbf{0}$

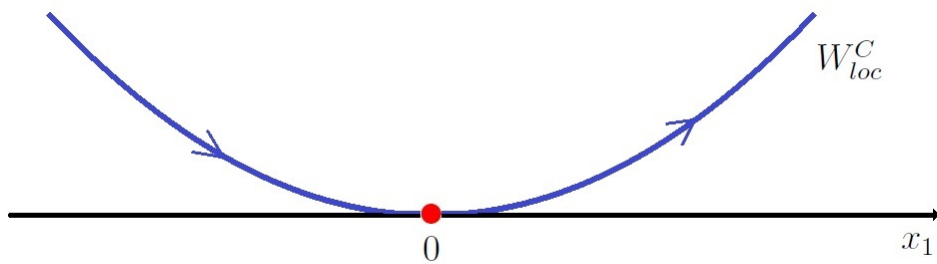
$$W_{loc}^C: \quad x_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + O(x_1^3) \doteq \frac{1}{2}x_1^2. \quad (3.13)$$

Teraz určíme tok na W_{loc}^C pomocou Vety 6. Funkciu (3.13) dosadíme do prvej rovnice v systéme (3.7) a dostávame skalárnu diferenciálnu rovnicu na W_{loc}^C , tj.

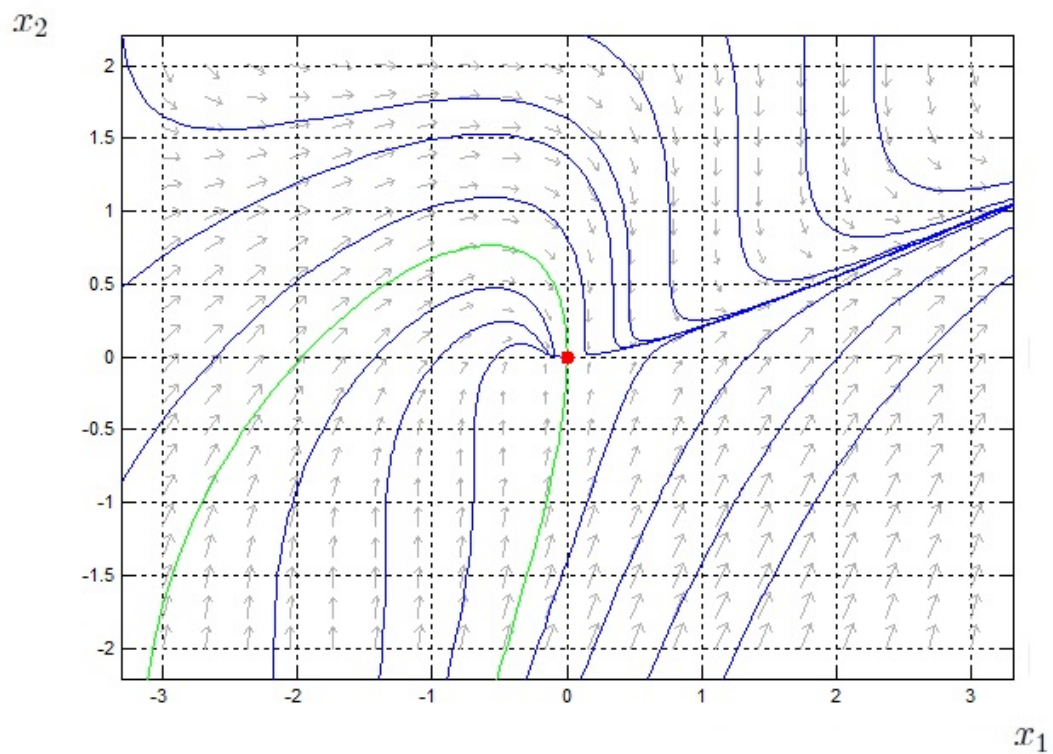
$$x_1' = -\cos\left(x_1 - \frac{1}{2}x_1^2\right) + 1. \quad (3.14)$$



Obrázok 3.1: Fázový portrét rovnice (3.14) v malom okolí počiatku.



Obrázok 3.2: Centrálna varieta W_{loc}^C a tok na nej pre rovnicu (3.7).



Obrázok 3.3: Fázový portrét rovnice (3.7).

Teraz pre $M = -1$ uvažujme systém (3.6) s $c = 0$, tj.

$$\begin{cases} x_1'(t) = \cos(x_1(t) - x_2(t)) - 1, \\ x_2'(t) = -x_2(t) + \cos(x_1(t) - x_2(t)) - 1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Na rovnicu (3.15) budeme opäť aplikovať Vety 3 a 4 o tvare centrálnej variety a o toku na centrálnej variete.

Rovnica (3.15) má vektorový tvar $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$, kde $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ je v Jordanovom kanonickom tvare, $\mathbf{0} = (0, 0)$ je nehyperbolický kritický bod rovnice (3.15) a $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ spĺňa $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $D\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, tj.

$$g_1(x_1, x_2) = \cos(x_1 - x_2) - 1,$$

$$g_2(x_1, x_2) = \cos(x_1 - x_2) - 1,$$

potom

$$g_1(0, 0) = \cos 0 - 1 = 1 - 1 = 0,$$

$$g_2(0, 0) = \cos 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

a $D\mathbf{g}(x_1, x_2)$ má tvar

$$D\mathbf{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x_1 - x_2) & \sin(x_1 - x_2) \\ -\sin(x_1 - x_2) & \sin(x_1 - x_2) \end{pmatrix},$$

a teda

$$\mathbf{g}(0, 0) = \begin{pmatrix} -\sin 0 & \sin 0 \\ -\sin 0 & \sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podľa Vety 5 existuje centrálna varieta W_{loc}^C v okolí kritického bodu $\mathbf{0}$. W_{loc}^C hľadáme v tvare (3.8). Do rovnice (3.10) dosadíme za $\frac{dh}{dx_1}$ z rovnice (3.9) a za x_1' a x_2' rovnice zo systému (3.15). Potom dostávame

$$-x_2 + \cos(x_1 - x_2) - 1 = [2ax_1 + O(x_1^2)] \cdot [\cos(x_1 - x_2) - 1]. \quad (3.16)$$

Do rovnice (3.16) dosadíme za funkciu $\cos(x_1 - x_2)$ jej Taylorov rozvoj z (3.12)

$$\begin{aligned} & -x_2 + \left(1 - \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + O((|x_1| + |x_2|)^3)\right) - 1 = \\ & = [2ax_1 + O(x_1^2)] \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + O((|x_1| + |x_2|)^3)\right) - 1\right]. \end{aligned}$$

Za x_2 dosadíme vzťah z rovnice (3.8), upravíme a dostávame

$$-ax_1^2 - \frac{1}{2}x_1^2 + O(x_1^3) = 0.$$

Porovnaním koeficientov pri jednotlivých mocninách x_1 dostávame

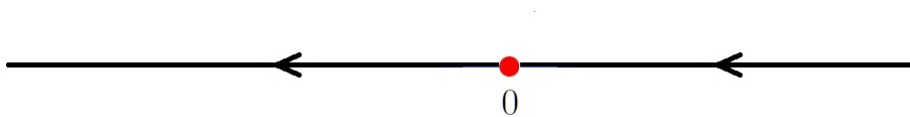
$$x_1^2: \quad -a - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2},$$

čo dosadíme do rovnice (3.8) a dostávame tvar centrálnej variety W_{loc}^C v okolí kritického bodu $\mathbf{0}$

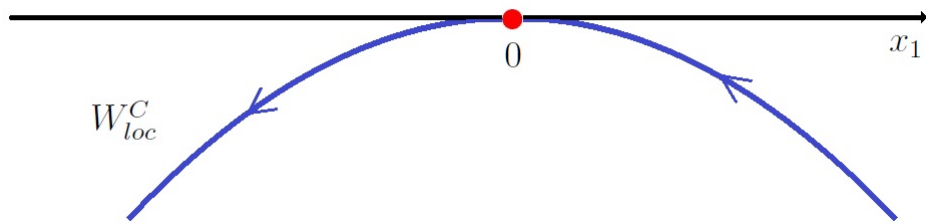
$$W_{loc}^C: \quad x_2 = -\frac{1}{2}x_1^2 + O(x_1^3) \doteq -\frac{1}{2}x_1^2. \quad (3.17)$$

Teraz určíme tok na W_{loc}^C pomocou Vety 6. Funkciu (3.17) dosadíme do prvej rovnice v systéme (3.15) a dostávame skalárnu diferenciálnu rovnicu na W_{loc}^C , tj.

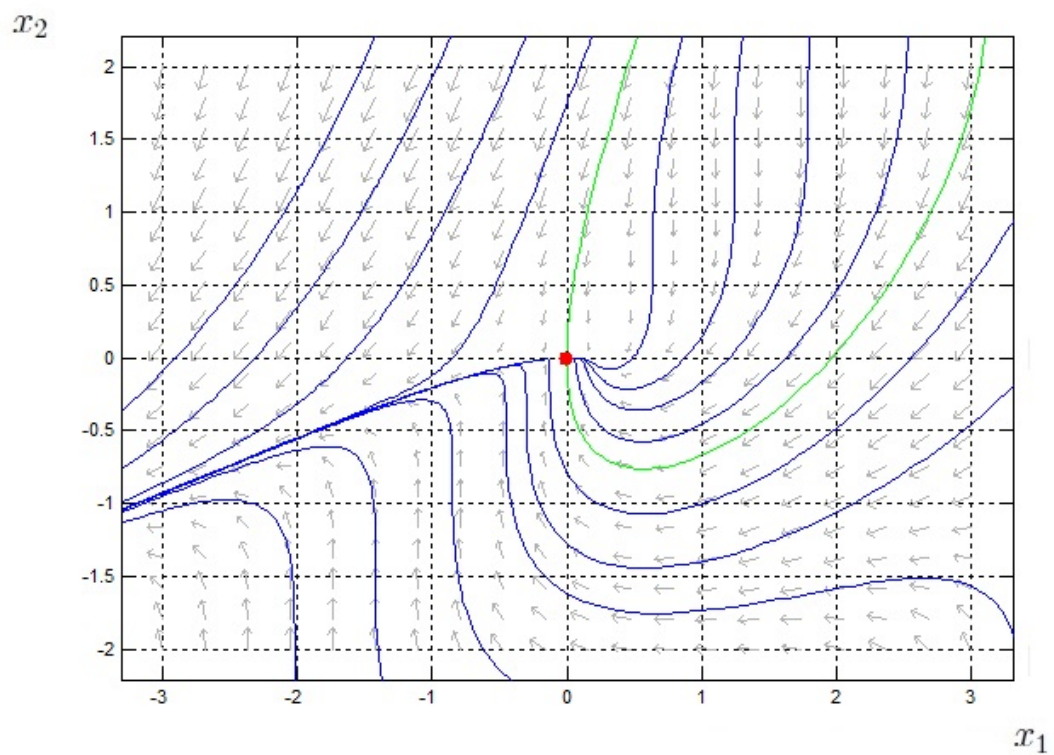
$$x_1' = \cos\left(x_1 + \frac{1}{2}x_1^2\right) - 1. \quad (3.18)$$



Obrázok 3.4: Fázový portrét rovnice (3.18) v malom okolí počiatku.



Obrázok 3.5: Centrálna varieta W_{loc}^C a tok na nej pre rovnicu (3.15).



Obrázok 3.6: Fázový portrét rovnice (3.15).

3.3. Určenie bifurkácie

Na rovnicu (3.4) budeme aplikovať Vety 8, 9 a 10 o bifurkácii. Systém (3.4) má tvar systému (2.28) a platí, že

$$F_1(c, x_1, x_2) = -\cos(x_1 - x_2) + 1 + c,$$

$$F_2(c, x_1, x_2) = -\cos(x_1 - x_2) + 1 + c,$$

kde $\mathbf{F} = (F_1, F_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

$$F_1(0, x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2) = -\cos(x_1 - x_2) + 1,$$

$$F_2(0, x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = -\cos(x_1 - x_2) + 1,$$

pričom $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ spĺňa $\mathbf{f}(0, 0) = \mathbf{0}$ a $D\mathbf{f}(0, 0) = \mathbf{0}$, tj.

$$f_1(0, 0) = -\cos 0 + 1 = -1 + 1 = 0,$$

$$f_2(0, 0) = -\cos 0 + 1 = -1 + 1 = 0$$

a keďže $D\mathbf{f}(x_1, x_2)$ má tvar

$$D\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x_1 - x_2) & -\sin(x_1 - x_2) \\ \sin(x_1 - x_2) & -\sin(x_1 - x_2) \end{pmatrix},$$

potom

$$D\mathbf{f}(0, 0) = \begin{pmatrix} \sin 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & -\sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teda rovnica (3.4) má vektorový tvar $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(c, \mathbf{x}(t))$, kde $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ je v Jordanovom kanonickom tvare a $\mathbf{0} = (0, 0)$ je nehyperbolický kritický bod rovnice (3.7) a môžeme aplikovať Vetu 10. Platí, že

$$\frac{\partial F_1}{\partial c}(0, 0, 0) = 1 \neq 0,$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}(0, 0, 0) = \cos 0 = 1 \neq 0,$$

potom pre $c = 0$ má rovnica (3.4) v bode $\mathbf{0} = (0, 0)$ bifurkáciu sedlo-uzol. To znamená, že pre dostatočne malé $|c| \neq 0$ platí

$$c \cdot \frac{\partial F_1}{\partial c}(0, 0, 0) \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}(0, 0, 0) = c \cdot 1 \cdot 1 = c,$$

potom, ak $c < 0$, rovnica (3.4) má v okolí $\mathbf{0}$ dva hyperbolické kritické body, jeden je nestabilný (sedlo) a druhý je asymptoticky stabilný (uzol-výlevka) a ak je $c > 0$, rovnica (3.4) nemá v okolí $\mathbf{0}$ žiadny kritický bod.

Pre aplikáciu Vety 9 určíme bifurkačnú funkciu

$$\mathcal{B}(c, x_1) = F_1(c, x_1, \psi(c, x_1)) \quad (3.19)$$

pomocou riešenia $x_2 = \psi(c, x_1)$ rovnice (2.21) s $\ell = 1$. Táto rovnica tu má tvar

$$\omega(c, x_1, x_2) = 0, \quad (3.20)$$

kde

$$\omega(c, x_1, x_2) = -x_2 + F_2(c, x_1, x_2) = -x_2 - \cos(x_1 - x_2) + 1 + c.$$

Platí, že

$$\omega(0, 0, 0) = 0 - \cos 0 + 1 + 0 = 0,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1}(c, x_1, x_2) = \sin(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_1}(0, 0, 0) = \sin 0 = 0,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_2}(c, x_1, x_2) = -1 - \sin(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_2}(0, 0, 0) = -1 - \sin 0 = -1,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial c}(c, x_1, x_2) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \omega}{\partial c}(0, 0, 0) = 1.$$

Z vety o implicitnej funkcii vyplýva, že v okolí bodu $(c, x_1) = (0, 0)$ existuje práve jedno riešenie $x_2 = \psi(c, x_1)$, pričom

$$\psi(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial c}(0, 0) = 1, \quad (3.21)$$

tj.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(c, x_1) = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial x_1}(c, x_1, x_2)}{\frac{\partial \omega}{\partial x_2}(c, x_1, x_2)} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(0, 0) = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial x_1}(0, 0, 0)}{\frac{\partial \omega}{\partial x_2}(0, 0, 0)} = -\frac{0}{-1} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial c}(c, x_1) = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial c}(c, x_1, x_2)}{\frac{\partial \omega}{\partial x_2}(c, x_1, x_2)} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial c}(0, 0) = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial c}(0, 0, 0)}{\frac{\partial \omega}{\partial x_2}(0, 0, 0)} = -\frac{1}{-1} = 1.$$

Z Taylorovej vety potom plynie, že riešenie možno hľadať v tvare Taylorovho radu so stredom v bode $(0, 0)$

$$\begin{aligned} \psi(c, x_1) &= \psi(0, 0) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial \psi}{\partial c}(0, 0) \cdot c + \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(0, 0) \cdot x_1 \right) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial c^2}(0, 0) \cdot c^2 + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial c \partial x_1}(0, 0) \cdot cx_1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}(0, 0) \cdot x_1^2 \right) + \\ &+ O((|c| + |x_1|)^3), \end{aligned}$$

tj. súčet vyšších mocnín zahrnieme do posledného sčítanca. Pre jednotlivý tvar riešenia $\psi(c, x_1)$ v okolí $(0, 0)$ stačí nájsť hodnoty koeficientov u c^2 , cx_1 a x_1^2 . Vzhľadom k (3.21) totiž platí:

$$x_2 = \psi(c, x_1) = c + a_1 c^2 + a_2 c x_1 + a_3 x_1^2 + O((|c| + |x_1|)^3). \quad (3.22)$$

Hodnoty koeficientov a_1 , a_2 , a_3 určíme tak, že do rovnice (3.20) dosadíme Taylorov rozvoj (3.12) funkcie $\cos(x_1 - x_2)$, a teda

$$-x_2 - \left[1 - \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + O((|x_1| + |x_2|)^3) \right] + 1 + c = 0.$$

Do tejto rovnice dosadíme za x_2 rovnicu (3.22). Po úprave dostávame

$$\left(-a_1 + \frac{1}{2} \right) c^2 + (-a_2 - 1) cx_1 + \left(-a_3 + \frac{1}{2} \right) x_1^2 + O((|c| + |x_1|)^3) = 0.$$

Porovnaním koeficientov pri c^2 , cx_1 a x_1^2 dostávame

$$\begin{aligned} c^2 : \quad -a_1 + \frac{1}{2} = 0 & \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}, \\ cx_1 : \quad -a_2 - 1 = 0 & \Rightarrow a_2 = -1, \\ x_1^2 : \quad -a_3 + \frac{1}{2} = 0 & \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Potom riešenie ψ má tvar

$$\psi(c, x_1) = c + \frac{1}{2}c^2 - cx_1 + \frac{1}{2}x_1^2 + O((|c| + |x_1|)^3)$$

a bifurkačná funkcia \mathcal{B} má tvar

$$\mathcal{B}(c, x_1) = -\cos\left(x_1 - c - \frac{1}{2}c^2 + cx_1 - \frac{1}{2}x_1^2 - O((|c| + |x_1|)^3)\right) + 1 + c.$$

Skalárna diferenciálna rovnica má tvar

$$x_1'(t) = \mathcal{B}(c, x_1(t)),$$

a teda

$$x_1' = -\cos\left(x_1 - c - \frac{1}{2}c^2 + cx_1 - \frac{1}{2}x_1^2 - O((|c| + |x_1|)^3)\right) + 1 + c. \quad (3.23)$$

Rovnica (3.23) má pre hodnotu 0 parametra c kritický bod 0, teda platí $\mathcal{B}(0, 0) = 0$, tj.

$$\mathcal{B}(0, 0) = -\cos 0 + 1 + 0 = -1 + 1 = 0$$

a zároveň

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x_1}(0, 0) = \sin 0 \cdot 1 = 0,$$

potom 0 je nehyperbolický kritický bod rovnice (3.23) a $\mathcal{B} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Navyše platí, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial c}(0, 0) &= \sin 0 \cdot (-1) + 1 = 1 \neq 0, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial x_1^2}(0, 0) &= \cos 0 \cdot 1 \cdot 1 + \sin 0 \cdot (-1) = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Potom má rovnica (3.23) podľa Vety 8 sedlovú bifurkáciu.

Pre prípad $M = -1$ budeme opäť aplikovať vety 8, 9 a 10 o bifurkácii na rovnicu (3.6). Systém (3.6) má tvar systému (2.28), a platí, že

$$F_1(c, x_1, x_2) = \cos(x_1 - x_2) - 1 + c,$$

$$F_2(c, x_1, x_2) = \cos(x_1 - x_2) - 1 + c,$$

kde $\mathbf{F} = (F_1, F_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

$$F_1(0, x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2) = \cos(x_1 - x_2) - 1,$$

$$F_2(0, x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = \cos(x_1 - x_2) - 1,$$

pričom $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ spĺňa $\mathbf{f}(0, 0) = \mathbf{0}$ a $D\mathbf{f}(0, 0) = \mathbf{0}$, tj.

$$f_1(0, 0) = \cos 0 - 1 = 1 - 1 = 0,$$

$$f_2(0, 0) = \cos 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

a keďže $D\mathbf{f}(x_1, x_2)$ má tvar

$$D\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x_1 - x_2) & \sin(x_1 - x_2) \\ -\sin(x_1 - x_2) & \sin(x_1 - x_2) \end{pmatrix},$$

potom

$$D\mathbf{f}(0, 0) = \begin{pmatrix} -\sin 0 & \sin 0 \\ -\sin 0 & \sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teda rovnica (3.6) má vektorový tvar $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(c, \mathbf{x}(t))$, kde $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ je v Jordanovom kanonickom tvare a $\mathbf{0} = (0, 0)$ je nehyperbolický kritický bod rovnice (3.15) a môžeme aplikovať Vetu 10. Platí, že

$$\frac{\partial F_1}{\partial c}(0, 0, 0) = 1 \neq 0,$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}(0, 0, 0) = -\cos 0 = -1 \neq 0,$$

potom pre $c = 0$ má rovnica (3.6) v bode $\mathbf{0} = (0,0)$ bifurkáciu sedlo-uzol. To znamená, že pre dostatočne malé $|c| \neq 0$ platí

$$c \cdot \frac{\partial F_1}{\partial c}(0,0,0) \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}(0,0,0) = c \cdot 1 \cdot (-1) = -c,$$

potom, ak $c > 0$, rovnica (3.6) má v okolí $\mathbf{0}$ dva hyperbolické kritické body, jeden je nestabilný (sedlo) a druhý je asymptoticky stabilný (uzol-výlevka) a ak je $c < 0$, rovnica (3.6) nemá v okolí $\mathbf{0}$ žiadny kritický bod.

Pre aplikáciu Vety 9 určíme podobne ako v predchádzajúcom prípade bifurkačnú funkciu (3.19) pomocou riešenia $x_2 = \psi(c, x_1)$ rovnice (2.21) s $\ell = 1$. Táto rovnica má tvar (3.19), kde

$$\omega(c, x_1, x_2) = -x_2 + F_2(c, x_1, x_2) = -x_2 + \cos(x_1 - x_2) - 1 + c.$$

Platí, že

$$\omega(0,0,0) = 0 + \cos 0 - 1 + 0 = 0,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1}(c, x_1, x_2) = -\sin(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_1}(0,0,0) = -\sin 0 = 0,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_2}(c, x_1, x_2) = -1 + \sin(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_2}(0,0,0) = -1 + \sin 0 = -1,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial c}(c, x_1, x_2) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \omega}{\partial c}(0,0,0) = 1.$$

Z vety o implicitnej funkcii vyplýva, že v okolí bodu $(c, x_1) = (0,0)$ existuje práve jedno riešenie $x_2 = \psi(c, x_1)$, pričom platia podmienky (3.21), tj.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(c, x_1) = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial x_1}(c, x_1, x_2)}{\frac{\partial \omega}{\partial x_2}(c, x_1, x_2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(0,0) = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial x_1}(0,0,0)}{\frac{\partial \omega}{\partial x_2}(0,0,0)} = -\frac{0}{-1} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial c}(c, x_1) = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial c}(c, x_1, x_2)}{\frac{\partial \omega}{\partial x_2}(c, x_1, x_2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial c}(0,0) = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial c}(0,0,0)}{\frac{\partial \omega}{\partial x_2}(0,0,0)} = -\frac{1}{-1} = 1.$$

Z Taylorovej vety potom plynie, že riešenie možno hľadať v rovnakom tvare Taylorovho radu so stredom v bode $(0, 0)$ ako v predchádzajúcom prípade. Pre jednoduchý tvar riešenia $\psi(c, x_1)$ v okolí $(0, 0)$ hľadáme hodnoty koeficientov u c^2 , cx_1 a x_1^2 a vzhľadom k (3.21) platí (3.22), tj.

$$\psi(c, x_1) = c + a_1c^2 + a_2cx_1 + a_3x_1^2 + O((|c| + |x_1|)^3).$$

Hodnoty koeficientov a_1 , a_2 , a_3 určíme tak, že do rovnice (3.20) dosadíme Taylorov rozvoj (3.12) funkcie $\cos(x_1 - x_2)$, a teda

$$-x_2 + \left[1 - \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + O((|x_1| + |x_2|)^3) \right] - 1 + c = 0.$$

Do tejto rovnice dosadíme za x_2 rovnicu (3.22). Po úprave dostávame

$$\left(a_1 + \frac{1}{2} \right) c^2 + (a_2 - 1) cx_1 + \left(a_3 + \frac{1}{2} \right) x_1^2 + O((|c| + |x_1|)^3) = 0.$$

Porovnaním koeficientov pri c^2 , cx_1 a x_1^2 dostávame

$$\begin{aligned} c^2 : \quad a_1 + \frac{1}{2} = 0 & \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \\ cx_1 : \quad a_2 - 1 = 0 & \quad \Rightarrow \quad a_2 = 1, \\ x_1^2 : \quad a_3 + \frac{1}{2} = 0 & \quad \Rightarrow \quad a_3 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Potom riešenie ψ má tvar

$$\psi(c, x_1) = c - \frac{1}{2}c^2 + cx_1 - \frac{1}{2}x_1^2 + O((|c| + |x_1|)^3)$$

a bifurkačná funkcia \mathcal{B} má tvar

$$\mathcal{B}(c, x_1) = \cos \left(x_1 - c + \frac{1}{2}c^2 - cx_1 + \frac{1}{2}x_1^2 - O((|c| + |x_1|)^3) \right) - 1 + c.$$

Skalárna diferenciálna rovnica má tvar

$$x_1'(t) = \mathcal{B}(c, x_1(t)),$$

a teda

$$x_1' = \cos \left(x_1 - c + \frac{1}{2}c^2 - cx_1 + \frac{1}{2}x_1^2 - O(|c| + |x_1|)^3 \right) - 1 + c. \quad (3.24)$$

Rovnica (3.24) má pre hodnotu 0 parametra c kritický bod 0, teda platí $\mathcal{B}(0, 0) = 0$, tj.

$$\mathcal{B}(0, 0) = \cos 0 - 1 + 0 = 1 - 1 = 0$$

a zároveň

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x_1}(0, 0) = -\sin 0 \cdot 1 = 0,$$

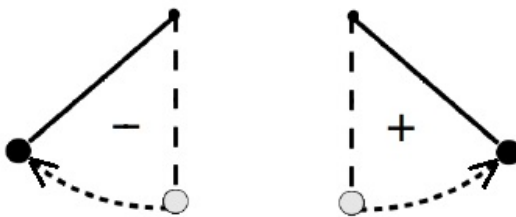
potom 0 je nehyperbolický kritický bod rovnice (3.24) a $\mathcal{B} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Navyše platí, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial c}(0, 0) &= -\sin 0 \cdot (-1) + 1 = 1 \neq 0, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial x_1^2}(0, 0) &= -\cos 0 \cdot 1 \cdot 1 - \sin 0 \cdot 1 = -1 \neq 0. \end{aligned}$$

Potom má rovnica (3.24) podľa Vety 8 sedlovú bifurkáciu.

3.4. Fázové portréty kyvadla

Fázové portréty ilustrujú popísané bifurkácie a tvary centrálnych variet. Portréty sa periodicky opakujú, preto stačí komentovať iba časť pre $y_1 \in (-\pi, \pi]$. Na vodorovnej osi y_1 je udaná veľkosť uhlovej odchýlky $\theta(t)$ kyvadla od zvislej polohy, pritom odchýlka doprava je kladná, odchýlka doľava je záporná. Na zvislej osi y_2 je udaná veľkosť uhlovej rýchlosti $\theta'(t)$ kyvadla. Ak sa kyvadlo pohybuje doprava, je rýchlosť kladná, pri pohybe doľava je záporná.



Uvažujeme systém (3.2) s parametrom M , tj.

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t), \\ y_2'(t) = -y_2(t) - \sin y_1(t) + M. \end{cases}$$

Jacobiho matica systému (3.2) má tvar

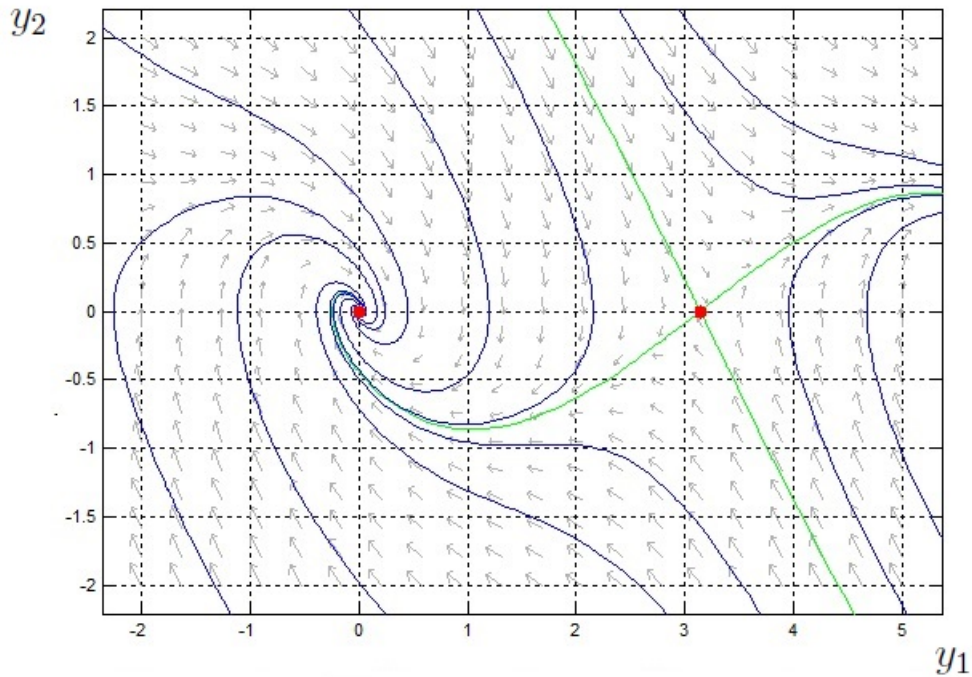
$$Df(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos y_1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nech $M = 0$. Rovnica (3.2) má dva kritické body $(0, 0)$ a $(\pi, 0)$. Uvažujme kritický bod $(0, 0)$. Jacobiho matica (ozn. \mathbf{A}) v bode $(0, 0)$ má tvar $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det \mathbf{A} = 1$, $\operatorname{tr} \mathbf{A} = -1$, potom vlastné čísla sú $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Keďže $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \neq 0$, potom kritický bod $(0, 0)$ je hyperbolický kritický bod, a zároveň $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} < 0$, potom podľa Vety 1 je asymptoticky stabilný. A keďže $\det \mathbf{A} = 1 > 0$, $\operatorname{tr} \mathbf{A} = -1 < 0$ a navyše platí, že $4\det \mathbf{A} > (\operatorname{tr} \mathbf{A})^2$, potom bod $(0, 0)$ je ohnisko-výlevka.

Teraz uvažujme kritický bod $(\pi, 0)$. Jacobiho matica \mathbf{A} v bode $(\pi, 0)$ má tvar $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det \mathbf{A} = -1$, $\operatorname{tr} \mathbf{A} = -1$, potom vlastné čísla sú $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Keďže $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \neq 0$, potom kritický bod $(\pi, 0)$ je hyperbolický kritický bod, a zároveň $\lambda_1 < 0$ a $\lambda_2 > 0$, potom podľa Vety 2 je nestabilný. A keďže $\det \mathbf{A} = -1 < 0$, potom bod $(\pi, 0)$ je sedlo.



Obrázok 3.7: $M = 0$: Hyperbolický kritický bod $(0, 0)$ je asymptoticky stabilné ohnisko-výlevka a hyperbolický kritický bod $(\pi, 0)$ je nestabilné sedlo.

Z fázového portréту 3.7 možno vyčítať nasledujúce pohybové režimy kyvadla:

Pre $\bar{\mathbf{y}} = (0, 0)$ je kyvadlo v zvislej polohe s telesom upevneným na jeho konci nadol.

Pre $\bar{\mathbf{y}} = (\pi, 0)$ je kyvadlo v zvislej polohe s telesom upevneným na jeho konci nahor.

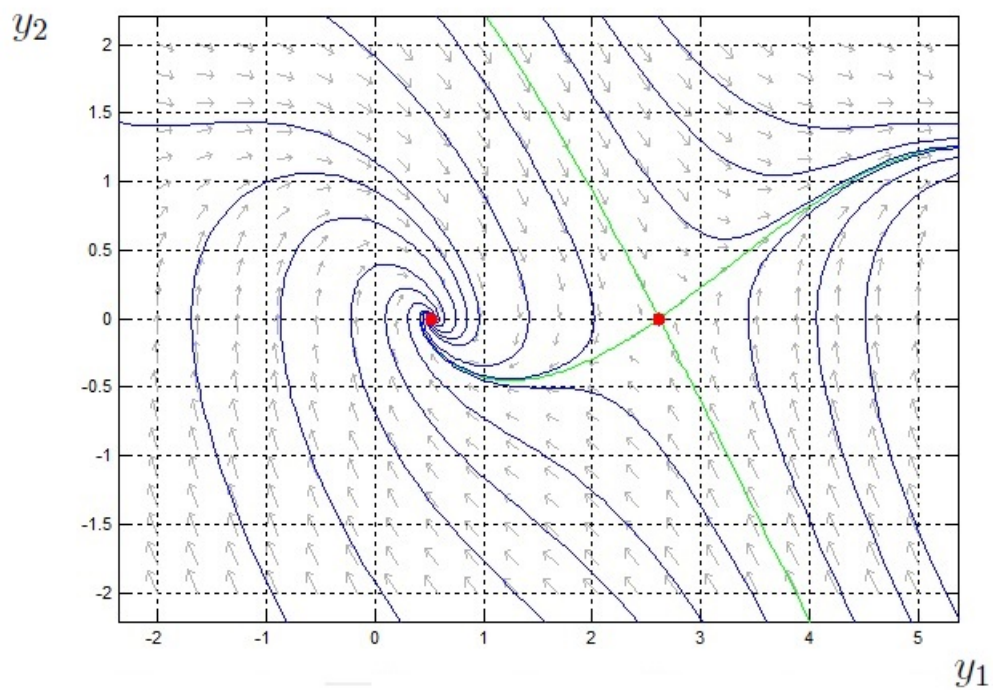
Pre napr. $\bar{\mathbf{y}} = (1, 1)$ má v čase $t = 0$ kyvadlo odchýlku $y_1 = 1$ od zvislej polohy a rýchlosť $y_2 = 1$. Pre $t \rightarrow \infty$ kyvadlo kmitá sprava doľava, pričom odchýlka aj rýchlosť postupne konverguje k 0.

Ak M zväčšujeme do kladných hodnôt, kritické body, ktoré pre $M = 0$ sú $(0, 0)$ a $(\pi, 0)$, sa k sebe začínú približovať.

Nech $M = 0, 5$. Rovnica (3.2) má dva kritické body $(\frac{\pi}{6}, 0)$ a $(\frac{5\pi}{6}, 0)$. Uvažujme kritický bod $(\frac{\pi}{6}, 0)$. Jacobiho matica \mathbf{A} v bode $(\frac{\pi}{6}, 0)$ má tvar $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{pmatrix}$, $\det \mathbf{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tr} \mathbf{A} = -1$, potom vlastné čísla sú $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 2\sqrt{3}}}{2}$.

Keďže $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \neq 0$, potom kritický bod $(\frac{\pi}{6}, 0)$ je hyperbolický kritický bod, a zároveň $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} < 0$, potom podľa Vety 1 je asymptoticky stabilný. A keďže $\det \mathbf{A} = 1 > 0$, $\operatorname{tr} \mathbf{A} = -1 < 0$ a navyše platí, že $4\det \mathbf{A} > (\operatorname{tr} \mathbf{A})^2$, potom bod $(\frac{\pi}{6}, 0)$ je ohnisko-výlevka.

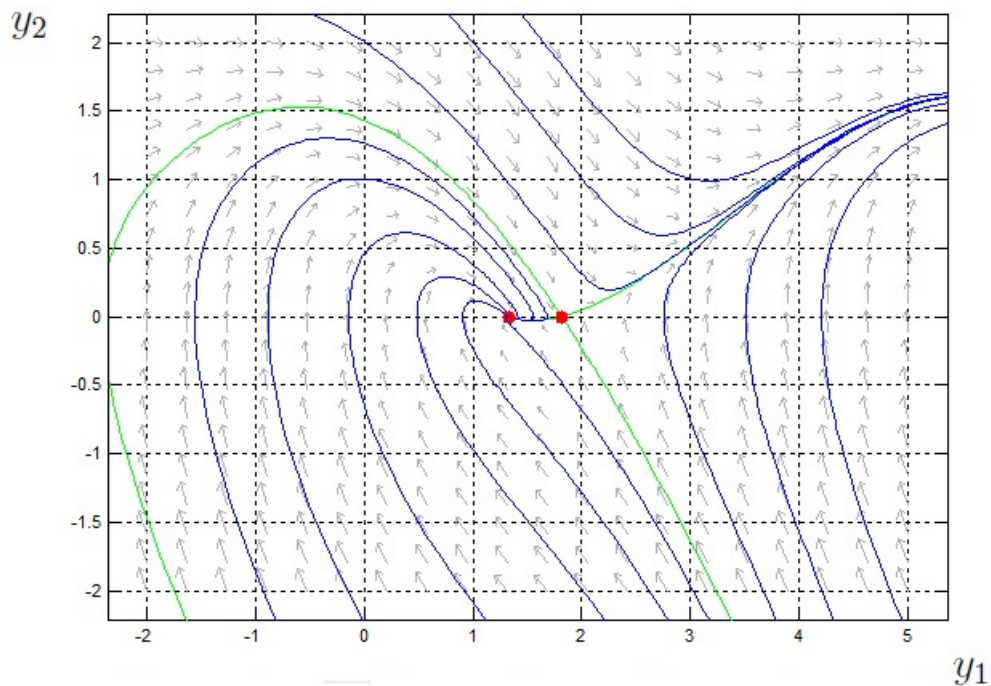
Teraz uvažujme kritický bod $(\frac{5\pi}{6}, 0)$. Jacobiho matica \mathbf{A} v bode $(\frac{5\pi}{6}, 0)$ má tvar $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{pmatrix}$, $\det \mathbf{A} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tr} \mathbf{A} = -1$, potom vlastné čísla sú $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{3}}}{2}$. Keďže $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{3}}}{2} \neq 0$, potom kritický bod $(\frac{5\pi}{6}, 0)$ je hyperbolický kritický bod, a zároveň $\lambda_1 < 0$ a $\lambda_2 > 0$, potom podľa Vety 2 je nestabilný. A keďže $\det \mathbf{A} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, potom bod $(\frac{5\pi}{6}, 0)$ je sedlo.



Obrázok 3.8: $M = 0,5$: Hyperbolický kritický bod $(\frac{\pi}{6}, 0)$ je asymptoticky stabilné ohnisko-výlevka a hyperbolický kritický bod $(\frac{5\pi}{6}, 0)$ je nestabilné sedlo.

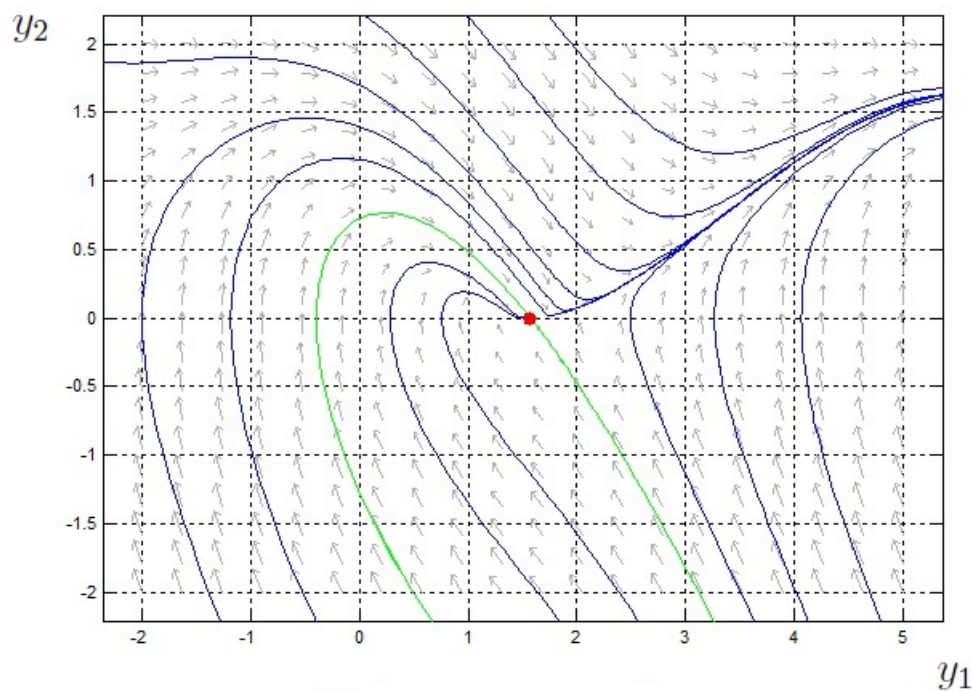
Nech $M = 0,97$. Rovnica (3.2) má dva kritické body $(1,33;0)$ a $(1,81;0)$. Uvažujme kritický bod $(1,33;0)$. Jacobiho matica \mathbf{A} v bode $(1,33;0)$ má tvar $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,24 & -1 \end{pmatrix}$, $\det \mathbf{A} = 0,24$, $\text{tr} \mathbf{A} = -1$, potom vlastné čísla sú $\lambda_1 = -0,4$ a $\lambda_2 = -0,6$. Keďže $\text{Re} \lambda_{1,2} \neq 0$, potom kritický bod $(1,33;0)$ je hyperbolický kritický bod, a zároveň $\text{Re} \lambda_{1,2} < 0$, potom podľa Vety 1 je asymptoticky stabilný. A keďže $\det \mathbf{A} = 0,24 > 0$, $\text{tr} \mathbf{A} = -1 < 0$ a navyše platí, že $4\det \mathbf{A} < (\text{tr} \mathbf{A})^2$, potom bod $(1,33;0)$ je uzol-výlevka s dvomi vlastnými priamkami.

Teraz uvažujme kritický bod $(1,81;0)$. Jacobiho matica \mathbf{A} v bode $(1,81;0)$ má tvar $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,24 & -1 \end{pmatrix}$, $\det \mathbf{A} = -0,24$, $\text{tr} \mathbf{A} = -1$, potom vlastné čísla sú $\lambda_1 = 0,2$ a $\lambda_2 = -1,2$. Keďže $\text{Re} \lambda_{1,2} \neq 0$, potom kritický bod $(1,81;0)$ je hyperbolický kritický bod, a zároveň $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 < 0$, potom podľa Vety 2 je nestabilný. A keďže $\det \mathbf{A} = -0,24 < 0$, potom bod $(1,81;0)$ je sedlo.



Obrázok 3.9: $M = 0,97$: Hyperbolický kritický bod $(1,33;0)$ je asymptoticky stabilný uzol-výlevka a hyperbolický kritický bod $(1,81;0)$ je nestabilné sedlo.

Nech $M = 1$. Rovnica (3.2) má jeden kritický bod $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Rovnica (3.2) je v bifurkácii a hodnota $M = 1$ je bifurkačná hodnota. Jacobiho matica \mathbf{A} v bode $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ má tvar $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det \mathbf{A} = 0$, $\text{tr} \mathbf{A} = -1$, potom vlastné čísla sú $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -1$, a teda kritický bod $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ je nehyperbolický kritický bod. Z toku na centrálnej variete na obr. 3.2 vyplýva, že bod $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ je nestabilný nehyperbolický kritický bod.



Obrázok 3.10: $M = 1$: Bod $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ je nestabilný nehyperbolický kritický bod.

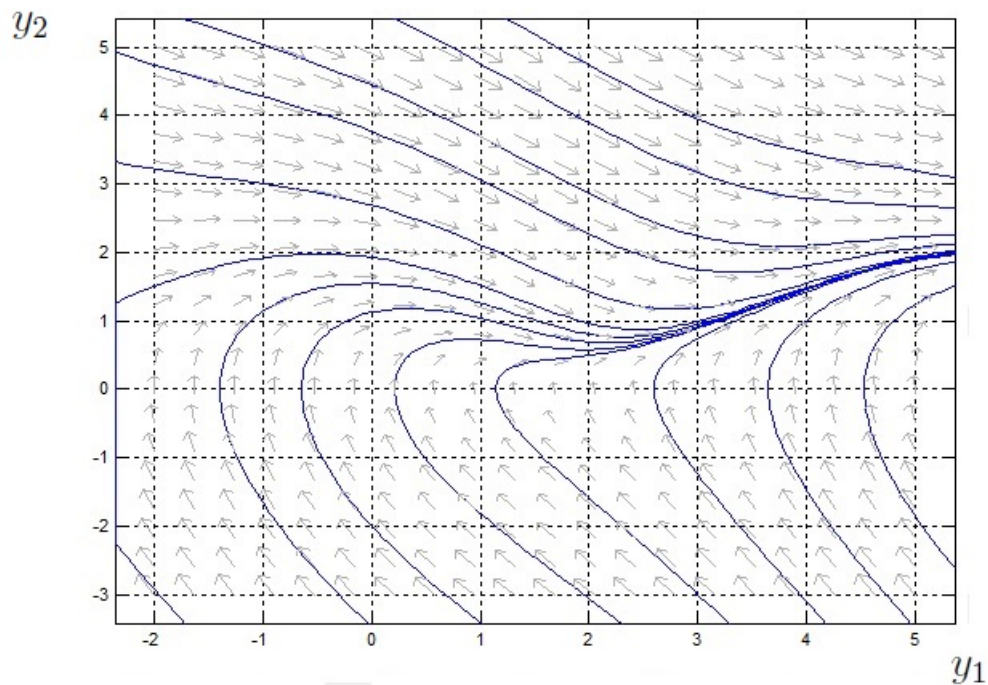
Z fázového portréту 3.10 možno vyčítať nasledujúce pohybové režimy kyvadla:

Pre $\bar{\mathbf{y}} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ je kyvadlo vo vodorovnej polohe s telesom upevneným na jeho konci napravo.

Pre napr. $\bar{\mathbf{y}} = (0, 1)$, má v čase $t = 0$ kyvadlo odchýlku $y_1 = 0$ od vodorovnej polohy a rýchlosť $y_2 = 1$. Pre $t \rightarrow \infty$ odchýlka aj rýchlosť kyvadla klesá a kyvadlo

sa zastaví v bode $\bar{y} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Nech $M > 1$. Rovnica (3.2) nemá žiaden kritický bod.



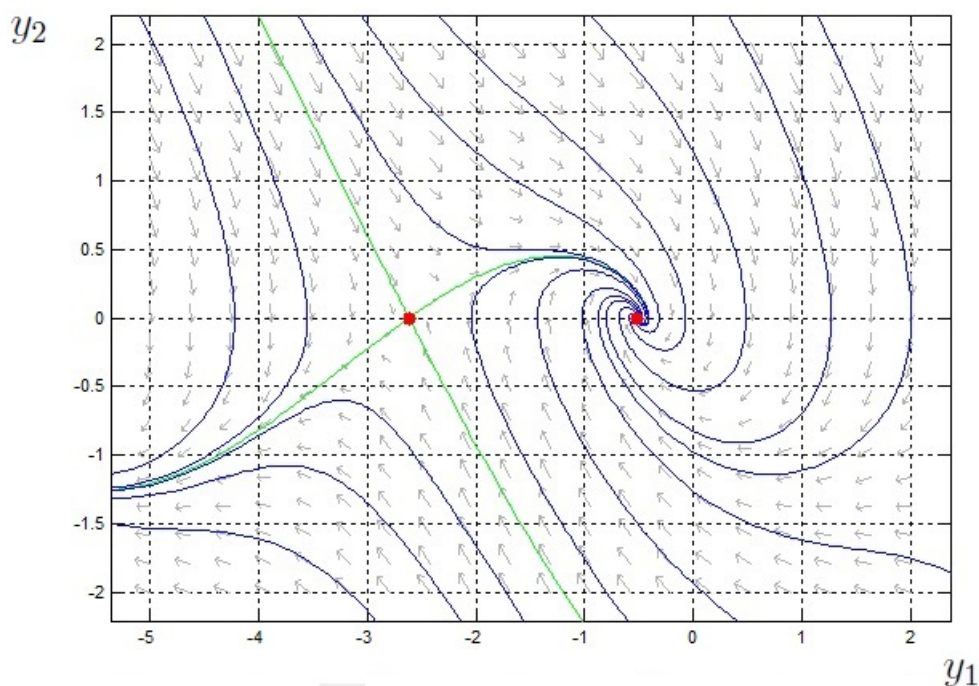
Obrázok 3.11: Pre hodnotu $M = 1,5$ rovnica (3.2) nemá žiaden kritický bod.

Z fázového portréu 3.11 možno vyčítať rotáciu kyvadla s kolísajúcou rýchlosťou a narastajúcou odchýlkou v kladnom smere.

Ak M zmeňujeme do záporných hodnôt, kritické body, ktoré pre $M = 0$ sú $(0, 0)$ a $(\pi, 0)$, sa k sebe taktiež začnú približovať.

Nech $M = -0,5$. Rovnica (3.2) má dva kritické body $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ a $(-\frac{5\pi}{6}, 0)$. Uvažujme kritický bod $(-\frac{\pi}{6}, 0)$. Jacobiho matica \mathbf{A} v bode $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ má rovnaký tvar ako v prípade kritického bodu $(\frac{\pi}{6}, 0)$ pre $M = 0,5$. Potom hyperbolický kritický bod $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ je asymptoticky stabilné ohnisko-výlevka.

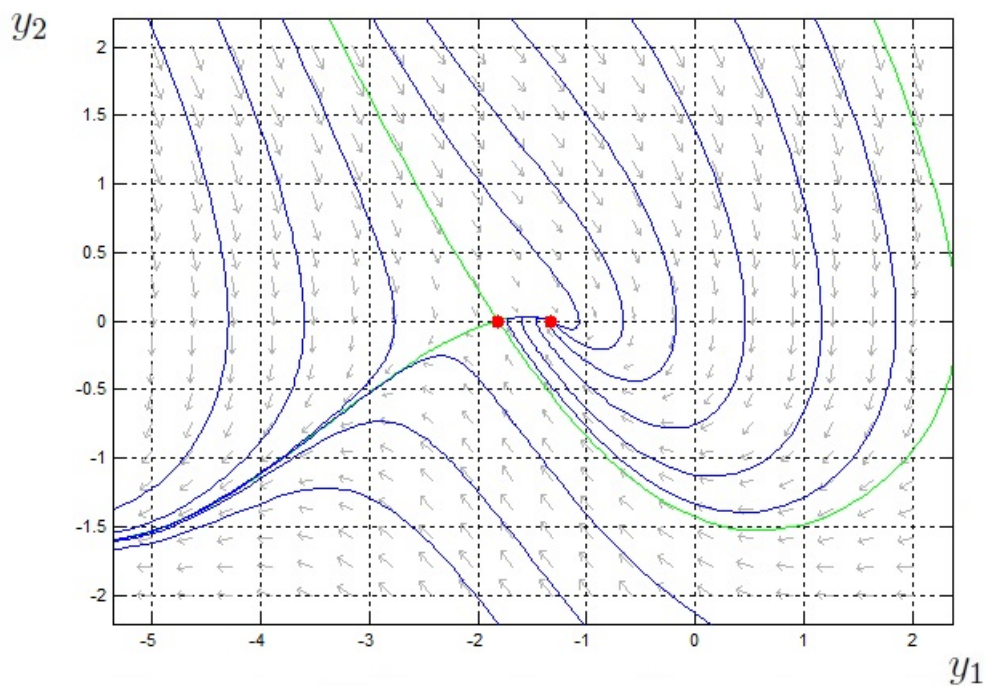
Rovnako ako v prípade kritického bodu $(\frac{5\pi}{6}, 0)$ pre $M = 0,5$ je hyperbolický kritický bod $(-\frac{5\pi}{6}, 0)$ nestabilné sedlo.



Obrázok 3.12: $M = -0,5$: Hyperbolický kritický bod $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ je asymptoticky stabilné ohnisko-výlevka a hyperbolický kritický bod $(-\frac{5\pi}{6}, 0)$ je nestabilné sedlo.

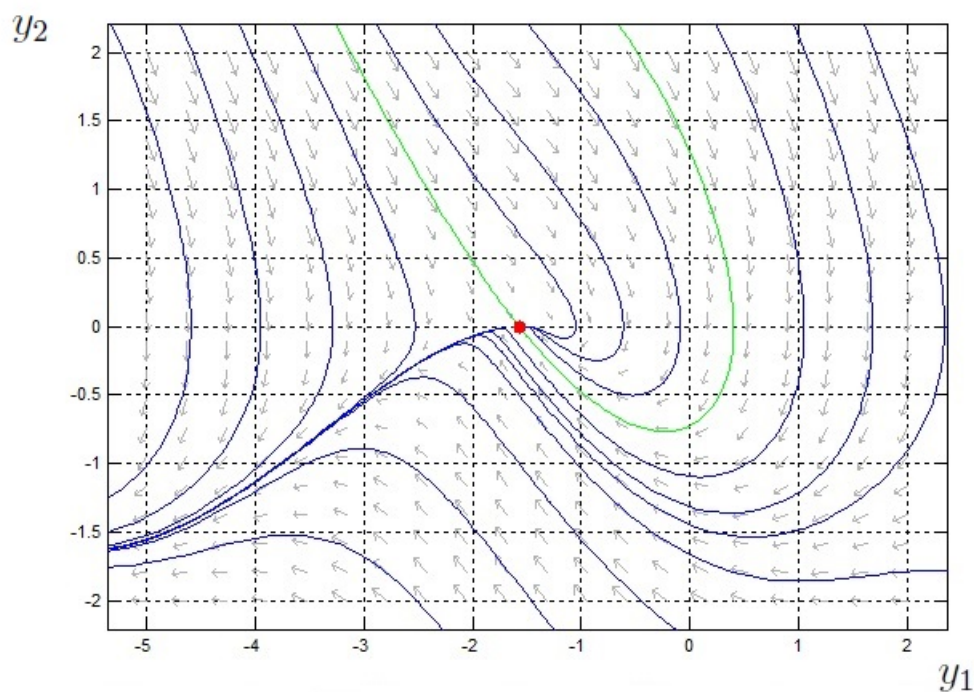
Nech $M = -0,97$. Rovnica (3.2) má dva kritické body $(-1, 33; 0)$ a $(-1, 81; 0)$. Uvažujme kritický bod $(-1, 33; 0)$. Jacobiho matica \mathbf{A} v bode $(-1, 33; 0)$ má rovnaký tvar ako v prípade kritického bodu $(1, 33; 0)$ pre $M = 0,97$. Potom hyperbolický kritický bod $(-1, 33; 0)$ je asymptoticky stabilný uzol-výlevka.

Rovnako ako v prípade kritického bodu $(1, 81; 0)$ pre $M = 0,97$ je hyperbolický kritický bod $(-1, 81; 0)$ nestabilné sedlo.



Obrázok 3.13: $M = -0,97$: Hyperbolický kritický bod $(-1, 33; 0)$ je asymptoticky stabilný uzol-výlevka a hyperbolický kritický bod $(-1, 81; 0)$ je nestabilné sedlo.

Nech $M = -1$. Rovnica (3.2) má jeden kritický bod $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Rovnica (3.2) je v bifurkácii a hodnota $M = -1$ je bifurkačná hodnota. Jacobiho matica \mathbf{A} v bode $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ má rovnaký tvar ako v prípade matice \mathbf{A} v bode $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ pre $M = 1$. Z toku na centrálnej variete na obr. 3.5 vyplýva, že kritický bod $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ je nestabilný nehyperbolický kritický bod.



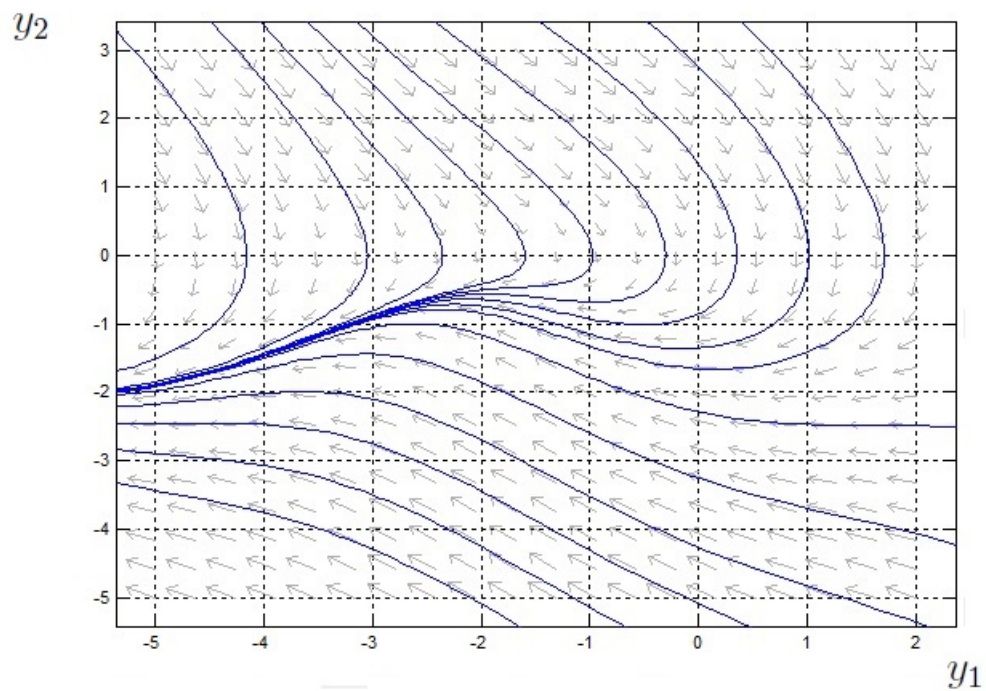
Obrázok 3.14: $M = -1$: Bod $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ je nestabilný nehyperbolický kritický bod.

Z fázového portréту 3.14 možno vyčítať nasledujúce pohybové režimy kyvadla:

Pre $\bar{\mathbf{y}} = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ je kyvadlo vo vodorovnej polohe s telesom upevneným na jeho konci naľavo.

Pre napr. $\bar{\mathbf{y}} = (0, 1)$, má v čase $t = 0$ kyvadlo odchýlku $y_1 = 0$ od vodorovnej polohy a rýchlosť $y_2 = 1$. Pre $t \rightarrow \infty$ odchýlka aj rýchlosť kyvadla klesá a kyvadlo sa zastaví v bode $\bar{\mathbf{y}} = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Nech $M < -1$. Rovnica (3.2) nemá žiaden kritický bod.



Obrázok 3.15: Pre hodnotu $M = -1,5$ rovnica (3.2) nemá žiaden kritický bod.

Z fázového portréu 3.15 možno vyčítať rotáciu kyvadla s kolísajúcou rýchlosťou a narastajúcou odchýlkou v zápornom smere.

Záver

Cieľom diplomovej práce bola analýza tlmeného kyvadla s točivým momentom, ktorý má tvar dynamického systému s parametrom.

V úvode práce sme odvodili rovnicu tlmeného kyvadla s točivým momentom a zadefinovali základné pojmy teórie dynamických systémov. Hlavnú časť práce tvorila analýza tlmeného kyvadla s točivým momentom. Zistili sme, že pre hodnotu parametra $M = 0$, má rovnica kyvadla dva hyperbolické kritické body, a to ohnisko-výlevka a sedlo. Ak sa s hodnotou parametra M budeme približovať k hodnote $M = 1$, priblížia sa k sebe aj kritické body. Pre hodnotu $M = 1$ sa kritické body spoja do jedného nehyperbolického kritického bodu. Rovnica kyvadla je v bifurkácii a hodnota $M = 1$ je bifurkačná hodnota. Pre hodnotu $M > 1$ rovnica kyvadla nemá žiaden kritický bod. Podobne, ak sme sa približovali k hodnote $M = -1$, kritické body sa k sebe približujú až sa nakoniec spoja pre hodnotu $M = -1$ do jedného nehyperbolického kritického bodu. Rovnica kyvadla je v bifurkácii a hodnota $M = -1$ je bifurkačná hodnota. Pre hodnotu $M < -1$ rovnica kyvadla nemá žiaden kritický bod.

Literatúra

- [1] Diblík, J., Růžičková, M., *Obyčejné diferenciální rovnice*, 1. vyd., EDIS, Žilina, 2008.
- [2] Hale, J., Kocak, H., *Dynamics nad Bifurcations*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1991.
- [3] Hubbard, J.H., West, B.H., *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach*, p. cm., Springer-Verlag, New York, Inc., 1995.
- [4] Jordan, D.W., Smith, P., *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, 4th ed., revised, Oxford University Press Inc., New York, 2007.
- [5] Kalas, J., Ráb, M., *Obyčejné diferenciální rovnice*, 1. vyd., Masarykova univerzita, Brno, 1995.
- [6] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3rd ed. p. cm., Springer-Verlag, New York, Inc., 2001.