



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STAVEBNÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

## ÚSTAV BETONOVÝCH A ZDĚNÝCH KONSTRUKCÍ

INSTITUTE OF CONCRETE AND MASONRY STRUCTURES

## NÁVRH BETONOVÝCH PRVKŮ S FRP VÝZTUŽÍ

DESIGN OF CONCRETE ELEMENTS WITH FRP REINFORCEMENT

### DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Kateřina Mrkvová

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Vojtěch Kostiha, Ph.D.

BRNO 2023

# Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav betonových a zděných konstrukcí  
Studentka: **Bc. Kateřina Mrkvová**  
Vedoucí práce: **Ing. Vojtěch Kostiha, Ph.D.**  
Akademický rok: 2022/23  
Studijní program: N0732A260026 Stavební inženýrství – konstrukce a dopravní stavby

Děkan Fakulty Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## Návrh betonových prvků s FRP výztuží

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Návrh části nosné betonové konstrukce, resp. vybraných detailů vyztužených pomocí nekovové kompozitní FRP výztuže. Rozbor namáhání a návrh odpovídajícího vyztužení při respektování zásad při vyztužování FRP výztuží.

### Cíle a výstupy diplomové práce:

Cílem práce je rozbor problematiky vyztužení betonových konstrukcí pomocí kompozitní FRP výztuže.

V rámci práce bude zpracován přehled aktuálního stavu poznání, porovnání způsobu návrhu vybraných detailů betonových konstrukcí vyztužených FRP výztuží dle zadaných předpisů a podkladů (např. fib, ACI, CSA, aj.) a to v rozsahu určeném zadáním práce. Dále bude práce obsahovat teoretický rozbor chování vybraného detailu betonové konstrukce vyztužené FRP výztuží a příkladovou část, ve které bude proveden návrh vyztužení detailu betonové konstrukce zpracovaný ve formě statického výpočtu a výkresové dokumentace.

### Požadované výstupy:

Textová část

Přílohy textové části:

P1. Statický výpočet vybraného detailu vyztužení FRP výztuží (v rozsahu určeném vedoucím diplomové práce)

P2. Výkresy řešeného vybraného detailu betonové konstrukce (v rozsahu určeném vedoucím diplomové práce)

Diplomová práce bude odevzdána v listinné a elektronické formě a pro ÚBZK 1x na CD.

**Seznam doporučené literatury a podklady:**

Aktuální návrhové normy a technické předpisy (včetně změn a oprav):

ČSN EN 1990: Zásady navrhování konstrukcí;

ČSN EN 1991-1 až 7: Zatížení stavebních konstrukcí;

ČSN EN 1992-1-1: Navrhování betonových konstrukcí – Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby;

fib Bulletin no. 40: FRP reinforcement in RC structures;

ACI 440.1R-15: Guide for the design and construction of concrete reinforced with FRP bars;

CSA S806-12: Design and Construction of Building Structures with Fibre-reinforced Polymers.

Další literatura dle doporučení vedoucího diplomové práce.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku.

V Brně, dne 31. 3. 2022

L. S.

---

prof. RNDr. Ing. Petr Štěpánek, CSc., dr. h. c.  
vedoucí ústavu

---

Ing. Vojtěch Kostiha, Ph.D.  
vedoucí práce

---

prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc., MBA, dr. h. c.  
děkan

## ABSTRAKT

Tato diplomová práce se zabývá výpočtem průhybu betonových konstrukcí vyztužených FRP výztuží. Práce představuje a následně srovnává několik přístupů u nás platných i zahraničních norem a aktuálních výzkumných prací k výpočtu průhybu betonových konstrukcí vyztužených jak ocelovou, tak i kompozitní výztuží. Cílem práce je poukázat na rozdíly v jednotlivých přístupech a vyzdvihnout z daných postupů ten, který je pro danou úlohu nejvíce vypovídající. Na základě výsledků teoretické a experimentální činnosti je snahou upravit již existující nebo představit nový přístup, který by zpřesňoval predikci reálného průhybu nosníku vyztuženého FRP výztuží.

Jako referenční prvek je zvolen prostě uložený nosník zatížený tříbodovým ohybem. Je provedena jak analytická studie prvku, tak nelineární analýza pomocí softwaru ATENA. Výsledky jsou porovnány s reálným experimentem.

## KLÍČOVÁ SLOVA

mezní stav použitelnosti, průhyb konstrukce, prostý nosník, tříbodový ohyb, ocelová výztuž, kompozitní výztuž, FRP (*fiber reinforced polymer – vlákny vyztužené polymery*), analytická studie, nelineární analýza, experimentální zkouška, parametrická studie

## ABSTRACT

This diploma thesis focuses on deflection of reinforced concrete structures with FRP rebar. The thesis presents and compares various approaches on deflection of reinforced concrete structures with steel and FRP rebar based on national and international standards and existing research. The aim of the thesis is to point out differences among the various approaches and present the most suitable one for the particular case. Based on theoretical and experimental results, the goal is to modify one of the existing approaches or present a new method which would correspond with real deflection behaviour of FRP reinforced concrete beam.

Simply supported beam with three-point bending was selected as a reference element. Analytical study and numerical analyses by ATENA software are performed. Results of analytical and numerical study are compared to experimental results.

## KEYWORDS

service limit state, deflection, simply supported beam, three-point bending, steel reinforcement, composite reinforcement, FRP (*fiber reinforced polymer*), analytical study, numerical analysis, experimental tests, parametric study

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

MRKVOVÁ, Kateřina. *Návrh betonových prvků s FRP výztuží*. Brno, 2023. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav betonových a zděných konstrukcí. Vedoucí Ing. Vojtěch Kostiha, Ph.D.

## **PROHLÁŠENÍ O PŮVODNOSTI ZÁVĚREČNÉ PRÁCE**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci s názvem *Návrh betonových prvků s FRP výztuží* zpracovala samostatně a že jsem uvedla všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 13. 1. 2023

---

Bc. Kateřina Mrkvová  
autor

## **PODĚKOVÁNÍ**

Ráda bych touto cestou poděkovala svému vedoucímu diplomové práce Ing. Vojtěchu Kostihovi, Ph.D. za veškerý čas, který mi při konzultacích věnoval, za cenné rady a množství informací které mi předal, a především za přátelský přístup, díky kterému mi zpracování diplomové práce zpříjemnil. Zároveň děkuji také Ing. Juraji Lagiňovi za poskytnutí výstupů z experimentálních zkoušek.

Dále bych velmi ráda poděkovala také své rodině a blízkým přátelům, kteří mě podporovali nejen při zpracování diplomové práce, ale i v průběhu celého studia.



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STAVEBNÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

## ÚSTAV BETONOVÝCH A ZDĚNÝCH KONSTRUKCÍ

INSTITUTE OF CONCRETE AND MASONRY STRUCTURES

## NÁVRH BETONOVÝCH PRVKŮ S FRP VÝZTUŽÍ

DESIGN OF CONCRETE ELEMENTS WITH FRP REINFORCEMENT

## TEXTOVÁ ČÁST

### DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Kateřina Mrkvová

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Vojtěch Kostiha, Ph.D.

BRNO 2023



## OBSAH

1. ÚVOD.....	12
2. FRP VÝZTUŽ.....	13
3. MEZNÍ STAVY.....	15
3.1. MEZNÍ STAV ÚNOSNOSTI (MSÚ) .....	15
3.2. MEZNÍ STAV POUŽITELNOSTI (MSP) .....	15
3.2.1. MEZNÍ STAV PŘETVOŘENÍ – OMEZENÍ PRŮHYBU .....	16
4. METODA PŘÍMÉHO VÝPOČTU PRŮHYBU.....	17
4.1. STADIA PŮSOBENÍ BETONOVÝCH PRVKŮ .....	17
4.1.1. STADIUM I.....	18
4.1.2. STADIUM II.....	18
4.1.3. STADIUM III.....	18
5. SOUČASNÝ STAV POZNÁNÍ – VÝPOČET PRŮHYBU PRVKŮ S FRP VÝZTUŽÍ DLE JEDNOTLIVÝCH PŘÍSTUPŮ .....	19
5.1. ČSN EN 1992-1-1 [ 1 ].....	19
5.2. MODEL CODE 2010 [ 2 ].....	20
5.3. ACI 318-14 [ 3 ].....	21
5.4. ACI 440.1R.....	22
5.4.1. ACI 440.1R-06 [ 4 ].....	22
5.4.2. ACI 440.1R-15 [ 5 ].....	23
5.5. CSA-S806-12 [ 8 ] .....	24
5.6. JSCE [ 9 ].....	26
5.7. STUDIE A EXPERIMENTY.....	26
5.7.1. A MODIFIED MODEL FOR DEFLECTION CALCULATION OF REINFORCED CONCRETE BEAM WITH DEFORMED GFRP REBAR [ 10 ] .....	27
5.7.2. DEFLECTION BEHAVIOUR OF FRP REINFORCED CONCRETE BEAMS AND SLABS: AN EXPERIMENTAL INVESTIGATION [ 11 ].....	28
5.7.3. NUMERICAL STUDY ON DEFLECTION BEHAVIOUR OF CONCRETE BEAMS REINFORCED WITH GFRP BARS [ 13 ].....	29
5.7.4. PREDICITON OF THE EFFECTIVE MOMENT OF INERTIA FOR CONCRETE BEAMS REINFORCED WITH FRP BARS USING AN EVOLUTIONARY ALGORITHM [ 14 ] .....	30
5.8. SHRUTÍ.....	31
6. ANALYTICKÁ STUDIE.....	32
6.1. VSTUPNÍ HODNOTY .....	32

6.2.	VARIANTA A – OCELOVÁ VÝZTUŽ .....	33
6.3.	VARIANTA B – KOMPOZITNÍ FRP VÝZTUŽ .....	35
6.3.1.	VÝSLEDKY DLE ACI 440.1R-15 .....	35
6.3.2.	SROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ.....	39
7.	EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST.....	43
7.1.	ZKUŠEBNÍ VZORKY .....	43
7.2.	PROVÁDĚNÍ EXPERIMENTU .....	44
7.3.	VÝSLEDKY EXPERIMENTU.....	46
7.3.1.	VZOREK A.....	46
7.3.2.	VZOREK B.....	47
7.4.	VYHODNOCENÍ EXPERIMENTU.....	48
8.	NELINEÁRNÍ ANALÝZA.....	52
8.1.	VÝPOČETNÍ SOFTWARE .....	53
8.1.1.	ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC .....	53
8.2.	VÝPOČETNÍ MODEL .....	55
8.2.1.	MATERIÁLOVÉ VLASTNOSTI JEDNOTLIVÝCH PRVKŮ .....	55
8.2.1.1.	BETON .....	55
8.2.1.2.	OCELOVÁ VÝZTUŽ.....	57
8.2.1.3.	FRP VÝZTUŽ .....	58
8.2.1.4.	PODLOŽKY.....	59
8.2.2.	OKRAJOVÉ PODMÍNKY .....	59
8.2.3.	SÍŤ KONEČNÝCH PRVKŮ – MESH .....	60
8.2.4.	ZATÍŽENÍ .....	60
8.2.5.	MONITORY .....	61
8.3.	VÝSLEDKY NELINEÁRNÍ ANALÝZY.....	62
8.3.1.	OCEL A .....	62
8.3.2.	FRP B.1 .....	65
8.3.3.	FRP B.2.....	68
8.4.	ZÁVĚRY Z NELINEÁRNÍ ANALÝZY .....	72
9.	SROVNÁNÍ ANALYTICKÉ STUDIE, NELINEÁRNÍ ANALÝZY A EXPERIMENTU .....	74
9.1.	OCELOVÁ VÝZTUŽ.....	74
9.2.	KOMPOZITNÍ FRP VÝZTUŽ .....	76
9.3.	NAVRŽENÉ ÚPRAVY PRO NALEZENÍ IDEÁLNÍ KŘIVKY PRO KOMPOZITNÍ VÝZTUŽ .....	81
9.3.1.	ÚPRAVA VZTAHU DLE BENMOKRANA.....	82

9.3.2. ÚPRAVA VZTAHU DLE ACI 440.1R-06.....	85
9.3.3. SHRNUÍ NAVRŽENÝCH ÚPRAV .....	86
10. PARAMETRICKÁ STUDIE PRVKŮ VYZTUŽENÝCH FRP VÝZTUŽÍ .....	88
10.1. VLIV TAHOVÉ PEVNOSTI BETONU .....	88
10.2. VLIV MODULU PRUŽNOSTI FRP VÝZTUŽE.....	90
10.3. VLIV STUPNĚ VYZTUŽENÍ .....	91
11. ZÁVĚR .....	94
12. SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ .....	98
13. SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK .....	101
14. SEZNAM PŘÍLOH.....	103

## 1. ÚVOD

Předmětem této diplomové práce je stanovení průhybu betonového nosníku vyztuženého nekovovou kompozitní výztuží. Kompozitní FRP výztuž (*fiber reinforced polymer*) může v některých případech doplnit nebo dokonce nahradit klasickou ocelovou výztuž v betonových prvcích. Její odolnost vůči různým chemickým a fyzikálním jevům ji činí vhodnou variantou do řady konstrukcí, u kterých například hrozí koroze ocelových vložek, nebo u kterých je potřeba minimalizovat elektromagnetickou vodivost. Jedná se o relativně nově používaný materiál, který ještě není zahrnut ve všech aktuálně platných normativních předpisech. Mezní stav použitelnosti, jehož součástí je také posouzení průhybu, je v současné době stále předmětem výzkumu.

Ve světě existuje několik předpisů či norem, které jsou zaměřeny na návrh betonových konstrukcí vyztužených FRP výztuží. Mezi státy, které mají ve svých normách uvedené tyto postupy patří například Spojené státy americké, Kanada či Japonsko. Dále se kompozitní výztuží zabírala řada studií a experimentů. V České republice a její aktuálně platné normě pro návrh betonových konstrukcí, jež je národní adaptací evropské normy, ale kompozitní výztuž není zpracována.

Jedním z cílů práce je představit existující přístupy k výpočtu průhybu konstrukcí. V rámci analytické studie budou vzájemně porovnány průhyby prostého nosníku zatíženého tříbodovým ohybem podle odlišných předpisů. Snahou je upozornit na rozdíly v jednotlivých přístupech a poukázat na postup, který je pro nosník a jeho průhyb nejvíce vypovídající. Pro tyto účely bude krom analytických výpočtů demonstrován také nelineární výpočet metodou konečných prvků (MKP). Pro stanovení přesnosti jednotlivých přístupů budou výsledky srovnány s reálným experimentem provedeným v rámci projektu „TAČR FW01010520 – Vývoj ohýbané kompozitní výztuže pro environmentálně exponované betonové konstrukce“. Výsledky teoretické a experimentální části poslouží také k úpravě existujících postupů vedoucí k výstižnějšímu vztahu pro výpočet průhybu nosníků vyztužených FRP výztuží.

## 2. FRP VÝZTUŽ

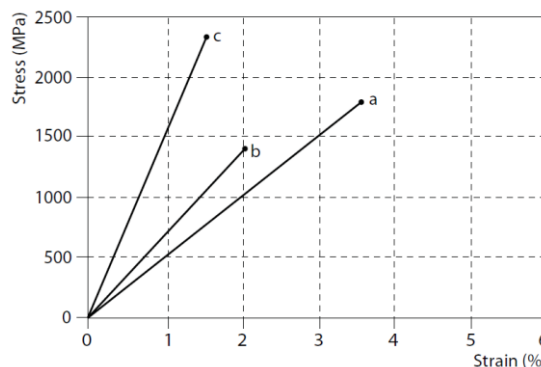
Kompozitní výztuž se stává v poslední době stále častěji voleným materiálem při návrhu betonových konstrukcí. V určitých případech je vhodnou alternativou za klasickou ocelovou betonářskou výztuž. V mnoha směrech plně nahrazuje nebo dokonce převyšuje vlastnosti této klasické ocelové výztuže. Na druhou stranu existují aspekty, ve kterých za oceli svými vlastnostmi zaostává.

Obecně se kompozitní materiál skládá ze dvou a více složek různých vlastností, jejichž spojením vznikne materiál unikátních vlastností. Prutová FRP výztuž vyráběná pultruzí se skládá ze dvou složek – nosná složka a pojivová složka. Nosnou složku tvoří jednosměrně orientovaná vlákna. Nejčastěji se jedná o vlákna skleněná (*glass fiber reinforced polymer – GFRP*) nebo uhlíková (*carbon fiber reinforced polymer – CFRP*), případně mohou být také čedičová nebo aramidová. Pojivo je tvořeno polymerní matricí, která obklopuje nosnou složku, čímž chrání vlákna a zajišťuje jejich spolupůsobení. Nejpoužívanějším pojivem jsou epoxidové nebo vinylesterové pryskyřice. Výsledné vlastnosti FRP výztuže jsou dané vzájemným poměrem nosné a pojivové složky.

Jedním z rozdílů v chování oproti ocelové výztuži je proměnnost vlastností v čase. Zatímco u oceli se předpokládá časová nezávislost jejich fyzikálních i mechanických vlastností, u FRP výztuže je potřeba rozlišit krátkodobé a dlouhodobé mechanické vlastnosti. Při dlouhodobém působení zatížení dochází k tzv. dotvarování výztuže, tzn. nárůstu deformace v čase. Je proto potřeba tuto skutečnost zahrnout do výpočtu, např. skrze redukční součinitel při výpočtu dlouhodobé tahové pevnosti  $f_{fd}$ .

Odlišnost je ale také patrná v samotných krátkodobých vlastnostech materiálů. Základními vlastnostmi popisujícími krátkodobé chování FRP výztuže jsou mezní pevnost v tahu  $f_f$ , modul pružnosti  $E_f$  a mezní přetvoření  $\varepsilon_f$ .

Vztah mezi těmito charakteristikami udává Hookův zákon, který je pro FRP výztuž platný v celém rozsahu pracovního diagramu, neboť závislost napětí a přetvoření je lineární až do porušení materiálu. Absence plastické větve pracovního diagramu, na kterou jsme zvyklí u klasické betonářské výztuže, zapříčiňuje křehké chování FRP materiálu. Jedná se o tzv. lineárně-pružný materiál a dochází u něj tím pádem ke křehkému porušení. Toto je důvodem změny přístupu k návrhu takto vyztužených konstrukcí.



obr. 2.1: pracovní diagramy FRP výztuže ve směru vláken: a) GFRP, b) AFRP, c) CFRP; převzato z [ 22 ]

Zatímco tahová pevnost FRP výztuže je několikanásobně větší než tahová pevnost oceli, modul pružnosti je naopak menší. Řádové srovnání těchto charakteristik viz následující tabulka:

tab. 2.1: tahové charakteristiky FRP výztuže, převzato z [ 23 ]

	GRFP	CRFP	Ocel
Modul pružnosti $E_{f,l}$ [GPa]	35 až 60	100 až 580	200
Tahová pevnost $f_{f,lm}$ [MPa]	450 až 1600	600 až 3500	450 až 700
Mezní přetvoření v tahu $\varepsilon_{f,l}$ [-]	1,2 až 3,7	0,5 až 1,7	5 až 20

Výše popsané vlastnosti FRP výztuže, zejména nižší modul pružnosti v tahu a změna vlastností v čase, jsou důvodem pro změnu přístupu při navrhování konstrukcí za použití FRP materiálů, včetně vyšetřování mezního stavu použitelnosti konstrukce. Tato práce je proto zaměřena na popis chování betonových prvků vyztužených FRP výztuží a zabývá se stanovením jejich průhybu. Práce popisuje problematiku stanovení průhybu vyztužených betonových prvků, současný stav poznání a představuje přístupy zahraničních norem. Dále na vzorovém příkladu poukazuje na rozdíly v jednotlivých přístupech a pomocí výsledků numerických i reálných zkoušek se pokouší poukázat na hlavní nedostatky současných způsobů výpočtů průhybu.

### 3. MEZNÍ STAVY

V České republice jsou legislativně platné normativní předpisy pro navrhování konstrukcí založeny na posuzování konstrukce a jejího chování v tzv. mezním stavu. Jedná se o polopravděpodobnostní metodu, resp. metodu dílčích součinitelů spolehlivosti. Chování konstrukce je považováno za náhodný proměnný jev, který lze popsat pomocí metod matematické statistiky. Bezpečnost konstrukce je vyjádřena pomocí celé řady dílčích součinitelů spolehlivosti, které zajišťují, že se konstrukce jen s velmi malou pravděpodobností dostane do mezního stavu.

Mezním stavem je takový stav konstrukce, při jehož překročení přestává konstrukce plnit návrhové požadavky na užité vlastnosti. Takový stav může nastat např. vyčerpáním únosnosti prvku, vznikem příliš širokých trhlin nebo nadměrnou deformací. Obecně se tedy mezní stavy dělí na mezní stav únosnosti (první mezní stav) a mezní stav použitelnosti (druhý mezní stav).

#### 3.1. MEZNÍ STAV ÚNOSNOSTI (MSÚ)

Mezní stav únosnosti je první skupinou mezních stavů a týká se především bezpečného užívání konstrukce, a to po celou dobu své plánované životnosti. Nastává při vyčerpání únosnosti materiálu, po kterém může následovat kolaps celé konstrukce nebo její části.

Obecně dochází ke zřícení nosných prvků v důsledku:

- ztráty statické rovnováhy konstrukce nebo její části, uvažované jako tuhé těleso;
- vnitřní poruchy (překročení pevnosti materiálu) nebo nadměrné deformace konstrukce nebo nosných prvků;
- poruchy nebo nadměrné deformace základové půdy;
- poruchy únavou nebo jinými časově závislými účinky.

Podmínka spolehlivosti pro první mezní stav je obecně vyjádřena vztahem:

$$E_d \leq R_d \quad (3.1)$$

**Ozn.    Popis**

$E_d$     návrhové účinky zatížení

$R_d$     návrhový odpor konstrukce (schopnost odolávat účinkům zatížení)

#### 3.2. MEZNÍ STAV POUŽITELNOSTI (MSP)

Mezní stav použitelnosti je druhou skupinou mezních stavů a souvisí s provozními požadavky na konstrukci nebo její část. Hlavními faktory jsou funkce konstrukce nebo její části, pohodlí, pohybová pohoda a vzhled. Při dosažení mezního stavu použitelnosti konstrukce zjednodušeně přestává vyhovovat běžnému provozu. Obecně se sledují deformace a posuvy, kmitání a vibrace nebo nadměrné lokální poškození (trhliny).

Mezi obvyklé mezní stavy použitelnosti se řadí:

- mezní stav omezení napětí;

- mezní stav omezení šířky trhlin;
- mezní stav přetvoření.

Podmínka spolehlivosti pro první mezní stav je obecně vyjádřena vztahem:

$$E_d \leq C_d \quad (3.2)$$

#### Ozn. Popis

$E_d$  návrhové účinky zatížení

$C_d$  návrhová hodnota přípustného kritéria použitelnosti

V mezním stavu použitelnosti se pro návrhové hodnoty uvažují následující kombinace zatížení:

- charakteristická kombinace pro nevratné mezní stavy;
- častá kombinace pro vratné mezní stavy;
- kvazistálá kombinace pro dlouhodobé účinky a vzhled konstrukce.

Z důvodu zaměření této práce bude dále blíže pojednáno pouze o mezním stavu přetvoření.

### 3.2.1. MEZNÍ STAV PŘETVOŘENÍ – OMEZENÍ PRŮHYBU

Deformace prvku nebo konstrukce nesmí nepříznivě ovlivnit jejich řádnou funkčnost nebo vzhled, proto jsou stanoveny limitní hodnoty, které musí být již při návrhu ověřeny a splněny. Mezní stav přetvoření může být v zásadě ověřen dvěma způsoby, buďto splněním dané omezující podmínky poměru rozpětí/výška anebo porovnáním vypočteného průhybu s mezní hodnotou.

První metoda ověření omezuje poměr rozpětí prvku ku jeho účinné výšce, označováno také jako ohybová štíhlost. Jedná se o zjednodušenou metodu, kdy při splnění omezující podmínky lze od výpočtu průhybu zcela upustit. Splnění omezujícího poměru rozpětí ku výšce zajišťuje, že za běžných okolností nevzniknou nadměrné průhyby konstrukce. V případě, že tato omezení nejsou splněna je potřeba provést přesnější posouzení prvku.

Druhá metoda je metodou přímého výpočtu průhybu a následným posouzením s limitní hodnotou. Tento postup je časově náročnější a zahrnuje více faktorů, je ale také přesnější.



## 4. METODA PŘÍMÉHO VÝPOČTU PRŮHYBU

Pro výpočet průhybu existuje několik metod. Každá z nich má své výhody i nevýhody, všechny jsou ale převážně založeny na analytických výpočtech diferenciálních rovnic. Takovou rovnicí představuje také diferenciální rovnice ohybové čáry:

$$w'' = \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI(x)} \quad (4.1)$$

Ozn.	Popis
$w$	funkce průhybu
$w''$	druhá derivace průhybu
$M(x)$	ohybový moment
$EI(x)$	ohybová tuhost

Za předpokladu malých deformací platí:

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{dw}{dx} = w' \quad (4.2)$$

Ozn.	Popis
$\varphi$	pootočení průřezu

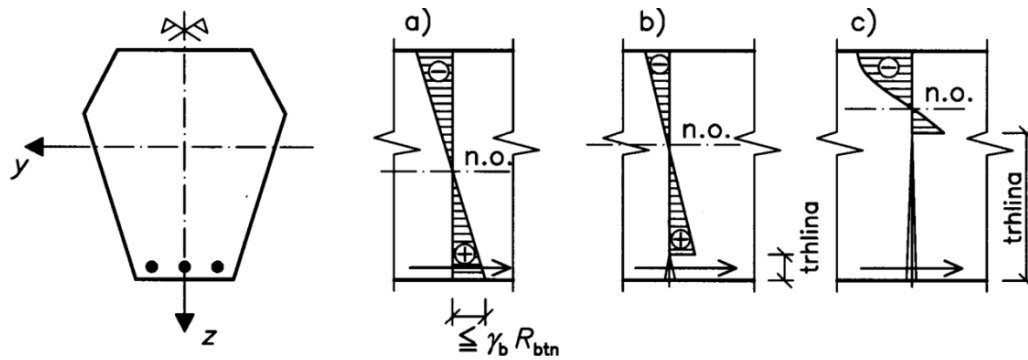
Lze tedy zavést následující integrační schéma, díky kterému je možné se od zatížení  $q$  postupnou integrací a postupným zaváděním integračních konstant dostat k hodnotám průhybu.

$$\begin{aligned} V(x) &= \int -q \, dx + C_1 \\ M(x) &= \int V \, dx + C_2 \\ \varphi(x) &= \int -\frac{M}{EI} \, dx + C_3 \\ w(x) &= \int \varphi \, dx + C_4 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Z výše uvedených vztahů je patrné, že průhyb konstrukce závisí na ohybové tuhosti průřezu. Tuhost průřezu se odvíjí od modulu pružnosti  $E$ , což je materiálová charakteristika, a od momentu setrvačnosti  $I$ , jež je charakteristikou geometrickou. Moment setrvačnosti se však v průběhu zatěžování může lišit v závislosti na tom, v jakém stadiu se průřez nachází.

### 4.1. STADIA PŮSOBENÍ BETONOVÝCH PRVKŮ

Velikost deformací železobetonových prvků závisí na tuhosti konstrukce, která se odvíjí od toho, jestli v prvku vznikají či nevznikají trhliny. V průběhu působení vnějšího zatížení prvek prochází třemi stadii s různou tuhostí.



obr. 4.1: stadia působení průřezu, převzato z [ 18 ]

a) stadium I, b) stadium II, c) stadium III

#### 4.1.1. STADIUM I

Prvek se chová lineárně pružně až do dosažení pevnosti betonu v tahu v tažených vláknech. Na přenášení zatížení se podílí celý průřez, který není porušen žádnou trhlinou. Jedná se o počáteční fázi zatěžování, při které je dosahováno pouze malých přetvoření a nízkých napětí v průřezu. Stadium trvá až do okamžiku vzniku první trhliny.

#### 4.1.2. STADIUM II

Při dosažení pevnosti betonu v tahu v tažených vláknech betonového prvku dochází ke vzniku trhliny. Beton v trhlině přestává působit a jeho funkci přebírá výztuž. Při rostoucím zatížení se trhlina v průřezu rozšiřuje a prohlubuje směrem k neutrálné ose. Neutrálná osa se posouvá směrem ke tlačnému okraji průřezu. Stadium trvá až do fáze, kdy je celá tažená část průřezu prostoupena trhlinou. Tuhost průřezu ovlivňuje velikost tlačené oblasti, síla přenášená taženou výztuží a velikost tažené oblasti neporušené trhlinou.

#### 4.1.3. STADIUM III

S přibývajícím zatížením roste napětí v betonu i ve výztuži a dochází k postupnému zplastizování betonu v tlačené oblasti, opouští se od lineárního rozdělení napětí. Trhlina v tažené části průřezu se již neprohlubuje a neutrálná osa se neposouvá. Tuhost průřezu je určena velikostí tlačené části průřezu a velikostí síly v tažené výztuži, vliv tažené části betonu je zanedbatelný. Tato fáze reprezentuje běžný provoz železobetonových konstrukcí.

## 5. SOUČASNÝ STAV POZNÁNÍ – VÝPOČET PRŮHYBU PRVKŮ S FRP VÝZTUŽÍ DLE JEDNOTLIVÝCH PŘÍSTUPŮ

Existuje několik přístupů výpočtu průhybu betonových prvků. Níže je uveden přehled několika aktuálních nebo dříve používaných normativních přístupů, ale také výsledky výzkumných prací prováděných ve vztahu k průhybu prvků vyztužených FRP výztuží.

### 5.1. ČSN EN 1992-1-1 [1]

Aktuálně platnou normou pro návrh betonových konstrukcí v České republice, včetně návrhu na mezní stav použitelnosti, je ČSN EN 1992-1-1 [1], jež je národní adaptací evropské normy. Eurokód 2 se zabývá návrhem konstrukcí z prostého, železového nebo předpjatého betonu. Kompozitní FRP výztuž není v Eurokódu zahrnuta. Pro účely porovnání je dále v práci tento přístup aplikován i na prvky s FRP výztuží.

Prvky, u kterých není v žádném průřezu očekáváno, že napětí překročí pevnost betonu v tahu, lze považovat za prvky bez trhlin. Pokud dojde k překročení pevnosti betonu v tahu, lze předpokládat vznik trhlin. Pokud nedojde k plnému rozvoji trhlin, pak se prvek nachází v mezilehlém stavu mezi stavem bez trhlin a stavem s plně rozvinutými trhlinami. Pro takový případ lze přetvárnou veličinu (křivost nebo pootočení, zjednodušeně i průhyb) stanovit následujícím vztahem:

$$\alpha = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta) \alpha_I \quad (5.1)$$

#### Ozn. Popis

$\alpha_I$	hodnoty parametru vypočteného pro stav bez trhlin
$\alpha_{II}$	hodnoty parametru vypočteného pro stav s plně rozvinutými trhlinami
$\zeta$	rozdělovací součinitel

Rozdělovací součinitel, kterým se umožňuje zohlednit tahové zpevnění průřezu, je dán vztahem:

$$\zeta = 1 - \beta \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (5.2)$$

#### Ozn. Popis

$\beta$	součinitel zohledňující vliv doby trvání nebo opakování zatížení = 1,0 pro jednorázové krátkodobě působící zatížení = 0,5 pro dlouhodobě působící nebo mnohonásobně opakované zatížení
$\sigma_{sr}$	napětí v tahové výztuži vypočtené pro průřez s trhlinami
$\sigma_s$	napětí v tahové výztuži vypočtené pro průřez s trhlinami při zatížení způsobující vznik první trhliny

Poměr  $\sigma_{sr}/\sigma_s$  lze při prostém ohybu nahradit poměrem  $M_{cr}/M$  resp.  $N_{cr}/N$  při prostém tahu.  $M_{cr}$  je moment na mezi vzniku trhlin a  $N_{cr}$  je normálová síla na mezi vzniku trhlin.

Nejpřesnější hodnoty průhybu stanovíme výpočtem křivosti v několika průřezích prvku a následným výpočtem průhybu numerickou integrací. Průhyb je vhodné počítat pro dva případy, poprvé za předpokladu že prvek není oslaben trhlinou, a podruhé za předpokladu plně rozvinutých trhlin, následně pak pomocí vztahu ( 5.1 ) interpolovat.

## 5.2. MODEL CODE 2010 [ 2 ]

Základem pro všechny budoucí předpisy zabývající se návrhem betonových konstrukcí je *Model code 2010* [ 2 ]. Zatímco v každé zemi zůstávají platné místní normy a předpisy, může Model kód přicházet s novými poznatky ohledně materiálů, přístupů a chování betonových konstrukcí. Měl by proto být zdrojem při tvorbě nových národních či nadnárodních předpisů. A zatímco pojem FRP výztuže ještě v současném Eurokódu není zakotven, právě v Model kódu se již objevuje.

Výpočet průhybu je založen na integraci ohybové čáry prvku. Vzorci jsou však primárně tvořeny pro prvky s klasickou ocelovou výztuží a pro FRP výztuž není specifikována žádná úprava.

Prvky, u kterých není předpokládáno dosažení tahové pevnosti betonu lze považovat za trhlinou neporušené a chovající se lineárně-pružně. Naopak chování prvků, u nichž je předpokládáno, že pevnost betonu v tahu bude překonána, je někde mezi chováním neporušeného průřezu a průřezu plně porušeného trhlinou. Zakřivení/ohybová čára takového prvku se získá nelineární analýzou, která zahrnuje vliv porušení trhlinou a tahové zpevnění. Pro stanovení dlouhodobého průhybu je potřeba také zohlednit vliv dotvarování a smršťování betonu.

Iterační vzorec pro deformaci částečně porušeného průřezu je obdobný jako vzorec ( 5.1 ):

$$a = \zeta a_{II} + (1 - \zeta) a_I \quad (5.3)$$

### Ozn. Popis

$a_I$	hodnoty deformačního parametru vypočteného pro stav bez trhlin
$a_{II}$	hodnoty deformačního parametru vypočteného pro stav s plně rozvinutými trhlinami
$\zeta$	rozdělovací součinitel

Deformace pro neporušený stav je možné spočítat pomocí ohybové tuhosti průřezu  $E_c I_c$ , kde  $E_c$  je modul pružnosti betonu a  $I_c$  je moment setrvačnosti neporušeného průřezu. Deformace pro porušený stav je počítána s tuhostí plně porušeného průřezu bez vlivu tahového zpevnění (pouze tažená výztuž):

$$(EI)_{II} = d^2 \left(1 - \frac{x}{d}\right) \left(1 - \frac{1}{3} \frac{x}{d}\right) A_s E_s \quad (5.4)$$

kde:

$$\frac{x}{d} = -\alpha_e \rho + \sqrt{(\alpha_e \rho)^2 + 2\alpha_e \rho} \quad (5.5)$$

Ozn.	Popis
$d$	efektivní výška průřezu
$x$	výška tlačené oblasti betonu
$A_s$	plocha tažené výztuže
$E_s$	modul pružnosti výztuže v tahu
$\alpha_e$	poměr modulu pružnosti oceli a betonu
$\rho$	stupeň vyztužení

Alternativou k interpolačnímu vzorci ( 5.3 ) může být výpočet efektivní tuhosti:

$$(EI)_{ef} = \frac{(EI)_I(EI)_{II}}{\zeta(EI)_I + (1 - \zeta)(EI)_{II}} \quad (5.6)$$

### 5.3. ACI 318-14 [ 3 ]

Ve Spojených státech amerických je hlavním dokumentem pro návrh železobetonových konstrukcí *ACI 318 Building Code Requirements for Structural Concrete* [ 3 ]. Tato norma udává základní požadavky a postupy pro návrh betonových konstrukcí primárně vyztužených ocelovou výztuží. Konstrukcemi vyztuženými FRP výztuží se konkrétněji zabývá další americký předpis ACI 440.1R [ 4 ] [ 5 ].

Norma obsahuje základní principy pro návrh konstrukcí s ohledem na jejich pevnost, použitelnost a trvanlivost. Jedním z požadavků na použitelnost je pak také omezení průhybu.

Okamžitý průhyb je počítán s předpoklady elastického chování prvku s vlivem trhlin na zpevnění průřezu. Za předpokladu, že trhliny v průřezu nevzniknou, je možné počítat také s neporušeným průřezem za pomoci základních metod vedoucích ke konstantní hodnotě ohybové tuhosti po délce prvku. Nicméně pokud lze očekávat vznik trhlin v jednom nebo více průřezech, je potřeba provést podrobnější výpočet za použití efektivního momentu setrvačnosti.

Efektivní moment setrvačnosti vychází z teorie Bransona [ 6 ]. Jeho výpočet je dán následujícím vzorcem, neměl by však překročit hodnotu momentu setrvačnosti neporušeného průřezu.

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] I_{cr} \leq I_g \quad (5.7)$$

Ozn.	Popis
$M_{cr}$	moment na mezi vzniku trhlin
$M_a$	maximální vzniklý moment
$I_g$	moment setrvačnosti neporušeného průřezu
$I_{cr}$	moment setrvačnosti trhlinou porušeného průřezu

Moment na mezi vzniku trhlin se stanoví vztahem:

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t} \quad (5.8)$$

**Ozn. Popis** $f_r$  pevnost betonu v tahu $y_t$  vzdálenost těžiště neporušeného průřezu k taženému povrchu

Hodnoty průhybu pak stanovíme za použití efektivního momentu setrvačnosti  $I_e$  a modulu pružnosti  $E_c$  běžnými metodami, např. integrace ohybové čáry.

**5.4. ACI 440.1R**

Americká norma zabývající se návrhem betonových konstrukcí vyztužených FRP výztuží nese název *ACI 440.1R Guide for the Design and Construction of Structural Concrete Reinforced with Fiber-Reinforced Polymer (FRP) Bars* [ 4 ][ 5 ] a zabývá se také průhybem takto vyztužených konstrukcí. Základní principy, ze kterých tato norma vychází, jsou definovány v již zmíněné normě ACI 318 [ 3 ], dochází pouze k doplnění případně úpravě přístupu s ohledem na nekovovou výztuž.

I zde je průhyb možno ověřit skrz minimální výšku prvku v závislosti na rozpětí a uložení. Nicméně s ohledem na odlišnost FRP výztuže oproti běžné ocelové výztuži, (převážně lineárně-elastické chování materiálu) norma doporučuje porovnat hodnoty průhybu s limitními hodnotami.

**5.4.1. ACI 440.1R-06 [ 4 ]**

Pro plný průřez neporušený trhlinou platí standartní výpočet momentu setrvačnosti. Při vzniku trhlin dochází k poklesu tuhosti průřezu, je proto potřeba stanovit moment setrvačnosti porušeného průřezu. Pro průřez plně porušený trhlinou je použitím elastické analýzy stanoven výpočet momentu setrvačnosti následovně:

$$I_{cr} = \frac{bd^3}{3}k^3 + n_f A_f d^2 (1 - k)^2 \quad (5.9)$$

**Ozn. Popis** $b$  šířka průřezu $d$  efektivní výška průřezu $n_f$  poměr modulů pružnosti $A_f$  plocha tažené výztuže $k$  součinitel závislý na stupni vyztužení

$$k = \sqrt{2\rho_f n_f + (\rho_f n_f)^2} - \rho_f n_f \quad (5.10)$$

**Ozn. Popis** $\rho_f$  stupeň vyztužení

$$\rho_f = \frac{A_f}{bd} \quad (5.11)$$

$$n_f = \frac{E_f}{E_c} \quad (5.12)$$

**Ozn. Popis**

$E_f$	modul pružnosti FRP výztuže v tahu
$E_c$	modul pružnosti betonu

Celková tuhost průřezu  $E_c I$  se pohybuje mezi tuhostí neporušeného průřezu  $E_c I_g$  a tuhostí plně porušeného průřezu  $E_c I_{cr}$  v závislosti na velikosti zatížení, resp. ohybového momentu. Přechod mezi momentem setrvačnosti neporušeného a porušeného průřezu je stejně jako v ACI 318 [ 3 ] popsán efektivním momentem setrvačnosti  $I_e$  dle vzorce ( 5.7 ).

Tento vztah se ale v základu ukázal jako nadhodnocující pro prvky vyztužené FRP výztuží, zvláště pro prvky s nižším stupněm vyztužení. Vyplývalo to z toho, že tahové zpevnění prvků s FRP výztuží je menší než tahové zpevnění prvků s ocelovou výztuží. Menší tahové zpevnění je zapříčiněno hlavně nižším modulem pružnosti.

S ohledem právě na menší tahové zpevnění byl základní vzorec pro výpočet efektivního momentu setrvačnosti upraven do následující podoby pomocí zavedení redukčního součinitele  $\beta_d$ .

$$I_e = \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \beta_d I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr} \leq I_g \quad (5.13)$$

**Ozn. Popis**

$M_{cr}$	moment na mezi vzniku trhlin
$M_a$	maximální vzniklý moment
$I_g$	moment setrvačnosti neporušeného průřezu
$I_{cr}$	moment setrvačnosti trhlinou porušeného průřezu
$\beta_d$	redukční součinitel

$$\beta_d = \frac{1}{5} \left( \frac{\rho_f}{\rho_{fb}} \right) \leq 1,0 \quad (5.14)$$

**Ozn. Popis**

$\rho_f$	stupeň vyztužení
$\rho_{fb}$	balanční stupeň vyztužení

**5.4.2. ACI 440.1R-15 [ 5 ]**

Pro plný průřez neporušený trhlinou i pro průřez plně porušený trhlinou platí stejné vztahy jako v ACI440.1R-06 [ 4 ], viz kap. 5.4.1.

Celková tuhost průřezu  $E_c I$  se pohybuje mezi tuhostí neporušeného průřezu  $E_c I_g$  a tuhostí plně porušeného průřezu  $E_c I_{cr}$ . Pro tyto účely je zaveden efektivní moment setrvačnosti  $I_e$ . Na rozdíl od ACI 440.1R-06 [ 4 ], která vychází z teorie podle Bransona [ 6 ] je zde vztah upraven. Vztah ( 5.13 ) se ukázal být nepřesný pro prvky vyztužené FRP výztuží, neboť poměr  $I_g/I_{cr}$  u těchto prvků je odlišný než u prvků vyztužených klasickou ocelovou výztuží. Vztah pro efektivní moment setrvačnosti, který tato norma používá vychází z teorie Bischoffa [ 7 ] a vypadá následovně:

$$I_e = \frac{I_{cr}}{1 - \gamma \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^2 \left[1 - \frac{I_{cr}}{I_g}\right]} \leq I_g \text{ kde } M_a \geq M_{cr} \quad (5.15)$$

**Ozn. Popis**

$I_{cr}$	moment setrvačnosti plně porušeného průřezu
$I_g$	moment setrvačnosti plného průřezu
$M_{cr}$	moment na mezi vzniku trhlin
$M_a$	maximální vzniklý moment
$\gamma$	součinitel závislý na zatížení a uložení

Součinitel  $\gamma$  byl pro prostý nosník zatížený rovnoměrným zatížením integrací křivosti po délce stanoven jako:

$$\gamma = 1,72 - 0,72 \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right) \quad (5.16)$$

Následný výpočet samotného průhybu je možno provést přímou metodou – integrací ohybové čáry. Hodnoty průhybu se porovnají s maximálními hodnotami předepsanými v ACI 318 [ 3 ].

**5.5. CSA-S806-12 [ 8 ]**

Kanadským předpisem pokrývající obecné předpisy a požadavky související s návrhem betonových konstrukcí vyztužených FRP výztuží se nazývá *CSA S806 Design and construction of building structures with fibre-reinforced polymers* [ 8 ]. Jedním z témat, kterým se norma věnuje, je také průhyb prvků vyztužených kompozitní výztuží.

Norma udává, že výpočet okamžitého průhybu by měl být počítán metodou založenou na integraci křivosti. Pro běžné případy podepření a zatížení jsou zmíněny konkrétní vzorce pro výpočet maximálního průhybu, viz. obr. 5.1.

Pro konkrétní případ prostého nosníku zatíženého jednou silou v polovině rozpětí je tedy platný vzorec:

$$\delta_{max} = \frac{PL^3}{48E_c I_{cr}} \left[ 1 - 8\eta \left(\frac{L_g}{L}\right)^3 \right] \quad (5.17)$$

**Ozn. Popis**

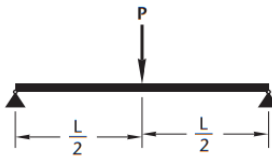
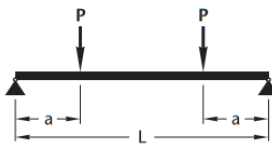
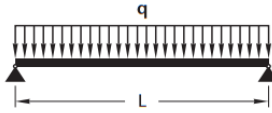

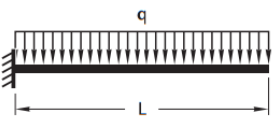
$P$	působící soustředné zatížení
$L$	rozpětí nosníku
$E_c$	modul pružnosti betonu
$I_{cr}$	moment setrvačnosti trhlinou porušeného průřezu
$L_g$	délka neporušené části nosníku (vzdálenost od podpory k místu kde $M = M_{cr}$ )

Součinitel zohledňující poměr momentů setrvačnosti porušeného a neporušeného průřezu:

$$\eta = \left(1 - \frac{I_{cr}}{I_g}\right) \quad (5.18)$$



**Ozn. Popis** $I_{cr}$  moment setrvačnosti trhlinou porušeného průřezu $I_g$  moment setrvačnosti neporušeného průřezu

Beam type	Maximum deflection
	$\delta_{\max} = \frac{PL^3}{48 E_c I_{cr}} \left[ 1 - 8\eta \left( \frac{L_g}{L} \right)^3 \right]$
	$\delta_{\max} = \frac{PL^3}{24 E_c I_{cr}} \left[ 3 \left( \frac{a}{L} \right) - 4 \left( \frac{a}{L} \right)^3 - 8\eta \left( \frac{L_g}{L} \right)^3 \right]$
	$\delta_{\max} = \frac{5qL^4}{384 E_c I_{cr}} \left[ 1 - \frac{192}{5} \eta \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{L_g}{L} \right)^3 - \frac{1}{4} \left( \frac{L_g}{L} \right)^4 \right] \right]$
	$\delta_{\max} = \frac{PL^3}{3 E_c I_{cr}} \left[ 1 - \eta \left( \frac{L_g}{L} \right)^3 \right]$
	$\delta_{\max} = \frac{qL^4}{8 E_c I_{cr}} \left[ 1 - \eta \left( \frac{L_g}{L} \right)^4 \right]$

**Note:**  $\eta = \left( 1 - \frac{I_{cr}}{I_g} \right)$

obr. 5.1: maximální průhyb pro typické nosníky a desky působící v jednom směru [ 8 ]

Oproti dříve zmíněným americkým předpisům je tedy patrné, že kanadská norma nezavádí žádný mezistupeň mezi porušeným a neporušeným průřezem pro který by stanovovala efektivní moment setrvačnosti, nýbrž upravuje samotný výpočet výsledného přetvoření. Tato úprava však opět závisí na poměru porušeného a neporušeného průřezu. Předchozí kanadská norma pro navrhování betonových konstrukcí bez zaměření na FRP výztuž také pracuje s efektivním momentem setrvačnosti.

## 5.6. JSCE [9]

V Japonsku se návrh betonových konstrukcí řídí předpisem *Standard specifications for concrete structures* [9], konkrétně její částí „Design“. Dokument neobsahuje specifikace k návrhu prvků vyztužených kompozitní výztuží, nicméně je možné principy pro běžnou ocel aplikovat i na FRP výztuž.

Krátkodobý průhyb průřezu bez trhlin je možné počítat podle teorie pružnosti uvažující plný průřez jako efektivní, tzn.  $I_g = I_e$ . U průřezu porušeného trhlinami je potřeba zohlednit redukci tuhosti pružnosti vlivem trhlin. Při výpočtu dlouhodobého průhybu je potřeba zohlednit vliv dotvarování, smršťování a trhlin.

Tuhost průřezu pro průřez oslabený trhlinou se spočítá následujícími vzorci. V prvním případě je efektivní tuhost funkcí ohybového momentu:

$$E_e I_e = \left( \frac{M_{crd}}{M_d} \right)^4 \frac{E_e I_g}{1 - \frac{\Delta M_{csg}}{M_d - P(d_p - c_g)}} + \left\{ 1 - \left( \frac{M_{crd}}{M_d} \right)^4 \right\} \frac{E_e I_{cr}}{1 - \frac{\Delta M_{cscr}}{M_d - P(d_p - c_{cr})}} \quad (5.19)$$

V druhém případě je efektivní tuhost uvažována jako konstanta v podélném směru prvku:

$$E_e I_e = \left( \frac{M_{crd}}{M_{dmax}} \right)^3 \frac{E_e I_g}{1 - \frac{\Delta M_{csg}}{M_{dmax} - P(d_p - c_g)}} + \left\{ 1 - \left( \frac{M_{crd}}{M_d} \right)^3 \right\} \frac{E_e I_{cr}}{1 - \frac{\Delta M_{cscr}}{M_{dmax} - P(d_p - c_{cr})}} \quad (5.20)$$

### Ozn. Popis

$E_e$	efektivní modul pružnosti
$M_{crd}$	kritický ohybový moment na mezi vzniku trhlin
$M_d$	návrhový ohybový moment
$M_{dmax}$	maximální hodnota ohybového momentu
$P$	osová síla nebo předpínací síla
$\Delta M_{csg}$	fiktivní ohybový moment od smršťování na neporušeném průřezu
$\Delta M_{cscr}$	fiktivní ohybový moment od smršťování na trhlinou porušeném průřezu
$I_g$	moment setrvačnosti neporušeného průřezu
$I_{cr}$	moment setrvačnosti porušeného průřezu
$c_g$	vzdálenost těžiště neporušeného průřezu od tlačných vláken
$c_{cr}$	vzdálenost těžiště porušeného průřezu od tlačných vláken
$d_p$	vzdálenost předpínacího lana od tlačných vláken

Obě rovnice mohou být použity pro výpočet krátkodobého i dlouhodobého průhybu. Vliv dotvarování je zahrnut v efektivním modulu pružnosti. Smršťování je uvažováno jako konstanta na celém průřezu. Průhyb se následně stanoví integrací ohybové čáry.

## 5.7. STUDIE A EXPERIMENTY

Současný stav poznání vychází z aktuálně publikovaných odborných a vědeckých prací. Z dohledaných publikací jsou v práci prezentovány pouze vybrané přístupy, které jsou nejvíce relevantní zpracovanému tématu.

### 5.7.1. A MODIFIED MODEL FOR DEFLECTION CALCULATION OF REINFORCED CONCRETE BEAM WITH DEFORMED GFRP REBAR [ 10 ]

Tato studie a její autor M. Ju srovnává existující vztahy a odlišné přístupy s experimenty a přichází se semiempirickým vztahem pro efektivní moment setrvačnosti, který vychází z Bransnovy rovnice [ 6 ] a její modifikace:

$$I_e = \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^m I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^m - K \right] I_{cr} \leq I_g \quad (5.21)$$

#### Ozn. Popis

$M_{cr}$	moment na mezi vzniku trhlin
$M_a$	maximální vzniklý moment
$I_g$	moment setrvačnosti neporušeného průřezu
$I_{cr}$	moment setrvačnosti trhlinou porušeného průřezu
$m$	modifikační součinitel
$K$	nelineární parametr

Součinitel  $m$  závisí na stupni vyztužení a na rozdílu modulů pružností FRP materiálu a běžné oceli:

$$m = 6 - 13\rho_f \frac{E_F}{E_S} \quad (5.22)$$

#### Ozn. Popis

$\rho_f$	stupeň vyztužení
$E_F$	modul pružnosti FRP výztuže
$E_S$	modul pružnosti oceli

Parametr  $K$  vystihuje nelineární chování betonového prvku vyztuženého GFRP výztuží a může být spočten následovně:

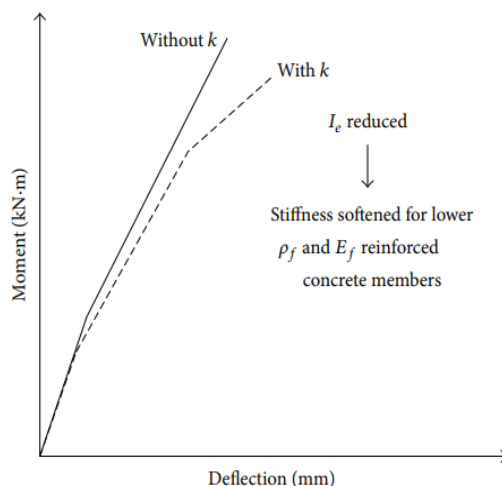
$$K = \left( \frac{1}{11} \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right) \right)^4 \quad (5.23)$$

#### Ozn. Popis

$M_{cr}$	moment na mezi vzniku trhlin
$M_a$	maximální vzniklý moment

Právě parametr  $K$  je hlavní úpravou původního přístupu a má sloužit k redukci vlivu momentu setrvačnosti trhlinou porušeného průřezu s ohledem na menší stupeň vyztužení a nižší modul pružnosti FRP výztuže. Hodnota parametru byla empiricky odvozena zkoumáním výsledků při použití dříve existujících vzorců a výsledků z experimentů.

Použití redukčního parametru vede na snížení efektivního momentu setrvačnosti a tím pádem na vyšší hodnoty vypočteného průhybu s rostoucím zatížením. Tento efekt je patrný z následujícího grafu převzatého z [ 10 ].



obr. 5.2: vliv parametru K [ 10 ]

### 5.7.2. DEFLECTION BEHAVIOUR OF FRP REINFORCED CONCRETE BEAMS AND SLABS: AN EXPERIMENTAL INVESTIGATION [ 11 ]

Jedná se o studii, která srovnává některé existující přístupy výpočtu a porovnává je s experimenty provedenými na různě vyztužených nosnících i deskách. Co se průhybu týče a přesnosti jednotlivých přístupů v porovnání s testovanými prvky, je jedním ze závěrů značná závislost přesnosti výpočtu na míře vyztužení. Každý z použitých vzorců je blíže reálným hodnotám průhybu při jiné míře vyztužení.

Americká norma ACI 440.1R-06 [ 4 ] nadhodnocuje průhyb (až o 18 %) u prvků s nižším stupněm míry vyztužení, tzn. prvky, u kterých dojde k porušení přetržením výztuže. Naopak u prvků s balančním nebo vyšším stupněm míry vyztužení dochází k podhodnocení průhybu v mezním stavu použitelnosti až o 11 % v případě prutových prvků a dokonce o 34 % v případě desek. Balanční nebo vyšší stupeň míry vyztužení je však v případě prvků vyztužených FRP výztuží běžně volený, neboť u takových prvků dochází k žádanému porušení drcením betonu.

V případě Eurokódu 2 [ 1 ] a vzorců navržených Bischoffem [ 7 ], které jsou shodně založené na tahovém zpevnění, je dosahováno shodných hodnot průhybu. Tyto výsledky jsou srovnatelné s reálným průhybem konstrukce při nižším zatížení, nicméně při vyšším zatížení vychází hodnoty průhybu v průměru o 17 % menší než reálné deformace.

Rovnice ( 5.24 ) pro výpočet efektivního momentu setrvačnosti navržená ve *Flexural Response of Concrete Beams Reinforced with FRP Reinforcing Bars* [ 12 ], která modifikuje přechod mezi momentem setrvačnosti neporušeného průřezu a momentem setrvačnosti trhlinou porušeného průřezu, vede na nadhodnocení vypočteného průhybu až o 42 % v mezním stavu použitelnosti. Nadhodnocení je patrné jak pro vyšší zatížení, tak i nezávisle na míře vyztužení.

$$I_e = \alpha_0 I_{cr} + \left( \frac{I_g}{\beta_0} - \alpha_0 I_{cr} \right) \left[ \frac{M_{cr}}{M_a} \right]^3 \quad (5.24)$$

Ozn.	Popis
$M_{cr}$	moment na mezi vzniku trhlin
$M_a$	maximální vzniklý moment
$I_g$	moment setrvačnosti neporušeného průřezu
$I_{cr}$	moment setrvačnosti trhlinou porušeného průřezu
$\beta_0$	redukční součinitel zrychlující přechod mezi momenty setrvačnosti = 7
$\alpha_0$	redukční součinitel zohledňující spolupůsobení výztuže s betonem = 0,84

Při zatížení až do vyčerpání únosnosti prvků byly naměřené hodnoty průhybu vždy větší, než vypočtený průhyb podle ACI 440.1R-06 [ 4 ], Eurokódu 2 [ 1 ] i Bischoffa [ 7 ]. V případě prvků s nižším stupněm míry vyztužení bylo podhodnocení průhybu až o 12 %, v případě vyššího stupně míry vyztužení dokonce až o 25 %. Hodnoty vycházející ze vzorce dle [ 12 ] i v případě zatížení na mez únosnosti jsou ve většině případů ve shodě s naměřenými hodnotami.

V případě balančního a vyššího stupně míry vyztužení může být nesoulad analytických metod s experimentem způsoben přídatnou deformací vyvolanou smykem a prokluzem podpor. Přírůstek deformací od smyku a prokluzu podpor není v žádném z přístupů zahrnut, a proto mohou vést na nepřesné a nekonzervativní návrhy.

### 5.7.3. NUMERICAL STUDY ON DEFLECTION BEHAVIOUR OF CONCRETE BEAMS REINFORCED WITH GFRP BARS [ 13 ]

V této práci je představeno několik modelů vytvořených pomocí konečných prvků v programu ANSYS. Výsledky z těchto výpočetních modelů pak byly srovnány s výsledky vybraných analytických metod pro výpočet efektivního momentu setrvačnosti a průhybu.

Jednotlivé modely měly stejnou geometrii, lišily se pouze stupněm vyztužení, který se pohyboval od 0,37 % do 1,19 %. Stejně vstupní parametry byly použity i pro analytické výpočty průhybu dle ACI 440.1R-06 [ 4 ], ACI 440.1R-15 [ 5 ] a CSA S806-12 [ 8 ]. Všechny stanovené hodnoty průhybu, jak z modelu, tak analyticky, měly klesající tendenci s rostoucím stupněm vyztužení, tzn. čím vyšší stupeň vyztužení, tím menší průhyb.

Co se srovnání modelu s jednotlivými normovými výpočty týče, největší shody bylo dosaženo použitím vztahů z ACI 440.1R-15 [ 5 ]. U všech prvků byl průhyb nepatrně nadhodnocen v porovnání s modelem, hodnoty se však neodchýlily o více než 8 %. Starší podoba amerického předpisu ACI 440.1R-06 [ 4 ] naopak vycházela nekonzervativně a průhyb značně podhodnocovala. Nejbližší shodě s modelem bylo dosaženo u prvku s nejnižším stupněm vyztužení, i tak poměr předpokládaného průhybu ku průhybu výpočetního modelu dosáhl pouze 0,82. V nejhorším případě byl poměr dokonce pouze 0,62. Naopak kanadská norma CSA S806-12 [ 8 ] ukázala nejkonzervativnější výsledky, kdy pro každý nosník nadhodnotila průhyb minimálně o 18 %.

#### 5.7.4. PREDICITON OF THE EFFECTIVE MOMENT OF INERTIA FOR CONCRETE BEAMS REINFORCED WITH FRP BARS USING AN EVOLUTIONARY ALGORITHM [14]

Vztah pro efektivní moment setrvačnosti, který je jedním z výsledků této studie, je odvozen na základě Multi-Expression Programming (MEP, *multi-výrazové programování*). MEP je novým evolučním algoritmem vytvořeným pro řešení výpočetně složitých problémů. V rámci studie tak byly shromážděny data z předchozích experimentů napříč mnoha lety a z různých studií a tato data pak sloužila jako náhodné vstupy pro algoritmy MEP.

Po provedení rozsáhlé analýzy byly prezentovány následující vzorce pro efektivní moment setrvačnosti:

$$I_e = \begin{cases} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)^\alpha (I_g - I_{cr}) + \eta \left(1,25I_{cr} + 6\lambda^{\frac{6}{\mu}} I_g^{(1-\frac{6}{\mu})}\right) & \text{pro } \mu \leq 2 \\ \left(\frac{1}{0,05(\mu - 1)^\gamma + 1}\right) \eta \left(1,25I_{cr} + 6\lambda^{\frac{6}{\mu}} I_g^{(1-\frac{6}{\mu})}\right) & \text{pro } \mu > 2 \end{cases} \quad (5.25)$$

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \lambda \geq 1 \\ \lambda^{-0,8\lambda^{0,2}} & \text{pro } \lambda < 1 \end{cases} \quad (5.26)$$

$$\alpha = \begin{cases} 2 & \text{pro } \lambda \geq 1 \\ 0,75 & \text{pro } \lambda < 1 \end{cases} \quad (5.27)$$

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{pro } \lambda \geq 1 \\ 1,2 & \text{pro } \lambda < 1 \end{cases} \quad (5.28)$$

$$\lambda = \frac{\rho_f}{\rho_{fb}} \quad (5.29)$$

$$\mu = \frac{M_{cr}}{M_a} \quad (5.30)$$

$$\rho_f = 0,85\beta_1 \frac{f'_c}{f_{fu}} \frac{E_f \varepsilon_{cu}}{E_f \varepsilon_{cu} + f_{fu}} \quad (5.31)$$

#### Ozn. Popis

$I_g$	moment setrvačnosti neporušeného průřezu
$I_{cr}$	moment setrvačnosti trhlinou porušeného průřezu
$\rho_f$	stupeň vyztužení
$\rho_{fb}$	balanční stupeň vyztužení
$M_{cr}$	moment na mezi vzniku trhlin
$M_a$	maximální vzniklý moment
$\eta$	modifikační součinitel
$\alpha$	parametr v závislosti na součiniteli míry vyztužení
$\gamma$	parametr v závislosti na součiniteli míry vyztužení
$\lambda$	součinitel míry vyztužení
$\mu$	součinitel poměrů momentů
$\beta_1$	součinitel závislý na pevnosti betonu
$f'_c$	pevnost betonu v tlaku
$f_{fu}$	mezí tahová pevnost FRP výztuže ve směru vláken
$E_f$	modul pružnosti FRP výztuže v tahu
$\varepsilon_{cu}$	mezí přetvoření betonu v tlaku

Přesnost vzorce byla ověřena porovnáním výsledků s výsledky z existujících modelů a bylo dokázáno, že navržené vztahy odpovídají reálnému chování prvků při čtyřbodovém ohybu. Výpočet průhybu za použití těchto vzorců je pak více přesný než ze vzorců doposud známých.

## 5.8. SHRNU TÍ

Pro úplnost jsou v následující tabulce uvedeny vztahy pro výpočet efektivního momentu setrvačnosti případně jiný stěžejní vzorec pro výpočet průhybu dle jednotlivých předpisů a autorů:

tab. 5.1: přehled vybraných přístupů pro stanovení průhybu

předpis, autor	vzorec pro výpočet průhybu
ČSN EN 1992-1-1	$\alpha = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta) \alpha_I$
Model code 2010	$a = \zeta a_{II} + (1 - \zeta) a_I$ $(EI)_{ef} = \frac{(EI)_I (EI)_{II}}{\zeta (EI)_I + (1 - \zeta) (EI)_{II}}$
ACI 318-14	$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] I_{cr} \leq I_g$
ACI 440.1R-06	$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 \beta_d I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] I_{cr} \leq I_g$
ACI 440.1R-15	$I_e = \frac{I_{cr}}{1 - \gamma \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^2 \left[1 - \frac{I_{cr}}{I_g}\right]} \leq I_g$ kde $M_a \geq M_{cr}$
CSA S806-12	upravené vzorce pro výpočet průhybu dle zatížení
JSCE	$E_e I_e = \left(\frac{M_{crd}}{M_d}\right)^4 \frac{E_e I_g}{1 - \frac{\Delta M_{csg}}{M_d - P(d_p - c_g)}} + \left\{1 - \left(\frac{M_{crd}}{M_d}\right)^4\right\} \frac{E_e I_{cr}}{1 - \frac{\Delta M_{cscr}}{M_d - P(d_p - c_{cr})}}$
M. Ju	$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^m I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^m - K\right] I_{cr} \leq I_g$
Benmokrane	$I_e = \alpha_0 I_{cr} + \left(\frac{I_g}{\beta_0} - \alpha_0 I_{cr}\right) \left[\frac{M_{cr}}{M_a}\right]^3$
A. Arabshahi	$I_e = \begin{cases} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)^\alpha (I_g - I_{cr}) + \eta \left(1,25 I_{cr} + 6 \lambda^\mu I_g^{1-\frac{6}{\mu}}\right) & \text{pro } \mu \leq 2 \\ \left(\frac{1}{0,05(\mu - 1)^\gamma + 1}\right) \eta \left(1,25 I_{cr} + 6 \lambda^\mu I_g^{1-\frac{6}{\mu}}\right) & \text{pro } \mu > 2 \end{cases}$

## 6. ANALYTICKÁ STUDIE

Tato část práce se věnuje analytickým výpočtům a stanovení průhybu dle jednotlivých přístupů zmíněných výše. Především se zaměřuje na srovnání jednotlivých přístupů a hledání rozdílů mezi nimi.

Jelikož se práce zabývá mnoha přístupy pramenících v různých zemích a v různých výchozích normách, je pro porovnatelnost metod potřeba sjednotit některé veličiny a vztahy a zavést shodné vstupní veličiny. Jedná se zejména o stanovení materiálových charakteristik a způsob stanovení ohybového momentu na vzniku trhlin. Sjednocením je docílena eliminace nežádoucího zkreslení výsledků odlišných přístupů definujících materiálové vlastnosti betonu a výztuže.

### 6.1. VSTUPNÍ HODNOTY

Pro účely porovnání a analýzy jednotlivých přístupů byl zvolen jednotný prvek obdélníkového průřezu s rozměry 0,22 m x 0,41 m uložený jako prostý nosník. Rozpětí podpor je 2,85 m a zatížení je uvažováno bodově v polovině rozpětí, jedná se tedy o třibodový ohyb. Vlastní tíha byla ve výpočtu průhybu zanedbána, průhyb je stanovován pouze od silového břemene v daných přírůstcích.

Byly uvažovány dvě varianty výztužení – ocelová a kompozitní výztuž:

- **Varianta A** – prvek s ocelovou podélnou výztuží třídy B500B, výztuženo šesti pruty průměru 25 mm (6Ø25), krytí výztuže 35 mm;
- **Varianta B** – prvek s kompozitní GFRP podélnou výztuží, výztuženo pěti pruty průměru 18 mm (5Ø18), krytí výztuže 35 mm.

Materiálové charakteristiky betonu a obou uvažovaných podélných výztuží jsou uvedeny v následujících tabulkách:

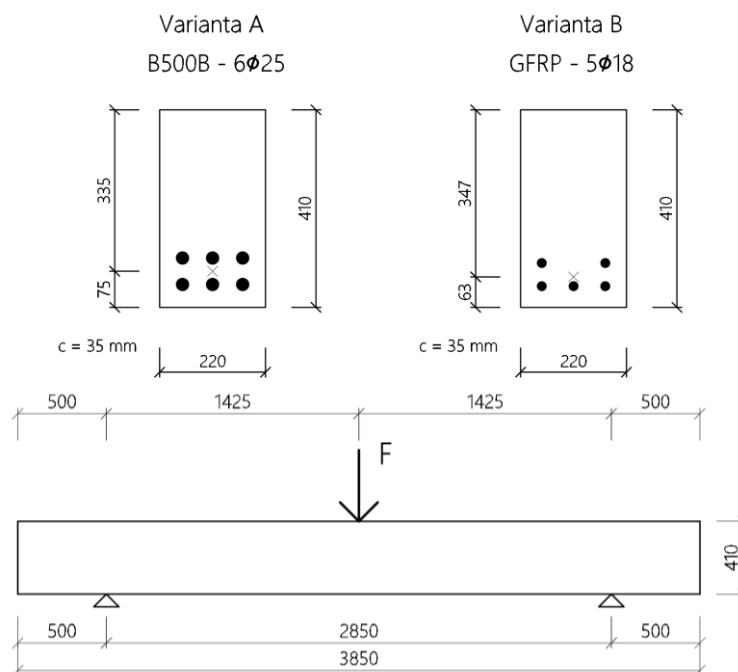
tab. 6.1: materiálové charakteristiky betonu

pevnost v tlaku $f_c$ [MPa]	46,58
pevnost v tahu $f_{ct}$ [MPa]	3,5
modul pružnosti $E_c$ [GPa]	29,9
mezní poměrné přetvoření $\epsilon_c$ [‰]	3,5

tab. 6.2: materiálové charakteristiky výztuže a způsob výztužení

	Varianta A – ocel	Varianta B – GFRP
výztužení	6Ø25	5Ø18
tahová pevnost [MPa]	550	1133,78
modul pružnosti v tahu [GPa]	200	48,59





obr. 6.1: geometrie vyztužení a zatěžování  
vlevo – vzorek vyztužený ocelovou výztuží; vpravo – vzorek vyztužený GFRP výztuží

## 6.2. VARIANTA A – OCELOVÁ VÝZTUŽ

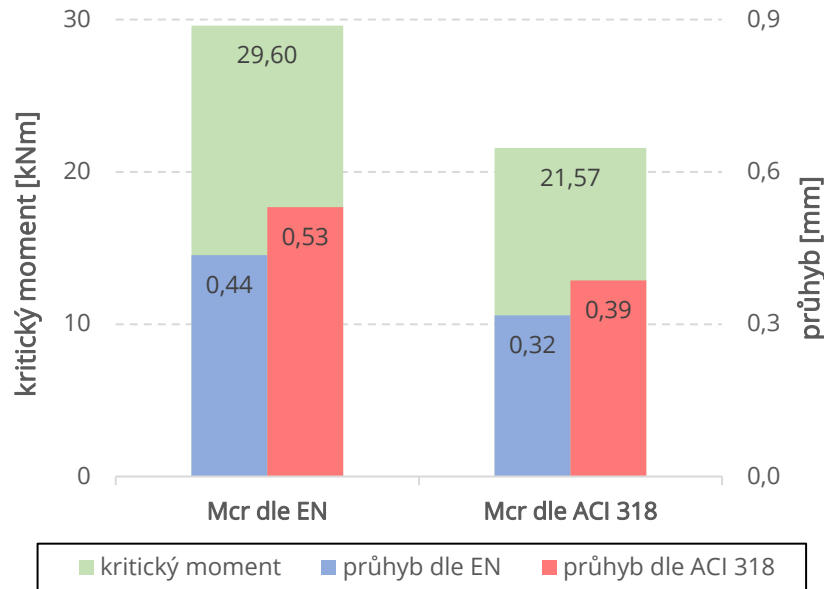
Běžná betonářská výztuž byla posouzena pouze dvěma přístupy, a to na základě evropské normy a americké normy, konkrétně tedy ČSN EN 1992-1-1 [ 1 ], resp. ACI 318-14 [ 3 ]. Hlavní, na první pohled viditelný, rozdíl ve výsledcích založených na těchto dvou předpisech je v absenci tzv. *ideálního průřezu* v americké normě. *Ideální průřez*, jež je zaveden ve výpočtu podle Eurokódu, je neporušený průřez se zahrnutím výztuže. Výztuž má tedy v případě Eurokódu vliv na moment setrvačnosti neporušeného průřezu a tím pádem také na jeho tuhost a s ní související průhyb.

Moment na mezi vzniku trhlin také dosahuje jiné hodnoty v obou případech. V prvním případě, dle normy [ 1 ], je založen právě na momentu setrvačnosti ideálního průřezu, tedy se zahrnutím výztuže. V druhém případě, dle normy [ 3 ], vychází moment na mezi vzniku trhlin z momentu setrvačnosti průřezu bez zahrnutí výztuže. Hodnota kritického momentu na mezi vzniku trhlin  $M_{cr}$  je tedy vyšší v případě ČSN EN 1992-1-1 [ 1 ], neboť vychází z většího momentu setrvačnosti.

tab. 6.3: srovnání výsledků pro ocelovou výztuž

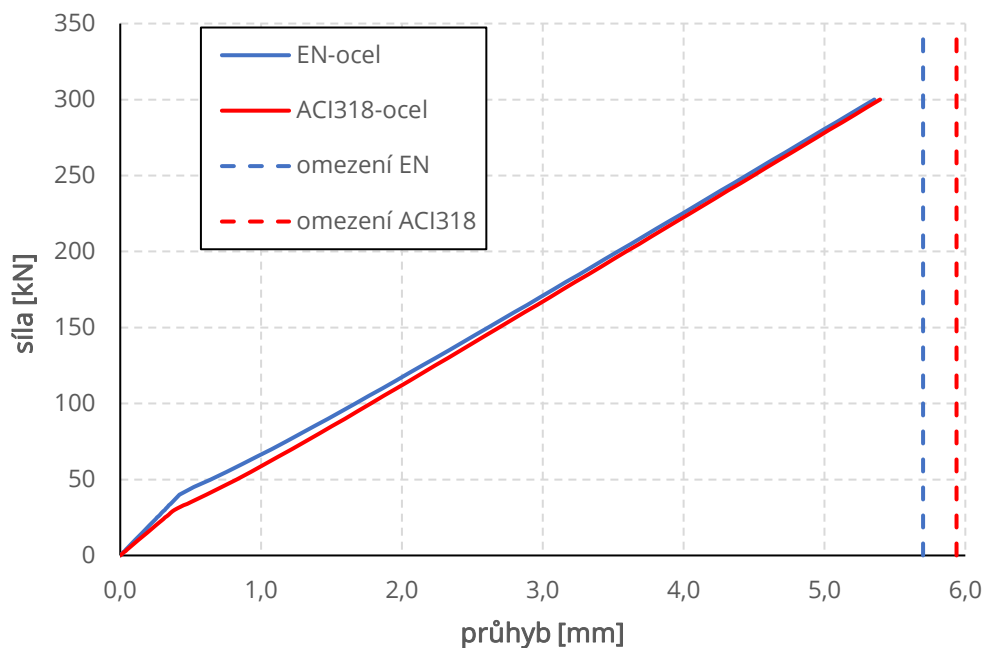
norma	kritický moment [kNm]	průhyb [mm]			
		moment 29,6 kNm	moment 21,57 kNm	síla 300 kN	
ČSN EN 1992-1-1	29,60	0,44	0,32	5,35	
ACI 318-14	21,57	0,53	0,39	5,39	
rozdíl	abs.	8,03	0,09	0,07	0,04
	%	27,13	21,63	21,63	0,76

Pro všechna zatížení platí, že americká norma vykazuje větší průhyby než evropský předpis. Průřez dle [ 1 ] se značí větší tuhostí než podle [ 3 ]. V oblasti nižších zatížení kolem momentů na mezi vzniku trhlin dosahuje odchylka obou předpisů více než 20 %. S rostoucím zatížením se ale odchylka snižuje až na konečné necelé procento.



graf. 6.1: grafické srovnání výsledků pro ocelovou výztuž

Závislost mezi průhybem v polovině rozpětí a zatěžovací silou je graficky znázorněna na graf. 6.2. Průhyb nosníku byl vyčíslen pro maximálního zatížení 300 kN. Tato hodnota byla zvolena na základě experimentu a reálného poškození prvku, kdy při tomto zatížení byla vyčerpána únosnost konstrukce, viz kapitola 7.



graf. 6.2: závislost síly a průhybu v polovině rozpětí - ČSN EN 1992-1-1 a ACI 318

Z výše zobrazeného grafu je patrné, že Eurokód [ 1 ] dosahuje nižších hodnot průhybu v porovnání s americkým předpisem [ 3 ]. Rozdíl je způsoben odlišným přístupem při výpočtu tuhosti průřezu pramenící v zahrnutí výztuže do ideálního průřezu. Je ale potřeba zmínit, že každý z předpisů má také jinou limitující podmínku, kterou by průhyb při návrhu konstrukce neměl překročit.

Eurokód omezuje okamžitý průhyb konstrukce na 1/500 rozpětí, což je limitní hodnota průhybu, při které by neměly být poškozeny přilehlé části konstrukcí. Omezení lze upravit, pokud je potřeba brát zvýšený ohled na porušení přilehlých částí. Americká norma stanovuje limitní hodnoty různě v závislosti na použití prvku. Například pro ploché střechy, které nepodírají jiné konstrukce nebo jsou připojené k nekonstrukčním prvkům a předpokládá se u nich velký průhyb, platí omezení 1/180. Naopak nejpřísnější omezení 1/480 z rozpětí mají konstrukce střešních či podlahových desek které podporují ostatní prvky. Omezení průhybu jsou zaznačená také v graf. 6.2 (pro ACI 318 omezení na 1/480 rozpětí), viditelně jich není dosaženo před vyčerpáním únosnosti.

Z důvodu lepší porovnatelnosti jednotlivých přístupů v následující části práce zabývající se výhradně FRP výztuží, bude nadále u výpočtů založených na Eurokódu upraven výpočet kritického momentu na mezi vzniku trhlin tak, aby se shodoval s momentem na mezi vzniku trhlin dle ACI. Ve výpočtu tedy bude do vzniku trhlin zanedbán *ideální průřez* a bude nahrazen pouze průřezem betonovým. V takovém případě se pak hodnoty průhybu shodují pro oba předpisy.

### 6.3. VARIANTA B – KOMPOZITNÍ FRP VÝZTUŽ

Prvek vyztužený nekovovou kompozitní výztuží byl posouzen hned několika způsoby z výše zmíněného výčtu přístupů. Jedná se buďto o normy z různých států, anebo o existující studie zabývající se konkrétně průhybem prvků vyztužených FRP výztuží. Jak již bylo zmíněno výše, evropská, potažmo česká, norma ČSN EN 1992-1-1 [ 1 ] nemá zavedené žádné vztahy pro betonové prvky vyztužené kompozitní výztuží. Pro účely této práce tedy byly stávající vzorce pro ocelovou výztuž použity také pro prvky vyztužené FRP výztuží. Všechny ostatní postupy jsou zaměřené přímo na kompozitní výztuž.

Maximální síla, pro kterou byl vyhodnocen průhyb nosníku s kompozitní výztuží, je oproti prvku s ocelovou výztuží poloviční, konkrétně tedy 150 kN. Tato hodnota vychází z reálného poškození prvku při experimentu, viz kapitola 7. Maximální zatížení je tedy omezeno mezním stavem únosnosti.

#### 6.3.1. VÝSLEDKY DLE ACI 440.1R-15

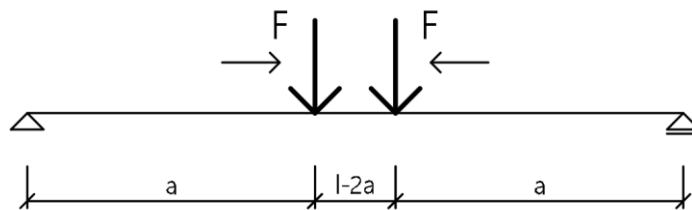
Ve výpočtu efektivního momentu setrvačnosti dle ACI 440.1R-15 [ 5 ] bylo potřeba upravit výpočet součinitele  $\gamma$ , neboť vyšetřovaný nosník neodpovídá způsobu zatížení, pro nějž je hodnota součinitele  $\gamma$  definovaná v normě. Norma udává pouze vztah pro spojitě rovnoměrné zatížení, viz. rovnice ( 5.16 ). Ve studii [ 10 ] byl uveden vztah pro čtyřbodový ohyb:

$$\gamma = \frac{3 \left(\frac{a}{L}\right) - 16 \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right) \left(\frac{a}{L}\right)^2 + 12 \left(\frac{a}{L}\right)^3}{3 \left(\frac{a}{L}\right) - 4 \left(\frac{a}{L}\right)^3} \quad (6.1)$$

**Ozn. Popis**

$a$	vzdálenost břemene od podpory
$L$	rozpětí podpor
$M_{cr}$	moment na mezi vzniku trhlin
$M_a$	maximální vzniklý moment

Tato práce se však zabývá nosníkem namáhaným tříbodovým ohybem, a proto žádný z uvedených vztahů nelze s úplnou přesností použít. Vztah pro výpočet tříbodového ohybu se nepodařilo dohledat. Pro účely této práce byl vztah pro součinitel  $\gamma$  odvozen na základě vztahu ( 6.1 ). Vztah pro čtyřbodový ohyb závisí na umístění břemene od podpory (značeno  $a$ ) a v případě tříbodového ohybu je tato vzdálenost rovna polovině rozpětí. V případě posunutí sil do poloviny rozpětí dochází ke zdvojení zatížení a tím pádem je předpokládán také dvojnásobný moment od zatížení.

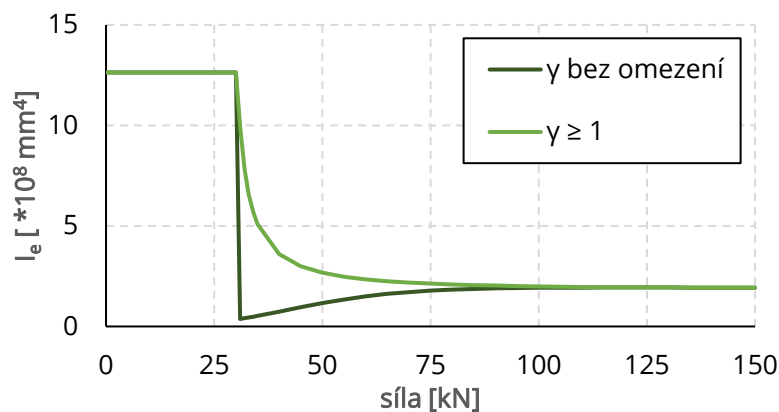


obr. 6.2: přechod ze čtyřbodového na tříbodový ohyb

Vzorec pro součinitel  $\gamma$  byl tedy upraven zavedením poměru  $\frac{a}{L} = \frac{1}{2}$  a redukcí vzniklého momentu  $M_a$  na polovinu.

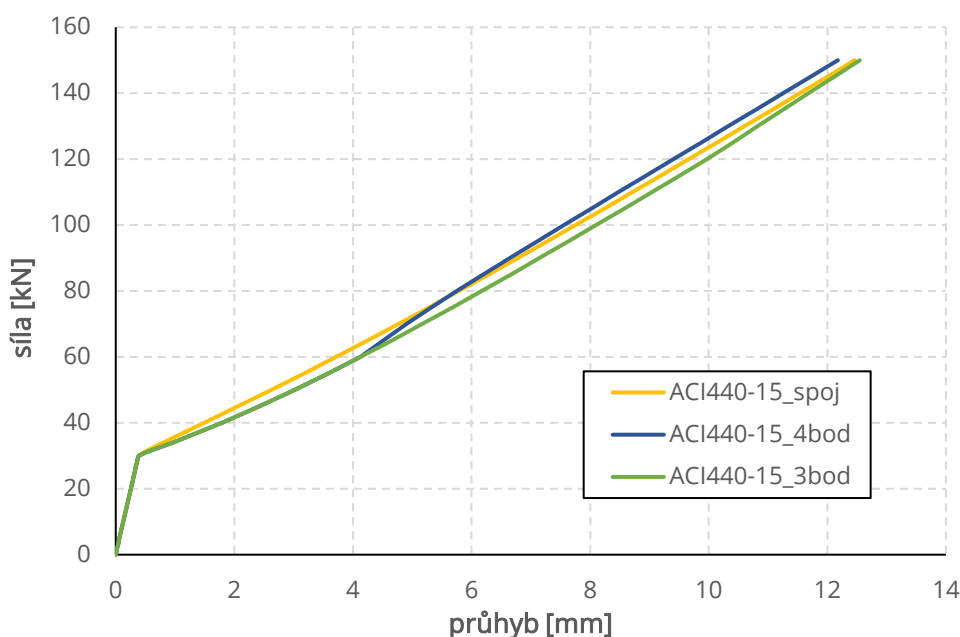
$$\gamma = 3 - 8 \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right) \quad (6.2)$$

Pokud není součinitel  $\gamma$  omezen, může dosahovat hodnot nižších než 1. Hodnoty menší než 1 nejsou vyžadovány, neboť by docházelo k nežádoucí redukcí efektivního momentu setrvačnosti a následně k jeho opětovnému nárůstu (graficky znázorněno na graf. 6.3). Je proto nastavena podmínka  $\gamma \geq 1$ .



graf. 6.3: vliv omezení součinitele  $\gamma$  na efektivní moment setrvačnosti

Na následujícím grafu je možné pozorovat průběh křivek při použití součinitelů  $\gamma$  odpovídajících různým způsobům zatížení (spojité zatížení, čtyřbodový ohyb a třibodový ohyb). Ve všech případech je zatížení uvažováno jako třibodový ohyb a jemu odpovídající momenty, součinitel  $\gamma$  je ale stanoven různými způsoby nezávisle na odpovídajícím zatížení. Křivka s označením „ACI440-15\_spoj“ je založená na vzorci ( 5.16 ) jež je odvozena pro spojité zatížení, křivka „ACI440-15\_4bod“ zase na vzorci ( 6.1 ) a vychází ze 4-bodového ohybu a křivka značená „ACI440-15\_3bod“ je založená na odvozeném vzorci ( 6.2 ) pro třibodový ohyb.

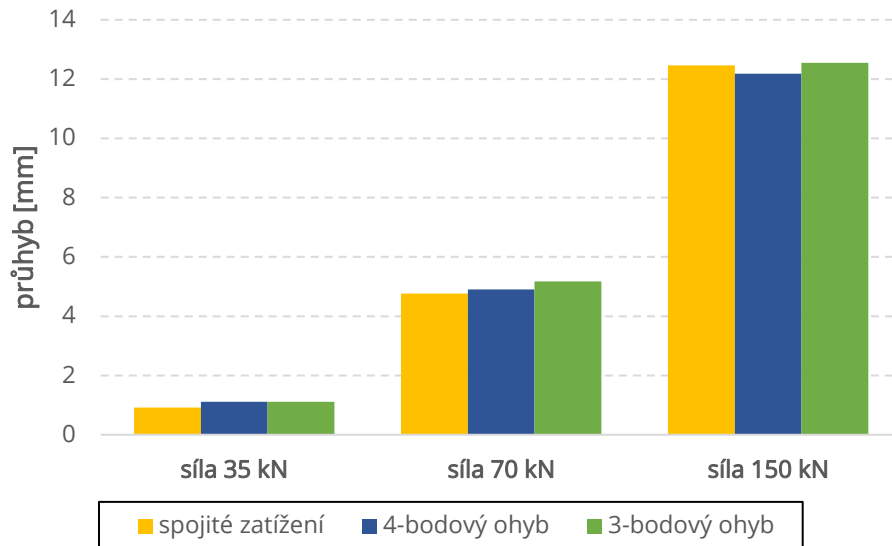


graf. 6.4: závislost síly a průhybu v polovině rozpětí – ACI 440.1R-15

Každý ze vztahů redukuje tuhost průřezu po vzniku trhlin jiným způsobem, neboť při stejném zatížení je dosaženo nepatrně jiných hodnot průhybů, rozdíly však nejsou markantní. Vztah ( 5.16 ) pro spojité zatížení vykazuje po vzniku trhlin větší tuhost průřezu a průhyby pro zatížení těsně nad hranicí kritického momentu jsou o 17 % menší než podle zbylých dvou vztahů. S rostoucím zatížením se hodnoty průhybů srovnávají a na konci zatěžování jsou průhyby dle ( 5.16 ) nepatřičně větší než podle předpisu pro čtyřbodový ohyb ( 6.1 ). Tuhost průřezu založená na vztahu ( 6.1 ) je po vzniku trhlin menší než podle ( 5.16 ), ale totožná s tuhostí dle odvozeného vzorce ( 6.2 ) pro třibodový ohyb. Oproti vzorci pro třibodový ohyb, po dosažení kritického momentu dochází u čtyřbodového zatížení k postupnému zvýšení tuhosti průřezu (neboli nedochází k tak rychlému snížení tuhosti jako u vzorce pro třibodový ohyb). Číselné vyjádření průhybu viz tab. 6.4, grafické srovnání viz graf. 6.5.

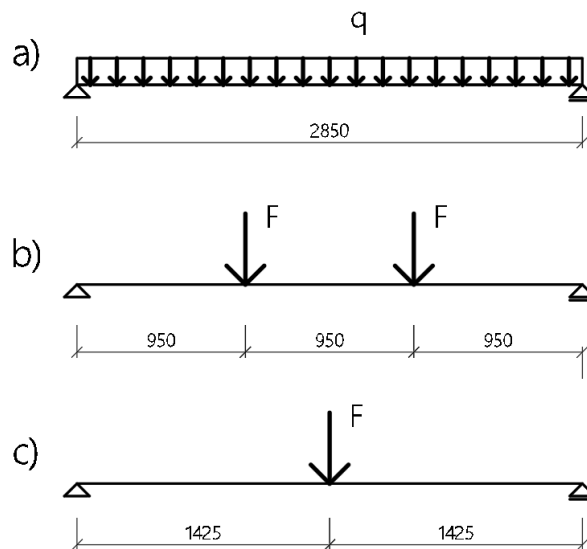
tab. 6.4: srovnání výsledků pro normu ACI 440.1R-15 [ 5 ], varianty součinitele  $\gamma$

použitý vzorec	průhyb [mm]		
	síla 35 kN	síla 70 kN	síla 150 kN
spojité zatížení ( 5.16 )	0,92	4,77	12,46
4-bodový ohyb ( 6.1 )	1,11	4,90	12,18
3-bodový ohyb ( 6.2 )	1,11	5,17	12,55



graf. 6.5: grafické rovnání výsledků pro normu ACI 440.1R-15 [ 5 ], varianty součinitele  $\gamma$

Použití vztahů pro součinitel  $\gamma$  (5.16) pro spojité zatížení a (6.1) pro čtyřbodový ohyb u nosníku zatíženého třibodovým ohybem není plně vypovídající. Pro ověření platnosti vztahů a jejich vlivů na průhyb adekvátně zatížených nosníků byly analyzovány také dva prvky s totožnou geometrií ale s jinou konfigurací zatížení. Konkrétně tedy prostý nosník o rozměrech 0,22 m x 0,41 m x 2,85 m zatížený spojitým zatížením (následně značeno „spoj“) a prostý nosník o rozměrech 0,22 m x 0,41 m x 2,85 m zatížený čtyřbodovým ohybem (značeno „4bod“). Primárně zkoumaný prvek zatížený třibodovým zatížením bude v tomto případě značen „3bod“.

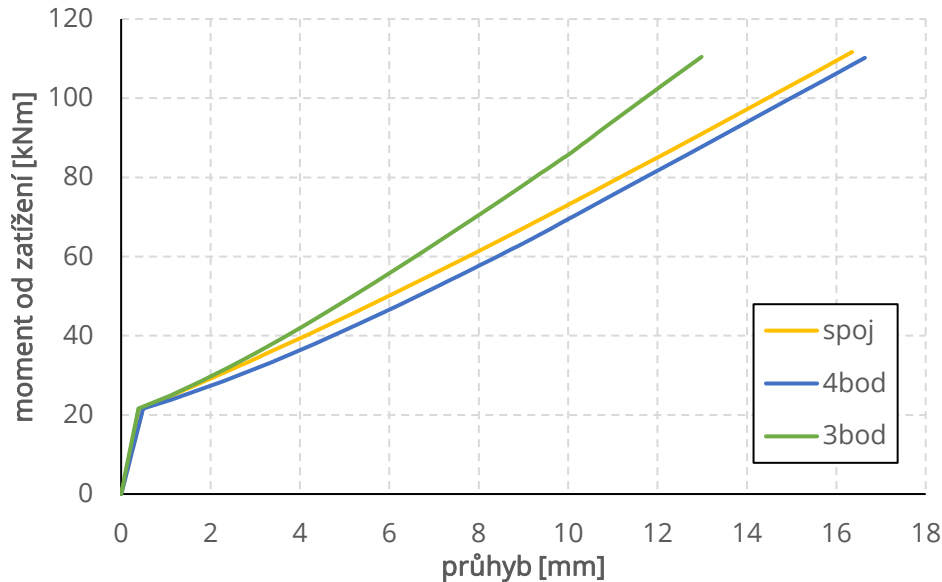


obr. 6.3: uvažovaná zatížení na zkoumaných nosnících

a) spojité zatížení – spoj; b) čtyřbodový ohyb – 4bod; c) třibodový ohyb – 3bod

Hodnoty zatížení byly nastaveny v takovém rozmezí, aby bylo možné sestavit plynulou křivku odpovídajících momentů v polovině rozpětí v rozmezí 0–110 kNm. Pro tyto nosníky byl následně na základě daného zatížení spočítán také průhyb v polovině rozpětí. Do výpočtu průhybu ve všech případech vstupoval efektivní

moment setrvačnosti daný normou ACI 440.1R-15 [ 5 ] a vztahem ( 5.15 ). Rozdíl byl však v součiniteli  $\gamma$ , který byl v případě nosníku se spojitým zatížením počítán dle vztahu ( 5.16 ), v případě čtyřbodového ohybu dle vztahu ( 6.1 ) a v případě třibodového ohybu dle odvozeného vztahu ( 6.2 ). Následně byly křivky vyjadřující závislost momentu od zatížení a průhybu v polovině rozpětí zaneseny do graf. 6.6.



graf. 6.6: závislost momentu od zatížení a průhybu v polovině rozpětí – srovnání typů zatížení

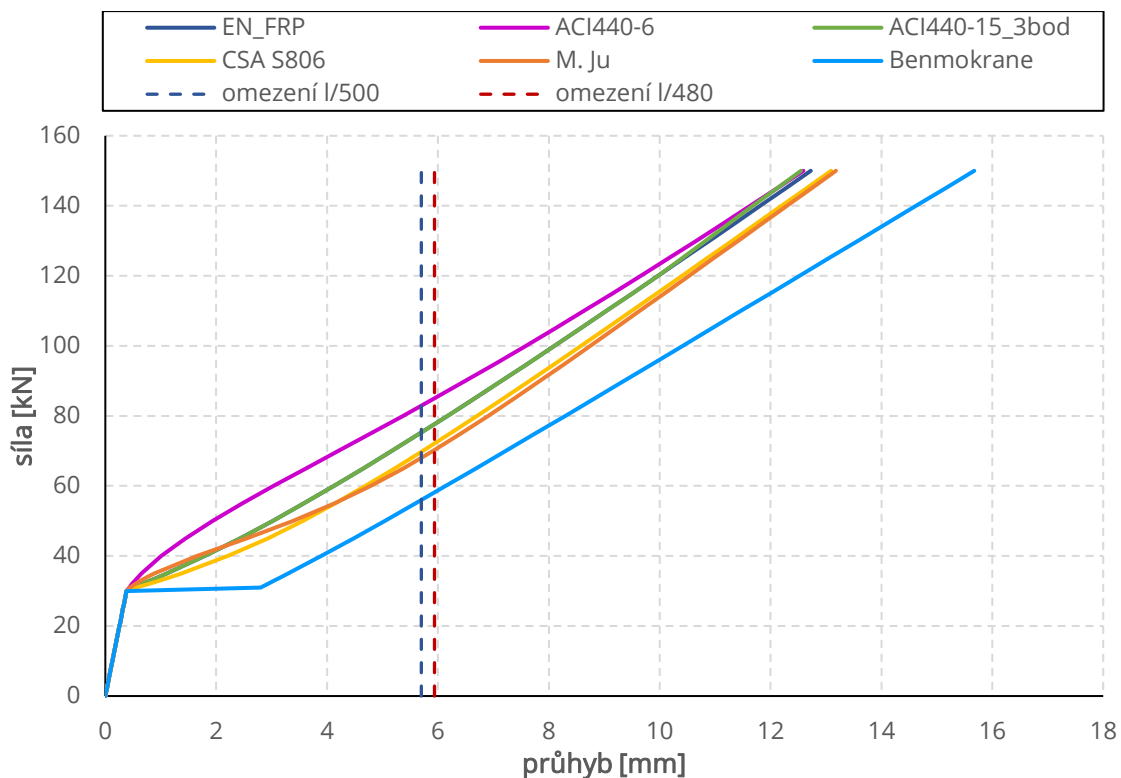
Jak je možné vidět na graf. 6.6, průhyby nosníku zatížených spojitým zatížením a čtyřbodovým ohybem jsou při shodném momentu od zatížení velmi podobné, průhyb od čtyřbodového zatížení je jen nepatrně větší. Průhyby nosníku zatíženého třibodovým ohybem jsou však oproti zbylým dvěma zatížením nižší o cca 28 %. Tento rozdíl při zatížení jedním břemenem je způsoben odlišným chováním nosníku pod tímto zatížením. Síla v polovině rozpětí předurčuje místo porušení a nedochází tak k výraznému rozvoji trhlin po celé délce nosníku, ale jsou koncentrovány spíše v polovině rozpětí pod břemenem.

Analýza průhybů odlišně zatížených nosníků dopadla uspokojivě a je tak možné považovat odvozený vzorec ( 6.2 ) pro součinitel  $\gamma$  za vypovídající. V dalších částech práce proto bude průhyb dle ACI 440.1R-15 [ 5 ] vyhodnocován právě s využitím odvozeného vztahu ( 6.2 ) pro třibodový ohyb.

### 6.3.2. SROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ

V této části jsou srovnány průhyby nosníku vyztuženého FRP výztuží stanovené na základě dříve uvedených předpisů a studií (viz kapitola 5). Celkem byl průhyb počítán 6 různými způsoby – ČSN EN 1992-1-1 [ 1 ], ACI 440.1R-06 [ 4 ], ACI 440.1R-15 [ 5 ], CSA-S806-12 [ 8 ], podle M. Ju [ 10 ] a dle Benmokrana [ 12 ]. Ve všech případech se jednalo o třibodový ohyb prostě podepřeného nosníku se shodnými vstupními veličinami. Průhyby byly počítány pro různé hodnoty zatížení v rozmezí 0–150 kN tak, aby bylo možné sestavit spojitou křivku vystihující závislost průhybu a síly. V teoretickém případě by bylo možné zatěžovat dále a křivky by pokračovaly v podobném trendu, nicméně kolem síly 150 kN je dosaženo mezní únosnosti nosníku, a proto je výpočet s dosažením tohoto zatížení ukončen.

Následující graf vyobrazuje všechny křivky dle jednotlivých přístupů:



graf. 6.7: závislost síly a průhybu v polovině rozpětí – srovnání přístupů

Na první pohled viditelné rozdíly v průběhu křivek po překonání kritického momentu na mezi vzniku trhlin indikují rozdílnou tuhost porušeného průřezu. Srovnání konkrétních hodnot průhybu při daném zatížení je demonstrováno v tab. 6.5. Pro lepší porovnatelnost je vyhotoveno také procentuální srovnání kdy jako referenční hodnota (100 %) byl zvolen průhyb dle ČSN EN 1992-1-1 [ 1 ].

tab. 6.5: srovnání průhybu dle jednotlivých přístupů

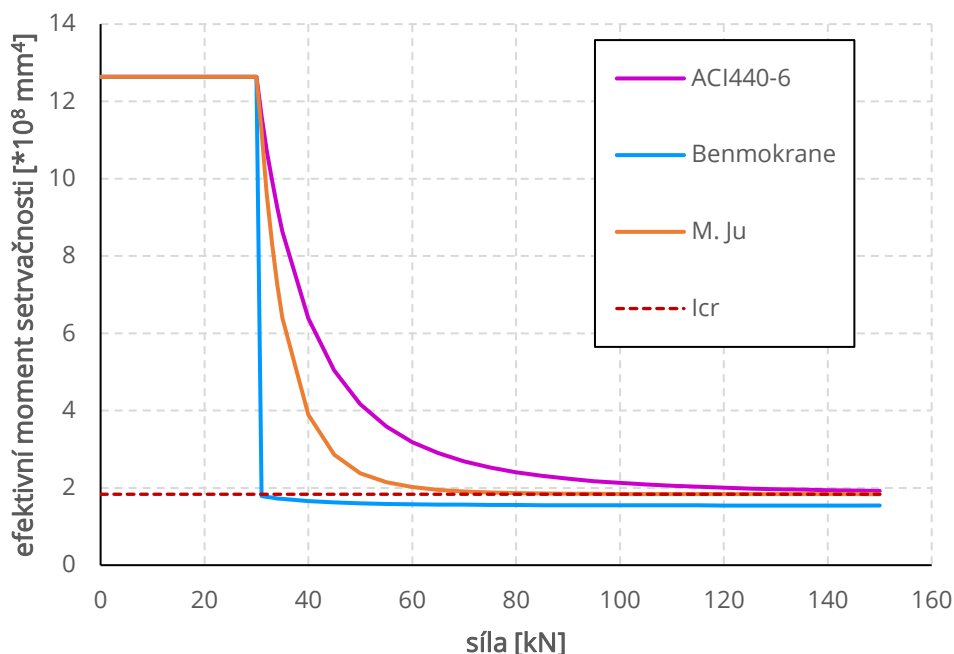
předpis	průhyb [mm]			
	síla 31 kN	síla 60 kN	síla 100 kN	síla 150 kN
ČSN EN 1992-1-1	0,50	4,13	8,10	12,72
ACI 440.1R-06	0,43	3,04	7,58	12,59
ACI 440.1R-15	0,50	4,13	8,10	12,55
CSA-S806-12	0,55	4,69	8,58	13,09
M. Ju	0,45	4,79	8,75	13,18
Benmokrane	2,80	6,14	10,41	15,67



tab. 6.6: procentuální srovnání průhybu dle jednotlivých přístupů

předpis	průhyb [%]			
	síla 31 kN	síla 60 kN	síla 100 kN	síla 150 kN
ČSN EN 1992-1-1	100	100	100	100
ACI 440.1R-06	86	74	94	99
ACI 440.1R-15	100	100	100	99
CSA-S806-12	110	114	106	103
M. Ju	89	116	108	104
Benmokrane	556	149	129	123

S jistotou je možné konstatovat, že průhyb stanovený podle Benmokrana [ 12 ] vychází pro všechna zatížení největší a je z uvedených přístupů nejkonzervativnější. Hlavním důvodem je výrazný nárůst průhybu bezprostředně po dosažení tahové pevnosti betonu a vzniku trhlin. Tento skok je zapříčiněn součinitelem  $\beta_0$  ve vzorci ( 5.24 ), který byl empiricky stanoven na základě provedených zkoušek a má sloužit k rychlejšímu přechodu z neporušeného průřezu na porušený průřez, a tím pádem k rychlejšímu změkčení průřezu. Vývoj momentu setrvačnosti vstupujícího do výpočtu průhybu je demonstrován na graf. 6.8. Je zde také pro porovnání vyobrazen moment setrvačnosti dle [ 4 ] a [ 10 ].



graf. 6.8: závislost efektivního momentu setrvačnosti a síly

Z uvedeného grafu je patrné, že efektivní moment setrvačnosti  $I_e$  dle Benmokrana [ 12 ] po překonání kritického momentu na mezi vzniku trhlin dosahuje nejnižších hodnot z prezentovaných předpisů. Přechod z momentu setrvačnosti neporušeného průřezu  $I_g$  na trhlinou porušený průřez je v tomto případě také nejrychlejší, neboť vykazuje prudký pokles (skok) hned po překročení kritického momentu. Tento skok je zapříčiněn součinitelem  $\beta_0$  ve vzorci ( 5.24 ). Na rozdíl od

křivek dle ACI 440.1R-06 [ 4 ] a M. Ju [ 10 ] efektivní moment setrvačnosti  $I_e$  dle Benmokrana [ 12 ] nekonverguje k momentu setrvačnosti trhlinou porušeného průřezu  $I_{cr}$  ( $I_{cr} = 1,835 \cdot 10^{-4} m^4$ ) ale dosahuje hodnot ještě nižších. Nižší hodnoty efektivního momentu setrvačnosti jsou zapříčiněny součinitelem  $\alpha_0$  ve vzorci ( 5.24 ), který redukuje spolupůsobení výztuže s betonem.

Křivka založená na principu z americké normy ACI 440.1R-15 [ 5 ] (se zavedení odvozeného vztahu ( 6.2 ) pro třibodový ohyb) vykazuje totožnou změnu tuhosti jako křivka dle ČSN EN 1992-1-1 [ 1 ]. Vypočtené průhyby dle těchto dvou předpisů jsou shodné až do zatížení cca 120 kN. Odchylka při zatížení 150 kN činí pouze 1 %.

Norma ACI 440.1R-06 [ 4 ] nevykazuje tak výrazné změkčení bezprostředně po vzniku trhlin. Při nižším zatížení je dosahováno nejmenších průhybů ze všech předpisů, jedná se tedy v této části o nejméně konzervativní přístup. S rostoucím zatížením ale v porovnání s ostatními přístupy výrazněji klesá efektivní moment setrvačnosti a tím pádem také tuhost průřezu.

Velmi podobný vývoj průhybu v závislosti na zatížení mají křivky podle kanadské normy CSA-S806-12 [ 8 ] a podle jihokorejské studie [ 10 ]. Nelineární závislost mezi silou a průhybem odezní kolem zatížení 80 kN, od této hodnoty se tuhost průřezu jeví jako konstantní.

Při konečném zatížení 150 kN dosahují nejmenších průhybů (cca 12,6 mm) přístupy obou amerických norem [ 4 ] a [ 5 ] a také evropská norma [ 1 ]. Nepatrně větší průhyby (cca 13,1 mm) vykazují přístupy kanadské normy [ 8 ] a přístup ze studie [ 10 ]. Největšího průhybu (15,7 mm) je dosaženo při použití vztahů dle Benmokrana [ 12 ].

V rámci mezního stavu použitelnosti (konkrétně mezního stavu přetvoření) je průhyb nosníku vyztuženého kompozitní výztuží omezen obdobně jako v případě nosníku vyztuženého ocelovou výztuží. K dispozici jsou dvě limitní hodnoty – dle evropské normy [ 1 ] je limitní průhyb  $1/500$  rozpětí a dle amerických předpisů [ 4 ] a [ 5 ], stejně jako dle kanadské normy [ 8 ], je limitní průhyb  $1/480$  rozpětí. Obě tyto hodnoty ( $l/500 = 5,7 mm$  a  $l/480 = 5,94 mm$ ) jsou zaneseny do graf. 6.7. Na rozdíl od nosníku s ocelovou výztuží (kap. 6.2), je v případě varianty s FRP výztuží limitních hodnot průhybu dosaženo dříve, než je dosaženo mezního stavu únosnosti nosníku.

## 7. EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST

Experimenty, které tato diplomová práce zpracovává byly provedeny v rámci projektu „*TAČR FW01010520 - Vývoj ohýbané kompozitní výztuže pro environmentálně exponované betonové konstrukce*“. Projekt se zabývá stanovením smykové odolnosti prvků vyztužených ocelovou a kompozitní GFRP výztuží v různých kombinacích podélné a smykové výztuže. Pro účely této diplomové práce byla použita data z experimentů na prvcích pouze s podélnou výztuží ve dvou variantách – ocelová výztuž a kompozitní GFRP výztuž. Cíle projektu „*TAČR FW01010520*“ se neshodují s cíli této práce. Cílem této práce je porovnat vztahy pro výpočet průhybu konstrukce vyztužené kompozitní výztuží s reálnými výsledky zkoušek a poukázat na výstižnost vybraných přístupů. Je proto potřeba vyhodnotit průhyby testovaných vzorků a připravit je pro účely porovnání.

### 7.1. ZKUŠEBNÍ VZORKY

Pro účely experimentu v rámci projektu „*TAČR FW01010520 - Vývoj ohýbané kompozitní výztuže pro environmentálně exponované betonové konstrukce*“ byla navržena zkouška prostého nosníku se zatížením působícím v polovině rozpětí, tzv. tříbodový ohyb. Zkušební vzorky svými rozměry, vyztužením, materiálovými charakteristikami i způsobem zatěžování odpovídají vzorku použitým při teoretickém stanovení průhybu dle vybraných přístupů, viz. kapitola 6. Rozměry zkoušených nosníků jsou 0,22 m x 0,41 m x 3,85 m. Předmětem této práce jsou dva vzorky lišící se svým vyztužením<sup>1</sup>:

- **Vzorek A** – prvek s ocelovou podélnou výztuží třídy B500B, šest prutů průměru 25 mm (6Ø25), v rámci experimentu značen B500B+0;
- **Vzorek B** – prvek s kompozitní GFRP podélnou výztuží, pět prutů průměru 18 mm (5Ø18), v rámci experimentu značen GFRP+0.

Jak bylo zmíněno v kapitole 2 této práce, vlastnosti kompozitní výztuže jsou závislé na její výrobě a složení. V tomto případě nosnou složku FRP výztuže tvoří skleněná vlákna typu E-sklo, vlákna 2400 tex. Pojivová složka je tvořena epoxidovou pryskyřicí. Povrchová úprava, ovlivňující především soudržnost s betonem, je tvořena ovinutím kevlarovým provázkem a opískováním.

Geometrie a schéma vyztužení testovaných vzorků je ve shodě s analytickou studií této práce a je vyobrazeno na obr. 6.1. Materiálové charakteristiky výztuže byly převzaty z předešlých etap projektu a jsou shrnuty v tab. 7.1. Materiálové vlastnosti betonu byly zjištěny experimentálně a jsou uvedeny v tab. 7.2. Podle střední hodnoty betonu v tlaku byl beton zatříděn do třídy C40/50.

---

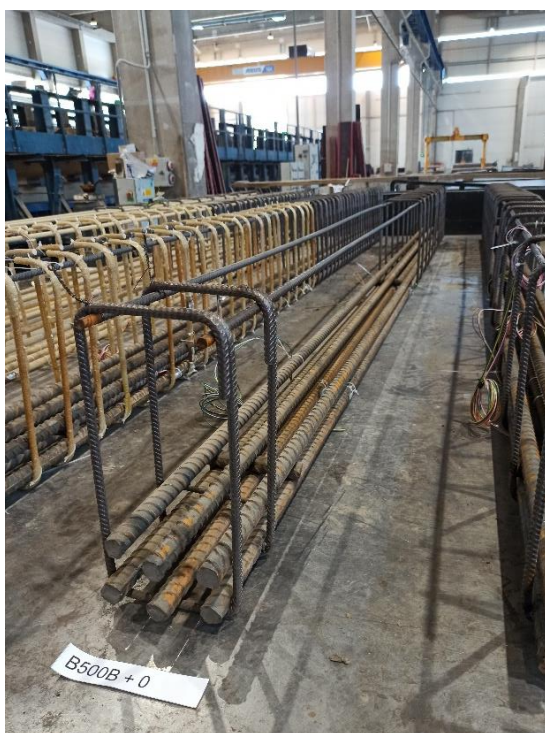
<sup>1</sup> Návrh vzorků nebyl předmětem této práce, rozměry, použitý materiál i vyztužení byly převzaty z řešení projektu „*TAČR FW01010520*“ [ 19 ]

tab. 7.1: materiálové charakteristiky výztuže uvažované při experimentu (převzatu z [ 19 ])

označení	B500B	GFRP Ø18
mez kluzu/pevnosti v tahu [MPa]	550	1133,8 ± 83,56
modul pružnosti v tahu [GPa]	199 ± 7,67	48,59 ± 1,93

tab. 7.2: materiálové charakteristiky betonu zjištěné experimentálně (převzatu z [ 19 ])

krychelná pevnost v tlaku $f_{c,cube}$ [MPa]	54,8
pevnost v příčném v tahu $f_{ct}$ [MPa]	4,1
modul pružnosti $E_{cm}$ [GPa]	29,9



obr. 7.1: armokoš – vzorek A [ 19 ]



obr. 7.2: armokoš – vzorek B [ 19 ]

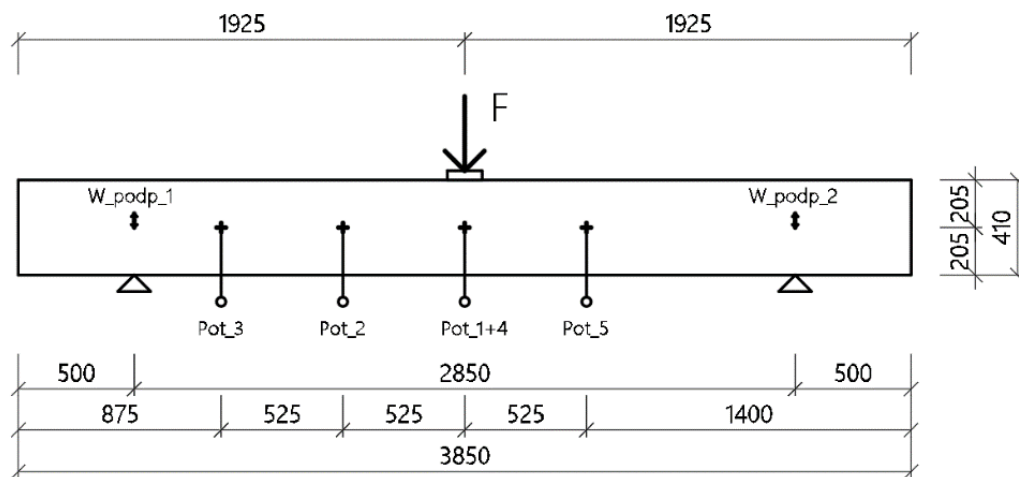
## 7.2. PROVÁDĚNÍ EXPERIMENTU

Vzorky byly zatěžovány pomocí zkušebního rámu, který tvoří ocelové sloupy a ocelový příčník, na kterém byl osazen hydraulický válec pro vnášení zatížení. Uložení nosníku je realizováno na ocelových podporách přes ocelové roznášecí desky, na kterých jsou pro vyrovnání nerovností umístěny gumové destičky. Zatížení je vnášeno prostřednictvím hydraulického válce pomocí kompresoru uprostřed rozpětí (tzn. třibodový ohyb) přes roznášecí ocelovou desku o rozměrech 0,22 m x 0,1 m. Stejně jako nad podporami je mezi ocelovou desku umístěnou v místě vnášení zatížení a zkušební vzorek vložena gumová destička pro vyrovnání nerovností. Hydraulický válec umožňuje plynulé zatěžování až do porušení vzorku. Vzorky byly zatěžovány silově.

Oba zkušební vzorky byly osazeny řadou snímačů popisujících chování vzorků z hlediska posunů, náklonů a přetvoření. V průběhu zkoušky byla snímána velikost působící síly hydraulického válce, kombinace potenciometrů a indukčních snímačů

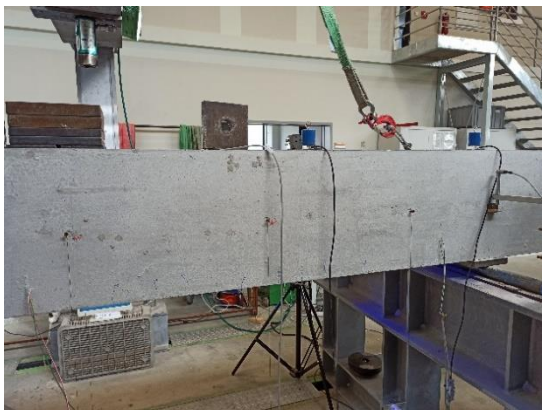
dráhy zaznamenávala svislé deformace, náklon vzorku byl měřen pomocí inklinometrů, tenzometry snímaly přetvoření v kritických místech prvku (především přetvoření na výztuži, ale také přetvoření tlačného povrchu betonu) a videoextenzometr zajišťoval plošné snímání kritické oblasti. Potenciometry byly rozmístěny po délce nosníku ve vzdálenostech 0,475 m, 0,95 m, 1,425 m a 1,9 m od podpory. V polovině rozpětí, tedy 1,425 m od podpory, byly snímače zdvojeny, na každé straně nosníku jeden. Kromě průhybu na indikovaných místech nosníku byl také měřen svislý posun nosníku nad podporami. Hodnoty z těchto snímačů značí dosednutí nosníku na podpory a následné otlacení podporových destiček. Je tak možné naměřené hodnoty průhybu po délce nosníku očistit o vliv dosednutí a otlacení.

Pro účely této práce byly použity hodnoty z potenciometrů (značeno Pot) a indukčních snímačů dráhy (značeno W\_podp). Jejich rozmístění při zkoušce je naznačeno na obr. 7.3.

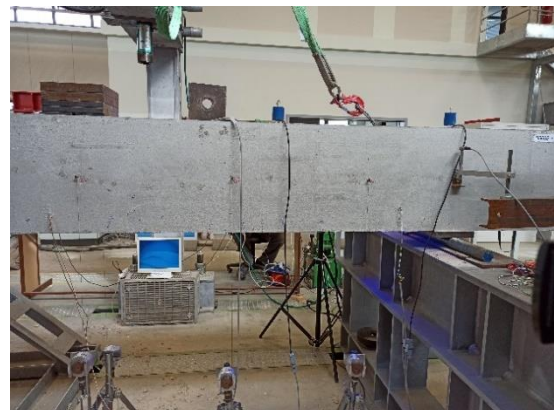


obr. 7.3: schéma rozmístění snímačů

Všechny zkoušky byly prováděny ve výzkumném centru AdMas. Po osazení nosníku na ocelové podpory byly na nosník osazeny také vnější snímače. Po kontrole funkčnosti měřících zařízení započalo zatěžování nosníku. Celkový pohled na zatěžovací zkoušky a osazení snímačů vyobrazují obr. 7.4 až obr. 7.7.



obr. 7.4: zatěžovací zkouška – vzorek A [ 19 ]



obr. 7.5: osazení snímačů – vzorek A [ 19 ]



obr. 7.6: zatěžovací zkouška – vzorek B [ 19 ]



obr. 7.7: osazení snímačů – vzorek B [ 19 ]

### 7.3. VÝSLEDKY EXPERIMENTU

U obou vzorků došlo z počátku ke vzniku a rozvoji ohybových trhlin. S rostoucím zatížením přecházely ohybové trhliny v trhliny smykové. K porušení prvků došlo v důsledku rozvoje smykové trhliny vlivem příčných tahů v tlačené diagonále a současnému drcení tlačeneho betonu při horním povrchu nosníku vlivem dosažení pevnosti betonu v tlaku v místě vnášení zatížení.

#### 7.3.1. VZOREK A

Prvek s ocelovou podélnou výztuží neprokázal výrazné změkčení po vzniku ohybových trhlin, okamžik vzniku trhlin tedy není patrný z grafu vyjadřující závislost průhybu a síly (graf. 7.1). První vizuálně zaznamenaná trhlina se na nosníku objevila při zatížení cca 50 kN. Tomuto zatížení odpovídá průhyb v polovině rozpětí 1,3 mm a napětí ve výztuži 31 MPa.<sup>2</sup>

K porušení došlo vlivem překročení maximální tlakové únosnosti betonu v blízkosti místa zatěžování a rozvojem smykové trhliny vlivem příčných tahů v tlačené diagonále. Smyková trhlina se rozvíjela od břemene pod určitým úhlem ke spodnímu povrchu nosníku. Maximální síla, které bylo dosaženo, je 285,7 kN. Této síle odpovídá průhyb 7,9 mm uprostřed rozpětí a přetvoření 1400  $\mu\text{m}/\text{m}$  ve výztuži, čemuž odpovídá 280 MPa. Výztuž je tedy využita na cca 50 %.

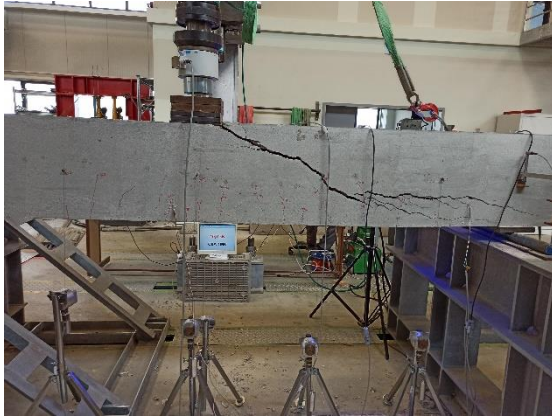


obr. 7.8: vznik a rozvoj trhlin – vzorek A [ 19 ]



obr. 7.9: rozvoj trhlin – vzorek A [ 19 ]

<sup>2</sup> Uvedené hodnoty výsledků vzorků A i B jsou naměřené veličiny, tzn. bez očištění o dosednutí na podpory atp.



obr. 7.10: porušení nosníku – vzorek A [ 19 ]

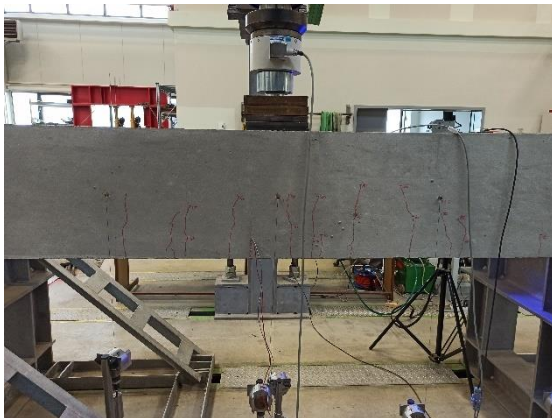


obr. 7.11: detail porušení nosníku – vzorek A [ 19 ]

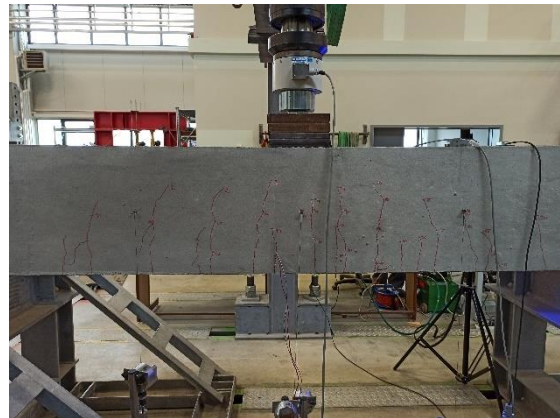
### 7.3.2. VZOREK B

U nosníku s kompozitní podélnou výztuží se na hodnotách průhybu významně projevily vznik první ohybové trhliny a s tím související změkčení průřezu. První trhliny vznikly při síle cca 40 kN. Této síle odpovídá průhyb uprostřed rozpětí 1,3 mm a napětí ve výztuži 146 MPa. Rozvoj ohybových trhlin měl za účinek rychlejší nárůst průhybu, se vznikem prvních trhlin se tedy změnil sklon křivky vystihující závislost průhybu a síly (graf. 7.2).

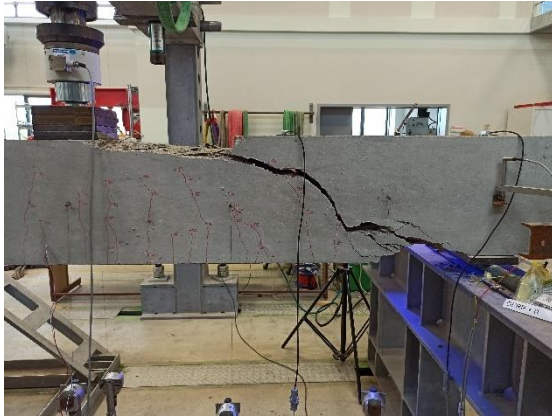
Stejně jako u vzorku A, i zde došlo k vyčerpání tlakové únosnosti betonu v místě zatížení a k rozvoji smykové trhliny vlivem příčných tahů. Smyková trhlina měla v tomto případě strmější sklon než v případě ocelové výztuže (viz obr. 7.14 a obr. 7.10). Maximální síla, které bylo dosaženo, je 150,7 kN a odpovídající průhyb je 17,8 mm. Přetvoření ve výztuži v okamžiku maximální síly činí 6229  $\mu\text{m/m}$ , napětí ve výztuži je tedy 302,7 MPa. Výztuž je využita na 27 % ze své tahové pevnosti 1133,8 MPa.



obr. 7.12: vznik a rozvoj trhlin – vzorek B [ 19 ]



obr. 7.13: rozvoj trhlin – vzorek B [ 19 ]



obr. 7.14: porušení nosníku – vzorek B [ 19 ]



obr. 7.15: detail porušení nosníku – vzorek B [ 19 ]

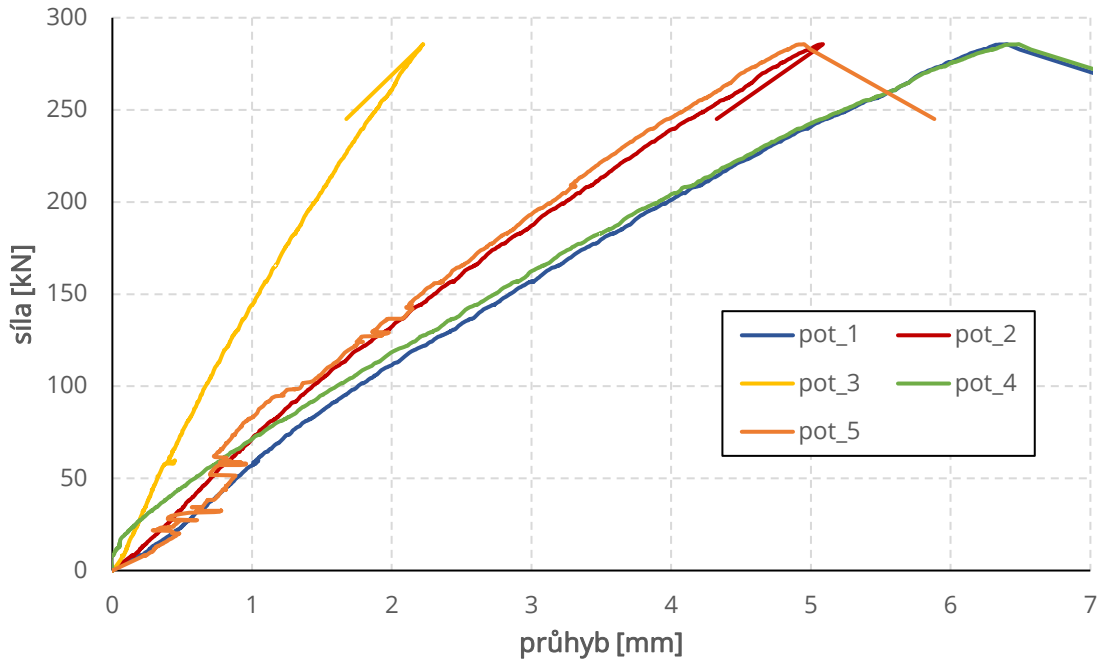
## 7.4. VYHODNOCENÍ EXPERIMENTU

Data získaná z použitých snímačů byla zpracována a vyhodnocena v programu Excel. Hodnoty z pěti dostupných potenciometrů (viz obr. 7.3) byly při prvotní analýze v případě nutnosti očištěny o výkyvy způsobené vnějšími vlivy. V další fázi byly výsledné průhyby po délce nosníku opraveny o vliv sednutí na podpory, které udávají data z indukčních snímačů dráhy nad podporami. Tyto hodnoty pak byly zaneseny do grafu v závislosti na vnášené zatěžovací síle.

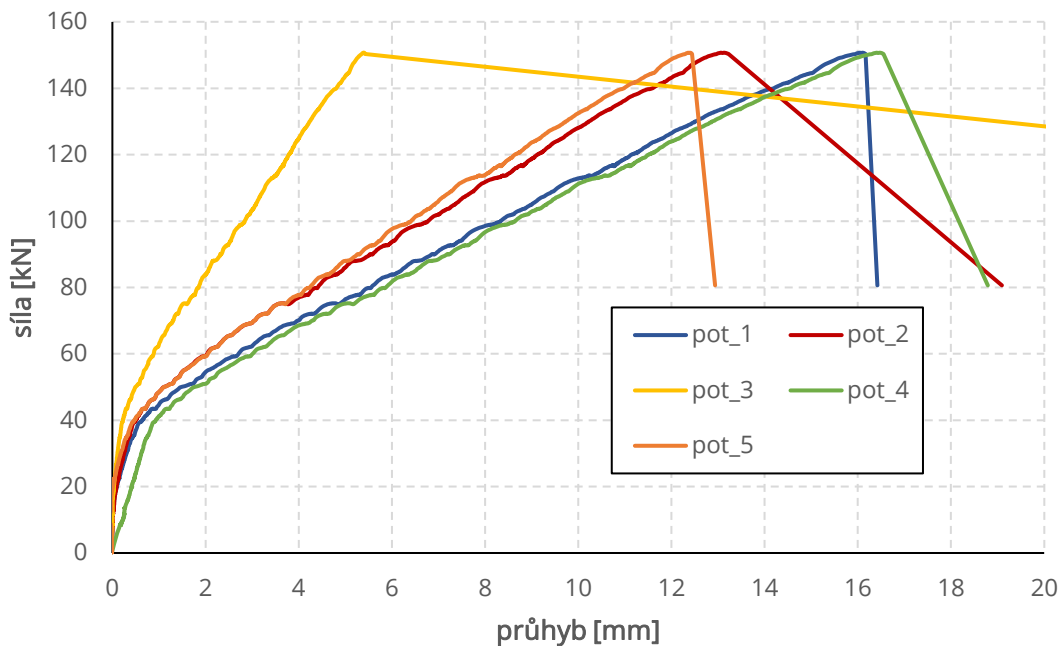
**Vzorek A** vyztužený klasickou ocelovou výztuží vykazuje po celou dobu zatěžování obdobnou tuhost. Na počátku zatěžování (cca do síly 10 kN) je možné pozorovat vliv dosednutí vzorku na podpory, dotlačení podpor a všech pomocných zkušebních prvků (podložky, ocelový rám, atp.). Po odeznění vlivu dotlačení je možné pozorovat lineární nárůst průhybu a síly. Na první pohled nelze z graf. 7.1 identifikovat okamžik vzniku trhlin, neboť po jeho dosažení nedochází k výraznému změkčení průřezu. Tuto skutečnost lze přisuzovat vysokému stupni vyztužení vzorku. V průběhu zkoušky díky vizuální kontrole nosníku při zatěžování byl zaznamenán vznik trhlin při zatížení cca 50 kN. Maximální síla, které bylo dosaženo, a byla doprovázena smykovým porušením, je 285,7 kN a po zprůměrování hodnot v polovině rozpětí jí odpovídá průhyb 6,45 mm (Pot\_1 naměřil 6,4 mm a Pot\_4 naměřil 6,49 mm).

U **vzorku B** vyztuženého FRP výztuží je na první pohled viditelný vznik trhlin kolem síly 40 kN. Při tomto zatížení bylo dosaženo tahové pevnosti betonu a tím pádem i kritického momentu na mezi vzniku trhlin. Od tohoto bodu docházelo k rozvoji trhlin a průřez už nepůsobil jako celistvý ale pouze jeho tlačná část společně s výztuží. Průhyb od této chvíle s rostoucím zatížením narůstá mnohem rychleji, což vypovídá také o menší tuhosti průřezu. Síla, při které došlo ke smykovému porušení prvku, je 150,7 kN. Maximální síle odpovídá průměrný průhyb v polovině rozpětí 16 mm (Pot\_1 naměřil 15,82 mm a Pot\_4 naměřil 16,17 mm).



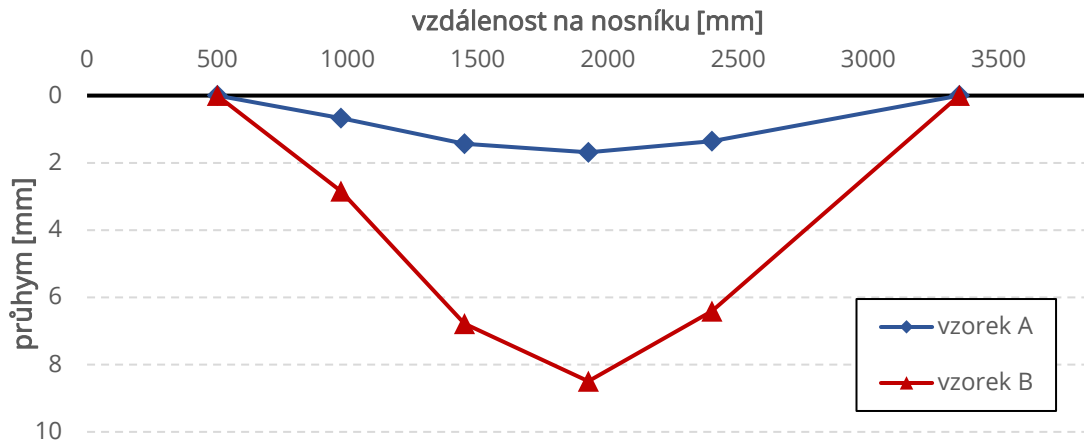


graf. 7.1: závislost síly a průhybu – vzorek A



graf. 7.2: závislost síly a průhybu – vzorek B

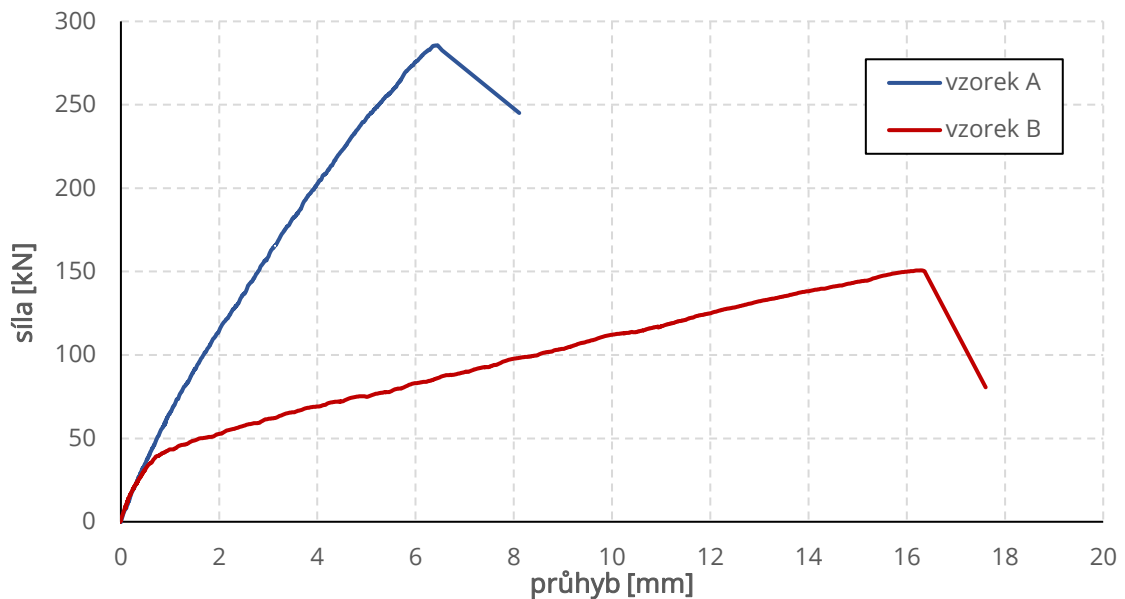
Potenciometry z poloviny rozpětí (Pot\_1 a Pot\_4) byly pro následující vyhodnocování zprůměrovány, čímž se eliminovalo natočení nosníku kolem své podélné osy, které mohlo být způsobeno počátečními imperfekcemi a odlišným sedáním v podporách. Průhyby se viditelně liší v závislosti na umístění snímače na nosníku. Nejmenší průhyby jsou odečteny ze snímače nejbližší podpory a největší průhyby jsou v polovině rozpětí, tedy pod břemenem. Z hodnot po délce nosníku je možné sestavit křivku průhybu pro konkrétní zatížení, viz graf. 7.3. Pro správnou porovnatelnost obou vzorků bylo pro oba vzorky zvoleno zatížení 100 kN.



graf. 7.3: průhyb nosníku při zatížení 100 kN

Z grafu je patrné, že průhyb vzorku B, který je vyztužený kompozitní výztuží, dosahuje několikanásobně většího průhybu než vzorek A vyztužený ocelovou výztuží (rozdíl činí až 400 %). Je to dáno především vyšším stupněm vyztužení v případě ocelové výztuže a také řádově nižším modulem pružnosti kompozitní výztuže. Jelikož se jedná o symetrické zatěžovací schéma s osou symetrie v polovině rozpětí, je předpokládáno, že průhyb bude taktéž víceméně symetrický. Toto je potvrzeno jak v graf. 7.1 a graf. 7.2 podobností křivek z potenciometrů Pot\_2 a Pot\_5, tak i průběhem průhybové křivky v graf. 7.3.

Pro účely práce je nejdůležitější průhyb uprostřed nosníku čili pod břemenem, neboť toto místo a jeho průhyb je zkoumán jak v analytické části, tak i v následné nelineární analýze. Je to také maximální průhyb nosníku, a právě tato hodnota je rozhodující při návrhu konstrukcí na mezní stav použitelnosti. Jak již bylo zmíněno výše, v místě pod břemenem byly osazeny 2 snímače a jejich zprůměrováním bylo docíleno eliminace naklonění nosníku. Průměrná hodnota z potenciometrů Pot\_1 a Pot\_4 tak bude vstupovat do následujících srovnání a vyhodnocení.

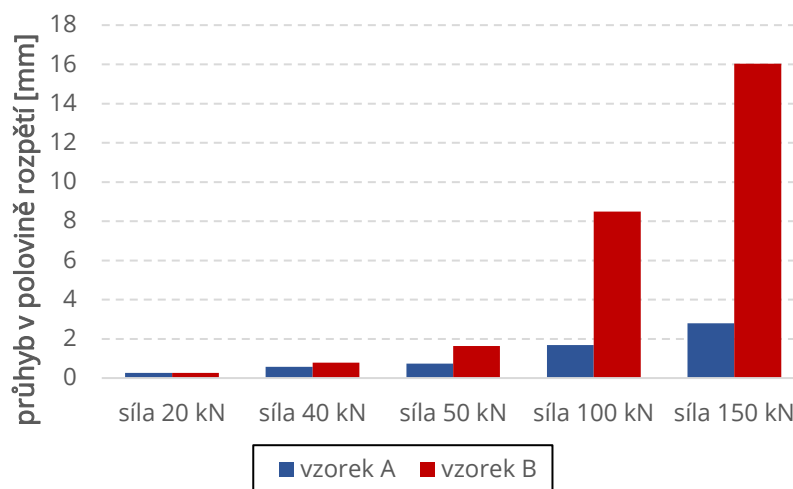


graf. 7.4: závislost síly a průhybu v polovině rozpětí - srovnání vzorků

Srovnání obou vzorků a jejich průhybu v závislosti na zatěžovací síle je znázorněno na graf. 7.4. Do zatížení kolem 45 kN jsou křivky z obou vzorků téměř totožné. Do vzniku trhlin na vzorku B vyztuženého kompozitní výztuží tak oba nosníky vykazují obdobnou tuhost. Po vzniku ohybových trhlin dochází u vzorku B, na rozdíl od vzorku A, k výraznému naklonění křivky směrem doprava. Porušený průřez s kompozitní výztuží tak má výrazně menší tuhost než průřez s ocelovou výztuží. Tento fakt je možné přisoudit jak menší ploše použité kompozitní výztuže (plocha kompozitní výztuže  $A_f = 12,72 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ , plocha ocelové výztuže  $A_s = 29,45 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ), tak řádově nižšímu modulu pružnosti FRP výztuže (modul pružnosti kompozitní výztuže  $E_f = 48,6 \text{ GPa}$ , modul pružnosti výztuže  $E_s = 200 \text{ GPa}$ ).

tab. 7.3: srovnání průhybu v polovině rozpětí pro různá zatížení

vzorek		průhyb v polovině rozpětí [mm]				
		síla 20 kN	síla 40 kN	síla 50 kN	síla 100 kN	síla 150 kN
vzorek A		0,264	0,58	0,74	1,69	2,79
vzorek B		0,258	0,79	1,63	8,49	16,03
rozdíl	abs.	-0,006	0,21	0,89	6,81	13,23
	%	2,31	36,74	119,91	403,54	473,63



graf. 7.5: srovnání průhybu v polovině rozpětí pro různé zatížení

## 8. NELINEÁRNÍ ANALÝZA

Ve většině případů se při návrhu jednoduchých konstrukcí vychází z výpočtů založených na lineárním řešení. Lineární teorie pružnosti vychází z několika předpokladů jako jsou např. malé posuvy, malé přetvoření, platnost Hookova zákona, izotropní chování a homogenita materiálu. Reálné chování konstrukce je však lépe popsatelné skrze nelineární analýzu, při které tyto předpoklady nemusí platit.

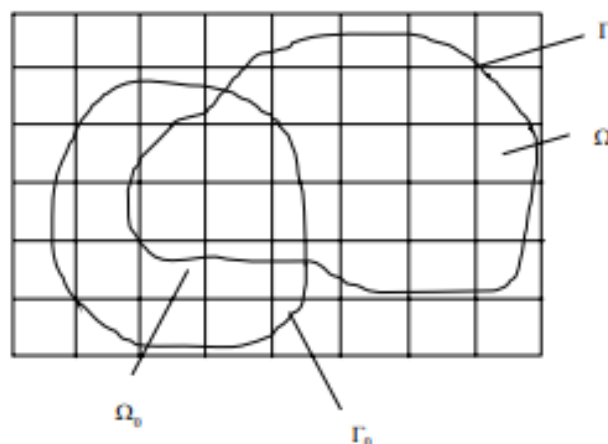
Je možné rozlišit dva typy nelinearity dle [ 15 ]:

- geometrická nelinearita – definovaná geometrickými rovnicemi, tj. vztahy mezi posunutím a přetvořením;
- materiálová nebo fyzikální nelinearita – definovaná fyzikálními vztahy mezi napětím a přetvořením.

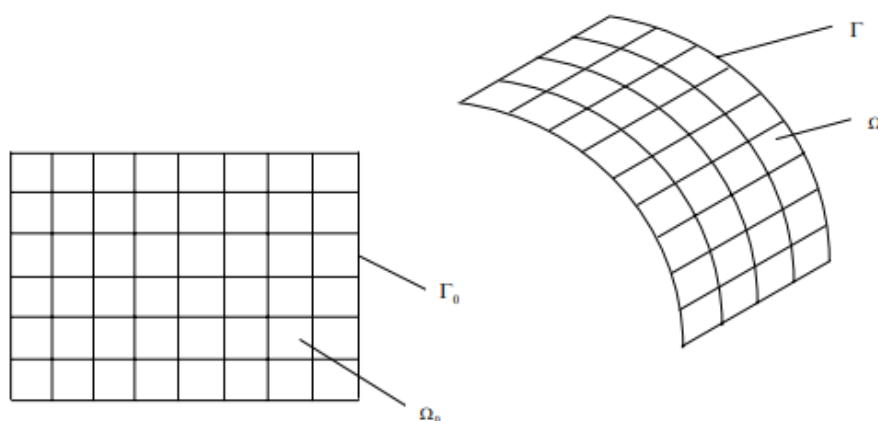
Na rozdíl od lineární úlohy hraje v případě nelineárního řešení roli závislost na posloupnosti stavů, kterými konstrukce prošla od počátku děje. Je proto potřeba provést časově závislou analýzu, v čase se totiž mění jak materiálové charakteristiky, tak i geometrie konstrukce.

V praxi se výpočet nelineární úlohy nejčastěji provádí pomocí metody konečných prvků (MKP; *Finite Element Method, FEM*). Základní myšlenkou metody konečných prvků je rozdělení tělesa na konečný počet menších částí – elementů, které tvoří síť konečných prvků. Každý element je charakterizován počtem a polohou svých uzlů. V jednotlivých uzlech jsou dopočítávány neznámé parametry (např. deformace, síly, napětí) ze kterých jsme schopni stanovit chování celého prvku. Hustota a tvar jednotlivých elementů proto ovlivňuje přesnost řešení. S rostoucím počtem konečných prvků se zpřesňuje výsledek.

Při řešení geometrické nelinearity rozlišujeme prvky a síť prvků na geometricky neměnné (Eulerovské) a prvky které se mohou deformovat společně s hmotou (Lagrangeovské). V mechanice těles je vhodnější používat Lagrangeovské síť, tedy prvky, jež se deformují současně s pohybem hmoty. Eulerovská síť se naopak využívá v mechanice plynů nebo kapalin.



obr. 8.1: Eulerovská síť konečných prvků; převzato z [ 15 ]



obr. 8.2: Lagrangeovská síť konečných prvků; převzato z [ 15 ]

## 8.1. VÝPOČETNÍ SOFTWARE

Pro vytvoření výpočetního modelu byl zvolen software ATENA, který umožňuje nelineární analýzu betonových konstrukcí pomocí metody konečných prvků. Konstrukci není nutně potřeba analyzovat pouze nelineárně, program umožňuje při splnění určitých podmínek počítat také za použití zjednodušených, případně i lineárních vztahů. Nelineární výpočet je klasifikován podle typu nelineárního chování, buďto je nelinearita na straně materiálu, nebo na straně geometrie, případně kombinace obou případů.

Software využívá Lagrangeovskou síť konečných prvků, prvky tedy mění svou polohu v závislosti na deformující se konstrukci. Rozlišujeme dva způsoby Lagrangeovy formulace podle toho, v jaké konfiguraci je úloha popsána. Pokud je úloha vztažena k původním (materiálovým) nedeformovaným souřadnicím jedná se o formulaci „*Total Lagrangian*“. Je-li úloha vztažena k posunutým (prostorovým) deformovaným souřadnicím jedná se o formulaci „*Updated Lagrangian*“. ATENA využívá formulaci *Updated Lagrangian*.

### 8.1.1. ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

Software umožňuje řešit soustavu nelineárních rovnic několika metodami. Všechny z metod jsou založeny na řešení soustavy lineárních algebraických rovnic zapsaných ve formě

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b} \quad (8.1)$$

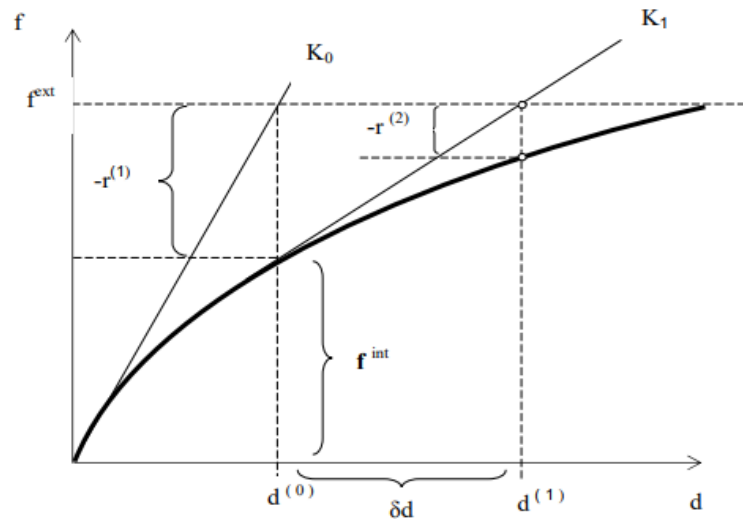
#### Ozn. Popis

$A$	globální matice soustavy
$\underline{x}$	vektor neznámých (obvykle uzlové parametry deformace)
$\underline{b}$	vektor pravé strany (obvykle uzlové síly)

Soustavu rovnic nelze řešit přímo, je proto potřeba použít iterační postup, který je založen na postupném zpřesňování řešení. Postup se opakuje, dokud není dosaženo požadované přesnosti vyjádřené odchylkou dvou následujících kroků, případně do dosažení požadovaného počtu kroků iterace. Každý iterační krok je linearizován.

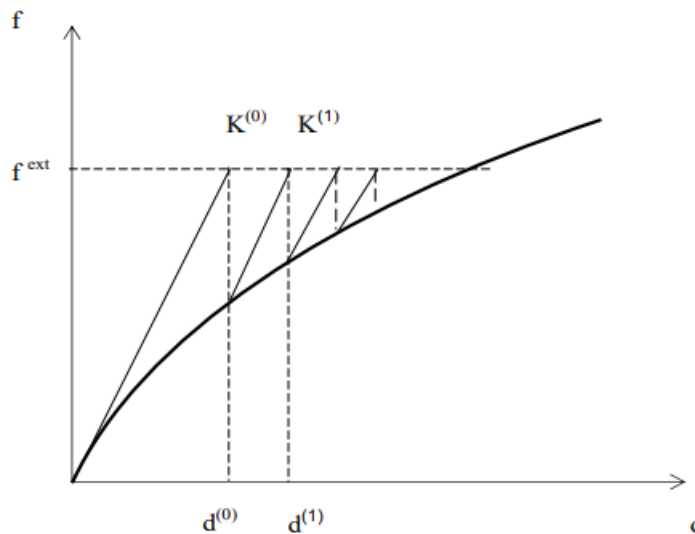
K řešení jednotlivých zatěžovacích kroků je možné v programu ATENA použít metodu Newton-Raphson, modifikovanou metodu Newton-Raphson nebo metodu Arc-Length.

Metoda Newton-Raphson vyžaduje sestavení levé strany rovnice v každém iteračním kroku. Pro každý zatěžovací krok je matice tuhosti vypočtena z hodnot získaných v kroku předchozím. Metoda pracuje s tečnou maticí tuhosti, je proto potřeba znát první derivaci funkce, tedy směrnici tečny, a počáteční hodnotu iterace která právě vychází z předešlé iterace. Princip Newton-Raphsonovy metody je graficky znázorněn na následujícím obrázku:



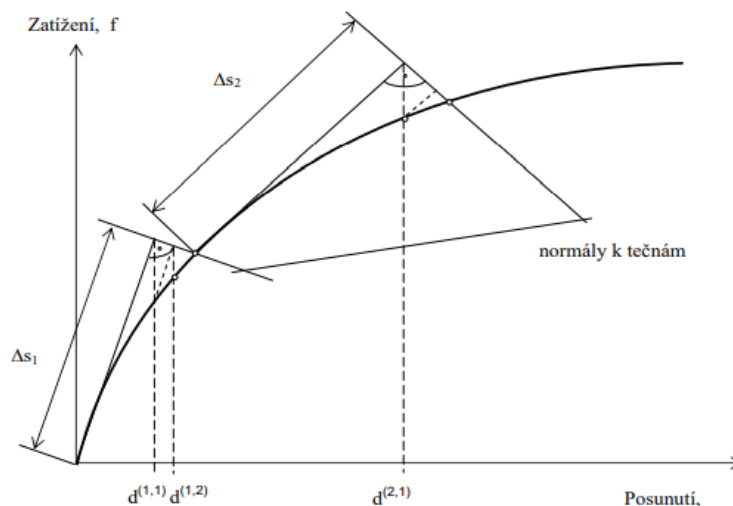
obr. 8.3: princip Newton-Raphsonovy metody; převzato z [ 15 ]

Modifikovaná metoda Newton-Raphson nevyžaduje sestavení matice tuhosti pro každý iterační krok a využívá tečnou matici tuhosti sestavenou pro první iterační krok i v ostatních iteracích. Obecně tak tato metoda vyžaduje mnohem více iterací než nemoifikovaná metoda, nicméně iterace jsou mnohem rychlejší což vede ke značné časové úspoře. Princip modifikované Newton-Raphsonovy metody je graficky znázorněn na následujícím obrázku:



obr. 8.4: princip modifikované Newton-Raphsonovy metody; převzato z [ 15 ]

Metoda Arc-Length (Riksova metoda) je efektivní metodou i v případech, kdy předchozí metody mohou selhat, jako například v tzv. limitních bodech, tj. bodech s vodorovnou nebo svislou tečnou na pracovním diagramu. Tato metoda „sleduje“ pracovní diagram po stejných úsecích. Matice tuhosti může být počítána zvlášť pro každý iterační krok, stejně jako u Newton-Raphsonovy metody, nebo může být použita počáteční matice tuhosti z první iterace pro všechny následující iterace, tak jako u modifikované Newton-Raphsonovy metody.



obr. 8.5: princip metody Arc-Length; převzato z [ 15 ]

Řešení pro případ této práce bylo založeno na metodě Newton-Raphson.

## 8.2. VÝPOČETNÍ MODEL

Model byl připraven pomocí doplňkového programu GiD verze 14.0.6. Model se skládá ze 4 částí – beton, jednotlivé pruty výztuže, ocelové podložky a gumové podložky. Každá z položek má nadefinované své specifické materiálové vlastnosti a pracovní diagram. Byly vytvořeny modely ve dvou variantách vyztužení. První model je vyztužen ocelovou výztuží a druhý model FRP výztuží (schéma vyztužení viz obr. 6.1).

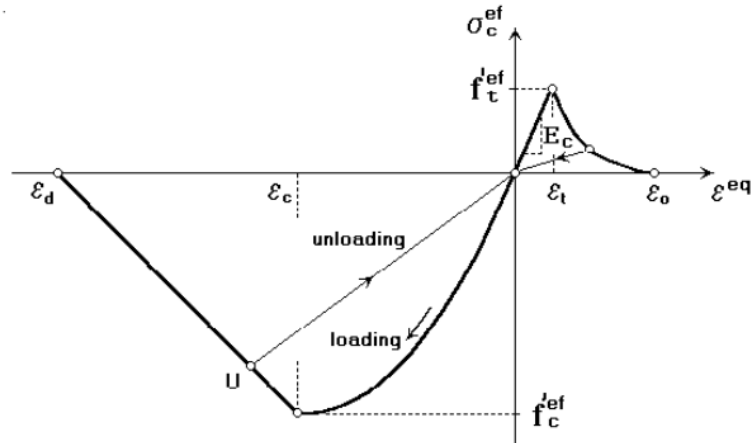
### 8.2.1. MATERIÁLOVÉ VLASTNOSTI JEDNOTLIVÝCH PRVKŮ

Je snahou, aby se vytvořený výpočetní model svými okrajovými podmínkami co nejvíce podobal reálnému působení prvku, a proto materiálové vlastnosti zavedené do modelu musí odpovídat skutečným materiálům. Vlastnosti skutečných materiálů byly získány z doprovodných zkoušek. Do modelu byly zavedeny střední hodnoty.

#### 8.2.1.1. BETON

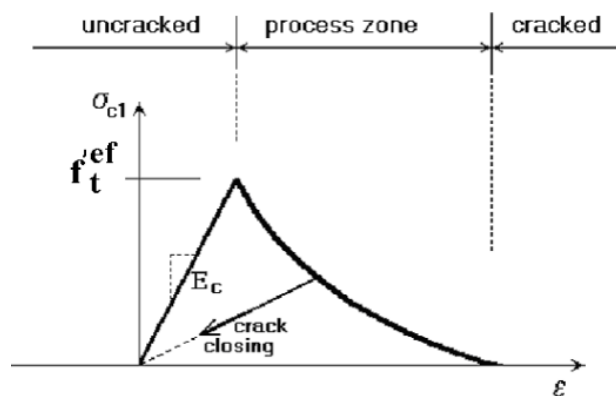
Pro betonovou část byl zvolen materiálový model *CC3DNonLinCementitious2*, křehko-plastický (lomově-plastický) model kombinující tahové (křehké, lomové) a tlakové (plastické) chování betonu. Využívá Rankinovo kritérium porušení a exponenciální změkčení. Změkčení či zpevnění plastického modelu je založeno na Menétrey-Williamově povrchu porušení.

Chování betonu v tahu a tlaku je popsáno pracovním diagramem (viz obr. 8.6), jež vyjadřuje vztah mezi přetvořením a napětím.



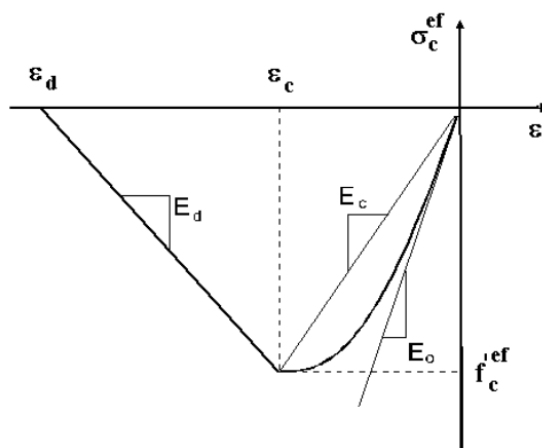
obr. 8.6: pracovní diagram pro materiálový model CC3DNonLinCementitious2; převzato z [ 16 ]

V tahu je chování betonu možné rozdělit na fázi před vznikem trhlin a po vzniku trhlin. Do vzniku trhlin, tedy do dosažení tahové pevnosti  $f_t^{ef}$ , je chování betonu idealizováno jako lineárně pružné. V další fázi dochází k rozvoji trhlin na základě předpokladu rovnoměrného šíření trhlin uvnitř materiálu.



obr. 8.7: fáze vzniku a rozvoje trhlin; převzato z [ 16 ]

V tlaku má beton plastické chování, napětí i přetvoření nelineárně narůstají až do dosažení maximální únosnosti betonu v tlaku  $f_c^{ef}$ . Po vyčerpání únosnosti v tlaku dochází k změkčení a pevnost betonu lineárně klesá.



obr. 8.8: pracovní diagram betonu v tlaku; převzato z [ 16 ]



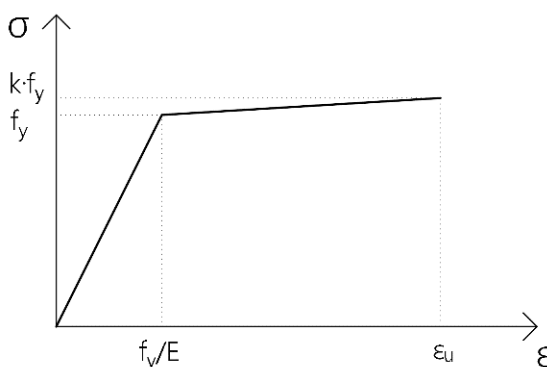
Hodnoty, které nebyly stanovené experimentem jsou pro výpočet ponechány automaticky generované pro beton C40/50, což je třída betonu, jež ve střední hodnotě nejvíce odpovídá svou válcovou tlakovou pevností experimentu. Materiálové charakteristiky, které byly stanoveny experimentálně byly upraveny tak, aby odpovídaly zkouškám. Jedná se o válcovou pevnost v tlaku a modul pružnosti.

tab. 8.1: materiálové charakteristiky betonu zjištěné experimentálně

krychelná pevnost v tlaku $f_{c,cube}$ [MPa]	54,8
dopočtené válcová pevnost v tlaku $f_c$ [MPa]	46,58
modul pružnosti $E_{cm}$ [GPa]	29,9

### 8.2.1.2. OCELOVÁ VÝZTUŽ

Výztuž byla modelována diskrétně formou konkrétních prutů. U výztuže se předpokládá pouze jednoosé namáhání a její chování může být idealizováno pomocí lineárního, bilineárního (bez nebo se zpevněním) nebo multilineárního pracovního diagramu. Za materiálový model byl zvolen model *Reinforcement* – bilineární materiálový model se zpevněním.



obr. 8.9: bilineární pracovní diagram oceli se zpevněním

Ocelová výztuž je uvažovaná třídy B500B a má následující charakteristiky:

tab. 8.2: materiálové vlastnosti ocelové výztuže

mez kluzu v charakteristické hodnotě $f_{yk}$ [MPa]	500
mez kluzu ve střední hodnotě $f_y$ [MPa]	550
modul pružnosti $E$ [GPa]	200
parametr zpevnění $k$ [-]	1,08
mez pevnosti ve střední hodnotě $f_u$ [MPa]	594

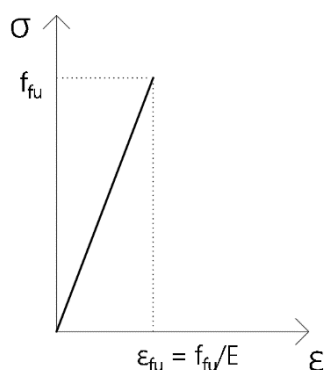
Aby výztuž mohla přenášet potřebné tahové síly je potřeba zajistit spolupůsobení výztuže s betonem. Mírou spolupůsobení betonu s výztuží je tzv. soudržnost. Použitá výztuž B500B má na povrchu žebírka, která dostatečně zabezpečují soudržnost s betonem. V modelu proto s ohledem na použitou ocelovou výztuž byla uvažovaná dokonalá soudržnost mezi ocelí a betonem.

### 8.2.1.3. FRP VÝZTUŽ

FRP výztuž byla modelována obdobně jako ta ocelová, pouze s jinými materiálovými charakteristikami. Stejně jako u oceli byl zvolen materiálový model *Reinforcement*. V případě kompozitní výztuže se jedná o zjednodušení, neboť materiálový model *Reinforcement* slouží pro izotropní materiály a kompozitní výztuž je materiál ortotropní (má různé vlastnosti v různých směrech). Diskrétní modelování výztuže a její působení pouze v podélném směru tento nesoulad se skutečností eliminuje a model *Reinforcement* je možné použít. Na rozdíl od betonářské oceli ale FRP výztuž nemá plastickou větev pracovního diagramu, proto byl lineární pracovní diagram ukončen bezprostředně po dosažení meze pevnosti  $f_{fu}$ . Materiálové vlastnosti používané FRP výztuže byly stanoveny experimentálně a jsou uvedené v následující tabulce:

tab. 8.3: materiálové vlastnosti FRP výztuže

mez pevnosti v tahu $f_{fu}$ [MPa]	1133,8
mezní přetvoření výztuže $\varepsilon_{fu}$ [-]	0,023
modul pružnosti $E$ [GPa]	48,6



obr. 8.10: pracovní diagram FRP výztuže

Podobně jako u oceli, je potřeba zajistit spolupůsobení výztuže a betonu jež je definováno soudržností. Povrch vložek z kompozitní výztuže je opatřen vrstvou křemičitého písku, tzv. popískování, v kombinaci s ovinutím provázku. Byly vytvořeny dva modely lišící se právě spolupůsobením výztuže s betonem. V prvním případě byla uvažovaná dokonalá soudržnost (obdobně jako u oceli) a v druhém případě, pro účely zpřesnění výpočtu, byla soudržnost redukována. Hodnoty byly převzaty z experimentu [ 17 ] v rámci kterého bylo provedeno několik pull-out testů. Uvažované data odpovídají excentrickým pull-out testům. Na základě těchto dat byl v programu ATENA vytvořen bond-slip diagram s následujícími body:

tab. 8.4: body bond-slip diagramu pro FRP výztuž

<i>Slip</i>	<i>Bond strength</i>
0	0
0,000275	1
0,0008	0,85
0,038	0

### 8.2.1.4. PODLOŽKY

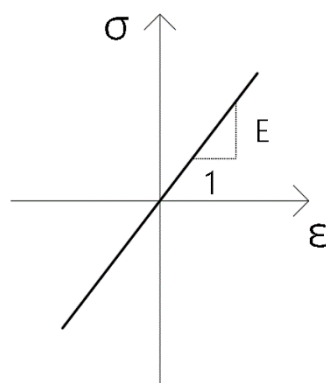
Gumové i ocelové podložky slouží k roznosu působícího zatížení tak, aby více odpovídalo realitě. Byly umístěny pod břemeno v polovině rozpětí a také v místech podpor. Tyto prvky by neměly ovlivňovat chování sledovaného nosníku a neměly by se tak podílet na jeho únosnosti. V obou případech se jedná o lineárně pružné materiály definované modulem pružnosti a Poissonovým součinitelem. Za materiálový model byl zvolen model *CC3DElastIsotropic* (stejné vlastnosti ve všech směrech).

tab. 8.5: materiálové vlastnosti gumových podložek

modul pružnosti $E$ [GPa]	1
Poissonův součinitel $\mu$ [-]	0,3

tab. 8.6: materiálové vlastnosti ocelových podložek

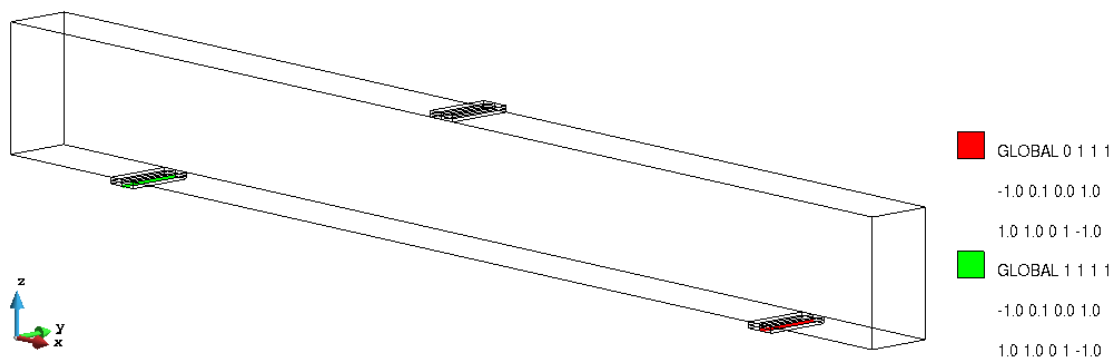
modul pružnosti $E$ [GPa]	200
Poissonův součinitel $\mu$ [-]	0,3



obr. 8.11: pracovní diagram podložek

### 8.2.2. OKRAJOVÉ PODMÍNKY

Zkoumaný nosník je uvažován jako prostě uložený, tzn. jedna podpora pevná a druhá posuvná. V první podpoře je tedy zabráněno posunu ve všech třech směrech (X, Y i Z), v druhé podpoře je povolen posun ve směru podélné osy prvku, tzn. ve směru X a je bráněno posunu ve směrech Y a Z. Podpory jsou definované přes ocelovou podložku na linii. Liniová podpora tak brání natočení kolem osy X.



obr. 8.12: grafické znázornění podepření v programu GiD

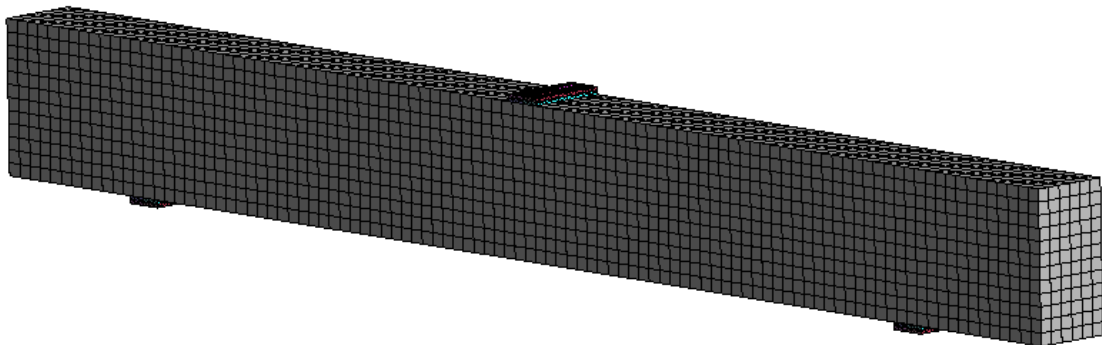
Je potřeba také nadefinovat kontakty mezi jednotlivými modelovanými objemy. Všechny potřebné kontakty byly dle potřeby uvedené do vztahu *Master – Slave* (pán – sluha). Tento vztah udává, že všechny stupně volnosti prvku s definicí *Slave* budou odpovídat stupňům volnosti prvku s definicí *Master*, jinak řečeno prvek *Slave* se deformuje podle deformace prvku *Master*.

Kontakty byly nadefinovány ve dvou úrovních, a to kontakt nosník – gumová podložka a kontakt gumová podložka – ocelová podložka. V prvním případě je *Master* nosník a gumová podložka přebírá jeho vlastnosti, je jí tudíž přisouzena vlastnost *Slave*. V druhém případě má ocelová podložka vlastnost *Master* a gumová podložka opět *Slave*.

### 8.2.3. SÍŤ KONEČNÝCH PRVKŮ – MESH

Jak již bylo zmíněno výše, nelineární výpočty jsou prováděny metodou konečných prvků, která spočívá v rozdělení tělesa na konečný počet elementů, které tvoří síť konečných prvků. Každý element je charakterizován počtem a polohou svých uzlů. Pro prostorové 3D prvky (nosník) byly zvoleny elementy typu *hexahedra* neboli šestistěny. Liniové prvky (výztuž) byly rozdělené na jednotlivé linie.

Počet prvků byl zvolen s respektem k nejmenšímu z rozměrů nosníku (šířka 0,22 m) na kterém bylo vytvořeno 6 elementů. Výslednou síť konečných prvků je možné pozorovat na následujícím obrázku:

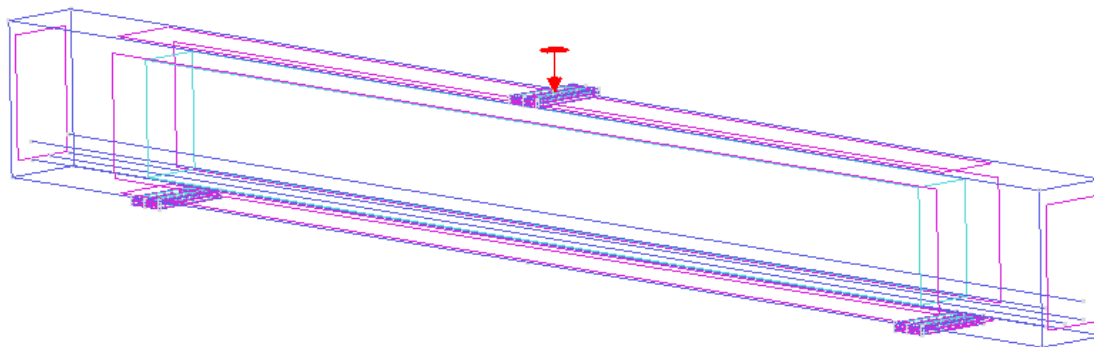


obr. 8.13: vygenerovaná síť konečných prvků v programu GiD

### 8.2.4. ZATÍŽENÍ

Nosník byl zatížen v polovině rozpětí bodovou deformací ve směru Z. Deformace působí bodově do středu ocelové podložky, přes kterou se s pomocí gumové podložky roznáší do nosníku.

Bylo zatěžováno ve dvou intervalech. První interval byl rozdělen do 60 kroků až do cílové deformace 3 mm, v každém kroku tedy bylo zatíženo 0,05 mm. V druhém intervalu bylo provedeno až 200 kroků s cílovou deformací 20 mm, deformace každého kroku tedy činí 0,1 mm.

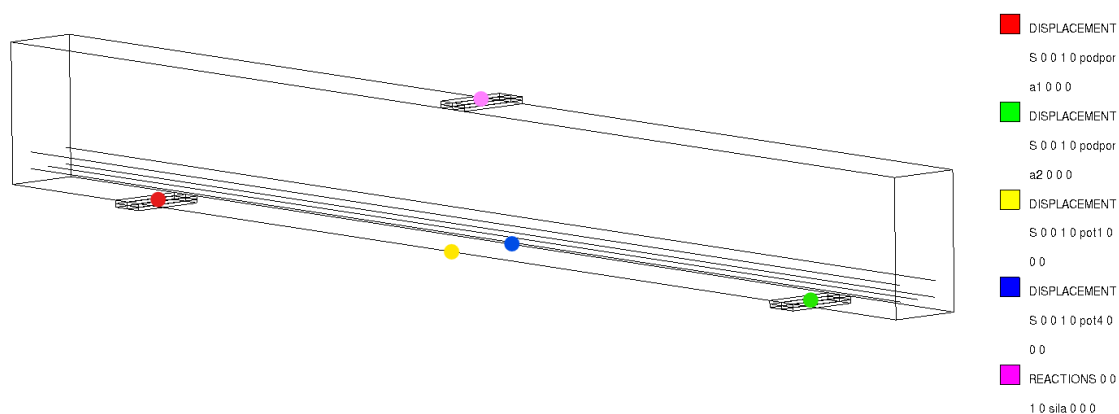


obr. 8.14: zatížení v programu GiD

V rámci prvního intervalu bylo předpokládáno překročení kritického momentu a vzniku ohybových trhlin. Pro správné popsání okamžiku vzniku trhlin byl zatěžovací krok zjemněn na 0,05 mm. Po překonání kritického momentu na mezi vzniku trhlin, a s tím související snížení tuhosti průřezu, bylo z důvodu časové náročnosti výpočtu zatěžováno v rychlejším tempu 0,1 mm/krok až do porušení prvku.

### 8.2.5. MONITORY

Pro správnou interpretaci požadovaných výstupů byl model osazen několika monitory, které snímají potřebné veličiny. Konkrétně se jedná o snímač zatěžovací síly, kterou je potřeba zaznamenat monitorem, neboť je zatěžováno deformačně a síla není přímým výstupem. Dále se jedná o monitory sledující svislé posuny jak v polovině rozpětí nosníku, tak i nad podporami. V polovině nosníku jsou snímače průhybu zdvojeny tak, aby bylo možné eliminovat případné zkroucení nosníku (obdobně jako při reálném experimentu). Nad podporami slouží snímače k následné eliminaci otláčení roznášecích desek. Rozmístění monitorů je patrné z následujícího obrázku:



obr. 8.15: rozmístění monitorů v programu GiD

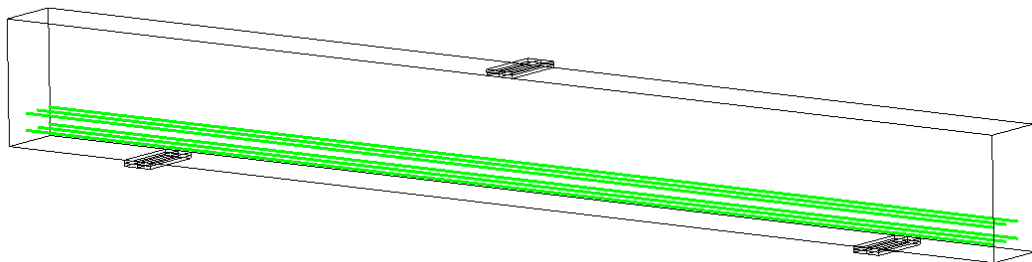
### 8.3. VÝSLEDKY NELINEÁRNÍ ANALÝZY

V programu ATENA byly vytvořeny modely ve dvou variantách vyztužení – s ocelovou podélnou výztuží, značeno OCEL A, a s kompozitní podélnou výztuží, značeno FRP B. Pro kompozitní výztuž byly vytvořeny dva modely s odlišně uvažovanou soudržností výztuže. V prvním případě byla uvažovaná dokonalá soudržnost výztuže s betonem a tento model je značen FRP B.1. V případě druhého modelu s označením FRP B.2 byla soudržnost zadaná dle hodnot pro excentrickou soudržnost zjištěnou z pull-out testů v rámci experimentu [ 17 ].

V této části práce budou prezentovány výsledky nelineární analýzy všech tří výše uvedených modelů. Chování nosníku bude prezentováno pomocí vyobrazených napětí  $\sigma_{xx}$  v betonu i ve výztuži a pomocí deformací včetně zobrazení trhlin.

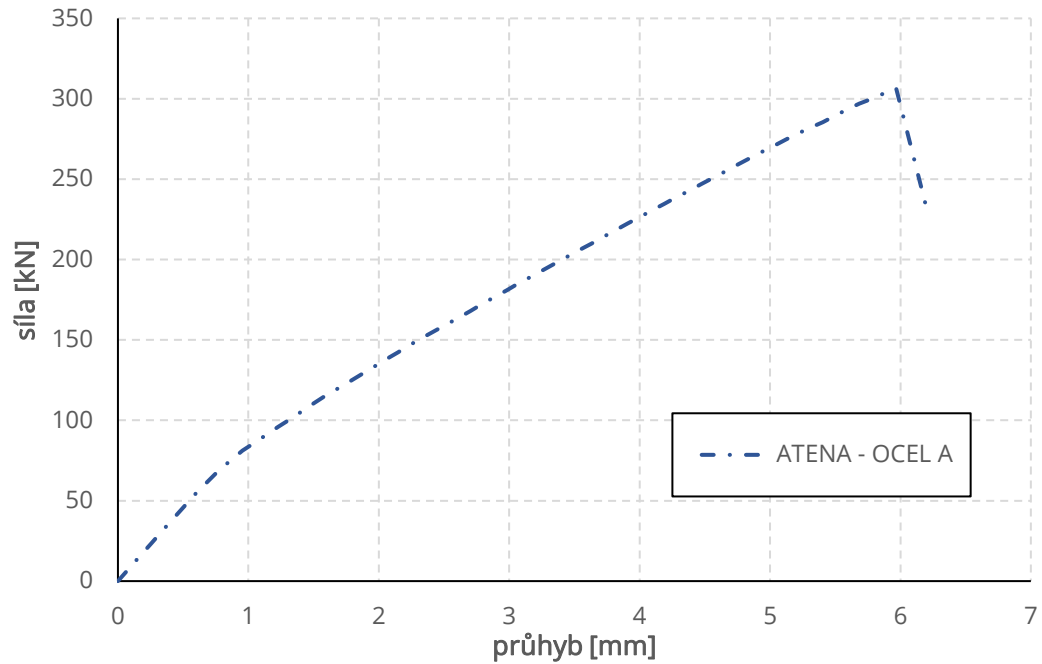
#### 8.3.1. OCEL A

Model byl vytvořen v souladu s geometrií a materiálovými charakteristikami uvedenými v předchozích kapitolách. Vyztužení bylo realizováno diskretními pruty, konkrétně 6 prutů profilu  $\text{Ø}25$  mm, což odpovídá reálnému provedení vzorku stejně jako vzorku uvažovanému v analytické studii. Výztuž byla uvažovaná ocelová s dokonalou soudržností s betonem (zajištěno žebírky na povrchu výztuže). Podepření a roznášecí desky společně se způsobem zatěžování bylo uvažováno dle kapitoly 8.2. Model prvku se zvýrazněnou výztuží je možné pozorovat na obr. 8.16.



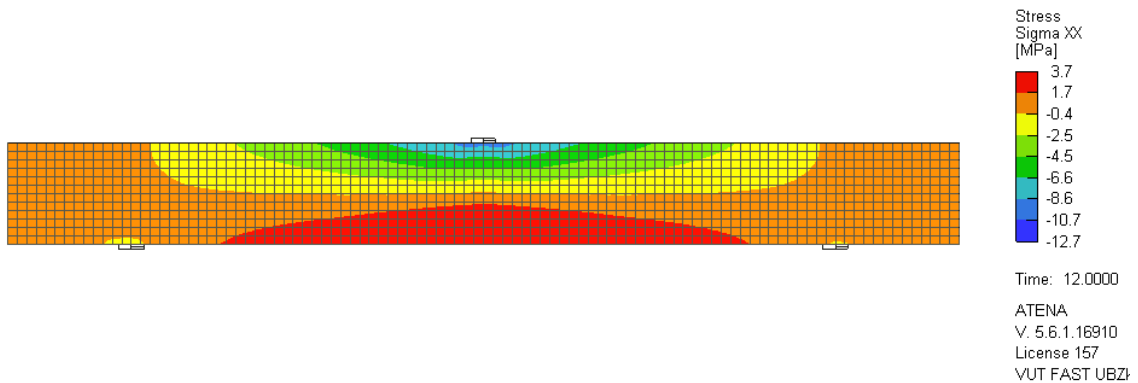
obr. 8.16: model prvku – OCEL A

Pro porovnání s reálným experimentem bude sloužit křivka vystihující závislost průhybu v polovině rozpětí na zatěžovací síle. Tuto křivku je možné vidět na graf. 8.1. Z jejího průběhu je patrný vznik ohybových trhlin kolem zatížení 80 kN kdy dochází k poklesu tuhosti průřezu. Po vzniku trhlin průhyb narůstá rychleji, než tomu bylo při působení celistvého neporušeného průřezu, tzn. křivka má po vzniku trhlin mírnější sklon. Po vzniku trhlin je viditelná přímá směrnice až do porušení prvku při zatížení cca 300 kN.

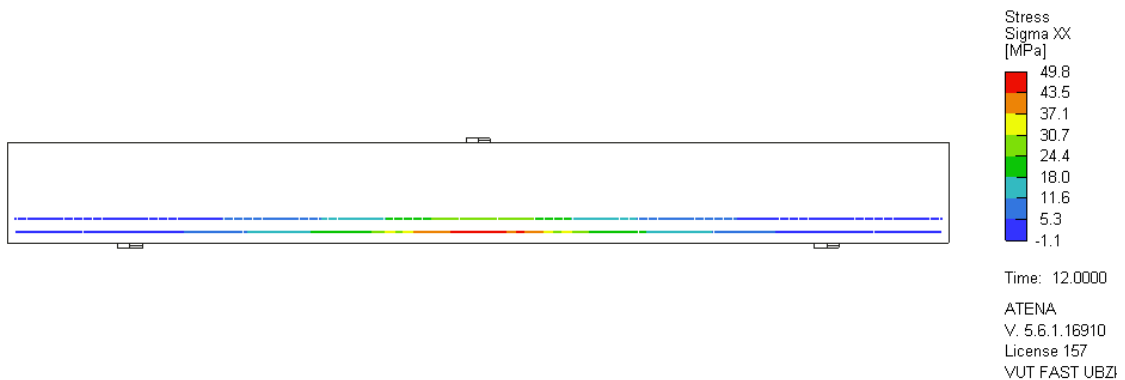


graf. 8.1: ATENA – závislost síly a průhybu v polovině rozpětí – OCEL A

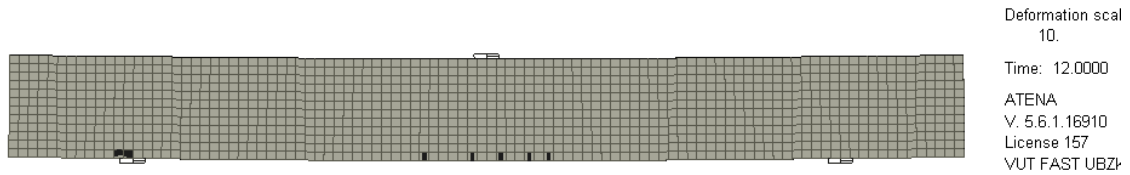
Na následujících obrázcích je vyobrazeno napětí  $\sigma_{xx}$  v betonu i ve výztuži v momentě vzniku prvních ohybových trhlin (síla 85,9 kN) a v momentě dosažení maximální síly (306,6 kN). Pro stejná zatížení jsou zobrazena také průhyby nosníku a trhliny. Pro lepší názornost je průhyb nosníku 10x zvětšen a zobrazení trhlin je omezeno minimální šířkou 0,01 mm.



obr. 8.17: ATENA – napětí v betonu při zatížení 85,9 kN – OCEL A

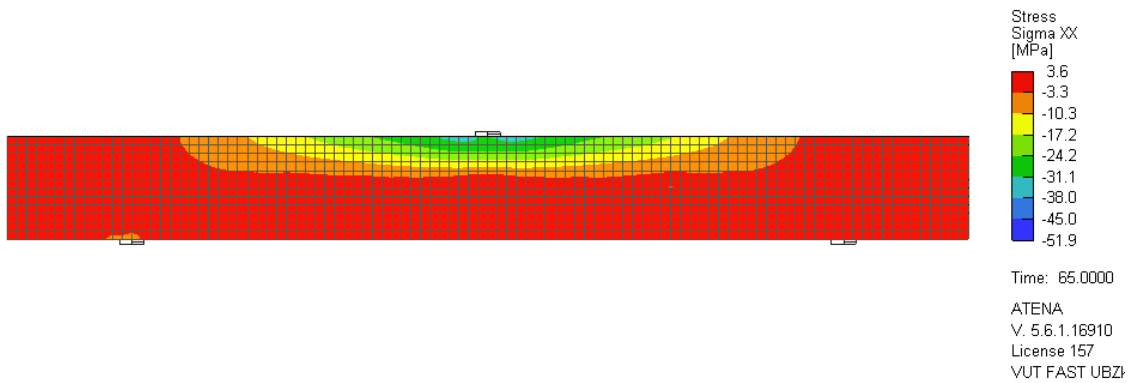


obr. 8.18: ATENA – napětí ve výztuži při zatížení 85,9 kN – OCEL A

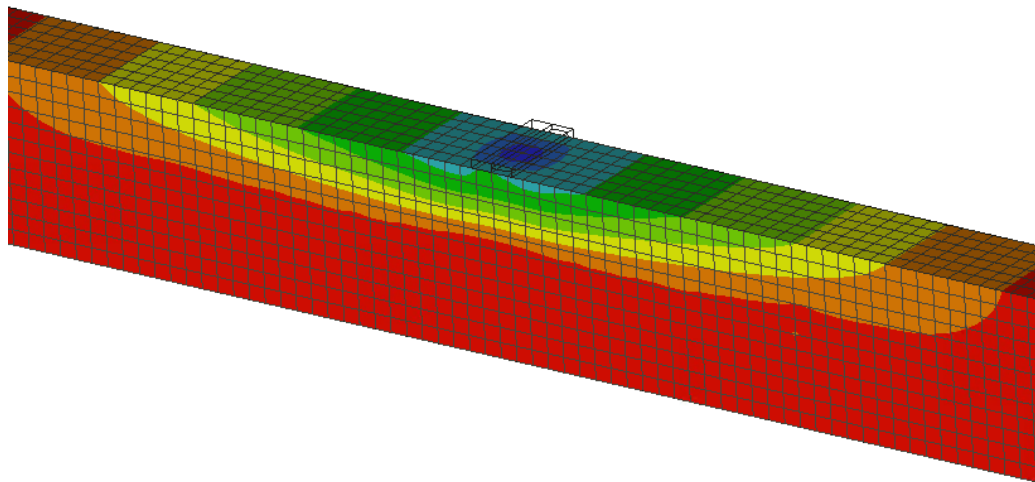


obr. 8.19: ATENA – trhliny na deformovaném nosníku při zatížení 85,9 kN – OCEL A

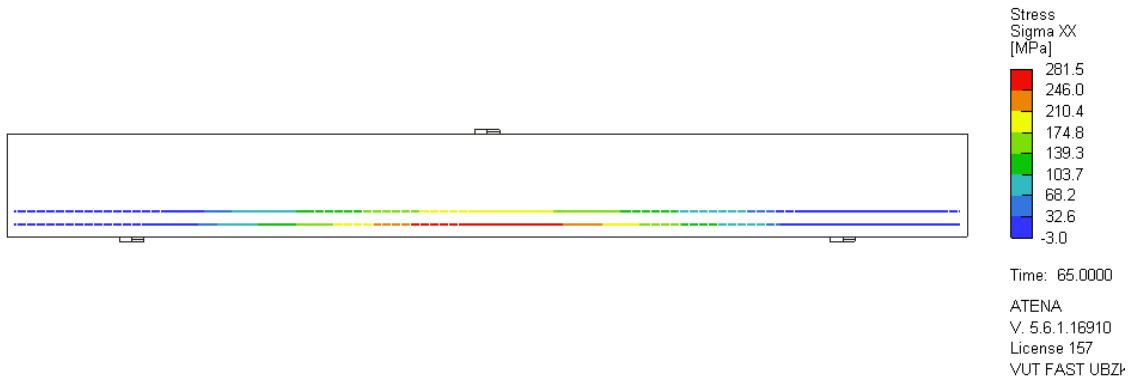
První ohybové trhliny (pozorováno s minimální šířkou trhlin 0,01 mm) se objeví ve 12. zatěžovacím kroku při síle 85,6 kN. V tomto kroku je napětí v tažených vláknech betonu 3,7 MPa (tah) a při tlačeném povrchu je to 12,7 MPa (tlak). Odpovídá tomu tahové napětí 49,8 MPa ve spodní vrstvě výztuže. Průhyb v polovině rozpětí při zatížení 85,6 kN dosahuje 1,06 mm.



obr. 8.20: ATENA – napětí v betonu při dosažení maximální síly – OCEL A

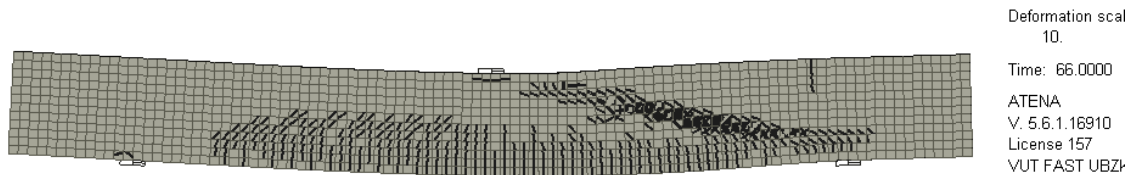


obr. 8.21: ATENA – detail napětí v betonu pod zatěžovací plochou při dosažení maximální síly – OCEL A



obr. 8.22: ATENA – napětí ve výztuži při dosažení maximální síly – OCEL A



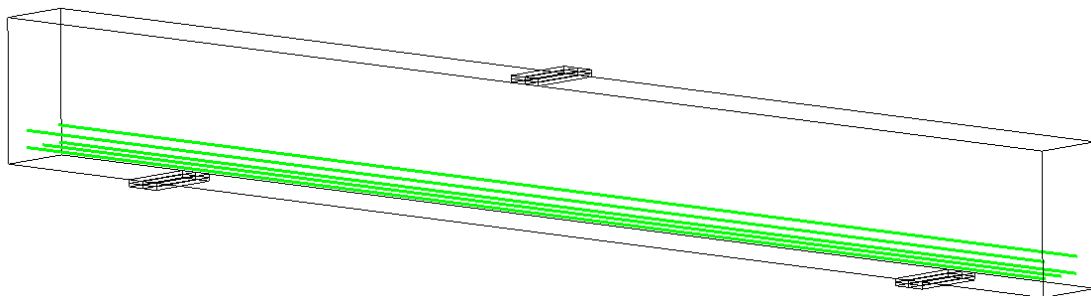


obr. 8.23: ATENA – trhliny na deformovaném nosníku při porušení prvku – OCEL A

K porušení průřezu došlo v 66. zatěžovacím kroku a maximální síla, která byla dosažena v 65. zatěžovacím kroku, je 306,6 kN. Z průběhu napětí na nosníku je patrné, že při dosažení maximální síly je značná část průřezu tažená, maximální tahové napětí je 3,6 MPa. Maximální tlakové napětí je 51,9 MPa a je koncentrováno v místě zatěžovací plochy. Jeho hodnota přesahuje pevnost betonu v tlaku což značí o drcení betonu. V momentě dosažení maximální síly je ve spodní vrstvě výztuže tahové napětí 281,5 MPa, není tedy dosaženo meze kluzu výztuže a nedochází proto k porušení výztuže. Na deformovaném modelu (deformace 10x zvětšena pro lepší názornost) je možné pozorovat způsob porušení nosníku. Vlivem příčného tahu dochází k vytvoření smykové trhliny a následnému smykovému porušení.

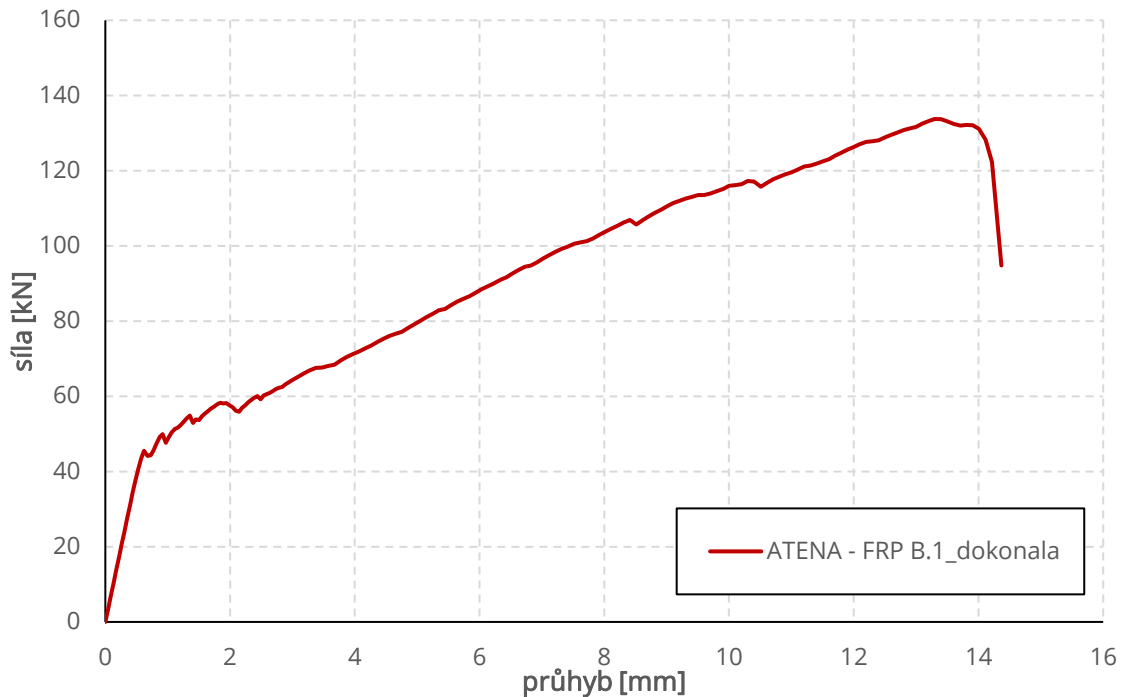
### 8.3.2. FRP B.1

Geometrie modelu, podepření i způsob zatěžování bylo ponecháno bezezměny. Jediný rozdíl oproti modelu OCEL A je ve výztužení. V případě modelu FRP B je nosník vyztužen pěti pruty kompozitní výztuže průměru 18 mm (5Ø18), které byly zadány diskrétně a opět svou polohou odpovídají reálnému provedení vzorku. Výztuži a ostatním částem modelu byly přiřazeny odpovídající materiály, viz kapitola 8.2.1. Model B.1 se vyznačuje dokonalou soudržností kompozitní výztuže s betonem. Model prvku se zvýrazněnou výztuží je vyobrazen na obr. 8.24.



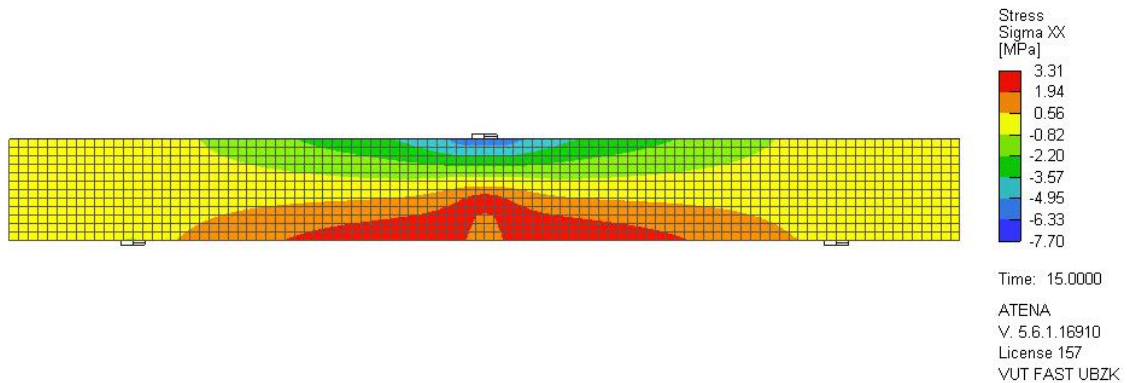
obr. 8.24: Model prvku – FRP B.1

Data z monitorů zatěžovací síly a svislého posunu v polovině rozpětí umožňují sestavení křivky vystihující závislost těchto dvou veličin. Křivku je možné pozorovat na graf. 8.2. Z průběhu křivky je možné stanovit při jaké síle dochází ke vzniku ohybových trhlin. Při síle přibližně 45 kN dochází ke snížení tuhosti průřezu což má za efekt větší sklopení křivky. Průhyb začíná s rostoucím zatížením narůstat rychleji, než tomu bylo do vzniku trhlin. Vznik trhlin je krom změny směrnice křivky doprovázen také viditelnými skoky v nárůstu síly. Tyto skoky jsou způsobené horší konvergencí výpočtu při vzniku a rozvoji trhlin v tažené oblasti. Řešení kroku v takovém případě vyžaduje vyšší počet iterací, jež byl omezen maximálně 50 iteracemi v každém kroku. K porušení prvku došlo při síle cca 130 kN.

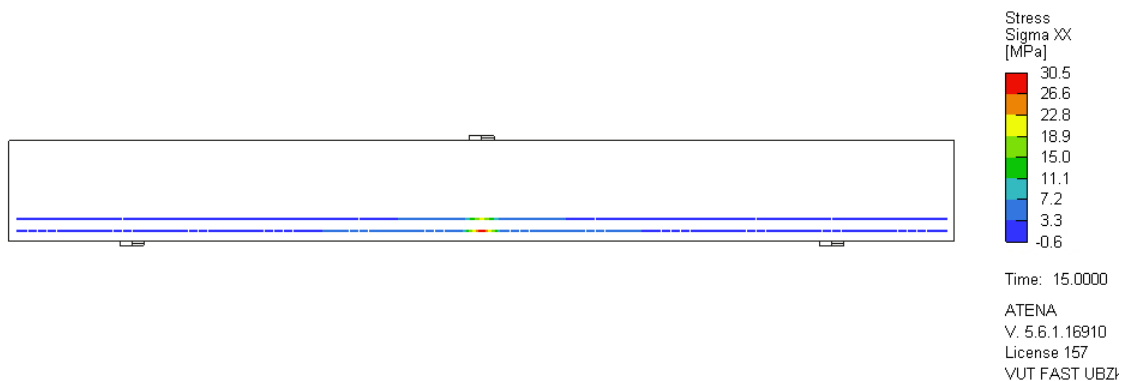


graf. 8.2: ATENA – závislost síly a průhybu v polovině rozpětí – FRP B.1

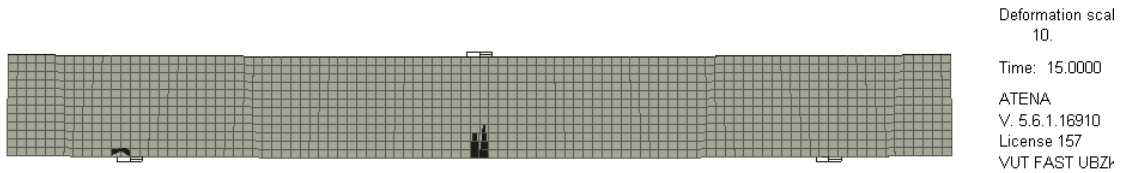
Na následujících obrázcích jsou k vidění výstupy z programu ATENA. Důležitými veličinami, které vypovídají o chování nosníku v průběhu zatěžování jsou, obdobně jako v případě prvku s ocelovou výztuží, napětí  $\sigma_{xx}$  jak v betonu, tak ve výztuži, deformace prvku a průběh trhlin. Vše je zobrazeno pro sílu odpovídající vzniku prvních ohybových trhlin a v momentě dosažení maximální síly.



obr. 8.25: ATENA – napětí v betonu při zatížení 45,5 kN – FRP B.1

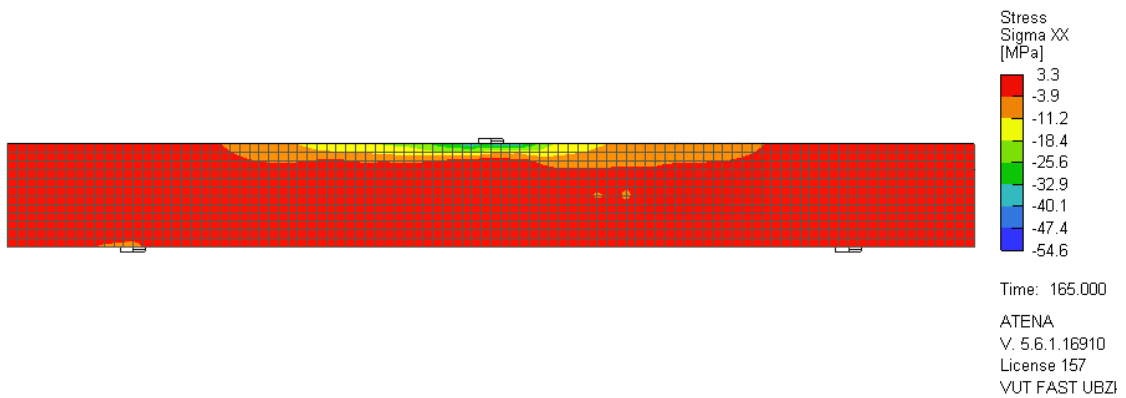


obr. 8.26: ATENA – napětí ve výztuži při zatížení 45,5 kN – FRP B.1

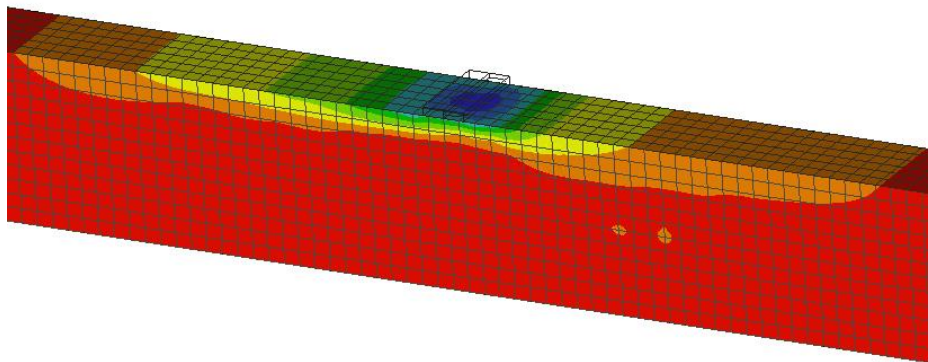


obr. 8.27: ATENA – trhliny na deformovaném nosníku při zatížení 45,5 kN – FRP B.1

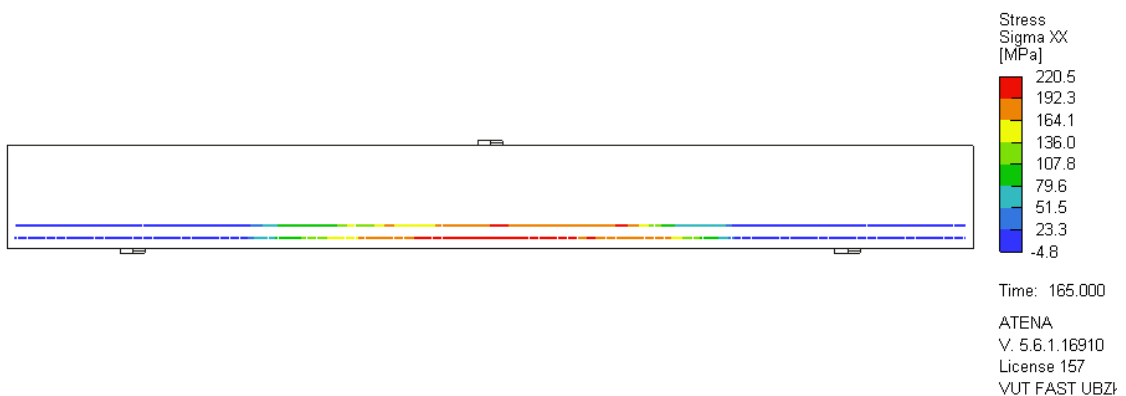
První ohybové trhliny (s šířkou minimálně 0,01 mm) se na nosníku objeví při překonání síly 45,5 kN, tedy v 15. zatěžovacím kroku. Maximální tahové napětí v betonu je v tomto kroku rovno 3,3 MPa, maximální tlak v horní části betonového nosníku je 7,7 MPa. Tomuto odpovídá tahové napětí 30,5 MPa ve spodní vrstvě kompozitní výztuže. Průhyb nosníku je v tuto chvíli roven 0,6 mm. Na obr. 8.27 jsou pro lepší názornost deformace 10x zvětšeny.



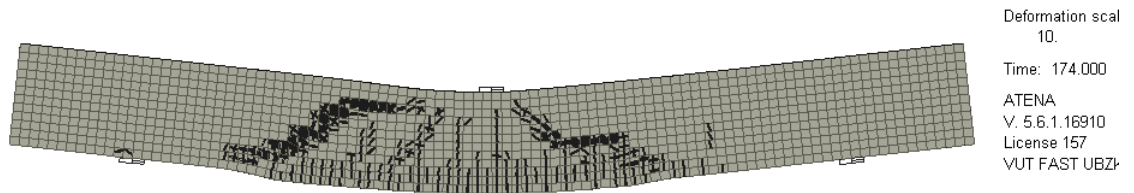
obr. 8.28: ATENA – napětí v betonu při dosažení maximální síly – FRP B.1



obr. 8.29: ATENA – detail napětí v betonu pod zatěžovací plochou při dosažení maximální síly – FRP B.1



obr. 8.30: ATENA – napětí ve výztuži při dosažení maximální síly – FRP B.1



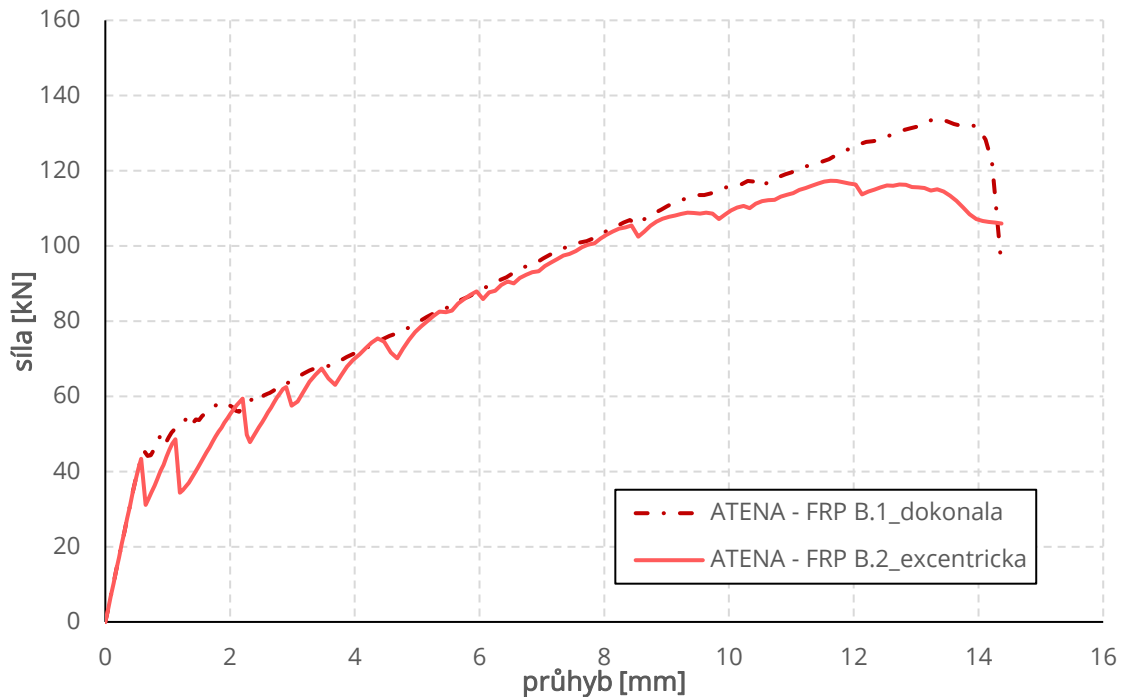
obr. 8.31: ATENA – trhliny na deformovaném nosníku při porušení prvku – FRP B.1

Maximální síla, které bylo dosaženo ve 166. kroku, je 133,8 kN a odpovídá jí průhyb 13,3 mm. Této síle odpovídá maximální tahové napětí v betonu 3,3 MPa. Maximální tlakové napětí v betonu dosahuje hodnoty 54,6 MPa. Největší tlakové napětí je koncentrováno pod zatěžovací silou. Pod roznášecí deskou je tak vyčerpána mezní pevnost betonu v tlaku, v této oblasti tedy dochází k drcení betonu. Ve spodní vrstvě tažené výztuže je v momentě maximální síly dosaženo napětí 220,5 MPa kterému odpovídá přetvoření 0,0045. Výztuž je tedy využita pouze na 19,5 % z celkové tahové pevnosti 1133,8 MPa a nedochází proto k jejímu porušení. Z množství trhlin zobrazených na deformovaném modelu na obr. 8.31 (minimální šířka zobrazené trhliny je 0,1 mm) je patrné, že vlivem příčných tahů došlo v zatěžovacím kroku 174 k rozvoji smykové trhliny a následnému smykovému porušení nosníku. Oproti modelu s ocelovou výztuží (model OCEL A, kapitola 8.3.1) má však smyková trhlinka strmější sklon.

### 8.3.3. FRP B.2

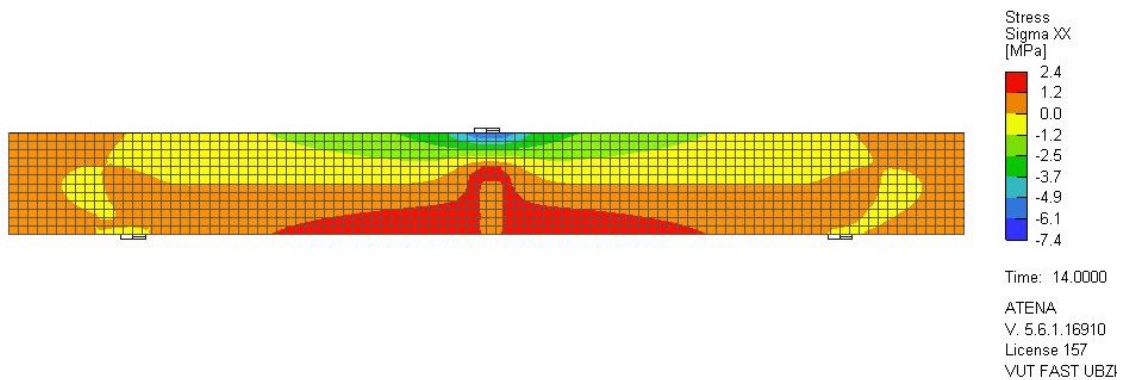
Model je totožný s modelem FRP B.1 s jediným rozdílem v soudržnosti výztuže s betonem. Na rozdíl od dokonalé soudržnosti uvažované v modelu B.1, je v tomto modelu zavedena nižší hodnota mezního napětí v soudržnosti výztuže. Tato hodnota vychází z výsledků experimentálních prací [ 17 ] pro excentrický pull-out test. Způsob definice soudržnosti FRP výztuže je uveden v kapitole 8.2.1.3.

Jak se v závislosti na zatěžovací síle vyvíjel průhyb nosníku v polovině rozpětí vystihuje graf. 8.3. Je možné pozorovat změnu naklonění křivky při zatížení cca 45 kN. Při tomto zatížení vznikají první ohybové trhliny a dochází ke snížení tuhosti průřezu. Na křivce jsou viditelné výrazné skoky zatěžovací síly, které nastávají vždy při vzniku trhliny. Možnou příčinu lze do jisté míry hledat v nedokonalé soudržnosti výztuže s betonem. Při vzniku trhliny dochází také k jejímu výraznějšímu rozevření, než je tomu v případě modelu s dokonalou soudržností výztuže a betonu. V případě rozevření trhliny výpočet v daném kroku hůře konverguje a je ukončen po 50. iteraci. Po dosažení síly cca 115 kN již nedochází k dalšímu nárůstu síly, dochází pouze k dalšímu rozevírání trhlin, které se projevuje narůstajícím průhybem. Pro účely porovnání je v graf. 8.3 zobrazena také křivka z modelu FRP B.1, kde byla uvažovaná dokonalá soudržnost výztuže s betonem.

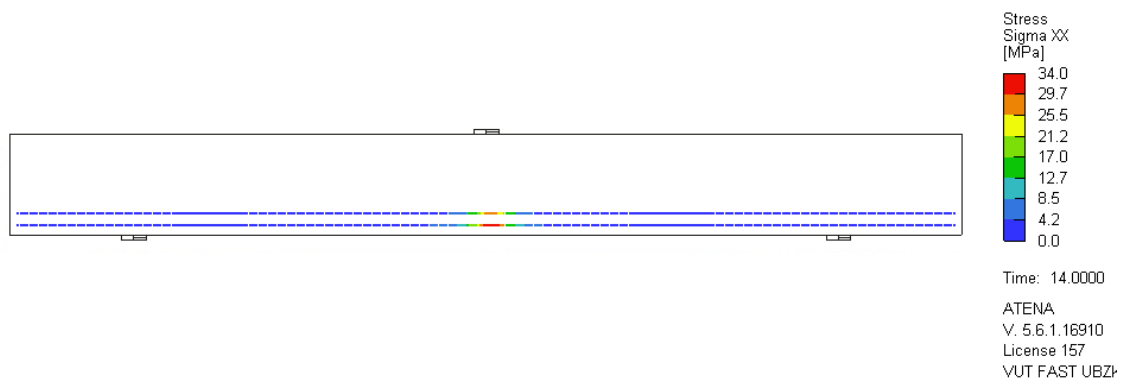


graf. 8.3: ATENA – závislost síly a průhybu v polovině rozpětí – FRP B.2

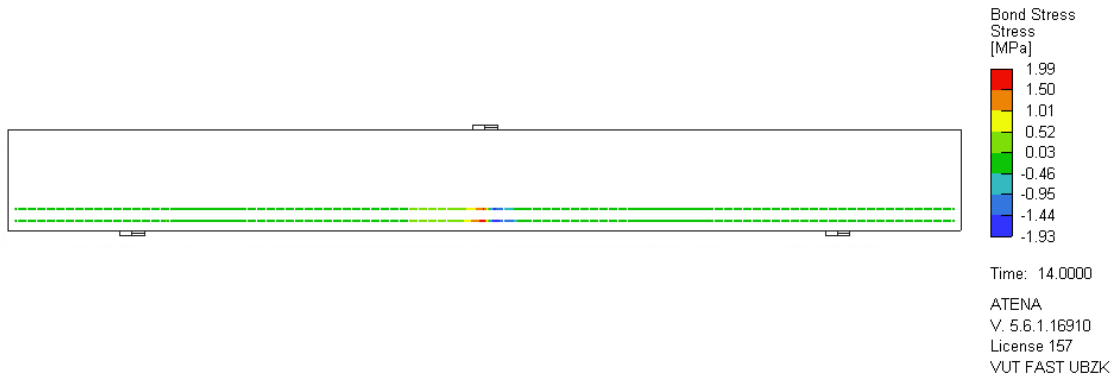
Výstupy z programu ATENA jsou dokumentovány na následujících obrázcích. Jedná se o napětí  $\sigma_{xx}$  v betonu i ve výztuži, deformace a trhliny. Pro tento model s nedokonalou soudržností výztuže s betonem je možné sledovat také napětí na povrchu výztuže. Při vyčerpání mezního napětí v soudržnosti klesá soudržnost výztuže dle zavedené závislosti, viz tab. 8.4.



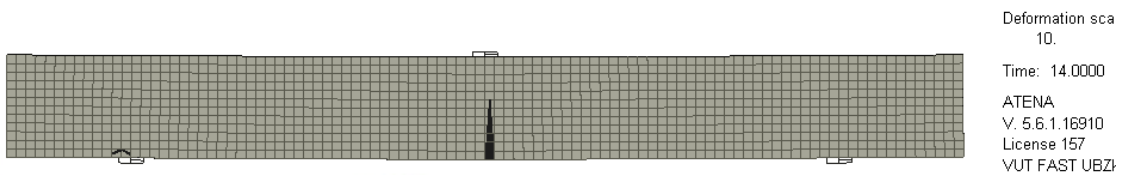
obr. 8.32: ATENA – napětí v betonu při zatížení 43,4 kN – FRP B.2



obr. 8.33: ATENA – napětí ve výztuži při zatížení 43,4 kN – FRP B.2

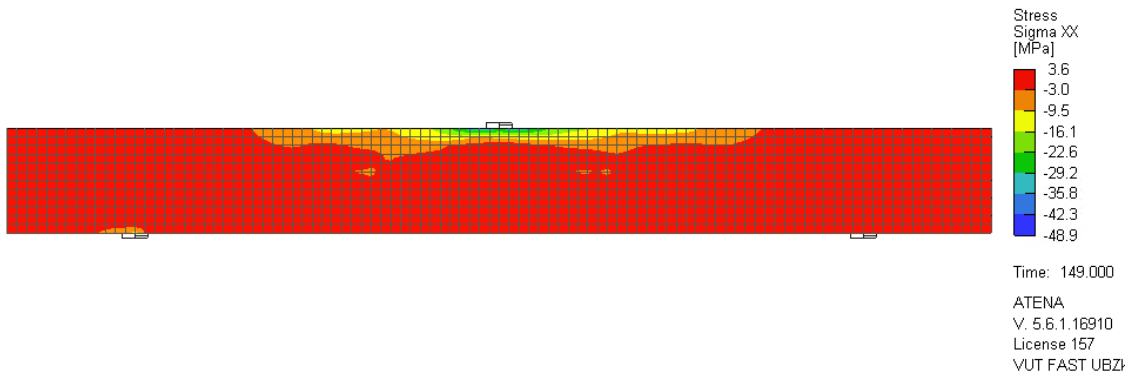


obr. 8.34: ATENA – napětí na povrchu výztuže (v soudržnosti) při zatížení 43,4 kN – FRP B.2

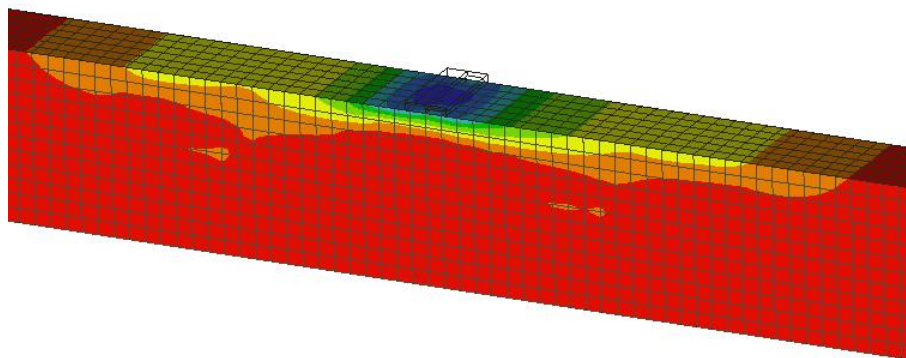


obr. 8.35: ATENA – trhliny na deformovaném nosníku při zatížení 43,4 kN – FRP B.2

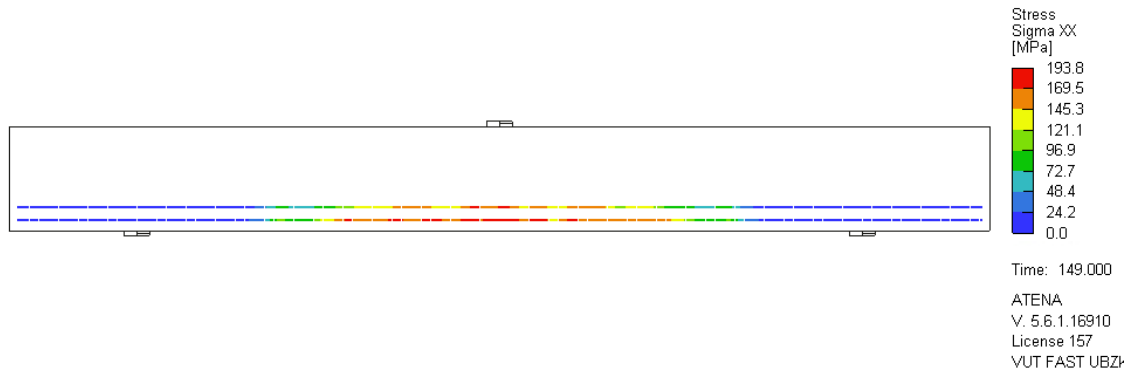
Ke vzniku první ohybové trhliny (minimální šířka 0,01 mm) dochází při zatížení 43,4 kN, tedy ve 14. zatěžovacím kroku. Tahové napětí v betonu dosahuje v tomto kroku 2,4 MPa, maximální tlakové napětí je 7,4 MPa. Výztuž je tažená a maximální tahové napětí v ní je rovno 34 MPa. Napětí na povrchu výztuže (napětí v soudržnosti) v tento okamžik dosahuje hodnoty 1,99 MPa. Průhyb odpovídající zatížení 43,4 kN je v polovině rozpětí roven 0,6 mm. Deformace jsou pro lepší názornost na obr. 8.35 10x zvětšeny.



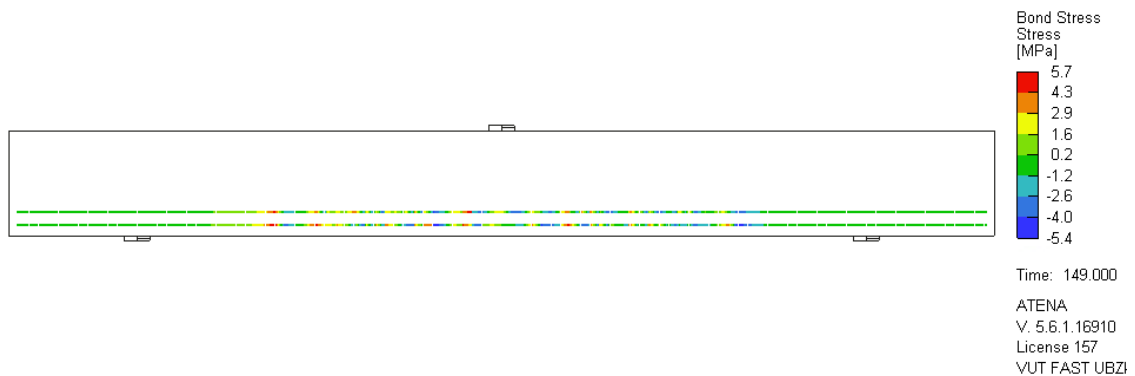
obr. 8.36: ATENA – napětí v betonu při dosažení maximální síly – FRP B.2



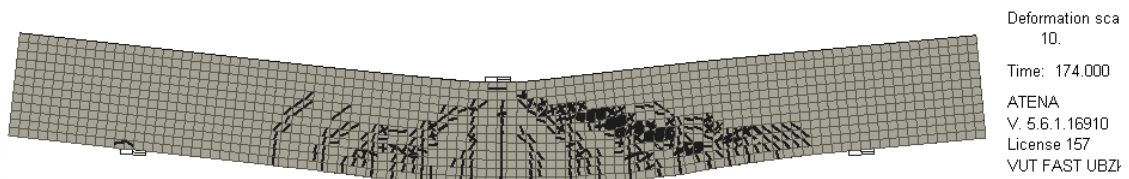
obr. 8.37: ATENA – detail napětí v betonu pod zatěžovací plochou při dosažení maximální síly – FRP B.2



obr. 8.38: ATENA – napětí ve výztuži při dosažení maximální síly – FRP B.2



obr. 8.39: ATENA – napětí na povrchu výztuže (v soudržnosti) při dosažení maximální síly – FRP B.2



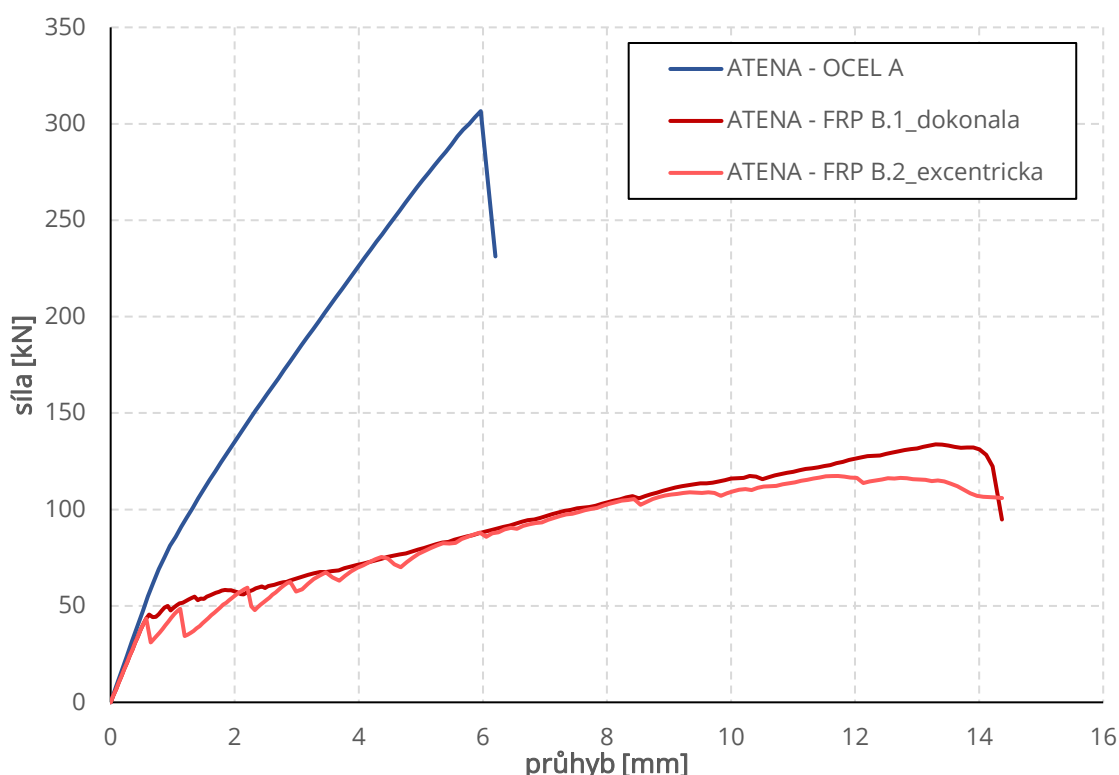
obr. 8.40: ATENA – trhliny na deformovaném modelu při porušení prvku – FRP B.2

Maximální síla, které bylo na nosníku dosaženo ve 149. zatěžovacím kroku, je 117,3 kN a odpovídá jí průhyb v polovině rozpětí 11,7 mm. Po dosažení této síly dochází nadále k nárůstu průhybu, ale zatěžovací síla se již nezvětšuje. K nárůstu průhybu nadále dochází z důvodu rozevírání trhlin. Tlakové napětí v betonu při dosažení maximální síly v místech pod roznášecí deskou dosahuje hodnoty až 48,9 MPa a je zde vyčerpána mezní pevnost betonu v tlaku. V této oblasti tedy dochází k drcení betonu. Maximální tahové napětí v betonu je v momentě dosažení maximálního zatížení rovno 3,6 MPa. Napětí ve výztuži při této síle dosahuje hodnoty 193,8 MPa a odpovídá mu přetvoření 0,00399. Výztuž je využita pouze na 17 % ze své krátkodobé tahové pevnosti 1133,8 MPa. Jak je možné pozorovat na obr. 8.40 (minimální šířka trhliny 0,1 mm), ve 174. zatěžovacím kroku dochází vlivem příčných tahů k rozvoji smykové trhliny.

## 8.4. ZÁVĚRY Z NELINEÁRNÍ ANALÝZY

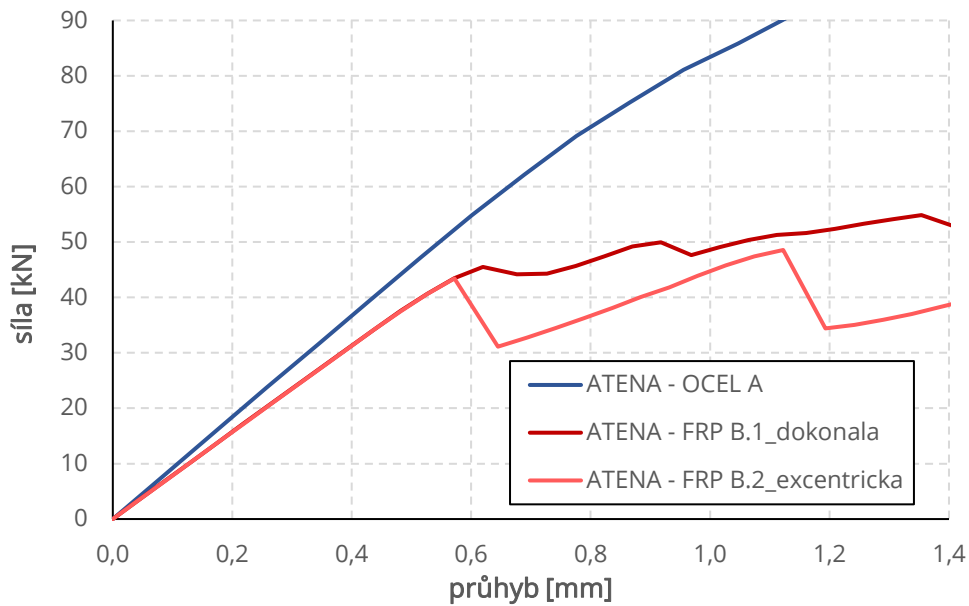
Jak u modelu s ocelovou výztuží (model OCEL A), tak i u modelu s kompozitní výztuží (FRP B.1 a FRP B.2) dochází k vyčerpání pevnosti betonu v tlaku v blízkosti místa vnášení zatížení a k následnému rozvoji smykové trhliny vlivem příčných tahů. Způsob porušení tedy ve všech případech odpovídá způsobu porušení nosníků při reálných experimentech. U modelu OCEL A bylo dosaženo také téměř totožné únosnosti – při experimentu byla dosažena maximální síla 285,7 kN, při nelineární analýze bylo dosaženo 306,6 kN. Na druhou stranu modely FRP B.1 a FRP B.2 nedosahují na únosnost stanovenou při experimentu. Maximální síla při reálné zkoušce nosníku vyztuženého kompozitní výztuží byla 150,7 kN. Zato v případě modelu FRP B.1 je dosažena maximální síla pouze 133,8 kN, v případě modelu FRP B.2 pouze 117,3 kN.

Srovnání všech tří vytvořených modelů (OCEL A, FRP B.1 a FRP B.2) je znázorněno na graf. 8.4. Je možné pozorovat, že do zatížení cca 45 kN (vznik trhlin na modelech s kompozitní výztuží) je sklon křivek téměř totožný. Na detailu této oblasti (graf. 8.5) je však viditelný nepatrný rozdíl mezi modelem s ocelovou výztuží a oběma modely s FRP výztuží. Ocelová výztuž poskytuje větší tuhost průřezu než kompozitní výztuž, a proto jsou průhyby modelu OCEL A při shodném zatížení o něco menší než v případě modelu FRP B.1 a FRP B.2. Je to dáno především vyšším stupněm vyztužení v případě ocelové výztuže a také jejím vyšším modulem pružnosti.



graf. 8.4: ATENA – závislost síly a průhybu v polovině rozpětí – srovnání modelů





graf. 8.5: ATENA – závislost síly a průhybu v polovině rozpětí – srovnání modelů, detail kolem vzniku trhlin

U modelů s FRP výztuží nastává vznik trhlin dříve (při nižším zatížení) než u modelu s ocelovou výztuží. Konkrétně se v případě FRP výztuže průřez potrhá při zatížení kolem 45 kN, v případě ocelové výztuže je to kolem zatížení 55 kN. Výrazněji se sklon křivky u ocelové výztuže mění až kolem zatížení 85 kN, kdy byly na modelu také zaznamenány první trhliny minimální šířky 0,01 mm. Se vznikem trhlin souvisí změna tuhosti průřezu, neboť působí pouze nepotrhaná část betonu a tažená výztuž. V případě kompozitní výztuže je změkčení průřezu mnohem výraznější než u ocelové výztuže. Křivka modelů FRP B.1 a FRP B.2 má po vzniku trhlin mírnější sklon a průhyb narůstá rychleji než v případě modelu OCEL A.

Rozdíl je také patrný v dosažené únosnosti modelů v závislosti na výztužení. Model s ocelovou výztuží dosahuje více než dvojnásobné únosnosti (306,6 kN) než model s FRP výztuží (133,8 kN v případě dokonalé soudržnosti a 117,3 kN v případě redukované soudržnosti). Jedním z faktorů, který je za tento rozdíl odpovědný, je plocha použité výztuže, jež je v případě ocelové varianty více než dvojnásobná oproti kompozitní výztuži (plocha ocelové výztuže  $A_s = 29,45 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ , plocha kompozitní výztuže  $A_f = 12,72 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ).

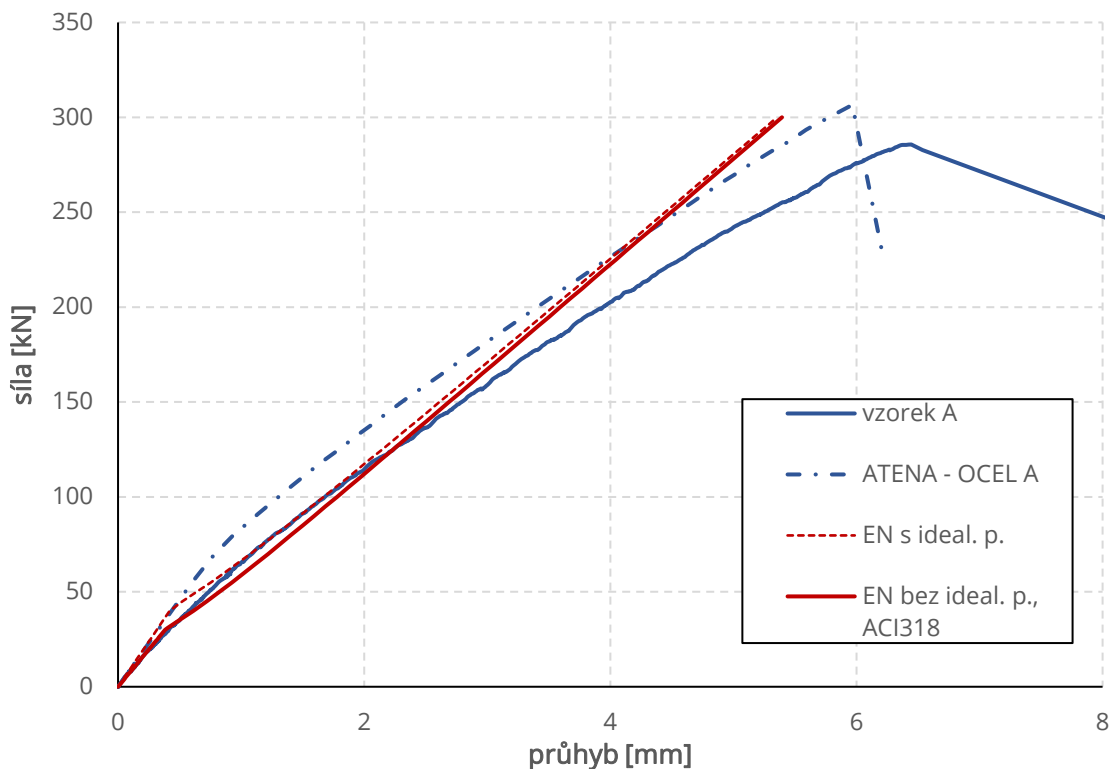
Zatímco prvek s ocelovou výztuží je možné uvažovat s dokonalou soudržností výztuže a betonu, u kompozitní výztuže má soudržnost vliv na únosnost nosníku. Z důvodu nižší soudržnosti výztuže s betonem dochází k razantnějšímu rozevírání trhlin a průhyb narůstá, aniž by narůstala únosnost prvku. Maximální síla na modelu s dokonalou soudržností je tedy o 14 % větší než v případě modelu s omezenou soudržností výztuže a betonu (133,8 kN v případě dokonalé soudržnosti a 117,3 kN v případě omezené soudržnosti).

## 9. SROVNÁNÍ ANALYTICKÉ STUDIE, NELINEÁRNÍ ANALÝZY A EXPERIMENTU

Jedním z hlavních cílů této práce je porovnání jednotlivých přístupů k výpočtu průhybu a nalezení toho nejvhodnějšího a nejpřesnějšího pro prvky vyztužené nekovovou výztuží a zatěžované tříbodovým ohybem. Je proto potřeba porovnat výstupy z analytické studie s reálným chováním konstrukce. Pro tyto účely byly sestaveny grafy, na kterých je možné vidět křivky založené na analytických výpočtech společně s křivkami z nelineární analýzy v programu ATENA a s křivkami z experimentu. Jak bylo vysvětleno výše, průhyb nosníku se liší podle vyztužení, je proto potřeba posoudit tyto prvky jednotlivě a vytvořit oddělené grafy pro ocelovou výztuž (graf. 9.1) a pro kompozitní výztuž (graf. 9.3).

### 9.1. OCELOVÁ VÝZTUŽ

Průhyb prvku vyztuženého betonářskou výztuží byl posouzen pouze dvěma přístupy, a to podle evropského [ 1 ] a amerického [ 3 ] předpisu. Jak je uvedeno v kapitole 6.2, tyto přístupy jsou po zanedbání *ideálního průřezu* u Eurokódu totožné. Pro porovnání byla do graf. 9.1 doplněna také křivka zohledňující *ideální průřez*.



graf. 9.1: srovnání průhybu ze zkoušek, ze softwaru ATENA a z analytické studie – ocelová výztuž

V softwaru ATENA byla provedena nelineární analýza vzorku v identické konfiguraci jako reálný experiment. Je však možné pozorovat jakýsi posun křivky směrem nahoru, což znamená, že nosník při nelineární analýze vykazuje menší průhyby než při reálné zkoušce v případě totožného zatížení. Posun je způsoben odlišným momentem vzniku trhlin. Zatímco při reálném experimentu byl kritický moment překonán při zatížení cca 50 kN a projevil se náklonem křivky, u numerického modelu sice první trhliny začaly vznikat při podobném zatížení (cca

55 kN), ale nedošlo k tak výraznému oslabení průřezu. Až při zatížení cca 85 kN se na numerickém modelu projevilo změkčení průřezu spojené s výraznějším nakloněním křivky. Od této hodnoty dále jsou směrnice obou křivek téměř totožné, oba nosníky tak mají obdobnou tuhost. Numerický model dosáhne podobné maximální síly, při které dochází k porušení betonu. V případě ATENY je maximální síla 306,6 kN a v případě experimentu 285,7 kN, rozdíl je tedy méně než 8 % a je tak možné numerický model považovat za správný.

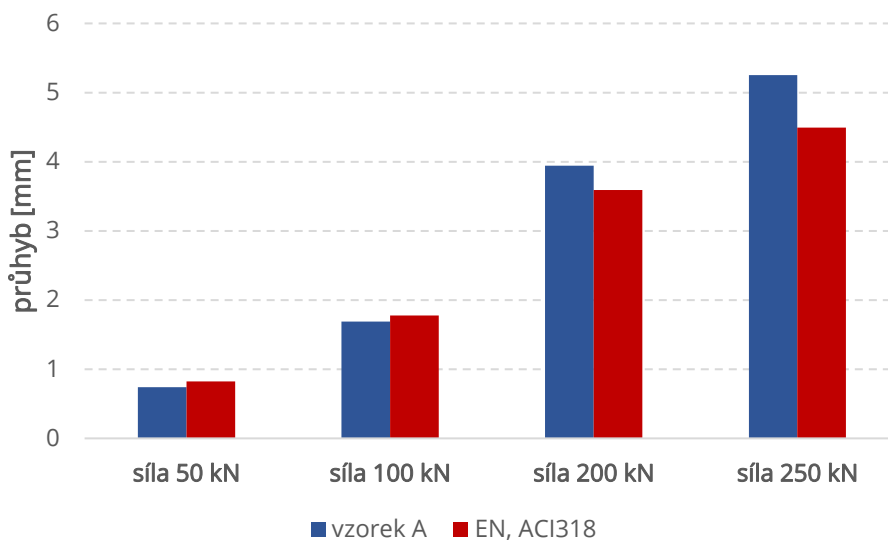
Analytický model při nižších zatíženích dosahuje velmi dobré shody s experimentem. Již od vzniku trhlin (překročení kritického momentu na mezi vzniku trhlin) se analytický model charakterizuje větší tuhostí a tím pádem lehce strmějším sklonem křivky. Do překročení hranice cca 120 kN je průhyb lehce nadhodnocen oproti experimentu, odchylka ale nepřekračuje 12 %. Po překročení této hranice už je průhyb podhodnocován a návrh podle [ 1 ] a [ 3 ] se stává nekonzervativním. Při zatížení 250 kN odchylka činí cca 15 % z průhybu z experimentu.

Interpolační vzorec mezi neporušeným a porušeným průřezem nezahrnuje stupeň vyztužení prvku. Absence vlivu míry vyztužení na výsledný průhyb konstrukce je možnou příčinou odchýlení analytického přístupu od reality.

tab. 9.1: Srovnání experimentu a analytické studie při daném zatížení – ocelová výztuž

křivka		průhyb [mm]			
		síla 50 kN	síla 100 kN	síla 200 kN	síla 250 kN
vzorek A		0,74	1,69	3,94	5,25
EN, ACI318		0,82	1,78	3,59	4,49
rozdíl	abs.	0,08	0,09	-0,35	-0,76
	%	11,29	5,44	8,84	14,44

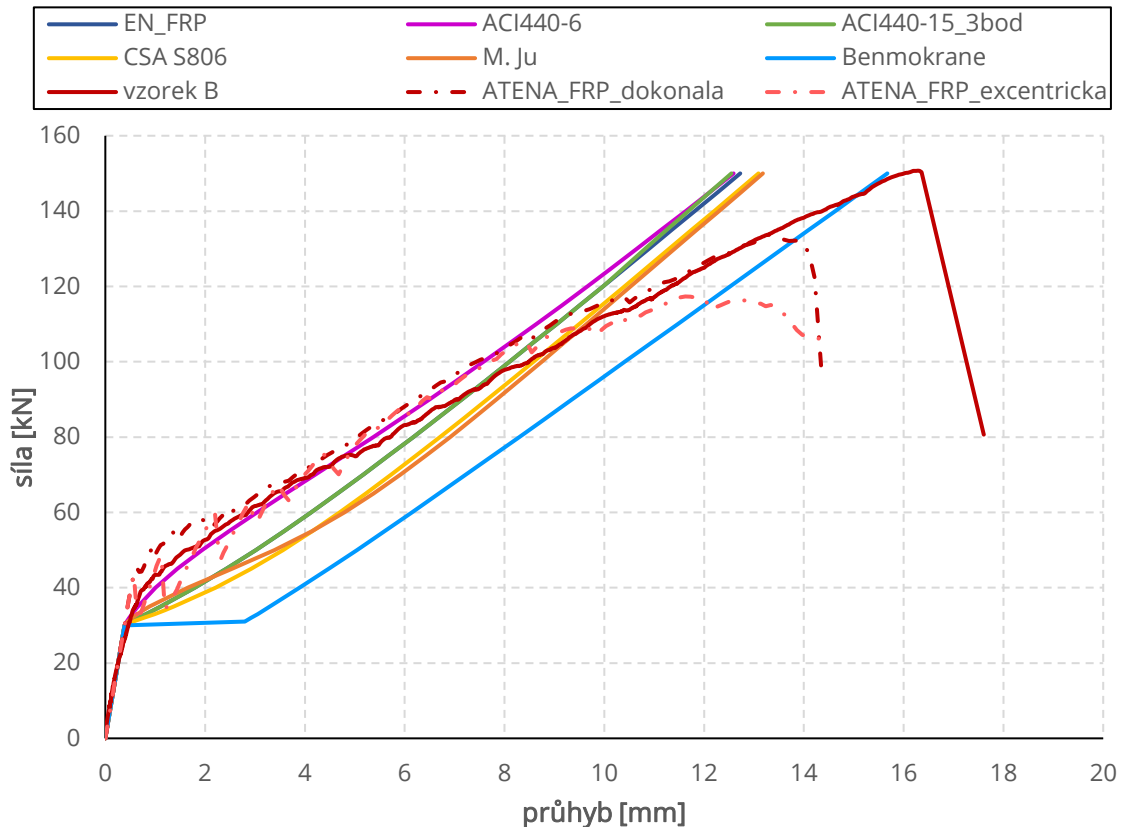
Hodnoty z tab. 9.1 je možné porovnat také graficky, viz následující graf:



graf. 9.2: grafické srovnání experimentu a analytické studie při daném zatížení – ocelová výztuž

## 9.2. KOMPOZITNÍ FRP VÝZTUŽ

Pro posouzení kompozitní výztuže bylo vybráno šest různých přístupů. Jejich výčet a vzájemné srovnání bylo podrobně popsáno již v kapitole 6.3. V této části se zaměříme na jejich srovnání s experimentem a numerickým modelem z programu ATENA. Všechny křivky závislosti zatěžovací síly a průhybu v polovině rozpětí byly zaneseny do jednoho grafu (graf. 9.3) a je tak možné pozorovat odchylky jednotlivých přístupů od reality.



graf. 9.3: srovnání průhybu ze zkoušek, ze softwaru ATENA a z analytické studie – kompozitní výztuž

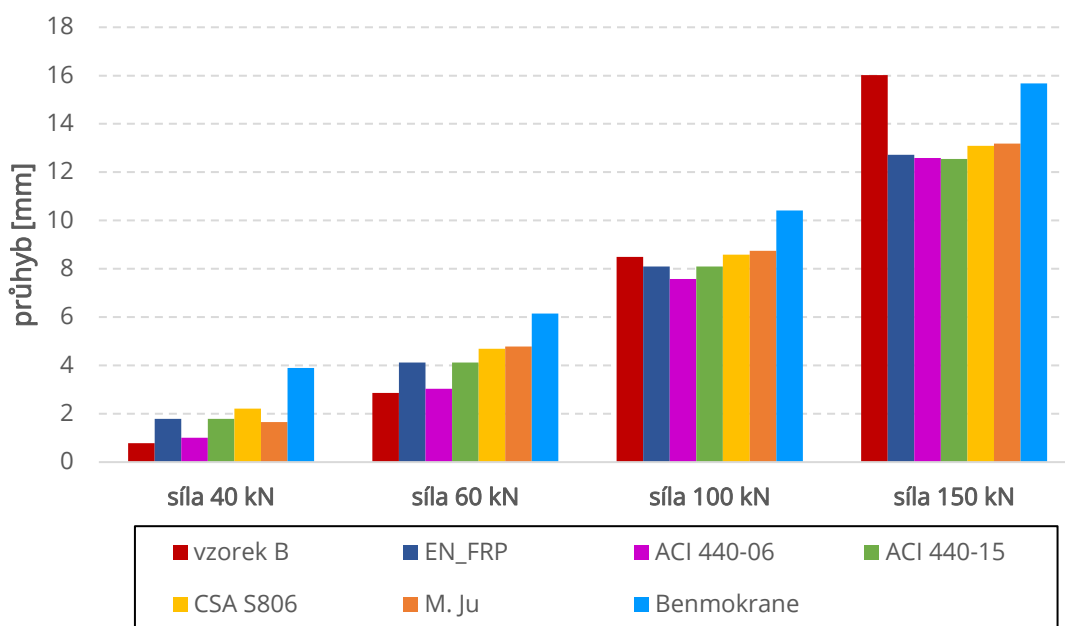
Nastavení nelineární analýzy bylo pro prvek vyztužený FRP výztuží obdobné, jako u prvku s ocelovou výztuží s jediným rozdílem, a to v materiálu výztuže. Co je důležitější, analýza byla provedena také ve shodě s reálným experimentem a je tak možné výsledky porovnat. V programu ATENA byly vytvořeny dva výsledné modely pro kompozitní výztuž. V prvním případě byla uvažovaná dokonalá soudržnost mezi pruty výztuže a betonem (model FRP B.1), v druhém případě (model FRP B.2) byla ručně zadána soudržnost výztuže na základě excentrických pull-out testů z [ 17 ]. Srovnání těchto dvou variant je rozebráno v kapitole 8.3.

Je možné pozorovat, že až na nepatrné odchýlení kolem zatížení 40–60 kN, jsou křivky ve velmi dobré shodě a jejich odchylka není větší než 10 %. Tato shoda platí pro oba typy soudržnosti až do zatížení cca 120 kN, od kterého už u numerického modelu se zadanou soudržností nedochází k nárůstu síly a dojde k porušení nosníku. U numerického modelu s dokonalou soudržností výztuže a betonu síla narůstala až do hodnoty přibližně 130 kN, po kterém následovalo porušení nosníku. Maximální síla u experimentu činila 150,7 kN, této hodnoty se však v programu

ATENA nepodařilo dosáhnout. I přesto je model považován za vypovídající a do zatížení cca 130 kN je možné jej srovnávat s experimentem.

Křivky ze softwaru ATENA i z reálných experimentů mají po vzniku trhlin relativně stejnou směrnici, prvek tedy vykazuje stejnou tuhost ve skutečnosti jako s jakou je uvažováno při nelineárním výpočtu. V modelu je možné tuhost regulovat na straně vstupních charakteristik, konkrétně tedy moduly pružnosti materiálu – betonu a výztuže. Jak byly materiálové charakteristiky uvažovány je podrobně rozebráno v kapitole 8.2.

Srovnání analytických modelů s experimentem je pro konkrétní zatížení vyobrazeno v graf. 9.4 a číselně v tab. 9.2.



graf. 9.4: grafické srovnání experimentu a analytické studie při daném zatížení – kompozitní výztuž  
tab. 9.2: srovnání experimentu a analytické studie při daném zatížení – kompozitní výztuž

křivka	průhyb [mm]			
	síla 40 kN	síla 60 kN	síla 100 kN	síla 150 kN
vzorek B	0,79	2,86	8,49	16,03
EN_FRP	1,79	4,13	8,10	12,72
ACI 440-06	1,01	3,04	7,58	12,59
ACI 440-15	1,79	4,13	8,10	12,55
CSA S806	2,21	4,69	8,58	13,09
M. Ju	1,66	4,79	8,75	13,18
Benmokrane	3,90	6,14	10,41	15,67

Pro lepší porovnatelnost bylo provedeno také procentuální srovnání s průhybem z experimentu jakožto referenční hodnota (100 %):

tab. 9.3: Procentuální srovnání experimentu a analytické studie při daném zatížení – kompozitní výztuž

křivka	průhyb [%]			
	síla 40 kN	síla 60 kN	síla 100 kN	síla 150 kN
vzorek B	100	100	100	100
EN_FRP	227	144	95	79
ACI 440-06	128	106	89	79
ACI 440-15	227	144	95	78
CSA S806	280	164	101	82
M. Ju	210	168	103	82
Benmokrane	494	215	123	98

Do vzniku trhlin při zatížení 30,3 kN (dosažení kritického momentu) mají všechny analytické křivky stejný průběh. Průhyb dosažený při tomto zatížení je 0,4 mm. Po překonání tahové pevnosti betonu je potřeba analytické přístupy a jejich shodu s experimentem analyzovat jednotlivě.

Norma ČSN EN 1992-1-1 [ 1 ] předpokládá po vzniku trhlin větší průhyby, než jsou prokázány experimentem. Nelineární průběh křivky je dán přechodem z momentu setrvačnosti neporušeného průřezu na moment setrvačnosti trhlinou porušeného průřezu. Od zatížení kolem 60 kN se závislost mezi průhybem a zatížením stává lineární. Směrnice křivky je od tohoto místa strmější než u experimentu, což značí o větší tuhosti, než jakou ve skutečnosti nosník má. Do zatížení cca 100 kN je průhyb analytickým výpočtem dle [ 1 ] nadhodnocován až o 130 % (při zatížení 40 kN je reálný průhyb 0,79 mm a vypočtený průhyb 1,79 mm). Při zatíženích větších než 100 kN je naopak průhyb výpočtem podhodnocen. Výsledný průhyb při zatížení 150 kN se liší o 21 % (16 mm z experimentu a 12,7 mm výpočtem).

První z amerických norem ACI 440.1R-06 [ 4 ] dosahuje v první fázi zatěžování, do cca 80 kN, nejlepší shodu s experimentem. Po překonání tohoto zatížení je analytický model tužší než ve skutečnosti a průhyb je tak pro vyšší zatížení podhodnocován. Analytická křivka má strmější sklon a postupně se vzdaluje od té z experimentu, při zatížení 100 kN to dělá odchylku 11 % a při zatížení 150 kN už je to 22 % (16 mm z experimentu a 12,6 mm výpočtem).

Druhý americký předpis ACI 440.1R-15 [ 5 ], pro nějž byl pro účely této práce odvozen vztah pro součinitel  $\gamma$  pro třibodový ohyb (vztah ( 6.2 )), vykazuje průhyby totožné s evropskou normou [ 1 ]. I přesto, že oproti [ 1 ] tento předpis pracuje s kompozitní výztuží a upravuje existující vztahy o redukční součinitele (konkrétně součinitel  $\gamma$ ), je výsledkem obdobné teoretické chování nosníku. Do zatížení cca 90 kN jsou hodnoty vypočteného průhybu nadhodnocovány. Při zatížení kolem 100 kN se průhyby stanovené výpočtem a z experimentu srovnají. S rostoucím zatížením ale analytická křivka roste strměji a průhyby začínají být podhodnocovány.

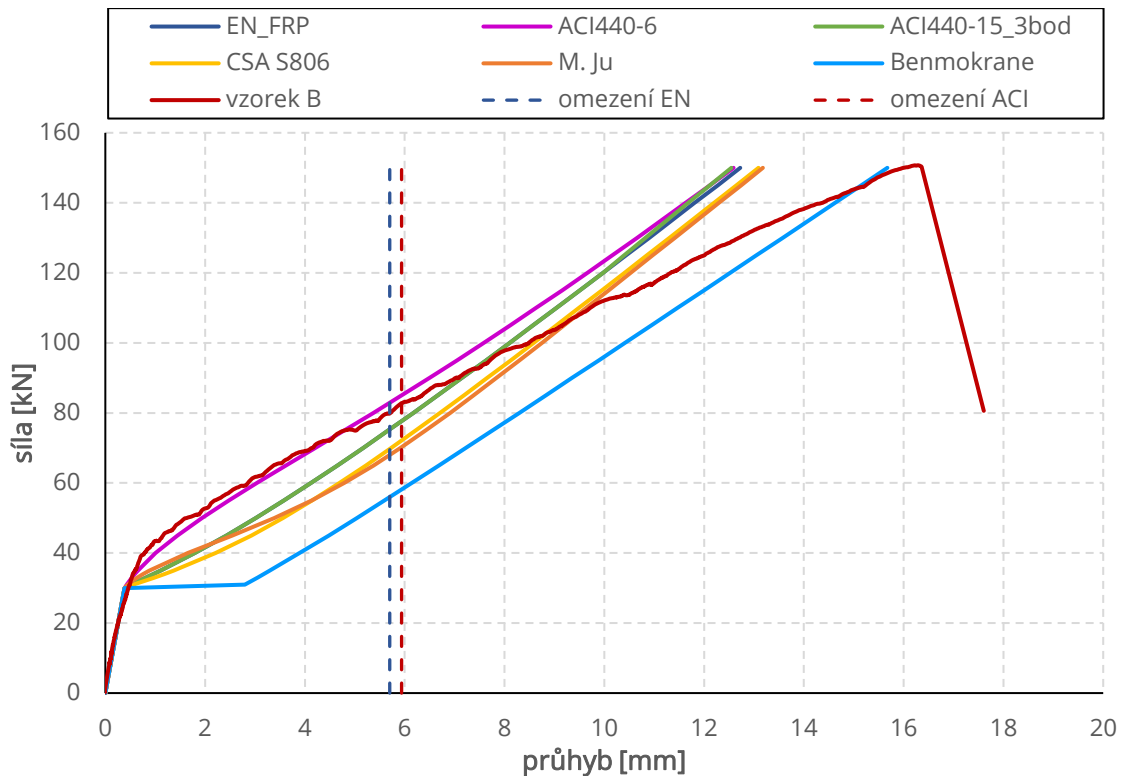
Při zatížení 150 kN je výsledný průhyb nosníku výpočtem podhodnocen o 22 % (16 mm z experimentu a 12,6 mm výpočtem).

Kanadský přístup CSA-S806-12 [ 8 ], který nezavádí efektivní moment setrvačnosti, ale upravuje výpočet konečného průhybu, předpokládá po vzniku trhlin větší průhyby, než kterých je dosaženo při experimentu. Od zatížení cca 80 kN připomíná průběh křivky lineární závislost průhybu a síly, sklon je však strmější než při experimentu a tím pádem je předpokládaná tuhost ve výpočtu větší než reálná tuhost průřezu. Zatímco při zatížení 60 kN je ještě průhyb nadhodnocen o 64 %, při zatížení 150 kN je průhyb podhodnocen o 18 % (16 mm z experimentu a 13,1 mm výpočtem).

Výpočet založený na studii [ 10 ] dle M. Ju do zatížení cca 110 kN vykazuje větší průhyby než jakých je dosaženo při experimentu. Průhyb je tedy v této části zatěžovacího procesu nadhodnocován a to až o 110 % (při zatížení 40 kN je reálný průhyb 0,8 mm a výpočtem je stanoven na 1,7 mm). Po překonání síly 110 kN se závislost průhybu a síly jeví jako lineární, ale se strmější směrnici, a tím pádem také s větší tuhostí. Výsledný průhyb při zatížení 150 kN je výpočtem podhodnocen o 18 % (16 mm z experimentu a 13,2 mm výpočtem).

Poslední vyšetřovaný přístup dle Benmokrana [ 12 ] vykazuje při konečném zatížení 150 kN největší shodu s experimentem, odchylka je pouze 2,2 % (průhyb 16 mm z experimentu a 15,7 mm výpočtem). Byť se na základě této shody jeví přístup jako nejpresnější, z průběhu křivek vystihující závislost průhybu na síle je patrné, že průhyb je od vzniku trhlin až do konečného zatížení 150 kN významně nadhodnocován. Je možné pozorovat výrazný nárůst průhybu bezprostředně po překonání momentu na mezi vzniku trhlin. Podrobněji byl průběh křivky rozebrán také v kapitole 6.3.2.

Jak již bylo zmíněno výše, průhyby byly spočítány pro zatížení odpovídající mezní únosnosti nosníku (150 kN). Průhyb je ale potřeba omezit v rámci mezního stavu použitelnosti. Každá norma limituje hodnotu průhybu na konstrukci v odlišném poměru ku rozpětí konstrukce. ČSN EN 1992-1-1 [ 1 ] omezuje okamžitý průhyb konstrukce na 1/500 rozpětí, zatímco americké normy [ 4 ] a [ 5 ] stejně jako kanadský předpis CSA-S806-12 [ 8 ] omezují okamžitý průhyb na 1/480 rozpětí. V případě evropského předpisu je limitní hodnota 5,7 mm, v případě 1/480 je limit roven 5,94 mm. Oba tyto limity jsou zaneseny do následujícího graf. 9.5.



graf. 9.5: srovnání průhybu ze zkoušek a z analytické studie v MSP – kompozitní výztuž

Limitní hodnoty průhybu je při reálném experimentu dosaženo při zatížení cca 80 kN a průhyby z analytické studie jsou proto v následující tabulce srovnány při tomto zatížení:

tab. 9.4: srovnání experimentu a analytické studie při dosažení MSP, zatížení 80 kN – kompozitní výztuž

křivka	průhyb [mm]	průhyb [%]
vzorek B	5,73	100
EN_FRP	6,17	108
ACI 440-06	5,37	94
ACI 440-15	6,17	108
CSA S806	6,71	117
M. Ju	6,91	121
Benmokrane	8,29	145

Ačkoli bylo v předchozím textu poukázáno na několik nepřesností různých předpisů, při zatížení 80 kN, které u experimentu znamenalo dosažení mezního stavu použitelnosti, jsou vypočtené hodnoty průhybu pro většinu předpisů přijatelné. Kromě normy ACI 440.1R-06 [ 4 ] všechny ostatní přístupy průhyb odpovídající zatížení 80 kN nadhodnocují oproti experimentu. Nejkonzervativnějším přístupem se opět jeví přístup dle Benmokrana [ 12 ], neboť vypočtené průhyby jsou v tomto případě až o 45 % větší. Průhyb dle [ 4 ] vychází sice menší než při reálné zkoušce, rozdíl však činí pouze 6 %, a proto i tento předpis je možné akceptovat.

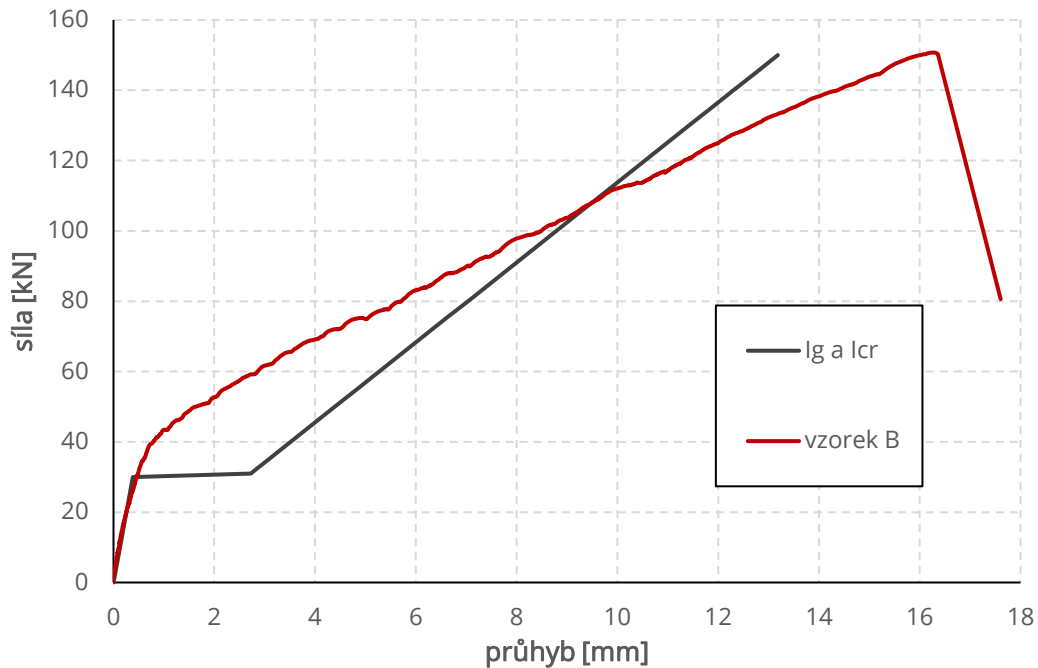


### 9.3. NAVRŽENÉ ÚPRAVY PRO NALEZENÍ IDEÁLNÍ KŘIVKY PRO KOMPOZITNÍ VÝZTUŽ

Jak bylo popsáno v předchozí kapitole, žádný z předpisů nepopisuje chování nosníku zatíženého tříbodovým ohybem s úplnou přesností v celém průběhu zatěžování. Pro nižší zatížení je možné využít vztahy podle americké normy ACI 440.1R-06 [ 4 ], pro maximální zatížení odpovídající meznímu stavu únosnosti je pak nejpřesnější přístup dle Benmokrana [ 12 ], který je ale pro značnou část zatěžování významně odchýlen od reality. Cílem této části je proto nalezení nejvýstižnějšího vztahu, díky kterému by bylo možné při tříbodovém ohybu stanovit průhyb nosníku tak, aby co nejvíce odpovídal realitě. Snahou je tedy nalézt takovou křivku vyjadřující závislost průhybu na síle, která by nejvíce kopírovala křivku získanou z experimentu.

Hlavním kritériem, které ovlivňuje průhyb konstrukce, je ohybová tuhost průřezu. Ohybová tuhost průřezu je vyjádřena součinem modulu pružnosti a momentu setrvačnosti. Zatímco modul pružnosti je daný a je konstantní pro libovolné zatížení, moment setrvačnosti je proměnnou závislou na aktuálním zatížení, které udává, jak moc je průřez porušený trhlinou. Většina uvedených přístupů zavádí mezistupeň mezi neporušeným a porušeným průřezem v podobě efektivního momentu setrvačnosti. V první řadě je však potřeba ověřit, jestli moment setrvačnosti porušeného průřezu, značeno  $I_{cr}$ , dostatečně vystihuje limitní nejmenší tuhost průřezu. Pro názornost byl průhyb spočítán pouze s momentem setrvačnosti neporušeného průřezu (značeno  $I_g$ ) až do vzniku trhlin a od vzniku trhlin byl okamžitě použit moment setrvačnosti plně porušeného průřezu (značeno  $I_{cr}$ ), který byl stanoven dle vzorce ( 5.9 ). Moment setrvačnosti porušeného průřezu je shodný pro všechny přístupy a vychází z rovnosti statických momentů plochy tlačeného betonu a tažené výztuže.

Na graf. 9.6 je možné pozorovat, že křivky z pochopitelných důvodů (zanedbání přechodného stavu mezi neporušeným a plně porušeným průřezem) nemají obdobný průběh, důležitým jevem je však sklon křivek po vzniku trhlin. Směrnice analytické křivky má strmější sklon než křivka z experimentu. Je tak možné tvrdit, že teoretická tuhost plně porušeného průřezu je větší než reálná tuhost průřezu. Moment setrvačnosti porušeného průřezu  $I_{cr}$  tak nevystihuje reálný stav a je potřeba ho zredukovat. Vyšší teoretickou tuhost je možné přisuzovat dokonalé soudržnosti výztuže s betonem, se kterou je ve výpočtu uvažováno. Ve skutečnosti je příspěvek výztuže k momentu setrvačnosti průřezu menší, než s jakým je uvažováno.



graf. 9.6: srovnání teoretického průhybu pro plný a porušený průřez s průhybem z experimentu

Je patrné, že přechod mezi neporušeným a plně porušeným průřezem je postupný, není tak možné okamžitě použít moment setrvačnosti porušeného průřezu. Z toho důvodu je zaveden efektivní moment setrvačnosti  $I_e$ , který v závislosti na zatížení interpoluje mezi maximální hodnotou v podobě momentu setrvačnosti neporušeného průřezu  $I_g$  a minimální hodnotou v podobě redukovaného momentu setrvačnosti plně porušeného průřezu  $I_{cr}$ . V následující části budou odvozeny vzorce pro efektivní moment setrvačnosti  $I_e$  pramenící ze dvou již existujících předpisů.

### 9.3.1. ÚPRAVA VZTAHU DLE BENMOKRANA

Vztah pro efektivní moment setrvačnosti dle Benmokrana ze studie [12] má následující podobu:

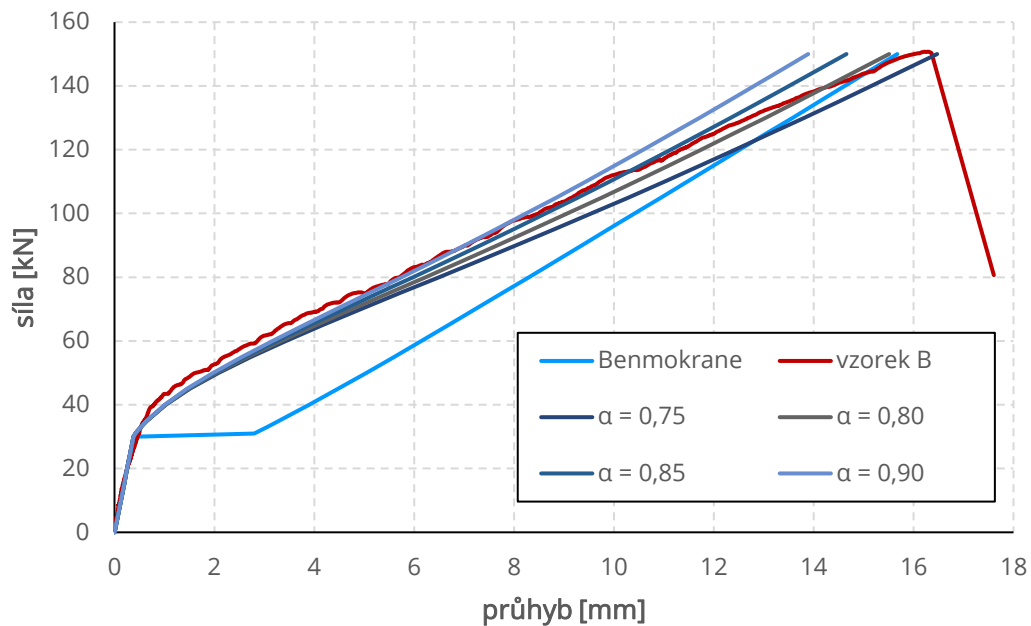
$$I_e = \alpha_0 I_{cr} + \left( \frac{I_g}{\beta_0} - \alpha_0 I_{cr} \right) \left[ \frac{M_{cr}}{M_a} \right]^3 \quad (5.24)$$

Viditelně do něj vstupují dva empirické součinitele  $\alpha_0$  a  $\beta_0$ . První z uvedených součinitelů redukuje spolupůsobení výztuže s betonem a druhý součinitel zrychluje přechod z momentu setrvačnosti plného průřezu  $I_g$  na moment setrvačnosti porušeného průřezu  $I_{cr}$ . Jak bylo uvedeno výše, spolupůsobení výztuže s betonem je potřeba redukovat, a proto je součinitel  $\alpha_0$  zachován a bude jen měněna jeho hodnota pro nalezení ideální křivky. Potřeba rychlejšího přechodu mezi plným průřezem na trhlinou plně porušený průřez nebyl vypořizován, proto je součinitel  $\beta_0$  uvažován roven jedné a v následujícím vztahu nefiguruje. Vztah pro efektivní moment byl tedy upraven do následující podoby:

$$I_e = \alpha I_{cr} + (I_g - \alpha I_{cr}) \left[ \frac{M_{cr}}{M_a} \right]^3 \quad (9.1)$$

Ozn.	Popis
$M_{cr}$	moment na mezi vzniku trhlin
$M_a$	maximální vzniklý moment
$I_g$	moment setrvačnosti neporušeného průřezu
$I_{cr}$	moment setrvačnosti trhlinou porušeného průřezu
$\alpha$	redukční součinitel zohledňující spolupůsobení výztuže s betonem

Pro nalezení nejlepší hodnoty součinitele  $\alpha$  byly sestaveny odpovídající křivky pro hodnoty 0,75 až 0,9. Křivky jsou srovnány s experimentem v graf. 9.7. Pro porovnání byla zanesena také křivka původního předpisu dle [ 12 ] s původním vzorcem pro efektivní moment setrvačnosti ( 5.24 ).

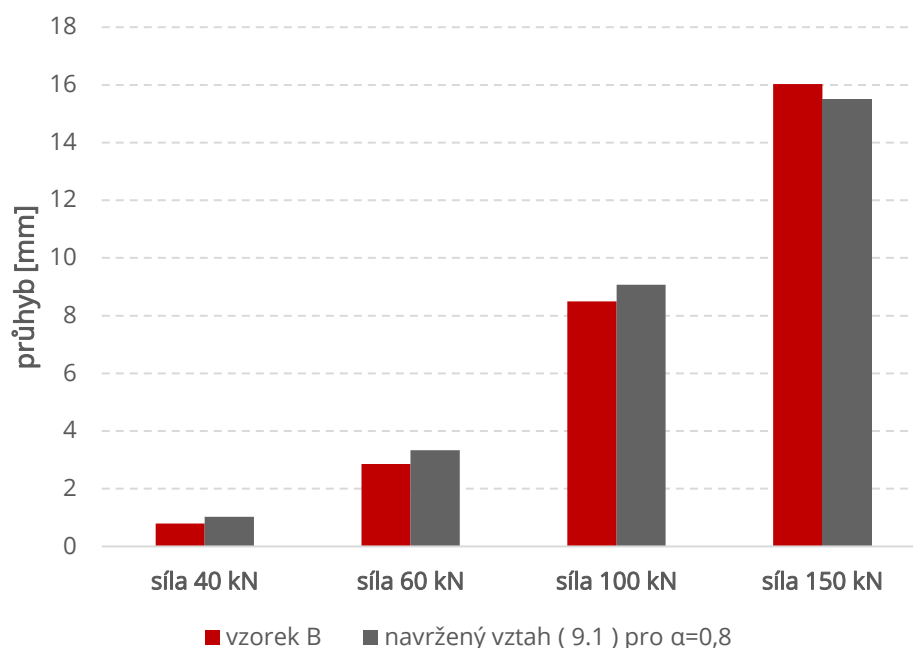


graf. 9.7: závislost síly a průhybu v polovině rozpětí - hledání ideální křivky pro kompozitní výztuž

Vhodnou hodnotou součinitele  $\alpha$  se ukázala hodnota  $\alpha = 0,8$ . Křivka vyjadřující závislost průhybu na zatěžovací síle se při použití součinitele  $\alpha = 0,8$  ve vzorci ( 9.1 ) nejlépe přiblížila stejné křivce z reálného experimentu. Sklon křivek po vzniku trhlin je velmi obdobný a průřez tak při výpočtu vykazuje stejnou tuhost jako při experimentu. Průhyb výpočtem sice vychází až do zatížení cca 140 kN vždy o něco vyšší než reálný průhyb z experimentu, jedná se ale o konzervativní nadhodnocení průhybu a je možné ho akceptovat. Při zatížení 40 kN je průhyb nadhodnocen o 30 %, v absolutních jednotkách se jedná o navýšení průhybu 0,8 mm z experimentu o 0,23 mm při výpočtu. Výsledný průhyb při finálním zatížení 150 kN vychází z výpočtu nižší než z experimentu, odchylka je však pouze 3 % (16 mm z experimentu a 15,5 mm výpočtem). Číselné srovnání navrženého výpočtu s experimentem je uvedeno v tab. 9.5 a v graf. 9.8.

tab. 9.5: srovnání navrženého vztahu s experimentem

křivka		průhyb [mm]			
		síla 40 kN	síla 60 kN	síla 100 kN	síla 150 kN
vzorek B		0,79	2,86	8,49	16,03
navržený vztah ( 9.1 ) pro $\alpha=0,8$		1,02	3,33	9,07	15,51
rozdíl	abs.	0,23	0,47	0,58	-0,52
	%	29,59	16,61	6,79	3,22



graf. 9.8: srovnání navrženého vztahu s experimentem

Výsledný navržený vztah pro efektivní moment setrvačnosti pro nosník vyztužený kompozitní GFRP výztuží zatížený tříbodovým ohybem má následnou podobu:

$$I_e = 0,8 \cdot I_{cr} + (I_g - 0,8 \cdot I_{cr}) \left[ \frac{M_{cr}}{M_a} \right]^3 \quad (9.2)$$

Je možné pozorovat, že hodnota součinitele  $\alpha$  redukující spolupůsobení výztuže s betonem je velmi podobná původnímu součiniteli  $\alpha_0$  ze vztahu ( 5.24 ) dle Benmokrana [ 12 ]. V původním vztahu byl součinitel  $\alpha_0 = 0,84$  a v navrženém vztahu je  $\alpha = 0,8$ . O obdobné redukci spolupůsobení kompozitní výztuže s betonem se tak přesvědčily i předchozí studie.

### 9.3.2. ÚPRAVA VZTAHU DLE ACI 440.1R-06

V kapitole 9.2 a konkrétně na graf. 9.3 bylo možné pozorovat, že křivka založená na americké normě ACI 440.1R-06 [ 4 ] dosahuje při nižším zatížení velmi dobré shody s křivkou z experimentu. Při analýze vztahu pro efektivní moment setrvačnosti ( 5.13 ), který norma udává, je možné pozorovat, že se jedná o obdobný vztah jako v případě studie [ 12 ] nebo navržený vztah v kapitole 9.3.1.

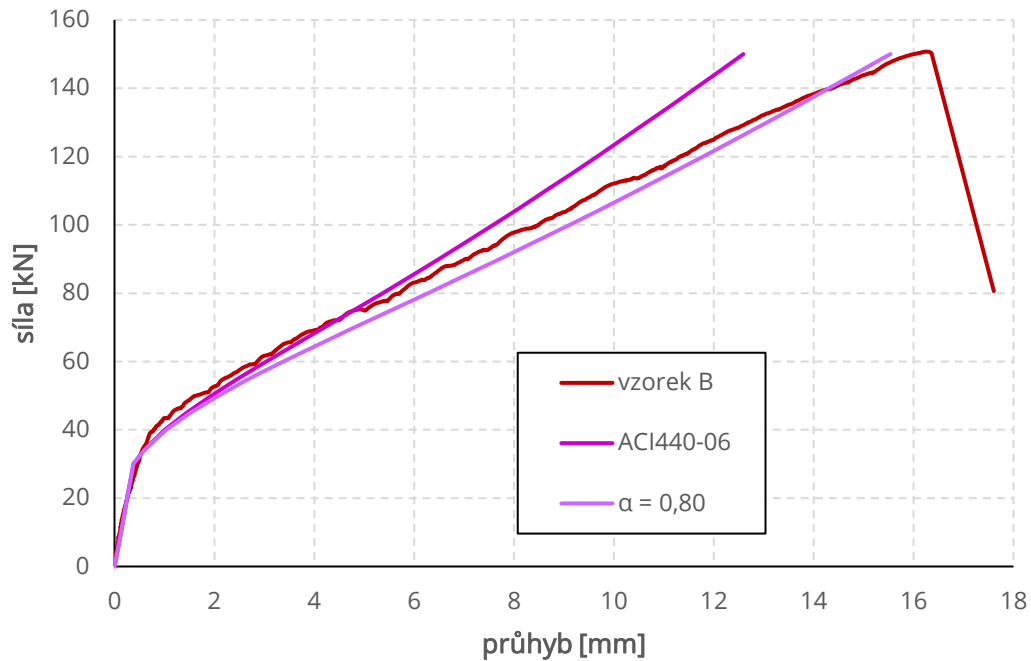
$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 \beta_d I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] I_{cr} \leq I_g \quad (5.13)$$

Rozdíl je v zavedeném redukčním součiniteli  $\beta_d$ , který podobně jako v případě součinitele  $\beta_0$  dle Benmokrana [ 12 ] redukuje vliv momentu setrvačnosti plného průřezu  $I_g$ , a urychluje tím přechod na moment setrvačnosti porušeného průřezu  $I_{cr}$ . Na rozdíl od Benmokrana [ 12 ] není tento součinitel pevně daný, ale závisí na stupni výztužení. Jak je patrné z graf. 9.3 právě průběh křivky po vzniku první trhliny je v dostatečné shodě s experimentem. Přechod mezi momentem setrvačnosti neporušeného průřezu a momentem setrvačnosti plně porušeného průřezu je tedy předpisem [ 4 ] vystižen adekvátně a není proto potřeba součinitel  $\beta_d$  pro tříbodový ohyb měnit. Je také potřeba poznamenat, že součinitel pro zkoumaný případ dosahuje hodnoty  $\beta_d = 0,98$  a je tedy velmi blízko limitní hodnotě  $\beta_d = 1$ .

Po překonání zatížení 80 kN je patrné, že teoretická tuhost průřezu uvažovaná ve výpočtu je větší než reálná tuhost při experimentu. Je proto potřeba redukovat efektivní moment setrvačnosti. Redukce je navržena obdobně jako při odvození vztahu ( 9.1 ), resp. ( 9.2 ). Zavedením redukčního součinitele  $\alpha = 0,8$  do vztahu ( 5.13 ) obdržíme následující vztah a jeho použitím při výpočtu průhybu dostaneme křivku uvedenou společně s původní křivkou dle [ 4 ] v graf. 9.9.

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 \beta_d I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] \alpha I_{cr} \leq I_g \quad (9.3)$$

Ozn.	Popis
$M_{cr}$	moment na mezi vzniku trhlin
$M_a$	maximální vzniklý moment
$I_g$	moment setrvačnosti neporušeného průřezu
$I_{cr}$	moment setrvačnosti trhlinou porušeného průřezu
$\beta_d$	redukční součinitel, $\beta_d = \frac{1}{5} \left(\frac{\rho_f}{\rho_{fb}}\right) \leq 1,0$
$\alpha$	redukční součinitel zohledňující spolupůsobení výztuže s betonem, = 0,80



graf. 9.9: závislost síly a průhybu v polovině rozpětí – hledání ideální křivky pro kompozitní výztuž

Křivka po úpravě má obdobný sklon jako křivka z experimentu což značí, že ve výpočtu bylo dosaženo reálné tuhosti průřezu. Průhyb při zatížení 150 kN se po úpravě liší pouze o 3 % (16 mm z experimentu a 15,5 mm výpočtem).

### 9.3.3. SHRNUTÍ NAVRŽENÝCH ÚPRAV

Byly představeny dvě úpravy existujících vztahů vedoucí na dva analytické modely. V prvním případě – navržený **model 1**, se jednalo o úpravu vztahu pramenícího ve studii [ 12 ]. Redukce soudržnosti se ukázala jako adekvátní a byla navržena změna součinitele redukující přechod mezi neporušeným a porušeným průřezem.

V druhém případě byl navržen **model 2** vycházející z americké normy [ 4 ]. Pro původní předpis byl vhodně uvažován přechod z neporušeného průřezu na trhlinou porušený průřez, ale bylo potřeba redukovat soudržnost výztuže a betonu. Pro tyto účely byl zaveden součinitel  $\alpha = 0,8$ , který snižuje moment setrvačnosti plně porušeného průřezu uvažující dokonalou soudržnost výztuže s betonem.

Oba modely se liší pouze ve způsobu redukce přechodu z momentu setrvačnosti neporušeného průřezu na moment setrvačnosti plně porušeného průřezu. Zatímco model 1 přechod vůbec neredukuje, neboť se to při porovnání s provedeným experimentem nejevilo jako potřebné, model 2 redukuje tento přechod v závislosti na stupni vyztužení průřezu. Pro konkrétní případ řešený v této práci (nosník zatížený třibodovým ohybem) se redukční součinitel svou hodnotou  $\beta_d = 0,98$  blíží limitní hodnotě  $\beta_d = 1$  a výsledky obou modelů jsou proto tedy velmi podobné. V rozsahu této práce není možné stanovit, zda je přechod z neporušeného průřezu na porušený průřez potřeba více redukovat pro odlišný způsob zatěžování.

Navržené analytické modely je možné považovat za vypovídající pouze v případě prostě podepřeného nosníku zatíženého jediným břemenem uprostřed rozpětí, tzn. třibodový ohyb. Pro odlišnou konfiguraci zkoušky je potřeba ověřit přesnost navržených vztahů.

tab. 9.6: shrnutí navržených úprav pro výpočet průhybu prvků vyztužených kompozitní výztuží

předpis	vzorec pro výpočet průhybu
navržený model 1	$I_e = \alpha I_{cr} + (I_g - \alpha I_{cr}) \left[ \frac{M_{cr}}{M_a} \right]^3$ $\alpha = 0,8$
navržený model 2	$I_e = \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \beta_d I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] \alpha I_{cr}$ $\alpha = 0,8$ $\beta_d = \frac{1}{5} \left( \frac{\rho_f}{\rho_{fb}} \right) \leq 1,0$

## 10. PARAMETRICKÁ STUDIE PRVKŮ VYZTUŽENÝCH FRP VÝZTUŽÍ

V předchozích kapitolách byly porovnány jednotlivé přístupy na konkrétní konstrukci s jednotnými předepsanými vstupními parametry. Nyní se zaměříme na vliv jednotlivých parametrů, které vstupují do výpočtu průhybu prvků vyztužených FRP výztuží. Tato studie se zaměří konkrétně na ty parametry, u kterých se předpokládá významnější vliv na průhyb konstrukce. Krom empirických součinitelů se jedná konkrétně zejména o pevnost betonu v tahu  $f_{ct}$ , modul pružnosti výztuže  $E_r$  a stupeň vyztužení  $\rho$ .

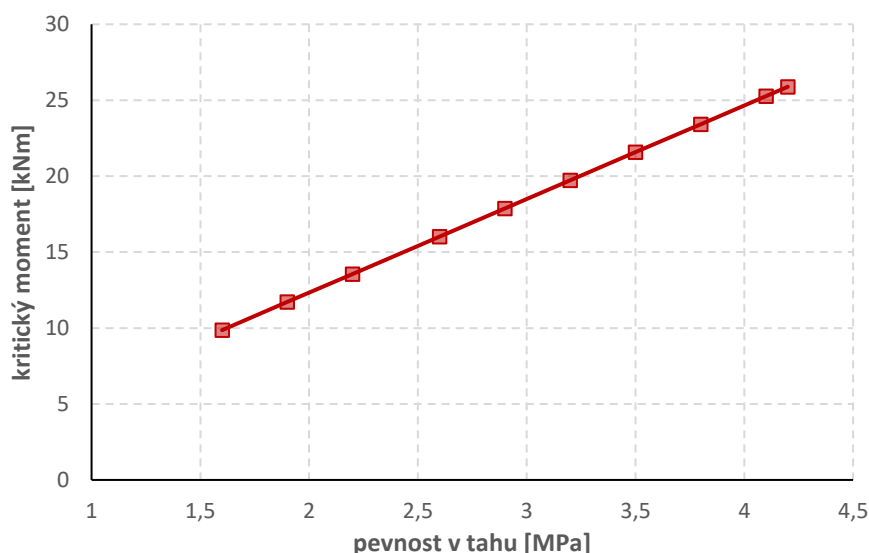
Všechny vstupní parametry, které nejsou právě zkoumány, jsou uvažovány dle tab. 6.1 a tab. 6.2.

### 10.1. VLIV TAHOVÉ PEVNOSTI BETONU

Pevnost betonu v tahu  $f_{ct}$  má jednoznačný vliv na vznik první trhliny v betonu, tedy na kritický moment  $M_{cr}$ . Jedná se o okamžik do kdy působí celý neporušený průřez a po jeho dosažení už působí pouze tlačaná část betonu a tažená výztuž. Vztah mezi kritickým momentem a tahovou pevností udává vztah ( 5.8 ).

Každý z přístupů jinak pracuje s kritickým momentem na vzniku trhlin po okamžiku vzniku trhlin. Proto má tahová pevnost betonu vliv nejen do vzniku trhlin, ale také po tomto okamžiku. Na následujících grafech je možné pozorovat, jak se mění kritický moment a průhyb při zatížení 100 kN s rostoucí tahovou pevností betonu. Kritický moment je stejný pro všechny přístupy, zatímco průhyb se liší v závislosti na předepsaných vztazích.

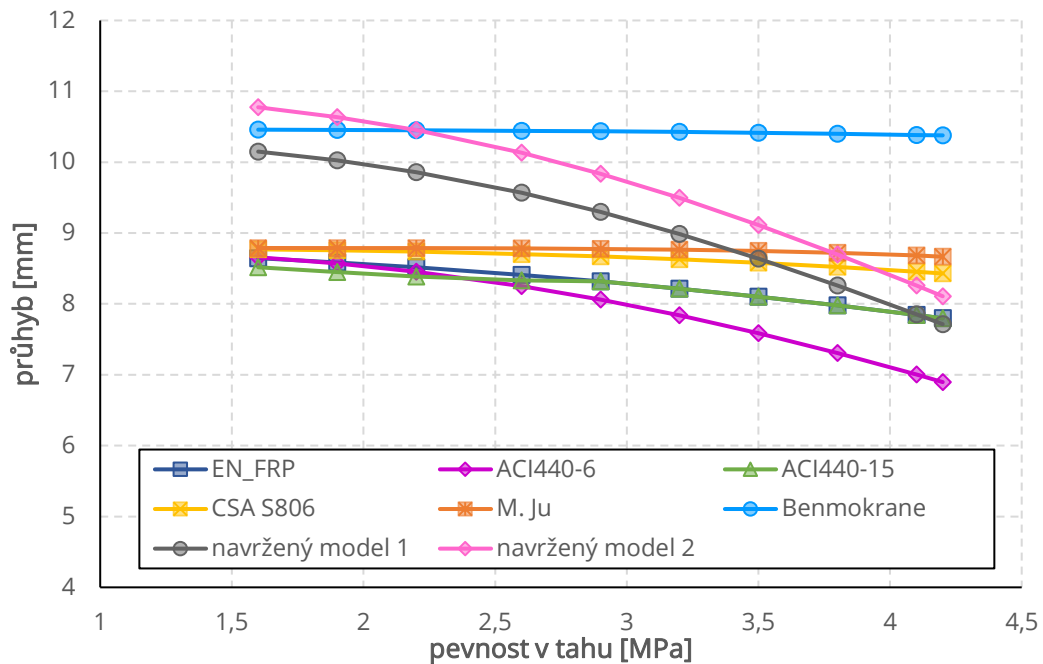
Pevnosti betonu v tahu byly voleny podle tříd betonu od 1,6 MPa do 4,2 MPa (třídy C12/15 až C55/67).



graf. 10.1: závislost kritického momentu na pevnosti betonu v tahu

Závislost mezi kritickým momentem na vzniku trhlin a tahovou pevností betonu je lineární a kritický moment roste společně s pevností v tahu. Tuto závislost je možné pozorovat i ze vztahu ( 5.8 ).





graf. 10.2: závislost průhybu při síle 100 kN na pevnosti betonu v tahu

U všech křivek je možné pozorovat pokles hodnot průhybu s narůstající tahovou pevností, což značí, že s vyšší tahovou pevností je nosník tužší a dosahuje při stejném zatížení menšího průhybu. U křivky založené na vztahu, který odvodil Benmokrane ve své práci [ 12 ], je ale pokles průhybu s rostoucí tahovou pevností minimální. Nárůst tahové pevnosti, potažmo kritického momentu na mezi vzniku trhlin, má v tomto případě jen nepatrný vliv na dosažený průhyb a je možné předpokládat, že průhyb je více závislý na jiných vstupních parametrech. Je potřeba upozornit, že vztah efektivního momentu setrvačnosti dle [ 12 ] je založen na dvou empirických součinitelích  $\alpha_0$  a  $\beta_0$  jejichž vliv na vypočtený průhyb byl rozebrán v kapitole 9. Naopak, u křivky založené na upraveném vztahu vycházejícího z [ 12 ] ale zohledňující plynulý přechod mezi neporušeným a porušeným průřezem (navržený model 1, viz kapitola 9.3.1), je vliv tahové pevnosti betonu nejrazantnější. S rostoucí tahovou pevností a s rostoucím kritickým momentem se zvětšuje ohybová tuhost průřezu a výrazně klesá průhyb nosníku. V tomto upraveném vztahu pro efektivní moment setrvačnosti již nefiguruje součinitel  $\beta_0$  (je roven 1). Stejně razantní vliv tahové pevnosti betonu na průhyb je možné pozorovat v případě navrženého modelu 2, který vychází z ACI 440.1R-06 [ 4 ].

Křivka založená na vztahu odvozeném v práci jihokorejských autorů [ 10 ] a křivka založená na vztazích uvedených v kanadské normě [ 8 ] vykazuje také jen slabý pokles průhybu. Nárůst tahové pevnosti, potažmo kritického momentu na mezi vzniku trhlin, opět nemá v těchto případech značný vliv na dosažený průhyb a je možné předpokládat, že průhyb je více závislý na jiných vstupních parametrech. V případě kanadského předpisu CSA-S806-12 [ 8 ] je vliv kritického momentu zahrnut srze délku neporušené části nosníku  $L_g$  (viz vztah ( 5.17 )). V případě studie [ 10 ] je vliv kritického momentu pozorovatelný ve výpočtu efektivního momentu setrvačnosti (vztah ( 5.21 )), vstupuje zde však ve vyšší mocnině v závislosti na stupni vyztužení.

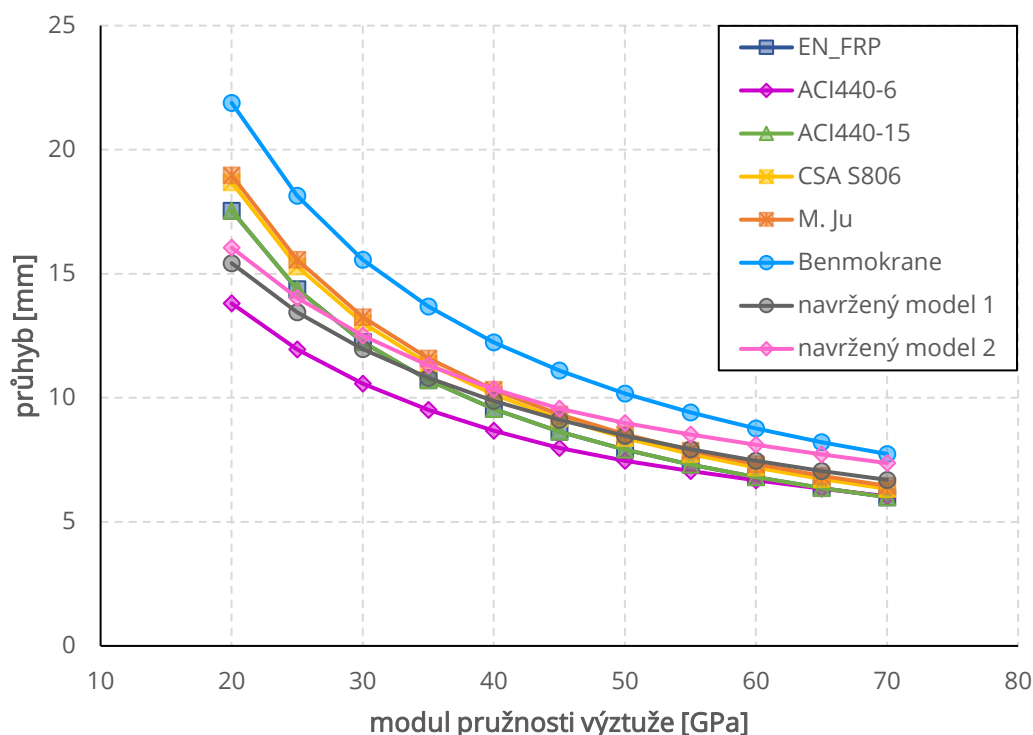
K většímu poklesu průhybu s rostoucí tahovou pevností betonu pak dochází v případě výpočtu dle ČSN EN 1992-1-1 [ 1 ], kdy je moment na mezi vzniku trhlin zahrnut ve výpočtu pouze ve druhé mocnině. Pro americký přístup ACI 440.1R-06 [ 4 ] platí ještě výraznější ztužení nosníku s nárůstem tahové pevnosti betonu. Průhyb při stálém zatížení 100 kN klesá s rostoucí pevností betonu v tahu. V případě normy [ 4 ] oproti [ 1 ] vstupuje kritický moment do výpočtu ve třetí mocnině.

Křivka založená na předpisu ACI 440.1R-15 [ 5 ] a vztahu pro součinitel  $\gamma$  odvozeném pro tříbodový ohyb v rámci této práce (viz kapitola 6.3.1) vykazuje obdobný pokles průhybu s rostoucí tahovou pevností betonu jako ČSN EN 1992-1-1 [ 1 ]. Pro nižší hodnoty tahové pevnosti jsou průhyby dle [ 5 ] nepatrně menší, od pevnosti v tahu cca 3 MPa jsou průhyby totožné s [ 1 ].

## 10.2. VLIV MODULU PRUŽNOSTI FRP VÝZTUŽE

Modul pružnosti výztuže vstupuje do výpočtu momentu setrvačnosti porušeného průřezu a tím pádem ovlivňuje tuhost průřezu a s ní související průhyb. Na rozdíl od pevnosti betonu v tahu nemá modul pružnosti výztuže vliv na vývoj průhybu do vzniku trhlin.

Následující graf vystihuje vývoj průhybu při zatížení 100 kN v závislosti na změně modulu pružnosti FRP výztuže. Modul pružnosti byl uvažován v rozmezí 20 – 70 GPa v kroku po 5 GPa.



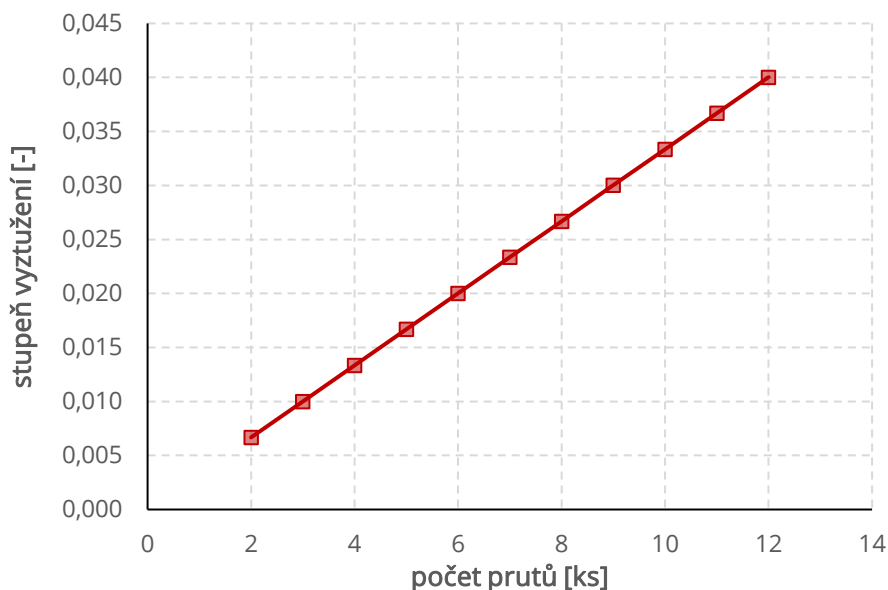
graf. 10.3: závislost průhybu při síle 100 kN na modulu pružnosti výztuže

U všech křivek je patrná značná nelineární závislost průhybu na modulu pružnosti výztuže. Průřez se s rostoucím modulem pružnosti výztuže stává tužším a při stejném zatížení dosahuje nosník menších průhybů. Ač se vliv modulu pružnosti výztuže jeví jako významný, příliš se neliší napříč přístupy. Průběhy křivek založených

na různých předpisech se zásadně nediferencují, pouze křivka založená na ACI 440.1R-06 [ 4 ] a křivky založené na navržených modelech (kapitola 9.3) mají o něco mírnější pokles. Dalo by se říct, že jsou tyto tři přístupy v souvislosti s nárůstem modulu pružnosti výztuže více konzervativní než ostatní.

### 10.3. VLIV STUPNĚ VYZTUŽENÍ

Stupeň vyztužení udává poměr výztuže ku betonu a je definován vztahem ( 5.11 ). Jeho vliv se ve výpočtu průhybu projeví až v momentě vzniku trhlin, tedy v okamžiku dosažení tahové pevnosti betonu.



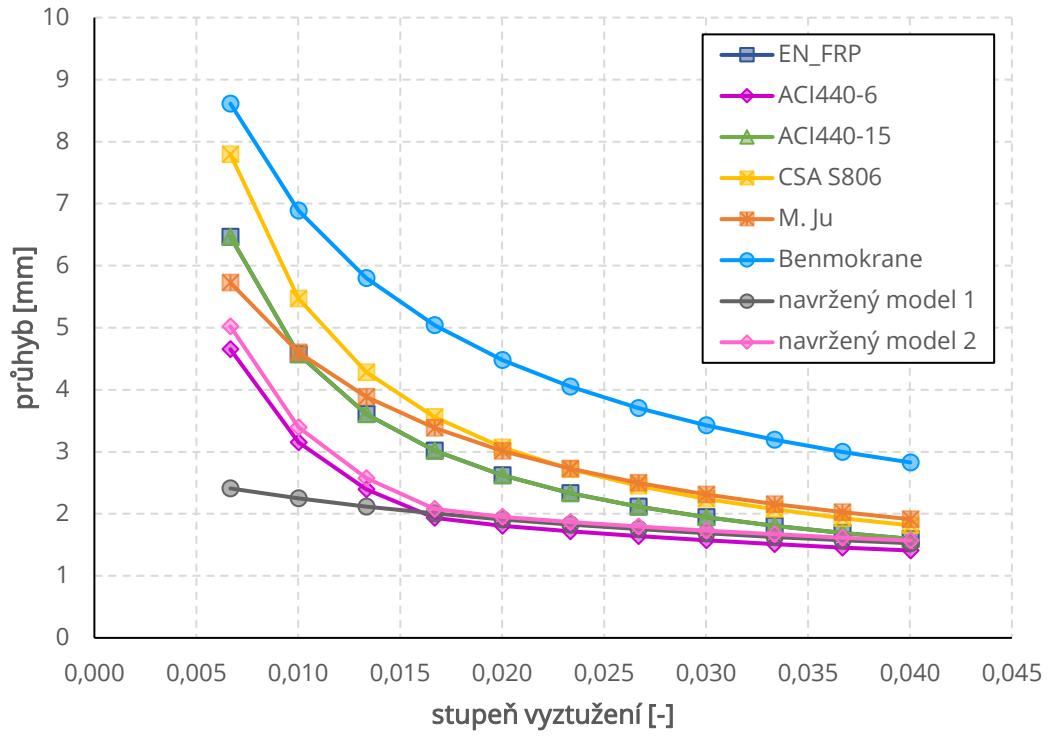
graf. 10.4: závislost stupně vyztužení na počtu podélných prutů výztuže

Pro účely této studie bude stupeň vyztužení měněn skrze počty prutů výztuže. Rozměry prvku a tím pádem i plocha betonu zůstávají stejné. Účinná výška průřezu zůstává taktéž konstantní. Vliv počtu prutů podélné výztuže na stupeň vyztužení je dle předpokladu lineární a vystihuje jej graf. 10.4.

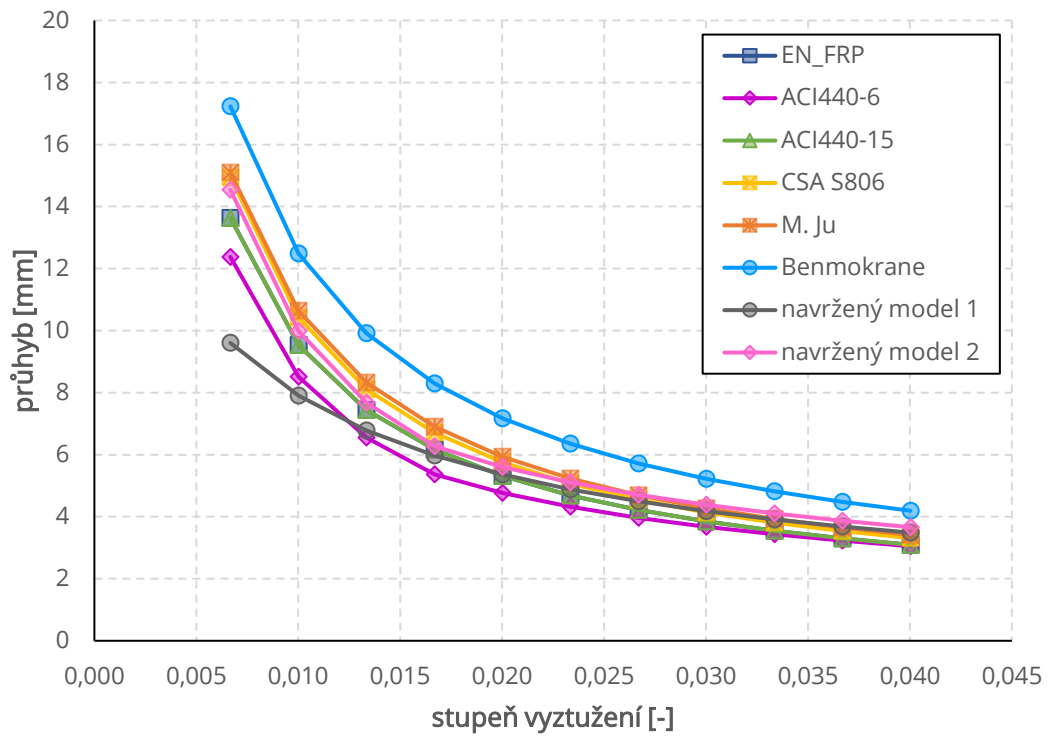
Vliv stupně vyztužení na průhyb konstrukce je ověřen ve více úrovních zatížení. Pro účely této práce bylo zvoleno zatížení 50 kN, 80 kN a 100 kN. Na následujících grafech je možné pozorovat chování konstrukce při tomto zatížení v závislosti na různém vyztužení.

U všech křivek je možné s rostoucím stupněm vyztužení pozorovat klesající průhyb. To platí pro všechny hodnoty zatěžovací síly. Při nejnižším z uvedených zatížení (50 kN) se průběhy jednotlivých křivek liší a každá klesá jinou rychlostí. S rostoucím zatížením se však průběh křivek sjednocuje a vliv stupně vyztužení začíná mít obdobný vliv na vypočtený průhyb nosníku napříč jednotlivými přístupy.

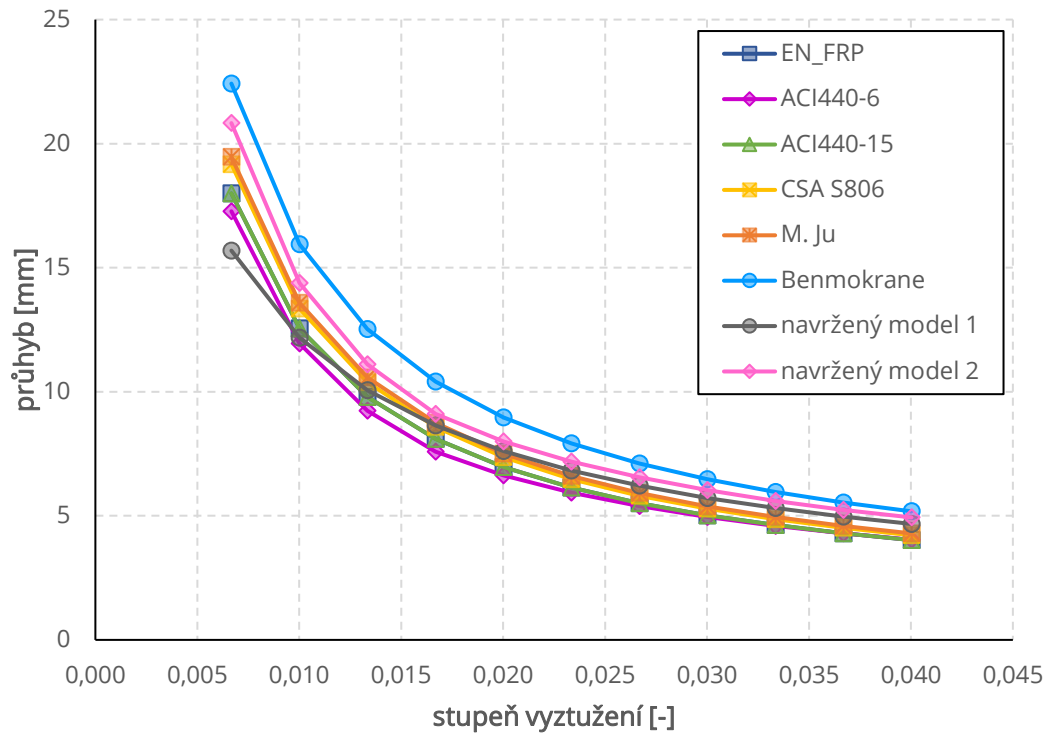
Pro všechny případy zatížení platí, že největších hodnot průhybu dosahujeme za použití vzorců dle Benmokrana [ 12 ] a to pro všechny hodnoty stupně vyztužení. Nejmenšího průhybu je možné se dopočítat použitím navrženého vztahu (model 1) v kapitole 9.3.1 (při nižším stupni vyztužení) nebo vztahů založených na ACI 440.1R-06 [ 4 ] (pro stupeň vyztužení 0,016 a výše).



graf. 10.5: závislost průhybu při síle 50 kN na stupni vyztužení



graf. 10.6: závislost průhybu při síle 80 kN na stupni vyztužení



graf. 10.7: závislost průhybu při síle 100 kN na stupni vyztužení

Navrhovaný model 1 (kapitola 9.3.1) má nejvíce proměnný sklon křivky v závislosti na zatěžovací síle. Při nižším zatížení je průhyb téměř nezávislý na stupni vyztužení, s rostoucím zatížením se ale závislost zvětšuje. Při zatížení 100 kN má křivka modelu 1 obdobný průběh jako křivky ostatních předpisů.

Navrhovaný model 2 (kapitola 9.3.2) kopíruje sklon křivky ACI 440.1R-06 [ 4 ] ze které byl odvozen. Ve vztahu pro efektivní moment setrvačnosti se v obou případech objevuje součinitel závislý právě na stupni vyztužení.

Při zatížení 100 kN už je možné pozorovat obdobné sklony u všech uvedených křivek. Je tedy jasné, že při tomto zatížení má stupeň vyztužení sice značný vliv na výpočet průhybu, jeho vliv se však neliší napříč jednotlivými přístupy. Vztah mezi průhybem a stupněm vyztužení není lineární. Průhyb s rostoucím stupněm vyztužení nelineárně klesá, zprvu rychleji a s vyššími hodnotami stupně vyztužení se vliv na průhyb zmenšuje.

## 11. ZÁVĚR

Předmětem této práce bylo stanovení průhybu betonového nosníku vyztuženého ve dvou variantách. V prvním případě se jedná o klasickou ocelovou výztuž, v druhém případě je nosník vyztužen nekovovou kompozitní výztuží. Návrhové přístupy nejsou z hlediska výstižného popisu chování pro prvky vyztužené kompozitní výztuží konzistentní a předpokládá se jejich úprava na základě poznatků o FRP výztuží. Chování prostého nosníku ve dvou variantách vyztužení a zatíženého silou v polovině rozpětí bylo zkoumáno jak variací analytických přístupů, tak i na numerických modelech z programu ATENA. Výsledky byly srovnány s reálnými experimenty a na základě tohoto srovnání bylo vyvozeno několik závěrů.

V případě nosníku vyztuženého ocelovou výztuží se numerický model z programu ATENA přiblížil reálnému chování konstrukce z experimentu. I přesto, že ke vzniku trhlin došlo v případě nelineární analýzy o něco později, tuhost po vzniku trhlin byla v obou případech obdobná. Analytické modely založené na dvou předpisech – ČSN EN 1992-1-1 [1] a ACI 318-14 [3], se od reálného chování nepatrně odchýlily a jejich teoretická ohybová tuhost se ukázala nižší. Pro konečné zatížení odpovídající meznímu stavu únosnosti bylo dosaženo menších průhybů, odchylka však činí méně než 20 %. Možnou příčinu odchýlení od reálného chování při použití analytických vzorců je možné hledat v absenci vlivu stupně vyztužení na výsledný průhyb. Je proto potřeba zvážit úpravu vzorce zahrnující právě stupeň vyztužení prvku.

Stejně jako pro prvek s ocelovou výztuží, byl vytvořen numerický model i pro nosník s FRP výztuží. V tomto případě byly však vytvořeny dva modely lišící se soudržností mezi výztuží a betonem. V jednom z modelů byla uvažována dokonalá soudržnost mezi výztuží a betonem, v tom druhém pak byla soudržnost redukována na základě excentrických pull-out testů z experimentu [17]. Tuhost obou modelů se ukázala ve velmi dobré shodě s experimentem a hodnoty průhybu tak do určitého zatížení byly v dobré shodě. Rozdíl se projevil v dosažené únosnosti, kdy u ani jednoho z numerických modelů nebylo dosaženo maximální síly odpovídající experimentu (experiment 150,7 kN, numerický model s dokonalou soudržností 133,8 kN a numerický model s redukovanou soudržností 117,3 kN).

Pro prvky vyztužené kompozitní FRP výztuží bylo vytvořeno šest analytických modelů, které vychází z vybraných normativních předpisů a aktuálních vědeckých studií. Každý z předpisů udává jiné vztahy pro výpočet průhybu prvku, který se nachází za mezí vzniku trhlin. Výsledkem jsou odlišné ohybové tuhosti a tím pádem také odlišné průhyby konstrukce v závislosti na použitém předpisu. Srovnání těchto analytických modelů s reálným experimentem bylo provedeno za účelem nalezení vztahu, který by byl pro průhyb nosníku vyztuženého FRP výztuží nejvíce vyhovující.

ČSN EN 1992-1-1 [1] obsahuje pouze vztahy pro konstrukce vyztužené běžnou výztuží a kompozitní výztuž tak není žádným způsobem zahrnuta. Při použití vzorců pro výpočet průhybu uvedených v této normě pro prvek vyztužený kompozitní výztuží tak dochází k zanedbání odlišných vlastností FRP materiálu a přijímají se předpoklady stanovené pro ocelovou výztuž. Srovnání vypočteného průhybu

s reálným experimentem poukázalo na odlišnou teoretickou tuhost průřezu po překonání kritického momentu na mezi vzniku trhlin vstupující do analytického výpočtu. Odlišná tuhost je graficky reprezentována různým náklonem křivky vyjadřující závislost průhybu a zatěžovací síly (viz graf. 9.3). Při dosažení maximální síly odpovídající meznímu stavu únosnosti, tzn. 150 kN, je rozdíl vypočteného a naměřeného průhybu 21 % (výpočet průhyb podhodnocuje). Při dosažení síly 80 kN, což při reálném experimentu odpovídá meznímu stavu použitelnosti, je rozdíl pouze 8 % a vypočtené hodnoty průhybu jsou naopak větší než experimentálně stanovené. Ač se rozdíl nezdá tak značný, ze sklonu křivek je patrné, že analytický model nepopisuje chování konstrukce adekvátně a je potřeba zvážit úpravu zavedených vztahů s ohledem na použitý materiál výztuže.

**ACI 440.1R-06** [ 4 ] je americkou normou a předchůdcem aktuálně platné ACI 440.1R-15 [ 5 ], zohledňující při návrhu betonových konstrukcí také kompozitní FRP výztuž. Oproti normě ACI 318-14 [ 3 ], jež udává vztahy pouze pro betonové prvky vyztužené ocelovou výztuží, zavádí do vztahu pro výpočet průhybu redukční součinitel  $\beta_d$ , který závisí na stupni vyztužení prvku, ale také na balančním stupni vyztužení, který se odlišuje od balančního stupně vyztužení prvků s ocelovou výztuží. Tento předpis prokázal při zatížení do 80 kN nejlepší shodu s experimentem. Vypočtené hodnoty průhybu se při tomto zatížení liší pouze o 6 % od experimentálně stanovených hodnot. U vyšších zatížení se projevil nesoulad výpočtu s experimentem a teoretická tuhost ve výpočtu se ukázala větší než při experimentu. S ohledem na dobrou shodu analytického výpočtu s reálnou zkouškou při nižším zatížení se tento vztah ukázal jako nevhodnější a byla navržena jeho úprava zaměřená na výstižnější predikci chování při vyšších hodnotách zatížení.

**ACI 440.1R-15** [ 5 ] je novější verzí americké normy ACI 440.1R-06 [ 4 ] a prezentuje nový vztah pro efektivní moment setrvačnosti konstrukcí vyztužených kompozitní výztuží. Podoba vztahu (konkrétně součinitele  $\gamma$ ) je závislá na způsobu zatížení konstrukce. V normě není uveden vztah pro tříbodový ohyb, a proto byl v této práci předpis pro součinitel  $\gamma$  odvozen na základě dostupných informací o spojitém zatížení a čtyřbodovém ohybu. Výsledné vypočtené průhyby jsou téměř totožné s průhyby dle ČSN EN 1992-1-1 [ 1 ] a to i přes to, že americká norma pracuje s FRP materiálem. V použitých vztazích však není nijak zahrnut stupeň vyztužení prvku. Pro korektní použití vztahů dle [ 5 ], které by vypovídaly o reálném chování nosníku, je potřeba správně určit hodnotu součinitele  $\gamma$  a zvážit vliv stupně vyztužení na výpočet průhybu .

**CSA-S806-12** [ 8 ] jako jediný z analyzovaných přístupů nezavádí pojem efektivního momentu setrvačnosti, ale přímo upravuje vzorce pro výpočet průhybu. Výpočet však vede k podobným výsledkům jako například dle studie [ 10 ]. Pro nižší hodnoty zatížení (do 100 kN) je vypočtený průhyb oproti experimentu nadhodnocován, pro vyšší zatížení je vypočtený průhyb naopak podhodnocován. Ač procentuální rozdíly nejsou velké (kolem 20 %), sklon křivky vyjadřující závislost průhybu na síle značí, že analytický model nevystihuje chování nosníku adekvátně a

uvažuje s jeho větší tuhostí. Opět ve vztahu není zahrnut stupeň vyztužení jehož vliv je potřeba pro budoucí použití vztahů zvážit.

**M. Ju** ve studii [ 10 ] představuje úpravu vztahu pro efektivní moment setrvačnosti se zaměřením na vliv kompozitní výztuže. Analytický model založený na tomto předpisu však neprokázal dostatečnou shodu s reálným experimentem. Obdobně jako u CSA-S806-12 [ 8 ] prokazuje nosník při zatížení do 100 kN větší průhyby než při zkouškách, a pro zatížení nad 100 kN jsou vypočtené průhyby menší než z experimentu. Je potřeba upozornit, že navržený vztah pro efektivní moment setrvačnosti byl odvozen na základě reálných zkoušek, ovšem nosníku zatíženého čtyřbodovým ohybem oproti touto prací řešenému tříbodovému ohybu.

**Benmokrane** [ 12 ] taktéž představil upravený vzorec pro efektivní moment setrvačnosti pro nosníky vyztužené FRP výztuží. Zavádí empirické součinitele  $\alpha_0$  a  $\beta_0$  které ovlivňují průběh křivky vystihující závislost průhybu a zatěžovací křivky. Ze srovnání křivek odpovídajících analytickému modelu a reálné zkoušce je patrné, že ač je po celou dobu zatěžování vypočtený průhyb nadhodnocován, při zatížení odpovídající meznímu stavu únosnosti dosahuje tento analytický model velmi dobré shody s reálným experimentem (rozdíl 2 %). S ohledem na tuto dobrou shodu byl podrobně rozebrán vliv jednotlivých empirických součinitelů vstupujících do výpočtu průhybu a byla navržena úprava existujícího vztahu tak, aby analytický model lépe popisoval chování nosníku v plném rozsahu zatížení.

**Navržený model 1** vznik úpravou vzorce dle Benmokrana [ 12 ]. Ve vzorci pro efektivní moment setrvačnosti byla navržena úprava empirických součinitelů  $\alpha_0$  a  $\beta_0$ . Vliv jednotlivých součinitelů na výpočet průhybu byl zkoumán na průběhu křivek vyjadřující závislost průhybu a zatěžovací síly. Analýza křivek vedla k náhradě empirických součinitelů. Jedná se o součinitel ovlivňující sklon křivky po vzniku trhlin ( $\alpha_0 = 0,84$  nahrazeno součinitelem  $\alpha = 0,8$ ) a součinitel ovlivňující přechod mezi neporušeným a plně porušeným průřezem (součinitel  $\beta_0 = 7$  nahrazen hodnotou  $\beta = 1$ ). Nový analytický model byl porovnán s provedeným experimentem a byla vyhodnocena odchylka od reálného chování. Model prokázal dobrou shodu s experimentem pro všechny hodnoty zatížení. Odchylka při dosažení mezního stavu použitelnosti (80 kN) činí 9 % a při dosažení mezního stavu únosnosti (150 kN) je odchylka pouze 3 %. O vypovídajícím chování analytického modelu svědčí také samotný průběh zatěžovací křivky, který je v souladu s reálnou zatěžovací křivkou z experimentu.

**Navržený model 2** vznik úpravou vzorce dle ACI 440.1R-06 [ 4 ]. Do vzorce pro efektivní moment setrvačnosti byl zaveden součinitel  $\alpha = 0,8$ , který obdobně jako v modelu 1, redukuje soudržnost mezi FRP výztuží a betonem a ovlivňuje tak sklon zatěžovací křivky po vzniku trhlin. Model také v nezměněné podobě zohledňuje stupeň vyztužení prvku skrze součinitel  $\beta_d$ . Vypočtené průhyby založené na tomto analytickém modelu se od reálného průhybu z experimentu liší pouze o necelých 10 % pro zatížení 80 kN a o 3% pro zatížení 150 kN. Obdobný sklon analytického modelu a reálné zkoušky poukazuje na výstižný popis tuhosti prvku nejen do vzniku



trhlin ale především po vzniku trhlin, a je tak možné považovat navržený model za zpřesnění oproti původnímu vztahu.

Součástí práce je také vzorový příklad, který představuje postup výpočtu průhybu dle ACI 440.1R-06 [ 4 ] a dle Benmokrana [ 12 ]. Výpočet je proveden pro dvě zatěžovací síly odpovídající meznímu stavu použitelnosti (80 kN) a meznímu stavu únosnosti (150 kN). Tyto síly byly stanoveny na základě provedeného experimentu. Vypočtený průhyb byl porovnán s reálným průhybem nosníku a také s limitním průhybem stanoveným jako  $1/480$  rozpětí. Následně byl průhyb spočítán také s použitím nově odvozených vztahů (navržený model 1 a navržený model 2). Výsledné hodnoty byly opět porovnány s experimentem i s limitní hodnotou. Srovnání s reálnou zkouškou poskytuje ověření správnosti navržených vztahů a svědčí o jejich vypovídající hodnotě.

## 12. SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [ 1 ] ČSN EN 1992-1-1 ed. 2. *Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2011. Třídící znak 73 1201.
- [ 2 ] *Model Code 2010*. Final draft, Volume 2. Switzerland: International Federation for Structural Concrete (fib), 2012. ISBN 978-2-88394-106-9. ISSN 1562-3610.
- [ 3 ] *ACI 318-14: Building Code Requirements for Structural Concrete*. Farmington Hills: American Concrete Institute, 2014. ISBN 978-0-87031-930-3.
- [ 4 ] ACI 440.1R-06: Guide for the Design and Construction of Structural Concrete Reinforced with FRP Bars. ACI Committee 440, 2006.
- [ 5 ] ACI 440.1R-15: Guide for the Design and Construction of Structural Concrete Reinforced with Fiber-Reinforced Polymer Bars. Farmington Hills: American Concrete Institute, 2015. ISBN 978-1-942727-10-1.
- [ 6 ] BRANSON, D. E. *Instantaneous and Time-Dependent Deflections of Simple and Continuous Reinforced Concrete Beams*. HPR Report No. 7. Alabama: Alabama Highway Department, 1965.
- [ 7 ] BISCHOFF, P. H. Reevaluation of Deflection Prediction for Concrete Beams Reinforced with Steel and Fiber Reinforced Polymer Bars. In: *Journal of Structural Engineering*. Volume 131, Issue 5. ASCE, 2005, s. 752-767. ISSN 0733-9445. Dostupné z: doi:10.1061/(ASCE)0733-9445(2005)131:5(752)
- [ 8 ] *CSA S806-12: Design and construction of building structures with fibre-reinforced polymers*. Ontario: Canadian Standards Association, 2012. ISBN 978-1-55491-931-4.
- [ 9 ] *JSCE Standard Specifications for Concrete Structures: Design*. No.15. Japan Society of Civil Engineers (JSCE), 2007. ISBN 978-4-8106-0752-9.
- [ 10 ] JU, M., H. OH, J. LIM a J. SIM. A Modified Model for Deflection Calculation of Reinforced Concrete Beam with Deformed GFRP Rebar. *International Journal of Polymer Science*. 2016, **2016**, 1-10. ISSN 1687-9422. Dostupné z: doi:10.1155/2016/2485825
- [ 11 ] AL-SUNNA, R., K. PILAKOUTAS, I. HAJIRASOULIHA a M. GUADAGNINI. Deflection behaviour of FRP reinforced concrete beams and slabs: An experimental investigation. *Composites Part B: Engineering*. 2012, **43**(5), 2125-2134. ISSN 13598368. Dostupné z: doi:10.1016/j.compositesb.2012.03.007
- [ 12 ] BENMOKRANE, B., O. CHAALLAL a R. MASMOUDI. Flexural Response of Concrete Beams Reinforced with FRP Reinforcing Bars. In: *ACI Structural Journal*. 93. Farmington Hills: American Concrete Institute, 1996, s. 46-55.

- [ 13 ] MOHAMED, O. A., R. KHATTAB a W. AL HAWAT. Numerical Study on Deflection Behaviour of Concrete Beams Reinforced with GFRP Bars. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2017, **245**. ISSN 1757-8981. Dostupné z: doi:10.1088/1757-899X/245/3/032065
- [ 14 ] ARABSHAHI, A., M. TAVAKOL, J. SABZI a N. GHARAEI-MOGHADDAM. Prediction of the effective moment of inertia for concrete beams reinforced with FRP bars using an evolutionary algorithm. *Structures*. 2022, **35**, 684-705. ISSN 23520124. Dostupné z: doi:10.1016/j.istruc.2021.11.011
- [ 15 ] NĚMEC, I. *Nelineární mechanika: Modul OD7-M01, Základy nelineární mechaniky*. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, 2006.
- [ 16 ] ČERVENKA, V., L. JENDELE a J. ČERVENKA. *ATENA Program Documentation Part 1: Theory* [online]. Praha: Červenka Consulting, 2021, s. 360 [cit. 2023-01-01]. Dostupné z: [https://www.cervenka.cz/assets/files/atena-pdf/ATENA\\_Theory.pdf](https://www.cervenka.cz/assets/files/atena-pdf/ATENA_Theory.pdf)
- [ 17 ] JANUS, O., F. GIRGLE, L. BODNAROVA, V. KOSTIHA a P. STEPANEK. *The effect of various test configurations on the bond strength of sand-coated GFRP bars*. 2020, 6. Dostupné z: doi:10.1063/5.0000386
- [ 18 ] ŠTĚPÁNEK, Petr a B. ZMEK. *Prvky betonových konstrukcí: Modul M03, Navrhování dle ULS – kombinace ohyb - síla, místní namáhání, prostý beton navrhování dle SLS*. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, 2005.
- [ 19 ] dílčí zpráva projektu TAČR FW01010520 - *Vývoj ohýbané kompozitní výztuže pro environmentálně exponované betonové konstrukce*, Rok řešení 2022 (třetí rok řešení).
- [ 20 ] PILAKOUTAS, K., M. GUADAGNINI, K. NEOCLEOUS a S. MATTHYS. Design guidelines for FRP reinforced concrete structures. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Structures and Buildings*. 2011, **164**(4), 255-263. ISSN 0965-0911. Dostupné z: doi:10.1680/stbu.2011.164.4.255
- [ 21 ] MOUSAVI, S. R. a M. R. ESFAHANI. Effective Moment of Inertia Prediction of FRP-Reinforced Concrete Beams Based on Experimental Results. *Journal of Composites for Construction*. 2012, **16**(5), 490-498. ISSN 1090-0268. Dostupné z: doi:10.1061/(ASCE)CC.1943-5614.0000284
- [ 22 ] Fib Bulletin No. 40: FRP reinforcement in RC structures: technical report prepared by a working party of Task Group 9.3, FRP (Fibre Reinforced Polymer) reinforcement for concrete structures. Lausanne: International Federation for Structural Concrete, 2007. Bulletin Fédération internationale du béton. ISBN 978-2-88394-080-2.
- [ 23 ] MRKVOVÁ, Kateřina. *Návrh vyztužení betonové konstrukce pomocí FRP výztuže*. Brno, 2021. 21 s., 105 s. příl. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav betonových a zděných konstrukcí. Vedoucí práce Ing. Vojtěch Kostiha, Ph.D.

[ 24 ] BROŽOVSKÝ, J. a A. MATERNA. *Metoda konečných prvků ve stavební mechanice*. Ostrava: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni, 2012.

[ 25 ] Bc. Juraj Lagiň *Řešení vybraných detailů betonových konstrukcí s využitím FRP výztuže*. Brno, 2020. 125s., 150s. příl. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav betonových a zděných konstrukcí. Vedoucí práce Ing. František Girgle, Ph.D.

[ 26 ] Bc. David Vašátko *Řešení vybraných detailů betonových konstrukcí vyztužených kompozitní výztuží*. Brno, 2022. 177 s., 127 s. příl. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav betonových a zděných konstrukcí. Vedoucí práce Ing. František Girgle, Ph.D.

[ 27 ] Bc. Denisa Bártová *Využití moderních kompozitních materiálů při návrhu betonových konstrukcí*. Brno, 2020. 63 s., 170 s. příl. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav betonových a zděných konstrukcí. Vedoucí práce Ing. František Girgle, Ph.D.

### 13. SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

$A_c$	plocha betonu
$A_f$	plocha tažené FRP výztuže
$A_s$	plocha tažené ocelové výztuže
$a_I$	hodnoty deformačního parametru vypočteného pro stav bez trhlin
$a_{II}$	hodnoty deformačního parametru vypočteného pro stav s plně rozvinutými trhlinami
$b$	šířka průřezu
$c$	krycí vrstva podélné výztuže
$c_{cr}$	vzdálenost těžiště porušeného průřezu od tlačných vláken
$C_d$	návrhová hodnota přípustného kritéria použitelnosti
$c_g$	vzdálenost těžiště neporušeného průřezu od tlačných vláken
$d$	efektivní výška průřezu
$d_p$	vzdálenost předpínacího lana od tlačných vláken
$E_c$	modul pružnosti betonu
$E_{cm}$	modul pružnosti betonu
$E_d$	návrhové účinky zatížení
$E_e$	efektivní modul pružnosti
$E_f$	modul pružnosti FRP výztuže v tahu
$EI(x)$	ohybová tuhost
$E_s$	modul pružnosti oceli
$f_c$	pevnost betonu v tlaku
$f_c'$	pevnost betonu v tlaku
$f_{cm}$	střední hodnota pevnosti betonu v tlaku
$f_{ct}$	pevnost betonu v tahu
$f_{ctm}$	střední hodnota pevnosti betonu v tahu
$f_{fu}$	mezní tahová pevnost FRP výztuže ve směru vláken
$f_r$	pevnost betonu v tahu
$h$	výška průřezu
$l_{cr}$	moment setrvačnosti trhlinou porušeného průřezu
$l_g$	moment setrvačnosti neporušeného průřezu
$k$	součinitel závislý na stupni vyztužení
$K$	nelineární parametr
$L, l$	rozpětí nosníku
$L_g$	délka neporušené části nosníku (vzdálenost od podpory k místu kde $M = M_{cr}$ )
$m$	modifikační součinitel
$M(x)$	ohybový moment
$M_a$	maximální vzniklý moment

$M_{cr}$	moment na mezi vzniku trhlin
$M_{crd}$	kritický ohybový moment na mezi vzniku trhlin
$M_d$	návrhový ohybový moment
$M_{dmax}$	maximální hodnota ohybového momentu
$\eta_f$	poměr modulů pružnosti
$P$	působící soustředné zatížení
$P$	osová síla nebo předpínací síla
$R_d$	návrhový odpor konstrukce (schopnost odolávat účinkům zatížení)
$w$	funkce průhybu
$w''$	druhá derivace průhybu
$x$	výška tlačené oblasti betonu
$y_t$	vzdálenost těžiště neporušeného průřezu k taženému povrchu
$\alpha$	parametr v závislosti na součiniteli míry vyztužení
$\alpha_0$	redukční součinitel zohledňující spolupůsobení výztuže s betonem
$\alpha_e$	poměr modulu pružnosti oceli a betonu
$\alpha_I$	hodnoty parametru vypočteného pro stav bez trhlin
$\alpha_{II}$	hodnoty parametru vypočteného pro stav s plně rozvinutými trhlinami
$\beta$	součinitel zohledňující vliv doby trvání nebo opakování zatížení
$\beta_0$	redukční součinitel zrychlující přechod mezi momenty setrvačnosti
$\beta_1$	součinitel závislý na pevnosti betonu
$\beta_d$	redukční součinitel
$\gamma$	součinitel závislý na zatížení a uložení
$\gamma$	parametr v závislosti na součiniteli míry vyztužení
$\Delta M_{csg}$	fiktivní ohybový moment od smršťování na neporušeném průřezu
$\Delta M_{csgR}$	fiktivní ohybový moment od smršťování na trhlinou porušeném průřezu
$\varepsilon_c$	mezní poměrné přetvoření betonu
$\varepsilon_{cu}$	mezní poměrné přetvoření betonu v tlaku
$\zeta$	rozdělovací součinitel
$\eta$	modifikační součinitel
$\lambda$	součinitel míry vyztužení
$\mu$	součinitel poměrů momentů
$\rho_f$	stupeň vyztužení
$\rho_{fb}$	balanční stupeň vyztužení
$\sigma_s$	napětí v tahové výztuži vypočtené pro průřez s trhlinami při zatížení způsobující vznik první trhliny
$\sigma_{sr}$	napětí v tahové výztuži vypočtené pro průřez s trhlinami
$\varphi$	pootočení průřezu

## **14. SEZNAM PŘÍLOH**

P1. Vzorový příklad 1

P2. Vzorový příklad 2