



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV PROCESNÍHO A EKOLOGICKÉHO
INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF PROCESS AND ENVIRONMENTAL
ENGINEERING

VYHODNOCOVÁNÍ VÝSLEDKŮ Z MĚŘENÍ A EMISNÍ LIMITY

MEASUREMENTS RESULTS ASSESSMENT AND EMISSION LIMITS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

MARTIN ČECH

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. RADEK DVOŘÁK, Ph.D.

BRNO 2010

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav procesního a ekologického inženýrství

Akademický rok: 2009/2010

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Martin Čech

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a kkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Vyhodnocování výsledků z měření a emisní limity

v anglickém jazyce:

Measurements results assessment and emission limits

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Popis správného postupu při vyhodnocování měření. Popis matematických metod (např. aproximace) a jednoduchá praktická ukázka. Přehled emisních limitů pro škodliviny běžně se vyskytující ve spalínách

Cíle bakalářské práce:

Student by měl shrnout zásady pro správné vyhodnocení výsledků z měření (především z měření polutantů ve spalínách). Dále by měl vysvětlit a na jednoduchém příkladu předvést využití matematických operací (např. aproximace) využívaných při vyhodnocování výsledků. Jedna z kapitol práce by se měla věnovat přehledu současných emisních limitů jak v ČR, tak v dalších vybraných zemích. Pro představu by mohl být také zpracován vývoj emisních limitů za poslední roky u nás a ve světě.

Seznam odborné literatury:

R. H. Perry, D. Green, Perry's chemical engineers' handbook (sixth edition), McGraw-Hill, New York, 1984.

European IPPC Bureau. Reference Document on the Best Available Techniques for Large Combustion Plants. Brussels, <eippcb.jrc.es>, 2008.

European IPPC Bureau. Reference Document on the Best Available Techniques in Common Waste Water and Waste Gas Treatment / Management Systems in the Chemical Sector. Brussels, <eippcb.jrc.es>, 2008.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Radek Dvořák, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2009/2010.

V Brně, dne 9.11.2009

L.S.

prof. Ing. Petr Stehlík, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

Abstrakt

- Hlavní náplní této práce je shrnutí a vysvětlení základních metod, které mohou být využity při vyhodnocování výsledků z měření škodlivin ve spalínách. Metoda, která by měla být nejvhodnější pro naše data, bude následně použita v jednoduchém příkladu. Zmíněna bude též důležitost výběru vstupních dat a jejich závislost na okolních podmínkách. Další kapitola bude věnována emisním limitům nejběžnějších polutantů, vyskytujících se v České republice i ve vybraných světových zemích. Dále bude zmíněn i historický vývoj těchto limitů a i budoucí předpokládaný vývoj tohoto problému.

Abstract

- Main content of this task is summary and explanation of main methods, which can be used to evaluate the results from measuring of pollutants in combustion gases. The way which should be most acceptable for our data will be consequently used in a simple example. There will be mentioned the importance of choosing the entering data and their dependence on outer conditions. Another chapter will be devoted to emission standards of main pollutants in Czech Republic and in chosen world countries too. There will be mentioned the historical development of these standards and hypothesis to the future about this question too.

Klíčová slova

- Imise, aproximace, metoda nejmenších čtverců, polutant

Key words

- Immission, approximation, method of least squares, pollutant

Bibliografická citace

ČECH, M. *Vyhodnocování výsledků z měření a emisní limity*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 42 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Radek Dvořák, Ph.D.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci „*Vyhodnocování výsledků z měření a emisní limity*“ vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených na seznamu, jenž je součástí této práce.

V Brně dne 25.května 2010

.....

Martin Čech

Poděkování

Děkuji panu Ing. Radku Dvořákovi, Ph.D. za rady, věnovaný čas a odborné vedení při tvorbě této bakalářské práce.

Děkuji.

Obsah

1	Seznam symbolů	12
2	Úvod	13
3	Regresní analýza	14
3.1	Lineární regresní analýza	14
3.2	Nelineární regresní analýza.....	15
3.3	Použití lineární a nelineární regrese v praxi.....	15
3.4	Metoda nejmenších vážených čtverců	16
3.5	Metoda nejmenších čtverců.....	16
3.6	Regresní analýza při nesplnění podmínek pro metodu nejmenších čtverců.....	18
3.6.1	<i>Multikolinearita</i>	18
3.6.2	<i>Heteroskedasticita</i>	18
3.6.3	<i>Autokorelace</i>	19
3.6.4	<i>Porušení normality chyb</i>	19
3.7	Použití matematických softwarů při výpočtech.....	19
3.8	Výpočet v programu Maple 12.....	20
4	Aproximace	23
4.1	Čebyševova aproximace	23
4.2	Taylorův polynom	23
4.3	Interpolace.....	25
4.3.1	<i>Lagrangeův interpolační polynom</i>	25
4.3.2	<i>Interpolační splajny</i>	26
5	Měření emisí, emisní limity	27
5.1	Nejrozšířenější polutanty	27
5.1.1	<i>Oxid siřičitý</i>	27
5.1.2	<i>Oxid uhelnatý</i>	28
5.1.3	<i>Oxidy dusíku</i>	28
5.1.4	<i>Tuhé znečišťující látky</i>	29
5.1.5	<i>Oxid uhličitý</i>	30
5.2	Plánování měření, práce s daty	30
5.3	Emisní limity v ČR a jejich vývoj	31
5.4	Emisní limity ve vybraných světových zemích.....	33
5.5	Kjótský protokol.....	34
6	Závěr	36

1 Seznam symbolů

SYMBOL	VÝZNAM	JEDNOTKA
b	Odhad koeficientu β	---
c	Parametr zkrácení	---
D	Rozptyl	---
E	Střední hodnota	---
\widehat{e}_i	Reziduum (vážené nejmenší čtverce)	---
f	Zkoumaná funkce	---
PM	Pevná částice (z angl. particulate matter)	$\mu\text{g}/\text{m}^3$
R	Koeficient vícenásobné korelace	---
r	Reziduum (nejmenší čtverce)	---
S^*	Reziduální součet čtverců	---
x	Nezávisle proměnná	---
y	Závisle proměnná	---
β	Parametr regresních koeficientů	---
ε	Náhodná chyba	---
φ	Aproximační funkce	---
σ^2	Bodový odhad rozptylu	---

Pozn. : Naprostá většina uvedených symbolů zastupuje prvky matematické analýzy, proto se jedná o bezrozměrné veličiny.

2 Úvod

Znečišťování ovzduší je problémem již počátků průmyslové revoluce a díky rychlému rozmachu všech odvětví se z něj velmi rychle stal celosvětový problém. Především při hoření neušlechtilých paliv se jako vedlejší efekt do ovzduší uvolňují látky, které mají negativní dopad na lidské zdraví, stejně jako na čistotu životního prostředí.

Pojmy jako skleníkový efekt, kyselá dešť, nebo narušená ozonová vrstva jsou již globálně známé a rozšířené a společnost s těmito problémy již několik desítek let bojuje. Každoročně se celosvětově konají summity a jednání, jejichž výsledkem jsou stále přísnější limity a stejně tak se rozšiřuje počet států, které se k daným úmluvám připojují. Za všechny jmenujme Kjótský protokol, ve kterém se státy po celém světě zavazují snížit své emisní limity o předem stanovené procento. Dodržování všech stanovených limitů je povinností každého státu a za jejich porušování státy dostávají příslušně finanční sankce. Stejně tak uvnitř každého státu mají všechny podniky, továrny a výrobní závody své přesné limity a je jejich povinností tyto limity striktně dodržovat.

Hlavní statistickou metodou používanou při výpočtech je aproximace. Dále se využívají metody regresní analýzy, z nichž jako nejznámější můžeme jmenovat metodu nejmenších čtverců. Cílem všech aproximačních a regresních výpočtů je získat funkci, která co nejlépe vystihne reálné děje v procesu v závislosti na okolních faktorech a bude tedy moci předvídat jejich chování za daných podmínek.

Pro každý experiment je potřebný dobrý výběr měřících a vyhodnocovacích metod, protože jak špatné měřící metody, tak i špatná manipulace s informacemi mohou přinést zavádějící výsledky. Také je důležitá volba správného postupu při měření, přičemž experiment plánujeme tak, abychom co nejpřesněji vystihli vlivy všech okolních faktorů a zároveň provedli minimální počet měření.

V úvodu této práce budou představeny statistické metody vhodné pro zpracování naměřených dat, jejich vhodnost a použití. Nejvhodnější z nich bude následně použita při výpočtu, který bude sloužit jako ukázka aproximace známých dat. Dále bude poukázáno na důležitost plánování experimentu. Poslední kapitola bude z velké části věnována emisním limitům a jejich vývoji, a taktéž vývoji množství vypouštěných polutantů do ovzduší.

3 Regresní analýza

Regresní analýza je označení statistických metod, kterými se snažíme co nejpřesněji odhadnout hodnotu náhodné veličiny při znalosti hodnot jiných veličin. Náhodnou veličinu nazýváme též závisle proměnnou, cílovou proměnnou, vysvětlovací proměnnou nebo regresandem. Znamé veličiny nazýváme nezávisle proměnnými, regresory nebo kovariáty a jejich hodnoty získáváme zjišťováním, měřením, pozorováním a předchozími výpočty [1].

Regresní analýzu obecně používáme k popisu a vyšetřování závislosti Y na X , přičemž požadovanou závislost vyjadřujeme pomocí regresní funkce:

$$y = \varphi(x, \beta) \quad (1)$$

kde $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ je vektor nezávisle proměnných (hodnota náhodného vektoru X), y je závisle proměnná (hodnota závislé veličiny Y) a $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ je vektor parametrů, tzv. regresních koeficientů β_j , $j = 1, \dots, m$ [2].

Při vyšetřování závislosti Y na X získáme realizací n experimentů $(k + 1)$ -rozměrný statistický soubor $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ s rozsahem n , kde y_i je pozorovaná hodnota náhodné veličiny Y_i a x_i je pozorovaná hodnota vektoru nezávisle proměnných X , $i=1, \dots, n$ [2].

V závislosti na požadavcích a vhodnosti vstupních dat si můžeme zvolit, zda k řešení použijeme lineární, či nelineární regresní analýzu. Možné je též použít metodu, která je částečně lineární a částečně nelineární. Jako příklad uveďme racionální celistvé a lomené funkce. Všechny parametry jsou lineární, avšak vysvětlující proměnné jsou již nelineární. Čistě lineární a nelineární regrese je podrobněji popsána v další části práce [3].

3.1 Lineární regresní analýza

V lineární regresní analýze vychází regresní funkce z předpokladu aditivnosti, tj. že výsledná hodnota závisle proměnné je tvořena součtem „vážených příspěvků“ od jednotlivých nezávisle proměnných, přičemž „váhami“ jsou regresní koeficienty β_j . Matematicky vyjádřeno:

$$Y_i = \sum_{j=1}^m \beta_j f_j(x_i) + \varepsilon_i \quad (2)$$

kde $f_j(x)$ jsou známé funkce, neobsahující regresní koeficienty β_j a ε_i jsou náhodné veličiny, které zahrnují náhodné chyby měření i chyby regresní funkce (nepřilnavost regresní funkce k naměřeným hodnotám). Často se též můžeme setkat s matematickým vyjádřením v jednodušším tvaru [2]:

$$y = \sum_{j=1}^m \beta_j f_j(x) \quad (3)$$

Pojem lineární regresní analýza bývá často mylně chápán jako linearita vzhledem k proměnným x_j . Pravý význam je ale linearita vzhledem k regresním koeficientům, tj. funkce $f_j(x)$ tyto koeficienty neobsahují.

Pro jednu proměnnou je geometrickým znázorněním této regresní funkce přímka, pro dvě proměnné rovina a při třech a více proměnných jsou znázorněním nadroviny, které jsou vizuálně nepředstavitelné, což však z matematického hlediska nehraje žádnou roli [3].

Při lineární regresní analýze aplikujeme tzv. lineární regresní model, který je založen na těchto předpokladech:

- Vektor x je nenáhodný, takže funkce nabývají nenáhodných hodnot $f_{ji} = f_j(x_i)$ pro $j = 1, \dots, m$ a $i = 1, \dots, n$.
- Náhodná závisle proměnná veličina Y_i má konstantní rozptyl $D(Y_i)$ a střední hodnotu $E(Y_i)$, pro které platí:

$$D(Y_i) = \sigma^2 \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$E(Y_i) = \sum_{j=1}^m \beta_j f_{ji} \quad (5)$$

- Náhodné nezávisle proměnné veličiny Y_i jsou nekorelované a mají normální rozdělení pravděpodobnosti.
- Náhodné chyby ε_i jsou nekorelované náhodné veličiny s normálním rozdělením pravděpodobnosti $N(0, \sigma^2)$ [3].

3.2 Nelineární regresní analýza

Při určování linearity regresní analýzy vycházíme z podmínky:

$$g_j = \frac{\partial f(x, \beta)}{\partial \beta_j} = \text{konst.} \quad j = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Nesplňuje-li alespoň jeden regresní parametr β_j podmínku (6), mluvíme již o nelineární regresí. Tu můžeme dále dělit na separabilní a neseperabilní. Pro neseperabilní nelineární regresí nesmí výše podmínka (6) platit pro žádný regresní koeficient funkce. Pro separabilní nelineární regresí tedy platí, že alespoň pro jeden regresní koeficient uvedená podmínka platí [3].

3.3 Použití lineární a nelineární regrese v praxi

Vzhledem k odlišnostem mezi lineární a nelineární regresní analýzou jsou tyto dva druhy používány v odlišných odvětvích lidské činnosti. Lineární regresní analýza se aplikuje především v technických vědách, přičemž regresní koeficienty nemívají

fyzikální význam. Jde pouze o uměle vytvořené matematické koeficienty, které vyjadřují vliv nezávislé veličiny x na závisle proměnné y . Nelineární regresní analýza se oproti tomu využívá v přírodních a biologických vědách. Regresní koeficienty zde mívají přesný fyzikální význam a jejich určení bývá obvykle nejhlavnějším cílem celé analýzy [3].

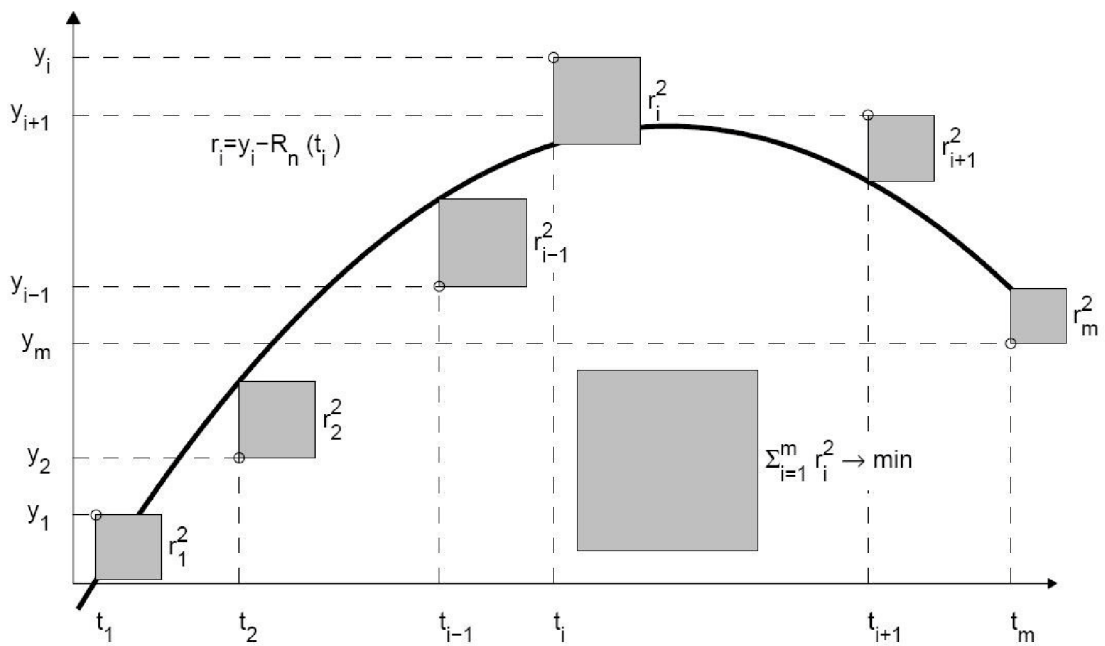
3.4 Metoda nejmenších vážených čtverců

K základním krokům regresní analýzy patří odhad regresních koeficientů. Metodu nejmenších vážených čtverců používáme za předpokladu, že některá z měření nebo pozorování jsou důležitější nebo přesnější. Každé naměřené hodnotě tedy přiřadíme číselnou hodnotu značící její váhu. Klasickou metodou nejmenších čtverců se poté určí odhady b_j regresních koeficientů β_j a stanoví se rezidua $\widehat{\varepsilon}_i$ [3]. Ač se běžně pro určování regresních koeficientů používá metoda nejmenších čtverců, tak i tato metoda má svoje užití, což bude ukázáno v další části práce.

3.5 Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců je zdaleka nejrozšířenější a nejpoužívanější metodou regresní analýzy. Mnoho počítačových programů používá k určování regresních koeficientů právě tuto metodu. Přitom je metoda nejmenších čtverců pouze speciálním případem metody nejmenších vážených čtverců. Pro její správné použití musí být splněny tyto předpoklady:

- 1) Regresní koeficienty β mohou obecně nabývat libovolných hodnot.
- 2) Regresní funkce je lineární ve vztahu k regresním koeficientům.
- 3) Žádné dva sloupce x_j , x_k matice nenáhodných nezávisle proměnných nejsou rovnoběžné vektory.
- 4) Zcela rovnocenné je konstatování, že matice $X^T X$ je symetrická regulární matice, k níž existuje matice inverzní, jejíž determinant je větší než nula. Není-li to splněno, pak odhady regresních koeficientů jsou nepřesné a nevěrohodné.
- 5) Náhodné chyby ε_i mají nulovou střední hodnotu $E(\varepsilon_i)$.
- 6) Náhodné chyby ε_i mají konstantní a konečný rozptyl $E(\varepsilon^2) = \sigma^2$, tedy rozptyly jednotlivých měření jsou stejné.
- 7) Náhodné chyby ε_i jsou vzájemně nekorelované.
- 8) Náhodné chyby ε_i mají normální rozdělení $N(0, \sigma^2)$ [3].



Obr. 3.1 Princip metody nejmenších čtverců [4]

Podstata metody nejmenších čtverců spočívá v minimalizaci reziduálního součtu čtverců (obr. 3.1), což lze vyjádřit vztahem:

$$S^* = \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, \beta)]^2 \quad (7)$$

Vztah pro bodové odhady b_j regresních koeficientů β_j získáme minimalizací vztahu pro S^* z rovnice (7), přesněji z podmínky pro lokální minimum této veličiny.

Zjednodušeně řečeno se snažíme odhadnout takové regresní koeficienty, aby námi proložená křivka, měla minimální součet čtverců vzdáleností od zadaných hodnot (tj. minimální součet druhých mocnin chyby) [3].

Míru přesnosti v metodě nejmenších čtverců vyjadřuje reziduum, které si můžeme představit jako rozdíl mezi vytvořeným modelem a skutečným pozorováním. Při výpočtu můžeme ověřit, zda je zvolený regresní model vyhovující, tím, že spočítáme reziduum. To následně porovnáme s hodnotou rezidua, předem schválenou jako vyhovující. Je-li hodnota našeho rezidua menší nežli hodnota daná, bereme vypočítané parametry jako přijatelné. Reziduum r spočítáme dle vzorců:

$$r_i = y_i - R_n(t_i) = y_i - \sum_{j=1}^n \varphi_j(t_i)x_j, \text{ kde } i = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

$$r^2 = \sum_{i=1}^m r_i^2 \quad (9)$$

Míru významnosti použité lineární regresní závislosti nám udává vícenásobný korelační koeficient R , který vypočítáme ze vztahu:

$$R = \sqrt{1 - \frac{S_{min}^*}{\sum y_i^2 - n(\bar{y})^2}} \quad (10)$$

Pro korelační koeficient platí: $0 \leq R \leq 1$. Je-li $R=1$, dokázali jsme, že náhodná proměnná x_1 je lineární kombinací náhodných proměnných x_2, \dots, x_m .

3.6 Regresní analýza při nesplnění podmínek pro metodu nejmenších čtverců

Jak bylo již zmíněno (v kap. 3.5), tak metoda nejmenších čtverců má jisté předpoklady a jestliže nejsou splněny, dostáváme nepřesné nebo nekvalitní hodnoty regresních koeficientů.

3.6.1 Multikolinearita

Nesplňuje-li matice nenáhodných nezávisle proměnných výše uvedený předpoklad 3), zavádíme v tomto případě pojem multikolinearita. Kdybychom se snažili takto nevyhovující data řešit metodou nejmenších čtverců, dostali bychom nekonečně mnoho řešení pro odhady regresních koeficientů. Navíc bývá jejich rozptyl poměrně velký, proto bývají intervaly spolehlivosti pro regresní koeficienty velmi široké a malá změna vstupních dat způsobí velké změny v odhadech [3].

Při vysoké multikolinearitě se často, pro výpočet odhadu b vektoru regresních koeficientů β , řeší soustava rovnic:

$$(X^T X + cI)b_c = X^T y \quad (11)$$

kde I je jednotková matice a c je parametr zkrácení ($c > 0$). Číslo c volíme malé a při jeho vhodném výběru má vektor b_c , který je řešením nové soustavy rovnic, malé rozptyly a menší střední kvadratickou chybu než odhad b . Samozřejmě ale vektor b_c není již nestranným odhadem vektoru β [5].

3.6.2 Heteroskedasticita

Heteroskedasticitou rozumíme porušení předpokladu 6) pro použití metody nejmenších čtverců. Kdybychom v tomto případě použili metodu nejmenších čtverců, dostali bychom sice nestranný odhad regresních koeficientů β , ale tento odhad by už nebyl nejlepší ve třídě nestranných lineárních odhadů. A navíc bychom získali nepřesné intervaly spolehlivosti. V tomto případě je pro odhady regresních koeficientů vhodná metoda vážených nejmenších čtverců (3.4). Nejprve provedeme odhad parametrů zvoleného modelu heteroskedasticity při této volbě rozptylu: $\sigma_i^2 = \widehat{e}_i^2$, poté stanovíme váhy a dále již používáme metodu vážených nejmenších čtverců (3.5) [3].

3.6.3 Autokorelace

Při porušení předpokladu 7) pro použití metody nejmenších čtverců zavádíme pojem autokorelace. V praxi se můžeme setkat s případem, že předchozí odchylka ovlivňuje odchylku těsně následující. Tento speciální případ se nazývá autoregresivní proces 1. řádu a je nejjednodušším případem autokorelace a lze vyjádřit vztahem:

$$\varepsilon_i = \rho_1 \varepsilon_{i-1} + u_i \quad (12)$$

kde ρ_1 je autokorelační koeficient 1. řádu a $u_i \sim (0, \sigma^2)$ jsou nezávislé náhodné veličiny s konstantním rozptylem.

Odhady regresních koeficientů se v tomto případě provádí pomocí minimalizace kritéria zobecněných nejmenších čtverců [3].

3.6.4 Porušení normality chyb

Porušení normality chyb nastává při nesplnění předpokladu 8) pro metodu nejmenších čtverců. Kdybychom chtěli v tomto případě použít metodu nejmenších čtverců, musíme vzít ohled na citlivost na robustní kritéria. Pro ně je charakteristické, že nejsou citlivá na porušení předpokladu o rozdělení chyb a také na vlivné body (extrémní funkce a vybočující měření). Proto i zde je metoda nejmenších čtverců nevhodná a používá se zde skupina tzv. M-odhadů, pro které platí, že poskytují maximálně věrohodné odhady regresních koeficientů pro určitou hustotu pravděpodobnostních chyb. Všechny M-odhady vychází z následujícího kritéria:

$$U_M(b) = \sum_{i=1}^n \pi\left(\frac{e_i}{\sigma}\right) = \sum_{i=1}^n \pi[(y_i - x_i^T b_M)/\sigma] \quad (13)$$

kde x_i je i -tý řádek matice X ,

π je vhodná funkce, která se určuje z hustoty pravděpodobnosti náhodných chyb závisle proměnné y ,

σ je parametr rozptýlení (určujeme podle mediánu)

b_M je odhad regresního kritéria (index M pouze značí, že jde o M -odhady) [3].

3.7 Použití matematických softwarů při výpočtech

Při realizaci výpočtů je již samozřejmostí využití pomoci některého z matematických softwarů, kterých máme na výběr relativně velké množství. Některé z nich jsou přímo statistickými softwary, jiné jsou využitelné ve více odvětvích matematiky.

Mezi čistě statistické softwary dostupné v České republice, patří PASW (Predictive Analytics Software), software stvořený americkou firmou SPSS (Statistical Package for the Social Sciences). Dále SAS Systém, který bývá často využíván jako databázový

systém nebo také pro vědeckou statistickou analýzu dat. Oba tyto softwary mají svůj vlastní programovací jazyk. Dalším programovacím jazykem, využívaným ve statistice je R, tento jazyk je zjednodušeně řečeno volně dostupnou verzí programovacího jazyka používaného u softwaru PASW.

Softwary, používané nejen ve statistice jsou mnohem snáze dostupnější a zároveň je jejich používání běžně vyučováno na vysokých školách. Do této kategorie lze zařadit programy Matlab, Minitab, Maple, Mathematica, GNU Octave a jiné [6].

3.8 Výpočet v programu Maple 12

V této kapitole bude popsán postup při řešení příkladu, jehož výpočet v programu Maple bude tvořit přílohu této práce. Vstupní data pro tento příklad jsou reálná, avšak zjednodušená tak, aby celý příklad mohl sloužit především jako ukázka použití regresní analýzy v praxi.

Jako modelovou metodu používanou pro výpočet regresní funkce bude použita metoda nejmenších čtverců. Nejprve budou data aproximována polynomem prvního stupně, následně polynomem druhého stupně a výsledky budou zhodnoceny. Výpočet bude prováděn postupně a ve stejné posloupnosti, jako bychom příklad počítali „ručně“. Na závěr bude ukázáno, že program Maple obsahuje i příkaz pro metodu nejmenších čtverců. Stejná data pro srovnání a kontrolu proložíme metodou nejmenších čtverců i pomocí tohoto příkazu.

Ukázka použití metody nejmenších čtverců pomocí programu Maple 12

Nejprve jsme zvolili aproximaci polynomem prvního řádu. Výstupem bude aproximační rovnice ve tvaru:

$$y = x_1 + x_2 \cdot x \tag{14}$$

Prvním krokem výpočtu je návrh matic, jejichž členy jsou koeficienty soustavy rovnic, kterou budeme následně řešit. Tyto členy spočítáme na základě báze funkcí:

$$\varphi_1(t) = 1 \tag{15}$$

$$\varphi_2(t) = t \tag{16}$$

Soustava rovnic bude pomocí matic vyjádřena takto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

kde příslušné koeficienty spočítáme podle vztahů:

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^5 \varphi_k(t_i) \varphi_j(t_i) \tag{18}$$

$$b_k = \sum_{i=1}^5 \varphi_k(t_i) y_i \quad (19)$$

Po dopočítání koeficientů vyjádříme jednotlivé rovnice soustavy a tu vyřešíme. Nakonec dopočítáme reziduum, abychom získali představu o vhodnosti použití přímky v tomto případě. Z výpočtu jsme získali tvar aproximační přímky a hodnotu rezidua:

$$y = 0,727 \cdot x - 131,4 \quad r = 5,51.$$

Druhou částí příkladu je aproximace dat polynomem druhého stupně. Získáme rovnici ve tvaru:

$$y = z_1 + z_2 \cdot x + z_3 \cdot x^2 \quad (20)$$

Samotný postup řešení je analogický jako v první části příkladu. Pouze budeme navíc využívat další bázovou funkci:

$$\varphi_3(t) = t^2 \quad (21)$$

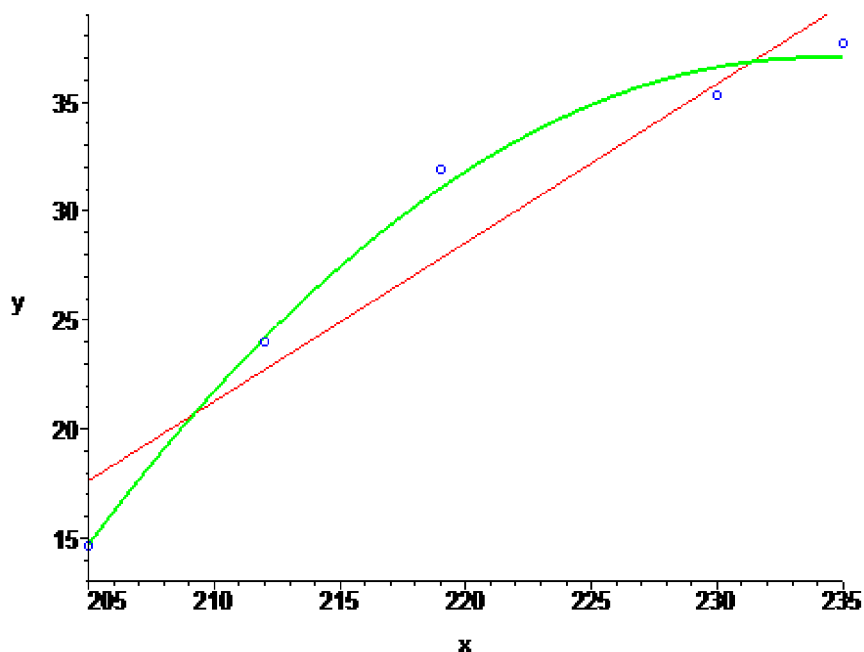
Soustava rovnic bude pomocí matic vypadat takto:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad (22)$$

kde příslušné koeficienty vypočítáme podle již známých vztahů (18), (19). Stejně tak další postup je podobný. Po vyčíslení koeficientů jsme vyřešili soustavu rovnic a následně vypočítali reziduum:

$$y = -0,02642 \cdot x^2 + 12,367 \cdot x - 1410,2 \quad r = 1,69$$

Pro názornost jsou obě řešení vynesena do grafu (obr. 3.2) společně se zadanými body a je patrné, že parabola (značená zeleně) vystihuje polohu bodů lépe než červeně vykreslená přímka. Dalšími důkazy o vhodnosti použití paraboly jsou vypočtené hodnoty reziduí, neboť druhé reziduum je více než 3x menší než reziduum první, a tedy parabola je z těchto dvou alternativ pro proložení daných dat vhodnější.



Obr. 3.2 Graf porovnávající získaná řešení v programu Maple

Na závěr byl proveden výpočet pomocí příkazu *leastsquare*, který nám pro tatáž data podal následující výsledky:

$$y = 0,727 \cdot x - 131,400$$

$$y = -0,0264 \cdot x^2 + 12,368 \cdot x - 1410,36$$

I díky této možnosti porovnání můžeme potvrdit správnost našeho výpočtu.

Polynom prvního stupně	
Ruční výpočet	Příkaz leastsquare
$y = 0,727 \cdot x - 131,4$	$y = 0,727 \cdot x - 131,400$
Polynom druhého stupně	
Ruční výpočet	Příkaz leastsquare
$y = -0,02642 \cdot x^2 + 12,367 \cdot x - 1410,2$	$y = -0,0264 \cdot x^2 + 12,368 \cdot x - 1410,36$

Tab. 3.1 Porovnání výsledných hodnot

Podle vypočtených tvarů polynomů (tab. 3.1) bychom již dokázali pro danou teplotu určit předpokládanou hodnotu redukce NO.

Požadovali bychom ještě přesnější aproximaci, museli bychom použít polynom vyššího stupně, kde bychom se však již vystavovali riziku, že nám křivka bude kopírovat případné chyby, vzniklé při měření. Další možností by byla volba jiných báзовých funkcí, u kterých lze jen těžko předpovídat jejich vhodnost.

4 Aproximace

Aproximace funkcí je jednou ze základních numerických metod matematické analýzy. Principem aproximace je nahrazení zkoumané funkce $f(x)$ funkcí $\varphi(x)$, která by měla ve vhodném smyslu co nejpřesněji vystihovat její průběh a zároveň by měla být matematicky jednodušší a snadno zpracovatelnější [4].

Z geometrického hlediska při aproximaci námi nalezená funkce neprochází zadanými body, pouze se jim přibližuje. Kdyby přímka body přesně procházela, mohla by funkce kopírovat chyby a nepřesnosti, která mohly vzniknout již při měření a zpracovávání dat. Při výběru vhodné aproximace postupujeme tak, že si předem zvolíme tvar aproximující funkce, která obsahuje proměnné parametry a hodnoty těchto parametrů poté určujeme tak, aby získaná aproximace co nejvíce vyhovovala našim požadavkům [7].

Použití aproximace v matematice je široké a velmi různorodé. Matematické softwary často nepracují se samotnou funkcí, ale s její polynomickou aproximací. Např. goniometrické funkce (sinus, kosinus a další) mají jednoduchý a pochopitelný polynomický tvar (29), (30), (31). Dalším typickým příkladem jsou numerické metody pro výpočet derivace funkce, popř. jejího integrálu. Při výpočtu určitého integrálu z funkce jí často nahrazujeme aproximací $\varphi(x)$ ve tvaru polynomu, který se již snadněji integruje [8].

Další a pro tuto práci nejzajímavější oblastí použití aproximace je zpracování výsledků měření. Úkolem je hledání jednoduchého analytického výrazu, který by vyjádřil funkční závislost známých proměnných, získaných např. měřeními. Při použití aproximace je nutné mít stále na paměti, že výsledná aproximační funkce je pouze přibližným řešením, a tedy bychom měli věnovat pozornost i kontrolním výpočtům, které nám odhalí, zda je vzniklá chyba zanedbatelná vzhledem požadavkům k příkladu, či nikoliv [8].

4.1 Čebyševova aproximace

Čebyševovou aproximací můžeme rozumět hledání nejlepší stejnosměrné aproximace funkce v daném intervalu. Jde tedy o funkci $h(x)$, která na daném intervalu $\langle a, b \rangle$ minimalizuje maximální absolutní hodnotu chyby $\max_{x \in \langle a, b \rangle} |f(x) - h(x)|$ v určité třídě funkcí.

Polynom, který nejlépe aproximuje funkci na daném intervalu, existuje za velmi obecných podmínek a k jeho konstrukci se využívá Remesuv algoritmus, který postupně iteruje polohu bodů s extrémami tak, že interpolační polynom konverguje k polynomu nejlépe aproximujícímu danou funkci [9].

4.2 Taylorův polynom

V matematice se k aproximaci funkce často používá polynom a to hned z několika důvodů. Polynom můžeme popsat konečným počtem údajů (stupeň, koeficienty) a jeho hodnotu můžeme spočítat konečným počtem aritmetických operací. Další nespornou

výhodou je fakt, že s polynomy můžeme lehce provádět matematické operace, jako např. derivování a integrování [8].

Taylorův polynom se k aproximaci v praxi často využívá, protože jím lze, při použití vyššího počtu členů, dosáhnout vysoké přesnosti. Taylorův polynom (též Taylorova řada) je zvláštní případ mocninné řady. Aproximovanou funkci lze za určitých předpokladů v okolí bodu (funkce má v bodě derivaci) vyjádřit jako mocninnou řadu. Toto vyjádření bývá nazýváno Taylorův rozvoj. Koeficienty Taylorova polynomu závisí právě na hodnotách derivace funkce v daném bodě. Chceme-li získat pouze přibližnou hodnotu funkce, není třeba vyjadřovat všechny členy Taylorovy řady. Členy s vyššími derivacemi lze vynechat, jelikož jejich absence změní celkovou hodnotu polynomu o zanedbatelnou hodnotu [10].

Taylorova řada lze zapsat dvěma způsoby. Buď v zápisu sumárním, nebo jako polynomický řetězec. Oba zápisy jsou ekvivalentní a pro názornost budou i oba níže uvedeny. Má-li daná funkce v bodě x_0 všechny derivace, zapisujeme Taylorovu řadu ve tvaru sumárním:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (23)$$

a polynomickém:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots \quad (24)$$

Má-li funkce v bodě x_0 pouze omezený počet derivací až do řádu n , Taylorova řada má nyní tvar:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (25)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (26)$$

V praxi samozřejmě nebudeme počítat s nekonečným (popř. přehnaně vysokým) počtem členů, ale využijeme tzv. Taylorovu větu, která mj. udává velikost chyby, které se při aproximaci dopustíme. Funkci, která má v okolí bodu x_0 derivace až do řádu $n + 1$ zapíšeme s pomocí Taylorovy věty takto:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(x) \quad (27)$$

kde $R_{n+1}(x)$ se nazývá Taylorův zbytek (takto vyjádřen se nazývá Lagrangeův tvar zbytku):

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(\zeta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (28)$$

pro ζ ležící mezi body x a x_0 .

Taylorova řada funkce konverguje v daném bodě k funkční hodnotě za předpokladu, že $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Pro názornost uvedeme několik příkladů, které ukazují, jak matematicky jinak těžce uchopitelné funkce vypadají ve tvaru Taylorova polynomu [10]:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \text{ pro } x \in (-\infty, \infty) \quad (29)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \text{ pro } x \in (-\infty, \infty) \quad (30)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \text{ pro } x \in (-1, 1) \quad (31)$$

4.3 Interpolace

Interpolace je zvláštním případem aproximace, při kterém sestavujeme aproximační funkci tak, aby procházela zadanými body a splňovala podmínky tvaru funkce $f(x)$. Nejzákladnějším postupem interpolace je polynomická interpolace, která se snaží najít polynom $g(x)$ nejmenšího možného stupně tak, aby splňoval podmínku, že derivace $f(x)$ a $g(x)$ budou totožné [8].

4.3.1 Lagrangeův interpolační polynom

Lagrangeův interpolační polynom je jedním z nejnámějších způsobů interpolace funkce, která byla zadána pouze v diskrétních bodech. Máme tedy dáno $n+1$ bodů ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), kterými funkce prochází. Polynom n -tého stupně získáme interpolací dle vztahu:

$$P_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x) \quad (32)$$

kde l_i jsou tzv. fundamentální polynomy definované předpisem [4]:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (33)$$

4.3.2 Interpolační splajny

Máme-li interpolovat funkci na dlouhém intervalu, musíme podmínku interpolace splnit ve velkém množství bodů. To má za následek vznik polynomu vysokého stupně a je zde riziko vzniku chyb mezi jednotlivými uzlovými body. Tomu lze předejít, když rozdělíme interval na více menších subintervalů a pro každý z nich sestrojíme interpolační polynom zvlášť. Tyto polynomy už budou mít nižší stupeň a možnost vzniku velkých chyb se sníží.

Nejjednodušším případem splajnu je lineární interpolační splajn, který spojuje sousední dva body přímkou. Lineární splajn je spojitá funkce, avšak derivace už bývá nespojitá. Lineární splajn by měl být obecně použit u velmi dlouhých intervalů, kde zanikají „ostré body“ (funkce se láme při průchodu bodem).

Je-li polynom navíc určen i předepsanými derivacemi, mluvíme o Hermitově interpolaci. V tomto případě bude spojitá funkce a její první derivace, zatímco derivace další již spojitě nebudou [4].

5 Měření emisí, emisní limity

Za emise a imise můžeme všeobecně považovat látky, které jsou vypouštěny do životního prostředí. Tato kapitola bude zaměřena na škodliviny vypouštěné do ovzduší. Je důležité též zmínit, že emisní limity nejsou stejné pro všechny výrobní závody, a tedy své vlastní, ze zákona dané, limity mají např. spalovny, hutě, závody na výrobu elektrické energie a další. A právě pro elektrárny jsou zde uvedeny tabulky tab. 5.1, tab. 5.2, tab. 5.3, tab. 5.4, které ukazují množství základních polutantů, vypouštěných do ovzduší. Hodnoty pro roky 2010 a 2020 jsou samozřejmě pouze odhady, které vznikly na základě emisních limitů a počtu stávajících i nově plánovaných elektráren.

5.1 Nejrozšířenější polutanty

Celosvětově se do ovzduší vypouští desítky až stovky různých látek, které jsou pro něj nežádoucí. V tomto rozdělení bude zmíněno pouze několik nejzákladnějších a nejčastěji se vyskytujících polutantů, které ovzduší znečišťují po celém světě. V základní skupině znečišťujících látek v České republice jsou podle vyhlášky Ministerstva životního prostředí (117/1997 Sb.) tyto látky [11]:

5.1.1 Oxid siřičitý

Oxid siřičitý (SO_2) je značně toxický plyn, který nejjednodušeji vzniká hořením síry ($\text{S} + \text{O}_2 \rightarrow \text{SO}_2$). Dále také vzniká také jako vedlejší produkt při spalování méně kvalitního hnědého uhlí, které obsahuje jak síru, tak její sloučeniny. Právě díky vysokým koncentracím SO_2 v ovzduší zužovaly především v 80. letech sever a západ tehdejšího Československa kyselá deště a na dlouhou dobu zničily velké zalesněné plochy, které se tam nacházely. Oxid siřičitý má však nežádoucí účinky i na lidský organismus. Je dráždivý a způsobuje různá onemocnění dýchacích cest. Po roce 1990 došlo díky instalování odsiřovacích zařízení ke značnému poklesu emisí SO_2 , které i v současnosti mají sestupnou tendenci viz tab. 5.1 [12].

Stát	2000		2010		2020	
	[kt]	[kg/osoba]	[kt]	[kg/osoba]	[kt]	[kg/osoba]
Česká republika	141	13,68	72	6,86	12	1,14
Slovensko	71	13,22	27	5,00	10	1,85
Německo	237	2,89	138	1,68	52	0,63
Rakousko	5	0,62	3	0,36	1	0,12
Polsko	936	24,24	567	14,72	47	1,22
Francie	164	2,81	40	0,64	20	0,32
Itálie	338	5,90	27	0,45	16	0,27
Španělsko	957	24,12	87	1,89	19	0,41
Švédsko	9	1,02	10	1,07	7	0,75
Maďarsko	393	39,07	184	18,34	8	0,80
Velká Británie	815	13,94	211	3,51	18	0,30

Tab. 5.1 Množství vypouštěného SO₂ ve vybraných evropských zemích a jeho vývoj [13]

5.1.2 Oxid uhelnatý

Oxid uhelnatý (CO) je bezbarvý plyn, který primárně vzniká hořením uhlíku při nedostatku kyslíku ($2C + O_2 \rightarrow 2CO$). Emitován je nejvíce automobily, lokálními topeništi a také energetickým průmyslem. Je-li lidský organismus vystaven velké koncentraci CO, např. v uzavřené místnosti s puštěným spalovacím motorem, může dojít k otravě, následované smrtí. Nejprísnější emisní limity v dnešní době platí pro automobilovou dopravu a pro hutní a energetický průmysl [12].

5.1.3 Oxidy dusíku

Mezi hlavní zástupce oxidů dusíku, souhrnně označovaných NO_x, řadíme oxid dusnatý a oxid dusičitý. Dále do této skupiny řadíme oxid dusný (N₂O), známý též jako rajský plyn, oxid dusitý (N₂O₃) a oxid dusičný (N₂O₅) [14].

Oxid dusnatý (NO) je bezbarvý jedovatý plyn, který se průmyslově vyrábí oxidací amoniaku ($4 NH_3 + 5 O_2 \rightarrow 4 NO + 6 H_2O$). Oxid dusnatý je však na vzduchu nestálý a reaguje s kyslíkem na oxid dusičitý (NO₂) podle reakce ($2 NO + O_2 \rightarrow 2 NO_2$).

Oxid dusičitý (NO₂) je červenohnědý plyn (popř. žlutohnědá kapalina) vyskytující se v běžných podmínkách jako dimer N₂O₄, který je již bezbarvý. Oxid dusičitý vzniká ve spalovacích motorech a v těžkém a energetickém průmyslu a je jednou z látek způsobující kyselou dešť a skleníkový efekt. Při kontaktu lidského organismu s touto látkou dochází k zánětu dýchacích cest [15]. Vypouštěné množství oxidů dusíku se stejně jako u ostatních škodlivin postupně snižuje tab. 5.2.

Stát	2000		2010		2020	
	[kt]	[kg/osoba]	[kt]	[kg/osoba]	[kt]	[kg/osoba]
Česká republika	107	10,38	58	5,52	29	2,76
Slovensko	27	5,03	16	2,97	13	2,41
Německo	217	2,65	135	1,64	118	1,43
Rakousko	10	1,24	14	1,69	15	1,82
Polsko	334	8,65	235	6,10	108	2,80
Francie	116	1,99	45	0,72	46	0,73
Itálie	123	2,15	61	1,01	83	1,38
Španělsko	296	7,46	140	3,04	61	1,32
Švédsko	24	2,72	24	2,58	22	2,36
Maďarsko	39	3,88	25	2,49	10	1,00
Velká Británie	362	6,19	211	3,51	110	1,83

Tab. 5.2 Množství vypouštěných NO_x ve vybraných evropských zemích a jeho vývoj [13]

5.1.4 Tuhé znečišťující látky

Tuhé znečišťující látky, nebo také pevné prachové částice jsou drobné částičky kapalin, či tuhých látek, které jsou unášeny vzduchem. Tyto částice mají svůj vlastní typ značení, které se skládá z označení PM a číselného dolního indexu, který udává maximální velikost emitovaných částic v mikrometrech. V České republice, ale i po celém světě se nejběžněji měří emise prachových částic PM₁₀ a PM_{2,5} (tab. 5.3) [16].

Některé zdroje těchto látek jsou čistě přírodní, ať jde o činné sopky nebo lesní požáry, ale pevné částice se do ovzduší uvolňují též při spalování uhlí, dřeva, ropy a také nafty v dieslových motorech bez katalyzátoru. Neblahý účinek na lidský organismus a především na dýchací ústrojí je opět zřejmý. Česká republika je v porovnání s ostatními zeměmi velmi zuřována právě emisemi PM částic a to díky emisím z dopravy, energetiky a také vytápění domácností pomocí kotlů na tuhá paliva [12].

Stát	2000		2010		2020	
	[kt]	[kg/osoba]	[kt]	[kg/osoba]	[kt]	[kg/osoba]
Česká republika	47	4,56	14	1,33	9	0,86
Slovensko	8	1,49	7	1,30	7	1,30
Německo	19	0,23	10	0,12	6	0,07
Rakousko	1	0,12	< 1	0,09	< 1	0,07
Polsko	29	0,75	20	0,52	16	0,42
Francie	11	0,19	5	0,08	9	0,14
Itálie	13	0,23	2	0,03	3	0,05
Španělsko	24	0,60	8	0,17	4	0,09
Švédsko	1	0,11	< 1	0,09	< 1	0,07
Maďarsko	14	1,39	5	0,50	5	0,50
Velká Británie	17	0,29	8	0,13	3	0,05

Tab. 5.3 Množství vypouštěných pevných částic ve vybraných evropských zemích a jeho vývoj [13]

5.1.5 Oxid uhličitý

Oxid uhličitý (CO₂) již není zmíněn v základní skupině polutantů, ale přesto je jednou z látek, jejichž nadměrná koncentrace v ovzduší není pro životní prostředí přínosná. Sice se běžně vyskytuje v atmosféře, ale jeho množství, které vyprodukuje např. automobilová doprava je mnohonásobně vyšší a tedy nebezpečné. Do lidského organismu se CO₂ běžně dostává ze vzduchu a není nebezpečný díky jeho nízké koncentraci (0,038%). Avšak při koncentraci 10% může dojít k bezvědomí, které bude při dlouhodobém pobytu následováno smrtí [12]. V tab. 5.4 lze nalézt největší světové producenty CO₂.

Stát	1998		2002	
	[Mt]	[t/osoba]	[Mt]	[t/osoba]
USA	5400	19,6	5591,9	19,4
Čína	2900	2,3	4082,4	3,2
Rusko	1400	9,59	1489,3	10,4
Japonsko	1100	8,7	1144,5	9,0
Německo	850	10,27	833,6	10,2
Velká Británie	550	8,4	519,6	8,7
Kanada	480	15,33	531,7	16,7
Itálie	480	8,33	436,5	7,6
Francie	380	6,41	383,6	6,4

Tab. 5.4 Množství vypouštěného CO₂ pro vybrané státy [13]

Dalším důsledkem nadbytku CO₂ v prostředí je skleníkový efekt, který kromě již zmíněného oxidu uhličitého, tvoří metan, oxid dusný a další plynné látky (tab. 5.5). Podstatou skleníkového efektu je tvorba plynného obalu kolem Země, který brání slunečním paprskům, odraženým od zemského povrchu opustit okolí naší planety a dochází tedy ke globálnímu oteplování Země.

Látka	CO ₂	CH ₄	N ₂ O	Ostatní
[%]	82	12	4	2

Tab. 5.5 Podíl jednotlivých plynů na skleníkovém efektu [15]

5.2 Plánování měření, práce s daty

Díky plánovanému měření můžeme dostat kvalitní výsledky i při malém počtu experimentů. Můžeme správně zhodnotit vliv všech faktorů, které ovlivňují proces včetně jejich interakcí. Faktor může být veličina měřitelná jako tlak, či teplota, nebo veličina neměřitelná jako stroj, dodavatel, materiál, nebo operátor.

Plánovaný experiment je posloupnost měření, při kterých cíleně měníme hodnoty vstupních parametrů, abychom vypožorovali vliv jejich změn na hodnotu výstupní proměnné. Plánujeme-li měření, pracujeme s několika základními pojmy:

- Faktory – jsou veličiny, které ovlivňují sledovanou veličinu a její hodnotu. Mohou být jak měřitelné, tak kategoriální.

- Náhodné vlivy – faktory, které nemůžeme ovlivnit. Díky nim dostáváme při měření za stejných podmínek různé výsledné hodnoty.
- Sledované veličiny – jsou veličiny závislé na faktorech a náhodných vlivech, kterými vyjadřujeme výsledek plánovaného experimentu.

Ke zpřesňování celého měření můžeme používat tyto metody:

- Replikace – opakované měření při shodných hodnotách faktorů, sloužící k minimalizaci nepřesnosti měření a zvýšení jeho spolehlivosti.
- Blok – jsou podmínky, tvořící jednotlý celek z hlediska experimentu (stejný tým, stejné klimatické podmínky, stejný sledovaný materiál). Bloky používáme především u dlouhodobých a rozsáhlých experimentů [17].

Abychom v našich výpočtech pracovali s neovlivněnými daty, je třeba při měření i zpracování nakládat obezřetně a zabránit tím neobjektivnosti celého experimentu. Základními způsoby získávání informací jsou zjišťování (počet obyvatel, domů, aut), měření a pozorování (teplota, tlak, průtok) a výpočet (zpracování velkého množství vstupních dat). Dále je třeba získaná data zpracovat tzn. rozčlenit je tak, aby byla vzhledem k experimentu užitečná a mohla se účinně použít při daný výpočet.

Zpracovávání dat se dělí podle druhu média (zpracovávání dat lidským mozkiem, nebo pomocí programovým systémů) a podle druhu metod (logické, nebo statistické metody). Další kritérium, podle kterého data posuzujeme, je jejich přínos. Zde data dělíme na informace (dozvídáme se z nich něco nového), zprávy (neříkají nic nového) a na data, která nám neříkají nic (jsou mimo naše znalosti, nebo naše znalosti v oboru jsou nedostačující) [3].

5.3 Imisní limity v ČR a jejich vývoj

Imisní limity pro jednotlivá průmyslová odvětví jsou zaneseny v zákonech a jejich dodržování je povinností každého průmyslového závodu. Je zde také nutno zmínit rozdíl mezi pojmy emise a imise. Emise jsou látky, které jsou vypouštěné přímo ze zdroje znečištění (např. tovární komín). Zatímco imise je látka, která se dostane k příjemci, kterým tímto můžeme rozumět lidský organismus, nebo životní prostředí. Z tabulek (tab. 5.6, tab. 5.7) lze vypožorovat, že dílčí hodnoty se při změnách vyhlášek o životním prostředí se prakticky nemění.

Látka	Doba průměrování	Hodnota imisního limitu [$\mu\text{g}\cdot\text{m}^{-3}$]	Maximální dovolený počet překročení za rok
SO ₂	1 hod.	350	24
	24 hod.	125	3
CO	max. denní 8 hod. průměr	10 000	---
NO ₂	1 hod.	200	18
	kalendářní rok	40	---
PM ₁₀	24 hod.	50	35
	kalendářní rok	40	---

Tab. 5.6 Imisní limity platící od r. 2005 v ČR [18]

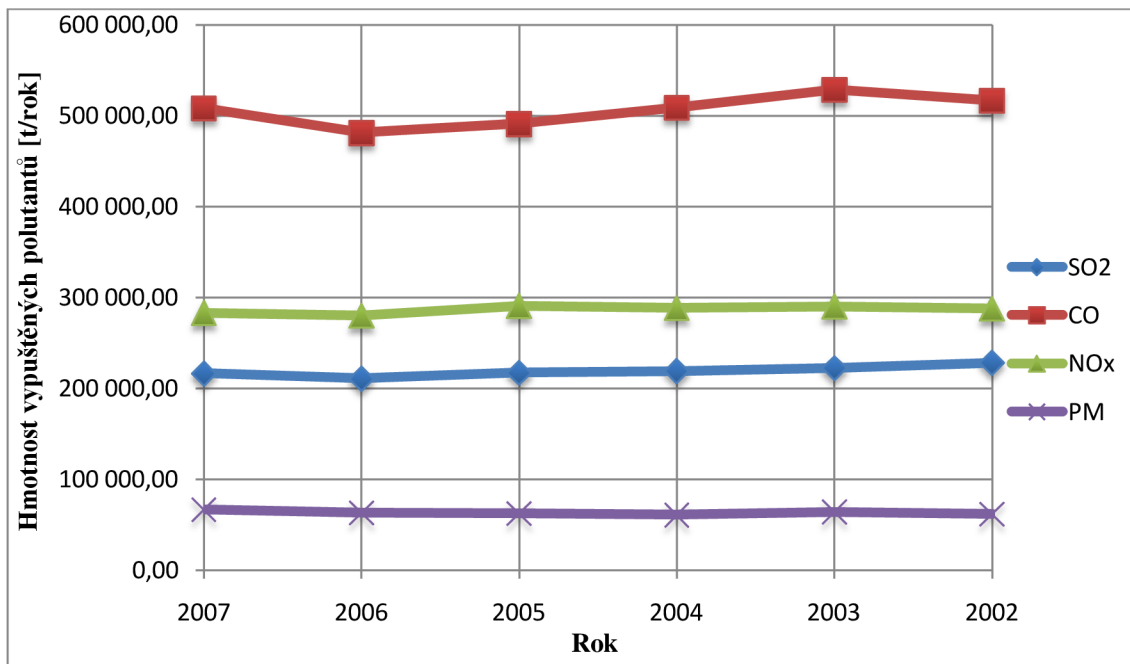
Látka	Doba průměrování	Hodnota imisního limitu [$\mu\text{g}\cdot\text{m}^{-3}$]	Maximální dovolený počet překročení za rok
SO ₂	1 hod.	350	24
	24 hod.	125	3
	kalendářní rok	50	---
CO	max. denní 8 hod. průměr	10 000	---
NO ₂	1 hod.	200	18
	kalendářní rok	40	---
PM ₁₀	24 hod.	50	35
	kalendářní rok	40	---

Tab. 5.7 Imisní limity platící v letech 2002-2004 v ČR [18]

Následující tabulka (tab. 5.8) ukazuje hmotnost vypouštěných polutantů v nedávných letech. Tato čísla jsou již přesnými hodnotami, zatímco pro roky 2008 a 2009 se data pouze zatím shromažďují a provádějí se odhady. Z grafu na obr. 5.1 vyplývá, že množství vypouštěných polutantů kolísá, ale nikterak výrazně se nemění.

Látka	Rok	2007	2006	2005	2004	2003	2002
SO ₂	[t/rok]	216 546,1	210 831,0	217 386,5	219 162,6	222 415,1	228 237,6
CO	[t/rok]	508 293,9	481 279,4	491 209,2	509 215,7	528 847,9	516 687,2
NO _x	[t/rok]	283 192,0	280 121,3	291 006,7	288 730,5	290 279,7	288 008,7
PM	[t/rok]	66 769,8	63 194,3	62 328,9	60 735,6	64 143,6	61 824,3
CO ₂	[Mt/rok]	133,7	127,9	125,9	126,6	125,9	124,6

Tab. 5.8 Množství vypuštěných polutantů v ČR [19]



Obr. 5.1 Graf vývoje množství vypouštěných polutantů v letech 2002 – 2007

5.4 Imisní limity ve vybraných světových zemích

Tabulky (tab. 5.9, tab. 5.10) udávají imisní limity na Slovensku a ve Velké Británii. Jelikož jde o státy, které jsou členskými zeměmi Evropské unie, je zde velice patrná vzájemná podobnost limitů. Zároveň jsou hodnoty těchto limitů téměř shodné jako v České republice.

Látka	Doba průměrování	Hodnota imisního limitu [$\mu\text{g}\cdot\text{m}^{-3}$]	Maximální dovolený počet překročení za rok
SO ₂	1 hod.	350	24
	24 hod.	125	3
	kalendářní rok	20	---
CO	max. denní 8 hod. klouzavý průměr	10 000	---
NO ₂	1 hod.	200	18
	kalendářní rok	40	---
PM ₁₀	24 hod.	50	35
	kalendářní rok	40	---

Tab. 5.9 Imisní limity na Slovensku (2005) [20]

Látka	Doba průměrování	Hodnota imisního limitu [$\mu\text{g}\cdot\text{m}^{-3}$]	Maximální dovolený počet překročení za rok
SO ₂	1 hod.	350	24
	24 hod.	125	3
	kalendářní rok	20	---
NO ₂	1 hod.	200	18
	kalendářní rok	40	---
NO _x	kalendářní rok	30	---
PM ₁₀	24 hod.	50	35
	kalendářní rok	40	---

Tab. 5.10 Imisní limity ve Velké Británii (2005) [21]

Pro možnost porovnání jsou v tab. 5.11 uvedeny imisní limity, platící v USA, přičemž lze pozorovat, že tyto hodnoty jsou značně vyšší, než údaje v tab. 5.9 a tab. 5.10.

Látka	Doba průměrování	Hodnota imisního limitu	
CO	1 hodina	35 ppm	40 mg/m ³
	8 hodin	9 ppm	10 mg/m ³
SO ₂	24 hod.	0,14 ppm	367 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
	kalendářní rok	0,03 ppm	78 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
NO ₂	1 hodina	100 ppb	188 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
	kalendářní rok	53 ppb	100 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
PM ₁₀	24 hod.	150 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	

Tab. 5.11 Imisní limity platící v USA [22]

Jednotky, použité v tabulce, se používají při měření drobných částic ve vzduchu, nebo ve vodě. Značky ppm (parts per million) a ppb (parts per billion) vyjadřují podíl mezi koncentrací rozptýlených částic a vzduchu (popř. vody), ve které látky měříme [22]:

$$1 \text{ ppm} = 1 \text{ mg polutantu} / 1 \text{ kg roztoku} \quad (34)$$

$$1 \text{ ppb} = 1 \mu\text{g polutantu} / 1 \text{ kg roztoku} \quad (35)$$

Koncentrace můžeme dále dělit na hmotnostní a objemové, přičemž při měření polutantů častěji používáme objemové koncentrace.

5.5 Kjótský protokol

Kjótský protokol je mezinárodní úmluva, ve které se průmyslové země zavázaly snížit emise skleníkových plynů o 5,2 %. Toto snížení zahrnuje šest plynů – oxid uhličitý, metan, oxid dusný, hydrogenované fluorovodíky, polyfluorovodíky a fluorid sírový. Jejich emise za pětileté období (2008 – 2012) jsou státy povinny upravit o předem daná procenta vzhledem k emisím naměřeným v roce 1990 [15]. Jelikož každý plyn se jinou

měrou podílí např. na tvorbě skleníkového efektu, musela být zavedena veličina, na kterou se emise přepočítávají. Ta se nazývá uhlíkový ekvivalent, jehož principem je přepočet podle škodlivosti a životnosti v atmosféře. Jde o vyjádření, kolikrát je daná látka škodlivější než CO₂, takže používá-li se v současnosti např. přepočet:

1 t N₂O = 310 t (CO₂)ekv (uhlíkového ekvivalentu).

Znamená to, že N₂O je 310x škodlivější než CO₂ (tedy jedna tuna N₂O se rovná 310 tunám CO₂) [23].

Snížení o 5,2 %, které bylo v rámci smlouvy dojednáno, by mělo být dosaženo díky různě velkým snížením (ač některé země mohou i navyšovat) na území jednotlivých států, které smlouvu podepsaly (tab. 5.12).

Hodnota emisní redukce	Státy
8 %	Belgie, Bulharsko, Česká republika, Dánsko, Estonsko, Finsko, Francie, Irsko, Itálie, Lichtenštejnsko, Litva, Lotyšsko, Lucembursko, Monako, Nizozemí, Německo, Portugalsko, Rakousko, Rumunsko, Řecko, Slovensko, Slovinsko, Španělsko, Švédsko
7 %	USA
6 %	Japonsko, Kanada, Maďarsko, Polsko
5 %	Chorvatsko
0 %	Nový Zéland, Ukrajina, Rusko
-1 %	Norsko
-8 %	Austrálie
-10 %	Island

Tab. 5.12 Hodnota emisní redukce na základě Kjótského protokolu [15]

Pozn.: Záporné procentuální hodnoty znamenají, že státy mohou svoje emisní limity oproti roku 1990 o dané procento navýšit.

Samozřejmě ne všechny státy jsou schopné dané limity plnit, proto vznikají mechanismy, díky kterým země může překročit své limity. Za všechny jmenujme např. obchodování s emisemi. Jeho princip je jednoduchý a je prakticky vystižen názvem. Překračuje-li jedna země svůj limit, může od jiného státu, který naopak svého limitu nedosáhne, odkoupit určité množství emisí (přepočtených na uhlíkový ekvivalent) a celkový limit je tedy splněn. Jak tomu ale bývá, existují i jiné praktiky, které se již nedají považovat za prospěšné. Jako příklad bychom mohli uvést přesun průmyslové výroby do zemí, které Kjótský protokol nepodepsaly, a tedy své emise nijak nehlídají [15].

Stávající protokol vyprší v roce 2012 a samozřejmě již probíhají jednání o přesné podobě nového systému. V novém protokolu by měla být zohledněna fakta jako např. globální finanční krize, či finanční problémy postihující jednotlivé státy.

6 Závěr

Ke správnému vyhodnocování výsledků z měření škodlivých látek vypouštěných do ovzduší obecně řečeno využíváme statistickou analýzu. Úkolem vyhodnocovatele je navrhnout takovou funkci, aby její průběh co nejpřesněji vystihoval vztah mezi vstupními faktory a pozorovanou veličinou. Neexistuje žádná obecná statistická metoda, která by vždy podala přesný a nejlepší výsledek, proto je třeba klást důraz na výběr nejvhodnější statistické metody. Při použití žádných dvou metod nedostaneme zcela totožné výsledky.

Základní používanou statistickou metodou je aproximace. Další můžeme jmenovat interpolaci a regresní analýzu. Za aproximaci můžeme obecně považovat proložení bodů např. jen přímkou, zvolenou bez jakýchkoliv výpočtů. Ale stejně tak můžeme aproximaci provést podle předem daných funkčních předpisů. Interpolace je speciálním případem aproximace, kdy je nutné, aby vzniklá funkce procházela body, které jsme znali na začátku výpočtu. Regresní analýza je přesně popsáný druh aproximace, který bývá prováděn nejčastěji metodou nejmenších čtverců.

V této práci je uveden přehled těchto aproximačních metod, ze kterých byla jako nejvhodnější pro ukázkový příklad vybrána metoda nejmenších čtverců, na které byl ukázán postup při hledání aproximační funkce pro naměřená data.

Metoda nejmenších čtverců funguje na principu minimalizace reziduálního součtu čtverců vzdáleností křivky výsledné funkce od zadaných bodů. Čím je tedy křivka blíže původním bodům, tím dostaneme menší součet reziduálních čtverců a můžeme výpočet považovat za přesnější. Často již na počátku výpočtu známe minimální hodnotu rezidua, jehož hodnotu musíme dostat, abychom mohli funkci přijmout jako postačující.

V první části příkladu jsme data prokládali polynomem prvního stupně a vzhledem k hodnotě rezidua 5,51 můžeme tvrdit, že tato aproximace není nikterak přesná. Proto jsme v druhé části příkladu přímkou nahradili polynomem druhého stupně, který by teoreticky měl data vystihovat lépe. A skutečně jsme v tomto případě dosáhli přesnější aproximace, což potvrzuje hodnota rezidua 1,69. Hodnoty redukce oxidů dusíku bychom při jiných teplotách tedy počítali z rovnice pro polynom druhého stupně a předpokládali bychom, že se vypočtené hodnoty od těch reálných nebudou nijak výrazně lišit.

Dalším prvkem, který ovlivňuje výsledek experimentu je plánování měření. Plánovaným experimentem se snažíme odhadnout vliv okolních faktorů na měřené hodnoty a též jejich důležitost. Proto je naším cílem najít potřebné kombinace faktorů, abychom při minimálním počtu měření získali informace o vlivu faktorů na měřený proces. A následně optimálních podmínek pro celý experiment.

V poslední části práce jsou uvedena množství produkovaných škodlivin a emisní limity pro Českou republiku a několik dalších států. Je patrné, že limity pro státy Evropské

unie jsou velmi podobné, což je zajisté dáno předpisy, které tato organizace vydává, zatímco limity platící v USA jsou značně vyšší. Dále je zde ukázán zřejmý vývoj množství vypouštěných polutantů od roku 2000 až do roku 2020. Pro názornější ukázkou je uveden přepočtený množství vypouštěných emisí na osobu. Ač je zřetelný pokrok v oblasti redukce množství vypouštěných polutantů, patří Česká republika stále mezi země, které mají zdaleka nejvyšší hodnoty vypouštěných emisí na osobu. Další státy, které vykazují v tomto ohledu vysoké hodnoty jsou naše sousední země Slovensko a Polsko. Střední Evropa tedy v porovnání např. se státy západní a severní Evropy (Francie, Španělsko, Švédsko) vypouští násobně větší množství polutantů, a proto se dá předpokládat i budoucí redukce vypouštěných škodlivin.

Seznam použité literatury

- [1] Regresní analýza. In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Zveřejněné dne: 10. 11. 2005, naposledy upraveno 1. 3. 2010 [cit. 14. dubna 2010]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Regresn%C3%AD_anal%C3%BDza>.
- [2] Doc. RNDr. Zdeněk Karpíšek, CSc. *MATEMATIKA IV - Statistika a pravděpodobnost. 2. vydání*. Brno : VUT v Brně. 170s., 2003 ISBN 80-214-2522-9.
- [3] Janíček, Přemysl. *Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky - Hledání souvislostí. I. díl*. 1. vydání. Brno : VUT Brno. 682 s., 2007. ISBN (CERM) 978-80-7204-555-6.
- [4] Doc. RNDr. Libor Čermák, CSc., RNDr. Rudolf Hlavička CSc. *Numerické metody*. Brno : VUT Brno. 110 stran, 1. vydání. 2005. ISBN 80-214-3071-0.
- [5] REIF, J. *Metody matematické statistiky*. Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni. 286 s., 1. vydání. 2000. ISBN 80-7082-593-6.
- [6] Kategorie:Matematický software. In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Zveřejněné dne: 18. 1. 2008, naposledy upraveno 30. 4. 2010 [cit. 4. května 2010]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Matematick%C3%BD_software>.
- [7] *Západočeská univerzita v Plzni* [online]. 2003 [cit. 3. května 2010]. Centrum aplikované matematiky. Dostupné z WWW: <http://www.cam.zcu.cz/~danek/Students/2003_ZS/Materialy/aproximace_funkci.pdf>.
- [8] Příkryl, Petr. *NUMERICKÉ METODY - Aproximace funkcí a matematická analýza*. 1. vydání. Plzeň : ZČU Plzeň. 187 s., 1996.
- [9] *ČVUT* [online]. 24. 3. 2000 [cit. 3. května 2010]. Katedra fyzikální elektroniky. Dostupné z WWW: <<http://kfe.fjfi.cvut.cz/~limpouch/numet/aprox/node15.html>>.
- [10] Taylorova řada. In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Zveřejněné dne: 1. 9. 2006, naposledy upraveno 19. 4. 2010 [cit. 4. května 2010]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Taylorova_%C5%99ada>.
- [11] *Energetické informační centrum* [online]. 1997 [cit. 17. dubna 2010]. Emisní limity. Dostupné z WWW: <http://www.energetik.cz/hlavni3.html?m1=/zakony/e_limity.html>.

- [12] Znečištění ovzduší v České republice. In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Zveřejněno dne: 8. 10. 2009, naposledy upraveno 28. 2. 2010 [cit. 14. dubna 2010]. Dostupné z WWW: http://cs.wikipedia.org/wiki/Zne%C4%8Di%C5%A1t%C4%9Bn%C3%AD_ovzdu%C5%A1%C3%AD_v_%C4%8Cesk%C3%A9_republice>.
- [13] *European Commission* [online]. 2008, 17. 2. 2010 [cit. 29. dubna]. Environment - Air. Dostupné z WWW: http://ec.europa.eu/environment/air/pdf/draft_final_rep2.pdf>.
- [14] Oxidy dusíku. In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Zveřejněno dne: 5. 12. 2003, naposledy upraveno 24. 4. 2010 [cit. 9. května 2010]. Dostupné z WWW: http://cs.wikipedia.org/wiki/Oxidy_dus%C3%ADku#Anorganick.C3.A9_slou.C4.8Deniny>
- [15] Prof.Ing.Jaroslav Kadrnožka, CSc. *Energie a globální oteplování, Země v proměnách při opatřování energie*. Brno : VUT Brno. 189 stran. 1. vydání, 2006. ISBN 80-241-2919-4.
- [16] Pevné částice. In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Zveřejněno dne: 30. 8. 2009, naposledy upraveno 4. 5. 2010 [cit. 9.května 2010]. Dostupné z WWW: http://cs.wikipedia.org/wiki/Pevn%C3%A9_%C4%8D%C3%A1stice>.
- [17] Doc. RNDr. Bohumil MAROŠ, CSC., Plánování experimentu. In *Konference WITNESS* [online]. Čejkovice : Humusoft, 2006 [cit. 27. Dubna 2010]. Dostupné z WWW: <http://www2.humusoft.cz/www/papers/witkonf06/prispevky/pdf/maros.pdf>>.
- [18] *Český hydrometeorologický ústav* [online]. 2002 [cit. 12. dubna 2010]. Imisní limity. Dostupné z WWW: <http://www.chmi.cz/uoco/limit/imlim.html>>.
- [19] *Český hydrometeorologický ústav* [online]. 2000, 23. 10. 2008 [cit. 12. dubna 2010]. Grafické ročenky. Dostupné z WWW: <http://www.chmi.cz/uoco/isko/groc/groc.html>>.
- [20] Zhodnotenie kvality ovzdušia a aglomeráciách a zónách. In *Hodnotenie kvality ovzdušia s SR* [online]. Bratislava : Slovenský hydrometeorologický ústav, srpen 2009 [cit. 29. dubna 2010]. Dostupné z WWW: http://enviroportal.sk/ism/pdf/ovzd/2008/Hodnotenie_kvality_ovzdušia_SR_2008.pdf>.

- [21] *Office of Public Sector Information* [online]. 2. 7. 2001 [cit. 29. dubna 2010]. The air quality limit values regulations. Dostupné z WWW: <<https://opsi.gov.uk/si/si2001/20012315.htm>>. ISBN 0110296184.
- [22] *US Environmental Protection Agency (EPA)* [online]. 1990, 16. 4. 2010 [cit. 29. dubna]. National Ambient Air Quality Standards. Dostupné z WWW: <<http://www.epa.gov/air/criteria.html>>.
- [23] Kjótský protokol. In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Zveřejněno dne: 20. 1. 2005, naposledy upraveno 23. 3. 2010 [cit. 9. května 2010]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Kj%C3%B3tsk%C3%BD_protokol>.

Seznam příloh

Příloha 1 Zdrojový kód v programu Maple 12

Příloha 2 CD-Rom obsahující: a) Bakalářskou práci

b) Přílohu 1 v elektronické podobě

Příloha 1 - Aproximace naměřených dat metodou nejmenších čtverců

Vstupní data:

teplota [°C]	účinnost redukce NO [%] (30-ti minutové průměry)			
205	15,8	15,2	13,4	14,1
212	23,0	24,2	23,3	25,4
219	33,0	29,7	31,4	33,4
230	35,3	35,1	36,2	34,7
235	37,6	38,1	36,8	38,3

Nejprve nahrajeme vstupní data a hodnoty z měření zakrouhlíme (hodnota y vyjadřuje průměrnou hodnotu při dané teplotě)

```
> restart;
```

```
> Digits:=6;
```

```
> t[1]:=205;t[2]:=212;t[3]:=219;t[4]:=230;t[5]:=235;
```

```
t1 := 205
```

```
t2 := 212
```

```
t3 := 219
```

```
t4 := 230
```

```
t5 := 235
```

```
> y[1]:=(1/4)*(15.8+15.2+13.4+14.1);
```

```
y[2]:=(1/4)*(23+24.2+23.3+25.4);
```

```
y[3]:=(1/4)*(33+29.7+31.4+33.4);
```

```
y[4]:=(1/4)*(35.3+35.1+36.2+34.7);
```

```
y[5]:=(1/4)*(37.6+38.1+36.8+38.3);
```

```
y1 := 14.6250
```

```
y2 := 23.9750
```

```
y3 := 31.8750
```

```
y4 := 35.3250
```

```
y5 := 37.7000
```

Aproximace polynomem prvního stupně

Spočítáme koeficienty, které jsou členy soustavy rovnic

```
> a[11]:=5*1*1;
```

```
a[12]:=sum(t[i],i=1..5);
```

```
a[21]:=sum(t[i],i=1..5);
```

```
a[22]:=sum(t[i]^2,i=1..5);
```

```
b[1]:=sum(y[i],i=1..5);
```

```
b[2]:=sum(y[i]*t[i],i=1..5);
```

```
a11 := 5
```

```
a12 := 1101
```

```
a21 := 1101
```

$$a_{22} := 243055$$

$$b_1 := 143.500$$

$$b_2 := 32045.7$$

Vyjádříme jednotlivé rovnice soustavy a tu vyřešíme

```
> R1:=a[11]*x[1]+a[12]*x[2]=b[1];
```

```
R2:=a[21]*x[1]+a[22]*x[2]=b[2];
```

$$R1 := 5x_1 + 1101x_2 = 143.500$$

$$R2 := 1101x_1 + 243055x_2 = 32045.7$$

```
> reseni1:=solve({R1,R2},{x[1],x[2]});
```

$$\text{reseni1} := \{x_1 = -131.400, x_2 = 0.727066\}$$

Vypočítáme reziduum, pomocí vyčíslení velikostí jednotlivých reziduálních čtverců

```
> assign(reseni1);
```

```
> rez[1]:=y[1]-x[1]-t[1]*x[2];
```

```
rez[2]:=y[2]-x[1]-t[2]*x[2];
```

```
rez[3]:=y[3]-x[1]-t[3]*x[2];
```

```
rez[4]:=y[4]-x[1]-t[4]*x[2];
```

```
rez[5]:=y[5]-x[1]-t[5]*x[2];
```

```
> reziduum1:=(rez[1]^2+rez[2]^2+rez[3]^2+rez[4]^2+rez[5]^2)^0.5;
```

$$\text{reziduum1} := 5.51473$$

Aproximace polynomem druhého stupně

Spočítáme opět nejprve koeficienty, které jsou členy soustavy rovnic

```
> c[11]:=5;
```

```
c[12]:=sum(t[i],i=1..5);
```

```
c[13]:=sum(t[i]^2,i=1..5);
```

```
c[21]:=sum(t[i],i=1..5);
```

```
c[22]:=sum(t[i]^2,i=1..5);
```

```
c[23]:=sum(t[i]^3,i=1..5);
```

```
c[31]:=sum(t[i]^2,i=1..5);
```

```
c[32]:=sum(t[i]^3,i=1..5);
```

```
c[33]:=sum(t[i]^4,i=1..5);
```

```
d[1]:=sum(y[i],i=1..5);
```

```
d[2]:=sum(y[i]*t[i],i=1..5);
```

```
d[3]:=sum(y[i]*t[i]^2,i=1..5);
```

$$c_{11} := 5$$

$$c_{12} := 1101$$

$$c_{13} := 243055$$

$$c_{21} := 1101$$

$$c_{22} := 243055$$

```

c23 := 53791587
c31 := 243055
c32 := 53791587
c33 := 11934531907
d1 := 143.500
d2 := 32045.7
d3 := 0.717158 107

```

Vyjádříme jednotlivé rovnice soustavy a tu vyřešíme

```

> R10:=c[11]*z[1]+c[12]*z[2]+c[13]*z[3]=d[1];
R20:=c[21]*z[1]+c[22]*z[2]+c[23]*z[3]=d[2];
R30:=c[31]*z[1]+c[32]*z[2]+c[33]*z[3]=d[3];

```

$$R10 := 5 z_1 + 1101 z_2 + 243055 z_3 = 143.500$$

$$R20 := 1101 z_1 + 243055 z_2 + 53791587 z_3 = 32045.7$$

$$R30 := 243055 z_1 + 53791587 z_2 + 11934531907 z_3 = 0.717158 \cdot 10^7$$

```

> reseni2:=solve({R10,R20,R30},{z[1],z[2],z[3]});
reseni2 := {z1 = -1410.22, z2 = 12.3666, z3 = -0.0264179}

```

Vypočítáme reziduum, pomocí vyčíslení velikostí jednotlivých reziduálních čtverců

```

> assign(reseni2);
> rez[10]:=y[1]-z[1]-t[1]*z[2]-t[1]^2*z[3]:
rez[20]:=y[2]-z[1]-t[2]*z[2]-t[2]^2*z[3]:
rez[30]:=y[3]-z[1]-t[3]*z[2]-t[3]^2*z[3]:
rez[40]:=y[4]-z[1]-t[4]*z[2]-t[4]^2*z[3]:
rez[50]:=y[5]-z[1]-t[5]*z[2]-t[5]^2*z[3]:
> reziduum2:=(rez[10]^2+rez[20]^2+rez[30]^2+rez[40]^2+rez[50]^2)^0
.5;

```

```
reziduum2 := 1.68956
```

Vykreslení do grafu

```

> teplota:=[205,212,219,230,235]:
prumerY:=[14.625,23.975,31.875,35.325,37.7]:
body:=convert(linalg[transpose]([teplota,prumerY]),listlist):
with(plots):
obr1:=listplot(body,style=POINT,color=blue,symbol=circle):
> primka:=0.727*x-131.4:
obr2:=plot(primka,x=205..235,y=13..39,color=red,thickness=1):
parabola:=(-0.0264179*(x^2))+12.3666*x-1410.22:
obr3:=plot(parabola,x=205..235,y=13..39,color=green,thickness=2):
:
> display({obr1,obr2,obr3});

```

[Použití příkazu pro metodu nejmenších čtverců

[> **restart;**

[> **with(stats) :**

[> **fit[leastsquare[[x,y],y=a*x+b, {a,b}]] ([[205,212,219,230,235], [14
.625,23.975,31.875,35.325,37.7]]);**

$$y = 0.7270657124 x - 131.3998699$$

[> **fit[leastsquare[[k,l],l=a*(k^2)+b*k+c, {a,b,c}]] ([[205,212,219,23
0,235], [14.625,23.975,31.875,35.325,37.7]]);**

$$l = -0.02642047796 k^2 + 12.36771859 k - 1410.345779$$

[>