VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY
INSTITUTE OF MATHEMATICS

PERIODICKÁ OKRAJOVÁ ÚLOHA V MODELOVÁNÍ KMITŮ NELINEÁRNÍCH OSCILÁTORŮ

PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM IN MATHEMATICAL MODELS OF NONLINEAR OSCILLATORS

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE Bc. Adam Kyjovský
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE doc. Ing. Jiří Šremr, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2020

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	**Bc. Adam Kyjovský**
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	**doc. Ing. Jiří Šremr, Ph.D.**
Akademický rok:	2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Periodická okrajová úloha v modelování kmitů nelineárních oscilátorů

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Při matematickém modelování v mechanice se často objevují obyčejné diferenciální rovnice. Většinou se jedná o nelineární diferenciální rovnice 2. řádu, které nelze analyticky řešit. Je–li rovnice autonomní, můžeme k vyšetření některých vlastností jejích řešení použít techniky známé z teorie dynamických systémů (např. fázový portrét), v opačném případě je třeba použít metody kvalitativní teorie diferenciálních rovnic.

Cíle diplomové práce:

Teoretická část:

1) Doplnění potřebných znalostí z teorie dynamických systémů (zejména konstrukce fázových portrétů).

2) Seznámení se základy kvalitativní teorie okrajových úloh (zejména metoda dolních a horních funkcí pro periodickou úlohu).

Praktická část:

1) Odvození pohybové rovnice vybraného oscilátoru.

2) Analýza existence periodických řešení v autonomním případě.

3) Nalezení podmínek existence periodického řešení v neautonomním případě.

Seznam doporučené literatury:

HABETS, P., De COSTER, C. Two-point boundary value problem: lower and upper solutions, Mathematics in Science and Engineering, 205, Elsevier B.V., Amsterdam, 2006, ISBN 978-0-4-4-52200-9.

HARTMAN, P. Ordinary differential equations, John Wiley & Sons, New York - London - Sydney, 1964.

KALAS, J., RÁB, M. Obyčejné diferenciální rovnice, Masarykova univerzita, Brno, 1995, ISBN 80-21--1130-0.

RACHŮNKOVÁ, I., FIŠER, J. Dynamické systémy 1, Univerzita Palackého v Olomouci, 2014, ISBN 978-80-244-4338-6.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá kvalitativní analýzou nelineární diferenciální rovnice druhého řádu popisující pohyb jedné mechanické soustavy. Pro autonomní rovnice jsou zde uvedeny teoretické základy Hamiltonových systémů a konstrukce fázového portrétu. Pro neautonomní rovnice je použita metoda dolních a horních funkcí pro periodickou okrajovou úlohu. Tyto poznatky jsou aplikovány na vybraný model mechanického oscilátoru a je řešena otázka existence periodických řešení autonomní i neautonomní nelineární diferenciální pohybové rovnice.

Abstract

This master's thesis deals with qualitative analysis of nonlinear differential equations of second order. For autonomous equations some basic notions of Hamiltonian systems (mainly construction of phase portrait) are presented. For non-autonomous equations the method of lower and upper functions for periodic boundary value problem is used. These notions are then applied to a model of mechanical oscillator, a question of existence of solutions to autonomous and non-autonomous nonlinear differential equations is studied.

klíčová slova

nelineární diferenciální rovnice, dynamický systém, fázový portét, metoda dolních a horních funkcí

keywords

nonlinear differential equations, dynamical system, phase portrait, method of lower and upper functions

KYJOVSKÝ, Adam. *Periodická okrajová úloha v modelování kmitů nelineárních oscilátorů.* Brno, 2020. Dostupné také z: https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/124481. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. 49 s. Vedoucí práce Jiří Šremr.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Periodická okrajová úloha v modelování kmitů nelineárních oscilátorů* vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Jiřího Šremra, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Adam Kyjovský

Děkuji svému školiteli doc. Ing. Jiřímu Šremrovi, Ph.D. za cenné rady, věcné připomínky, vstřícnost a ochotu u konzultací při zpracování této práce.

Adam Kyjovský

Obsah

Úvod **12**

1 Odvození pohybové rovnice vybraného oscilátoru **13**

2 Teoretický základ **16**
2.1 Vybrané pojmy z teorie dynamických systémů 16
2.1.1 Základní pojmy 16
2.1.2 Planární dynamický systém 18
2.1.3 Planární Hamiltonův systém 19
2.2 Metoda dolních a horních funkcí pro periodickou úlohu 21

3 Kvalitativní analýza pohybové rovnice vybraného oscilátoru **33**
3.1 Autonomní případ 33
3.1.1 Vyšetření kritických bodů 33
3.1.2 Rozbor hladin hamiltoniánu soustavy 34
3.1.3 Fázový portrét 41
3.2 Neautonomní případ 43

Závěr **48**

Reference **49**

Úvod

Matematické modely v mechanice často vedou na soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. Běžně se jedná o nelineární diferenciální rovnice druhého řádu. V takovém případě nejdou analyticky řešit a je tedy přínosné nahlížet na tyto rovnice kvalitativně. To znamená uvažovat otázku existence řešení a zkoumat některé jejich vlastnosti. Pro autonomní nelineární rovnice lze mnohé určit z fázových portrétů a pro neautonomní případ lze použít výsledky kvalitativní teorie, např. metodu dolních a horních funkcí (pro periodickou okrajovou úlohu).

Cíle této práce jsou odvození pohybové rovnice vybraného oscilátoru, seznámení se s teorií dynamických systémů a metodou dolních a horních funkcí pro periodickou úlohu. Dalším cílem je pomocí těchto teoretických poznatků diskutovat otázku existence periodických řešení autonomního i neautonomního případu.

V zadání této práce byl vybrán pružinový oscilátor, jehož matematický model vede na výše uvedený typ rovnic. Diskutovány jsou pak autonomní a neautonomní varianty tohoto modelu a je provedena kvalitativní analýza příslušných rovnic.

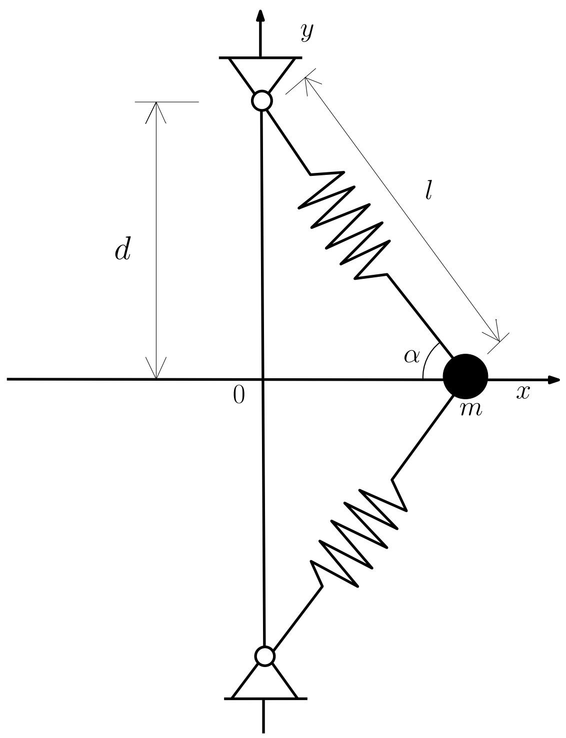
V autonomním případě se postup analýzy řešení opírá o poznatky z teorie dynamických systémů. Hlavně pak o Hamiltonův dynamický systém a konstrukci jeho fázového portrétu. V neautonomním případě je použita metoda dolních a horních funkcí pro periodickou úlohu.

První kapitola této práce obsahuje odvození pohybové rovnice vybraného oscilátoru. Dále jsou v ní stanoveny její autonomní a neautonomní varianty. V kapitole dva se první podkapitola věnuje uvedení nezbytného teoretického základu dynamických systémů, který vede ke konstrukcí fázových potrétů planárních Hamiltonových systémů. V další podkapitole je uvedena potřebná teorie k metodě dolních a horních funkcí pro periodickou okrajovou úlohu. V kapitole třetí jsou pak tyto teoretické poznatky aplikovány na model zvoleného mechanického oscilátoru.

1 Odvození pohybové rovnice vybraného oscilátoru

V této úvodní kapitole odvodíme dvě pohybové rovnice uvažovaného mechanického oscilátoru a to autonomní a neautonomní variantu. Hlavním cílem této práce je analyzovat existenci periodických řešení v autonomním případě a nalézt podmínky existence periodických řešení v neautonomním případě.

Oscilátor, jehož pohyb budeme v kapitole 3 vyšetřovat, je složen ze dvou lineárních pružin a hmotného bodu. Hmotný bod o hmotnosti m má volný pohyb pouze po ose x. Časově závislá proměnná $x(t)$ je vzdálenost hmotného bodu od počátku soustavy souřadnic. Pružiny o tuhosti k jsou jedním koncem ukotveny v kloubovém spoji na ose y (jedna nad osou x, druhá pod) ve vzdálenosti d a druhým koncem upevněny na hmotném bodě (viz obrázek 1). Uvažujeme lineárně elastické chování pružin.



Obrázek 1.1: Nelineární oscilátor

Úkolem je popsat pohyb takového oscilátoru. Výchozí vztahy pro odvození pohybové jsou v tomto případě druhý Newtonův pohybový zákon

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{1.1}$$

A zjednodušená forma Hookeova zákona pro lineární pružiny

$$\vec{F} = -k\vec{r}. \tag{1.2}$$

První rovnice říká, že výsledná síla působící na těleso je přímo úměrná součinu zrychlení a hmotnosti tělesa. Druhá rovnice popisuje směr a velikost síly, kterou působí na těleso pružina vlivem deformace. Tato síla je úměrná tuhosti pružiny k a deformaci $\vec{r}$. Její orientace je vždy proti směru deformace.

Zvolený souřadný systém je patrný z obrázku 1. Jelikož pohyb hmotného bodu je povolen pouze v ose x, účinek síly ve směru osy y neuvažujeme. Složka síly od jedné pružiny v ose x je potom

$$F_x = F\cos\alpha, \tag{1.3}$$

kde α je úhel mezi zápornou poloosou osy x a pružinou.

Uvažujeme vzdálenost ukotvení d menší než délka nedeformované pružiny, kterou označíme l_0. Dále použijeme vztah (1.2). V našem případě je velikost deformace pružiny $l(t) - l_0$, kde $l(t)$ značí délku pružiny v čase t. Kombinací (1.2), (1.3) a sečtením silových účinků obou pružin dostáváme

$$F_x = -2k(l(t) - l_0)\cos\alpha. \tag{1.4}$$

Nyní potřebujeme vyjádřit $l(t)$ a $\cos\alpha$. Počátek, ukotvení pružiny a hmotný bod (není-li v počátku) představují vrcholy pravoúhlého trojúhelníka. To znamená, že člen $l(t)$ můžeme vyjádřit pomocí Pythagorovy věty. Platí

$$l(t)^2 = d^2 + x^2(t),$$

z čehož plyne, že

$$l(t) = \sqrt{d^2 + x^2(t)}. \tag{1.5}$$

Člen $\cos\alpha$ je dán poměrem délek stran odvěsny protilehlé úhlu α a přepony. V našem případě to je

$$\cos\alpha = \frac{x(t)}{l(t)} = \frac{x(t)}{\sqrt{d^2 + x^2(t)}}. \tag{1.6}$$

Pomocí vyjádření (1.5) a (1.6) přepíšeme rovnici (1.4) do tvaru

$$F_x = -2k\left(\sqrt{d^2 + x^2(t)} - l_0\right)\frac{x(t)}{\sqrt{d^2 + x^2(t)}}.$$

Levou stranu této rovnice nahradíme pomocí vztahu (1.1). Okamžité zrychlení a lze vyjádřit pomocí proměnné x jako její druhá derivace. Dostáváme

$$mx''(t) = 2k\left(l_0 - \sqrt{d^2 + x^2(t)}\right)\frac{x(t)}{\sqrt{d^2 + x^2(t)}}.$$

Tento výraz upravíme

$$mx''(t) = 2kx(t)\left(\frac{l_0}{\sqrt{d^2 + x^2(t)}} - \frac{\sqrt{d^2 + x^2(t)}}{\sqrt{d^2 + x^2(t)}}\right).$$

Po vydělení obou stran členem m získáme pohybovou rovnici uvedeného oscilátoru

$$x''(t) = \frac{2k}{m}x(t)\left(\frac{l_0}{\sqrt{d^2 + x^2(t)}} - 1\right). \tag{1.7}$$

Jedná se o nelineární autonomní diferenciální rovnici druhého řádu. Kvalitativní analýzu této rovnice provedeme v kapitole 3.1. Vyšetříme kritické body této rovnice a jejich stabilitu, následně sestrojíme fázový portrét. Z něj potom zjistíme některé vlastnosti řešení této rovnice.

Předpokládejme ještě, že kloubové ukotvení pružin na ose y symetricky vertikálně oscilují. Pohyb těchto oscilací popíšeme pomocí v čase proměnných vzdáleností d. Budeme tedy předpokládat, že $d : \mathbb{R} \to (0, l_0)$ je daná ω-periodická funkce (funkci, která by kmitala do vzáleností větších než l_0 neuvažujeme, ta by způsobila změnu počtu kritických bodů). Z výše uvedeného vyplývá, že pohybová rovnice uvažovaného oscilátoru je tvaru

$$x''(t) = \frac{2k}{m} x(t) \left(\frac{l_0}{\sqrt{d^2(t) + x^2(t)}} - 1 \right). \tag{1.8}$$

Jedná se o neautonomní nelineární diferenciální rovnici druhého řádu. Otázku existence ω-periodických řešení rovnice (1.8) budeme diskutovat v kapitole 3.2. Pomocí výsledků z teorie dolních a horních funkcí ukážeme (viz větu 3.4), že pro každé ω dostatečně malé existuje alespoň jedno kladné ω-periodické řešení.

2 Teoretický základ

V této části uvedeme potřebný teoretický základ ke kvalitativní analýze pohybové rovnice vybraného nelineárního oscilátoru v autonomní a neautonomní variantě.

2.1 Vybrané pojmy z teorie dynamických systémů

Matematický model oscilátoru je izolovaný systém, který se mění v závislosti na čase a řídí se určitými fyzikálními zákonitostmi. Takový model patří do skupiny dynamických systémů, které v této kapitole stručně zavedeme. Uvedeme nejdůležitější definice a věty této teorie, zejména pak pro potřebu konstrukce fázových portrétů nelineárních rovnic (hlavně soustav Hamiltonova typu). Právě pomocí fázových portrétů je pak možné zkoumat vlastnosti a podmínky existence řešení.

2.1.1 Základní pojmy

Uveďme základní pojmy z teorie dynamických systémů. Značení a definice jsou převzaty zejména z publikace [5].

Definice 2.1. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R} \times G \to G$. Dále nechť $\boldsymbol{\varphi} \in C(\mathbb{R} \times G)$[1] mající následující vlastnosti:

1. $\boldsymbol{\varphi}(0, \boldsymbol{x}^0)$ pro každé $\boldsymbol{x}^0 \in G$;
2. $\boldsymbol{\varphi}(t+s, \boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\varphi}(s, \boldsymbol{x}^0))$ pro každé $t, s \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x}^0 \in G$.

Takové zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ nazýváme *tok*. Pro každé pevné $t \in \mathbb{R}$ nazveme zobrazení

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \cdot) : G \to G$$

dynamický systém v $\mathbb{R}^n$. Prostor $\mathbb{R}^n$ se nazývá *fázový prostor*.

Uvažujeme následující soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

kde $f_1, \dots, f_n : G \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce na oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Z teorie obyčejných diferenciálních rovnic víme, že tuto soustavu lze zapsat ve tvaru vektorové rovnice

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{2.1}$$

kde $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n)$. Nyní připomeňme pojem řešení rovnice (2.1).

Definice 2.2. *Řešením rovnice* (2.1) na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ rozumíme vektorovou funkci $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ takovou, že $\boldsymbol{x} \in C^1(J)^2$ a platí

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) \text{ pro } t \in J.$$

[1]Symbolem $C(\mathbb{R} \times G)$ je myšlena množina funkcí, které jsou spojité na množině $\mathbb{R} \times G$.

[2]Symbolem $C^1(J)$ je myšlena množina funkcí, které jsou spojité spolu se svou první derivací na intervalu J.

Budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $0 \in J$. To můžeme, neboť pro rovnici (2.1) platí, že je-li $\boldsymbol{x}$ řešením rovnice (2.1) na intervalu (a, b), pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ je funkce $\boldsymbol{y}(t) := \boldsymbol{x}(t-c)$ řešením rovnice (2.1) na intervalu $(a+c, b+c)$. Je známo, že rovnice (2.1) má většinou nekonečně mnoho řešení. Pro upřesnění, o které řešení se jedná, je rovnice doplněna dodatečnou podmínkou. Takovou podmínkou může být například *počáteční (Cauchyova) podmínka*, která je tvaru

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^0, \tag{2.2}$$

kde $\boldsymbol{x}^0 \in G$.

Definice 2.3. Úloha spočívající v nalezení řešení rovnice (2.1) splňující podmínku (2.2) se nazývá *počáteční (Cauchyova) úloha.*

Řešení počáteční úlohy (2.1), (2.2) označíme $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \boldsymbol{x}^0)$. Podle definice řešení a podmínky (2.2) vektorová funkce $\boldsymbol{\varphi}$ splňuje

$$\boldsymbol{\varphi}'(t, \boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}^0)) \text{ pro každé } t \in J,$$

$$\boldsymbol{\varphi}(0, \boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{x}^0.$$

Poznámka 2.4. V rovnici (2.1) je vektorová funkce $\boldsymbol{f}$ závislá na n proměnných, za které dosazujeme skalární funkce $x_1, \ldots, x_n$, taková rovnice se nazývá *autonomní.* V případě, že funkce $\boldsymbol{f}$ je závislá na $n+1$ proměnných

$$t, x_1, \ldots, x_n,$$

jedná se o obecnější typ rovnice, ta se nazývá *neautonomní.* Pro praktickou interpretaci uvažujme rovnici, která se řídí nějakým fyzikálním zákonem. Je-li autonomní, tento fyzikální zákon potom platí stejně v minulém, přítomném i budoucím čase. V neautonomním případě tomu tak není.

Věta 2.5 ([5, Věta 1.10], Základní věta o existenci a jednoznačnosti)**.** *Nechť G je otevřená podmnožina v $\mathbb{R}^n$ obsahující bod $\boldsymbol{x}^0$. Dále nechť $\boldsymbol{f} \in C^1(G)$.*

Potom úloha (2.1), (2.2) *má jediné řešení $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \boldsymbol{x}^0)$ definované na maximálním intervalu $I_{\boldsymbol{x}^0} = (a_{\boldsymbol{x}^0}, b_{\boldsymbol{x}^0}) \subseteq \mathbb{R}$ obsahujícím 0.*

Následující věta ukazuje souvislost mezi dynamickým systémem a autonomní soustavou obyčejných diferenciálních rovnic.

Věta 2.6 ([5, Věta 1.13], Generování dynamického systému)**.** *Nechť $\boldsymbol{x}^0$ je libovolný bod z otevřené množiny G v $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} \in C^1(G)$ a nechť $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \boldsymbol{x}^0)$ je řešením úlohy* (2.1), (2.2) *na $\mathbb{R}$. Předpokládejme, že $\boldsymbol{\varphi}$ je vektorová funkce $n+1$ proměnných $t, x_1^0, \ldots, x_n^0$ zobrazující $\mathbb{R} \times G$ do G.*

Potom $\boldsymbol{\varphi}$ je tok. Dále pro každé pevné $t \in \mathbb{R}$ je zobrazení $\boldsymbol{\varphi}(t, \cdot) : G \to G$ dynamický systém v $\mathbb{R}^n$.

Nyní uvedeme pojmy, které potřebujeme k zavedení definice fázového portrétu.

Definice 2.7. *Graf* řešení $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \boldsymbol{x}^0)$ je množina bodů $(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}^0))$, kde $t \in I_{x^0}$.

Definice 2.8. *Orbita* řešení $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \boldsymbol{x}^0)$ je množina bodů $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}^0)$, kde $t \in I_{x^0}$.

Definice 2.9. *Kritickým bodem* rovnice (2.1) nazveme bod $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$, který splňuje soustavu rovnic

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ &\vdots \\ &f_n(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{aligned}$$

Pokud $\bar{\boldsymbol{x}}$ není kritickým bodem, nazýváme ho *regulárním* bodem rovnice (2.1).

Definice 2.10. *Fázový portrét rovnice* (2.1) je množina orbit všech řešení, s vyznačeným směrem pohybu bodu $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}^0)$ po orbitě pro rostoucí t. Prostor $\mathbb{R}^n$, který obsahuje fázový portrét rovnice (2.1) se nazývá *fázový prostor*.

Kritické body se zkoumají z hlediska stability, kterou budeme definovat následovně.

Definice 2.11. Kritický bod $\bar{\boldsymbol{x}} \in G$ rovnice (2.1) nazýváme *stabilní*, jestliže platí:

$$\begin{gathered} \text{Pro každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } \delta > 0 \text{ takové, že pro každé } \boldsymbol{x}^0 \in G \\ \text{splňující } ||\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^0|| < \delta \text{ platí } ||\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}^0) - \bar{\boldsymbol{x}}|| < \varepsilon \text{ pro každé } t \geq 0, \end{gathered}$$

kde $|| \cdot ||$ značí eukleidovskou normu v $\mathbb{R}^n$. V opačném případě nazveme kritický bod $\bar{\boldsymbol{x}}$ *nestabilní*.

Definice 2.12. Kritický bod $\bar{\boldsymbol{x}} \in G$ rovnice (2.1) nazýváme *asymptoticky stabilní*, jestliže je stabilní a navíc platí:

$$\begin{gathered} \text{Existuje } r > 0 \text{ takové, že pro každé } \boldsymbol{x}^0 \in G \text{ platí} \\ ||\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^0|| < r \implies \lim_{t \to \infty} ||\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}^0) - \bar{\boldsymbol{x}}|| = 0. \end{gathered}$$

2.1.2 Planární dynamický systém

Dynamický systém vytvořený dvěmi autonomními diferenciálními rovnicemi prvního řádu se nazývá planární. Lze ho zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2), \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{2.3}$$

O vektorové funkci $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ budeme předpokládat, že má spojité parciální derivace prvního řádu na oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$. Vektorově můžeme psát ve tvaru

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \tag{2.4}$$

Poznámka 2.13. V planárních dynamických systémech rozlišujeme několik typů orbit:

- *Periodická orbita* odpovídá uzavřené křivce a periodickému řešení systému (2.3).
- *Homoklinická orbita* odpovídá řešením systému (2.3), které pro $t \to \infty$ i $t \to -\infty$ konvergují k témuž kritickému bodu.
- *Heteroklinická orbita* odpovídá řešením systému (2.3), které pro $t \to \infty$ konvergují k jednomu kritickému bodu a pro $t \to -\infty$ konvergují k jinému.

2.1.3 Planární Hamiltonův systém

Hamiltonovy dynamické systémy jsou speciálním typem nelineárních systémů. Obecně modely tohoto typu popisují různé fyzikální problémy. Jednou z jejich předností je možnost nalezení globálního fázového portrétu pomocí vyšetřování průběhu jisté funkce spjaté s tímto systémem. Tato funkce se nazývá hamiltonián systému a jeho význam bude patrný z dalšího.

Definice 2.14 (Hamiltonův systém)**.** Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $H : G \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá spolu s parciálními derivacemi prvního a druhého řádu. Potom *Hamiltonovým systémem* nazveme soustavu diferenciálních rovnic tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2), \\ x_2' &= -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{2.5}$$

a funkci H nazveme *hamiltonián.*

Soustava rovnic (2.5) je speciálním případem soustavy (2.3), kde

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &:= \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2), \\ f_2(x_1, x_2) &:= -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Hamiltonián v modelech fyzikálního charakteru představuje totální energii.

Věta 2.15 ([5, Věta 8.2], Konzervace energie)**.** *Nechť* $\boldsymbol{x}^0 \in \boldsymbol{G}$ *a* $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \boldsymbol{x}^0)$ *je řešení počáteční úlohy* (2.5), (2.2) *na maximálním intervalu* $I_{\boldsymbol{x}^0} \subseteq \mathbb{R}$. *Potom platí*

$$H(\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}^0)) = H(\boldsymbol{x}^0) \quad \textit{pro } t \in I_{\boldsymbol{x}^0}.$$

Důsledek 2.16. *Hladiny hamiltoniánu*

$$\mathcal{H}_c = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x_1, x_2) = c\} \tag{2.6}$$

se skládají z orbit soustavy (2.5)*.*

V kapitole 4.1 budeme pracovat s Hamiltonovým systémem a to speciálního typu. Jedná se o tzv. *konzervativní systém.* Ty vznikají z diferenciální rovnice druhého řádu, která má tvar

$$x'' + f(x) = 0,$$

kde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá spolu s derivací prvního řádu. Konzervativní systém dostaneme tak, že tuto rovnici převedeme na soustavu diferenciálních rovnic pomocí substituce $x_1 = x$ a $x_2 = x'$. Dostáváme

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -f(x_1). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Hamiltonián takového systému je potom

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} f(u)\,\mathrm{d}\,u \text{ pro } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.8}$$

To plyne z definice hamiltoniánu, protože platí

$$\frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_2, \quad \frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2) = f(x_1) \quad \text{pro } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Poznámka 2.17. V planárních dynamických systémech existuje rozsáhlá klasifikace kritických bodů. My se v tomto textu omezíme pouze na typy kritických bodů *sedlo a střed*, které se vyskytují v námi zkoumaném systému.

Definice 2.18. Kritický bod $\bar{\boldsymbol{x}}$ rovnice (2.4) se nazývá *sedlo*, pokud existují body $\boldsymbol{x}^0 \neq \bar{\boldsymbol{x}}$ a $\boldsymbol{x}^1 \neq \bar{\boldsymbol{x}}$ takové, že

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\varphi}\left(t, \boldsymbol{x}^0\right) = \bar{\boldsymbol{x}} \quad \text{a} \quad \lim_{t\to-\infty} \boldsymbol{\varphi}\left(t, \boldsymbol{x}^1\right) = \bar{\boldsymbol{x}}.$$

Poznámka 2.19. Z definic 2.11 a 2.18 vyplývá, že každý kritický bod typu sedlo je nestabilní.

Definice 2.20. Kritický bod $\bar{\boldsymbol{x}}$ systému (2.5) nazveme *střed*, jestliže existuje okolí U bodu $\bar{\boldsymbol{x}}$, které obsahuje pouze periodické orbity obíhající tento kritický bod.

Poznámka 2.21. O stabilitě kritického bodu typu střed neumíme rozhodnout přímo podle definice. O jeho stabilitě v kapitole 3.1. rozhodneme na základě zkonstruovaného fázového portrétu.

O typu kritického bodu $\bar{\boldsymbol{x}}$ nelineárního systému (2.3) lze obecně rozhodnout pomoci kriterií uváděných v klasifikaci a to pouze v případě, že se jedná o kritický bod tzv. *hyperbolický*. V případě, že pracujeme s planárním Hamiltonovým systémem, nemusíme vyšetřovat zda je kritický bod hyperbolický. Platí totiž následující věta.

Věta 2.22 ([5, Věta 8.7])**.** *Nechť* $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}) \in G$ *je kritický bod systému* (2.5)*. Pak:*

- *je-li* $\det\left(\boldsymbol{M}\left(\bar{x_1}, \bar{x_2}\right)\right) < 0$, *je* $\bar{\boldsymbol{x}}$ *sedlem systému* (2.5)*,*
- *je-li* $\det\left(\boldsymbol{M}\left(\bar{x_1}, \bar{x_2}\right)\right) > 0$, *je* $\bar{\boldsymbol{x}}$ *středem systému* (2.5)*,*

kde $\boldsymbol{M}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right)$ *je Jacobiho matice systému* (2.5)*, která je tvaru*

$$\boldsymbol{M}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1}\left(x_1, x_2\right) & \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_2^2}\left(x_1, x_2\right) \\ -\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_1^2}\left(x_1, x_2\right) & -\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2}\left(x_1, x_2\right) \end{pmatrix}.$$

Pro konzervativní systémy je k dispozici následující věta, která je důsledkem věty 2.22. Ta určení typu kritického bodu ještě více usnadní. Všimněme si nejprve, že každý kritický bod systému (2.7) je tvaru $(\bar{x}_1, 0)$.

Věta 2.23 ([5, Věta 8.9])**.** *Nechť* $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, 0) \in G$ *je kritický bod systému* (2.7)*. Pak:*

- *je-li* $f'(\bar{x}_1) < 0$, $\bar{\boldsymbol{x}}$ *je sedlo systému* (2.7)*.*
- *je-li* $f'(\bar{x}_1) > 0$, $\bar{\boldsymbol{x}}$ *je střed systému* (2.7)*.*

2.2 Metoda dolních a horních funkcí pro periodickou úlohu

V této podkapitole nejprve definujeme některé základní pojmy a stručně vysvětlíme princip metody dolních a horních funkcí pro periodickou okrajovou úlohu.

Vágně řečeno dolní a horní funkce periodické úlohy vzniknou tak, že z diferenciální rovnice této úlohy uděláme dvě nerovnice (symbol = nahradíme $\geq$ a $\leq$). Stejně tak pro periodické podmínky s derivací. Funkce vyhovující těmto nerovnicím nazveme (podle nerovnosti) dolní nebo horní funkcí úlohy. V případě, že jsme v hledání těchto funkcí byli úspěšní, můžeme použít věty zaručující existenci řešení původní periodické úlohy.

Uvažujme diferenciální rovnici druhého řádu a okrajové podmínky

$$\begin{gathered} u'' = f(t,u), \\ u(0) = u(\omega),\ u'(0) = u'(\omega), \end{gathered} \tag{2.9}$$

kde $f : [0,\omega] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a $\omega > 0$. Rovnici společně s podmínkami (2.9) nazýváme *periodickou (okrajovou) úlohou.*

Definice 2.24. *Řešením periodické úlohy* (2.9) rozumíme funkci $u : [0,\omega] \to \mathbb{R}$, která je spojitá včetně derivací do 2. řádu, splňuje

$$u''(t) = f(t,u(t)) \text{ pro } t \in [0,\omega]$$

a vyhovuje periodickým podmínkám.

Definice 2.25. Funkci $\alpha : [0,\omega] \to \mathbb{R}$ nazveme *dolní funkcí* úlohy (2.9), jestliže je spojitá včetně derivací do druhého řádu a platí

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &\geq f(t,\alpha(t)) \qquad \text{pro } t \in [0,\omega], \\ \alpha(0) &= \alpha(\omega), \\ \alpha'(0) &\geq \alpha'(\omega). \end{aligned}$$

Funkci $\beta : [0,\omega] \to \mathbb{R}$ nazveme *horní funkcí* úlohy (2.9), jestliže je spojitá včetně derivací do druhého řádu a platí

$$\begin{aligned} \beta''(t) &\leq f(t,\beta(t)) \qquad \text{pro } t \in [0,\omega], \\ \beta(0) &= \beta(\omega), \\ \beta'(0) &\leq \beta'(\omega). \end{aligned}$$

Věta 2.26 ([1, Theorem 1.1])**.** *Nechť α je dolní funkcí úlohy* (2.9)*, β je horní funkcí úlohy* (2.9) *a*

$$\alpha(t) \leq \beta(t) \textit{ pro } t \in [0,\omega]. \tag{2.10}$$

Potom má úloha (2.9) *alespoň jedno řešení u takové, že platí*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \textit{ pro } t \in [0,\omega]. \tag{2.11}$$

Když existují dolní funkce α a horní funkce β úlohy (2.9) splňující (2.10), říkáme jim *dobře uspořádaný pár*. Z věty 2.26 plyne, že v takovém případě existuje řešení periodické okrajové úlohy (2.9), které celé leží v pásu ohraničené funkcemi α, β.

Jestliže však pro funkce α, β neplatí (2.10), otázka existence řešení úlohy (2.9) je mnohem složitější a bez dodatečných podmínek na f není existence řešení zaručena.

Jednu z takových dodatečných podmínek udává věta 2.30, před jejím uvedením je však třeba zavést následující pojmy.

Definice 2.27 ([4, Definition 0.1]). Nechť $\omega > 0$ a $p : [0, \omega] \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky integrovatelná funkce. Řekneme, že funkce p náleží do množiny $\mathcal{V}^+(\omega)$, jestliže pro každou funkci $v : [0, \omega] \to \mathbb{R}$ absolutně spojitou spolu se svou první derivací a splňující

$$v''(t) \geq p(t)v(t) \quad \text{pro s.v. } t \in [0, \omega], \;\; v(0) = v(\omega), \;\; v'(0) = v'(\omega),$$

platí

$$v(t) \geq 0 \quad \text{pro } t \in [0, \omega].$$

Poznámka 2.28 ([4, Remark 9.2]). Uvažujme lineární periodickou úlohu

$$u'' = p(t)u + q(t); \;\; u(0) = u(\omega), \;\; u'(0) = u'(\omega), \tag{2.12}$$

kde $p, q : [0, \omega] \to \mathbb{R}$ jsou lebesgueovsky integrovatelné[3]. Jestliže $p \in \mathcal{V}^+(\omega)$, pak pro každé q má úloha (2.12) jediné řešení u a je-li navíc $q(t) \geq 0$ pro s.v. $t \in [0, \omega]$, $q(t) \not\equiv 0$, je řešení u kladné.

Chápeme-li třídu funkcí $\mathcal{V}^+(\omega)$ jako podmnožinu Banachova prostoru $L([0, \omega])$ (tj. funkce lebesgueovsky integrovatelné na intervalu $[0, \omega]$), můžeme zavést označení $\operatorname{Int} \mathcal{V}^+(\omega)$ jako vnitřek množiny $\mathcal{V}^+(\omega)$ vzhledem ke standardní integrální normě v $L([0, \omega])$.

Následující tvrzení ukazuje, že množina $\mathcal{V}^+(\omega)$ je neprázdná; přesněji řečeno obsahuje dostatečně širokou třídu funkcí.

Tvrzení 2.29 ([4, Theorem 12.2]). *Nechť $p \in L([0, \omega])$, $p(t) \not\equiv 0$ a platí*

$$\int_0^\omega p(t) \, \mathrm{d}\, t \leq 0, \qquad \int_0^\omega [p(t)]_- \, \mathrm{d}\, t \leq \frac{4}{\omega},$$

kde $[p(t)]_- = \frac{|p(t)| - p(t)}{2}$ pro $t \in [0, \omega]$. Potom je p prvkem množiny $\operatorname{Int} \mathcal{V}^+(\omega)$.

Nyní již můžeme uvést existenční větu, kterou použijeme v kapitole 3.2 k důkazu existence řešení nelineární neautonomní rovnice.

Věta 2.30 ([3, Theorem 1.1]). *Nechť $p \in \operatorname{Int} \mathcal{V}^+(\omega)$ a existuje spojitá funkce $q : [0, \omega] \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ taková, že f splňuje*

$$f(t, z) \operatorname{sgn} z \geq p(t)|z| - q(t, |z|) \qquad \text{pro } t \in [0, \omega], z \in \mathbb{R}, \tag{2.13}$$

kde

$$q(t, \cdot) : [0, \infty) \to [0, \infty) \text{ je neklesající pro všechna } t \in [0, \omega] \tag{2.14}$$

a q je tzv. sublineární, tj.

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{r} \int_0^\omega q(s, r) \, \mathrm{d}\, s = 0. \tag{2.15}$$

Nechť dále α a β jsou dolní a horní funkce periodické úlohy (2.9).

Pak existuje alespoň jedno řešení u úlohy (2.9) *splňující*

$$\min\{\alpha(t_0), \beta(t_0)\} \leq u(t_0) \leq \max\{\alpha(t_0), \beta(t_0)\} \tag{2.16}$$

pro nějaké $t_0 \in [0, \omega]$.

[3]Řešením periodické úlohy (2.12) rozumíme funkci $u : [0, \omega] \to \mathbb{R}$, která je absolutně spojitá spolu se svou první derivací, splňuje rovnici skoro všude v $[0, \omega]$ a vyhovuje periodickým podmínkám.

Poznámka 2.31 (O lokalizaci). Všimněme si, že ve větě 2.30 nepožadujeme podmínku dobrého uspořádání (2.10). Na druhé straně však věta zaručí existenci řešení (2.9) splňující podmínku (2.16). To znamená, že na rozdíl od (2.11) dostáváme lokalizaci řešení pouze v jednom bodě.

V kapitole 3.2 budeme používat větu 2.30 s konstantní funkcí p, pro kterou jsou předpoklady tvrzení 2.29 zaručující inkluzi $p \in \operatorname{Int} \mathcal{V}^+(\omega)$ příliš omezující. Pro konstantní funkci p lze totiž najít podmínky, které jsou nejen postačující, ale i nutné k tomu, aby $p \in \mathcal{V}^+(\omega)$, resp. $p \in \operatorname{Int} \mathcal{V}^+(\omega)$ (viz větu 2.36). K jejich důkazu budeme potřebovat následující pojmy.

Uvažujme soustavu lineárních diferenciálních rovnic

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t), \tag{2.17}$$

kde $\boldsymbol{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ je lokálně integrovatelná maticová funkce[4] a $\boldsymbol{b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je lokálně integrovatelná vektorová funkce. Řešením soustavy (2.17) na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ rozumíme vektorovou funkci $\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$, která je absolutně spojitá na I a splňuje

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t) \text{ pro s.v. } t \in I. \tag{2.18}$$

Předpokládejme, že

$$\boldsymbol{A}(t + \omega) = \boldsymbol{A}(t),\ \boldsymbol{b}(t + \omega) = \boldsymbol{b}(t) \ \text{ pro s.v. } t \in \mathbb{R} \tag{2.19}$$

a spolu se soustavou (2.18) uvažujeme podmínku

$$\boldsymbol{x}(t + \omega) = \boldsymbol{x}(t) \text{ pro } t \in \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

Úloha (2.17), (2.20) je zřejmě úlohou o periodickém řešení soustavy (2.17) s danou periodou $\omega > 0$. Následující věty pracují s pojmem homogenní periodické úlohy odpovídající soustavě (2.18), tj. homogenní soustavou

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \tag{2.21}$$

a periodickou podmínkou

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}(\omega). \tag{2.22}$$

Uveďme nejprve existenční větu.

Věta 2.32 ([2, Věta 6.1])**.** *Jestliže je splněna podmínka* (2.19)*, pak nutnou a postačující podmínkou pro jednoznačnou řešitelnost úlohy* (2.17), (2.20) *je existence pouze triviálního řešení úlohy* (2.21), (2.22)*, tj.*

$$\det\left(\boldsymbol{Y}(\omega) - \boldsymbol{Y}(0)\right) \neq 0,$$

kde $\boldsymbol{Y}$ je fundamentální maticí systému (2.21)*.*

Nyní ukážeme, že má-li homogenní úloha (2.21), (2.22) pouze triviální řešení, pak lze psát řešení $\boldsymbol{x}$ úlohy (2.17), (2.20) v integrálním tvaru, kde jádrem je tzv. Greenova maticová funkce úlohy (2.21), (2.20).

[4]Lokálně integrovatelná znamená integrovatelná na každém kompaktním intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Definice 2.33 ([2, Definice 6.1]). Maticovou funkci $\boldsymbol{G}_\omega : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ nazveme *Greenovou maticí* úlohy (2.21), (2.20), jestliže

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{G}_\omega(t+\omega, \tau+\omega) = \boldsymbol{G}_\omega(t,\tau), \\ &\boldsymbol{G}_\omega(t, t+\omega) - \boldsymbol{G}_\omega(t,t) = \boldsymbol{I} \qquad \text{pro } t, \tau \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a pro libovolné $\tau \in \mathbb{R}$ je maticová funkce $\boldsymbol{G}_\omega(\cdot, \tau) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ fundamentální maticí diferenciálního systému (2.21).

Věta 2.34 ([2, Věta 6.4]). *Nechť je splněna podmínka* (2.19) *a úloha* (2.21), (2.22) *má pouze triviální řešení. Potom má úloha* (2.17), (2.20) *právě jedno řešení a toto řešení lze vyjádřit ve tvaru*

$$\boldsymbol{x}(t) = \int_t^{t+\omega} \boldsymbol{G}_\omega(t,\tau)\boldsymbol{b}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \ \textit{pro}\ t \in \mathbb{R},$$

kde $\boldsymbol{G}_\omega$ *je Greenova matice úlohy* (2.21), (2.20).

Tvrzení 2.35 ([2, Lemma 6.3]). *Jestliže* $\boldsymbol{A}(t+\omega) = \boldsymbol{A}(t)$ *pro skoro všechna* $t \in \mathbb{R}$ *a úloha* (2.21), (2.22) *má pouze triviální řešení, pak existuje jediná Greenova matice úlohy* (2.21), (2.20) *a lze ji vyjádřit ve tvaru*

$$\boldsymbol{G}_\omega(t,\tau) = \boldsymbol{Y}(t)\left(\boldsymbol{Y}^{-1}(\omega)\,\boldsymbol{Y}(0) - \boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{Y}^{-1}(\tau) \ \textit{pro}\ t, \tau \in \mathbb{R},$$

kde $\boldsymbol{Y}$ *je fundamentální maticí systému* (2.21).

Nyní již můžeme formulovat a dokázat nutné a postačující podmínky k tomu, aby konstantní funkce p patřila do množiny $\mathcal{V}^+(\omega)$, resp. $\operatorname{Int}\mathcal{V}^+(\omega)$.

Věta 2.36. *Nechť* $\omega > 0$ *a* $p(t) := p_0$ *pro* $t \in [0, \omega]$. *Pak*

(*i*) $p \in \mathcal{V}^+(\omega)$ *právě tehdy, když* $p_0 \in \left[-\dfrac{\pi^2}{\omega^2}, 0\right)$,

(*ii*) $p \in \operatorname{Int}\mathcal{V}^+(\omega)$ *právě tehdy, když* $p_0 \in \left(-\dfrac{\pi^2}{\omega^2}, 0\right)$.

Důkaz. Nejprve uvažujme (*i*), směr " $\Longrightarrow$ ". Předpokládejme, že $p \in \mathcal{V}^+(\omega)$. Využijeme tvrzení z publikace [4]:

Tvrzení ([4, Proposition 10.8]). *Jestliže* $p \in \mathcal{V}^+(\omega)$, *potom platí* $\int_0^\omega p(s)\,\mathrm{d}\,s \ge -\frac{\pi^2}{\omega}$.

V našem případě je $p(t) = p_0$ pro $t \in [0, \omega]$, proto máme

$$\int_0^\omega p(s)\,\mathrm{d}\,s \ge -\frac{\pi^2}{\omega} \implies p_0\omega \ge -\frac{\pi^2}{\omega} \implies p_0 \ge -\frac{\pi^2}{\omega^2}. \tag{2.23}$$

Z poznámky 2.28 víme, že periodická úloha

$$u'' = p_0 u + 1, \quad u(0) = u(\omega), \quad u'(0) = u'(\omega)$$

má jediné řešení u a platí $u(t) > 0$ pro $t \in [0, \omega]$. Integrujeme obě strany této rovnice na intervalu $[0, \omega]$

$$\int_0^\omega u''(t)\,\mathrm{d}\,t = p_0 \int_0^\omega u(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^\omega 1\,\mathrm{d}\,t.$$

Dostáváme

$$u'(\omega) - u'(0) = p_0 \int_0^\omega u(t)\,\mathrm{d}\,t + \omega.$$

Z periodických podmínek plyne, že levá strana je rovna 0. Dále vyjádříme p_0,

$$p_0 = -\frac{\omega}{\int_0^\omega u(t)\,\mathrm{d}\,t}. \tag{2.24}$$

Jelikož je $u(t)$ je na celém intervalu kladné a ω je kladné reálné číslo, ze vztahu (2.24) vidíme, že $p_0 < 0$. Tudíž (2.23) a (2.24) dohromady dávají

$$p_0 \in \left[-\frac{\pi^2}{\omega^2}, 0\right).$$

Směr " $\Longleftarrow$ ". Předpokládáme $p_0 \in \left[-\frac{\pi^2}{\omega^2}, 0\right)$.

Z definice množiny $\mathcal{V}^+(\omega)$ víme, že p je prvkem množiny $\mathcal{V}^+(\omega)$, jestliže pro každou funkci $v : [0,\omega] \to \mathbb{R}$ absolutně spojitou spolu se svou první derivací a splňující

$$v''(t) \geq p_0 v(t) \quad \text{pro s.v. } t \in [0,\omega], \;\; v(0) = v(\omega), \;\; v'(0) = v'(\omega), \tag{2.25}$$

platí

$$v(t) \geq 0 \quad \text{pro } t \in [0,\omega]. \tag{2.26}$$

Nechť tedy $v : [0,\omega] \to \mathbb{R}$ je funkce absolutně spojitá spolu se svou první derivací a spňující (2.25). Ukážeme, že platí (2.26). Funkce v je zřejmě řešením periodické úlohy

$$v'' = -k^2 v + q(t); \quad v(0) = v(\omega), \quad v'(0) = v'(\omega), \tag{2.27}$$

kde

$$k := \sqrt{-p_0}, \quad q(t) := v''(t) - p_0 v(t) \quad \text{pro s.v. } t \in [0,\omega]\,.$$

Z předpokladu $p_0 \in \left[-\frac{\pi^2}{\omega^2}, 0\right)$ a (2.25) okamžitě plyne

$$0 < k \leq \frac{\pi}{\omega}, \quad q(t) \geq 0 \quad \text{pro s.v. } t \in [0,\omega]\,. \tag{2.28}$$

Úlohu (2.27) převedeme na periodickou úlohu pro soustavu diferenciálních rovnic. Položme

$$x_1(t) := v(t), \quad x_2(t) := v'(t).$$

Tyto vztahy zderivujeme a zjistíme, že $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ je řešením soustavy diferenciálních rovnic s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{g}(t), \tag{2.29}$$

kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{g}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ q(t) \end{pmatrix}.$$

Vektorové funkce $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{g}$ periodicky prodloužíme na celé $\mathbb{R}$. Pak platí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{x}(t+\omega),\\ \boldsymbol{g}(t) &= \boldsymbol{g}(t+\omega) \text{ pro každé } t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Jako první budeme potřebovat fundamentální matici $\boldsymbol{Y}$ systému

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{2.30}$$

Z klasické teorie soustav LODR1 s konstantními koeficienty je známo, že hledáme řešení ve tvaru $\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{h}$, kde λ je vlastní číslo matice soustavy a $\boldsymbol{h}$ příslušný vlastní vektor. Vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ jsou kořeny charakteristického polynomu, který je dán

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0.$$

V našem případě

$$\begin{vmatrix} -\lambda & +1 \\ -k^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + k^2.$$

Kořeny jsou tedy komplexně sdružená dvojice

$$\lambda_{1,2} = \pm ik.$$

Vypočítáme vlastní vektor $\boldsymbol{h}$ příslušný $\lambda_1 = ik$, daný rovnicí

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\,\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}.$$

V tomto případě rovnice nabývá tvaru

$$\begin{pmatrix} -ik & 1 \\ -k^2 & -ik \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -ikh_1 + h_2 \\ -k^2h_1 - ikh_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jestliže vynásobíme první rovnici $-ik$, dostaneme druhou rovnici. Jsou tedy závislé, proto máme k dispozici jen jednu rovnici. Položme $h_1 = 1$. Tím z první rovnice dostaneme $h_2 = ik$. Komplexní řešení homogenní soustavy je dáno

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{h} = e^{ikt}\begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix}.$$

V této teorii také platí následující poznatek: Je-li $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + i\boldsymbol{w}$ komplexním řešením homogenní soustavy, potom má také komplexně sdružené řešení $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v} - i\boldsymbol{w}$ a navíc lineárně nezávislá reálná řešení $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$. Pomocí Eulerovy identity rozdělíme komplexní řešení na reálnou a imaginární část,

$$\boldsymbol{x(t)} = e^{ikt}\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} \cos(kt) + i\sin(kt) \\ \\ ik\cos(kt) - k\sin(kt) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kt) \\ \\ -k\sin(kt) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin(kt) \\ \\ k\cos(kt) \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice $\boldsymbol{Y}(t)$ má jako sloupce lineárně nezávislá řešení, v tomto případě zvolíme

$$\boldsymbol{Y}(t) = \begin{pmatrix} \cos(kt) & \sin(kt) \\ \\ -k\sin(kt) & k\cos(kt) \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že

$$\det\left(\boldsymbol{Y}(\omega)-\boldsymbol{Y}(0)\right)=k\left[(\cos(k\omega)-1)^2+\sin^2(k\omega)\right]>0,$$

a proto má úloha (2.30), (2.22) pouze triviální řešení (viz např větu 2.32).

Splnili jsme předpoklady věty 2.34, řešení úlohy (2.29), (2.20) má tedy integrální reprezentaci

$$\boldsymbol{x}(t)=\int_t^{t+\omega}\boldsymbol{G}_\omega(t,\tau)\boldsymbol{g}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \text{ pro } t\in\mathbb{R}.$$

Přistupmě nyní k výpočtu Greenovi matice $\boldsymbol{G}_\omega(t,\tau)$ úlohy (2.30), (2.22). Tvrzení 2.35 dává vzorec pro výpočet

$$\boldsymbol{G}_\omega(t,\tau)=\boldsymbol{Y}(t)\left(\boldsymbol{Y}^{-1}(\omega)\,\boldsymbol{Y}(0)-\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{Y}^{-1}(\tau) \text{ pro } t,\tau\in\mathbb{R}. \tag{2.31}$$

Ve vzorci pro výpočet Greenovy matice se vyskytuje $\boldsymbol{Y}^{-1}$. Tuto inverzi vypočteme pomocí vzorce

$$y_{ij}^{-1}=\frac{(-1)^{(i+j)}\det\boldsymbol{Y}_{j,i}}{\det\boldsymbol{Y}},$$

kde $\boldsymbol{Y}_{j,i}$ značí matici vytvořenou odebráním j-tého řádku a $i-$tého sloupce. Dostáváme tedy

$$\det\boldsymbol{Y}=\begin{vmatrix}\cos(kt) & \sin(kt)\\ -k\sin(kt) & k\cos(kt)\end{vmatrix}=k\cos^2(kt)+k\sin^2(kt)=k,$$

$$y_{11}^{-1}=\frac{(-1)^{(1+1)}\det\boldsymbol{Y}_{1,1}}{\det\boldsymbol{Y}}=\frac{k\cos(kt)}{k}=\cos(kt),$$

$$y_{12}^{-1}=\frac{(-1)^{(1+2)}\det\boldsymbol{Y}_{2,1}}{\det\boldsymbol{Y}}=\frac{-\sin(kt)}{k},$$

$$y_{21}^{-1}=\frac{(-1)^{(2+1)}\det\boldsymbol{Y}_{1,2}}{\det\boldsymbol{Y}}=\frac{k\sin(kt)}{k}=\sin(kt),$$

$$y_{22}^{-1}=\frac{(-1)^{(2+2)}\det\boldsymbol{Y}_{2,2}}{\det\boldsymbol{Y}}=\frac{\cos(kt)}{k},$$

a proto

$$\boldsymbol{Y}^{-1}(t)=\begin{pmatrix}\cos(kt) & \dfrac{-\sin(kt)}{k}\\ \sin(kt) & \dfrac{\cos(kt)}{k}\end{pmatrix}.$$

Dále budeme pokračovat výpočtem členu $\boldsymbol{Y}^{-1}(\omega)\boldsymbol{Y}(0)$, platí

$$\boldsymbol{Y}^{-1}(\omega)\boldsymbol{Y}(0)=\begin{pmatrix}\cos(k\omega) & \dfrac{-\sin(k\omega)}{k}\\ \sin(k\omega) & \dfrac{\cos(k\omega)}{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(k\omega) & -\sin(k\omega)\\ \sin(k\omega) & \cos(k\omega)\end{pmatrix}.$$

Další člen, který budeme počítat je $[\boldsymbol{Y}^{-1}(\omega)\boldsymbol{Y}(0)-\boldsymbol{I}]^{-1}$. Pro přehlednost si označníme $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Y}^{-1}(\omega)\boldsymbol{Y}(0)-\boldsymbol{I}$, to je rovno

$$\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}\cos(k\omega)-1 & -\sin(k\omega)\\ \sin(k\omega) & \cos(k\omega)-1\end{pmatrix}.$$

Přejdeme k výpočtu inverzní matice $\boldsymbol{Z}^{-1}$,

$$\begin{aligned}\det\boldsymbol{Z}=\begin{vmatrix}\cos(k\omega)-1 & -\sin(k\omega)\\ \sin(k\omega) & \cos(k\omega)-1\end{vmatrix}&=(\cos(k\omega)-1)^2+\sin^2(k\omega)=\\ &=\cos^2(k\omega)-2\cos(k\omega)+1+\sin^2(k\omega)=\\ &=-2\cos(k\omega)+2=2\left(1-\cos(k\omega)\right),\end{aligned}$$

$$z_{11}^{-1}=\frac{(-1)^{(1+1)}\det\boldsymbol{Z}_{1,1}}{\det\boldsymbol{Z}}=\frac{\cos(k\omega)-1}{2\left(1-\cos(k\omega)\right)}=-\frac{1}{2},$$

$$z_{12}^{-1}=\frac{(-1)^{(1+2)}\det\boldsymbol{Z}_{2,1}}{\det\boldsymbol{Z}}=\frac{\sin(k\omega)}{2\left(1-\cos(k\omega)\right)},$$

$$z_{21}^{-1}=\frac{(-1)^{(2+1)}\det\boldsymbol{Z}_{1,2}}{\det\boldsymbol{Z}}=\frac{-\sin(k\omega)}{2\left(1-\cos(k\omega)\right)},$$

$$z_{22}^{-1}=\frac{(-1)^{(2+2)}\det\boldsymbol{Z}_{2,2}}{\det\boldsymbol{Z}}=\frac{\cos(k\omega)-1}{2\left(1-\cos(k\omega)\right)}=-\frac{1}{2}.$$

Všimněme si, že z předpokladu $k\in\left(0,\frac{\pi}{\omega}\right]$ plyne $1-\cos(k\omega)>0$. Matice $\boldsymbol{Z}^{-1}$ je tedy tvaru

$$\boldsymbol{Z}^{-1}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sin(k\omega)}{2\left(1-\cos(k\omega)\right)}\\ \dfrac{-\sin(k\omega)}{2\left(1-\cos(k\omega)\right)} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Nyní vypočteme matici, kterou označíme jako $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Y}(t)\left[\boldsymbol{Y}^{-1}(\omega)\boldsymbol{Y}(0)-\boldsymbol{I}\right]^{-1}=\boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{Z}^{-1}$. Dostáváme

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{Z}^{-1}=\begin{pmatrix}\cos(kt) & \sin(kt)\\ -k\sin(kt) & k\cos(kt)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sin(k\omega)}{2\left(1-\cos(k\omega)\right)}\\ \dfrac{-\sin(k\omega)}{2\left(1-\cos(k\omega)\right)} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\cos(kt)-\dfrac{k\sin(kt)\sin(k\omega)}{2\left(1-\cos(k\omega)\right)} & \dfrac{\cos(kt)\sin(k\omega)}{2\left(1-\cos(k\omega)\right)}-\dfrac{1}{2}\sin(kt)\\ \dfrac{k}{2}\sin(kt)-\dfrac{k\cos(kt)\sin(k\omega)}{2\left(1-\cos(k\omega)\right)} & -\dfrac{k\sin(kt)\sin(k\omega)}{2\left(1-\cos(k\omega)\right)}-\dfrac{1}{2}\cos(kt)\end{pmatrix}.$$

Jednotlivé prvky matice $\boldsymbol{C}$ upravíme s využitím součtových vzorců

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Dále pro přehlednost označíme $b := 2\,(1 - \cos(k\omega))$ a provedeme úpravy prvků c_{ij} matice $\boldsymbol{C}$,

$$c_{11} = \frac{-\cos(kt)(1-\cos(k\omega) - \sin(kt)\sin(k\omega))}{b} =$$
$$= \frac{\cos(kt)\cos(k\omega) - \sin(kt)\sin(k\omega) - \cos(kt)}{b} = \frac{\cos(k(t+\omega)) - \cos(kt)}{b},$$
$$c_{12} = \frac{\cos(kt)\sin(k\omega) - \sin(kt)(1-\cos(k\omega))}{b} =$$
$$= \frac{\cos(kt)\sin(k\omega) + \sin(kt)\cos(k\omega) - \cos(kt)}{b} = \frac{\sin(k(t+\omega)) - \sin(kt)}{b},$$
$$c_{21} = \frac{k\sin(kt)(1-\cos(k\omega)) - k\cos(kt)\sin(k\omega)}{b} =$$
$$= \frac{k\sin(kt) - k\sin(kt)\cos(k\omega) - k\cos(kt)\sin(k\omega)}{b} = -\frac{k\sin(k(t+\omega)) - \sin(kt)}{b},$$
$$c_{22} = \frac{-k\sin(kt)\sin(k\omega) - \cos(kt)(1-\cos(k\omega))}{b} =$$
$$= \frac{-k\sin(kt)\sin(k\omega) + k\cos(kt)\cos(k\omega) - k\cos(kt)}{b} = \frac{k(\cos(k(t+\omega)) - \cos(kt))}{b}.$$

Matice $\boldsymbol{C}$ je tedy tvaru

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} \cos(k(t+\omega)) - \cos(kt) & \sin(k(t+\omega)) - \sin(kt) \\ k\sin(k(t+\omega)) - \sin(kt) & k(\cos(k(t+\omega)) - \cos(kt)) \end{pmatrix}.$$

K dopočtení Greenovi matice podle vztahu (2.31) zbývá již jen provést součin $\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}^{-1}(\tau)$, tj.

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}^{-1}(\tau) =$$
$$= \frac{1}{b}\begin{pmatrix} \cos(k(t+\omega)) - \cos(kt) & \sin(k(t+\omega)) - \sin(kt) \\ k\sin(k(t+\omega)) - \sin(kt) & k(\cos(k(t+\omega)) - \cos(kt)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(k\tau) & \frac{-\sin(k\tau)}{k} \\ \sin(k\tau) & \frac{\cos(k\tau)}{k} \end{pmatrix}.$$

Výpočet provedeme po prvcích matice $\boldsymbol{G}_\omega(t,\tau)$ a upravíme opět pomocí goniometrických součtových vzorců. Dostaneme

$$g_{11} = \cos(k(t+\omega))\cos(k\tau) - \cos(kt)\cos(k\tau) + \sin(k(t+\omega))\sin(k\tau)$$
$$- \sin(kt)\sin(k\tau) = \cos(k(t+\omega-\tau)) - \cos(k(t-\tau)),$$

$$g_{12} = -\frac{\cos(k(t+\omega))\sin(k\tau)}{k} + \frac{\cos(kt)\sin(k\tau)}{k} + \frac{\sin(k(t+\omega))\cos(k\tau)}{k}$$
$$- \frac{\sin(kt)\cos(k\tau)}{k} = \frac{\sin(k(t+\omega-\tau))}{k} + \frac{\sin(k(\tau-t))}{k},$$

$$g_{21} = -k\sin(k(t+\omega))\cos(k\tau) + k\sin(kt)\cos(k\tau) + k\cos(k(t+\omega))\sin(k\tau)$$
$$- k\cos(kt)\sin(k\tau) = k\sin(k(\tau-t-\omega)) - k\sin(k(t-\tau)),$$

$$g_{22} = \sin(k(t+\omega))\sin(k\tau) - \sin(kt)\sin(k\tau) + \cos(k(t+\omega))\cos(k\tau)$$
$$- \cos(kt)\cos(k\tau) = \cos(k(t+\omega-\tau)) - \cos(k(t-\tau)).$$

Tím je výpočet Greenovy matice úlohy (2.30), (2.22) hotov, nabývá tvaru

$$\boldsymbol{G}_\omega(t,\tau) = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} \cos(k(t+\omega-\tau)) - \cos(k(t-\tau)) & \dfrac{\sin(k(t+\omega-\tau))}{k} + \dfrac{\sin(k(\tau-t))}{k} \\ k\sin(k(\tau-t-\omega)) - k\sin(k(t-\tau)) & \cos(k(t+\omega-\tau)) - \cos(k(t-\tau)) \end{pmatrix},$$

kde $b = 2\,(1-\cos(k\omega))$.

Funkce $\boldsymbol{x}$, která je řešením soustavy (2.29) a splňuje (2.20) je tedy podle věty 2.34 tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{b}\int_t^{t+\omega} \boldsymbol{G}_\omega(t,\tau)\begin{pmatrix} 0 \\ q(\tau) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,\tau,$$

tj.

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{b}\int_t^{t+\omega} \begin{pmatrix} \dfrac{\sin(k(t+\omega-\tau))}{k} + \dfrac{\sin(k(\tau-t))}{k} \\ \cos(k(\tau+t-\omega)) - \cos(k(t-\tau)) \end{pmatrix} q(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau.$$

Nyní podle výše zavedené substituce $x_1(t) = v(t)$ k ověření podmínky (2.26) zbývá ukázat že

$$x_1(t) = \frac{1}{bk}\int_t^{t+\omega} \left[\sin(k(t+\omega-\tau)) + \sin(k(\tau-t))\right] q(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \geq 0 \text{ pro } t \in [0,\omega]\,. \qquad (2.32)$$

Ve složce řešení $x_1(t)$ v integrandu vystupuje $\sin(k(t+\omega-\tau))$ a $\sin(k(\tau-t))$. Všimněme si, že pro každé $t \leq \tau \leq t+\omega$ platí

$$0 \leq \tau - t \leq \omega$$

a

$$0 \leq t + \omega - \tau \leq \omega.$$

Vzhledem k (2.28) proto dostáváme

$$\sin(k(\tau - t)) \geq 0, \quad \sin(k(t + \omega - \tau)) \geq 0 \quad \text{ pro } t \leq \tau \leq t + \omega$$

a vztah (2.32) tedy platí. Odtud $v(t) \geq 0$ pro $t \in [0, \omega]$, a proto $p \in \mathcal{V}^+(\omega)$.

(ii) směr " $\Longrightarrow$ ". Předpokládejme, že $p \in \operatorname{Int} \mathcal{V}^+(\omega)$. Odtud zřejmě plyne $p \in \mathcal{V}^+(\omega)$. Vzledem k výše dokázané části (i) tedy bude p_0 prvkem z intervalu $\left[-\frac{\pi^2}{\omega^2}, 0\right)$. Avšak pro všechna $\varepsilon > 0$ platí

$$-\frac{\pi^2}{\omega^2} - \varepsilon < -\frac{\pi^2}{\omega^2}.$$

To však podle výše dokázané části (i) znamená, že $-\frac{\pi^2}{\omega^2} - \varepsilon \notin \mathcal{V}^+(\omega)$ pro každé $\varepsilon > 0$. Z toho dále plyne, že neexistuje epsilonové okolí $B_\varepsilon\left(-\frac{\pi^2}{\omega^2}\right)$ konstantní funkce $-\frac{\pi^2}{\omega^2}$ takové aby platilo

$$B_\varepsilon\left(-\frac{\pi^2}{\omega^2}\right) \subseteq \mathcal{V}^+(\omega).$$

Proto $-\frac{\pi^2}{\omega^2} \notin \operatorname{Int} \mathcal{V}^+(\omega)$. Tím dostáváme $p_0 \in \left(-\frac{\pi^2}{\omega^2}, 0\right)$.

Směr " $\Longleftarrow$ ". Tuto část dokážeme pomocí několika výsledků z [4]:

Definice. Řekneme, že funkce $p \in L(\omega)$[5] náleží množině $\mathcal{D}(\omega)$, jestliže úloha

$$u'' = p(t)u, \quad u(\alpha) = 0, u(\beta) = 0$$

nemá netriviální řešení pro libovolné $\alpha < \beta$ splňující $\beta - \alpha < \omega$.

Tvrzení A ([4, Proposition 2.6]). *Nechť $p \in L(\omega)$. Potom inkluze $p \in \operatorname{Int} \mathcal{D}(\omega)$ platí právě tehdy, když pro libovolné $\alpha \in [0, \omega)$ existuje funkce γ_α absolutně spojitá spolu se svou první derivací na intervalu $[\alpha, \alpha + \omega]$ a splňující*

$$\gamma_\alpha''(t) \leq p(t)\gamma_\alpha(t) \quad \text{ pro s.v. } t \in [\alpha, \alpha + \omega], \tag{2.33}$$

$$\gamma_\alpha(t) > 0 \quad \text{ pro } t \in (\alpha, \alpha + \omega), \tag{2.34}$$

a

$$\gamma_\alpha(\alpha) + \gamma_\alpha(\alpha + \omega) + \operatorname{meas}\{t \in [\alpha, \alpha + \omega] \mid \gamma_\alpha''(t) < p(t)\gamma_\alpha(t)\} > 0. \tag{2.35}$$

Věta B ([4, Theorem 9.3]). *Nechť $p \in L(\omega)$ je funkce splňující*

$$p(t) \not\equiv 0, \quad \int_0^\omega p(s)\,\mathrm{d}\,s \leq 0. \tag{2.36}$$

Potom $p \in \operatorname{Int} \mathcal{V}^+(\omega)$ právě tehdy, když $p \in \operatorname{Int} \mathcal{D}(\omega)$.

Předpokládejme, že $p_0 \in \left(-\frac{\pi^2}{\omega^2}, 0\right)$. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolné. Položme

$$\gamma_\alpha(t) = \sin\left(\frac{\pi(t - \alpha)}{\omega}\right) \quad \text{ pro } t \in [\alpha, \alpha + \omega].$$

[5] Symbolem $L(\omega)$ rozumíme množinu funkcí $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které jsou ω-periodické a lebesgueovsky integrovatelné na $[0, \omega]$.

Zřejmě $\gamma_\alpha(\alpha) = 0, \quad \gamma_\alpha(\alpha+\omega) = 0$ a

$$\gamma_\alpha(t) = \sin\left(\frac{\pi(t-\alpha)}{\omega}\right) > 0 \text{ pro } t \in (\alpha, \alpha+\omega)\,.$$

Druhá derivace funkce γ_α je

$$\gamma''_\alpha(t) = -\frac{\pi^2}{\omega^2}\sin\left(\frac{\pi(t-\alpha)}{\omega}\right) \text{ pro } t \in [\alpha, \alpha+\omega]\,.$$

Dostáváme tedy

$$\gamma''_\alpha(t) = -\frac{\pi^2}{\omega^2}\sin\left(\frac{\pi(t-\alpha)}{\omega}\right) < p_0 \sin\left(\frac{\pi(t-\alpha)}{\omega}\right) = p(t)\gamma_\alpha(t) \quad \text{ pro } t \in (\alpha, \alpha+\omega)$$

a platí tedy podmínky (2.33)-(2.35). Je splněna i podmínka (2.36), neboť předpokládáme $p_0 < 0$ a integrál ze záporné konstanty je záporný. Pomocí tvrzení A a věty B dostáváme $p \in \operatorname{Int} \mathcal{V}^+(\omega)$. □

3 Kvalitativní analýza pohybové rovnice vybraného oscilátoru

V této části budeme studovat otázku existence ω-periodických řešení pohybové rovnice odvozené v kapitole 1, tj. diferenciální rovnice

$$u'' = \frac{2k}{m}u\left(\frac{l_0}{\sqrt{d^2(t)+u^2}} - 1\right), \tag{3.1}$$

kde $k, m, l_0 > 0$ a $d : \mathbb{R} \to (0, l_0)$ je spojitá ω-periodická funkce. Řešením diferenciální rovnice (3.1) na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ rozumíme funkci $u : I \to \mathbb{R}$, která je spojitá spolu se svými derivacemi prvního a druhého řádu a splňuje

$$u''(t) = \frac{2k}{m}u(t)\left(\frac{l_0}{\sqrt{d^2(t)+u^2(t)}} - 1\right) \text{ pro } t \in I.$$

Řešení rovnice (3.1), které je definováno a ω-periodické na $\mathbb{R}$, nazýváme ω-periodickým řešením rovnice (3.1).

3.1 Autonomní případ

Uvažujeme nejprve rovnici (3.1), ve které je funkce d konstantní. Jinými slovy, uvažujme autonomní diferenciální rovnici (1.7) odvozenou v kapitole 1. V části 2.1.3 jsme ukázali, že tuto rovnici lze převést na Hamiltonův systém

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= \frac{2k}{m}x_1\left(\frac{l_0}{\sqrt{d^2+x_1^2}} - 1\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.1.1 Vyšetření kritických bodů

Nejprve hledáme kritické body soustavy (3.2). Podle definice 2.9 k jejich nalezení řešíme soustavu algebraických rovnic

$$\begin{aligned} x_2 &= 0, \\ \frac{2k}{m}x_1\left(\frac{l_0}{\sqrt{d^2+x_1^2}} - 1\right) &= 0. \end{aligned}$$

V soustavě (3.2) se tedy vyskytují tři kritické body

$$K_1 = (0,0), \qquad K_2 = \left(\sqrt{l_0^2 - d^2}, 0\right), \qquad K_3 = \left(-\sqrt{l_0^2 - d^2}, 0\right).$$

Nyní přistoupíme k určení typu těchto bodů. Podle věty 2.23 nám stačí určit funkční hodnotu derivace f v kritických bodech, která je vzhledem k (3.2) tvaru

$$f(x_1) := \frac{2k}{m}x_1 - \frac{2kl_0}{m}\frac{x_1}{\sqrt{d^2+x_1^2}} \text{ pro } x_1 \in \mathbb{R}.$$

Její derivace potom je

$$f'(x_1) = \frac{2k}{m} - \frac{2kl_0}{m} \frac{d^2}{(d^2 + x_1^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ pro } x_1 \in \mathbb{R}.$$

Pro kritický bod K_1 je

$$f'(0) = \frac{2k}{m} \left(1 - l_0 \frac{d^2}{(d^2)^{3/2}} \right) = \frac{2k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{d} \right).$$

Protože předpokládáme, že k, m, l_0 a d jsou kladné konstanty a platí $l_0 > d$ dostáváme

$$f'(0) < 0,$$

tedy podle věty 2.23 je kritický bod K_1 typu *sedlo*. Z poznámky 2.19 plyne, že kritický bod K_1 je nestabilní. Dále vypočteme funkční hodnotu f' v hodnotě odpovídající kritickému bodu K_2, tj.

$$f' \left(\sqrt{l_0^2 - d^2} \right) = \frac{2k}{m} \left(1 - \frac{l_0 d^2}{(l_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{2k}{m} \left(1 - \frac{d^2}{l_0^2} \right).$$

Kvůli výše uvedeným předpokladům o konstantách dostáváme

$$f' \left(\sqrt{l_0^2 - d^2} \right) > 0.$$

Nyní podle věty 2.23 víme, že K_2 je kritický bod typu *střed*. Kritický bod K_3 bude také *střed*, protože souřadnice K_2 a K_3 se liší pouze znaménkem v první složce a dosazujeme ji do výrazu kde je umocněna na druhou. Z fázového portrétu sestrojeného v kapitole 3.1.3 a analytického popisu orbit (viz kapitolu 3.1.2) vyplývá, že kritické body K_1, K_2 jsou stabilní, ale ne asymptoticky stabilní.

3.1.2 Rozbor hladin hamiltoniánu soustavy

Již jsme zmínili, že soustava (3.2) je speciálním případem Hamiltonova systému (2.7), kde

$$f(x_1) = \frac{2kx_1}{m} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{d^2 + x_1^2}} \right) \text{ pro } x_1 \in \mathbb{R}.$$

Můžeme tedy přistoupit k výpočtu hamiltoniánu tohoto systému. Podle vztahu (2.8) dostáváme

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 + \int_0^{x_1} \frac{2ku}{m} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{d^2 + u^2}} \right) \mathrm{d}\, u.$$

Vypočteme integrál na pravé straně, tj.

$$\begin{aligned} \frac{2k}{m} \int_0^{x_1} \left(u - \frac{ul_0}{\sqrt{d^2 + u^2}} \right) \mathrm{d}\, u &= \frac{2k}{m} \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^{x_1} - \frac{2kl_0}{m} \left[\sqrt{d^2 + u^2} \right]_0^{x_1} = \\ &= \frac{k}{m} x_1^2 - \frac{2kl_0}{m} \sqrt{d^2 + x_1^2} + \frac{2kl_0 d}{m}. \end{aligned}$$

Tím dostáváme tvar hamiltoniánu systému (3.2) ve tvaru

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{k}{m}x_1^2 - \frac{2kl_0}{m}\sqrt{d^2 + x_1^2} + \frac{2kl_0 d}{m} \text{ pro } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.3}$$

Nejprve budeme vyšetřovat hladiny hamiltoniánu obsahující kritické body, poté se zaměříme na obecnou hladinu $\mathcal{H}_c$, $c \in \mathbb{R}$, danou vztahem (2.6).

(i) Hladina funkce H obsahující kritický bod K_1 je dána hodnotou

$$H(K_1) = H(0, 0) = 0.$$

To znamená, že se jedná o hladinu $\mathcal{H}_0$, která je, vzhledem k (2.6) a (3.3), určena rovnicí

$$\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{k}{m}x_1^2 - \frac{2kl_0}{m}\sqrt{d^2 + x_1^2} + \frac{2kl_0 d}{m} = 0.$$

Odtud získáme předpis pro x_2 v explicitním tvaru

$$x_2 = \pm\sqrt{2\left(- \frac{k}{m}x_1^2 + \frac{2kl_0}{m}\sqrt{d^2 + x_1^2} - \frac{2kl_0 d}{m}\right)}. \tag{3.4}$$

Nyní vyšetřme, pro které x_1 má výraz v reálném oboru smysl. Vyjdeme z toho, že výraz pod odmocninou musí být nezáporný, tedy

$$2\left(- \frac{k}{m}x_1^2 + \frac{2kl_0}{m}\sqrt{d^2 + x_1^2} - \frac{2kl_0 d}{m}\right) \geq 0.$$

Nerovnici můžeme zjednodušit dělením výrazem $2k/m$. Dostaneme

$$2l_0\sqrt{d^2 + x_1^2} - x_1^2 - 2l_0 d \geq 0.$$

Abychom se zbavili členu kde je x_1 pod odmocninou převedeme ostatní členy na druhou stranu nerovnice. Obě strany pak umocníme, to je ekvivalentní úprava, protože výrazy na obou stranách jsou nezáporné. Získáme tak

$$\left(2l_0\sqrt{d^2 + x_1^2}\right)^2 \geq (x_1^2 + 2l_0 d)^2.$$

Po dalších úpravách dostaneme výraz

$$x_1^2(4l_0^2 - x_1^2 - 4l_0 d) \geq 0,$$

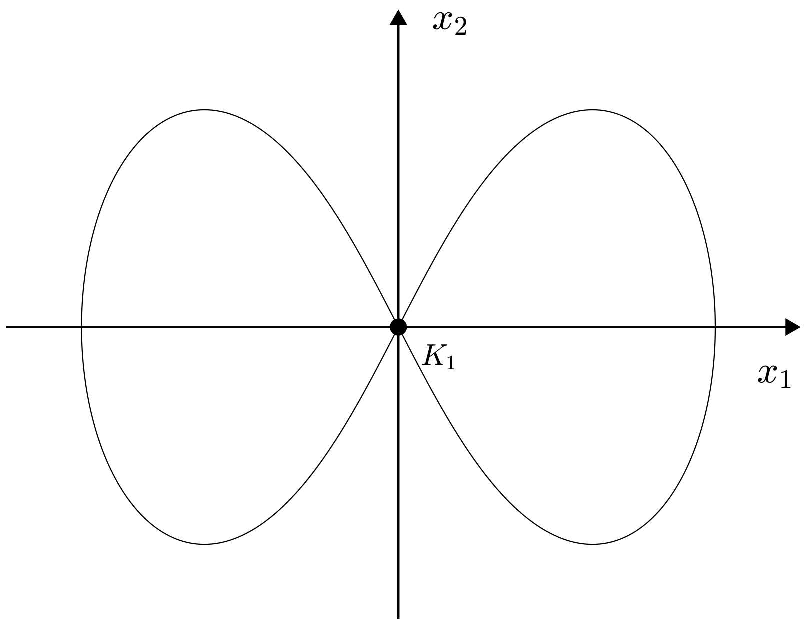
který bude nezáporný právě tehdy, když

$$x_1 = 0 \text{ nebo } 4l_0^2 - x_1^2 - 4l_0 d \geq 0.$$

Je-li $x_1 = 0$, pak z (3.4) plyne $x_2 = 0$, tj. hladina $\mathcal{H}_0$ vskutku obsahuje kritický bod K_1. V druhém případě dostáváme po úpravě omezení pro x_1

$$|x_1| \leq \sqrt{4l_0(l_0 - d)}. \tag{3.5}$$

Pro hladinu $\mathcal{H}_0$ jsme tedy získali explicitní vyjádření (3.4), kde x_1 splňuje nerovnost (3.5). Graf této hladiny je znázorněn na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Hladina $\mathcal{H}_0$

(ii) Dále budeme zkoumat hladinu odpovídající kritickým bodům K_2, K_3. Po dosazení souřadnic bodu K_2 do (3.3) dostáváme

$$H(K_2) = H\left(\sqrt{l_0^2 - d^2}, 0\right) = \frac{k}{m}(l_0^2 - d^2) - \frac{2kl_0}{m}\sqrt{d^2 + (l_0^2 - d^2)} + \frac{2kl_0 d}{m},$$

což lze upravit na

$$H(K_2) = -\frac{k}{m}(l_0 - d)^2.$$

To stejné provedeme pro bod K_3 a zjistíme, že dává stejnou funkční hodnotu, tudíž kritické body K_2, K_3 leží v hladině $\mathcal{H}_{-\frac{k}{m}(l_0-d)^2}$, která, vzhledem k (2.6) a (3.3), je dána rovnicí

$$\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{k}{m}x_1^2 - \frac{2kl_0}{m}\sqrt{d^2 + x_1^2} + \frac{2kl_0 d}{m} = -\frac{k}{m}(l_0 - d)^2. \tag{3.6}$$

Celou rovnici vydělíme výrazem k/m a vztah na pravé straně roznásobíme

$$\frac{m}{2k}x_2^2 + x_1^2 - 2l_0\sqrt{d^2 + x_1^2} + 2l_0 d = -l_0^2 + 2l_0 d - d^2.$$

Některé členy se odečtou a zbytek převedeme na druhou stranu

$$\frac{m}{2k}x_2^2 + l_0^2 - 2l_0\sqrt{d^2 + x_1^2} + (d^2 + x_1^2) = 0.$$

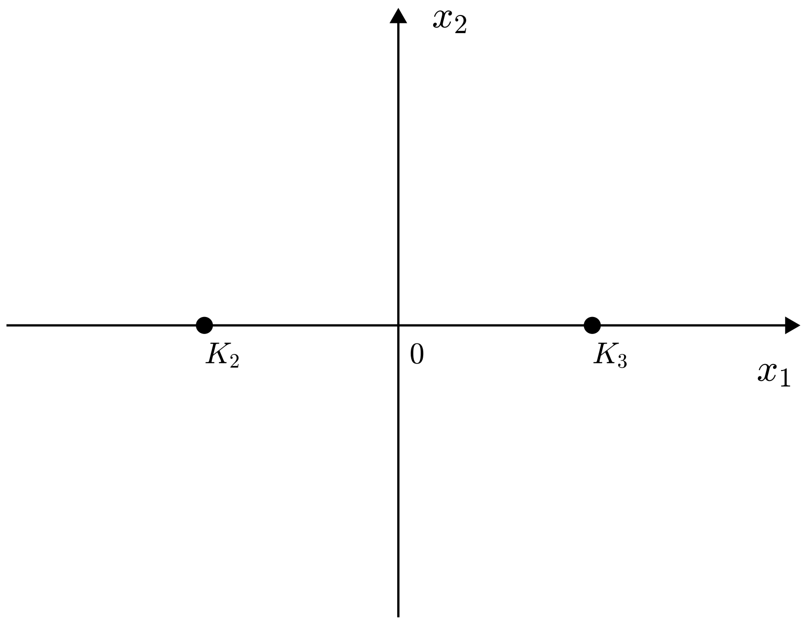
Všimněme si, že v rovnici vyskytl rozklad mnohočlenu, ten převedeme na čtverec a dostaneme

$$\frac{m}{2k}x_2^2 + \left(l_0 - \sqrt{d^2 + x_1^2}\right)^2 = 0.$$

Tato rovnost platí právě tehdy, když je $x_2 = 0$ a zároveň $l_0 - \sqrt{d^2 + x_1^2} = 0$. Podmínka na x_2 je tedy splněna pouze v bodě 0 a podmínka pro x_1 se snadno vypočte

$$l_0 - \sqrt{d^2 + x_1^2} = 0 \implies x_1 = \pm\sqrt{l_0^2 - d^2}.$$

Požadavky na x_1 a x_2 jsou splněny pouze pro hodnoty, které přesně odpovídájí souřadnícím bodů K_2 a K_3. Z toho plyne, že v hladině $\mathcal{H}_{-\frac{k}{m}(l_0-d)^2}$ se nachází pouze kritické body K_2 a K_3, viz obrázek 3.2.



Obrázek 3.2: Hladina $\mathcal{H}_{-\frac{k}{m}(l_0-d)^2}$

(*iii*) Zbývá provést rozbor hladiny $\mathcal{H}_c$ obecně, tj. pro $c \in \mathbb{R}$. Ta je vzhledem k (2.6) a (3.3) dána rovnicí

$$\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{k}{m}x_1^2 - \frac{2kl_0}{m}\sqrt{d^2 + x_1^2} + \frac{2kl_0 d}{m} = c. \tag{3.7}$$

Rovnici převedeme na podobný tvar jako má rovnice (3.6). K pravé straně rovnice (3.7) přičteme a odečteme pravou stranu rovnice (3.6) a dostaneme

$$\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{k}{m}x_1^2 - \frac{2kl_0}{m}\sqrt{d^2 + x_1^2} + \frac{2kl_0 d}{m} = -\frac{k}{m}(l_0 - d)^2 + \frac{k}{m}(l_0 - d)^2 + c.$$

Stejně jako v předchozím případě můžeme tuto rovnost přepsat do tvaru

$$\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{k}{m}\left(l_0 - \sqrt{d^2 + x_1^2}\right)^2 = \frac{k}{m}(l_0 - d)^2 + c. \tag{3.8}$$

K tomu, aby hladina $\mathcal{H}_c$ byla neprázdná je nutné, aby pravá strana rovnosti (3.8) byla nezáporná. To nám dá omezení pro konstantu c, zřejmě musí platit

$$c \geq -\frac{k}{m}(l_0 - d)^2.$$

Hladiny $\mathcal{H}_0$ a $\mathcal{H}_{-\frac{k}{m}(l_0-d)^2}$ jsme již rozebrali a nyní také víme, že pro $c < -\frac{k}{m}(l_0 - d)^2$ budou hladiny $\mathcal{H}_c$ prázdné množiny. Proto budeme dále diskutovat případy

$$-\frac{k}{m}(l_0 - d)^2 < c < 0, \tag{3.9}$$

a

$$c > 0. \tag{3.10}$$

Pokračujeme s vyjádřením x_2 ze vztahu (3.8). Zřejmě

$$x_2 = \pm\sqrt{2c + \frac{2k}{m}(l_0 - d)^2 - \frac{2k}{m}\left(l_0 - \sqrt{d^2 + x_1^2}\right)^2}. \tag{3.11}$$

Výraz pod odmocninou musí být nezáporný, dostáváme

$$\frac{2k}{m}\left(l_0 - \sqrt{d^2 + x_1^2}\right)^2 \leq 2c + \frac{2k}{m}(l_0 - d)^2.$$

Nerovnici vydělíme výrazem $\frac{2k}{m}$, tj.

$$\left(l_0 - \sqrt{d^2 + x_1^2}\right)^2 \leq \frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2.$$

Dále odmocníme a získáme

$$\left|l_0 - \sqrt{d^2 + x_1^2}\right| \leq \sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2}.$$

Výraz pod odmocninou ve vztahu (3.11) je tedy nezáporný právě tehdy, když x_1 splňuje nerovnosti

$$l_0 - \sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2} \leq \sqrt{d^2 + x_1^2} \leq l_0 + \sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2}. \tag{3.12}$$

Odtud vyplývá, že hladina $\mathcal{H}_c$ je explicitně popsána vztahem (3.11), kde x_1 splňuje podmínku (3.12). Nyní rozebereme jednotlivé případy (3.9), (3.10) a hladiny vykreslíme.
a) Uvažujme nejprve případ $-\frac{k}{m}(l_0 - d)^2 < c < 0$.

$\mathbf{a_1}$) Uvažujme levou nerovnici ze vztahu (3.12), tj.

$$l_0 - \sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2} \leq \sqrt{d^2 + x_1^2}. \tag{3.13}$$

Než obě strany vztahu (3.13) umocníme na druhou, nejprve se přesvědčíme, že jsou obě nezáporné. Pravá strana obsahuje pouze odmocninu, která je vždy nezáporná. Jelikož $c < 0$, platí pro odmocninu na levé straně odhad

$$\sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2} \leq \sqrt{(l_0 - d)^2} = l_0 - d.$$

Proto

$$l_0 - \sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2} \geq l_0 - (l_0 - d) = d > 0.$$

Obě strany (3.13) jsou nezáporné, můžeme pokračovat s jejich umocněním

$$l_0^2 - 2l_0\sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2} + \frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2 \leq d^2 + x_1^2.$$

Po roznásobení a úpravě získáme

$$\frac{cm}{k} + 2l_0\left(l_0 - d - \sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2}\right) \leq x_1^2. \tag{3.14}$$

Nyní zbývá odmocnit a budeme mít jednu z podmínek pro x_1. To si však můžeme dovolit pouze v přídadě, že levá strana nerovnosti (3.14) je nezáporná. Ukážeme, že

$$\frac{cm}{k} + 2l_0\left(l_0 - d - \sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2}\right) \geq 0. \tag{3.15}$$

Jelikož předpokládáme $-\frac{k}{m}(l_0 - d)^2 < c$, můžeme napsat

$$\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2 > 0. \tag{3.16}$$

Potom platí odhad

$$\frac{cm}{k} + 2l_0(l_0 - d) \geq \frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2 > 0. \tag{3.17}$$

Jelikož nyní uvažujeme $c < 0$, zřejmě platí

$$\left(\frac{cm}{k}\right)^2 \geq 4l_0 d\frac{cm}{k},$$

$$\left(\frac{cm}{k}\right)^2 \geq 4l_0\frac{cm}{k}(l_0 - l_0 + d),$$

a proto

$$\left(\frac{cm}{k}\right)^2 \geq 4l_0^2\frac{cm}{k} - 4l_0\frac{cm}{k}(l_0 - d).$$

Druhý člen pravé strany převedeme na levou, k oběma stranám nerovnice přičteme $4l_0^2(l_0 - d)^2$ a dostaneme

$$\left(\frac{cm}{k}\right)^2 + 4l_0\frac{cm}{k}(l_0 - d) + 4l_0^2(l_0 - d)^2 \geq 4l_0^2\frac{cm}{k} + 4l_0^2(l_0 - d)^2.$$

Na levé straně použijeme vzorec pro mnohočlen a na pravé vytkneme $4l_0^2$, tj.

$$\left(\frac{cm}{k} + 2l_0(l_0 - d)\right)^2 \geq 4l_0^2\left(\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2\right).$$

Vzhledem k (3.16) a (3.17) můžeme odmocnit a získáme

$$\frac{cm}{k} + 2l_0(l_0 - d) \geq 2l_0\sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2}.$$

Po další úpravě

$$\frac{cm}{k} + 2l_0^2 - 2l_0 d - 2l_0\sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2} \geq 0.$$

Dále vytkneme $2l_0$ a dostáváme

$$\frac{cm}{k} + 2l_0\left(l_0 - d - \sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2}\right) \geq 0,$$

čímž je podmínka (3.15) dokázána. Nyní můžeme odmocnit vztah (3.14) a pro x_1 dostaneme podmínku

$$|x_1| \geq \sqrt{\frac{cm}{k} + 2l_0\left(l_0 - d - \sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2}\right)}. \tag{3.18}$$

$\mathbf{a_2}$) Vraťme se k (3.12) a dořešme zbývající nerovnici

$$\sqrt{d^2 + x_1^2} \leq l_0 + \sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2}. \tag{3.19}$$

Postupujeme podobně jako v předchozím případě, obě strany jsou nezáporné, můžeme umocnit a (3.19) lze teď ekvivalentně přepsat do tvaru

$$d^2 + x_1^2 \leq l_0^2 + 2l_0\sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2} + \frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2.$$

Roznásobíme, provedeme úpravu a dostáváme

$$x_1^2 \leq \frac{cm}{k} + 2l_0\left(l_0 - d + \sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2}\right).$$

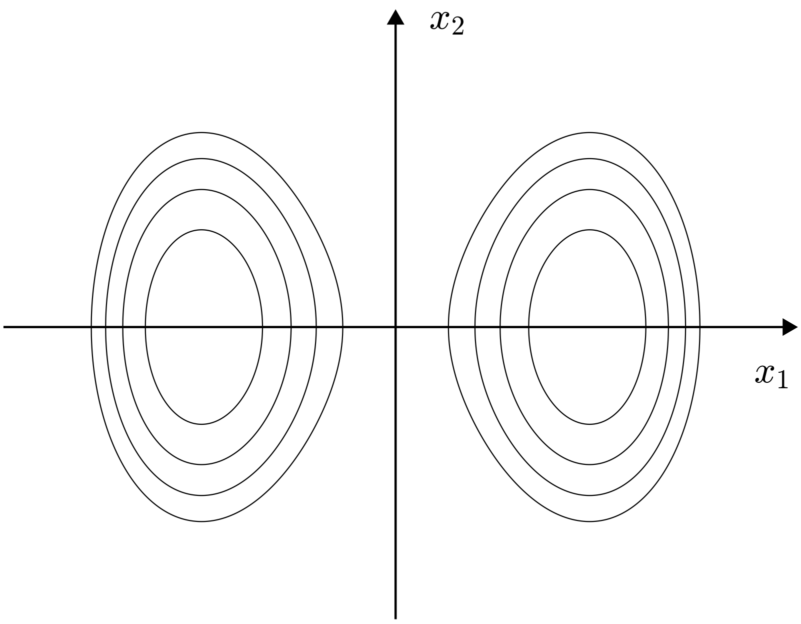
Ověřme nyní nezápornost pravé strany. Protože platí (3.17), lze provést odhad

$$\frac{cm}{k} + 2l_0(l_0 - d) + 2l_0\sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2} \geq \frac{cm}{k} + 2l_0(l_0 - d) > 0.$$

Pokračujeme s odmocněním a získáme druhou podmínku pro x_1 tvaru

$$|x_1| \leq \sqrt{\frac{cm}{k} + 2l_0\left(l_0 - d + \sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0 - d)^2}\right)}. \tag{3.20}$$

Pomocí předpisu (3.11) pro x_2 a podmínek (3.18), (3.20) pro x_1 jsou tedy hladiny explicitně popsány pro $-\frac{k}{m}(l_0 - d)^2 < c < 0$. Na obrázku 3.3 jsou znázorněny hladiny $\mathcal{H}_c$ pro některá c z tohoto intervalu.



Obrázek 3.3: Hladiny $\mathcal{H}_c$ pro $-\frac{k}{m}(l_0-d)^2 < c < 0$

b) Předpokládejme nyní, že $c > 0$.

b₁) Uvažujme opět levou nerovnici ze vztahu (3.12), tj.

$$l_0 - \sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0-d)^2} \le \sqrt{d^2 + x_1^2}.$$

To je ovšem splněno pro každé $x_1 \in \mathbb{R}$, neboť platí

$$l_0 - \sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0-d)^2} \le l_0 - \sqrt{(l_0-d)^2} = l_0 - (l_0 - d) \le \sqrt{d^2 + x_1^2}.$$

b₂) Zbývá vyřešit pravou nerovnici z (3.12), tj.

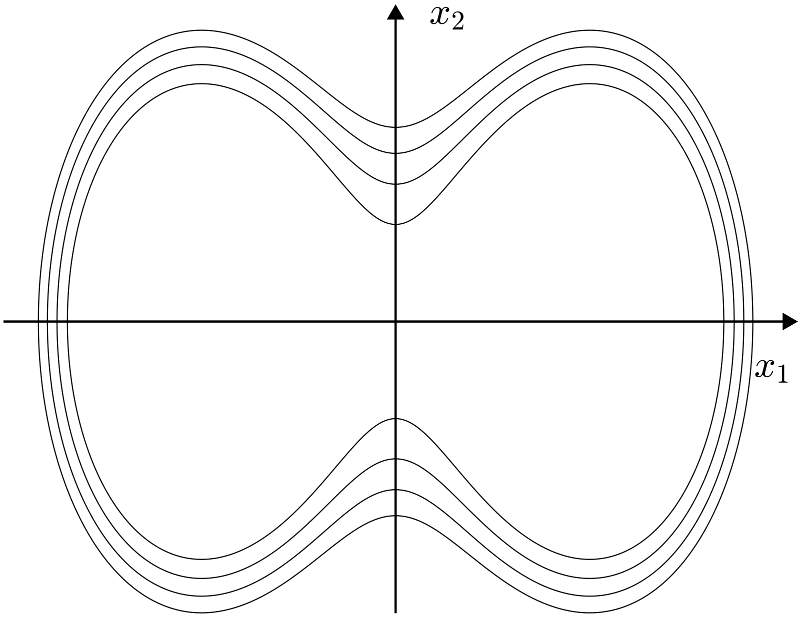
$$\sqrt{d^2 + x_1^2} \le l_0 + \sqrt{\frac{cm}{k} + (l_0-d)^2}.$$

Zde lze však provést podobné úpravy jako v případě $\mathbf{a_1}$ (místo (3.17) použijeme podmínku $c > 0$) a pro x_1 dostaneme tak podmínku (3.20).

Pomocí předpisu (3.11) pro x_2 a podmínky (3.20) pro x_1 jsou hladiny explicitně popsány pro $c > 0$. Hladiny $\mathcal{H}_c$ pro některá $c > 0$ jsou znázorněny na obrázku 3.4.

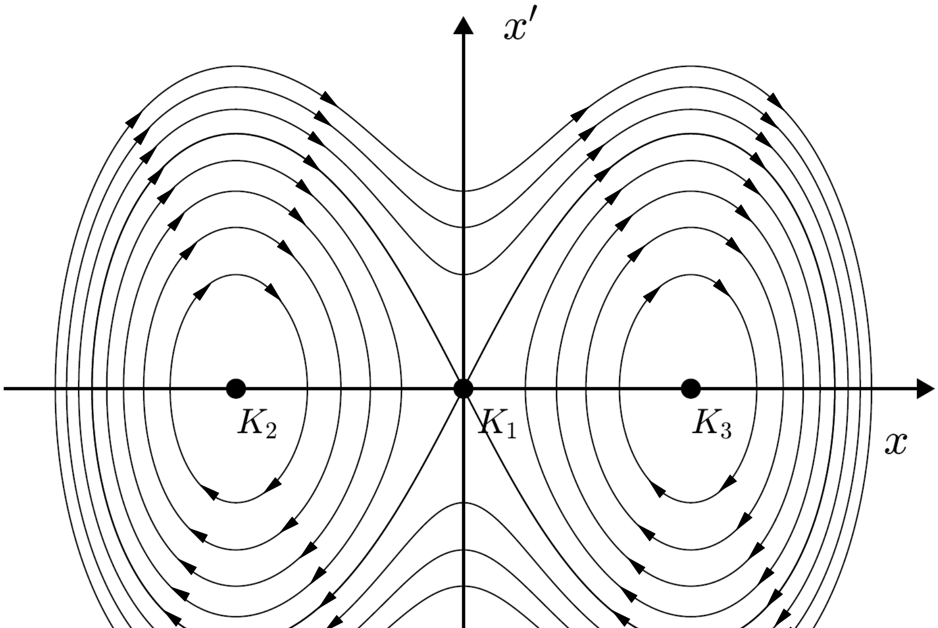
3.1.3 Fázový portrét

V předešlé části jsme popsali v explicitním tvaru všechny hladiny hamiltoniánu soustavy (3.2). Z kapitoly 2.1.3 víme (viz důsledek 2.16), že každá orbita je obsažena v některé hladině hamiltoniánu. Pohyb bodu (x_1, x_2) na orbitě pro rostoucí t vyznačíme šipkou



Obrázek 3.4: Hladiny $\mathcal{H}_c$ pro $c > 0$

a dostáváme fázový portét soustavy (3.2) a tím také fázový portrét autonomní diferenciální rovnice (3.1), tj. pohybové rovnice (1.7) nelineárního oscilátoru, viz obrázek 3.5



Obrázek 3.5: Fázový portrét pohybové rovnice nelineárního oscilátoru

Víme, že uzavřené křivky odpovídají orbitám periodických řešení. Můžeme tedy prohlásit, že všechna řešení autonomní rovnice (3.1) (tj. je-li $d(t) \equiv$ konst.) kromě těch, které odpovídají hladinám $\mathcal{H}_0$ a $\mathcal{H}_{-\frac{k}{m}(l_0-d)^2}$ jsou nekonstantní periodická řešení.

Hladina $\mathcal{H}_{-\frac{k}{m}(l_0-d)^2}$ obsahuje pouze kritické body K_2, K_3 a ty odpovídají konstantním nenulovým řešením autonomní rovnice (3.1).

Hladina $\mathcal{H}_0$ obsahuje kritický bod K_1 odpovídající nulovému řešení autonomní rovnice (3.1) a dvě homoklinické orbity, ty odpovídají nekonstantním řešením autonomní rovnice (3.1), které pro $t \to -\infty$ a $t \to \infty$ konvergují ke stejné hodnotě (v našem případě k 0).

3.2 Neautonomní případ

Z analýzy provedené v předešlé části vyplývá, že všechna řešení autonomní diferenciální rovnice (3.1), s vyjímkou homoklinických řešení, jsou periodická. V této části se budeme věnovat otázce existence ω-periodických řešení neautonomní diferenciální rovnice (3.1). Otázka existence periodických řešení s periodou právě ω je přirozená, neboť je ω-periodická funkce d v rovnici (3.1).

Uveďme nejprve jednoduché lemma.

Lemma 3.1. *Jestliže $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je $\omega-$periodické řešení rovnice* (3.1), *potom zúžení funkce u na interval $[0, \omega]$ je řešení periodické okrajové úlohy*

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{2k}{m} u \left(\frac{l_0}{\sqrt{d^2(t) + u^2}} - 1 \right), \\ u(0) &= u(\omega), \quad u'(0) = u'(\omega). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Naopak, je-li u řešení periodické úlohy (3.21), *pak $\omega-$periodické prodloužení u na $\mathbb{R}$ je $\omega-$periodickým řešením rovnice* (3.1).

K důkazu existence řešení úlohy (3.21) použijeme větu 2.30. Nejprve ukážeme, že existují konstantní dolní a horní funkce periodické úlohy (3.21).

Tvrzení 3.2. *Existují dolní funkce α a horní funkce β periodické úlohy* (3.21) *splňující*

$$\alpha(t) > 0, \quad \beta(t) > 0 \text{ pro } t \in [0, \omega].$$

Důkaz. (i) Nejprve předpokládejme, že funkce $d(t) := d_0$ je konstantní. Pro dolní funkci α úlohy $u'' = f(u, t)$; $u(0) = u(\omega)$, $u'(0) = u'(\omega)$ požadujeme $\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t))$; $\alpha(0) = \alpha(\omega)$, $\alpha'(0) \geq \alpha'(\omega)$. V případě úlohy (3.21) tedy hledáme funkci α splňující

$$\alpha''(t) \geq \frac{2k}{m} \alpha(t) \left(\frac{l_0}{\sqrt{d_0^2 + \alpha^2(t)}} - 1 \right) \text{ pro } t \in [0, \omega] \,. \tag{3.22}$$

Položíme $\alpha(t) := 2\sqrt{l_0^2 - d_0^2}$. Ověříme, že

$$0 \geq \frac{2k}{m} 2\sqrt{l_0^2 - d_0^2} \left(\frac{l_0}{\sqrt{d_0^2 + 4(l_0^2 - d_0^2)}} - 1 \right).$$

V tomto výrazu jsou před závorkou kladné konstanty a odmocnina, tudíž k tomu aby byla tato nerovnost splněna musí být člen v závorce nekladný, tj.

$$\frac{l_0}{\sqrt{4l_0^2 - 3d_0^2}} - 1 \leq 0.$$

To však platí vždy, protože konstantní funkce d_0 je v našem případě vždy ostře menší než l_0. Funkce α tedy splňuje podmínku (3.22). Podmínky $\alpha(0) = \alpha(\omega)$, $\alpha'(0) \geq \alpha'(\omega)$ jsou splněny triviálně (α je nyní konstantní).

Nyní uvažujeme obecný případ, tj. nechť funkce $d : \mathbb{R} \to (0, l_0)$ je spojitá a ω-periodická. Označme

$$d_* := \min\{d(t) \mid t \in [0, \omega]\}.$$

Položme $\alpha(t) := 2\sqrt{l_0^2 - d_*^2}$. Vzhledem k výše dokázanému máme

$$\alpha''(t) \geq \frac{2k}{m}\alpha(t)\left(\frac{l_0}{\sqrt{d_*^2 + \alpha^2(t)}} - 1\right) \text{ pro } t \in [0, \omega]\,. \tag{3.23}$$

Jelikož $d_* \leq d(t)$ pro všechna $t \in [0, \omega]$, platí

$$\frac{l_0}{\sqrt{d_*^2 + \alpha^2(t)}} - 1 \geq \frac{l_0}{\sqrt{d^2(t) + \alpha^2(t)}} - 1 \text{ pro všechna } t \in [0, \omega]\,.$$

Tudíž $\alpha(t) = 2\sqrt{l_0^2 - d_*^2}$ je vzhledem k (3.23) kladnou dolní funkcí úlohy (3.21).

(*ii*) Podobně postupujeme u horní funkce β úlohy (3.21). Opět nejprve předpokládáme, že funkce $d(t) := d_0$ je konstantní. Z definice vyplývá, že hledáme funkci β splňující

$$\beta''(t) \leq \frac{2k}{m}\beta(t)\left(\frac{l_0}{\sqrt{d_0^2 + \beta^2(t)}} - 1\right) \text{ pro } t \in [0, \omega]\,. \tag{3.24}$$

Položme $\beta(t) := \frac{1}{2}\sqrt{l_0^2 - d_0^2}$. Ověříme, že

$$0 \leq \frac{k}{m}\sqrt{l_0^2 + d_0^2}\left(\frac{l_0}{\sqrt{d_0^2 + \frac{1}{4}(l_0^2 - d_0^2)}} - 1\right).$$

Výrazy před závorkou jsou vždy kladné, tudíž proto aby nerovnost platila, musí být výraz v závorce vždy nezáporný, tj.

$$\frac{l_0}{\sqrt{\frac{1}{4}l_0^2 + \frac{3}{4}d_0^2}} - 1 \geq 0.$$

Protože $l_0 > d_0 > 0$, hodnota výrazu pod odmocninou je ostře menší než l_0^2. Tím pádem po umocnění dělíme čitatel číslem menším než je l_0. To znamená, že hodnota zlomku na levé straně bude vždy větší než 1. Funkce β tedy splňuje podmínku (3.24).

Dále uvažujme funkci $d : \mathbb{R} \to (0, l_0)$ spojitou a ω-periodickou. Označme

$$d^* := \max\{d(t) \,|\, t \in [0, \omega]\}.$$

Položme $\beta(t) := \frac{1}{2}\sqrt{l_0^2 - d^{*2}}$. Vzhledem k výše dokázanému máme

$$\beta''(t) \leq \frac{2k}{m}\beta(t)\left(\frac{l_0}{\sqrt{d^{*2} + \beta^2(t)}} - 1\right) \text{ pro } t \in [0, \omega]\,. \tag{3.25}$$

Jelikož $d(t) \leq d^*$ pro všechna $t \in [0, \omega]$, platí

$$\frac{l_0}{\sqrt{d^{*2} + \beta^2(t)}} - 1 \leq \frac{l_0}{\sqrt{d^2(t) + \beta^2(t)}} - 1 \text{ pro všechna } t \in [0, \omega] \,.$$

Funkce $\beta(t) := \frac{1}{2}\sqrt{l_0^2 - d^{*2}}$ je vzhledem k (3.25) kladnou horní funkcí úlohy (3.21). $\square$

Sestrojili jsme horní a dolní funkce úlohy (3.21), které splňují $\alpha(t) > \beta(t)$ pro $t \in [0, \omega]$. V takovém případě obvykle říkáme, že α, β tvoří opačně uspořádaný pár dolních a horních funkcí.

Věta 3.3. *Nechť* $\omega < \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$. *Potom má rovnice* (3.1) *alespoň jedno netriviální* ω*-periodické řešení.*

Důkaz. Položme

$$f(t, z) := \frac{2k}{m} z \left(\frac{l_0}{\sqrt{d^2(t) + z^2}} - 1 \right) \quad \text{pro } t \in [0, \omega] \text{ a } z \in \mathbb{R}.$$

Dostáváme

$$f(t, z) \operatorname{sgn} z = \frac{2k}{m} |z| \left(\frac{l_0}{\sqrt{d^2(t) + z^2}} - 1 \right).$$

Odtud vyplývá

$$f(t, z) \operatorname{sgn} z \geq -\frac{2k}{m} |z| \quad \text{pro } t \in [0, \omega], z \in \mathbb{R}.$$

Platí tedy podmínka (2.13), kde $p(t) = -\frac{2k}{m}$ a $q(t, z) = 0$ pro $t \in [0, \omega], z \in \mathbb{R}$. Zřejmě funkce q splňuje podmínky (2.14) a (2.15).

Jelikož předpokládáme $\omega < \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$, z věty 2.36 dostáváme, že p patří do množiny $\operatorname{Int} \mathcal{V}^+(\omega)$. Navíc, tvrzení 3.2 zaručí existenci kladných horních a dolních funkcí úlohy (3.21). Jsou proto splněny všechny předpoklady věty 2.30 a tudíž existuje řešení u úlohy (3.21). Protože $\alpha > 0, \beta > 0$, toto řešení nabývá někde na intervalu $[0, \omega]$ kladné hodnoty (je tedy netriviální). Podle lemmatu 3.1 má proto rovnice (3.1) alespoň jedno netriviální ω-periodické řešení.

$\square$

Je-li funkce d v rovnici (3.1) konstantní, z věty 3.3 vyplývá, že pro každé $\omega < \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ má autonomní rovnice

$$u'' = \frac{2k}{m} \left(\frac{l_0}{\sqrt{d^2 + u^2}} - 1 \right) \tag{3.26}$$

alespoň jedno netriviální ω-periodické řešení. V autonomním případě však platí daleko silnější tvrzení. Z kapitoly 3.1 víme, že rovnice (3.26) má kladné ekvilibrium a tudíž má rovnice (3.26) alespoň jedno kladné ω-periodické řešení pro každé $\omega > 0$.

Omezení na ω ve větě 3.3 neumíme jednoduše odstranit, protože souvisí s předpokladem $p \in \operatorname{Int} \mathcal{V}^+(\omega)$ ve větě 2.30, kterou používáme. Avšak aplikujeme-li větu 2.30 na vhodnou pomocnou úlohu, lze tvrzení věty 3.3 zesílit o kladnost ω-periodického řešení.

Věta 3.4. *Nechť platí* $\omega < \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$. *Pak má rovnice* (3.1) *alespoň jedno kladné* ω*-periodické řešení.*

Důkaz. Uvažujme pomocnou periodickou úlohu

$$u'' = \frac{2k}{m}[u]_+ \left(\frac{l_0}{\sqrt{d^2(t) + u^2}} - 1 \right), \qquad u(0) = u(\omega), \quad u'(0) = u'(\omega), \tag{3.27}$$

kde $[z]_+ = \frac{|z|+z}{2}$ pro $z \in \mathbb{R}$.

Z tvrzení 3.2 vyplývá, že existují kladné dolní a horní funkce úlohy (3.21), ty zřejmě budou také dolní a horní funkce úlohy (3.27). Položme

$$f(t,z) = \frac{2k}{m}[z]_+ \left(\frac{l_0}{\sqrt{d^2(t) + z^2}} - 1 \right).$$

Zřejmě

$$f(t,z)\operatorname{sgn} z = \frac{2k}{m}[z]_+ \operatorname{sgn} z \left(\frac{l_0}{\sqrt{d^2(t) + z^2}} - 1 \right) \text{ pro } t \in [0,\omega], z \in \mathbb{R}.$$

Pro $z \geq 0$ dostáváme

$$f(t,z)\operatorname{sgn} z = \frac{2k}{m}|z| \left(\frac{l_0}{d^2(t) + z^2} - 1 \right),$$

odtud vyplývá

$$f(t,z)\operatorname{sgn} z \geq -\frac{2k}{m}|z| \text{ pro } t \in [0,\omega]\,, z \geq 0.$$

Pro $z < 0$ máme $[z]_+ = 0$, proto

$$f(t,z)\operatorname{sgn} z = 0 \geq -\frac{2k}{m}|z| \text{ pro } t \in [0,\omega]\,, z < 0.$$

Platí tedy podmínka (2.13), kde $p(t) = -\frac{2k}{m}$ a $q(t,z) = 0$ pro $t \in [0,\omega]$ a $z \in \mathbb{R}$. Jelikož předpokládáme $\omega < \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$, z věty 2.36 plyne $p \in \operatorname{Int} \mathcal{V}^+(\omega)$. Funkce q zřejmě splňuje podmínky (2.14) a (2.15). Jsou tedy splněny předpoklady věty 2.30, úloha (3.27) má tudíž alespoň jedno řešení u nabývající někde v $[0,\omega]$ kladné hodnoty. Podle lemmatu 3.1 proto ω-periodické prodloužení funkce u na $\mathbb{R}$ je ω-periodickým řešením rovnice

$$u'' = \frac{2k}{m}[u]_+ \left(\frac{l_0}{\sqrt{d^2(t) + u^2}} - 1 \right) \tag{3.28}$$

splňujícím

$$u(t^*) > 0 \text{ pro nějaké } t^* \in \mathbb{R}. \tag{3.29}$$

Připusťme, že řešení u nabývá také záporných hodnot. O řešení u víme, že je spojité a ω-periodické. Proto, vzhledem k (3.29), existují $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$u(t) < 0 \qquad \text{pro } t \in (t_1,t_2)\,, \; u(t_1) = 0, \; u(t_2) = 0. \tag{3.30}$$

Zároveň však víme, že u je řešením na celém intervalu $\mathbb{R}$, tedy i na $[t_1,t_2]$. Podle definice kladné části ale dostaneme

$$[u(t)]_+ \equiv 0 \text{ na } [t_1,t_2],$$

a proto z (3.28) plyne

$$u''(t) = 0 \text{ pro } t \in [t_1, t_2],$$

což je spor s (3.30). To znamená, že řešení u rovnice (3.28) splňuje

$$u(t) \geq 0 \quad \text{ pro } t \in \mathbb{R}.$$

Odtud plyne $[u(t)]_+ \equiv u(t)$ na $\mathbb{R}$ a u je tudíž ω-periodickým řešením rovnice (3.1).

Zbývá ukázat, že $u(t) > 0$ pro $t \in \mathbb{R}$. Připusťmě sporem, že existuje $t_0 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$u(t_0) = 0.$$

Pak také

$$u'(t_0) = 0.$$

To ale znamená, že u je řešením lineární Cauchyovy úlohy

$$w'' = \frac{2k}{m}\left(\frac{l_0}{\sqrt{d^2(t) + u^2(t)}} - 1\right)w,$$
$$w(t_0) = 0, \quad w'(t_0) = 0.$$

Tato úloha má však pouze triviální řešení, což je ve sporu s (3.29). $\square$

Závěr

V první kapitole byla odvozena nelineární diferenciální rovnice mechanického oscilátoru a to v autonomním i neautonomním případě.

V druhé kapitole jsou uvedeny vybrané pojmy z teorie dynamických systémů, zejména poznatky související s Hamiltonovými systémy a konstrukcí fázového portrétu. Dále je stručně uveden princip metody dolních a horních funkcí. Kapitola pokračuje existenční větou pro opačně uspořádané dolní a horní funkce. Pro konstantní funkci p je dále uvedeno a dokázáno tvrzení dávající nutnou a postačující podmínku zaručující inkluzi $p \in \mathcal{V}^+(\omega)$.

Třetí kapitola byla věnována kvalitativní analýze nelineární diferenciální rovnice modelu vybraného oscilátoru. V autonomní části je provedeno vyšetření kritických bodů, poté rozbor hladin hamiltioniánu, konstrukce fázového portétu. Z něj jsme zjistili, že všechna řešení autonomní rovnice až na ty které odpovídají hladinám hamiltoniánu v kritických bodech jsou nekonstantní periodická řešení. Řešení odpovídající hladinám hamiltoniánu s kritickými body K_2, K_3 odpovídají konstantním nenulovým řešením. Zbývající hladina hamiltoniánu obsahuje kritický bod K_1 odpovídající nulovému řešení a dvě homoklinické orbity.

V neautonomní části jsme nejprve dokázali existenci dolní a horní funkce odpovídající periodocké okrajové úlohy. Ty tvoří opačně uspořádaný pár. Dále jsme uvedli postačující podmínku pro existenci alespoň jednoho netriviálního $\omega-$periodického řešení. Tvrzení této věty bylo dále zesíleno o kladnost $\omega-$periodického řešení.

V této práci by se dalo pokračovat například odvozením vztahů pro výpočet periody řešení v autonomním případě. V neautonomním případě bychom mohli hledat podmínky jednoznačnosti kladného ω-periodického řešení, nebo podmínky existence ω-periodických řešení střídající znaménko.

Reference

[1] HABETS, Patrick a DE COSTER, Collete. *Two-point boundary value problem: lower and upper solutions*, Mathematics in Science and Engineering, 205, Elsevier B.V., Amsterdam, 2006, ISBN 978-0-444-52200-9.

[2] KIGURADZE, Ivan. *Okrajové úlohy pro systémy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic*. Brno: Masarykova univerzita, 1997. ISBN 80-210-1664-7.

[3] LOMTATIDZE, Alexander. *On periodic boundary value problem for second-order ordinary differential equations.* Communications in Contemporary Mathematics [online]. 2019 [cit. 2020-06-26]. DOI: 10.1142/S0219199719500494. ISSN 0219-1997. Dostupné z: https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219199719500494

[4] LOMTATIDZE, Alexander. *Theorems on differential inequalities and periodic boundary value problem for second-order ordinary differential equations*, Mem. Differential Equations Math. Phys. **67** (2016), 1–129.

[5] RACHŮNKOVÁ, Irena a FIŠER, Jiří. *Dynamické systémy 1*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2014. ISBN 978-80-244-4338-6.