



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

VÝPOČET TUHOSTI VALIVÝCH LOŽISEK

ROLLING BEARING STIFFNESS CALCULATION

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Tomáš Koban

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Petr Lošák, Ph.D.

BRNO 2023

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Bc. Tomáš Koban
Studijní program:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Studijní obor:	Inženýrská mechanika
Vedoucí práce:	Ing. Petr Lošák, Ph.D.
Akademický rok:	2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Výpočet tuhosti valivých ložisek

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Valivá ložiska představují nejpoužívanější druh vazby mezi rotující a nerotující části v mnoha rotačních strojích. Z pohledu rotorové dynamiky je potřeba znát jejich tuhost, která může významně ovlivnit kritické otáčky stroje. Existují různé přístupy, pomocí kterých lze tuhost stanovit. Některé jsou založené na empirických vztazích, jiné na Hertzově teorii styku těles, případně může být tuhost počítána pomocí metody konečných prvků.

Cíle diplomové práce:

Cílem práce je jednak prozkoumat a popsat možnosti a současné přístupy pro stanovení tuhosti valivých ložisek, dále vytvořit program, který na základě zvolených přístupů bude počítat tuhost valivých (zejména kuličkových a válečkových) ložisek a takto získané výsledky porovnat s výsledky výpočtu tuhosti zvoleného ložiska pomocí metody konečných prvků.

Seznam doporučené literatury:

KICIŇSKI Jan, Rotor Dynamics, Wydawn. IMP PAN, 2006

VANCE John, Machinery Vibration and Rotordynamics, Wiley 2010, ISBN 978-0-471-46213-2

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2022/23

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D. ředitel
děkan fakulty

ABSTRAKT

Táto práca prezentuje analytický prístup pre stanovenie statickej tuhosti guľkových a valčekových valivých ložísk. Boli vytvorené 3 matematické modely pre prípady axiálneho, radiálneho a kombinovaného zaťaženia. Všetky predstavené modely využívajú Hertzovu kontaktnú teóriu pre popis kontaktu valivých elementov s ložiskovými prstencami. Analytický výpočet je následne porovnaný s MKP simuláciou. Práca detailne popisuje proces tvorby statickej numerickej analýzy valivého ložiska. Porovnanie analytického a numerického výpočtu je prezentované pre jednoradové guľkové ložisko s kosouhlým stykom 7304 BECBM a jednoradové radiálne valčekové ložisko NU 202 ECP. Je prezentované dôkladné porovnanie jednotlivých modelov z hľadiska veľkosti posuvov a deformácií, rozloženia vnútorných síl v ložisku a výslednej tuhosti ložiska.

KLÚČOVÉ SLOVÁ

Valivé ložiská, guľkové a valčekové ložiská, tuhosť ložiska, analytický prístup, MKP

ABSTRACT

In this thesis, an analytical approach for calculating the bearing stiffness of ball and cylindrical roller bearings is presented. Three mathematical models have been developed for the case of axial, radial and combined loading. All presented models use Hertz contact theory for determining the roller-raceway contact behavior. Analytical approach is then compared with FEA results. The static numerical simulation of a roller bearing is detailly described. The comparison between analytical and numerical approach is presented for single-row angular contact ball bearing 7304 BECBM and single-row radial cylindrical roller bearing NU 202 ECP. The results show a comprehensive comparison of bearing deflections, internal load distribution and bearing stiffness for each model.

KEYWORDS

Roller bearings, ball bearings and cylindrical roller bearings, bearing stiffness, analytical approach, FEA

BIBLIOGRAFICKÁ CITÁCIA

KOBAN, Tomáš. *Výpočet tuhosti valivých ložisek* [online]. Brno, 2023 [cit. 2023-05-07]. Dostupné z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/152566>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedúci práce Petr Lošák.

POĎAKOVANIE

Na tomto mieste by som rád poďakoval Ing. Petrovi Lošákovi Ph.D. za jeho odborné a zodpovedné vedenie. Okrem cenných poznatkov a pripomienok mi jeho ľudský a priateľský prístup vždy poskytol povzbudenie pri vypracovávaní tejto záverečnej práce. Ďalej by som sa chcel poďakovať Ing. Barbore Thomkovej, ktorá mi ochotne poskytla pomocnú ruku v časoch núdze. V neposlednom rade by som chcel vyjadriť veľkú vďaku celej mojej rodine, ktorá pre mňa predstavovala obrovskú oporu počas štúdia a aj mimo neho.

VYHLÁSNEIE AUTORA O PÔVODNOSTI PRÁCE

Vyhlasujem, že diplomovú prácu som vypracoval samostatne, pod odborným vedením Ing. Petra Lošáka, Ph.D. Súčasne vyhlasujem, že všetky zdroje obrázkových a textových informácií, z ktorých som čerpal, sú riadne citované v zozname použitých zdrojov.

.....
Podpis autora

1 OBSAH

1	OBSAH	11
2	ÚVOD	12
3	POPIS PROBLÉMOVEJ SITUÁCIE	13
4	FORMULÁCIA PROBLÉMU A CIELE PRÁCE	14
5	PREHĽAD SÚČASNÉHO STAVU POZNANIA	15
5.1	VŠEOBECNE O VALIVÝCH LOŽISKÁCH	15
5.2	GEOMETRIA VALIVÝCH LOŽÍSK	16
5.2.1	<i>Gulkové ložiská</i>	16
5.2.2	<i>Valčekové ložiská</i>	17
5.3	SILOVÉ PÔSOBENIE NA VALIVÝ ELEMENT.....	17
5.3.1	<i>Statické zaťaženie</i>	17
5.3.2	<i>Dynamické zaťaženie</i>	19
5.4	KONTAKTNÁ DEFORMÁCIA VALIVÝCH ELEMENTOV.....	20
5.5	DISTRIBÚCIA ZAŤAŽENIA V LOŽISKU	24
5.5.1	<i>Axiálne zaťaženie</i>	24
5.5.2	<i>Radiálne zaťaženie</i>	25
5.5.3	<i>Kombinované radiálne a axiálne zaťaženie</i>	28
5.6	STANOVENIE TUHOSTI VALIVÝCH LOŽÍSK	30
6	POPIS RIEŠENIA PROBLÉMU	33
6.1	POPIS VYBRANÝCH MATEMATICKÝCH METÓD	33
6.1.1	<i>Model 1 – axiálna tuhosť ložiska</i>	33
6.1.2	<i>Model 2 – radiálna tuhosť ložiska</i>	35
6.1.3	<i>Model 3 – tuhosť ložiska pri kombinovanom zaťažení</i>	37
6.2	RIEŠENIE POMOCOU MKP.....	41
6.2.1	<i>Model ložiska 7304 BECBM</i>	41
6.2.2	<i>Model ložiska NU 202 ECP</i>	47
7	PREZENTÁCIA DOSIAHNUTÝCH VÝSLEDKOV	52
7.1	VÝSLEDKY PRE LOŽISKO 7304 BECBM	52
7.2	VÝSLEDKY PRE LOŽISKO NU 202 ECP	58
8	DISKUSIA	62
9	ZÁVER	64
10	ZOZNAM POUŽITÝCH ZDROJOV	65
11	ZOZNAM POUŽITÝCH SKRATIEK, SYMBOLOV A VELIČÍN	68
12	ZOZNAM OBRÁZKOV A GRAFOV	72
13	ZOZNAM TABULIEK	74
14	ZOZNAM PRÍLOH	75

2 ÚVOD

Ložiská predstavujú jedny zo základných elementov strojných mechanizmov. Používajú sa v bežných komerčných produktoch, ale aj v komplexných strojných zostavách ako turbíny, čerpadlá, elektromotory alebo vretená obrábacích strojov. Primárnym účelom ložísk je poskytovať oporu rotujúcim komponentom a zároveň prenášať zaťaženie medzi jednotlivými súčasťami mechanizmu.

Najpoužívanejším typom ložísk sú ložiská valivé. Princíp valivých ložísk je jednoduchý a bol objavený už v starovekých civilizáciách. Je založený na skutočnosti, že trecie odporové sily sú násobne nižšie pri valivom pohybe telesa ako pri jeho šmýkaní. Valivé ložiská sa vyznačujú vysokou presnosťou a nízkym trením, čo umožňuje ich použitie aj v náročných pracovných podmienkach pri zachovaní nízkej miery hluku, vibrácií, opotrebenia a vytváraného tepla.

V súčasnosti je možný výber zo širokej škály valivých ložísk. Ložiská sa od seba odlišujú rozmermi, geometriou, materiálom, spôsobom mazania atď. Každý typ ložiska sa vyznačuje istými charakteristickými vlastnosťami, čo umožňuje zvoliť ložisko, ktoré bude pre danú konkrétnu aplikáciu najvhodnejšie. V priebehu procesu voľby ložiska je potrebné zohľadniť množstvo faktorov a nájdenie vhodného ložiska môže v istých situáciách zaberať množstvo iterácií.

Jedným z dôležitých parametrov, ktoré je pri procese voľby ložiska nutné zohľadniť, je tuhosť. Tuhosť ložiska vyjadruje jeho odolnosť voči posuvom a deformáciám pri pôsobení vonkajšieho zaťaženia. Tento parameter je kľúčový z hľadiska rozloženia vnútorných síl v ložisku, od čoho priamo závisí opotrebenie a životnosť celého ložiska. Ďalej je tuhosť ložiska spätá s mierou hluku a vibrácií, dynamickými vlastnosťami ako je hodnota kritických otáčok a dynamická stabilita ložiska alebo s presnosťou uloženia. Snaha o korektný popis tuhostných vlastností valivých ložísk je teda očividná.

3 POPIS PROBLÉMOVEJ SITUÁCIE

Proces voľby ložiska je v súčasnosti značne komplexný a vstupuje doňho množstvo parametrov. Stanovenie pracovných parametrov a popis chovania valivých ložísk častokrát vedie ku komplikovaným výpočtom, ktoré si vyžadujú pokročilé numerické metódy alebo simulácie. Avšak v mnohých prípadoch je vhodné valivé ložisko volené iteračne, a teda je nutné vykonávať výpočet pre ložisko opakovane. To však vedie k vysokej výpočtovej a časovej náročnosti. Preto zjednodušený analytický výpočet, ktorý síce neposkytuje tak presné výsledky ako numerická analýza, môže pre inžinierov predstavovať vhodnú alternatívu vďaka nižšej výpočtovej náročnosti.

Aj napriek jednoduchému mechanickému princípu korektne analyzovať chovanie valivého ložiska pri zaťažení sa ukazuje ako komplexný problém. Tuhosť valivého ložiska sa odvíja od rozloženia vonkajšieho zaťaženia medzi jednotlivé valivé elementy, čo však vedie k riešeniu neľahkej staticky neurčitej úlohy. Navyše sa ukazuje, že tuhosť ložiska vykazuje značne nelineárne chovanie spôsobené nelineárnym charakterom kontaktu medzi valivými elementami a ložiskovými prstencami. Výrobcovia valivých ložísk vo všeobecnosti neposkytujú hodnoty tuhosti a ak áno, tak iba pre špecifické prípady zaťaženia. To však pre inžinierov častokrát nie je postačujúce, a tak je žiadúce preskúmať ďalšie možnosti a prístupy pre analytické stanovenie tuhosti valivých ložísk.

4 FORMULÁCIA PROBLÉMU A CIELE PRÁCE

Na základe popisu problémovej situácie je možné problém formulovať nasledovne:

Porovnanie rozličných analytických prístupov pre stanovenie tuhosti valivých ložísk z hľadiska presnosti a výpočtovej náročnosti.

Formulácia problému vedie k nasledujúcemu vymedzeniu cieľov diplomovej práce:

- 1.) Preskúmať a popísať možnosti stanovenia tuhosti valivých ložísk, primárne pre ložiská guľkové a valčekové.
- 2.) Implementovať vybrané metódy do výpočtového programu.
- 3.) Verifikovať analyticky získané výsledky za pomoci metódy konečných prvkov.

5 PREHĽAD SÚČASNÉHO STAVU POZNANIA

5.1 Všeobecne o valivých ložiskách

Valivé ložiská sa skladajú z vnútorného a vonkajšieho prstenca, valivých elementov a klietky. Relatívny otáčavý pohyb medzi vnútorným a vonkajším prstencom umožňuje odvaľovanie jednotlivých valivých elementov medzi dvoma prstencami pri zachovaní nízkeho trenia. Vnútorný prstenec je spravidla nalisovaný na hriadelí alebo čape a vonkajší prstenec je upnutý v housingu. Klietka slúži na rovnomerné rozmiestnenie valivých elementov čím dochádza k optimalizácii rozloženia vnútorných síl v ložisku. Klietka rovnako zaručuje, že sa valivé elementy počas operácie ložiska nebudú navzájom dotýkať.

Valivé ložiská rozdeľujeme podľa typu valivých elementov na:

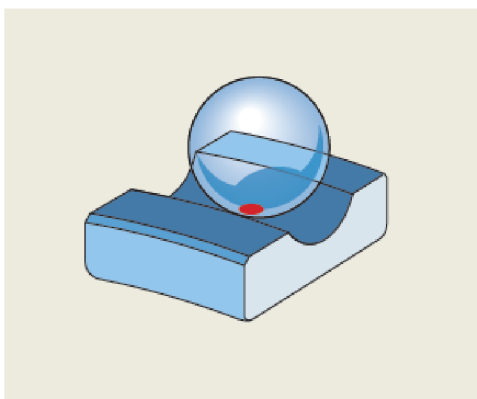
- Ložiská s bodovým stykom (gul'kové ložiská)
- Ložiská s čiarovým stykom (valčekové, súdkové, kužel'ové...)

Podľa smeru hlavného zaťaženia rozdeľujeme ložiská na:

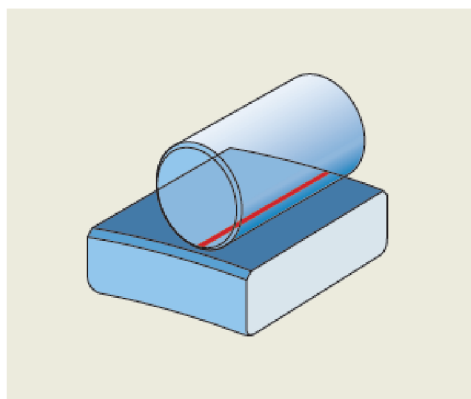
- Axiálne
- Radiálne

Axiálne ložiská prenášajú zaťaženie primárne v smere osi ložiska. Radiálne ložiská naopak prenášajú zaťaženie pôsobiace v smere kolmom na os ložiska. Potom existujú ložiská, ktoré sú špeciálne navrhnuté na prenos kombinovaného zaťaženia. Do tejto skupiny patria napríklad gul'kové ložiská s kosouhlým stykom. Ďalej je možné ložiská rozdeliť podľa počtu obežných dráh na jednoradové, dvojradové alebo viacradové [1].

(a)



(b)



Obr. 5-1 Typ valivého ložiska: (a) s bodovým stykom; (b) s čiarovým stykom [1]

5.2 Geometria valivých ložísk

V prípade rozboru rozloženia vnútorných síl a posuvov v ložisku je korektný popis vnútornej geometrie ložiska kľúčový. Keďže existujú ložiská s rozličnými tvarmi valivých elementov a vzťahy popisujúce vnútornú geometriu ložiska sú priamo späté s tvarom valivého elementu, pozornosť bude zameraná na guľkové a valčekové ložiská, ktoré predstavujú najpoužívanejšie typy valivých ložísk.

5.2.1 Guľkové ložiská

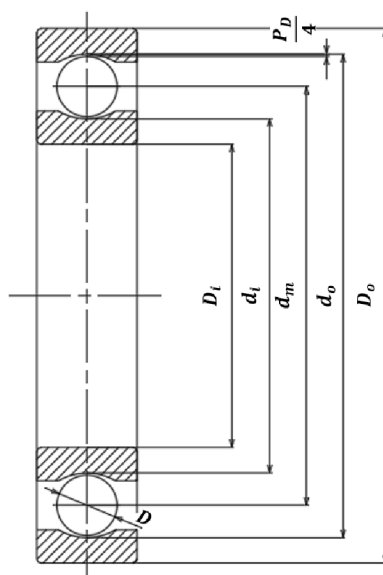
Na obrázku 5-2 je znázornený prierez jednoradového radiálneho guľkového ložiska. Rozteč ložiska je daná [2]:

$$d_m = \frac{1}{2}(d_i + d_o) \quad (5.1)$$

Radiálna vôľa ložiska je určená vzťahom:

$$P_D = d_o - d_i - 2D \quad (5.2)$$

kde d_o , d_i sú kontaktné priemery drážok vonkajšieho a vnútorného prstenca a D je priemer guľčičky. Radiálna vôľa ložiska predstavuje maximálnu vzdialenosť, o ktorú sa môže jeden ložiskový prstenec posunúť voči druhému v nezaťaženom stave. Veľkosť vnútornej vôle je jedným z najdôležitejších parametrov z hľadiska distribúcie zaťaženia medzi jednotlivé valivé elementy [1].

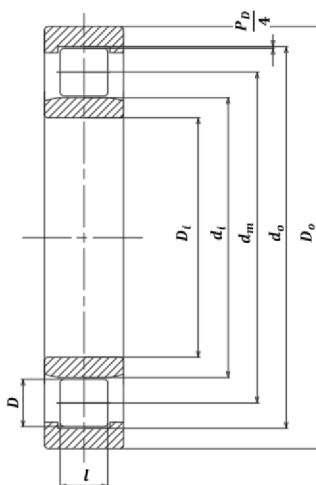


Obr. 5-2 Prierez jednoradového radiálneho guľkového ložiska

Stykový uhol ložiska je charakterizovaný ako uhol medzi rovinou kolmou na os ložiska a úsečkou spájajúcou bod dotyku guľičky s vnútorným a vonkajším prstencom. Hodnota stykového uhlu stanovuje vhodnosť ložiska pre daný smer zaťaženia. Platí, že čím je stykový uhol väčší, tým je vyššia axiálna únosnosť ložiska [1]. Pre čisto radiálne ložiská teda platí $\alpha = 0^\circ$, pre čisto axiálne ložiská $\alpha = 90^\circ$. Pre guľkové ložiská s kosouhlým stykom, ktoré sa používajú v prípade kombinácie axiálneho a radiálneho zaťaženia, sa hodnota stykového uhlu zvyčajne pohybuje od 15° do 40° .

5.2.2 Valčekové ložiská

Prierez jednoradového radiálneho valčekového ložiska je znázornený na obrázku 5-3. Rovnice (5.1) a (5.2) sú platné aj pre valčekové ložiská. Rovnako platí aj pravidlo o hodnote stykového uhlu v závislosti na smere zaťaženia.



Obr. 5-3 Prierez jednoradového radiálneho valčekového ložiska

5.3 Silové pôsobenie na valivý element

Vonkajšie sily pôsobiace na valivé ložisko sú prenášané cez jednotlivé valivé elementy. Okrem statických síl, ktorými pôsobia ostatné časti mechanizmu na ložisko, sú valivé elementy vystavené aj dynamickému zaťaženiu, ktoré vyplýva z ich rotačného pohybu.

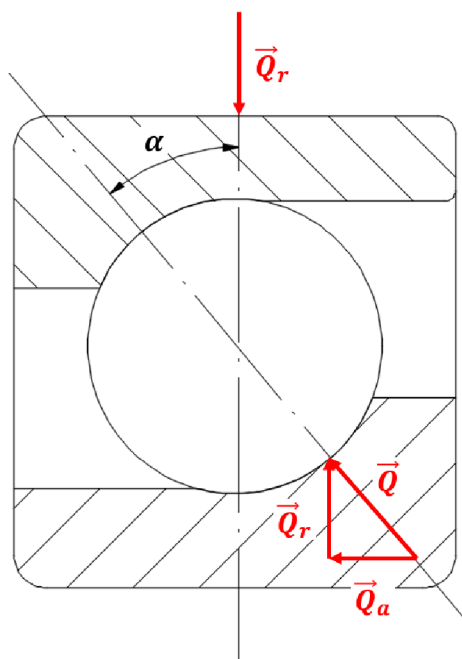
5.3.1 Statické zaťaženie

Valivý element prenáša silové zaťaženie v smere normály plochy styku elementu s ložiskovým prstencom. V prípade guľkových ložísk, ak je ložisko zaťažené čisto radiálnou silou, tak veľkosť reakčnej normálovej sily Q je daná:

$$Q = \frac{Q_r}{\cos\alpha} \quad (5.3)$$

Z obrázku 5-4 je zjavné, že ak hodnota stykového uhlu $\alpha \neq 0^\circ$, tak radiálne zaťaženie ložiska generuje reakčnú silu aj v axiálnom smere, ktorej veľkosť je daná rovnicou (5.4). V prípade zaťaženia ložiska axiálnou silou bude situácia obdobná, t.j. ak $\alpha \neq 90^\circ$ axiálne zaťaženie generuje reakčnú silu aj v radiálnom smere.

$$Q_a = Q \sin \alpha \quad (5.4)$$



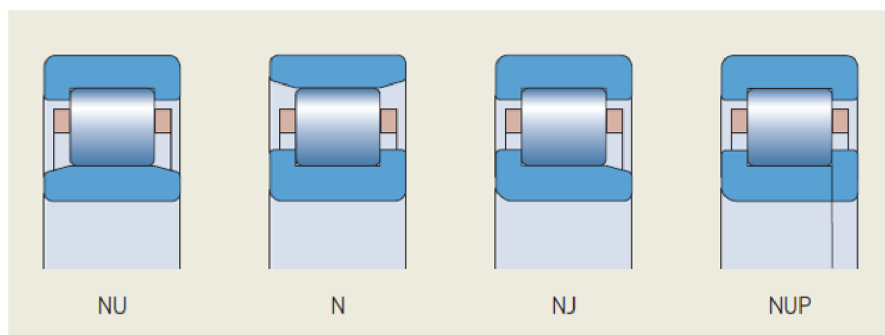
Obr. 5-4 Sily pôsobiace na valivý element s nenulovým stykovým uhlom pri radiálnom zaťažení ložiska

Jednoradové valčekové ložiská sú primárne určené iba na prenos zaťaženia v jednom smere (axiálnom alebo radiálnom). Radiálne valčekové ložiská sa vyskytujú s rôznymi prevedeniami bočnej príruby (Obr. 5-5). Typy NU a N nedokážu prenášať axiálne zaťaženie, pretože vnútornému alebo vonkajšiemu prstencu je umožnený voľný posuv v axiálnom smere. Typy NJ a NUP sú do určitej miery schopné prenášať axiálne zaťaženie. Avšak v prípade axiálneho zaťaženia môže dochádzať k „skríženiu“ valčekových elementov medzi prírubami jednotlivých prstencov, čo má za následok značnú generáciu tepla v ložisku a dochádza k rýchlemu opotrebeniu stykových povrchov. Rovnako rozloženie reakčných síl na valivom elemente pri axiálnom zaťažení sa stáva značne komplexným [2]. Vhodnou kombináciou tvaru bočných prírub a maziva je možné predísť týmto faktorom, avšak jedná sa o pomerne špecifické prípady použitia valčekových ložísk. Z týchto dôvodov bude u valčekových ložísk v ďalších častiach vždy uvažované čisto radiálne zaťaženie pri stykovom uhle $\alpha = 0^\circ$ alebo čisto axiálne zaťaženie pri stykovom uhle $\alpha = 90^\circ$. Potom hodnota reakčnej sily v smere normály je pri radiálnom zaťažení:

$$Q = Q_r \quad (5.5)$$

Pri axiálnom zaťažení:

$$Q = Q_a \quad (5.6)$$



Obr. 5-5 Prevedenie bočných prírúb jednoradových radiálnych valčekových ložísk [1]

5.3.2 Dynamické zaťaženie

Odstredivá sila vyplývajúca z rotácie valivých elementov okolo osi ložiska je daná:

$$F_c = \frac{1}{2} m d_m \omega_m^2 \quad (5.7)$$

kde m je hmotnosť valivého elementu a ω_m je uhlová orbitálna rýchlosť. Rovnica (5.7) je platná ako pre guľkové tak pre valčekové valivé elementy. Pre guľičky:

$$m_g = \frac{1}{6} \rho \pi D^3 \quad (5.8)$$

Pre valčeky:

$$m_v = \frac{1}{4} \rho \pi D^2 l \quad (5.9)$$

Gyroskopický moment vyplývajúci z rotácie valivého elementu okolo vlastnej osi je daný:

$$M_g = I \omega_R \omega_m \sin \beta \quad (5.10)$$

kde I je moment zotrvačnosti valivého elementu, ω_R je uhlová rýchlosť valivého elementu rotujúceho okolo vlastnej osi a β je uhol, ktorý zvierajú os rotácie elementu spolu s osou ložiska. Rovnica (5.10) je opäť platná pre guľkové aj valčekové valivé elementy. Pre guľičky.

$$I_g = \frac{1}{60} \rho \pi D^5 \quad (5.11)$$

Pre valčeky:

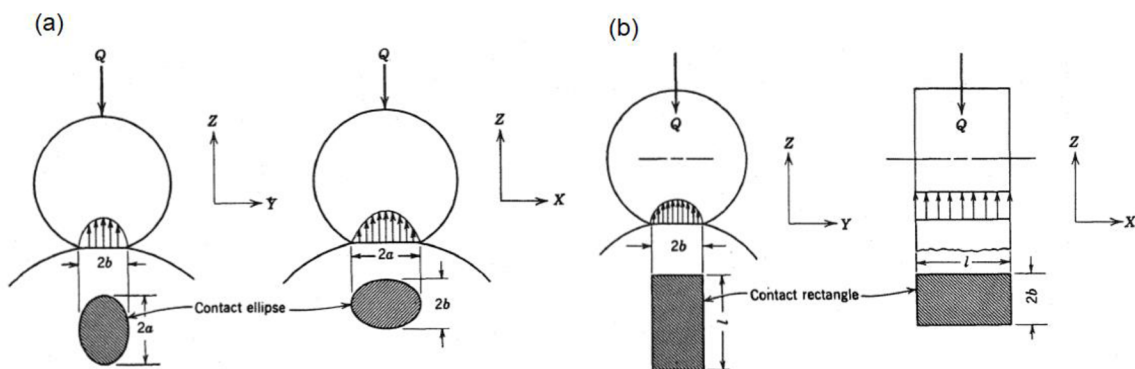
$$I_v = \frac{1}{32} \rho \pi l D^4 \quad (5.12)$$

Dynamické účinky sa prejavujú až pri vyšších pracovných otáčkach, a preto je možné ich v mnohých prípadoch zanedbať [3].

5.4 Kontaktná deformácia valivých elementov

V predchádzajúcej kapitole boli popísané sily pôsobiace na individuálny valivý element. V ložisku sa však nachádza niekoľko valivých elementov, medzi ktoré je rozdistribuované celkové zaťaženie ložiska. Aby bolo možné stanoviť, aké percento zaťaženia prenáša každý valivý element, je nutné porozumieť relácii medzi zaťažením a deformáciou individuálneho valivého elementu.

Ako bolo uvedené v stati 5.1, ložiská rozlišujeme podľa typu valivých elementov na ložiská s bodovým stykom a ložiská s čiarovým stykom. Avšak koncept bodového alebo čiarového styku predstavuje idealizovanú situáciu, kedy uvažujeme kontakt dvoch telies s bezchybnou geometriou v nezaťaženom stave. V realite sa pri aplikácii zaťaženia z bodu stáva elipsoidná plocha a z nekonečne tenkej čiary sa stáva plocha obdĺžniková (Obr. 5-6).



Obr. 5-6 Tvary stykových plôch a rozloženie tlakového napätia [2]: (a) bodový kontakt; (b) čiarový kontakt

Kontakt dvoch elastických telies je možné popísať pomocou tzv. Hertzovej kontaktnej teórie [4]. Relácia medzi zaťažením a deformáciou pri kontakte dvoch elastických telies je daná:

$$Q = K_d \delta_m^n \quad (5.13)$$

kde K_d je koeficient deformácie (zvykne sa označovať aj ako kontaktná tuhosť) a δ_m je maximálna styková deformácia, t.j. deformácia v geometrickom strede stykovej plochy. Pre guľkové ložiská $n = 1,5$ a pre valčekové ložiská $n = 1 \div 1,11$ [2][3].

Koeficient K_d pre guľkové valivé elementy je možné určiť nasledovne [5]:

$$K_d^g = \frac{\pi \kappa E'}{3\mathcal{F}} \sqrt{\frac{2\varepsilon R}{\mathcal{F}}} \quad (5.14)$$

kde E je redukovaný modul pružnosti dvoch stykových materiálov

R je redukovaný polomer krivosti

\mathcal{F} je eliptický integrál prvého druhu

ε je eliptický integrál druhého druhu

κ je parameter elipticity.

Redukovaný modul pružnosti vyjadruje celkovú materiálovú tuhosť dvoch telies, ktoré sú vo vzájomnom kontakte:

$$E' = \frac{2}{\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}} \quad (5.15)$$

kde E_1, E_2 a μ_1, μ_2 sú hodnoty modulu pružnosti a Poissonovho čísla materiálu guľičky a prstenca. Redukovaný polomer krivosti slúži k popisu geometrie kontaktu dvoch nerovinných telies (Obr. 5-7). V prípade styku guľičky a ložiskového prstenca je nutné uvažovať zakrivenie v dvoch rovinách. Preto platí:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_{1x} + R_{2x}} + \frac{1}{R_{1y} + R_{2y}} \quad (5.16)$$

Zaužívaná konvencia stanovuje, že pre konvexné povrchy priraďujeme polomeru krivosti kladné znamienko a pre povrchy konkávne naopak znamienko záporné. Potom je zjavné, že redukovaný polomer krivosti bude mať rozdielnu hodnotu pri kontakte guľičky s vnútorným a vonkajším prstencom. Kontakt guľičky s vnútorným prstencom sa označuje ako nekonformný a kontakt guľičky s vonkajším prstencom ako kontakt konformný. Platia nasledujúce vzťahy [2]:

$$R_{xi} = \frac{f_i D}{2f_i - 1} \quad (5.17)$$

$$R_{yi} = \frac{D(1 - \gamma)}{2} \quad (5.18)$$

$$R_{xo} = \frac{f_o D}{2f_o - 1} \quad (5.19)$$

$$R_{yo} = \frac{D(1 + \gamma)}{2} \quad (5.20)$$

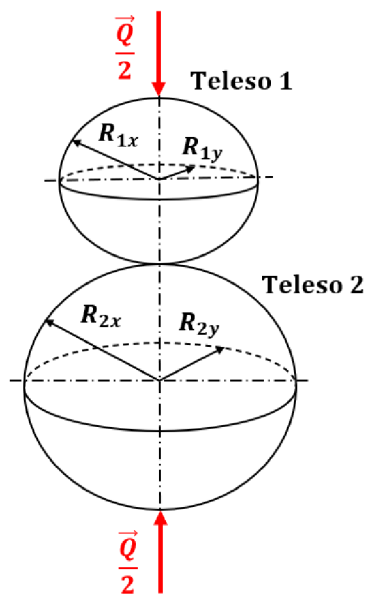
kde indexy i a o reprezentujú vnútorný a vonkajší prsteneč.

Veličiny γ a f predstavujú pomocné geometrické parametre:

$$\gamma = \frac{D \cos \alpha}{d_m} \quad (5.21)$$

$$f = \frac{r}{D} \quad (5.22)$$

kde r je polomer drážky ložiskového prstenca.



Obr. 5-7 Geometria telies v kontakte

Pre výpočet eliptických integrálov a parametru κ neexistuje všeobecné analytické riešenie. Hamrock a Brewe [6] pomocou metódy najmenších štvorcov stanovili aproximačné funkcie:

$$\kappa = \frac{a}{b} \approx 1.0339 \left(\frac{R_x}{R_y} \right)^{0.636} \quad (5.23)$$

$$\mathcal{F} = \int_0^{\pi/2} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \sin^2 \phi \right]^{-1/2} d\phi \approx 1.5277 + 0.6023 \ln \left(\frac{R_x}{R_y} \right) \quad (5.24)$$

$$\mathcal{E} = \int_0^{\pi/2} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \sin^2 \phi \right]^{1/2} d\phi \approx 1.0003 + \frac{0.5968}{\left(\frac{R_x}{R_y} \right)} \quad (5.25)$$

Veľkosť maximálnej stykovej deformácie pre líniový kontakt dvoch telies stanovili Lundberg a Sjövall [7]:

$$\delta_m = \frac{2Q}{\pi l_k E'} \ln \left[\frac{\pi E' l_k^2}{Q(1 \pm \gamma)} \right] \quad (5.26)$$

kde l_k je dĺžka kontaktu. Vyjadrenie deformačného koeficientu K_d pre líniový kontakt v tvare nezávislom na veľkosti normálového zaťaženia Q z rovnice (5.26) nie je možné. Preto Palmgren [8] zaviedol empirický vzťah pre výpočet koeficientu K_d platný pre oceľové valčekové ložiská:

$$K_d^v = 7,86 \times 10^4 l^{8/9} \quad (5.27)$$

Každý valivý element sa súčasne dotýka vnútorného a vonkajšieho prstenca. Preto celková kontaktná deformácia valivého elementu je rovná súčtu deformácií na vnútornom a vonkajšom prstenci [2]:

$$\delta_t = \delta_i + \delta_o \quad (5.28)$$

Dosadením rovnice (5.13) do (5.28) je možné vyjadriť výsledný koeficient deformácie K_t vyplývajúci z kontaktu valivého elementu s vnútorným a vonkajším prstencom:

$$K_t = \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{K_{di}}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{K_{do}}\right)^{\frac{1}{n}}} \right]^n \quad (5.29)$$

5.5 Distribúcia zaťaženia v ložisku

Pri rozbere rozloženia vnútorných síl v ložisku budú ložiskové prstence uvažované ako tuhé telesá. To má za následok, že kontaktné deformácie valivých elementov priamo vyjadrujú posuv jedného ložiskového prstenca voči druhému. Bežne sa zavádza predpoklad, že vonkajší ložiskový prstenec je pevne zaväzbený v priestore a posuv nastáva iba na vnútornom prstenci.

5.5.1 Axiálne zaťaženie

Pri axiálnom zaťažení ložiska sa centrická axiálna sila F_a rovnomerne rozkladá medzi všetky valivé elementy. Normálová sila pôsobiaca na každý valivý element má veľkosť [2]:

$$Q = \frac{F_a}{Z \sin \alpha} \quad (5.30)$$

kde Z je počet valivých elementov v ložisku a α je veľkosť stykového uhlu pri zaťažení. Potom dosadením rovnice (5.13) do (5.30):

$$F_a = Z K_t \sin \alpha \delta_n^n \quad (5.31)$$

kde δ_n predstavuje deformáciu v smere normály stykovej plochy. Závislosť medzi normálovou a axiálnou deformáciou je daná:

$$\delta_n = \delta_a \sin \alpha \quad (5.32)$$

Dosadením rovnice (5.32) do (5.31) je možné vyjadriť závislosť medzi axiálnym zaťažením a axiálnym posuvom v ložisku [9]:

$$F_a = Z K_t (\sin \alpha)^{n+1} \delta_a^n \quad (5.33)$$

V realite pri aplikácii axiálneho zaťaženia bude dochádzať k zmene stykového uhlu (Obr. 5-8). Pre veľkosť deformácie δ_n potom platí [2]:

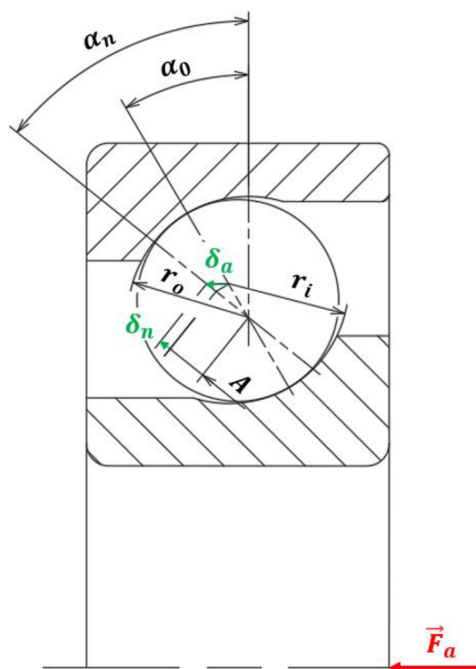
$$\delta_n = A \left(\frac{\cos \alpha^0}{\cos \alpha_n} - 1 \right) \quad (5.34)$$

kde α^0 je hodnota počiatocného stykového uhlu a α_n je hodnota stykového uhlu po aplikácii zaťaženia. Parameter A udáva vzdialenosť medzi stredmi krivosti drážok vnútorného a vonkajšieho prstenca:

$$A = r_i + r_o - D \quad (5.35)$$

Rovnica (5.31) potom nadobúda tvar:

$$F_a = ZK_t \sin \alpha_n A^n \left(\frac{\cos \alpha^0}{\cos \alpha_n} - 1 \right)^n \quad (5.36)$$



Obr. 5-8 Zmena stykového uhlu pri pôsobení axiálneho zaťaženia

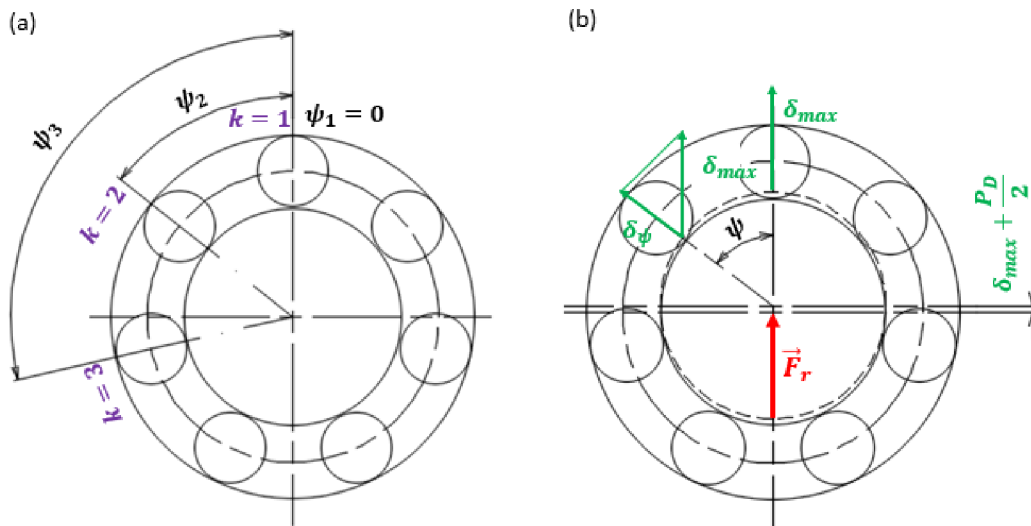
5.5.2 Radiálne zaťaženie

Ak uvážime, že nositeľka radiálnej sily sa zhoduje s osou valivého elementu na uhlovej pozícii $\psi = 0$ (Obr. 5-9), tak aplikáciou ľubovoľne malého radiálneho zaťaženia dôjde k vymedzenie radiálnej vôle ložiska P_D a nastáva kontakt vnútorného prstenca s prvým valivým elementom. Zvýšením zaťaženia sa zväčšuje hodnota kontaktnej deformácie a pri určitom zaťaženi nastáva kontakt prstenca s ďalšími valivými elementami. Veľkosť deformácie valivého elementu, ktorý sa nachádza na uhlovej pozícii ψ , je daná [2]:

$$\delta_\psi = \left(\delta_{max} + \frac{P_D}{2} \right) \cos \psi - \frac{P_D}{2} \quad (5.37)$$

kde δ_{max} predstavuje radiálnu deformáciu najviac zaťaženého valivého elementu, t.j. elementu, ktorý sa nachádza na uhlovej pozícii $\psi = 0$. Dosadením rovnice (5.37) do (5.13) je možné vyjadriť vzťah pre reakčnú silu v smere normály stykovej plochy pre valivý element na uhlovej pozícii ψ :

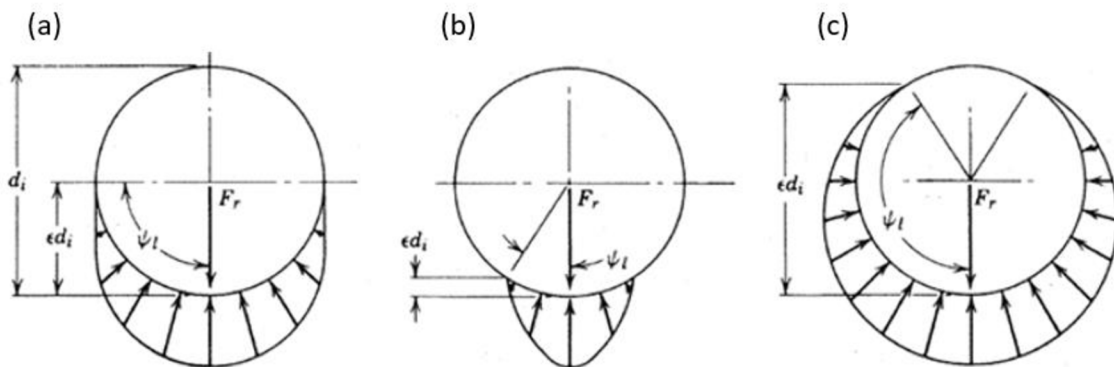
$$Q_\psi = K_t \delta_\psi = K_t \left[\left(\delta_{max} + \frac{P_D}{2} \right) \cos \psi - \frac{P_D}{2} \right]^n \quad (5.38)$$



Obr. 5-9 (a) Uhlová pozícia valivých elementov; (b) Posuv vnútorného prstenca pri radiálnom zaťažení

Počet valivých elementov, ktoré sa podieľajú na prenose zaťaženia je primárne určený hodnotou radiálnej vôle P_D . Na obrázku 5-10 je znázornená oblasť zaťažených valivých elementov, ktoré sa podieľajú na prenose radiálneho zaťaženia, v závislosti na hodnote radiálnej vôle. Medzný uhol ψ_l udáva veľkosť záťažnej oblasti:

$$\psi_l = \cos^{-1} \left(\frac{P_D}{2 \left(\delta_{max} + \frac{P_D}{2} \right)} \right) \quad (5.39)$$



Obr. 5-10 Veľkosť záťažnej oblasti: (a) $P_D = 0$, $\psi_l = \pm 90^\circ$; (b) $P_D > 0$, $0 < \psi_l < 90^\circ$; (c) $P_D < 0$ (Predpätie), $90^\circ < \psi_l < 180^\circ$ [2]

U radiálnych ložísk sa zavádza tzv. faktor rozloženia zaťaženia ε :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{P_D}{2\delta_{max} + P_D} \right) \quad (5.40)$$

Tento bezrozmerný parameter vyjadruje podiel celkového radiálneho zaťaženia, ktorý prenášajú jednotlivé valivé elementy. S použitím faktoru rozloženia zaťaženia je možné rovnice (5.37), (5.38) a (5.39) upraviť do nasledujúceho tvaru [2]:

$$\delta_\psi = \delta_{max} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos\psi) \right] \quad (5.41)$$

$$Q_\psi = K_t \delta_{max}^n \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos\psi) \right]^n \quad (5.42)$$

$$\psi_l = \cos^{-1}(1 - 2\varepsilon) \quad (5.43)$$

Aby platila podmienka statickej rovnováhy, tak suma zložiek reakčných síl v radiálnom smere od valivých elementov musí byť rovná celkovej radiálnej sile F_r pôsobiacej na ložisko:

$$F_r = \sum_{k=1}^m Q_{\psi_k} \cos\psi_k = K_t \delta_{max}^n \sum_{k=1}^m \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos\psi_k) \right]^n \cos\psi_k \quad (5.44)$$

kde m predstavuje počet zaťažených valivých elementov. Po úprave:

$$F_r = K_t \delta_{max}^n Z J_r \quad (5.45)$$

kde J_r sa označuje ako funkcia rozloženia zaťaženia, ktorá vyjadruje prírastky reakčných síl od jednotlivých valivých elementov:

$$J_r = \frac{1}{Z} \sum_{k=1}^m \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos\psi_k) \right]^n \cos\psi_k \quad (5.46)$$

Funkcia J_r sa zvykne používať aj v integrálnej forme, kde už nie je zohľadnená uhlová pozícia jednotlivých valivých elementov:

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_l}^{+\psi_l} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos\psi) \right]^n \cos\psi \, d\psi \quad (5.47)$$

5.5.3 Kombinované radiálne a axiálne zaťaženie

Prípád kombinácie axiálneho a radiálneho zaťaženia bude demonštrovaný pre jednoradové guľkové ložisko s kosouhlým stykom bez vnútornej vôle a za predpokladu konštantného stykového uhlu. Pri zaťažení ložiska dochádza k posuvu jedného ložiskového prstenca voči druhému o hodnotu δ_a v axiálnom smere a o hodnotu δ_r v radiálnom smere (Obr. 5-11). Hodnota posuvu ložiskového prstenca na uhlovej pozícii ψ v smere normály stykovej plochy je daná [2]:

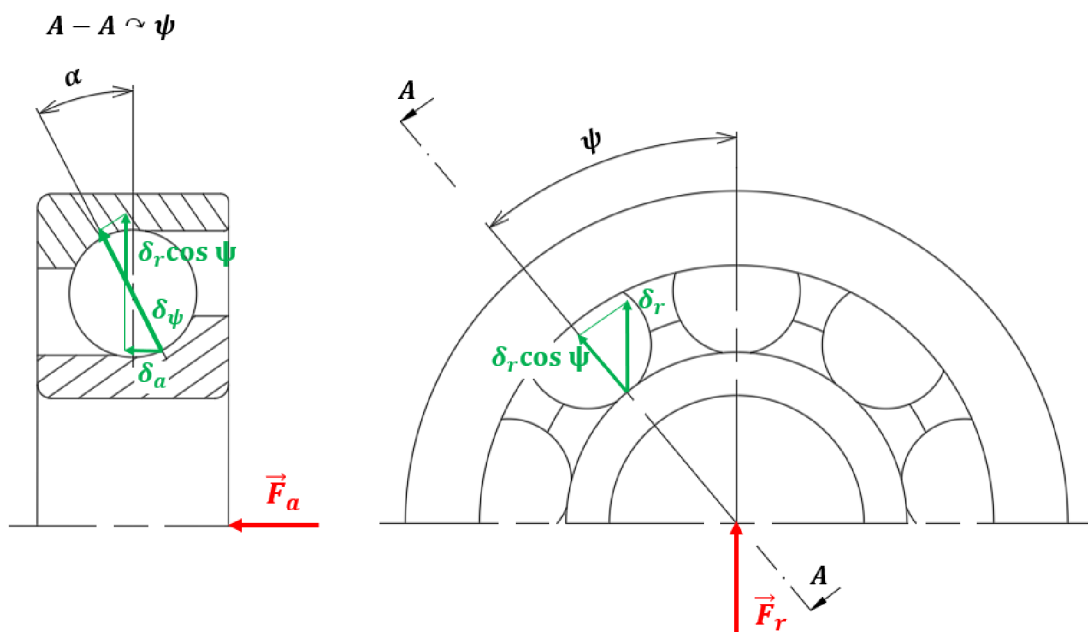
$$\delta_\psi = \delta_a \sin\alpha + \delta_r \cos\alpha \cos\psi \quad (5.48)$$

Rovnicu (5.48) je opäť možné upraviť na rovnicu (5.42):

$$Q_\psi = K_t \delta_\psi^n = K_t \delta_{max}^n \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos\psi) \right]^n \quad (5.49)$$

kde $\delta_{max} = \delta_a \sin\alpha + \delta_r \cos\alpha$. Faktor rozloženia zaťaženia je v prípade kombinácie axiálneho a radiálneho zaťaženia daný:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta_a \tan\alpha}{\delta_r} \right) \quad (5.50)$$



Obr. 5-11 Posuv vnútorného prstenca pri kombinácii radiálneho a axiálneho zaťaženia

Podmienka statickej rovnováhy je v prípade kombinovaného zaťaženia osobitne vyjadrená pre axiálny a radiálny smer:

$$F_a = \sum_{k=1}^Z Q_{\psi_k} \sin \alpha \quad (5.51)$$

$$F_r = \sum_{k=1}^Z Q_{\psi_k} \cos \alpha \cos \psi_k \quad (5.52)$$

Rovnice (5.51) a (5.52) je možné vyjadriť pomocou deformácie najviac zaťaženého valivého elementu a funkcie rozloženia zaťaženia:

$$F_a = K_t \delta_{max}^n Z J_a \sin \alpha \quad (5.53)$$

$$F_r = K_t \delta_{max}^n Z J_r \cos \alpha \quad (5.54)$$

kde J_r a J_a sa používajú v integrálnej forme:

$$J_a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_l}^{+\psi_l} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]^n d\psi \quad (5.55)$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_l}^{+\psi_l} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]^n \cos \psi d\psi \quad (5.56)$$

Rovnica (5.56) má rovnaký tvar ako (5.47), avšak v tomto prípade je faktor rozloženia zaťaženia daný rovnicou (5.50). Rovnice (5.55) a (5.56) sa označujú aj ako Sjövallove integrály [10].

5.6 Stanovenie tuhosti valivých ložísk

Tuhosť reprezentuje schopnosť systému odolávať deformáciám alebo posuvom pri pôsobení určitého zaťaženia. Pre lineárne systémy je tuhosť vyjadrená ako podiel zaťažujúcej sily F a odpovedajúcej deformácie δ :

$$K = \frac{F}{\delta} \quad (5.57)$$

Pre presnejšiu definíciu tuhosti, ktorá je platná aj pre nelineárne systémy, vyjadrujeme rovnicu (5.57) v diferenciálnom tvare:

$$K = \frac{\partial F}{\partial \delta} \quad (5.58)$$

Nelineárny charakter Hertzovho kontaktu medzi valivými elementami a ložiskovými prstencami znemožňuje vyjadrenie tuhosti ložiska v podobe jedného parametra, ako je tomu v prípade lineárnych systémov. Okrem nelineárneho charakteru kontaktu, presné stanovenie tuhosti valivých ložísk komplikuje aj zmena geometrickej konfigurácie ložiska v priebehu zaťaženia. Pod zmenou geometrickej konfigurácie sa rozumie napríklad zmena uhlovej pozície valivých elementov alebo zmena veľkosti stykového uhlu. Preto vytvorenie analytického modelu pre výpočet tuhosti valivých ložísk môže predstavovať značne komplexný problém.

V prípade čisto axiálneho zaťaženia ložiska je pochopiteľné vyjadrovať tuhosť iba v axiálnom smere. Prípade centrického axiálneho zaťaženia ložiska, ktorého stykový uhol je blízky alebo rovný 90° , predstavuje najjednoduchší prípad zaťaženia valivých ložísk, pretože predpoklad o rovnomernom zaťažení všetkých valivých elementov a predpoklad o konštantnom stykovom uhle je veľmi blízky realite [9]. Podľa rovnice (5.58) je axiálna tuhosť daná:

$$K_a = \frac{\partial F_a}{\partial \delta_a} \quad (5.59)$$

Ak stykový uhol nie je rovný 90° , tak pri axiálnom zaťažení ložiska bude dochádzať k rovnakej zmene stykového uhlu na všetkých valivých elementoch. Zmena stykového uhlu pri axiálnom zaťažení je popísaná rovnicou (5.36).

Obdobne v prípade čisto radiálneho zaťaženia ložiska je bežné uvažovať tuhosť iba v radiálnom smere. Podľa rovnice (5.58) je potom radiálna tuhosť ložiska daná:

$$K_r = \frac{\partial F_r}{\partial \delta_r} \quad (5.60)$$

Pri stanovení radiálnej tuhosti sa zvyčajne uvažuje pôsobenie radiálnej sily na ose najviac zaťaženého valivého elementu [2][11][12], tak ako bolo uvedené v stati 5.5.2. V realite valivé elementy vykonávajú orbitálny pohyb okolo ložiskovej osi, a teda sa mení ich uhlová pozícia voči zaťažujúcej radiálnej sile. Singh a kol. [13] pri rozbere vibrácií dvojradového radiálneho ložiska použili analytický model, ktorý umožňuje aplikáciu radiálnej sily po zložkách v dvoch navzájom kolmých osách. Tento model vedie k stanoveniu radiálnej tuhosti v podobe 2x2 matice tuhosti. Okrem klasických matematických modelov pre výpočet radiálnej tuhosti [11][14] boli vytvorené aj hybridné metódy, ktoré kombinujú výpočet pomocou metódy konečných prvkov s Hertzovou kontaktnou teóriou [15].

Prípád kombinovaného zaťaženia valivého ložiska predstavuje najkomplexnejšiu no zároveň najuniverzálnejšiu situáciu, ktorá môže nastať v technickej praxi. V stati 5.5.3 bolo ilustrované kombinované zaťaženie guľkového ložiska s kosouhlým stykom s dvoma stupňami voľnosti (2DOF). U modelu ložiska s 2DOF uvažujeme iba posuvy v axiálnom a radiálnom smere, čo v mnohých aplikáciách môže poskytovať dostatočne presné riešenie. Vo všeobecnosti má však valivé ložisko 5 stupňov voľnosti (5DOF). Jedná sa o 3 translačné stupne voľnosti, ktoré umožňujú pohyb ložiska v troch navzájom kolmých osách a 2 rotačné stupne voľnosti, ktoré umožňujú natačanie ložiska. Jediný stupeň voľnosti, ktorým valivé ložisko nedisponuje, je pochopiteľne rotácia okolo ložiskovej osi. Závislosť medzi zaťažením a deformáciou ložiska je možné vyjadriť v maticovej forme:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} \quad (5.61)$$

kde \mathbf{F} je vektor vonkajšieho zaťaženia, \mathbf{K} je matica tuhosti a $\boldsymbol{\delta}$ je vektor posuvov a natočení. Plný maticový zápis rovnice (5.61) je:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta_z} & \frac{\partial F_x}{\partial \theta_y} & \frac{\partial F_x}{\partial \theta_z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta_z} & \frac{\partial F_y}{\partial \theta_y} & \frac{\partial F_y}{\partial \theta_z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta_z} & \frac{\partial F_z}{\partial \theta_y} & \frac{\partial F_z}{\partial \theta_z} \\ \frac{\partial M_y}{\partial \delta_x} & \frac{\partial M_y}{\partial \delta_y} & \frac{\partial M_y}{\partial \delta_z} & \frac{\partial M_y}{\partial \theta_y} & \frac{\partial M_y}{\partial \theta_z} \\ \frac{\partial M_z}{\partial \delta_x} & \frac{\partial M_z}{\partial \delta_y} & \frac{\partial M_z}{\partial \delta_z} & \frac{\partial M_z}{\partial \theta_y} & \frac{\partial M_z}{\partial \theta_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

Palmgren [16] bol jedným z prvých autorov, ktorý popísal závislosť medzi zaťažením a deformáciou pre valivé ložisko s 2DOF. Práve model Palmgrena bol popísaný v stati 5.5.3. Houpert [17] následne rozšíril Palmgrenov model pre všetkých 5 stupňov voľnosti. Modely Palmgrena a Houperta popisujú rozloženie zaťaženia a deformácie v ložisku, avšak neumožňujú priame vyjadrenie matice tuhosti. Hernot a kol. [18] preto na základe týchto dvoch modelov stanovili metódu pre výpočet 2×2 a 5×5 matice tuhosti pre guľkové ložiská s kosouhlým stykom. Treba poznamenať, že modely Palmgrena aj Houperta zanedbávajú vplyv dynamických účinkov, neuvažujú prítomnosť vnútornej vôle a rovnako pracujú s predpokladom konštantného stykového uhlu počas celej doby zaťaženia. Na prácu Hernota nadviazali Liu a kol. [19], ktorí 2DOF model pre guľkové ložiská s kosouhlým stykom doplnili o zmenu stykového uhlu spôsobenú axiálnym zaťažením.

Ako priekopnícku je možné považovať prácu Jonesa [20], ktorý formuloval univerzálnu metódu pre popis závislosti medzi zaťažením a deformáciou guľkových a valčekových ložísk s 5DOF. Táto metóda je založená na popise globálnych posuvov a deformácií na základe relatívneho pohybu každého valivého elementu voči vnútornému prstencu. Metóda zahrňuje vplyv odstredivých síl a gyroskopických momentov na valivé elementy, ako aj prítomnosť vnútornej vôle a zmenu stykového uhlu. Okrem toho Jones do výpočtu zahrnul aj vplyv poddajnosti hriadeľa a housingu. Je nutné poznamenať, že metóda podľa Jonesa vedie na značne komplexný nelineárny problém, ktorý je možné riešiť iba pomocou numerických metód so značnou výpočtovou náročnosťou. Pre všeobecné záťažné podmienky boli dokonca reportované problémy so stabilitou výpočtu [21]. Na základe práce Jonesa boli vytvorené komplexné modely pre výpočet plnej 5×5 matice tuhosti pre vysokorýchlostné guľkové ložiská s kosouhlým stykom, ktoré sa používajú vo vretenách obrábacích strojov [5][22]. Niu a kol. [21] upravili Jonesovu metódu pre presnejší popis tuhosti guľkových ložísk na širšej škále prevádzkových rýchlostí a pre lepšiu stabilitu výpočtu.

V súčasnosti teda existujú analytické modely, ktoré popisujú tuhosť valivých ložísk na rôznej úrovni komplexnosti a závisí na odbornom posúdení, ktorý model je vhodný pre konkrétnu aplikáciu.

6 POPIS RIEŠENIA PROBLÉMU

Podľa cieľov práce, ktoré boli vytýčené v úvode, bude pristupované k riešeniu problematiky tuhosti valivých ložísk. Na základe rešeršnej štúdie boli vybrané matematické modely, ktoré umožňujú stanoviť tuhostné vlastnosti guľkových a valčekových ložísk. Vybrané modely budú následne porovnané s numerickým výpočtom pomocou MKP.

6.1 Popis vybraných matematických metód

V nasledujúcich stafiach budú popísané 3 matematické modely pre prípad axiálneho, radiálneho a kombinovaného zaťaženia. Pre všetky matematické modely platia nasledujúce predpoklady:

- Valivé ložisko je zaťažené vonkajšími statickými silami, vplyv dynamických účinkov sa neuvažuje.
- Ložiskové prstence sú uvažované ako tuhé telesá.
- Vonkajší prstenec je pevne zaväzbený v priestore, pri aplikácii zaťaženia dochádza iba k posuvu vnútorného prstenca.
- Kontakt medzi valivým elementom a ložiskovým prstencom je popísaný Hertzovou kontaktnou teóriou.
- K deformácii dochádza iba v malej oblasti styku valivého elementu s ložiskovými prstencami.

Všetky modely boli implementované do výpočtových programov v programovacom jazyku *Python*. Prehľad jednotlivých výpočtových programov je uvedený v zozname príloh.

6.1.1 Model 1 – axiálna tuhosť ložiska

Výpočet axiálnej tuhosti ložiska je založený na rovnomernom rozložení zaťaženia medzi všetky valivé elementy, tak ako sa uvádza v stati 5.5.1. Na základe rovníc (5.59) a (5.33) je axiálna tuhosť ložiská daná:

$$K_a = \frac{\partial F_a}{\partial \delta_a} = nZK_t(\sin \alpha)^{n+1} \delta_a^{n-1} \quad (6.1)$$

V prípade valčekových ložísk je možné výpočet tuhosti podľa rovnice (6.1) použiť pre ložiská so stykovým uhlom $\alpha = 90^\circ$. Pri iných hodnotách stykového uhlu už nemožno uvažovať rovnomerné zaťaženie po celej dĺžke valivého elementu, a teda výpočet by viedol ku značne skresleným výsledkom.

Pri predpoklade stykového uhlu $\alpha = 90^\circ$ sa rovnica (6.1) pre valčekové ložiská zjednoduší na:

$$K_a = nZK_t\delta_a^{n-1} \quad (6.2)$$

kde $n = 1 \div 1,11$ a K_t je deformačný koeficient stanovený na základe rovníc (5.27) a (5.29).

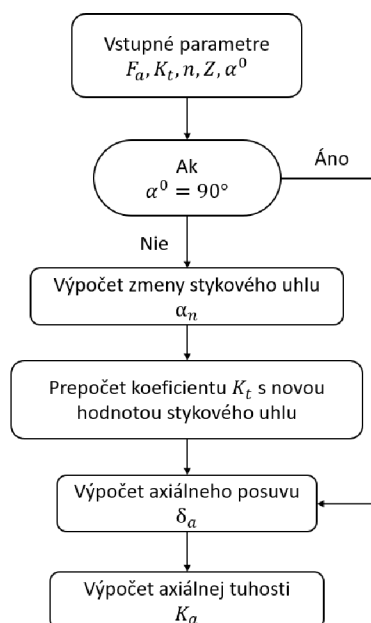
Pre guľkové ložiská už nie je nutné uvažovať iba prípady, kedy $\alpha = 90^\circ$. Ak sa hodnota stykového uhlu nerovná 90° , tak pri pôsobení istého axiálneho zaťaženia bude dochádzať k zmene stykového uhlu. Zmenu stykového uhlu je možné určiť na základe rovnice (5.36). Keďže rovnica (5.36) predstavuje všeobecnú nelineárnu rovnicu, priame vyjadrenie novej hodnoty stykového uhlu nie je možné. Rovnica však môže byť riešená iteračne, napríklad pomocou metódy sečníc [23]. Predpis pre iteračné riešenie rovnice (5.36) pomocou metódy sečníc je:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - f(\alpha_n) \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{f(\alpha_n) - f(\alpha_{n-1})} \quad (6.3)$$

kde $f(\alpha_n)$:

$$f(\alpha_n) = F_a - ZK_t \sin \alpha_n A^n \left(\frac{\cos \alpha^0}{\cos \alpha_n} - 1 \right)^n \quad (6.4)$$

Po stanovení novej hodnoty stykového uhlu pri danom axiálnom zaťažení je možné axiálnu tuhosť ložiska určiť podľa rovnice (6.1). Pre guľkové ložiská $n = 1,5$ a deformačný koeficient K_t je daný rovnicami (5.14) a (5.29). Schematické znázornenie výpočtu axiálnej tuhosti je na obrázku 6-1.



Obr. 6-1 Schéma výpočtu axiálnej tuhosti

6.1.2 Model 2 – radiálna tuhosť ložiska

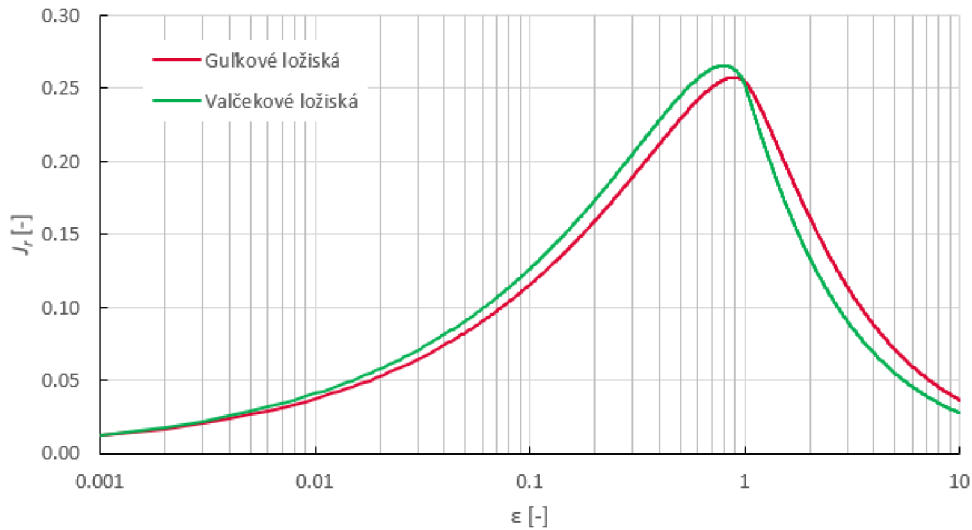
Pri radiálnom zaťažení ložiska dochádza k rozloženiu zaťaženia, tak ako sa uvádza v stati 5.5.2. Pre radiálne valčekové a guľkové ložiská pri pôsobení čisto radiálneho zaťaženia je možné uvažovať konštantný stykový uhol $\alpha = 0^\circ$. Hodnota celkového radiálneho posuvu vnútorného prstenca δ_r je daná:

$$\delta_r = \delta_{max} + \frac{P_D}{2} \quad (6.5)$$

kde hodnota deformácie najviac zaťaženého valivého elementu δ_{max} je daná rovnicou (5.45). Avšak priamy výpočet hodnoty δ_{max} opäť nie je možný. Keďže funkcia rozloženia zaťaženia J_r je tiež závislá na hodnote δ_{max} , k výpočtu je nutné pristupovať iteračne. Aj v tomto prípade je možné použiť metódu sečníc alebo Newton-Raphsonovu metódu. Z autorovho pohľadu však klasické metódy riešenia nelineárnych rovníc vedú na pomerne neprehľadný výpočet, a tak bola zvolená nasledujúca iteračná metóda. Pri známom radiálnom zaťažení F_r je zvolená počiatočná hodnota deformácie δ_{max}^j . Podľa rovnice (5.45) je následne vypočítaná hodnota radiálneho zaťaženia F_r^j . Ak $F_r^j < F_r$, tak pre ďalšiu iteráciu platí $\delta_{max}^{j+1} > \delta_{max}^j$. Naopak, ak platí $F_r^j > F_r$, tak $\delta_{max}^{j+1} < \delta_{max}^j$. Tento proces sa opakuje, až pokiaľ nie je s požadovanou presnosťou stanovená hodnota deformácie δ_{max} , ktorá odpovedá radiálnemu zaťaženiu F_r . Rýchlejšia konvergencia iteračnej metódy je dosiahnutá vďaka premennému kroku, s ktorým sa mení hodnota δ_{max} .

Ako bolo uvedené v stati 5.5.2, tak funkcia J_r môže byť vyjadrená v sumačnej alebo integrálnej forme. V prípade integrálnej formy sa neuvažuje uhlová pozícia jednotlivých valivých elementov a hodnota funkcie J_r je závislá iba na hodnote faktoru rozloženia zaťaženia ε . Integrál J_r je možné riešiť numericky, napríklad pomocou trapezoidného pravidla [24]. Závislosť integrálu J_r na faktore rozloženia zaťaženia ε pre guľkové a valčekové ložiská je znázornená na obrázku 6-2. Výhodou funkcie J_r v integrálnej forme je fakt, že hodnoty integrálu J_r pre celú škálu hodnôt ε stačí vypočítať iba jedenkrát. Následne pri iteračnom výpočte radiálnej deformácie sa stanoví hodnota ε , ku ktorej je priradená patričná hodnota J_r bez nutnosti numerického výpočtu integrálu J_r v každej jednej iterácii.

Naopak v prípade sumačnej formy je v každej iterácii potrebné stanoviť počet valivých elementov, ktoré sa podieľajú na prenose zaťaženia. Počet valivých elementov, ktoré sa podieľajú na prenose zaťaženia, je daný podmienkou o kladnej hodnote normálovej deformácie. Podľa rovnice (5.41) je možné stanoviť normálovú deformáciu δ_ψ pre valivý element na uhlovej pozícii ψ . Ak platí $\delta_\psi > 0$, tak daný valivý element sa podieľa na prenose zaťaženia. Potom na základe rovnice (5.46) je možné stanoviť hodnotu funkcie J_r v každej iterácii.



Obr. 6-2 Závislosť integrálu J_r na ε pre guľkové ($n = 1,5$) a valčekové ($n = 1,11$) ložiská

Hodnota radiálnej tuhosti je podľa rovnice (5.60) a (5.45):

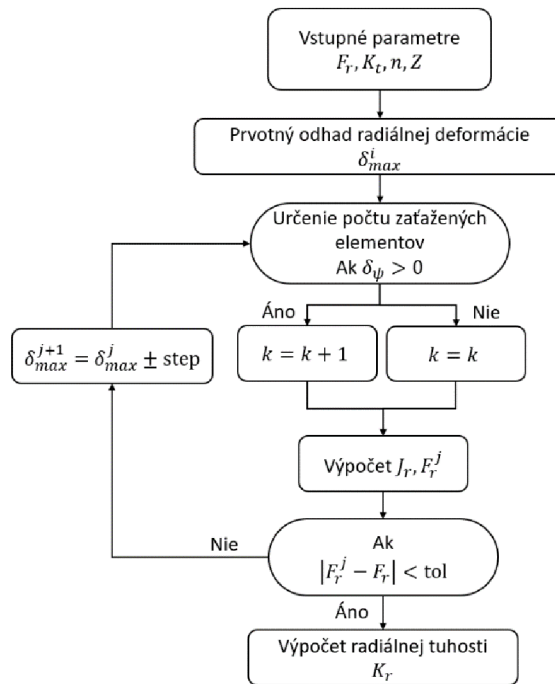
$$K_r = \frac{\partial F_r}{\partial \delta_r} = \frac{\partial (K_t \delta_{max}^n Z J_r)}{\partial \delta_{max}} \quad (6.6)$$

Ako bolo uvedené vyššie, J_r je funkciou deformácie δ_{max} , čo komplikuje vyjadrenie tuhosti ako parciálnej derivácie funkcie radiálneho zaťaženia. Pri použití sumačnej formy funkcie J_r Chen a Wang [11] vyjadrili funkciu tuhosti v analytickom tvare:

$$K_r = \frac{\partial F_r}{\partial \delta_r} = n K_t Z J_r \delta_{max}^{n-1} + K_t \delta_{max}^n \sum_{k=1}^m \left[\frac{n(1 - \cos \psi_k) \cos \psi_k}{2\varepsilon^2} \left(1 - \frac{1 - \cos \psi_k}{2\varepsilon} \right)^{n-1} \frac{P_D}{(2\delta_{max} + P_D)^2} \right] \quad (6.7)$$

Pre integrálnu formu funkcie J_r doposiaľ nebolo stanovené analytické vyjadrenie radiálnej tuhosti K_r . Bolo však overené, že použitie sumačnej alebo integrálnej formy funkcie J_r , vedie k takmer identickej hodnote radiálneho posuvu, a teda oba prístupy sú si navzájom rovnocenné [25]. Preto je postačujúce vyjadrenie radiálnej tuhosti iba pre jeden prístup. Schematické znázornenie výpočtu radiálnej tuhosti pri použití sumačnej formy je na obrázku 6-3.

Deformačný koeficient K_t pre valčekové a guľkové ložiská je stanovený rovnako ako v prípade modelu pre axiálnu tuhosť.



Obr. 6-3 Schéma výpočtu radiálnej tuhosti

6.1.3 Model 3 – tuhosť ložiska pri kombinovanom zaťažení

Tento matematický model je určený výhradne na stanovenie tuhosti guľkových ložísk s kosouhlým stykom pri kombinácii axiálneho a radiálneho zaťaženia. Model je založený na práci Hernota a kol. [18], ktorí zaviedli metódu pre výpočet matice tuhosti pre guľkové ložiská s kosouhlým stykom s 2DOF. Aby bolo možné vyjadriť 2x2 maticu tuhosti je zavedená nasledujúca úprava rovnice (5.13):

$$Q_{\psi} = K_t \delta_{\psi} \delta_{\psi}^{n-1} \quad (6.8)$$

Použitím rovnice (5.48) je rovnicu (6.8) možné upraviť:

$$Q_{\psi} = K_t \sin \alpha \delta_{\psi}^{n-1} \delta_{\alpha} + K_t \cos \alpha \cos \psi \delta_{\psi}^{n-1} \delta_r \quad (6.9)$$

Dosadením rovnice (6.9) do (5.51) a (5.52):

$$F_{\alpha} = \sum_{k=1}^Z K_t \delta_{\psi}^{n-1} \sin^2 \alpha \delta_{\alpha} + K_t \delta_{\psi}^{n-1} \sin \alpha \cos \alpha \cos \psi_k \delta_r \quad (6.10)$$

$$F_r = \sum_{k=1}^Z K_t \delta_{\psi}^{n-1} \sin \alpha \cos \alpha \cos \psi_k \delta_{\alpha} + K_t \delta_{\psi}^{n-1} \cos^2 \alpha \cos^2 \psi_k \delta_r \quad (6.11)$$

Hernot rovnice (6.10) a (6.11) prepísal pomocou modifikovaných Sjövallových integrálov a deformácie najviac zaťaženého valivého elementu δ_{max} :

$$F_a = ZK_t \delta_{max}^{n-1} (\sin^2 \alpha J_{aa} \delta_a + \sin \alpha \cos \alpha J_{ra} \delta_r) \quad (6.12)$$

$$F_r = ZK_t \delta_{max}^{n-1} (\sin \alpha \cos \alpha J_{ra} \delta_a + \cos^2 \alpha J_{rr} \delta_r) \quad (6.13)$$

kde platí $\delta_{max} = \delta_a \sin \alpha + \delta_r \cos \alpha$. Modifikované Sjövallove integrály J_{aa} , J_{ra} a J_{rr} sú stále funkciami faktoru rozloženia zaťaženia stanoveného rovnicou (5.50):

$$J_{aa} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_l}^{+\psi_l} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]^{n-1} d\psi \quad (6.14)$$

$$J_{ra} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_l}^{+\psi_l} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]^{n-1} \cos \psi d\psi \quad (6.15)$$

$$J_{rr} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_l}^{+\psi_l} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]^{n-1} \cos^2 \psi d\psi \quad (6.16)$$

Pre zjednodušenie výpočtu Hernot zaviedol aproximácie integrálov J_{aa} , J_{ra} a J_{rr} :

Ak $0 \leq \varepsilon \leq 1$:

$$J_{aa} = \frac{1}{10000} (5000\varepsilon^{0,5} + 793\varepsilon^{1,6} + 423\varepsilon^{4,7} + 150\varepsilon^{25,1}) \quad (6.17)$$

$$J_{ra} = \frac{1}{10000} (4984\varepsilon^{0,5} - 2208\varepsilon^{1,6} - 510\varepsilon^{5,1} - 144\varepsilon^{25,9})$$

$$J_{rr} = \frac{1}{10000} (5024\varepsilon^{0,5} - 3594\varepsilon^{1,4} + 1358\varepsilon^{3,8} + 183\varepsilon^{23,5})$$

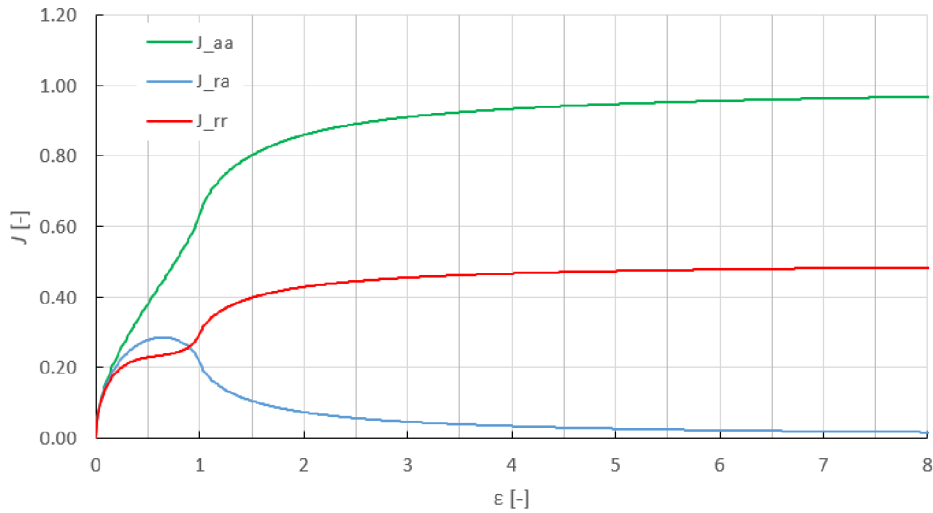
Ak $\varepsilon \geq 1$:

$$J_{aa} = \frac{1}{10000} \left(10000 - \frac{2564}{\varepsilon} - \frac{822}{\varepsilon^{2,8}} - \frac{248}{\varepsilon^{16,6}} \right) \quad (6.18)$$

$$J_{ra} = \frac{1}{10000} \left(\frac{1271}{\varepsilon} + \frac{530}{\varepsilon^{2,5}} + \frac{238}{\varepsilon^{8,5}} + \frac{83}{\varepsilon^{39,7}} \right)$$

$$J_{rr} = \frac{1}{10000} \left(5000 - \frac{1297}{\varepsilon} - \frac{531}{\varepsilon^3} - \frac{201}{\varepsilon^{18,5}} \right)$$

Závislosť integrálov J_{aa} , J_{ra} a J_{rr} na faktore rozloženia zaťaženia ε podľa rovníc (6.17) a (6.18) je znázornená na obrázku 6-4.



Obr. 6-4 Závislosť integrálov J_{aa}, J_{ra}, J_{rr} na ε pre guľkové ložiská ($n = 1,5$)

Závislosť medzi zaťažením a deformáciou pre ložisko s 2DOF je daná:

$$\begin{bmatrix} F_a \\ F_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ra} \\ K_{ra} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Člen K_{aa} predstavuje axiálnu tuhosť guľkového ložiska s kosouhlým stykom, pretože vyjadruje závislosť medzi axiálnym zaťažením a axiálnym posuvom. Obdobne člen K_{rr} vyjadruje závislosť medzi radiálnym zaťažením a radiálnym posuvom, a teda vyjadruje hodnotu radiálnej tuhosti. Člen K_{ra} dáva do súvislosti veľkosť axiálneho posuvu pri radiálnom zaťažení a naopak veľkosť radiálneho posuvu pri axiálnom zaťažení. Na základe rovníc (6.12) a (6.13) pre členy K_{aa} , K_{ra} a K_{rr} platí:

$$K_{aa} = ZK_t \delta_{max}^{n-1} \sin^2 \alpha J_{aa} \quad (6.20)$$

$$K_{ra} = ZK_t \delta_{max}^{n-1} \sin \alpha \cos \alpha J_{ra} \quad (6.21)$$

$$K_{rr} = ZK_t \delta_{max}^{n-1} \cos^2 \alpha J_{rr} \quad (6.22)$$

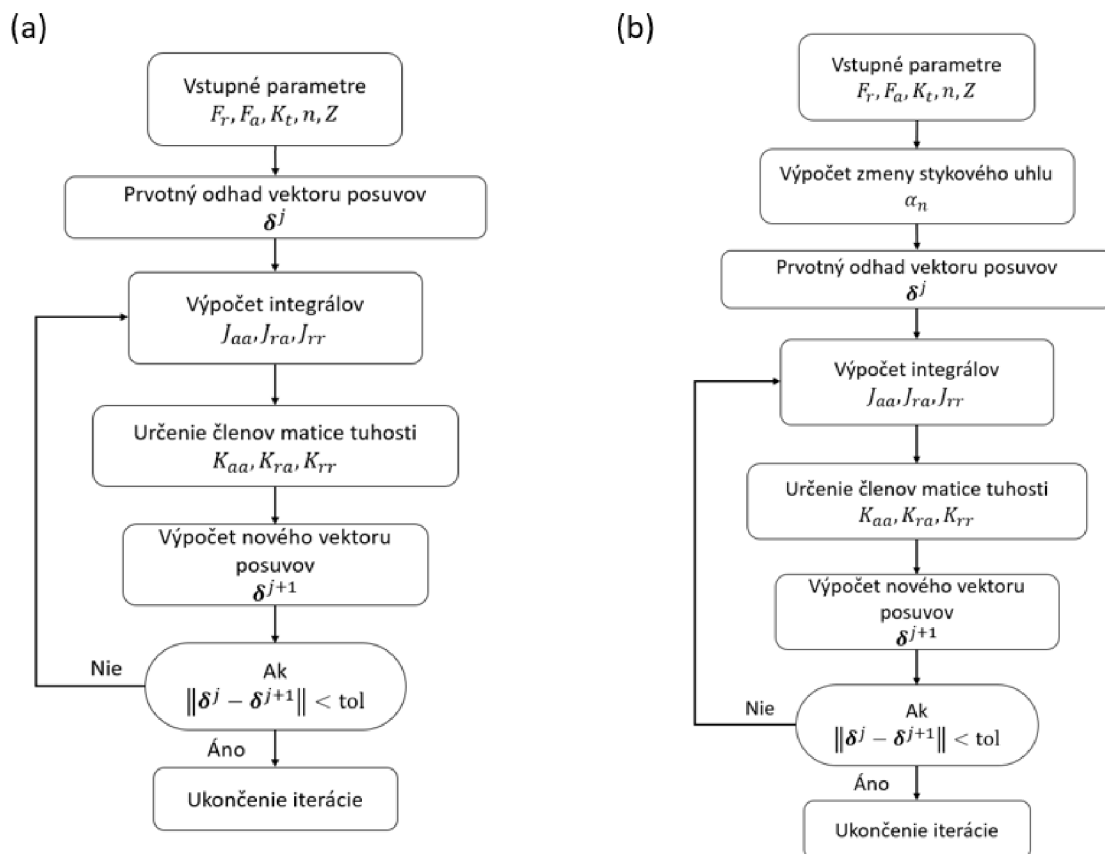
Je nutné poznamenať, že takto vyjadrené členy matice tuhosti predstavujú linearizovanú formu tuhosti, pretože jednotlivé členy sú vyjadrené v tvare rovnice (5.57) a nie v diferenciálnom tvare ako stanovuje rovnica (5.58).

Rovnica (6.19) predstavuje sústavu nelineárnych rovníc a pre stanovenie vektoru posuvov δ je nutné použiť numerickú iteračnú metódu. Hernot odporúča riešenie sústavy rovníc pomocou Newton-Raphsonovej metódy, ktorá po úprave vedie na nasledujúci iteračný predpis:

$$\delta_j = \frac{1}{n} \mathbf{K}_{j-1}^{-1} \mathbf{F} + \frac{n-1}{n} \delta_{j-1} \quad (6.23)$$

Popis riešenia problému

Výpočet matice tuhosti podľa Hernota bol doplnený o zmenu stykového uhlu spôsobeného axiálnym zaťažением, tak ako uvádza Liu a kol. [19]. Postup výpočtu sa nemení, jedine pred započatím iteračného riešenia sústavy nelineárnych rovníc sa stanoví nová hodnota stykového uhlu. K výpočtu novej hodnoty stykového uhlu je pristupované rovnako ako sa uvádza v stati 6.1.1. Schematické znázornenie výpočtu 2DOF matice tuhosti je na obrázku 6-5.

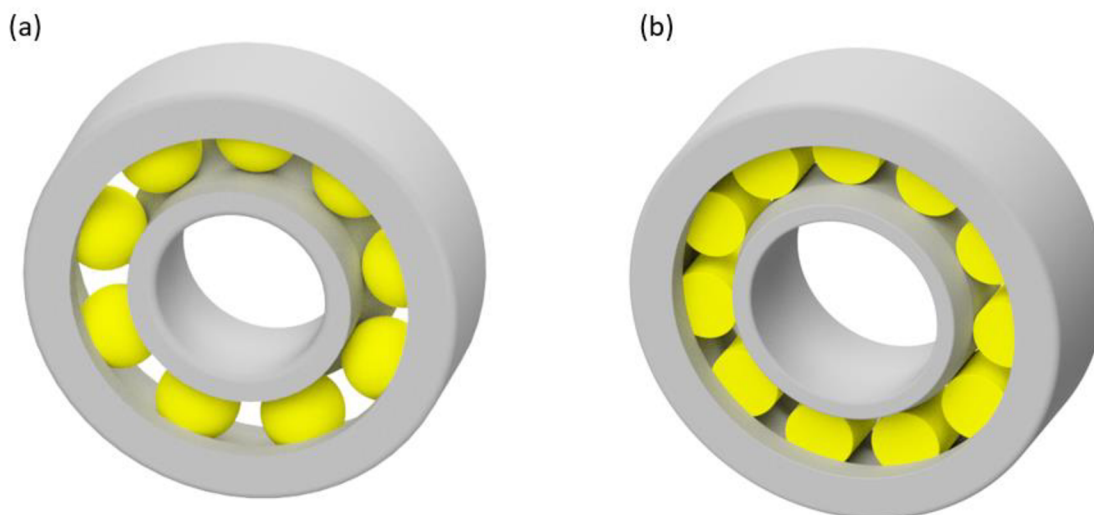


Obr. 6-5 Schéma výpočtu 2x2 matice tuhosti: (a) bez zmeny stykového uhlu; (b) so zmenou stykového uhlu

6.2 Riešenie pomocou MKP

Všetky prezentované matematické modely boli porovnané s výsledkami statickej analýzy v programe *Ansys Workbench 2022 R2*. Porovnanie matematických modelov s MKP simuláciou je prezentované pre 2 konkrétne ložiská od spoločnosti *SKF*:

- Jednoradové guľkové ložisko s kosouhlým stykom 7304 BECBM (Obr. 6-6a)
- Jednoradové valčekové ložisko NU 202 ECP (Obr. 6-6b)



Obr. 6-6 Vybrané ložiská od spoločnosti *SKF*: (a) 7304 BECBM; (b) NU 202 ECP

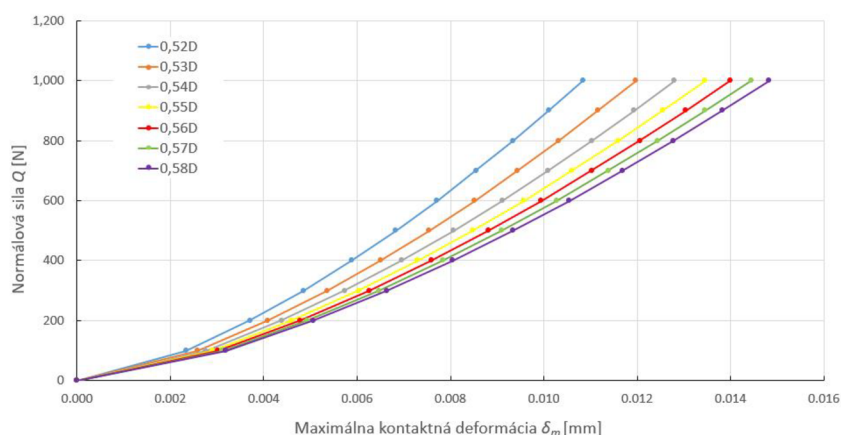
6.2.1 Model ložiska 7304 BECBM

Základné geometrické a materiálové parametre ložiska 7304 BECBM sú uvedené v tabuľke 6-1. Je uvažovaný rovnaký materiál ložiskových prstencov a valivých elementov.

Parameter	Hodnota
Vonkajší priemer D_o [mm]	52
Vnútny priemer D_i [mm]	20
Rozteč ložiska d_m [mm]	36,2
Počet guľčiek Z [-]	9
Priemer guľčky D [mm]	10
Polomer drážky vnútorného prstenca r_i [mm]	5,2
Polomer drážky vonkajšieho prstenca r_o [mm]	5,2
Stykový uhol α^0 [°]	40
Statická únosnosť C_0 [kN]	10
Modul pružnosti E [GPa]	200
Poissonovo číslo μ [-]	0,3

Tab. 6-1 Parametre ložiska 7304 BECBM

Je nutné poznamenať, že rozmery r_i a r_o v tabuľke 6-1 predstavujú iba odhad skutočnej hodnoty polomeru drážky ložiskových prstencov, pretože ich presná hodnota sa neuvádza v ložiskových katalógoch. Vnútorne rozmery valivých ložísk je možné stanoviť na základe CAD modelov, ktoré pre svojich zákazníkov poskytuje väčšina výrobcov ložísk. Avšak pre jednoduchosť výrobcovia v CAD modeloch uvažujú polomer drážky ložiskových prstencov rovný polomeru guľičky. To však neodpovedá realite, kedy polomer drážky prstencov je vždy o čosi väčší ako polomer guľičky. V literatúre sa bežne uvádza hodnota $r_{i,o} = 0,52 \div 0,58D$ [2][22][26], čo však predstavuje pomerne široký interval. Na obrázku 6-7 je zobrazená závislosť medzi zaťažením a maximálnou kontaktnou deformáciou δ_m podľa Herzovej teórie pre kontakt guľičky a vnútorného prstenca ložiska 7304 BECBM pre rôzne hodnoty r_i . Krivky na obrázku 6-7 sú stanovené podľa rovníc (5.13) a (5.14). Pri pôsobení normálovej sily $Q = 1000$ N je rozdiel v kontaktnej deformácii δ_m pre prípady $r_i = 0,52D$ a $r_i = 0,58D$ skoro 37%. Tento rozdiel je spôsobený zmenou veľkosti stykovej plochy, čo môže mať zásadný vplyv na výslednú tuhosť celého ložiska. Preto v snahe čo najvernejšie modelovať reálnu aplikáciu ložiska, je žiadúce poznať presné rozmery r_i a r_o . Pre účely porovnania matematického a MKP modelu je postačujúce, ak budú rozmery r_i a r_o zhodné pre obidva modely.



Obr. 6-7 Vplyv veľkosti polomeru drážky ložiskového prstenca na hodnotu kontaktnej deformácie δ_m

Pre ložisko 7304 BECBM budú uvažované 2 prípady zaťaženia:

- Axiálne zaťaženie ložiska
- Kombinované axiálne a radiálne zaťaženie ložiska

Pri kombinovanom zaťažení ložiska bude uvažované proporcionálne zaťaženie, t.j. zaťaženie, pri ktorom je prírastok od axiálnej a radiálnej sily voči statickej únosnosti ložiska je totožný. Podľa katalógu výrobcu [1] je ekvivalentné statické zaťaženie ložiska dané:

$$P_0 = X_0 F_r + Y_0 F_a \quad (6.24)$$

kde koeficienty X_0 a Y_0 sú charakteristické pre konkrétny typ ložiska. Pre ložisko 7304 BECBM $X_0 = 0,5$ a $Y_0 = 0,26$.

Popis riešenia problému

Zaťaženie bude aplikované v niekoľkých krokoch až na hodnotu statickej únosnosti ložiska. Aplikovanie zaťaženia v niekoľkých krokoch umožňuje sledovať závislosť medzi zaťažením a deformáciou. Konkrétne hodnoty axiálneho a radiálneho zaťaženia v jednotlivých záťažných krokoch sú uvedené v tabuľke 6-2.

Č.	Axiálna sila [N]	Radiálna sila [N]
1.	3848	2000
2.	7696	4000
3.	11544	6000
4.	15392	8000
5.	19240	10000

Tab. 6-2 Hodnoty axiálnej a radiálnej sily v jednotlivých záťažných krokoch

Pre prípad čisto axiálneho zaťaženia bude axiálna sila aplikovaná v rovnakých záťažných krokoch ako uvádza tabuľka 6-2.

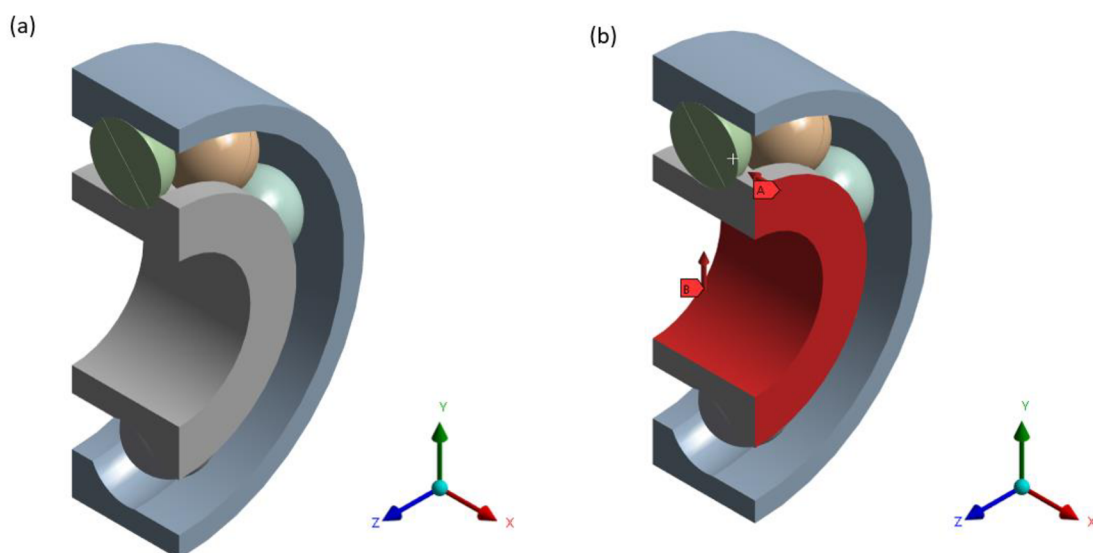
Ložisko 7304 BECBM má symetrické rozloženie valivých elementov okolo jednej roviny symetrie vďaka čomu je splnený predpoklad o geometrickej symetrii. Ak sa nositeľka radiálnej sily bude nachádzať práve v tejto rovine, tak potom model spĺňa predpoklad aj o symetrickom rozložení zaťaženia. To umožňuje prípad axiálneho aj kombinovaného zaťaženia modelovať iba na polovičnej geometrii, čo značne znižuje výpočtovú náročnosť modelu. Polovičný model ložiska 7304 BECBM je zobrazený na obrázku 6-8a. Treba poznamenať, že pre prípad polovičnej geometrie hodnoty zaťažujúcich síl uvedené v tabuľke 6-2 musia byť zmenšené na polovicu.

Počas procesu modelovania a numerickej MKP simulácie boli zavedené nasledujúce predpoklady, ktoré vedú k zlepšeniu presnosti a zníženiu výpočtovej náročnosti simulácie:

- Zaoblenia hrán ložiskových prstencov sú zanedbané pre lepšiu generáciu výpočtovej siete.
- Ložisko je modelované bez vnútornej vôle.
- Je uvažované tuhé uloženie ložiska, t.j. deformácia hriadeľa a housingu je zanedbateľná.
- Uhlová pozícia valivých elementov ostáva pri aplikácii zaťaženia konštantná, čo zaručuje rovnomerné rozmiestnenie valivých elementov počas celej doby zaťažovania.

Na základe vyššie uvedených predpokladov boli okrajové podmienky stanovené nasledovne:

- Vonkajší prstenec je pevne zaväzbený v priestore pomocou podmienky *Fixed Support*, ktorá je aplikovaná na vonkajšie povrchy vonkajšieho prstenca.
- Axiálna sila je rovnomerne aplikovaná na čelo vnútorného prstenca pomocou podmienky *Force* (Obr. 6-8b).
- Radiálna sila je aplikovaná na vnútornej ploche vnútorného prstenca pomocou podmienky *Remote Force s Rigid* chovaním (Obr. 6-8b). Takto definovaná radiálna sila pôsobí v geometrickom strede vnútorného prstenca, pričom je zaručená nekonečne veľká tuhosť jeho vnútornej plochy, čo odpovedá uloženiu na tuhom hriadeli. V prípade čisto axiálneho zaťaženia je *Rigid* chovanie vnútorného prstenca zaručené pomocou podmienky *Remote Point*.
- Jednotlivým valivým elementom je zamedzený orbitálny pohyb okolo ložiskovej osi a rotačný pohyb okolo vlastnej osi (os rotácie valivého elementu je zhodná s nositeľkou stykového uhlu α).

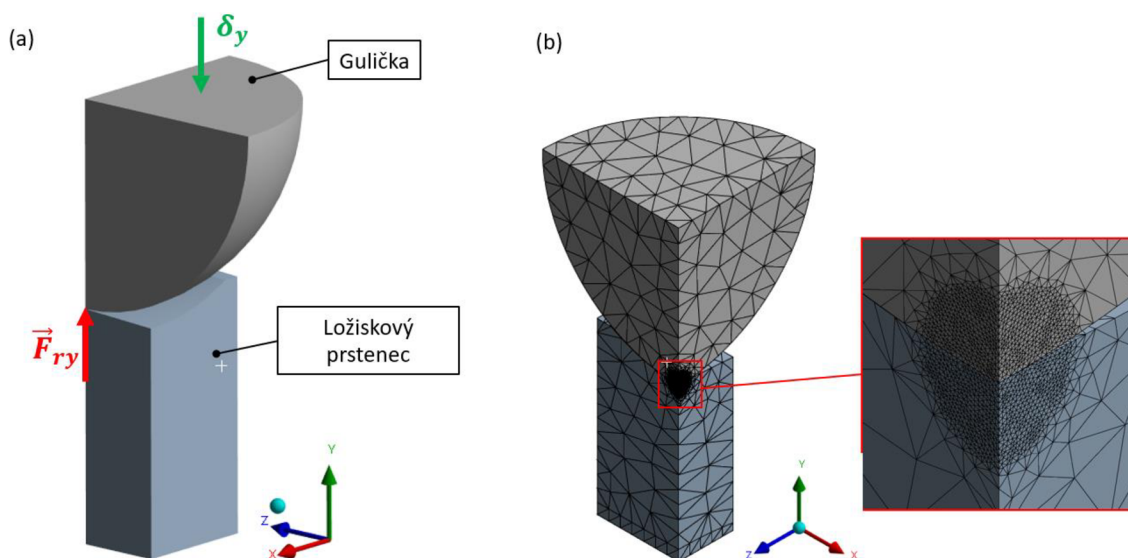


Obr. 6-8 (a) Polovičný model geometrie; (b) Aplikácia zaťažujúcich síl

Pri statickej analýze valivých ložísk je absolútne kľúčové správne nastavenie vlastností kontaktu medzi valivými elementami a ložiskovými prstencami. Vo všeobecnosti je v MKP softwaroch kontakt medzi dvoma telesami reprezentovaný pomocou uzlových alebo integračných bodov jednotlivých prvkov výpočtovej siete. Viac bodov, ktoré reprezentujú kontakt medzi dvoma telesami, zaručuje presnejší popis kontaktu. Preto pre dosiahnutie čo najrealistickejších výsledkov, sa odporúča použitie jemnej výpočtovej siete v okolí miesta kontaktu [26][27][28].

Okrem jemnej výpočtovej siete je v MKP softwaroch dôležité aj vhodné nastavenie matematickej formulácie kontaktu. Program *Ansys* ponúka niekoľko možností popisu kontaktu, napríklad pomocou pokutového algoritmu (*Penalty method*) alebo metódou Lagrangeových multiplikátorov (*Normal Lagrange*). Predvolená matematická formulácia kontaktu v programe *Ansys* je metóda *Augmented Lagrange*, ktorá predstavuje kombináciu pokutového algoritmu a metódy Lagrangeových multiplikátorov. Táto metóda bola zvolená, pretože poskytuje dobrú konvergenciu riešenia aj pri vysokej tuhosti kontaktu. Pre kontakt valivých elementov s ložiskovými prstencami bude uvažovaný koeficient trenia $f_t = 0,15$. Táto hodnota sa zvykne uvádzať pre kontakt 2 oceľových telies za prítomnosti lubrikácie [27].

Nastavenie parametrov metódy *Augmented Lagrange* a veľkosť prvkov v zjemnenej oblasti výpočtovej siete bolo vykonané na dielčích výpočtových modeloch kontaktu valivého elementu s ložiskovými prstencami. Na obrázku 6-9 je znázornený model kontaktu guľičky s vnútorným prstencom. Vďaka 2 rovinám symetrie bolo možné využiť iba $\frac{1}{4}$ model geometrie. Na rovinnú plochu valivého elementu je predpísaná hodnota posuvu v zápornom smere osi y . Výsledkom analýzy na dielčom modeli je kontaktná reakčná sila v ose y . Veľkosť prvku bola znižovaná, až pokiaľ rozdiel v reakčnej sile pre posledné 2 iterácie nebol menší ako 5%. Rovnaké pravidlo bolo použité pre stanovenie veľkosti tolerance penetrácie v kontakte.



Obr. 6-9 (a) Dielčí model kontaktu guľičky s vnútorným prstencom; (b) výpočtová sieť

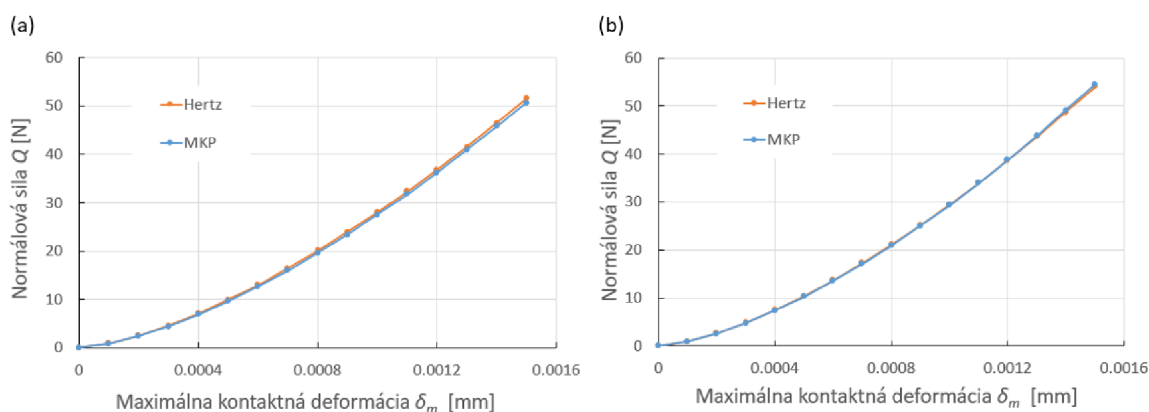
Popis riešenia problému

Na základe dielčích modelov kontaktu guľičky s vnútorným a vonkajším prstencom bola stanovená veľkosť prvku v zjemnenej oblasti $s = 0,04$ mm. Kontaktné parametre použité pre metódu *Augmented Lagrange* sú uvedené v tabuľke 6-3.

Parameter	Hodnota
Tolerancia penetrácie	0,001 mm
Faktor normálovej tuhosti	1

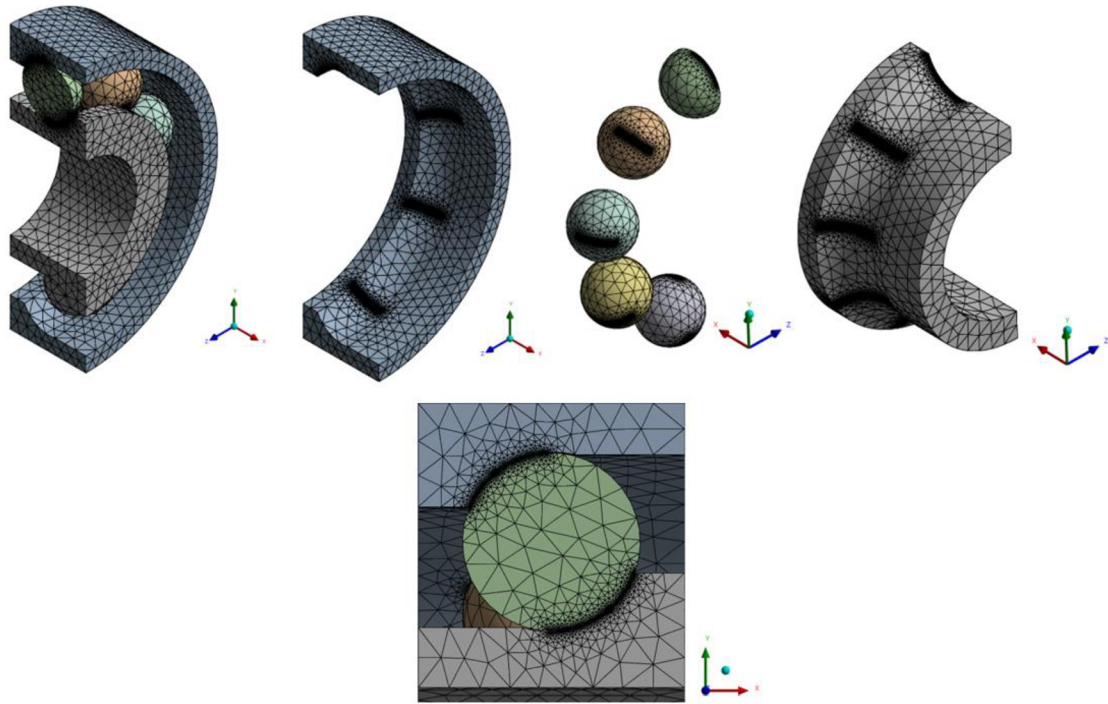
Tab. 6-3 Parametre pre metódu *Augmented Lagrange*

Výsledky z dielčích modelov pri finálnom nastavení kontaktných parametrov a veľkosti prvku boli porovnané s Hertzovou kontaktnou teóriou. Porovnanie závislosti medzi zaťažením a maximálnou kontaktnou deformáciou pre kontakt guľičky s vnútorným a vonkajším prstencom je na obrázku 6-10. Závislosť medzi zaťažením a deformáciou podľa Hertzovej teórie je daná rovnicami (5.13) a (5.14). Je možné pozorovať excelentnú zhodu medzi MKP modelom a Hertzovou teóriou, čo primárne dokazuje vysokú presnosť rovnice (5.14).



Obr. 6-10 Závislosť medzi silou Q a kontaktnou deformáciou δ_m ; (a) Kontakt guľičky na vnútornom prstenci; (b) Kontakt guľičky na vonkajšom prstenci

Veľkosť prvku pre kontaktné oblasti, ktorá bola stanovená pomocou dielčích modelov, bola následne použitá pri vytváraní výpočtovej siete celého ložiska. Výpočtová sieť pre ložisko 7304 BECBM je zobrazená na obrázku 6-11. Výpočtová sieť je tvorená prvkami SOLID 187. Celkový počet prvkov výpočtovej siete $\frac{1}{2}$ modelu ložiska 7304 BECBM je 728468. Z obrázku 6-11 je možné pozorovať, že zjemnenie výpočtovej siete je primárne na povrchu telies, ale nezasahuje do väčšej hĺbky materiálu. Ak by bolo predmetom skúmania rozloženie kontaktných napätí, tak zjemnenie výpočtovej siete by muselo siahať do väčšej hĺbky materiálu, aby bolo možné zachytiť vývoj napätosti v materiáli. Avšak pre rozbor globálnych posuvov a deformácií v ložisku je takto vygenerovaná sieť dostačujúca.



Obr. 6-11 Výpočtová sieť pre ložisko 7304 BECBM

6.2.2 Model ložiska NU 202 ECP

Základné geometrické a materiálové parametre ložiska NU 202 ECP sú uvedené v tabuľke 6-4. Aj v tomto prípade je uvažovaný rovnaký materiál ložiskových prstencov a valivých elementov.

Parameter	Hodnota
Vonkajší priemer D_o [mm]	35
Vnútny priemer D_i [mm]	15
Rozteč ložiska d_m [mm]	24,8
Počet valčekov Z [–]	11
Priemer valčeka D [mm]	5,5
Dĺžka valčeka l [mm]	5,8
Radiálna vôľa P_D [μm]	32,5
Statická únosnosť C_0 [kN]	10,2
Modul pružnosti E [GPa]	200
Poissonovo číslo μ [–]	0,3

Tab. 6-4 Parametre ložiska NU 202 ECP

Pre ložisko NU 202 ECP bude uvažované čisto radiálne zaťaženie. Radiálna sila bude aplikovaná v niekoľkých záťažných krokoch až na úroveň statickej únosnosti ložiska tak, ako uvádza tabuľka 6-5. Budú modelované 2 geometrické konfigurácie, jedna pre ložisko bez vôle, druhá pre ložisko s vôľou.

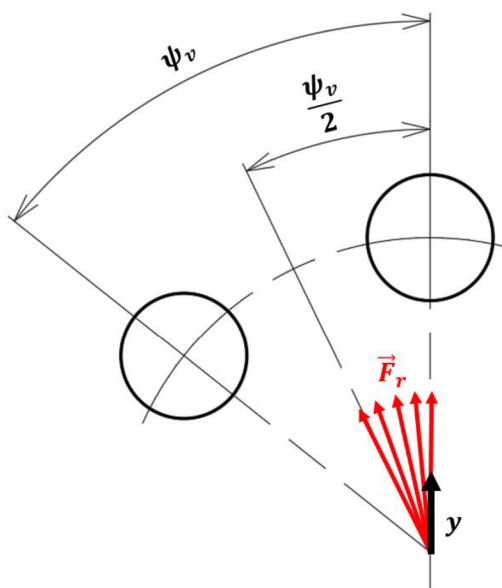
Č.	Radiálna sila [N]	Č.	Radiálna sila [N]
1.	1000	6.	6000
2.	2000	7.	7000
3.	3000	8.	8000
4.	4000	9.	9000
5.	5000	10.	10000

Tab. 6-5 Hodnoty radiálnej sily v jednotlivých záťažných krokoch

Aby bolo možné posúdiť vplyv smeru pôsobenia radiálnej sily na posuvy a deformácie v ložisku, uhol nositeľky radiálnej sily voči ose y bude menený na intervale $0 \div \psi_v/2$, kde ψ_v je uhol medzi osami dvoch susediacich valivých elementov (Obr. 6-12). Je postačujúce uvažovať iba tento interval, pretože po prekročení uhlu $\psi_v/2$ sa vplyv radiálnej sily bude periodicky opakovať. Smery pôsobenia radiálnej sily pre ložisko NU 202 ECP sú uvedené v tabuľke 6-6.

Č.	Uhol ψ [°]
1.	0
2.	4,09
3.	8,18
4.	12,27
5.	16,36

Tab. 6-6 Smer pôsobenia radiálnej sily pre ložisko NU 202 ECP



Obr. 6-12 Smery pôsobenia radiálnej sily

Popis riešenia problému

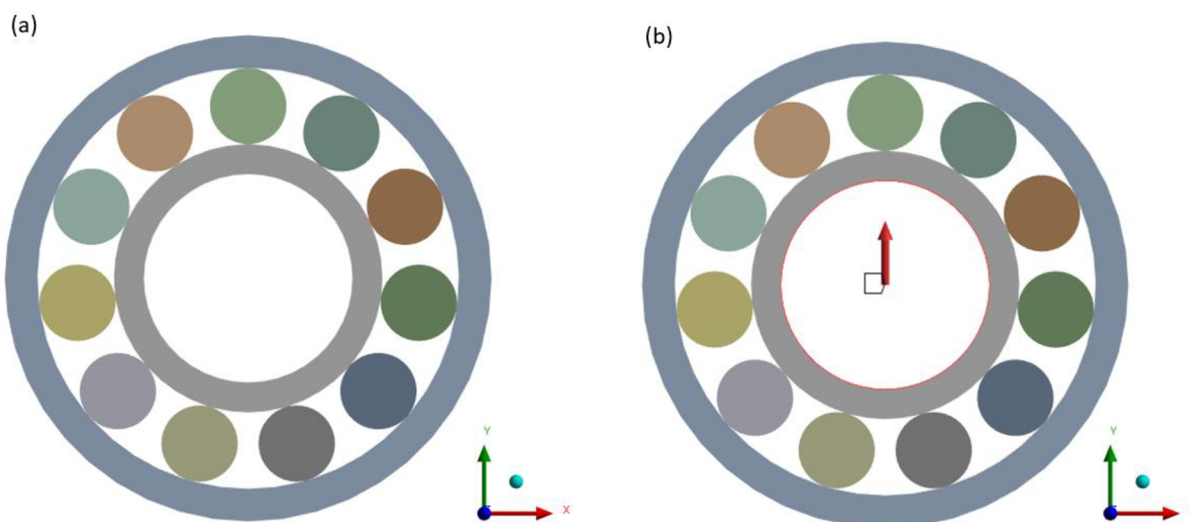
Kvôli rôznym uhlom, pod ktorými pôsobí radiálna sila, už nie je splnená podmienka o symetrickom rozložení zaťaženia, a teda nie je možné využiť polovičný model geometrie ako v prípade ložiska 7304 BECBM. Pre zníženie výpočtovej náročnosti bolo ložisko NU 202 ECP modelované pomocou 2D geometrie (Obr. 6-13a). Platia obdobné predpoklady ako pre ložisko 7304 BECBM:

- Je uvažované tuhé uloženie ložiska, t.j. deformácia hriadeľa a housingu je zanedbateľná.
- Uhlová pozícia valivých elementov ostáva pri aplikácii zaťaženia konštantná, čo zaručuje rovnomerné rozmiestnenie valivých elementov počas celej doby zaťažovania.

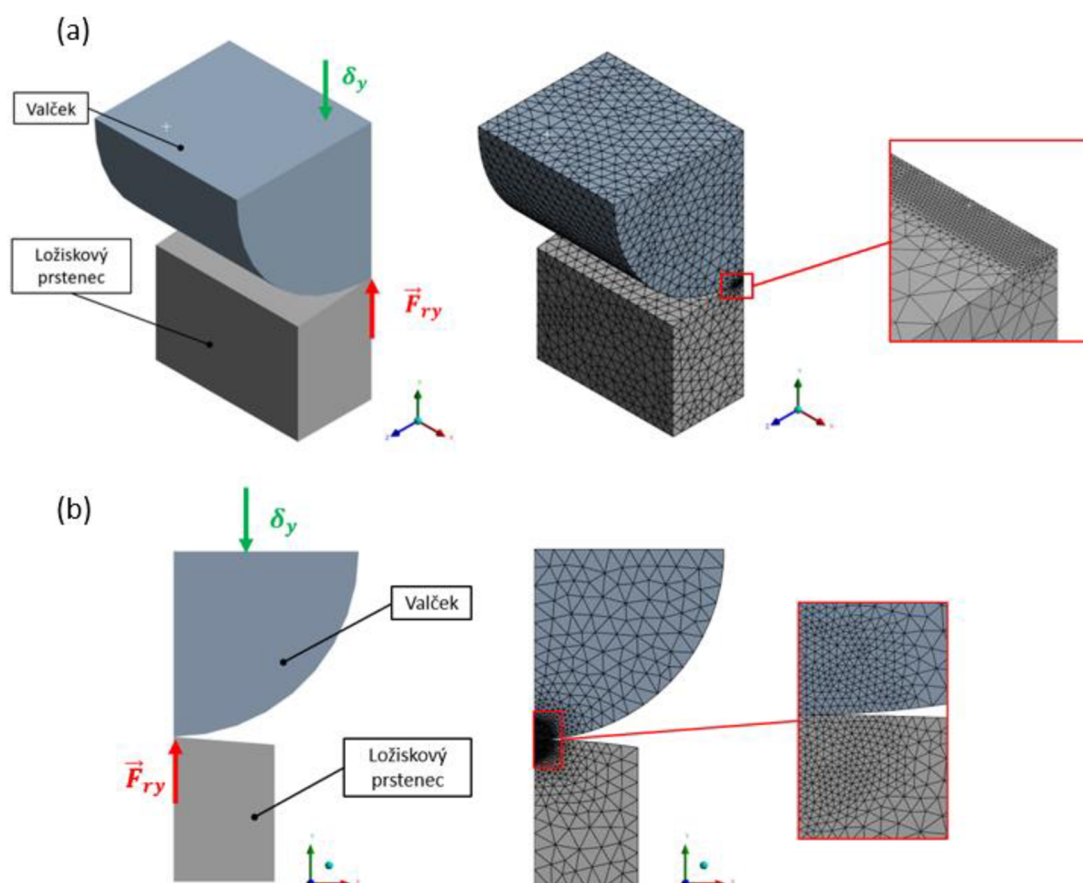
Potom je možné okrajové podmienky stanoviť nasledovne:

- Vonkajší prstenec je pevne zaväzbený v priestore pomocou podmienky *Fixed Support*, ktorá je aplikovaná na vonkajšiu plochu vonkajšieho prstenca.
- Radiálna sila je aplikovaná na vnútornej ploche vnútorného prstenca pomocou podmienky *Remote Force s Rigid* chovaním (Obr. 6-13b).
- Jednotlivým valivým elementom je zamedzený orbitálny pohyb okolo ložiskovej osi a rotačný pohyb okolo vlastnej osi.

Pre ložisko NU 202 ECP bolo použité rovnaké nastavenie kontaktu medzi valivými elementami a ložiskovými prstencami ako v prípade ložiska 7304 BECBM, t.j. formulácia kontaktu pomocou metódy *Augmented Lagrange* s parametrami podľa tabuľky 6-3. Veľkosť prvku v zjemnenej oblasti výpočtovej siete bola opäť stanovená na základe dielčích modelov kontaktu. Tieto modely rovnako slúžia na overenie korektnosti použitia 2D geometrie. Na obrázku 6-14a,b sú znázornené dielčie modely kontaktu valčeka a vnútorného prstenca v 3D a 2D.



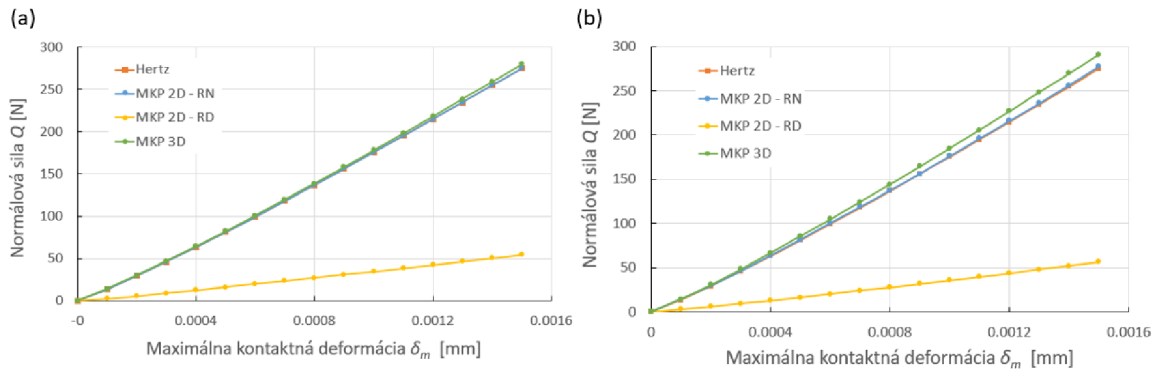
Obr. 6-13 (a) 2D model geometrie; (b) aplikácia radiálnej sily



Obr. 6-14 Dielčí model kontaktu valčeka s vnútorným prstencom a výpočtová sieť: (a) 3D model; (b) 2D model

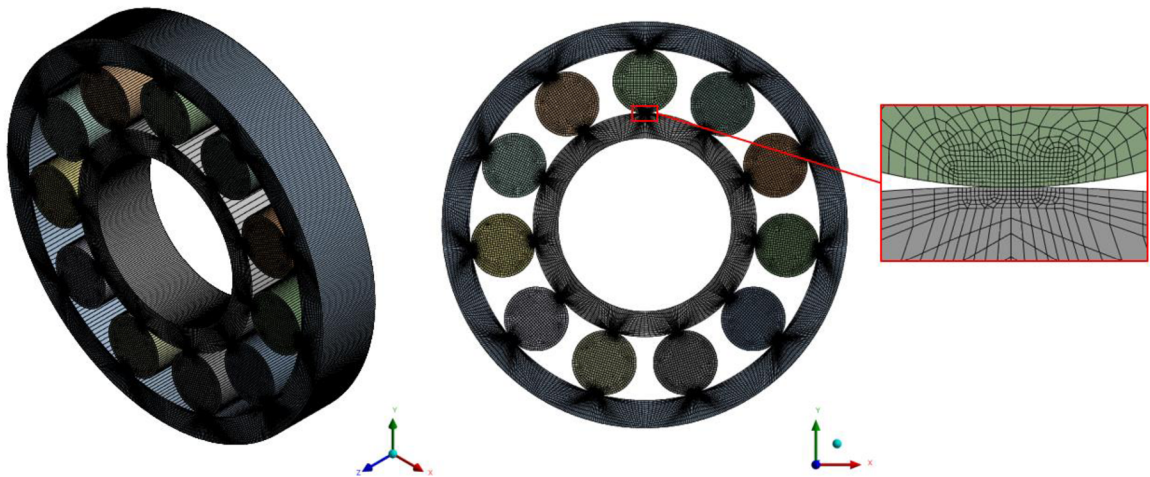
Na základe dielčích modelov kontaktu valčeka s vnútorným a vonkajším prstencom bola stanovená veľkosť prvku v zjemnenej oblasti $s = 0,02$ mm. Porovnanie závislosti medzi zaťažením a maximálnou kontaktnou deformáciou pre kontakt valčeka s vnútorným a vonkajším prstencom je na obrázku 6-15. Opäť je poskytnuté porovnanie s Hertzovou teóriou podľa rovníc (5.13) a (5.27). V rovnici (5.13) je uvažovaná hodnota $n = 1,11$. 2D model bol uvažovaný pre podmienku rovinnej deformácie aj rovinnej napätosti, pričom pri podmienke rovinnej napätosti bola hrúbka modelu stanovená ako dĺžka valivého elementu $l = 5,8$ mm. Je možné pozorovať, že 2D model geometrie pri podmienke rovinnej napätosti veľmi dobre odpovedá 3D modelu. Zároveň je zjavné, že podmienka rovinnej deformácie pre tento model nie je vhodná. Hoci rovnica (5.27) neumožňuje zohľadniť úplnú geometriu ani konkrétny materiál kontaktných telies, tak stále je možné konštatovať veľmi dobrú zhodu medzi MKP modelom a Hertzovou teóriou. V prípade väčšej odchýlky by bolo možné deformačný koeficient K_d stanoviť na základe dielčích modelov kontaktu a následne túto hodnotu použiť v matematickom modeli pre výpočet tuhosti ložiska.

Popis riešenia problému



Obr. 6-15 Závislosť medzi silou Q a kontaktnou deformáciou δ_m ; (a) Kontakt valčeka na vnútornom prstenci; (b) Kontakt valčeka na vonkajšom prstenci

Výpočtová sieť pre ložisko NU 202 ECP je zobrazená na obrázku 6-16. Pre 2D model bola zvolená podmienka rovinatej napätosti a jednotná hrúbka rovná dĺžke valivého elementu $l = 5,8$ mm. Výpočtová sieť je tvorená prvkami PLANE 183. Celkový počet prvkov výpočtovej siete 2D modelu ložiska NU 202 ECP je 34174.



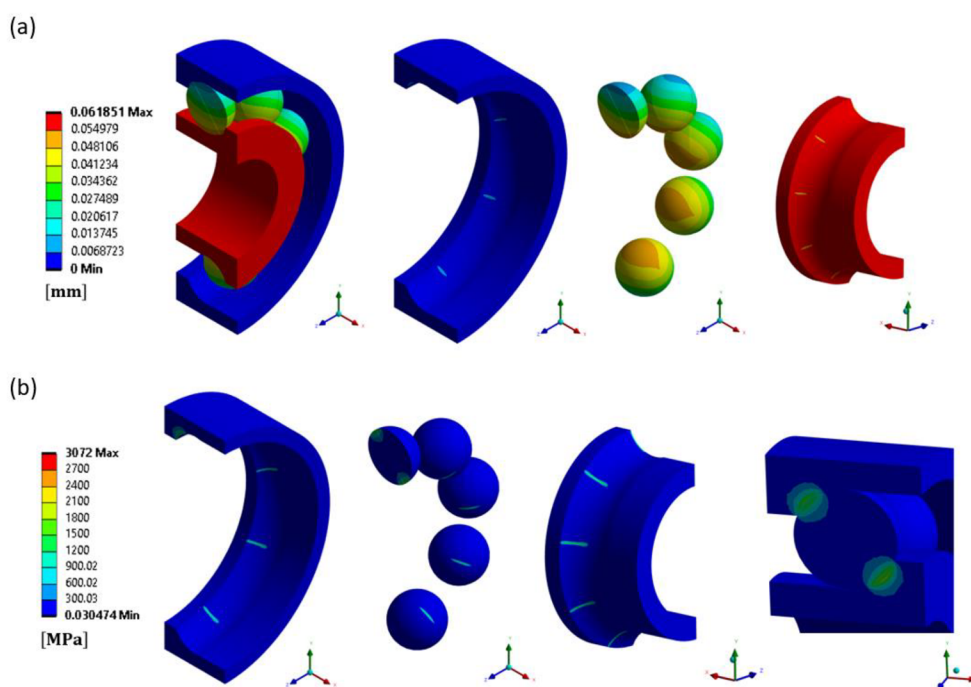
Obr. 6-16 Výpočtová sieť pre ložisko NU 202 ECP

7 PREZENTÁCIA DOSIAHNUTÝCH VÝSLEDKOV

Dosiahnuté výsledky budú osobitne prezentované pre ložisko 7304 BECBM a ložisko NU 202 ECP. MKP model ložiska 7304 BECBM bude porovnaný s matematickým modelom 1 pre axiálnu tuhosť a s modelom 3 pre kombinované zaťaženie. MKP model ložiska NU 202 ECP bude porovnaný s matematickým modelom 2 pre radiálnu tuhosť.

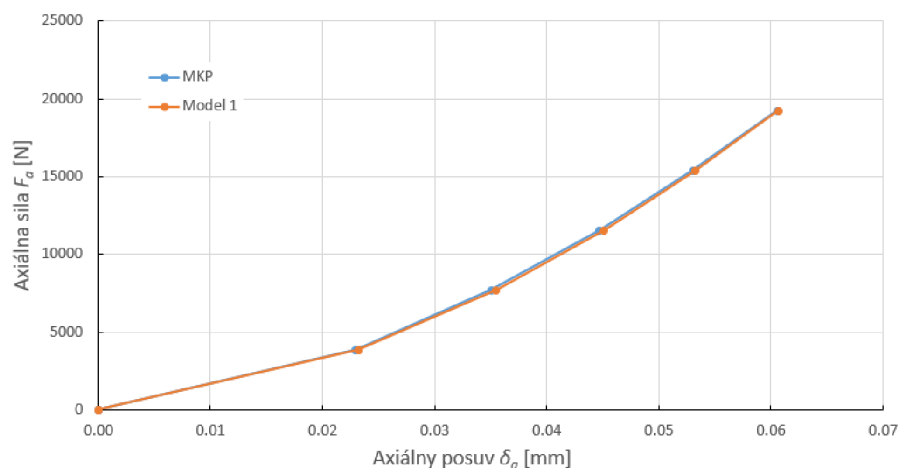
7.1 Výsledky pre ložisko 7304 BECBM

Ako prvé budú prezentované výsledky pre prípad čisto axiálneho zaťaženia ložiska. Na obrázku 7-1a je zobrazená celková deformácia ložiska v poslednom zaťažujúcom kroku. Hodnota deformácie resp. posuvu je totožná po celom objeme vnútorného prstenca, čo odpovedá predpokladu o uložení prstenca na tuhom hriadieli. K lokálnym zmenám deformácie na vnútornom a vonkajšom prstenci dochádza iba v miestach styku s valivými elementami. Na obrázku 7-1b je zobrazené pole redukovaných napätí podľa podmienky von-Mises. Dochádza k výskytu vysokých lokalizovaných napätí v miestach kontaktu valivých elementov s prstencami. Hodnota povrchových napätí v ložiskách je vo všeobecnosti veľmi vysoká z dôvodu pôsobenia zaťaženia na veľmi malej ploche [29] [30]. Výskyt vysokých napätí ešte umocňuje fakt, že výpočtová sieť je zjemnená iba na povrchu telies. Presné hodnoty napätí však nie sú predmetom skúmania tejto práce a rozloženie napätí slúži iba pre kontrolu správneho nastavenia MKP modelu. Pole napätí je v dobrej zhode s výsledkami reportovanými v literatúre zaoberajúcej sa guľkovými ložiskami [26] [30].



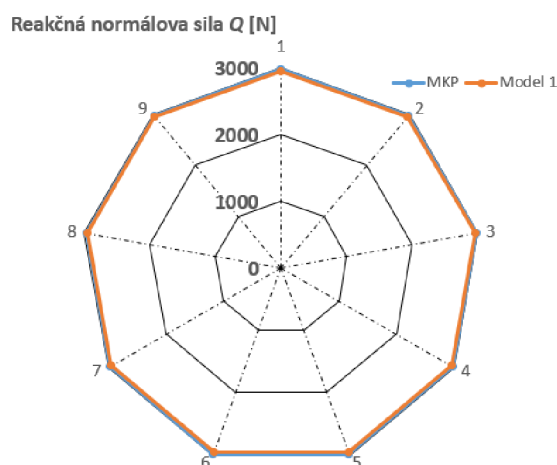
Obr. 7-1 Axiálne zaťaženie ložiska 7304 BECBM $F_a = 19240$ N; (a) Celková deformácia; (b) Pole redukovaných napätí podľa podmienky von-Mises

Hlavným parametrom pre porovnanie matematického modelu s MKP výpočtom je celkový posuv vnútorného prstenca. V prípade MKP modelu je celkový posuv vnútorného prstenca daný posuvom jeho geometrického stredy. Pri axiálnom zaťažení nastáva posuv vnútorného prstenca iba v axiálnom smere. Závislosť medzi axiálnym zaťažením a axiálnym posuvom stanovená modelom 1 a MKP výpočtom je na obrázku 7-2. Je zjavné, že tieto dva prístupy ponúkajú takmer identické výsledky, rozdiel v axiálnom posuve stanoveným modelom 1 a MKP výpočtom je menší ako 0,2%. Táto zhoda je založená na presnom popise kontaktných deformácií podľa Hertzovej teórie a rovnako na popise zmeny stykového uhlu pri pôsobení axiálneho zaťaženia.



Obr. 7-2 Závislosť axiálneho posuvu vnútorného prstenca na axiálnom zaťažení

Obrázok 7-3 prezentuje veľkosť reakčných síl na jednotlivých valivých elementoch v poslednom záťažnom kroku. Reakčné sily sú totožné pre všetky valivé elementy, čo odpovedá rovnomernému rozloženiu axiálneho zaťaženia. Tabuľka 7-1 ďalej ponúka porovnanie hodnôt stykového uhlu v jednotlivých záťažných krokoch. Pre MKP je hodnota stykového uhlu daná smerom pôsobenia kontaktnej reakčnej sily na valivom elemente. Je pochopiteľné, že pre prípad čisto axiálneho zaťaženia je zmena stykového uhlu rovnaká pre všetky valivé elementy.

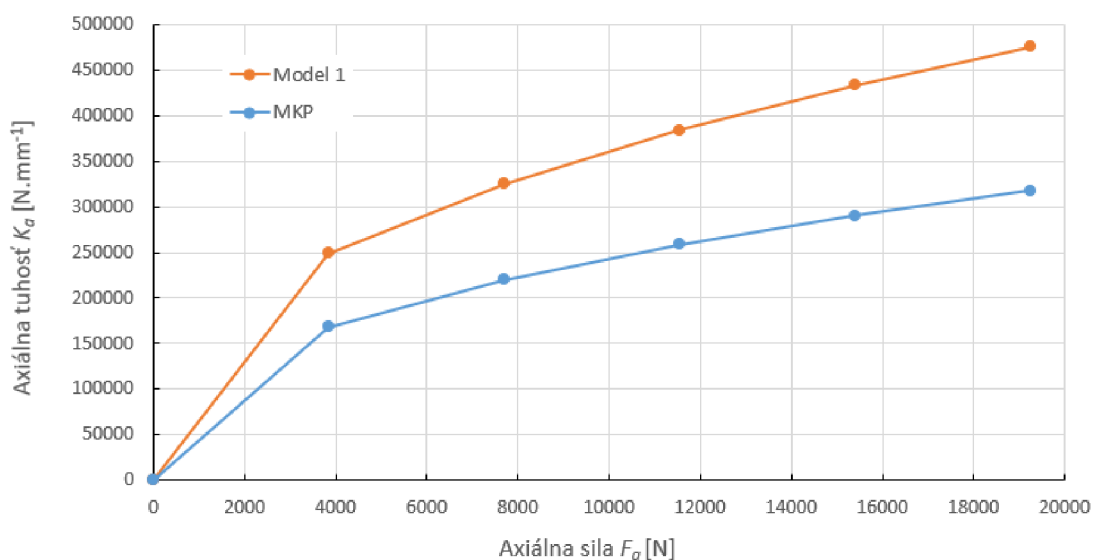


Obr. 7-3 Rozloženie reakčných síl pri axiálnom zaťažení $F_a = 19240$ N

Č.	Axiálna sila [N]	Stykový uhol [°]	
		MKP	Model 1
1.	3848	42,43	42,51
2.	7696	43,63	43,88
3.	11544	44,53	44,79
4.	15392	45,28	45,62
5.	19240	45,90	46,35

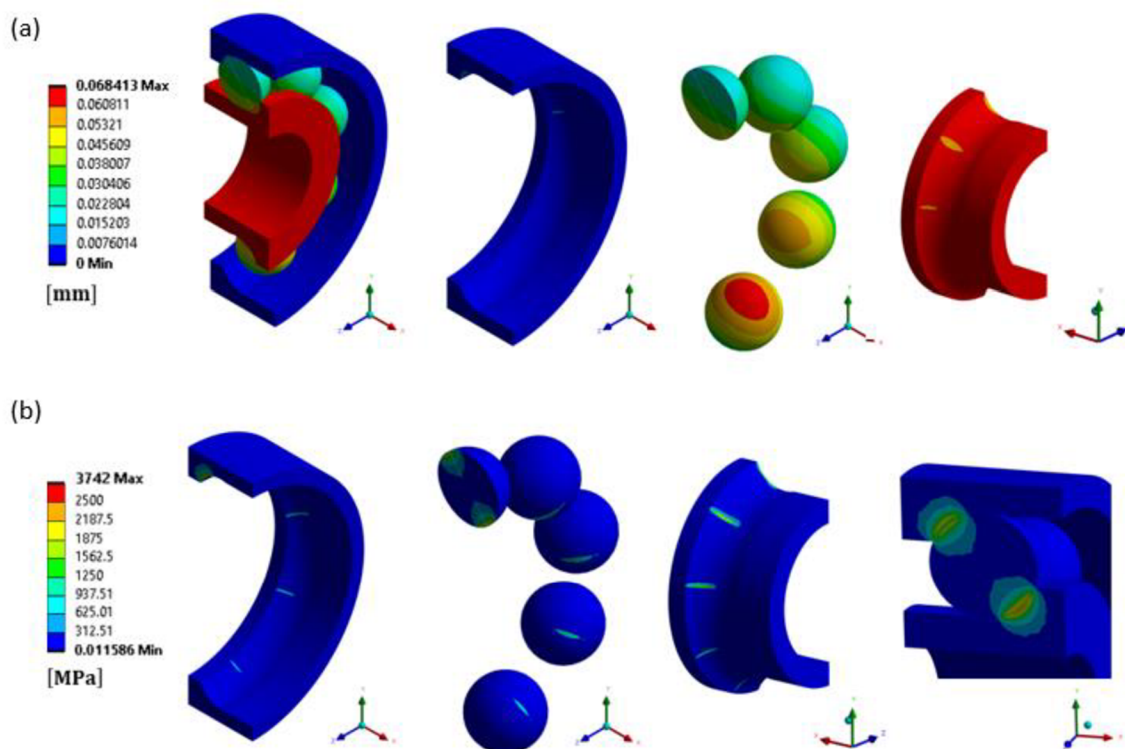
Tab. 7-1 Hodnoty stykového uhlu pri axiálnom zaťažení

Stanovenie tuhosti ložiska 7304 BECBM z MKP výpočtu je možné v linearizovanej forme, t.j. podľa rovnice (5.57). Avšak ako bolo uvedené, v situáciách kedy závislosť medzi zaťažením a deformáciou nie je lineárna, tak vyjadrenie tuhosti podľa rovnice (5.57) nie je matematicky korektné. Obrázok 7-4 ukazuje závislosť medzi axiálnou tuhosťou a axiálnym zaťažením ložiska 7304 BECBM, kedy je tuhosť stanovená v diferenciálnom tvare podľa modelu 1 a v linearizovanej forme podľa MKP výpočtu. Aj napriek tomu, že MKP výpočet a model 1 predikujú rovnaké hodnoty axiálneho posuvu, tak hodnota axiálnej tuhosti stanovená podľa modelu 1 je takmer o 50% väčšia oproti linearizovanej forme tuhosti stanovenej MKP výpočtom.



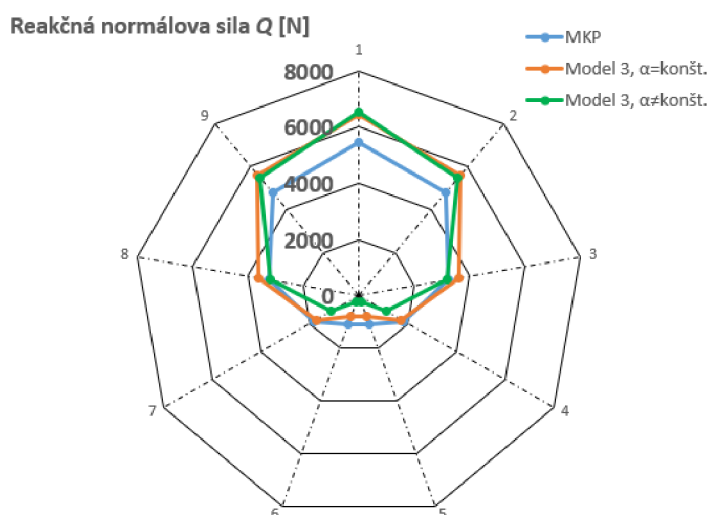
Obr. 7-4 Závislosť axiálnej tuhosti ložiska na axiálnom zaťažení

Ďalej budú prezentované výsledky pre kombinované zaťaženie ložiska 7304 BECBM. Pre prípad kombinovaného zaťaženia budú výsledky z MKP výpočtu porovnané s matematickým modelom 3, ktorý uvažuje konštantný stykový uhol počas celej doby zaťažovania a s modelom 3, ktorý pracuje so zmenou stykového uhlu vplyvom axiálnej sily. Na obrázku 7-5a,b je opäť zobrazená celková deformácia a pole redukovaných napätí podľa podmienky von-Mises v poslednom záťažnom kroku. Pri súčasnom pôsobení axiálneho a radiálneho zaťaženia už neplatí, že veľkosť deformácie, veľkosť reakčných síl a zmena stykového uhlu je rovnaká pre všetky valivé elementy, ako tomu bolo v prípade pôsobenia čisto axiálneho zaťaženia.



Obr. 7-5 Kombinované zaťaženie ložiska 7304 BECBM $F_a = 19240$ N, $F_r = 10000$ N ; (a) Celková deformácia; (b) Pole redukovaných napätí podľa podmienky von-Mises

Rozloženie reakčných síl v ložisku v poslednom záťažnom kroku je prezentované na obrázku 7-6. Je možné pozorovať, že hlavnú časť zaťaženia prenášajú valivé elementy v smere pôsobenia radiálnej sily. Tabuľka 7-2 ďalej prezentuje hodnoty stykového uhlu stanovené MKP výpočtom pre každý valivý element. Keďže veľkosť axiálnej sily je totožná pre prípad čisto axiálneho a kombinovaného zaťaženia, tak pre matematický model 3, ktorý uvažuje zmenu stykového uhlu vplyvom axiálneho zaťaženia, platia hodnoty uvedené v tabuľke 7-1. Naopak pre model 3, ktorý uvažuje konštantný stykový uhol, platí $\alpha = 40^\circ$ počas celej doby zaťažovania.



Obr. 7-6 Rozloženie reakčných síl pri kombinovanom zaťažení $F_a = 19240$ N, $F_r = 10000$ N

Č.	Axiálna sila [N]	Radiálna sila [N]	Stykový uhol [°]								
			B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9
1.	3848	2000	40,38	40,37	40,39	40,38	40,38	40,38	40,38	40,39	40,37
2.	7696	4000	41,49	41,70	42,23	42,85	43,33	43,33	42,85	42,23	41,70
3.	11544	6000	41,97	42,33	43,26	44,37	45,11	45,11	44,37	43,26	42,33
4.	15392	8000	42,32	42,79	44,06	45,56	46,57	46,57	45,56	44,06	42,79
5.	19240	10000	42,62	43,19	44,72	46,56	47,82	47,82	46,56	44,72	43,19

Tab. 7-2 Hodnoty stykového uhlu pri kombinovanom zaťažení stanovené MKP výpočtom

Hodnoty axiálneho a radiálneho posuvu vnútorného prstenca pre MKP výpočet a obidva varianty modelu 3 sú prezentované v tabuľke 7-3. Obidva varianty modelu 3 sa do určitej miery odchyľujú od výsledkov stanovených metódou konečných prvkov, relatívna odchýlka modelu 3 voči MKP pre axiálny a radiálny posuv v poslednom záťažnom kroku je v tabuľke 7-4.

Č.	Axiálna sila [N]	Radiálna sila [N]	MKP		Model 3, $\alpha = \text{konšt.}$		Model 3, $\alpha \neq \text{konšt.}$	
			δ_a	δ_r	δ_a	δ_r	δ_a	δ_r
			[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
1.	3848	2000	0,0225	0,0089	0,0241	0,0128	0,0218	0,0142
2.	7696	4000	0,0341	0,0157	0,0382	0,0204	0,0340	0,0236
3.	11544	6000	0,0435	0,0211	0,0501	0,0267	0,0418	0,0327
4.	15392	8000	0,0518	0,0255	0,0606	0,0323	0,0491	0,0412
5.	19240	10000	0,0590	0,0306	0,0704	0,0375	0,0555	0,0496

Tab. 7-3 Hodnoty axiálneho a radiálneho posuvu vnútorného prstenca vplyvom kombinovaného zaťaženia

Prezentácia dosiahnutých výsledkov

MKP		Model 3, $\alpha = \text{konšt.}$		Model 3, $\alpha \neq \text{konšt.}$	
δ_a [mm]	δ_r [mm]	δ_a [mm]	δ_r [mm]	δ_a [mm]	δ_r [mm]
0,0590	0,0306	0,0704	0,0375	0,0555	0,0496
ϵ [%]		19,3	22,5	5,9	62,1

Tab. 7-4 Porovnanie veľkosti posuvov pri kombinovanom zaťažení $F_a = 19240$ N, $F_r = 10000$ N

Matica tuhosti stanovená podľa modelu 3 pracuje s linearizovaným tvarom tuhostných parametrov. Tabuľka 7-5 uvádza hodnoty linearizovaných členov 2x2 matice tuhosti pre obidva varianty modelu 3.

Č.	Axiálna sila [N]	Radiálna sila [N]	Model 3, $\alpha = \text{konšt.}$			Model 3, $\alpha \neq \text{konšt.}$		
			K_{aa} [N. mm ⁻¹]	K_{ra} [N. mm ⁻¹]	K_{rr} [N. mm ⁻¹]	K_{aa} [N. mm ⁻¹]	K_{ra} [N. mm ⁻¹]	K_{rr} [N. mm ⁻¹]
1.	3848	2000	144272	29348	100891	154820	32887	90282
2.	7696	4000	181771	36976	127114	204903	42357	108501
3.	11544	6000	208076	42327	145510	234863	52707	116039
4.	15392	8000	229017	46587	160154	262773	60532	122121
5.	19240	10000	246701	50184	172521	285984	67689	125875

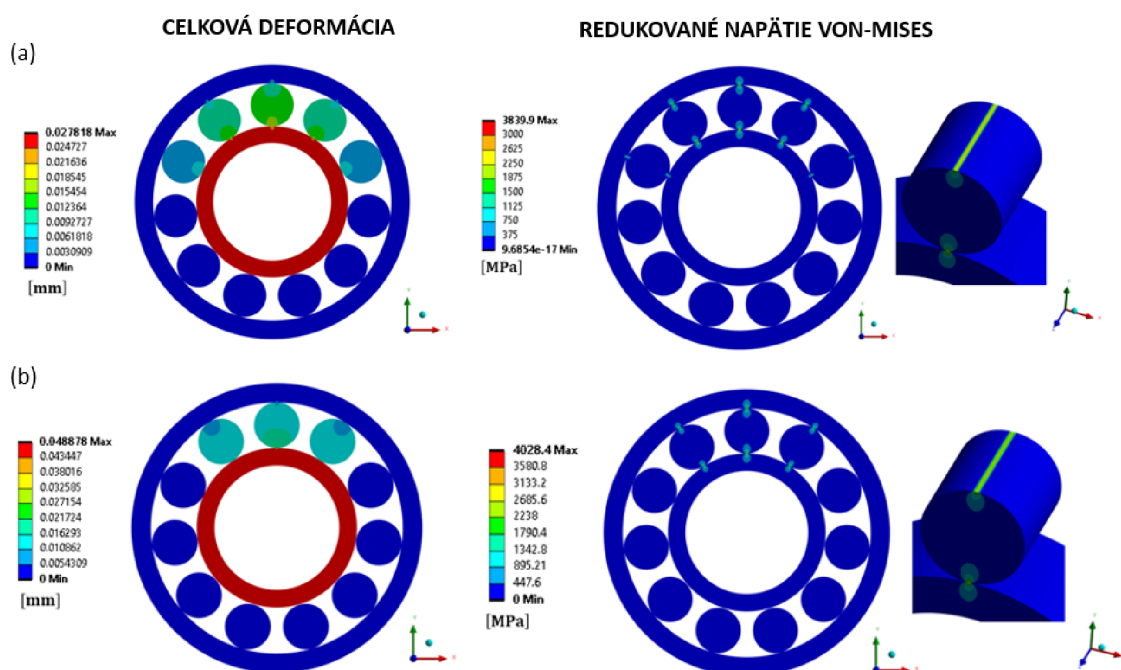
Tab. 7-5 Hodnoty linearizovaných členov 2x2 matice tuhosti

7.2 Výsledky pre ložisko NU 202 ECP

Valčkové ložisko NU 202 ECP bolo uvažované v 2 geometrických konfiguráciách:

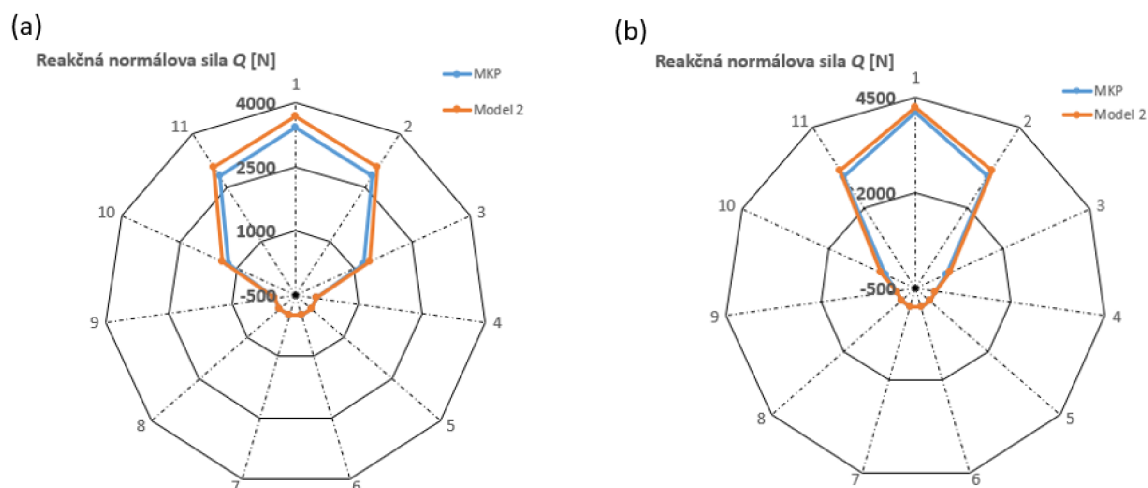
- Bez radiálnej vôle P_D
- S radiálnou vôľou P_D

Na obrázku 7-7 je prezentovaná celková deformácia a pole redukovaných napätí podľa podmienky von-Mises pre obidve konfigurácie v poslednom záťažnom kroku. Rozloženie napätí je v zhode s výsledkami literatúry, ktorá sa venuje valčkovým ložiskám [29], čo primárne potvrdzuje správne nastavenie kontaktov v MKP modeli. Podobne ako v prípade ložiska 7304 BECBM platí, že vnútorný prstenec sa pohybuje ako tuhé teleso a dochádza iba k lokálnym deformáciám v miestach kontaktu valivých elementov s ložiskovými prstencami.



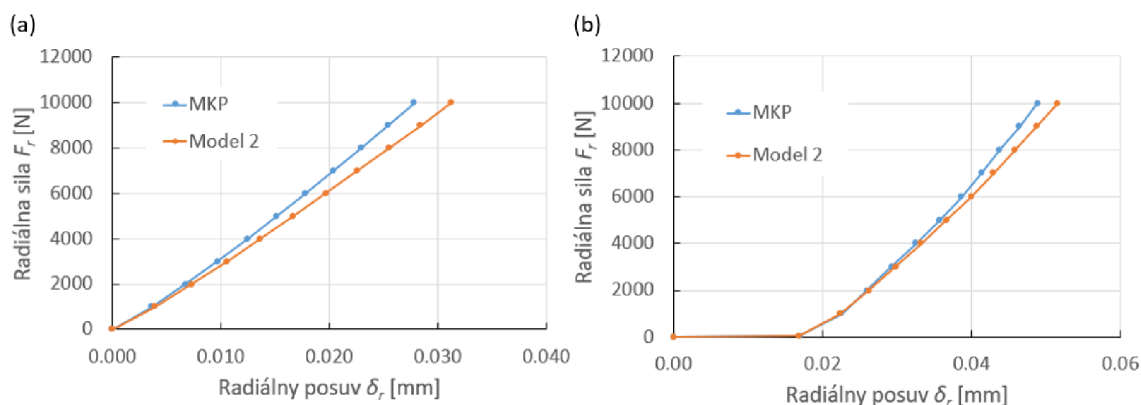
Obr. 7-7 Celková deformácia a pole redukovaných napätí ložiska NU 202 ECP pri radiálnom zaťažení $F_r = 10000$ N; (a) $P_D = 0$; (b) $P_D = 0,0325$ mm

Z obrázku 7-7 je zjavné, že rozdiel medzi ložiskom s vôľou a ložiskom bez vôľe je v počte valivých elementov, ktoré sa podieľajú na prenose zaťaženia. Prítomnosť radiálnej vôľe spôsobuje, že vnútorný prstenec má na začiatku zaťažovania kontakt iba s jedným valivým elementom a k dosadnutiu prstenca na ostatné valivé elementy dochádza až od určitej hodnoty zaťaženia. Obrázok 7-8 ponúka porovnanie rozloženia reakčných síl v poslednom záťažnom kroku pre obidve konfigurácie stanovené MKP výpočtom a modelom 2. Model 2 je vo veľmi dobrej zhode s MKP výpočtom, a teda verne popisuje rozloženie radiálneho zaťaženia či už pre ložisko bez vôľe alebo s vôľou.

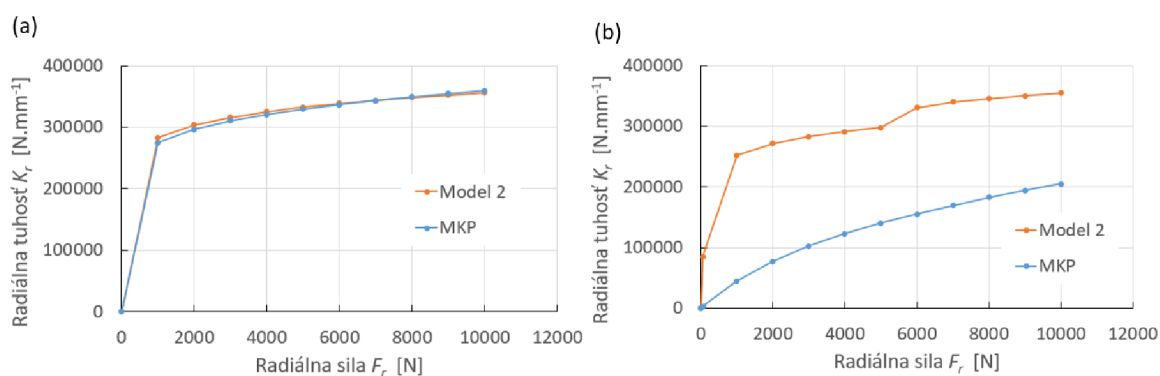


Obr. 7-8 Rozloženie reakčných síl pri radiálnom zaťažení $F_r = 10000$ N; (a) $P_D = 0$; (b) $P_D = 0,0325$ mm

Na obrázku 7-9 je ďalej prezentovaná závislosť medzi radiálnym posuvom vnútorného prstenca a radiálnym zaťažením. Rozdiel v hodnote posuvu stanoveného modelom 2 oproti MKP výpočtu v poslednom záťažnom kroku je menší ako 13% pre ložisko bez vôľe, a menší ako 6% pre ložisko s vôľou. Pre ložisko s vôľou bol doplnený prvý záťažný krok s hodnotou radiálnej sily $F_r = 50$ N, aby bolo možné zachytiť počiatočné vymedzenie radiálnej vôľe. Porovnanie závislosti radiálnej tuhosti ložiska na radiálnom zaťažení je prezentované na obrázku 7-10. Opäť platí, že na základe MKP výpočtu je možné stanoviť tuhosť ložiska v linearizovanej forme. Aj keď MKP výpočet predikuje pre ložisko bez vôľe nižšiu hodnotu radiálneho posuvu oproti modelu 2, hodnota radiálnej tuhosti je približne rovnaká (Obr. 7-10a). Rozdiel medzi tuhosťou v diferenciálnom a lineárnom tvare je ešte výraznejší v prípade ložiska s vôľou. Model 2 zachycuje skokové zmeny tuhosti, ktoré odpovedajú dosadnutiu vnútorného prstenca na valivé elementy pri prekročení určitej hodnoty zaťaženia. Oproti tomu linearizovaný tvar tuhosti predpokladá spojitú hladkú závislosť radiálnej tuhosti počas celej doby zaťažovania (Obr. 7-10b). Hodnota radiálnej tuhosti pre ložisko s vôľou stanovená podľa modelu 2 je o 73% vyššia oproti linearizovanej radiálnej tuhosti určenej z MKP výpočtu.



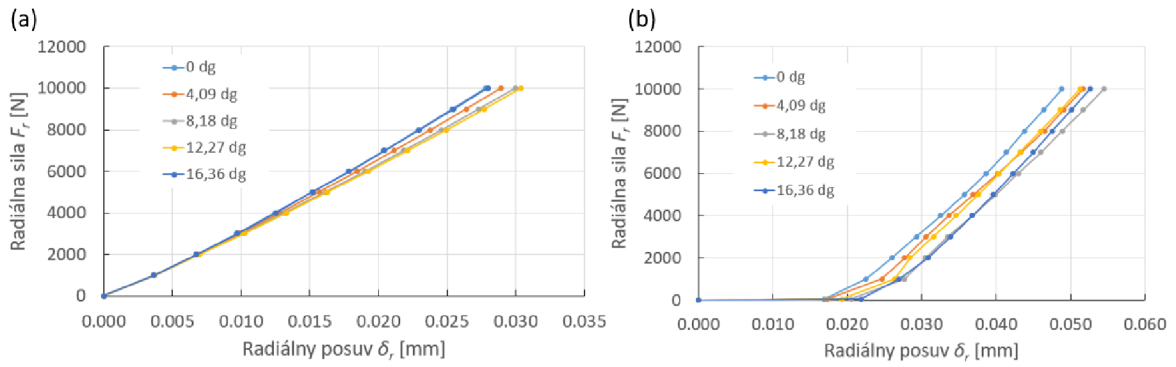
Obr. 7-9 Závislosť radiálneho posuvu vnútorného prstenca na radiálnom zaťažení; (a) $P_D = 0$; (b) $P_D = 0,0325$ mm



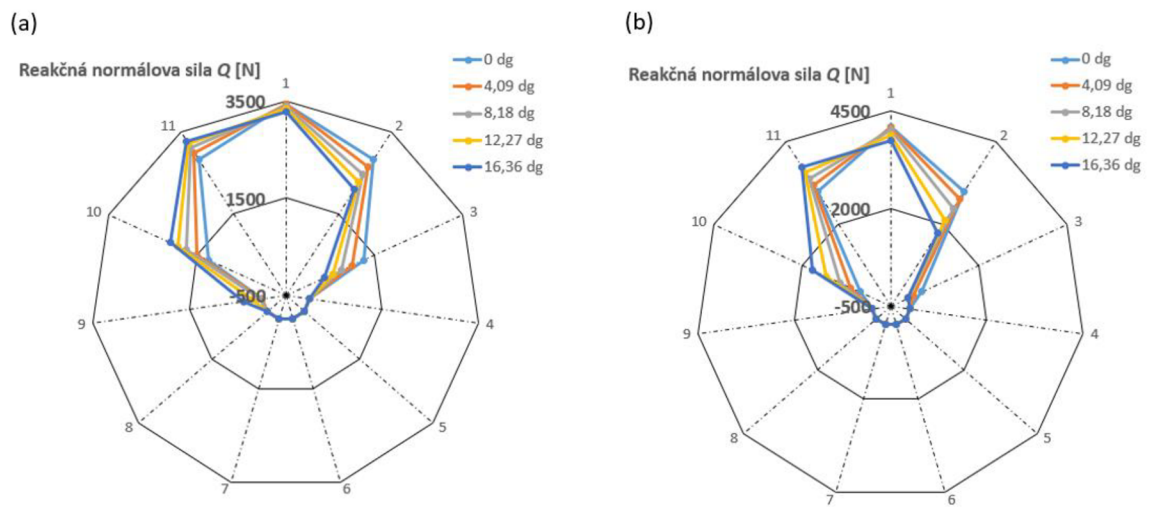
Obr. 7-10 Závislosť radiálnej tuhosti na radiálnom zaťažení; (a) $P_D = 0$; (b) $P_D = 0,0325$ mm

Všetky doterajšie výsledky boli prezentované pre prípad, kedy radiálna sila pôsobí na ose najviac zaťaženého valivého elementu, čo je základný predpoklad modelu 2. Obrázok 7-11 prezentuje závislosť medzi radiálnym posuvom vnútorného prstenca a radiálnym zaťažením pre smery pôsobenia radiálnej sily stanovené tabuľkou 6-6. Radiálnym posuvom sa rozumie posuv vnútorného prstenca v smere nositeľky radiálnej sily. Pre obidve geometrické konfigurácie, t.j. ložisko s vôľou a bez vôľe, je najmenšia hodnota posuvu, a teda najvyššia hodnota tuhosti, prítomná pre prípad, kedy je nositeľka radiálnej sily totožná s osou najviac zaťaženého valivého elementu. Naopak najväčší posuv nastáva, keď uhol nositeľky radiálnej sily je $\psi = 12,27^\circ$ pre ložisko bez vôľe a $\psi = 8,18^\circ$ pre ložisko s vôľou. Maximálny rozdiel v radiálnom posuve v poslednom záťažnom kroku je 9,3% pre ložisko bez vôľe a 11,6% pre ložisko s vôľou. Na záver je na obrázku 7-12 prezentované rozloženie radiálneho zaťaženia pre rôzne smery pôsobenia radiálnej sily.

Prezentácia dosiahnutých výsledkov



Obr. 7-11 Závislosť radiálneho posuvu vnútorného prstenca na radiálnom zaťažení pre rôzne smery pôsobenia radiálnej sily; (a) $P_D = 0$; (b) $P_D = 0,0325$ mm



Obr. 7-12 Rozloženie reakčných síl pri radiálnom zaťažení $F_r = 10000$ N pre rôzne smery pôsobenia radiálnej sily; (a) $P_D = 0$; (b) $P_D = 0,0325$ mm

8 DISKUSIA

Všetky predstavené matematické modely boli porovnané pomocou statickej analýzy v programe *Ansys*. V prípade modelu 1, ktorý je určený pre stanovenie axiálnej tuhosti guľkových a valčekových ložísk, bola pre ložisko 7304 BECBM dosiahnutá excelentná zhoda s MKP výpočtom. Hodnoty axiálneho posuvu určené modelom 1 a MKP výpočtom sú takmer identické. Táto zhoda je primárne založená na:

- Presnom popise kontaktu guľkových valivých elementov s ložiskovými prstencami pomocou Hertzovej teórie.
- Platnom predpoklade o rovnomernom rozložení axiálneho zaťaženia medzi všetky valivé elementy.
- Presnom stanovení zmeny stykového uhlu vplyvom axiálneho zaťaženia.

Nevýhodou modelu 1 je fakt, že nezohľadňuje prítomnosť vnútornej vôle, ktorá v prípade guľkových axiálnych ložísk môže ovplyvniť veľkosť stykového uhlu, a teda aj celkovú tuhosť ložiska [2].

Model 2, ktorý je navrhnutý pre stanovenie radiálnej tuhosti guľkový a valčekových ložísk, tiež vykazuje veľmi dobrú zhodu s MKP výpočtom. Pre obidve geometrické konfigurácie ložiska NU 202 ECP, model 2 verne predikuje rozloženie radiálneho zaťaženia a rovnako aj veľkosť radiálneho posuvu. Očividným nedostatkom modelu 2, je fakt, že nositeľka radiálnej sily sa musí vždy zhodovať s osou najviac zaťaženého valivého elementu. V rámci MKP výpočtu bol prezentovaný vplyv smeru pôsobenia radiálnej sily na hodnotu radiálneho posuvu. Ukazuje sa, že smer pôsobenia radiálnej sily môže ovplyvniť hodnotu radiálneho posuvu a vo výsledku aj veľkosť radiálnej tuhosti. Dá sa očakávať, že vplyv smeru pôsobenia radiálnej sily bude narastať so zväčšujúcou sa roztečou medzi valivými elementami.

Ďalším nedostatkom modelu 2, je limitácia pri stanovení deformačného koeficientu K_d pre valčekové valivé elementy. Rovnica (5.27) neumožňuje zohľadniť materiál valivých elementov ani ložiskových prstencov a rovnako neumožňuje popísať krivosť povrchov kontaktných telies. V prípade ložiska NU 202 ECP rovnica (5.27) poskytuje dobrý odhad koeficientu K_d . Avšak bolo by vhodné model 2 doplniť o všeobecný vzťah pre stanovenie koeficientu K_d , a tak zvýšiť univerzálnosť modelu 2 pre valčekové valivé ložiská. To isté platí aj pre model 1 v prípade jeho použitia pre valčekové ložiská.

Pre stanovenie tuhosti pri kombinovanom zaťažení guľkových ložísk s kosouhlým stykom bol prezentovaný model 3 v dvoch variantoch. Pre prípad proporcionálneho axiálneho a radiálneho zaťažovania, aké bolo uvažované pre ložisko 7304 BECBM, model 3, ktorý zahrňuje zmenu stykového vplyvom axiálnej sily, poskytuje značne skreslené hodnoty radiálneho posuvu. V prípade kombinovaného zaťaženia je zmena stykového uhlu ovplyvnená ako axiálnym tak radiálnym zaťažením. Predpoklad o zmene stykového uhlu iba vplyvom axiálneho zaťaženia môže spôsobiť významné zníženie radiálnej tuhosti, čo vedie k nereálne vysokej hodnote radiálneho posuvu. Preto tento variant modelu 3 nie je vhodný pre proporcionálne zaťažovanie ložiska. Avšak v situáciách, kedy je axiálna zložka zaťaženia dominantná, tak sa dá očakávať, že tento variant modelu 3 bude poskytovať výsledky s lepšou presnosťou. Oproti tomu model 3, ktorý uvažuje konštantný stykový uhol, vykazuje pri proporcionálnom zaťažení približne rovnakú odchýlku axiálneho a radiálneho posuvu v porovnaní s MKP výpočtom. Presnejšie stanovenie stykového uhlu každého valivého elementu pri kombinovanom zaťažení, čo následne vedie k presnejšiemu popisu rozloženia zaťaženia v ložisku, si vyžaduje použitie komplexnejších matematických modelov. Príkladom môže byť model podľa Jonsa [20]. Podobne ako model 1, model 3 neuvažuje prítomnosť vnútornej vôle, čo môže viesť k ďalším nepresnostiam.

Na prezentovaných výsledkoch bolo poukázané na zásadný rozdiel medzi lineárnym a diferenciálnym tvarom tuhosti valivých ložísk. Linearizovaný tvar tuhosti stále poskytuje informáciu o veľkosti posuvov a deformácií v ložisku, ale už nepredstavuje korektný fyzikálny význam tuhosti ložiska. Rozdiel medzi lineárnym a diferenciálnym tvarom tuhosti je možné ukázať na prípade radiálneho ložiska s vôľou. Prítomnosť radiálnej vôle vedie k celkovo vyšším hodnotám posuvov. V prípade linearizovaného tvaru tuhosti, vyššie hodnoty posuvov spôsobujú pokles tuhosti ložiska počas celého priebehu zaťažovania. V realite však dochádza k vymedzeniu vnútornej vôle iba na počiatku zaťažovania a v ďalšom priebehu zaťažovania sa tuhosť ložiska s vôľou blíži tuhosti ložiska bez vôle. Takéto chovanie je zachytené v prípade vyjadrenia tuhosti v diferenciálnom tvare. Linearizovaný tvar tuhosti stále poskytuje cennú informáciu o vlastnosti ložisku, avšak jeho použitie si vyžaduje odborné posúdenie.

Treba podotknúť, že všetky predstavené modely zanedbávajú dynamické zaťaženie valivých ložísk. Pre vysokorýchlostné ložiská silové prírastky od dynamických účinkov vzhľadom k statickému zaťaženiu už nie sú zanedbateľné. Dynamické účinky rovnako spôsobujú zmenu geometrickej konfigurácie ložiska, ako napríklad zmenu stykového uhlu alebo stratu kontaktu valivých elementov s ložiskovými prstencami [2]. V takýchto prípadoch môže použitie vyššie uvedených modelov viesť k výrazne skresleným výsledkom.

9 ZÁVER

Na základe rešeršnej štúdie boli vytvorené 3 matematické modely pre výpočet tuhosti valivých ložísk:

- Model 1 pre stanovenie tuhosti guľkových a valčekových ložísk pri pôsobení axiálneho zaťaženia.
- Model 2 pre stanovenie tuhosti guľkových a valčekových ložísk pri pôsobení radiálneho zaťaženia.
- Model 3 pre stanovenie tuhosti guľkových ložísk s kosouhlým stykom pri pôsobení kombinovaného zaťaženia.

Všetky matematické modely boli implementované do výpočtových programov v programovacom jazyku *Python*.

Výsledky z 3 matematických modelov boli porovnané s numerickou statickou analýzou v programe *Ansys*. Analýza bola vykonaná pre 2 ložiská od spoločnosti *SKF*:

- Jednoradové guľkové ložisko s kosouhlým stykom 7304 BECBM
- Jednoradové radiálne valčekové ložisko NU 202 ECP

Pre modely 1 a 2 bola dosiahnutá veľmi dobrá zhoda s výsledkami stanovenými MKP výpočtom. Pre model 3 bola pozorovaná väčšia odchýlka od MKP výpočtu ako u modelov 1 a 2. Aj napriek tomu je možné konštatovať, že model 3 ponúka relevantné výsledky pre prípad kombinovaného zaťaženia, ktorý predstavuje komplexnejší problém v porovnaní s čisto axiálnym alebo radiálnym zaťažením valivého ložiska. Predstavené matematické modely umožňujú rýchlejší a dostupnejší výpočet tuhosti valivých ložísk a ich použitie môže zefektívniť proces voľby ložísk pre konkrétne aplikácie.

Všetky ciele diplomovej práce boli splnené.

10 ZOZNAM POUŽITÝCH ZDROJOV

- [1] SKF GROUP. Valivá ložiska. *PUB BU/P1 17000/1 CS* [online]. 2019 [vid. 2023-05-15]. Dostupné z: https://cdn.skfmediahub.skf.com/api/public/0901d1968096351e/pdf_preview_medium/0901d1968096351e_pdf_preview_medium.pdf#cid-121486
- [2] HARRIS, Tedric A. *Rolling Bearing Analysis, 4th Edition*. 2001.
- [3] HAMROCK, Bernard J., Steven R. SCHMID a Bo O. JACOBSON. *Fundamentals of fluid film lubrication*. B.m.: Marcel Dekker, 2004. ISBN 0824753712.
- [4] HERTZ, H. On the Contact of Rigid Elastic Solids and on Hardness. *Ch 6: Assorted Papers*. 1882.
- [5] CAO, Yuzhong a Yusuf ALTINTAS. A general method for the modeling of spindle-bearing systems. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* [online]. 2004, **126**(6), 1089–1104. ISSN 10500472. Dostupné z: doi:10.1115/1.1802311
- [6] BREWE, David E a Bernard J HAMROCK. Simplified Solution for Elliptical-Contact Deformation Between Two Elastic Solids. *Journal of Lubrication Technology*. 1977, **99**, 485–487.
- [7] LUNDBERG, G a H SJÖVALL. *Stress and Deformation in Elastic Contacts* [online]. B.m.: Institution of Theory of Elasticity and Strength of Materials, Chalmers University of Technology, 1958. Publication (Chalmers Tekniska Hogskola). Dostupné z: <https://books.google.sk/books?id=gCUrngEACAAJ>
- [8] PALMGREN, A. Ball and Roller Bearing Engineering. *Burkbank*. 1959.
- [9] GUAY, Pascal a Ahmed FRIKHA. *BALL BEARING STIFFNESS. A NEW APPROACH OFFERING ANALYTICAL EXPRESSIONS*. 2015.
- [10] SJÖVALL, H. The Load Distribution Within Ball and Roller Bearings Under Given External Radial and Axial Load. *TekniskTidskrift*. 1933.
- [11] CHEN, Guanci a Hailiang WANG. *CONTACT STRESS AND RADIAL STIFFNESS OF A CYLINDRICAL ROLLER BEARING WITH CORRECTED ROLLER GENERATOR* [online]. 2016. Dostupné z: www.nrcresearchpress.com
- [12] SOLDAT, Nataša, Radivoje MITROVIĆ, Ivana ATANASOVSKA a Radoslav TOMOVIĆ. A methodology for analyzing radial ball bearing vibrations. *Transactions of Famena* [online]. 2020, **44**(1), 13–28. ISSN 18491391. Dostupné z: doi:10.21278/TOF.44102

- [13] SINGH, Sarabjeet, Uwe G. KÖPKE, Carl Q. HOWARD a Dick PETERSEN. Analyses of contact forces and vibration response for a defective rolling element bearing using an explicit dynamics finite element model. *Journal of Sound and Vibration* [online]. 2014, **333**(21), 5356–5377. ISSN 10958568. Dostupné z: doi:10.1016/j.jsv.2014.05.011
- [14] HOU, Yu, Beijing JIAOTONG, Yi YIN, Xi WANG, • Yi YIN a • Xi WANG. Correction of Radial Load Distribution Integral for Radial Bearings Title page Correction of Radial Load Distribution Integral for Radial Bearings Correction of Radial Load Distribution Integral for Radial Bearings [online]. 2020. Dostupné z: doi:10.21203/rs.3.rs-36826/v1
- [15] XU, Hongyang, Duo HE, Hui MA, Kun YU, Xiang ZHAO a Yang YANG. A method for calculating radial time-varying stiffness of flexible cylindrical roller bearings with localized defects. *Engineering Failure Analysis* [online]. 2021, **128**. ISSN 13506307. Dostupné z: doi:10.1016/j.engfailanal.2021.105590
- [16] ARVID PALMGREN, Gunnar Palmgren, SKF Industries, inc. *Ball and Roller Bearing Engineering*. 3rd vyd. Philadelphia: SKF industries, 1959.
- [17] HOUPERT, L. A Uniform Analytical Approach for Ball and Roller Bearings Calculations. *ASME J. Tribol.* 1997, **119**, 851–858.
- [18] HERNOT, X., M. SARTOR a J. GUILLOT. Calculation of the stiffness matrix of angular contact ball bearings by using the analytical approach. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* [online]. 2000, **122**(1), 83–90. ISSN 10500472. Dostupné z: doi:10.1115/1.533548
- [19] LIU, Jing, Changke TANG, Hao WU, Zidan XU a Linfeng WANG. An analytical calculation method of the load distribution and stiffness of an angular contact ball bearing. *Mechanism and Machine Theory* [online]. 2019, **142**. ISSN 0094114X. Dostupné z: doi:10.1016/j.mechmachtheory.2019.103597
- [20] JONES, A B. *A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearings Under Arbitrary Load and Speed Conditions* [online]. 1960. Dostupné z: http://asmedigitalcollection.asme.org/fluidsengineering/article-pdf/82/2/309/5491164/309_1.pdf
- [21] NIU, Qingbo, Yeteng LI, Yongsheng ZHU, Shiyuan PEI, Yanjing YIN a Dongfeng WANG. Analytical Determination and Influence Analysis of Stiffness Matrix of Ball Bearing under Different Load Conditions. *Machines* [online]. 2022, **10**(4). ISSN 20751702. Dostupné z: doi:10.3390/machines10040238

- [22] NOEL, David, Mathieu RITOU, Benoît FURET, Sébastien LE LOCH, Mathieu RITOU BENOIT FURET a Sebastien LE LOCH. Complete Analytical Expression of the Stiffness Matrix of Angular Contact Ball Bearings. *Journal of Tribology* [online]. 2013, **135**(4), 41101. Dostupné z: doi:10.1115/1.4024109i
- [23] *Secant method* [online]. [vid. 2023-05-15]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Secant_method
- [24] *Trapezoidal rule* [online]. [vid. 2023-05-22]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_rule
- [25] HOU, Yu, Beijing JIAOTONG, Yi YIN, Xi WANG, • Yi YIN a • Xi WANG. Correction of Radial Load Distribution Integral for Radial Bearings Title page Correction of Radial Load Distribution Integral for Radial Bearings Correction of Radial Load Distribution Integral for Radial Bearings [online]. 2020. Dostupné z: doi:10.21203/rs.3.rs-36826/v1
- [26] LUO, Haitao, Yuxin LI, Changshuai YU, Guangming LIU a Xinyuan MAO. Numerical and experimental analysis of nonlinear static and dynamic stiffness of angular contact ball bearing. *Nonlinear Dynamics* [online]. 2023, **111**(3), 2281–2309. ISSN 1573269X. Dostupné z: doi:10.1007/s11071-022-07946-x
- [27] CIULLI, Enrico, Alberto BETTI a Paola FORTE. The Applicability of the Hertzian Formulas to Point Contacts of Spheres and Spherical Caps. *Lubricants* [online]. 2022, **10**(10). ISSN 20754442. Dostupné z: doi:10.3390/lubricants10100233
- [28] DEMIRHAN, Necdet a Bahattin KANBER. Stress and displacement distributions on cylindrical roller bearing rings using FEM. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* [online]. 2008, **36**(1), 86–102. ISSN 15397734. Dostupné z: doi:10.1080/15397730701842537
- [29] KÜRTEEN, Dominik, Iyas KHADER, Rahul RAGA, Paula CASAJÚS, Nicholas WINZER, Andreas KAILER, Reiner SPALLEK a Matthias SCHERGE. Hydrogen assisted rolling contact fatigue due to lubricant degradation and formation of white etching areas. *Engineering Failure Analysis* [online]. 2019, **99**, 330–342. ISSN 13506307. Dostupné z: doi:10.1016/j.engfailanal.2019.02.030
- [30] LONDHE, Nikhil D., Nagaraj K. ARAKERE a Ghatu SUBHASH. Extended Hertz theory of contact mechanics for case-hardened steels with implications for bearing fatigue life. *Journal of Tribology* [online]. 2018, **140**(2). ISSN 15288897. Dostupné z: doi:10.1115/1.4037359

11 ZOZNAM POUŽITÝCH SKRATIEK, SYMBOLOV A VELIČÍN

Symbol/Veličina	Jednotka	Popis
a	[mm]	Hlavná polos elipsy
A	[mm]	Vzdialenosť stredov krivosti drážok ložiskových prstencov
b	[mm]	Vedľajšia polos elipsy
C_0	[kN]	Statická únosnosť ložiska
d_m	[mm]	Rozteč ložiska
d_i	[mm]	Kontaktný priemer vnútorného prstenca
d_o	[mm]	Kontaktný priemer vonkajšieho prstenca
D	[mm]	Priemer valivého elementu
D_i	[mm]	Vnútorný priemer ložiska
D_o	[mm]	Vonkajší priemer ložiska
E	[GPa]	Modul pružnosti
E'	[GPa]	Redukovaný modul pružnosti
f	[–]	Geometrický parameter
F	[N]	Sila
\mathbf{F}	[N]	Vektor vonkajšieho zaťaženia
$F_{a,r}$	[N]	Axiálna, radiálna zložka zaťažujúcej sily
F_c	[N]	Odstredivá sila
I	[kg·mm ²]	Moment zotrvačnosti
$J_r, J_a, J_{aa}, J_{ra}, J_{rr}$	[–]	Funkcie rozloženia zaťaženia

Zoznam použitých skratiek, symbolov a veličín

K	$[\text{N} \cdot \text{mm}^{-1}]$	Tuhosť
\mathbf{K}	$[\text{N} \cdot \text{mm}^{-1}]$	Matica tuhosti
K_{aa}, K_{ra}, K_{rr}	$[\text{N} \cdot \text{mm}^{-1}]$	Členy matice tuhosti
$K_{a,t}$	$[\text{N} \cdot \text{mm}^{-n}]$	Deformačný koeficient
l	$[\text{mm}]$	Dĺžka valčeka
l_k	$[\text{mm}]$	Dĺžka kontaktu
m	$[\text{kg}]$	Hmotnosť
n	$[-]$	Deformačný exponent
M_g	$[\text{N} \cdot \text{m}]$	Gyroskopický moment
P_0	$[\text{kN}]$	Ekvivalentné statické zaťaženie
P_D	$[\mu\text{m}]$	Radiálna vôľa ložiska
Q	$[\text{N}]$	Sila v smere normály stykovej plochy
$Q_{a,r}$	$[\text{N}]$	Axiálna, radiálna zložka normálovej sily
Q_ψ	$[\text{N}]$	Sila v smere normály stykovej plochy valivého elementu na pozícii ψ
r	$[\text{mm}]$	Polomer drážky ložiskového prstenca
R	$[\text{mm}]$	Redukovaný polomer krivosti
$R_{x,y}$	$[\text{mm}]$	Polomer krivosti v jednotlivých rovinách
s	$[\text{mm}]$	Veľkosť prvku
X_0	$[-]$	Koeficient radiálneho zaťaženia
Y_0	$[-]$	Koeficient axiálneho zaťaženia
Z	$[-]$	Počet valivých elementov
ε	$[-]$	Eliptický integrál druhého druhu

\mathcal{F}	[–]	Eliptický integrál prvého druhu
α	[°]	Stykový uhol
β	[°]	Uhol osi rotácie valivého elementu s osou ložiska
γ	[–]	Geometrický parameter
δ	[mm]	Posuv, deformácia
$\boldsymbol{\delta}$	[mm]	Vektor posuvov/deformácií
$\delta_{a,r}$	[mm]	Axiálna/radiálna zložka posuvu/deformácie
δ_n	[mm]	Posuv/deformácia v smere normály stykovej plochy
δ_m	[mm]	Maximálna kontaktná deformácia
δ_{max}	[mm]	Deformácia najviac zaťaženého valivého elementu
δ_ψ	[mm]	Posuv/deformácia valivého elementu na pozícii ψ
ε	[–]	Faktor rozloženia zaťaženia
ϵ	[%]	Relatívna odchýlka
ρ	[kg·m ⁻³]	Hustota
κ	[–]	Parameter elipticity
μ	[–]	Poissonovo číslo
ψ	[°]	Uhlová pozícia valivého elementu
ψ_l	[°]	Medzný uhol
ψ_v	[°]	Uhol medzi osami dvoch susediacich valivých elementov
ω_m	[rad·s ⁻¹]	Uhlová orbitálna rýchlosť valivého elementu
ω_R	[rad·s ⁻¹]	Uhlová rýchlosť valivého elementu pre rotáciu okolo vlastnej osi

Index	Popis
<i>a</i>	Axiálny smer
<i>g</i>	Guľka
<i>i</i>	Vnútorňý prstenec
<i>j</i>	Číslo iterácie
<i>k</i>	Číslo valivého elementu
<i>o</i>	Vonkajší prstenec
<i>r</i>	Radiálny smer
<i>v</i>	Valček

Skratka	Popis
2DOF	2 Degrees of Freedom
5DOF	5 Degrees of Freedom
CAD	Computer Aided Design
MKP	Metóda Konečných Prvkov
FEA	Finite Element Analysis

12 ZOZNAM OBRÁZKOV A GRAFOV

Obr. 5-1 Typ valivého ložiska: (a) s bodovým stykom; (b) s čiarovým stykom [1]	15
Obr. 5-2 Prierez jednoradového radiálneho guľkového ložiska.....	16
Obr. 5-3 Prierez jednoradového radiálneho valčekového ložiska	17
Obr. 5-4 Sily pôsobiace na valivý element s nenulovým stykovým uhlom pri radiálnom zaťažení ložiska	18
Obr. 5-5 Prevedenie bočných prírub jednoradových radiálnych valčekových ložísk [1] ..	19
Obr. 5-6 Tvary stykových plôch a rozloženie tlakového napätia [2]: (a) bodový kontakt; (b) čiarový kontakt	20
Obr. 5-7 Geometria telies v kontakte	22
Obr. 5-8 Zmena stykového uhlu pri pôsobení axiálneho zaťaženia.....	25
Obr. 5-9 (a) Uhlová pozícia valivých elementov; (b) Posuv vnútorného prstenca pri radiálnom zaťažení	26
Obr. 5-10 Veľkosť záťažnej oblasti: (a) $PD = 0$, $\psi l = \pm 90^\circ$; (b) $PD > 0$, $0 < \psi l < 90^\circ$; (c) $PD < 0$ (Predpätie), $90^\circ < \psi l < 180^\circ$ [2].....	26
Obr. 5-11 Posuv vnútorného prstenca pri kombinácii radiálneho a axiálneho zaťaženia ..	28
Obr. 6-1 Schéma výpočtu axiálnej tuhosti	34
Obr. 6-2 Závislosť integrálu J_r na ε pre guľkové $n = 1,5$ a valčekové $n = 1,11$ ložiská	36
Obr. 6-3 Schéma výpočtu radiálnej tuhosti.....	37
Obr. 6-4 Závislosť integrálov J_{aa}, J_{ra}, J_{rr} na ε pre guľkové ložiská ($n = 1,5$)	39
Obr. 6-5 Schéma výpočtu 2x2 matice tuhosti: (a) bez zmeny stykového uhlu; (b) so zmenou stykového uhlu	40
Obr. 6-6 Vybrané ložiská od spoločnosti <i>SKF</i> : (a) 7304 BECBM; (b) NU 202 ECP	41
Obr. 6-7 Vplyv veľkosti polomeru drážky ložiskového prstenca na hodnotu kontaktnej deformácie δm	42
Obr. 6-8 (a) Polovičný model geometrie; (b) Aplikácia zaťažujúcich síl.....	44
Obr. 6-9 (a) Dielčí model kontaktu guľičky s vnútorným prstencom; (b) výpočtová sieť .	45
Obr. 6-10 Závislosť medzi silou Q a kontaktnou deformáciou δm ; (a) Kontakt guľičky na vnútornom prstenci; (b) Kontakt guľičky na vonkajšom prstenci	46
Obr. 6-11 Výpočtová sieť pre ložisko 7304 BECBM	47
Obr. 6-12 Smery pôsobenia radiálnej sily	48

Obr. 6-13 (a) 2D model geometrie; (b) aplikácia radiálnej sily	49
Obr. 6-14 Dielčí model kontaktu valčeka s vnútorným prstencom a výpočtová sieť: (a) 3D model; (b) 2D model	50
Obr. 6-15 Závislosť medzi silou Q a kontaktnou deformáciou δm ; (a) Kontakt valčeka na vnútornom prstenci; (b) Kontakt valčeka na vonkajšom prstenci	51
Obr. 6-16 Výpočtová sieť pre ložisko NU 202 ECP	51
Obr. 7-1 Axiálne zaťaženie ložiska 7304 BECBM $Fa = 19240$ N; (a) Celková deformácia; (b) Pole redukovaných napätí podľa podmienky von-Mises	52
Obr. 7-2 Závislosť axiálneho posuvu vnútorného prstenca na axiálnom zaťažení	53
Obr. 7-3 Rozloženie reakčných síl pri axiálnom zaťažení $Fa = 19240$ N	53
Obr. 7-4 Závislosť axiálnej tuhosti ložiska na axiálnom zaťažení	54
Obr. 7-5 Kombinované zaťaženie ložiska 7304 BECBM $Fa = 19240$ N, $Fr = 10000$ N ; (a) Celková deformácia; (b) Pole redukovaných napätí podľa podmienky von-Mises	55
Obr. 7-6 Rozloženie reakčných síl pri kombinovanom zaťažení $Fa = 19240$ N, $Fr = 10000$ N	56
Obr. 7-7 Celková deformácia a pole redukovaných napätí ložiska NU 202 ECP pri radiálnom zaťažení $Fr = 10000$ N; (a) $PD = 0$; (b) $PD = 0,0325$ mm	58
Obr. 7-8 Rozloženie reakčných síl pri radiálnom zaťažení $Fr = 10000$ N; (a) $PD = 0$; (b) $PD = 0,0325$ mm	59
Obr. 7-9 Závislosť radiálneho posuvu vnútorného prstenca na radiálnom zaťažení; (a) $PD = 0$; (b) $PD = 0,0325$ mm	60
Obr. 7-10 Závislosť radiálnej tuhosti na radiálnom zaťažení; (a) $PD = 0$; (b) $PD = 0,0325$ mm	60
Obr. 7-11 Závislosť radiálneho posuvu vnútorného prstenca na radiálnom zaťažení pre rôzne smery pôsobenia radiálnej sily; (a) $PD = 0$; (b) $PD = 0,0325$ mm	61
Obr. 7-12 Rozloženie reakčných síl pri radiálnom zaťažení $Fr = 10000$ N pre rôzne smery pôsobenia radiálnej sily; (a) $PD = 0$; (b) $PD = 0,0325$ mm	61

13 ZOZNAM TABULIEK

Tab. 6-1 Parametre ložiska 7304 BECBM	41
Tab. 6-2 Hodnoty axiálnej a radiálnej sily v jednotlivých záťažných krokoch	43
Tab. 6-3 Parametre pre metódu <i>Augmented Lagrange</i>	46
Tab. 6-4 Parametre ložiska NU 202 ECP	47
Tab. 6-5 Hodnoty radiálnej sily v jednotlivých záťažných krokoch	48
Tab. 6-6 Smer pôsobenia radiálnej sily pre ložisko NU 202 ECP	48
Tab. 7-1 Hodnoty stykového uhlu pri axiálnom zaťažení	54
Tab. 7-2 Hodnoty stykového uhlu pri kombinovanom zaťažení stanovené MKP výpočtom	56
Tab. 7-3 Hodnoty axiálneho a radiálneho posuvu vnútorného prstenca vplyvom kombinovaného zaťaženia	56
Tab. 7-4 Porovnanie veľkosti posuvov pri kombinovanom zaťažení $F_a = 19240$ N, $F_r = 10000$ N	57
Tab. 7-5 Hodnoty linearizovaných členov 2x2 matice tuhosti	57

14 ZOZNAM PRÍLOH

Model 1_Gulkove loziska.ipynb

Model 1_Valcekove loziska.ipynb

Model 2_Gulkove loziska.ipynb

Model 2_Valcekove loziska.ipynb

Model 3_Konstantny stykovy uhol.ipynb

Model 3_Premenny stykovy uhol.ipynb