

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA EXPERIMENTÁLNÍ FYZIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Sbírka řešených úloh z molekulové fyziky
a termodynamiky



Vypracoval:	Jakub Ivanič
Studijní program:	B1701 Fyzika
Studijní obor:	1701R003 Fyzika se zaměřením na vzdělávání
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Renata Holubová, CSc.
Termín odevzdání práce:	duben 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Renaty Holubové, CSc., a že jsem použil zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 1. dubna 2019

.....
Jakub Ivanič

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucí mé bakalářské práce paní RNDr. Renatě Holubové, CSc., za připomínky a pomoc při tvorbě jednotlivých příkladů.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Jakub Ivanič
Název práce	Sbírka řešených úloh z molekulové fyziky a termodynamiky
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	RNDr. Renata Holubová, CSc.
Rok obhajoby práce	2019
Abstrakt	Bakalářská práce se věnuje řešeným úlohám z oblasti molekulové fyziky a termodynamiky na úrovni prvního ročníku bakalářského studia fyziky na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci. Příklady jsou rozděleny do čtyř kapitol a jsou určeny především studentům fyziky prvního ročníku na osvojení, procvičení a zapamatování si probírané problematiky v rámci předmětu Molekulová fyzika a termodynamika.
Klíčová slova	řešené úlohy, molekulová fyzika a termodynamika, model ideálního plynu, kinetická teorie plynů, tlak plynu, Daltonův zákon aditivity parciálních tlaků, Maxwellův pravděpodobnostní zákon rozdělení rychlostí molekul, střední volná dráha molekuly ideálního plynu
Počet stran	90
Počet příloh	1
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Jakub Ivanič
Title	Collection of solved exercises from molecular physics and thermodynamics
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	RNDr. Renata Holubová, CSc.
The year of presentation	2019
Abstract	This bachelor thesis is dedicated to solved exercises from molecular physics and thermodynamics on a first year of undergraduate study level of physics on Faculty of Science of Palacky University in Olomouc. The exercises are separated into four chapters and they are intended primarily for students of first year physics to acquire, practice and memorize the topics discussed in subject Molecular Physics and Thermodynamics.
Keywords	solved exercises, molecular physics and thermodynamics, model of ideal gas, kinetic theory, pressure of gas, Dalton's law of partial pressures, Maxwell velocity distribution, mean free path of ideal gas molecules
Number of pages	90
Number of appendices	1
Language	czech

Obsah

Úvod	7
1 Základní rovnice pro tlak ideálního plynu	9
1.1 Určení neznámého plynu	9
1.2 Střední kinetická energie molekul neznámého plynu po adiabatické expanzi	12
1.3 Výpočet střední kvadratické rychlosti molekul plynu	14
1.4 Měření teploty pomocí plynu	17
1.5 Výtah	23
1.6 Určení hustot dvou závaží pomocí zařízení obsahujícího plyn	27
1.7 Výpočet práce zkoumaného plynu	31
2 Daltonův zákon aditivity parciálních tlaků	34
2.1 Výpočet výsledného tlaku soustavy čtyř plynů	34
2.2 Výpočet jednotlivých tlaků zadaných plynů	36
2.3 Výpočet výšky nádoby se zatíženou pohyblivou horní podstavou	40
2.4 Tělísko v trubici se soustavou tří plynů	44
3 Maxwellův pravděpodobnostní zákon rozdělení rychlostí molekul ideálního plynu	50
3.1 Obecné odvození Maxwellova pravděpodobnostního zákona rozdělení rychlostí molekul plynu	50
3.2 Výpočet jednotlivých rychlostí molekul plynu	55
3.3 Relativní počet molekul s rychlostmi v zadaném intervalu s využitím lineární interpolace	61
3.4 Relativní počet molekul s rychlostmi v zadaném intervalu s využitím Taylorovy řady	65
3.5 Výpočet relativního počtu molekul plynu s rychlostmi v zadaném intervalu obdélníkovou metodou	69
3.6 Výpočet hodnoty poměru η	72
3.7 Výpočet relativního počtu molekul ideálního plynu s využitím Gaussovy chybové funkce	77
4 Střední volná dráha molekuly	81
4.1 Určení rozdílu nadmořských výšek	81
4.2 Výpočet průměru sféry molekulárního působení molekuly plynu v uzavřené nádobě	84
Závěr	89
Literatura	90

Úvod

Tato bakalářská práce s názvem *Sbírka řešených úloh z molekulové fyziky a termodynamiky*, jejíž úvod právě čtete, se zabývá aplikací vybraných fyzikálních a matematických závěrů z oblasti molekulové fyziky a termodynamiky. Obsahuje soubor dvaceti řešených příkladů se zaměřením na kinetickou teorii plynů na úrovni prvního ročníku bakalářského studia fyziky na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci.

Sbírka řešených příkladů je určena především pro studenty prvního ročníku bakalářského studia fyziky absolvující předmět Molekulová fyzika a termodynamika. Práce je vizuálně koncipována jako studijní materiál vhodný pro samostudium nebo využitelný v rámci výuky.

Pro výběr tohoto tématu bakalářské práce jsem byl ovlivněn následujícím faktorem. Již během mého studia na střední škole jsem se zabýval tvorbou pracovních listů v rámci projektů na různá témata v jednotlivých předmětech. Zjistil jsem, že mne toto vytváření úkolů či námětů k přemýšlení zajímá a určitým způsobem fascinuje. Význam fascinace v tomto případě představuje to, že člověk vytvářející pracovní listy může vymyslet a vytvořit úlohy, jejichž znění v ideálním případě ještě nikdo nevymyslel, a tedy ani nikdo před tím neřešil.

Výběrem tohoto tématu na bakalářskou práci jsem mohl vytvořit soubor vlastních úloh, které doufám, pomůžou alespoň některým studentům prvních ročníků bakalářského studia fyziky pro zdárné absolvování předmětu. Z vlastního pozorování spolužáků v předcházejících akademických rocích během seminářů fyziky jsem dospěl k závěru, že v mnoha případech neúspěchů je problémem skutečnost, že úroveň znalostí matematiky ze střední školy, potřebná pro úspěšné absolvování studia fyziky, není dostatečná. Hlavně z tohoto důvodu jsme chtěl vypracovat sbírku řešených příkladů, jejichž obecný postup řešení je popsán dostatečně podrobně a je obohacen obrazovým materiálem, který zadanou situaci dokáže čtenáři ozřejmit a vysvětlit.

Před samotným vytvářením řešených příkladů jsem se zabýval studiem odborné literatury, která zpracovává problematiku termodynamiky a molekulové fyziky, zejména tedy kinetickou teorii plynů. Jedná se například o publikace [2] a [4] v českém jazyce či [3] v anglickém jazyce. Následně jsem procházel různé zdroje obsahující zadání příkladů z termodynamiky a molekulové fyziky, ve kterých jsem hledal inspiraci k vytvoření vlastních zadání příkladů či způsobu jejich zpracování. Mezi nejdůležitější bych rád uvedl publikaci [1] obsahující různé příklady v anglickém jazyce či sbírku řešených úloh, která vznikla na Katedře didaktiky fyziky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, kterou je možné dohledat pod internetovým odkazem <http://reseneulohy.cz/cs>.

Po studiu popsaných zdrojů jsem se následně zabýval zpracováváním souboru dvaceti řešených příkladů na popsané téma výše. Každý příklad v mé bakalářské práci je rozčleněn do několika částí následujícím způsobem. Nejprve je uvedeno zadání příkladu, které je graficky odděleno od ostatních částí příkladu. Zadané fyzikální veličiny jsou

přehledně sepsány ve formě tabulky, ve které jsou hodnoty těchto fyzikálních veličin převedeny na základní jednotky soustavy SI. Poté následuje část obsahující obecný postup řešení se slovním komentářem a popisem jednotlivých matematických úprav. Na konci příkladu je uvedeno číselné dosazení zadaných hodnot do odvozeného vztahu a shrnutí příkladu.

Některé příklady obsahují námět k zamyšlení zaměřený na úpravu odvozeného vztahu či uvědomění si významu přímé či nepřímé úměry mezi některou dvojicí fyzikálních veličin. Příklady jsou doplněny obrazovým materiálem sloužícím k objasnění zadané situace. Všechny obrázky kromě jednoho byly vytvořeny autorem bakalářské práce v programu GEOGEBRA.

Samotná bakalářská práce je rozčleněna do čtyř kapitol, jejichž členění kopíruje obsah kapitoly věnované kinetické teorii plynů v studijním textu [2] k předmětu Molekulová fyzika a termodynamika. První kapitola se věnuje základním matematickým vztahům, které popisují tlak ideálního plynu. Tato kapitola obsahuje celkem sedm řešených příkladů. Druhá část bakalářské práce je zaměřena na Daltonův zákon aditivity parciálních tlaků ve čtyřech příkladech.

Stěžejní třetí část práce zpracovávající Maxwellův pravděpodobnostní zákon rozdělení rychlostí molekul obsahuje sedm příkladů. V rámci této kapitoly je uvedeno samotné odvození popsání pravděpodobnostního zákona i důležitých vztahů popisujících zaváděné rychlosti molekul v ideálním plynu. Poslední kapitola se zaměřením na střední volnou dráhu molekuly ideálního plynu obsahuje pouze dva příklady, které slouží zejména k procvičení matematických vztahů.

Na konci bakalářské práce je příloha obsahující přehled doporučeného značení používaných fyzikálních veličin, včetně jejich jednotek v soustavě SI. Tato příloha také obsahuje hodnoty konstant, které se v příkladech vyskytují a na které nebude v textu zvlášť odkazováno. Bakalářská práce je napsána v typografickém systému L^AT_EX.

Kapitola 1

Základní rovnice pro tlak ideálního plynu

První kapitola je věnována matematickým vztahům, popisujícím makroskopickou fyzikální stavovou veličinu tlak p ideálního plynu. Odvození jednotlivých závěrů může čtenář najít například v [2].

1.1 Určení neznámého plynu

Zadání příkladu

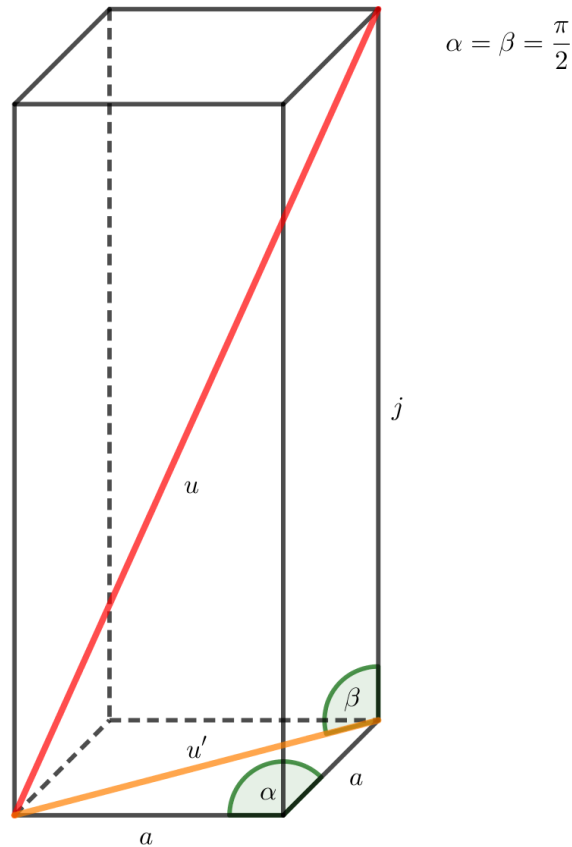
Uvažujeme neznámý plyn, který se nachází v nádobě ve tvaru kvádrů s podstavou ve tvaru čtverce o straně a dlouhé $a = 3$ m a o tělesové uhlopříčce u s délkou $u = 9$ m. Výsledný tlak p , který umístěný plyn v nádobě vytváří, je roven hodnotě $p = 5,25 \cdot 10^6$ Pa. Střední kinetická energie W_k molekul plynu je rovna hodnotě $W_k = 1,035 \cdot 10^{-20}$ J. Hmotnost m plynu v nádobě je $m = 300,726$ kg. S využitím periodické tabulky prvků určete, o jaký plyn se jedná. Víte, že neznámý plyn je dvouatomový.

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Délka strany podstavy	a	3 m
Délka tělesové uhlopříčky	u	9 m
Střední kinetická energie molekul	W_k	$1,035 \cdot 10^{-20}$ J
Tlak	p	$5,25 \cdot 10^6$ Pa
Hmotnost	m	300,726 kg
Počet stupňů volnosti	i	5
Molární hmotnost	M_m	? kg · mol ⁻¹

Tabulka 1.1: Zapis zadaných hodnot v tabelové podobě.

Obecný postup řešení

V řešení zadaného příkladu musíme dospět k určité fyzikální veličině, která každý plyn charakterizuje jednoznačně. V zadání se nachází nápověda, která říká, že název



Obrázek 1.1: Znáznornění nádoby s plynem.

plynu máme určit pomocí periodické tabulky prvků, v níž se nachází například hodnoty molárních hmotností M_m prvků.

Neznámý dvouatomový plyn je charakterizován střední kinetickou energií W_k molekul, která je rovna hodnotě $W_k = 1,035 \cdot 10^{-20}$ J, tlakem p , jehož hodnota je rovna hodnotě $p = 5,25 \cdot 10^6$ Pa, a nakonec hmotností $m = 300,726$ kg. Vzhledem k tomu, že se jedná o dvouatomový plyn, je s využitím věty o ekvipartici počet stupňů volnosti $i = 5$.

Plyn je umístěn v nádobě ve tvaru kvádrů o podstavě ve tvaru čtverce. Délka strany podstavy a je rovna hodnotě $a = 3$ m. Kvádr máme zadáný ještě délkou tělesové uhlopříčky u o hodnotě $u = 9$ m. Nejdříve si obecně vyjádříme vztah pro výpočet objemu V použité nádoby. Budeme postupovat dle obrázku 1.1 se znázorněním nádoby.

Pro délku uhlopříčky u' čtvercové podstavy lze s využitím vlastností pravoúhlého trojúhelníku napsat vztah

$$u' = a\sqrt{2}. \quad (1.1)$$

Pro výšku j nádoby lze také z vlastností pravoúhlého trojúhelníku a s využitím předešlého vztahu 1.1 napsat následující vztah

$$j = \sqrt{u^2 - 2a^2}. \quad (1.2)$$

Vzhledem ke vztahům 1.1 a 1.2 lze pro objem V nádoby daného tvaru psát vztah

$$V = a^2\sqrt{u^2 - 2a^2}. \quad (1.3)$$

K řešení příkladu lze využít stavovou rovnici ideálního plynu, kterou lze zapsat s využitím materiálových vztahů v následujícím tvaru

$$pV = \frac{m}{M_m} R_m T. \quad (1.4)$$

Vzhledem k odvozenému vztahu v [2] lze pro střední kinetickou energii W_k molekul neznámého plynu napsat vyjádření

$$W_k = \frac{i}{2} kT, \quad (1.5)$$

z kterého můžeme vyjádřit termodynamickou teplotu T . Po vyjádření dostáváme vztah ve tvaru

$$T = \frac{2}{ik} W_k. \quad (1.6)$$

Obecně odvozené rovnice 1.3 a 1.6 lze dosadit do vztahu 1.4. Po dosazení můžeme napsat

$$pa^2 \sqrt{u^2 - 2a^2} = \frac{2m}{ikM_m} R_m W_k. \quad (1.7)$$

Neznámou v předešlém vyjádření 1.7 je hodnota molární hmotnosti M_m neznámého plynu, proto vztah 1.7 ekvivalentně upravíme do tvaru

$$M_m = \frac{2mR_m W_k}{ikpa^2 \sqrt{u^2 - 2a^2}}. \quad (1.8)$$

Předešlý obecně odvozený vztah 1.8 je vztah pro výpočet molární hmotnosti M_m neznámého plynu. Po dosazení zadaných hodnot lze hodnotu určit také číselně.

Číselné dosazení

Číselné hodnoty ze zadání příkladu dosadíme do vztahu 1.8. Dostáváme následující

$$M_m = \frac{2 \cdot 300,726 \cdot 8,314 \cdot 1,035 \cdot 10^{-20}}{5 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 5,25 \cdot 10^6 \cdot 3^2 \sqrt{9^2 - 2 \cdot 3^2}} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1};$$

$$M_m \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Shrnutí zadaného příkladu

Vzhledem k vykonanému výpočtu molární hmotnosti M_m lze konstatovat, že neznámým plynem byl vodík H_2 .

1.2 Střední kinetická energie molekul neznámého plynu po adiabatické expanzi

Zadání příkladu

Na začátku měření byl stav neznámého ideálního plynu popsán tlakem p_1 a jeho termodynamickou teplotou $T_1 = 675$ K. Po adiabatické expanzi bylo možné stav daného plynu popsat tlakem p_2 a termodynamickou teplotou T_2 . Určete počet stupňů volnosti i neznámého plynu a následně střední kinetickou energii W_k molekul plynu po adiabatické expanzi, pokud víte, že $p_2 = \frac{1}{2}p_1$ a $T_1 = \sqrt[3]{4}T_2$. Využijte vztah

$$\kappa = \frac{i + 2}{i}, \quad (1.9)$$

ve kterém κ představuje Poissonovu konstantu.

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Poměr tlaků	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{1}{2}$
Termodynamická teplota	T_1	675 K
Poměr termodynamických teplot	$\frac{T_1}{T_2}$	$\sqrt[3]{4}$
Počet stupňů volnosti	i	?
Střední kinetická energie molekul	W_k	? J

Tabulka 1.2: Zápis zadaných hodnot v tabelové podobě.

Obecný postup řešení

Stav neznámého ideálního plynu se dal před adiabatickou expanzí popsat tlakem p_1 a termodynamickou teplotou T_1 . Po provedení adiabatické expanze byl neznámý ideální plyn popsateľný tlakem p_2 a termodynamickou teplotou T_2 . Vzhledem k provedenému adiabatickému ději musí platit Poissonova rovnice, kterou lze s využitím zavedeného značení napsat ve tvaru

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa. \quad (1.10)$$

Ideální plyn lze s výhodou popsat stavovou rovnicí, která je obecně ve tvaru

$$pV = nR_m T, \quad (1.11)$$

ze které můžeme vyjádřit objem V a dosadit do vztahu 1.10. Po dosazení dostaneme následující vztah

$$p_1 \left(\frac{nR_m T_1}{p_1} \right)^\kappa = p_2 \left(\frac{nR_m T_2}{p_2} \right)^\kappa, \quad (1.12)$$

který lze následně upravit do ekvivalentního tvaru

$$\frac{p_1}{p_1^\kappa} (nR_m)^\kappa T_1^\kappa = \frac{p_2}{p_2^\kappa} (nR_m)^\kappa T_2^\kappa; \quad (1.13)$$

$$p_1^{1-\kappa} T_1^\kappa = p_2^{1-\kappa} T_2^\kappa. \quad (1.14)$$

V zadání příkladu máme určené poměry $\frac{p_2}{p_1}$ a $\frac{T_1}{T_2}$. Proto předešlou rovnost 1.14 upravíme do následujícího tvaru

$$\frac{T_1^\alpha}{T_2^\alpha} = \frac{p_2^{1-\alpha}}{p_1^{1-\alpha}}; \quad (1.15)$$

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^\alpha = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha}, \quad (1.16)$$

což lze vzhledem ke vztahu 1.9 napsat jako vyjádření ve tvaru

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{i+2}{i}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{i+2}{i}}; \quad (1.17)$$

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{i+2}{i}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{2}{i}}. \quad (1.18)$$

Neznámou v tomto případě je počet stupňů volnosti i . Předešlý vztah 1.18 lze logaritmováním převést na následující tvar

$$\ln \left[\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{i+2}{i}} \right] = \ln \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{2}{i}} \right]; \quad (1.19)$$

$$\frac{i+2}{i} \ln \left(\frac{T_1}{T_2}\right) = -\frac{2}{i} \ln \left(\frac{p_2}{p_1}\right). \quad (1.20)$$

Rovnost 1.20 lze ekvivalentními úpravami převést na tvar

$$i = -\frac{2 \ln \left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\ln \left(\frac{T_1}{T_2}\right)} - 2. \quad (1.21)$$

S využitím odvozených vztahů v [2] lze pro střední kinetickou energii W_k molekul ideálního plynu po adiabatické expanzi napsat vztah

$$W_k = \frac{i}{2} k T_2. \quad (1.22)$$

S využitím zadaného poměru termodynamických teplot $\frac{T_1}{T_2}$ a rovnosti 1.21 lze předešlý vztah upravit do následujícího tvaru

$$W_k = \frac{1}{2} \left[-\frac{2 \ln \left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\ln \left(\frac{T_1}{T_2}\right)} - 2 \right] \frac{T_1}{\sqrt[7]{4}} k; \quad (1.23)$$

$$W_k = - \left[\frac{\ln \left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\ln \left(\frac{T_1}{T_2}\right)} + 1 \right] \frac{\sqrt[7]{4096}}{4} T_1 k. \quad (1.24)$$

Číselné dosazení

Dosazením zadaných hodnot do obecně odvozeného vztahu 1.24 lze hodnotu střední kinetické energie W_k molekul zkoumaného neznámého plynu určit také číselně. Po dosazení dostáváme

$$W_k = - \left[\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(\sqrt[7]{4})} + 1 \right] \cdot \frac{\sqrt[7]{4096}}{4} \cdot 675 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J};$$
$$W_k \approx 1,91 \cdot 10^{-20} \text{ J}.$$

Shrnutí zadaného příkladu a námět k zamyšlení

Po dosazení zadaných hodnot příkladu do obecně odvozeného vztahu 1.24 jsme dospěli k závěru, že hodnota střední kinetické energie W_k molekul zkoumaného plynu je rovna hodnotě $W_k = 1,91 \cdot 10^{-20} \text{ J}$.

Ze vztahu 1.21 vyplývá, že zkoumaný plyn má počet stupňů volnosti $i = 5$. Jaký poměr tlaků $\frac{p'_1}{p'_2}$ při zachování poměru $\frac{T_1}{T_2}$, kde p'_1 je tlak plynu před adiabatickou expanzí a p'_2 je tlak po provedení adiabatické expanze, by musel být, aby se jednalo o ideální plyn s počtem stupňů volnosti $i = 6$? Odpověď na dotaz získáte úpravou vztahu 1.21.

1.3 Výpočet střední kvadratické rychlosti molekul plynu

Zadání příkladu

Na začátku experimentu lze zkoumaný plyn dusík N_2 charakterizovat stavovými veličinami tlakem p_1 a objemem $V_1 = 128 \text{ m}^3$. Rychlou adiabatickou expanzí jsme dospěli ke snížení tlaku plynu na hodnotu $p_2 = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ a změně objemu na hodnotu V_2 . Následně se při konstantní termodynamické teplotě T_2 změnil stav zkoumaného plynu tak, že se dal charakterizovat tlakem p_3 a objemem V_3 . Vypočtete střední kvadratickou rychlost v_k molekul plynu na konci experimentu, pokud víte, že se tlak po adiabatické expanzi pětkrát zmenšil. Hmotnost m použitého plynu byla rovna hodnotě $m = 100 \text{ kg}$ a hmotnost m' jedné molekuly dusíku N_2 je $m' = 46,5 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. K řešení využijte vztahu

$$\varkappa = \frac{i + 2}{i}, \quad (1.25)$$

ve kterém i představuje počet stupňů volnosti a \varkappa je Poissonova konstanta.

Obecný postup řešení

Na začátku experimentu jsme stav dusíku N_2 charakterizovali stavovými veličinami tlakem p_1 a objemem $V_1 = 128 \text{ m}^3$. Následně jsme provedli adiabatickou expanzi, po které byl stav plynu charakterizován tlakem $p_2 = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ a objemem V_2 . V zadání příkladu je uvedeno, že se po provedené adiabatické expanzi tlak pětkrát zmenšil.

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Objem	V_1	128 m ³
Tlak	p_2	$3 \cdot 10^5$ Pa
Poměr tlaků	$\frac{p_1}{p_2}$	5
Hmotnost plynu	m	100 kg
Hmotnost molekuly plynu	m'	$46,5 \cdot 10^{-27}$ kg
Počet stupňů volnosti	i	5
Střední kvadratická rychlost	v_k	? m · s ⁻¹

Tabulka 1.3: Zázpis zadaných hodnot v tabelové podobě.

Pro hodnoty tlaků p_1 a p_2 tedy plyne, že $p_1 = 5p_2$. Adiabatická expanze je popsána Poissonovou rovnicí

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma, \quad (1.26)$$

kterou lze s využitím zadaného vztahu 1.25 a vztahu mezi hodnotami tlaků p_1 a p_2 přepsat a upravit do následujícího tvaru

$$5p_2 V_1^{\frac{i+2}{i}} = p_2 V_2^{\frac{i+2}{i}}; \quad (1.27)$$

$$5V_1^{\frac{i+2}{i}} = V_2^{\frac{i+2}{i}}; \quad (1.28)$$

$$5^{\frac{i}{i+2}} V_1 = V_2. \quad (1.29)$$

Následně se při konstantní hodnotě termodynamické teploty T_2 změnil tlak z hodnoty $p_2 = 3 \cdot 10^5$ Pa na hodnotu p_3 a objem z hodnoty V_2 na hodnotu V_3 . Jedná se o izotermický děj, který popisuje Boyle-Mariottův zákon. Můžeme tedy napsat vztah ve tvaru

$$p_2 V_2 = p_3 V_3. \quad (1.30)$$

S využitím stavové rovnice ideálního plynu lze pravou stranu předešlé rovnosti 1.30 nahradit následujícím způsobem

$$p_2 V_2 = n R_m T_3; \quad (1.31)$$

$$p_2 V_2 = \frac{m}{M_m} R_m T_3, \quad (1.32)$$

kde M_m představuje molární hmotnost, kterou lze vyčíst z periodické tabulky prvků. S využitím upraveného vztahu 1.29 lze předešlou rovnost 1.32 dále přepsat a upravit do následující podoby

$$5^{\frac{i}{i+2}} p_2 V_1 = \frac{m}{M_m} R_m T_3; \quad (1.33)$$

$$T_3 = \frac{5^{\frac{i}{i+2}} p_2 V_1 M_m}{m R_m}. \quad (1.34)$$

Vzhledem k odvozenému vyjádření v [2] lze pro střední kinetickou energii W_k molekul plynu na konci experimentu napsat následující dvojici vztahů

$$W_k = \frac{1}{2}m'v_k^2; \quad (1.35)$$

$$W_k = \frac{i}{2}kT_3. \quad (1.36)$$

Porovnáním těchto vztahů 1.35 a 1.36 a následným vyjádřením střední kvadratické rychlosti v_k molekul plynu dostáváme vztah ve tvaru

$$\frac{1}{2}m'v_k^2 = \frac{i}{2}kT_3; \quad (1.37)$$

$$v_k = \sqrt{\frac{ikT_3}{m'}}. \quad (1.38)$$

Dosazením vyjádření 1.34 do vztahu 1.38 dostáváme vztah pro výpočet střední kvadratické rychlosti v_k molekul plynu. Tento vztah je ve tvaru

$$v_k = \sqrt{5^{\frac{i}{i+2}} \frac{ikp_2V_1M_m}{m'mR_m}}. \quad (1.39)$$

Číselné dosazení

Vztah 1.39 představuje obecně odvozený vztah pro výpočet střední kvadratické rychlosti v_k molekul zadaného plynu. Dosazením hodnot ze zadání určíme danou veličinu i číselně. Můžeme napsat

$$v_k = \sqrt{5^{\frac{5}{7}} \cdot \frac{5 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 128 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{46,5 \cdot 10^{-27} \cdot 100 \cdot 8,314}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$v_k \approx 2461,33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Shrnutí zadaného příkladu a námět k zamyšlení

Po provedení experimentu se zkoumaným plynem dusíkem N_2 , který se skládal z dvojice dějů (adiabatický a izotermický děj), byla střední kvadratická rychlost v_k molekul plynu rovna hodnotě $v_k = 2461,33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Zkuste se zamyslet, jakou hodnotu střední kvadratické rychlosti v_k molekul by měla při stejných hodnotách molekula vodíku H_2 ? Byla by tato hodnota větší nebo menší?

1.4 Měření teploty pomocí plynu

Zadání příkladu

Mějme zařízení, jehož schéma je načrtnuto na obrázku 1.2. Na nakloněné rovině, která svírá s vodorovným směrem úhel α , je umístěna trubice. Tato trubice má dolní část uzavřenou. V horní části jsou umístěna dvířka, kterými se do zařízení vkládá tělísko. Uvažované tělísko, znázorněné na obrázku 1.3, má následující rozměry $a = 2$ cm, $b = 3$ cm a $c = 5$ cm. Při vložení tělíska do trubice platí, že žádná částice plynu v ní kolem tělíska neprojde. Mezi tělískem a vnitřním povrchem trubice působí vektor třecí síly \mathbf{F}_t , jehož velikost je rovna hodnotě $F_t = 15$ N. Délka trubice s je rovna hodnotě $s = 5$ cm a výška j dvířek nad vodorovnou podložkou je $j = 3$ cm. Trubice je naplněna plynem o látkovém množství $n = 5 \cdot 10^{-5}$ mol. Na nakloněné rovině je uvedena číselná stupnice v centimetrech. Vypočtete, jakou termodynamickou teplotu T má plyn v zařízení, pokud víte, že se tělísko ustálilo ve vzdálenosti $d = 2$ cm, kterou jsme odečetli na číselné stupnici zařízení. Tělísko je vyrobeno z mahagonového dřeva o hustotě $\rho = 700$ kg \cdot m $^{-3}$. Neuvažujte teplotní roztažnost tělíska.

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Šířka tělíska	a	$2 \cdot 10^{-2}$ m
Výška tělíska	b	$3 \cdot 10^{-2}$ m
Délka tělíska	c	$5 \cdot 10^{-2}$ m
Velikost třecí síly	F_t	15 N
Délka trubice	s	$5 \cdot 10^{-2}$ m
Výška	j	$3 \cdot 10^{-2}$ m
Látkové množství	n	$5 \cdot 10^{-5}$ mol
Vzdálenost po ustálení	d	$2 \cdot 10^{-2}$ m
Hustota tělíska	ρ	700 kg \cdot m $^{-3}$

Tabulka 1.4: Zápis zadaných hodnot v tabelové podobě.

Obecný postup řešení

Po vložení tělíska do zařízení se dané tělísko ustálí v určité poloze na nakloněné rovině. Při tomto ustálení dojde k následující rovnosti vektorů působících sil

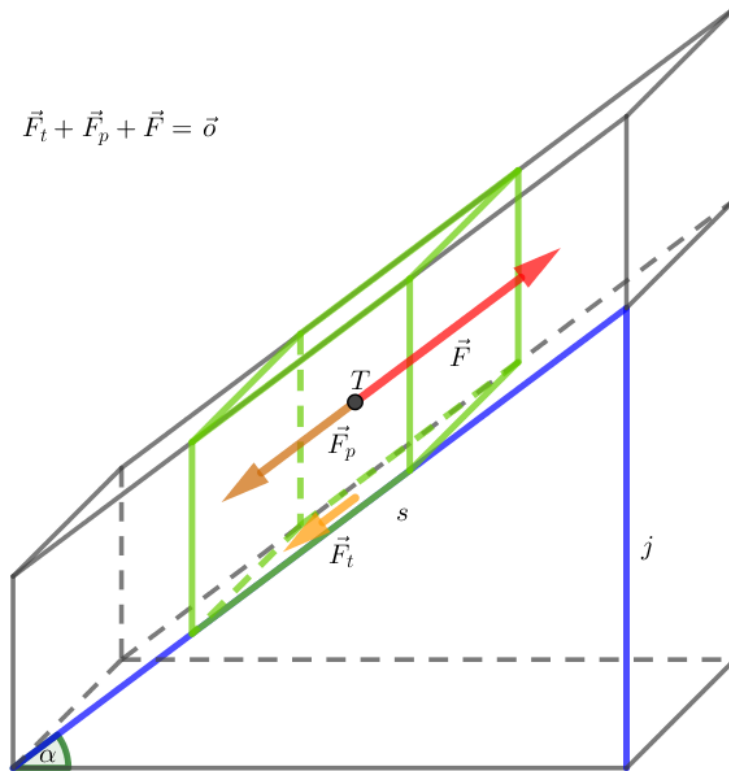
$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_t = \mathbf{o}, \quad (1.40)$$

ve které \mathbf{F} značí vektor síly, kterou působí částice plynu na tělísko v zařízení, \mathbf{F}_p představuje vektor, který je tečnou (pohybovou) složkou vektoru tíhové síly \mathbf{F}_G tělíska, \mathbf{F}_t je vektor působící třecí síly mezi vnitřním povrchem trubice a tělískem a nakonec \mathbf{o} představuje nulový vektor.

Kolmo k nakloněné rovině působí vektor \mathbf{F}_n , který je normálovou složkou vektoru tíhové síly \mathbf{F}_G . Platí tedy následující vztah

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_n. \quad (1.41)$$

$$\vec{F}_t + \vec{F}_p + \vec{F} = \vec{o}$$



Obrázek 1.2: Znáznornění zařízení s vloženým tělískem.

S využitím podobnosti trojúhelníků a obrázku 1.3 pro velikosti vektorů sil \mathbf{F}_G a \mathbf{F}_p platí, že

$$F_p = F_G \sin(\alpha); \quad (1.42)$$

$$F_p = mg \sin(\alpha). \quad (1.43)$$

Vzhledem k zadaným hodnotám lze předešlý vztah 1.43 přepsat do ekvivalentního tvaru

$$F_p = \frac{\rho V g j}{s}. \quad (1.44)$$

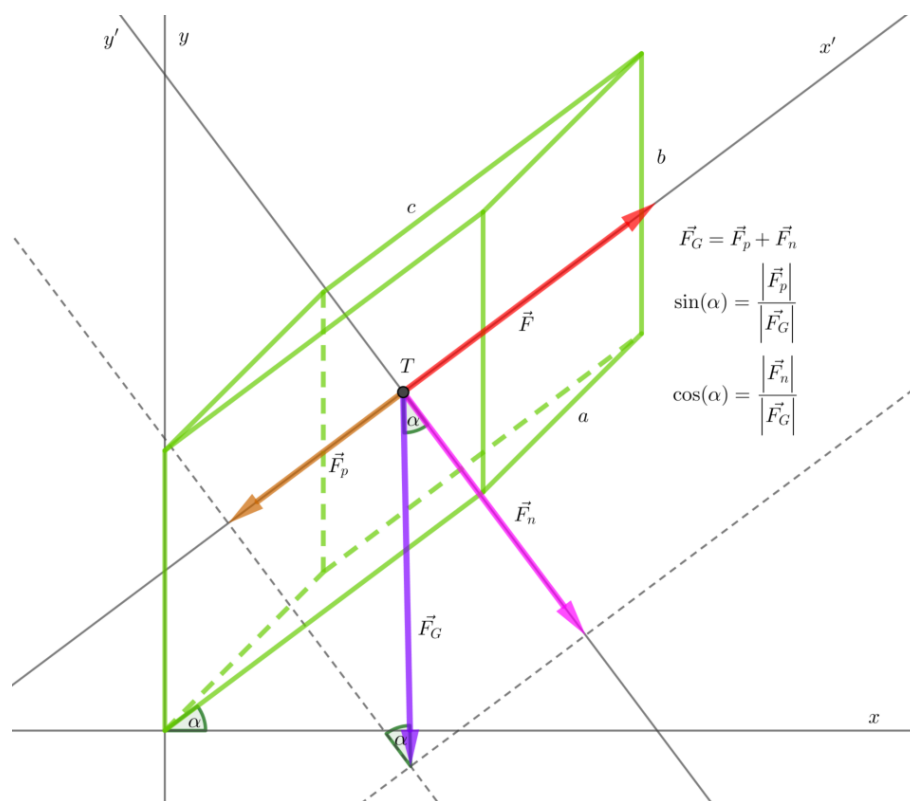
Uřídíme si obecný vztah pro výpočet objemu V zkoumaného tělíška. Jedná se o těleso, jehož podstava má tvar kosodélníku s rozměry $b = 3 \cdot 10^{-2}$ m a $c = 5 \cdot 10^{-2}$ m a s výškou $a = 2 \cdot 10^{-2}$ m. Pro obsah S podstavy platí obecně vztah

$$S = bv_b. \quad (1.45)$$

Vzhledem k vlastnostem pravoúhlého trojúhelníku a goniometrických funkcí a s využitím obrázku 1.4 platí následující rovnosti

$$v_b = c \cos(\alpha); \quad (1.46)$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{j}{s}\right). \quad (1.47)$$



Obrázek 1.3: Znáznornění vektorů působících sil \mathbf{F} , \mathbf{F}_G a \mathbf{F}_p na tělisko.

Dosažením vztahů 1.46 a 1.47 do vztahu 1.45 můžeme pro objem V zkoumaného tělíska napsat následující

$$V = aS; \quad (1.48)$$

$$V = abc \cos \left[\arcsin \left(\frac{j}{s} \right) \right]. \quad (1.49)$$

Předešlý vztah 1.49 můžeme dosadit do vztahu 1.44. Pro velikost vektoru \mathbf{F}_p můžeme tedy napsat následující

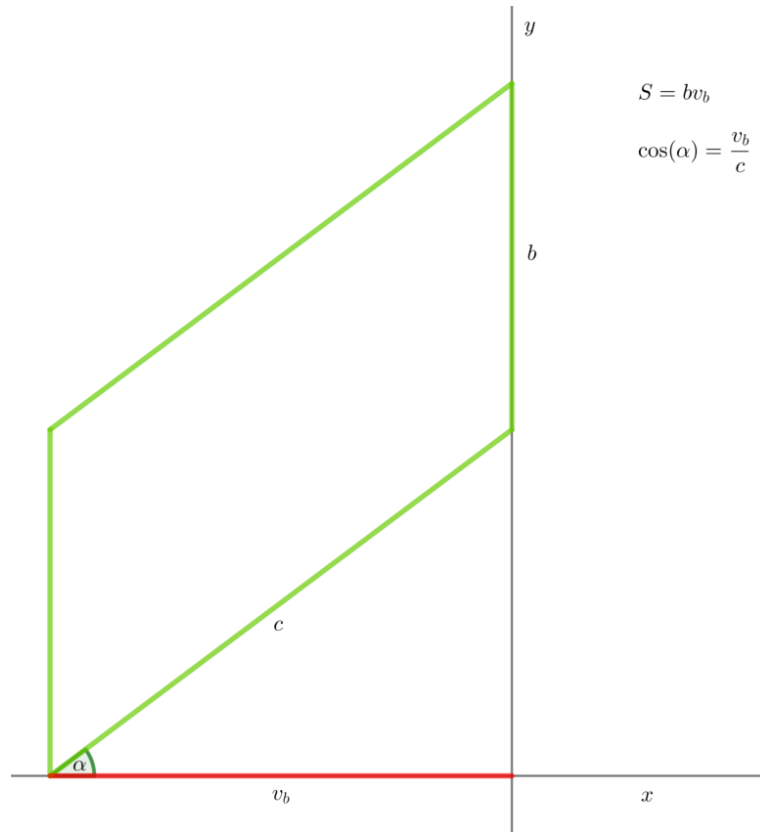
$$F_p = \frac{\rho g j abc}{s} \cos \left[\arcsin \left(\frac{j}{s} \right) \right]. \quad (1.50)$$

Pro velikosti vektorů \mathbf{F} , \mathbf{F}_p a \mathbf{F}_t můžeme s využitím vztahů 1.40 a 1.50 napsat vztahy

$$F = F_p + F_t; \quad (1.51)$$

$$F = \frac{\rho g j abc}{s} \cos \left[\arcsin \left(\frac{j}{s} \right) \right] + F_t. \quad (1.52)$$

Velikost vektoru síly \mathbf{F} je dána tlakem p , kterým částice plynu v zařízení působí na jednu ze stěn o obsahu S'' vloženého tělíska. Vzhledem k znázornění tělíska můžeme napsat následující vztahy



Obrázek 1.4: Náčrt podstavy tělíska, která je ve tvaru kosodélníku.

$$F = pS''; \quad (1.53)$$

$$F = pab. \quad (1.54)$$

Dle odvozeného vztahu v [2] můžeme pro tlak p napsat následující

$$p = n_0 kT, \quad (1.55)$$

kde n_0 představuje počet částic plynu vztažený na jednotkový objem. Vztah 1.55 můžeme s využitím materiálových vztahů přepsat do podoby

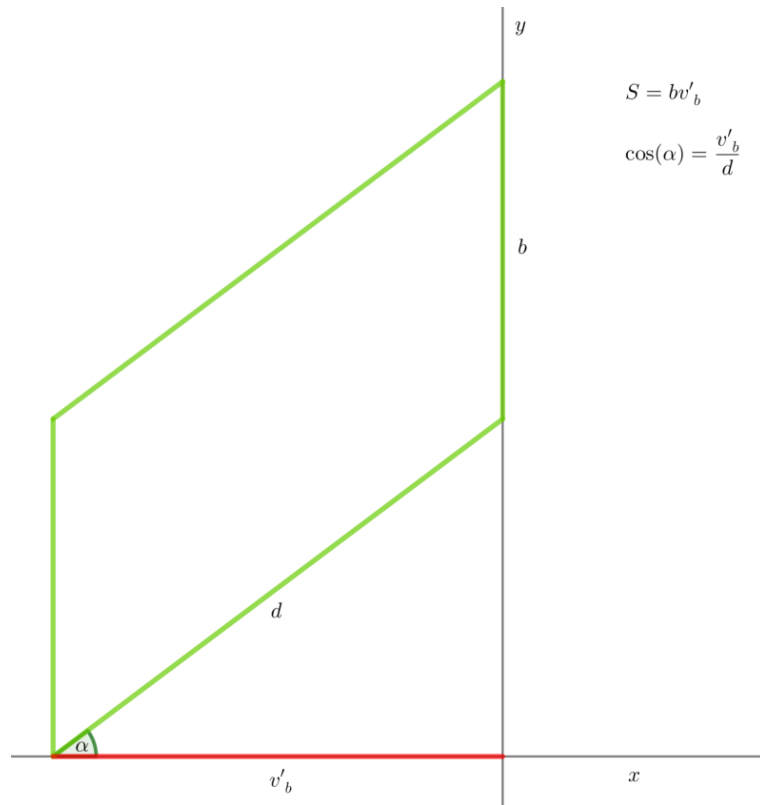
$$p = \frac{N}{V'} kT; \quad (1.56)$$

$$p = \frac{nN_A}{V'} kT, \quad (1.57)$$

kde N představuje počet částic plynu a V' je objem, který plyn po ustálení tělíska v zařízení zaujímá.

Nyní si odvodíme obecný vztah pro výpočet objemu V' . Odvození je obdobné jako v případě odvození vztahu 1.49. Pro obsah S' podstavy ve tvaru kosodélníku platí vztah

$$S' = bv'_b. \quad (1.58)$$



Obrázek 1.5: Znáznornění podstavy tělesa, která je ve tvaru kosodélníku. Objem V' tělesa představuje objem, ve kterém je umístěn plyn po ustálení tělíska v zařízení.

S využitím vztahu 1.47, obrázku 1.5, vlastností pravoúhlého trojúhelníku a goniometrických funkcí můžeme pro obsah S' napsat vztah

$$S' = bd \cos(\alpha); \quad (1.59)$$

$$S' = bd \cos \left[\arcsin \left(\frac{j}{s} \right) \right]. \quad (1.60)$$

Nakonec pro objem V' lze s využitím vztahu 1.60 napsat

$$V' = aS'; \quad (1.61)$$

$$V' = abd \cos \left[\arcsin \left(\frac{j}{s} \right) \right]. \quad (1.62)$$

Použitím vztahů 1.62 a 1.57 můžeme vztah 1.54 přepsat do následující podoby

$$F = \frac{nN_A}{abd \cos \left[\arcsin \left(\frac{j}{s} \right) \right]} abkT; \quad (1.63)$$

$$F = \frac{nN_A}{d \cos \left[\arcsin \left(\frac{j}{s} \right) \right]} kT. \quad (1.64)$$

Vztah 1.64 porovnáme se vztahem 1.52. Dostáváme následující rovnost

$$\frac{nN_A}{d \cos \left[\arcsin \left(\frac{j}{s} \right) \right]} kT = \frac{ogjabc}{s} \cos \left[\arcsin \left(\frac{j}{s} \right) \right] + F_t. \quad (1.65)$$

V předešlé rovnosti 1.65 je neznámou termodynamická teplota T . Jejím vyjádřením dostáváme vztah ve tvaru

$$T = \frac{d \cos \left[\arcsin \left(\frac{j}{s} \right) \right]}{nkN_A} \left\{ \frac{ogjabc}{s} \cos \left[\arcsin \left(\frac{j}{s} \right) \right] + F_t \right\}, \quad (1.66)$$

který lze upravit pomocí následujících úprav do jednodušší podoby

$$T = \frac{d}{nkN_A} \left\{ \frac{ogjabc}{s} \cos^2 \left[\arcsin \left(\frac{j}{s} \right) \right] + \cos \left[\arcsin \left(\frac{j}{s} \right) \right] F_t \right\}; \quad (1.67)$$

$$T = \frac{d}{nkN_A} \left\{ \frac{ogjabc}{s} \left\{ 1 - \sin^2 \left[\arcsin \left(\frac{j}{s} \right) \right] \right\} + \cos \left[\arcsin \left(\frac{j}{s} \right) \right] F_t \right\}; \quad (1.68)$$

$$T = \frac{d}{nkN_A} \left\{ \frac{ogjabc}{s} \left[1 - \left(\frac{j}{s} \right)^2 \right] + \cos \left[\arcsin \left(\frac{j}{s} \right) \right] F_t \right\}. \quad (1.69)$$

Nakonec, vzhledem ke vztahu mezi konstantami k , N_A a R_m , lze předešlou rovnost 1.69 ještě upravit na vztah ve tvaru

$$T = \frac{d}{nR_m} \left\{ \frac{ogjabc}{s} \left[1 - \left(\frac{j}{s} \right)^2 \right] + \cos \left[\arcsin \left(\frac{j}{s} \right) \right] F_t \right\}, \quad (1.70)$$

který představuje obecně odvozený vztah pro výpočet termodynamické teploty T .

Číselné dosazení

Dosazením zadaných číselných hodnot do vztahu 1.70 určíme zadanou hodnotu číselně. Můžeme tedy napsat následující

$$T = \frac{2 \cdot 10^3}{5 \cdot 8,314} \left\{ \frac{700 \cdot 9,81 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10^{-8} \left[1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2 \right]}{5 \cdot 10^{-2}} + \cos \left[\arcsin \left(\frac{3}{5} \right) \right] \cdot 15 \right\} \text{ K};$$

$$T \approx 581,15 \text{ K}.$$

Shrnutí zadaného příkladu a námět k zamyšlení

Po dosazení číselných hodnot ze zadání příkladu do obecně odvozeného vztahu 1.70 jsme dospěli k následující hodnotě termodynamické teploty $T = 581,15 \text{ K}$.

Zamyslete se nad závislostí termodynamické teploty T na látkovém množství n ve vztahu 1.70. Dokážete vysvětlit nepřímou závislost mezi těmito proměnnými?

Nakonec uvažujte, že mezi tělískem a vnitřní plochou zařízení je velikost vektoru třecí síly \mathbf{F}_t rovna $F_t = 0 \text{ N}$. Určete obecný vztah pro výpočet termodynamické teploty T s nulovou třecí silou.

1.5 Výtah

Zadání příkladu

Uvažujeme následující typ výtahu, který je znázorněn na obrázku 1.6. Kabina výtahu ve tvaru rotačního válce o poloměru r a výšce w se nachází ve výtahové šachtě stejného tvaru, která je zespodu uzavřená. Mezi kabinou a výtahovou šachtou neprojde žádná částice plynu umístěného pod výtahovou kabinou. Mezi kabinou a vnitřními stěnami výtahové šachty neuvažujeme tření. Závaží, které částečně zvedá výtahovou kabinu, se pohybuje po nakloněné rovině. Plocha nakloněné roviny sloužící k pohybu závaží svírá s vodorovným směrem úhel $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Hmotnost m závaží je rovna hodnotě $m = 200$ kg. Mezi spodní plochou závaží a plochou nakloněné roviny působí vektor třecí síly \mathbf{F}_t . Koeficient smykového tření ξ je roven hodnotě $\xi = \frac{1}{3}$. Hmotnost m' kabiny je i s nákladem rovna $m' = 800$ kg a hmotnost m'' použitého plynu, kterým je kyslík O_2 , je $m'' = 10$ kg. Určete, jakou termodynamickou teplotu T musí mít kyslík O_2 , aby byl výtah schopen, při současném působení závaží, sjet do osmého patra z původního desátého patra? Kabina se nachází v osmém patře, pokud se dolní podstava kabiny nachází ve výšce $j = 250$ m. Tepelnou výměnu mezi plynem a okolím neuvažujte.

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Výška	j	250 m
Úhel	α	$\frac{\pi}{6}$
Hmotnost závaží	m	200 kg
Hmotnost kabiny	m'	800 kg
Hmotnost plynu	m''	10 kg
Koeficient smykového tření	ξ	$\frac{1}{3}$
Termodynamická teplota	T	? K

Tabulka 1.5: Zápís zadaných hodnot v tabelové podobě.

Obecný postup řešení

Na začátku obecného řešení si musíme uvědomit vztahy mezi jednotlivými vektory působících sil a mezi jejich velikostmi.

Na závaží pohybující se po nakloněné rovině, která svírá s vodorovným směrem zadaný úhel $\alpha = \frac{\pi}{6}$, působí vektor tíhové síly \mathbf{F}_G a vektor třecí síly \mathbf{F}_t .

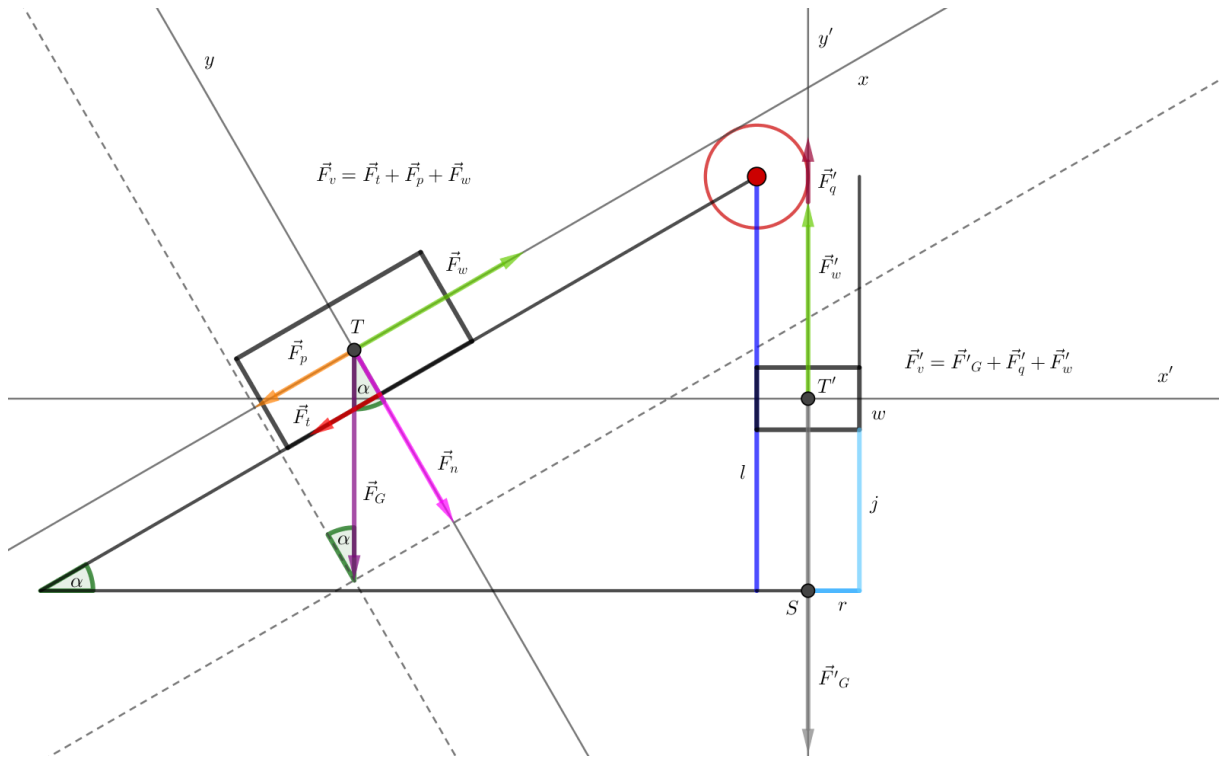
Vektor tíhové síly \mathbf{F}_G lze rozložit do dvou na sebe kolmých složek tohoto vektoru. Jedná se o vektor tečné složky \mathbf{F}_p a vektor normálové složky \mathbf{F}_n vektoru působící tíhové síly \mathbf{F}_G . Pro tyto vektory \mathbf{F}_G , \mathbf{F}_t i \mathbf{F}_n tedy platí vztah

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_n. \quad (1.71)$$

Pro velikosti těchto vektorů s využitím podobnosti trojúhelníků, goniometrických funkcí a obrázku 1.6 můžeme napsat následující dvojici vztahů

$$F_p = F_G \sin(\alpha); \quad (1.72)$$

$$F_n = F_G \cos(\alpha). \quad (1.73)$$



Obrázek 1.6: Znárodnění konstrukce výtahu.

Vzhledem ke vztahu mezi velikostí vektoru normálové složky \mathbf{F}_n vektoru tíhové síly \mathbf{F}_G a velikostí vektoru třecí síly \mathbf{F}_t , který je ve tvaru

$$F_t = \xi F_n, \quad (1.74)$$

můžeme s využitím vztahu 1.73 pro velikost vektoru třecí síly \mathbf{F}_t napsat následující rovnost

$$F_t = \xi F_G \cos(\alpha). \quad (1.75)$$

Na závaží působí ještě dva vektory sil. Jedná se o vektor síly \mathbf{F}_w , kterou je napínáno lano spojující kabinu výtahu a závaží na nakloněné rovině. A nakonec vektor \mathbf{F}_v je vektor výsledné síly, který je popsán následujícími vztahy

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_w; \quad (1.76)$$

$$F_v = F_w - F_p - F_t, \quad (1.77)$$

neboť se při klesání kabiny výtahu závaží pohybuje směrem nahoru po nakloněné rovině.

U výtahové kabiny ve tvaru rotačního válce zkoumáme následující vektory působících sil. Prvým vektorem je vektor tíhové síly \mathbf{F}'_G . Následně se jedná o vektor síly \mathbf{F}'_w , kterou je napínáno lano mezi kabinou výtahu a závažím a jehož velikost je stejná jako velikost vektoru \mathbf{F}_w . Posledním vektorem je vektor síly \mathbf{F}'_q , který představuje silové působení molekul kyslíku O_2 na dolní podstavu kabiny.

Pro vektor výsledné síly \mathbf{F}'_v , jehož velikost je stejná jako velikost vektoru \mathbf{F}_v , platí následující dvojice vztahů

$$\mathbf{F}'_v = \mathbf{F}'_G + \mathbf{F}'_w + \mathbf{F}'_q; \quad (1.78)$$

$$F_v = F'_G - F'_q - F_w, \quad (1.79)$$

neboť se kabina výtahu pohybuje směrem dolů.

Vzhledem k neznalosti velikosti vektoru působící síly \mathbf{F}_w nebo \mathbf{F}'_w rovnost 1.77 sečteme s rovností 1.79. Dostáváme následující vztah

$$2F_v = F'_G - F'_q - F_p - F_t. \quad (1.80)$$

S využitím druhého Newtonova pohybového zákona, který je popsán rovností

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (1.81)$$

lze vztah 1.80 přepsat do tvaru

$$2ma = F'_G - F'_q - F_p - F_t. \quad (1.82)$$

Při ustálení kabiny výtahu je velikost vektoru zrychlení \mathbf{a} rovna nule. Především vztah 1.82 lze upravit do následujícího tvaru

$$F'_G = F'_q + F_p + F_t. \quad (1.83)$$

S využitím odvozených vztahů v [2] můžeme pro tlak p kyslíku O_2 napsat následující vztah

$$p = n_0 kT, \quad (1.84)$$

ve kterém n_0 představuje počet molekul plynu vztažený na jednotkový objem. Především vztah 1.84 lze použitím základních materiálových vztahů ještě upravit do tvarů

$$p = \frac{N}{V} kT; \quad (1.85)$$

$$p = \frac{nN_A}{\pi r^2 j} kT; \quad (1.86)$$

$$p = \frac{m''N_A}{M_m \pi r^2 j} kT, \quad (1.87)$$

kde N představuje celkový počet molekul použitého plynu, V je objem, ve kterém se plyn nachází, a M_m představuje molární hmotnost plynu.

Pro velikost vektoru síly \mathbf{F}'_q , která udává silové působení molekul kyslíku O_2 na spodní podstavu kabiny výtahu o obsahu $S = \pi r^2$, platí vztah

$$F'_q = pS, \quad (1.88)$$

který lze s využitím vztahu 1.87 přepsat do tvaru

$$F'_q = \frac{m''N_A}{M_m j} kT. \quad (1.89)$$

S využitím vztahů 1.72, 1.75 a 1.89 lze vztah 1.83 udávající velikost vektoru tíhové síly \mathbf{F}'_G napsat následujícím způsobem

$$F'_G = \frac{m''N_A}{M_{m,j}}kT + F_G \sin(\alpha) + \xi F_G \cos(\alpha). \quad (1.90)$$

Předešlou rovnost 1.90 můžeme přepsat do následujících tvarů

$$F'_G = \frac{m''N_A}{M_{m,j}}kT + F_G [\sin(\alpha) + \xi \cos(\alpha)]; \quad (1.91)$$

$$m'g = \frac{m''N_A}{M_{m,j}}kT + mg [\sin(\alpha) + \xi \cos(\alpha)]; \quad (1.92)$$

$$m' = \frac{m''N_A}{M_{m,j}g}kT + m [\sin(\alpha) + \xi \cos(\alpha)]. \quad (1.93)$$

Neznámou v předcházejícím vztahu 1.93 je termodynamická teplota T . Po vyjádření neznámé T můžeme napsat rovnost

$$T = \frac{M_{m,j}g}{m''kN_A} \{m' - m [\sin(\alpha) + \xi \cos(\alpha)]\}, \quad (1.94)$$

kterou lze s využitím vztahu mezi konstantami k , R_m a N_A přepsat do tvaru

$$T = \frac{M_{m,j}g}{m''R_m} \{m' - m [\sin(\alpha) + \xi \cos(\alpha)]\}. \quad (1.95)$$

Číselné dosazení

Vztah 1.95 představuje obecný vztah pro výpočet termodynamické teploty T kyslíku O_2 . Dosazením zadaných hodnot do vztahu 1.95 získáme hodnotu termodynamické teploty T číselně. Můžeme tedy napsat

$$T = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 250 \cdot 9,81}{10 \cdot 8,314} \cdot \left\{ 800 - 200 \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] \right\} \text{ K};$$

$$T \approx 606,3 \text{ K}.$$

Shrnutí zadaného příkladu

Dosazením číselných hodnot ze zadání do obecně odvozeného vztahu 1.95 jsme zjistili, že hodnota termodynamické teploty T je rovna $T = 606,3 \text{ K}$.

1.6 Určení hustot dvou závaží pomocí zařízení obsahujícího plyn

Zadání příkladu

Uvažujme zařízení, které se skládá z pevné kladky a dvou závaží. První závaží na pravé straně ve tvaru rotačního válce o poloměru $r = 15$ cm a o výšce $j = 15$ cm je tvořeno z materiálu o hustotě ρ . Na levé straně je pevně umístěna nádoba ve tvaru rotačního válce o poloměru $r' = 125$ cm s uzavřenou dolní částí. V této nádobě je umístěno druhé závaží stejného tvaru o výšce $j' = 75$ cm tak, že mezi vnitřní stěnou nádoby a vnější stěnou závaží neprojde žádná částice. Tření mezi těmito dvěma popsányými plochami neuvažujte. Závaží na levé straně je vyrobeno z materiálu o hustotě ρ' . Do uzavřené části pod levé závaží je umístěn kyslík O_2 o látkovém množství $n'' = 3$ mol. Určete neznámé hodnoty hustoty ρ prvního závaží na pravé straně a hustoty ρ' druhého závaží na levé straně, pokud při střední kinetické energii $W_k'' = 2,3568 \cdot 10^{-20}$ J molekul použitého plynu se závaží na levé straně ustálilo ve výšce $j'' = 5,5$ cm. Popsaná situace je znázorněna na obrázku 1.7. S využitím [5] určete, z čeho jsou závaží vyrobena. Využijte poměru hustot ρ a ρ' , který je zadán následovně

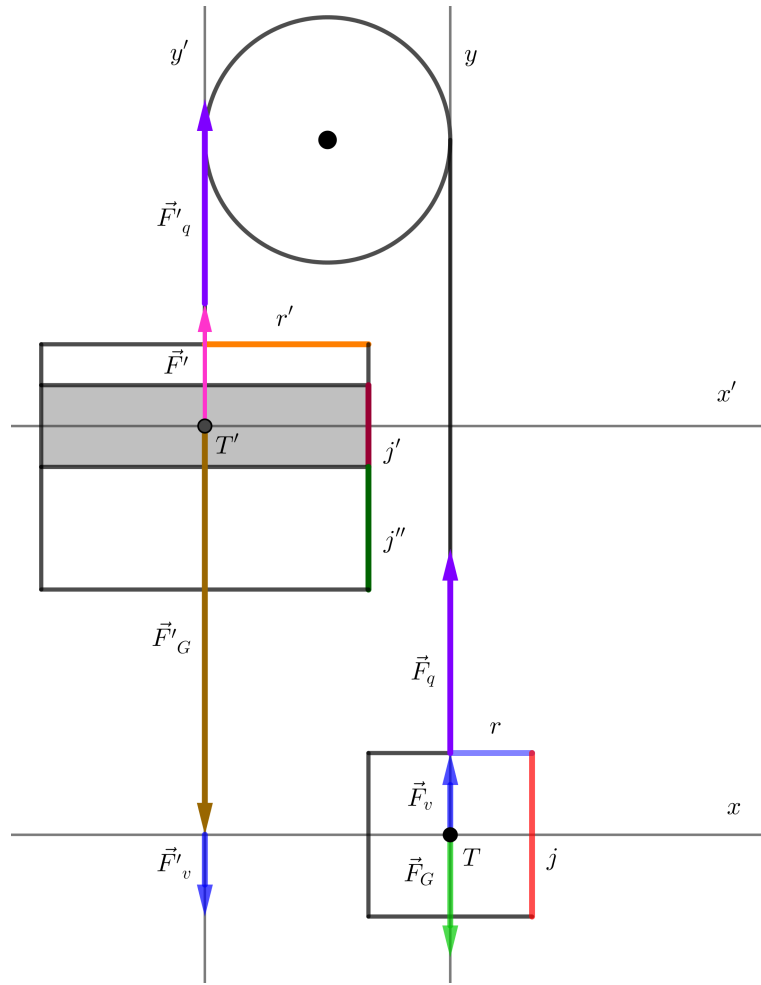
$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{43}{41}. \quad (1.96)$$

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Poloměr prvního závaží	r	0,15 m
Výška prvního závaží	j	0,15 m
Poloměr druhého závaží	r'	1,25 m
Výška druhého závaží	j'	0,75 m
Počet stupňů volnosti	i	5
Látkové množství plynu	n''	3 mol
Střední kinetická energie molekul	W_k''	$2,3568 \cdot 10^{-20}$ J
Výška ustálení závaží	j''	0,055 m
Poměr hustot	$\frac{\rho'}{\rho}$	$\frac{43}{41}$
Hustota prvního závaží	ρ	? kg · m ⁻³
Hustota druhého závaží	ρ'	? kg · m ⁻³

Tabulka 1.6: Zápis zadaných hodnot v tabelové podobě.

Obecný postup řešení

Na začátku obecného postupu řešení zadaného příkladu vyřešíme působící síly na první těleso na pravé straně. Na dané těleso působí vektor tíhové síly \mathbf{F}_G . V opačném směru působí vektor síly \mathbf{F}_q , která udává silové působení druhého tělesa na levé straně při upevnění provazu na prvním tělese. Vzhledem ke skutečnosti, že je pozorován pohyb tělesa na levé straně směrem dolů, tak ve směru vektoru \mathbf{F}_q působí také vektor výsledné síly \mathbf{F}_v , pro který platí následující rovnost



Obrázek 1.7: Znárodnění měřicího zařízení.

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_q + \mathbf{F}_G. \quad (1.97)$$

Vzhledem ke směřům vektorů \mathbf{F}_G , \mathbf{F}_q a \mathbf{F}_v můžeme pro jejich velikosti napsat následující vztah

$$F_v = F_q - F_G. \quad (1.98)$$

Po vyřešení soustavy působících sil na pravé straně vyřešíme soustavu působících sil na druhé těleso na levé straně. Na druhé těleso působí vektor tíhové síly \mathbf{F}'_G . V opačném směřu působí vektor síly \mathbf{F}'_q , který udává silové působení prvního tělesa na pravé straně na druhé těleso v místě upevnění provazu. Vektory \mathbf{F}_q a \mathbf{F}'_q představují dvojici vektorů se stejnou velikostí. Ve směřu vektoru \mathbf{F}'_q působí také vektor síly \mathbf{F}' , který reprezentuje silové působení částic plynu na dolní podstavu druhého závaží v uzavřené nádobě. Pro vektor výsledné síly \mathbf{F}'_v můžeme tedy napsat vztah

$$\mathbf{F}'_v = \mathbf{F}'_G + \mathbf{F}'_q + \mathbf{F}'. \quad (1.99)$$

Po uvážení směřů jednotlivých vektorů \mathbf{F}'_v , \mathbf{F}'_G , \mathbf{F}'_q a \mathbf{F}' můžeme pro jejich velikosti napsat následující vztah

$$F'_v = F'_G - F'_q - F'. \quad (1.100)$$

Vzhledem k rovnostem velikostí vektorů \mathbf{F}_v , \mathbf{F}'_v a \mathbf{F}_q , \mathbf{F}'_q lze předcházející vztah přepsat do podoby

$$F_v = F'_G - F_q - F'. \quad (1.101)$$

Odvozené rovnice 1.98 a 1.101 můžeme sečíst. Po sečtení dostáváme vztah ve tvaru

$$2F_v = F'_G - F' - F_G. \quad (1.102)$$

Po ustálení soustavy dvojice těles je velikost vektoru zrychlení \mathbf{a} rovna nule. S využitím tohoto poznatku lze předešlé vyjádření 1.102 upravit do následující podoby

$$0 = F'_G - F' - F_G; \quad (1.103)$$

$$F'_G = F' + F_G. \quad (1.104)$$

V řešení zadaného příkladu budeme pokračovat vyjádřením jednotlivých neznámých v předcházejícím vztahu 1.104. Pro velikost vektoru tíhové síly \mathbf{F}'_G druhého tělesa na levé straně můžeme napsat vztahy

$$F'_G = m'g; \quad (1.105)$$

$$F'_G = \varrho'V'g; \quad (1.106)$$

$$F'_G = \varrho'\pi r'^2 j'g, \quad (1.107)$$

ve kterých m' představuje hmotnost daného závaží, V' je jeho objem a ϱ' představuje hledanou hodnotu hustoty daného tělesa.

Pro velikost vektoru tíhové síly \mathbf{F}_G prvního závaží na pravé straně lze analogicky napsat vztahy

$$F_G = mg; \quad (1.108)$$

$$F_G = \varrho Vg; \quad (1.109)$$

$$F_G = \varrho\pi r^2 jg, \quad (1.110)$$

kde m představuje hmotnost daného tělesa, dále pak V jeho objem a nakonec ϱ hledanou hodnotu jeho hustoty.

Konečně pro velikost vektoru působící síly \mathbf{F}' můžeme s využitím obecného vztahu mezi silou F působící na určitou plochu o obsahu S a tlakem p napsat vztah

$$F' = p'S', \quad (1.111)$$

ve kterém p' představuje tlak, kterým působí částice plynu v uzavřené nádobě na dolní podstavu druhého závaží na levé straně o obsahu S' .

Předešlou rovnost 1.111 lze s využitím stavové rovnice ideálního plynu upravit do následující podoby

$$F' = \frac{n''R_m T''}{V''} S'; \quad (1.112)$$

$$F' = \frac{n''R_m T''}{\pi r'^2 j''} \pi r'^2; \quad (1.113)$$

$$F' = \frac{n''R_m T''}{j''}, \quad (1.114)$$

kde T'' představuje termodynamickou teplotu plynu v nádobě, V'' je objem části uzavřené nádoby, ve které se při ustálení druhého závaží nachází plyn, a j'' představuje výšku uzavřené nádoby, ve které se při ustálení druhého závaží nachází kyslík O_2 .

S využitím odvozených rovnic v [2] lze pro střední kinetickou energii W_k'' molekul plynu napsat výraz

$$W_k'' = \frac{i}{2} k T'', \quad (1.115)$$

ze kterého si můžeme vyjádřit termodynamickou teplotu T'' . Po vyjádření dostáváme vztah ve tvaru

$$T'' = \frac{2}{ik} W_k''. \quad (1.116)$$

Dosazením předešlého vyjádření 1.116 do vztahu 1.114 dostáváme vztah ve tvaru

$$F' = \frac{2n'' R_m W_k''}{ikj''}. \quad (1.117)$$

Obecně odvozené výrazy 1.107, 1.110 a 1.117 lze dosadit do vztahu 1.104. Dosazením a následnou úpravou dostáváme následující

$$\varrho' \pi r'^2 j' g = \frac{2n'' R_m W_k''}{ikj''} + \varrho \pi r^2 j g; \quad (1.118)$$

$$\varrho' r'^2 j' - \varrho r^2 j = \frac{2n'' R_m W_k''}{\pi ikj'' g}. \quad (1.119)$$

S využitím zadaného poměru, který je v zadání příkladu uveden jako rovnice 1.96, můžeme předešlé vyjádření 1.119 upravit na tvar

$$\frac{43}{41} \varrho r'^2 j' - \varrho r^2 j = \frac{2n'' R_m W_k''}{\pi ikj'' g}. \quad (1.120)$$

Hledanou hodnotu hustoty ϱ lze vyjádřit z předešlého vztahu 1.120. Ekvivalentními úpravami dostáváme rovnice ve tvaru

$$\varrho \left(\frac{43}{41} r'^2 j' - r^2 j \right) = \frac{2n'' R_m W_k''}{\pi ikj'' g}; \quad (1.121)$$

$$\varrho = \frac{2n'' R_m W_k''}{\pi ikj'' g \left(\frac{43}{41} r'^2 j' - r^2 j \right)}. \quad (1.122)$$

Předešlý výraz 1.122 je obecně odvozený vztah pro výpočet hodnoty hustoty ϱ prvního tělesa na pravé straně. S využitím vztahu mezi konstantami k , R_m a N_A můžeme vyjádření 1.122 přepsat do následující podoby

$$\varrho = \frac{2n'' N_A W_k''}{\pi i j'' g \left(\frac{43}{41} r'^2 j' - r^2 j \right)}. \quad (1.123)$$

Číselné dosazení

V případě dosazení zadaných číselných hodnot do obecně odvozeného vztahu 1.123 můžeme vyjádřit hodnotu hustoty ρ číselně. Dosazením dostáváme

$$\rho = \frac{2 \cdot 3 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 2,3568 \cdot 10^{-20}}{5 \cdot \pi \cdot 0,055 \cdot 9,81 \cdot \left(\frac{43}{41} \cdot 1,25^2 \cdot 0,75 - 0,15^3\right)} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3};$$
$$\rho \approx 8200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Hodnotu hustoty ρ' lze vypočítat pomocí zadaného poměru, který je v zadání příkladu uveden jako vztah 1.96. S využitím tohoto vztahu můžeme napsat

$$\rho' = \frac{43}{41} \cdot 8200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3};$$
$$\rho' \approx 8600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Shrnutí zadaného příkladu

Dosazením zadaných číselných hodnot do obecně odvozeného vztahu 1.123 jsme dospěli k hodnotě hustoty ρ prvního závaží na pravé straně, která je rovna následující hodnotě $\rho = 8200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. S využitím [5] bylo zjištěno, že je první závaží vyrobeno z cínu. Pomocí zadaného poměru 1.96 byla vypočtena hodnota hustoty ρ' druhého závaží na levé straně. Tato hodnota hustoty ρ' byla rovna $\rho' = 8600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Pomocí [5] jsme dospěli k závěru, že druhé závaží je vyrobeno z mosazi.

1.7 Výpočet práce zkoumaného plynu

Zadání příkladu

Uvažujme plyn dusík N_2 o hmotnosti $m = 7 \text{ kg}$ nacházející se v míči ve tvaru koule o poloměru $r_1 = 15 \text{ cm}$. Plyn za konstantní termodynamické teploty $T = 298,15 \text{ K}$ vykonal práci $-\Delta W = 0,5 \text{ MJ}$, což způsobilo změnu poloměru na hodnotu r_2 . Vypočtete poloměr r_2 míče po izotermickém ději.

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Hmotnost plynu	m	7 kg
Poloměr	r_1	0,15 m
Vykonaná práce	$-\Delta W$	$5 \cdot 10^5 \text{ J}$
Termodynamická teplota	T	298,15 K
Poloměr	r_2	? m

Tabulka 1.7: Zázpis zadaných hodnot v tabelové podobě.

Obecný postup řešení

Na začátku obecného postupu řešení příkladu si popíšeme zadanou situaci podrobněji. Na začátku pozorování byl zkoumaný plyn dusík N_2 o hmotnosti $m = 7$ kg umístěn v míči ve tvaru koule o poloměru $r_1 = 0,15$ m. Plyn byl v termodynamické rovnováze s okolím, přičemž termodynamická teplota T plynu byla rovna hodnotě $T = 298,15$ K.

Následně nastala tepelná výměna, během které nedošlo ke změně termodynamické teploty T . Jedná se tedy o izotermický děj, který je popsán Boyle-Mariottovým zákonem. Tlak p lze obecně s využitím stavové rovnice ideálního plynu a materiálových vztahů popsat výrazy

$$p = \frac{nR_m T}{V}; \quad (1.124)$$

$$p = \frac{3mR_m T}{4\pi r^3 M_m}, \quad (1.125)$$

v nichž n představuje látkové množství, V je objem nádoby, ve které se nachází zkoumaný plyn a nakonec M_m představuje molární hmotnost plynu, kterou nalezneme v periodické tabulce prvků.

Velikost působící síly F částic plynu na vnitřní stěnu míče lze s využitím předešlého vyjádření 1.125 zapsat v následujícím tvaru

$$F = pS; \quad (1.126)$$

$$F = \frac{3mR_m T}{4\pi r^3 M_m} 4\pi r^2; \quad (1.127)$$

$$F = \frac{3mR_m T}{r M_m}. \quad (1.128)$$

Vykonanou práci $-\Delta W$ plynem při izotermickém ději je možné obecně popsat následujícím integrálem ve tvaru

$$-\Delta W = \int_{s_1}^{s_2} F ds. \quad (1.129)$$

Po uvážení, že dochází ke změně poloměru míče z hodnoty $r_1 = 0,15$ m na hodnotu r_2 , můžeme předešlý vztah 1.129 s využitím výrazu 1.128 upravit na následující tvar

$$-\Delta W = \int_{r_1}^{r_2} \frac{3mR_m T}{r M_m} dr. \quad (1.130)$$

Vyjádřený integrál 1.130 je možné upravit s využitím vlastností integrálního počtu do následujícího tvaru

$$-\Delta W = \frac{3mR_m T}{M_m} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}. \quad (1.131)$$

Integrál na pravé straně předešlé rovnosti 1.131 lze jednoduše vypočítat a s využitím Newtonova vztahu upravit do podoby

$$-\Delta W = \frac{3mR_mT}{M_m} [\ln |r|]_{r=r_1}^{r_2}; \quad (1.132)$$

$$-\Delta W = \frac{3mR_mT}{M_m} [\ln(r_2) - \ln(r_1)]; \quad (1.133)$$

$$-\Delta W = \frac{3mR_mT}{M_m} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \quad (1.134)$$

Ze vztahu 1.134 vyjádříme neznámou hodnotu poloměru r_2 následujícím způsobem

$$\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{-\Delta W M_m}{3mR_mT}; \quad (1.135)$$

$$\frac{r_2}{r_1} = e^{\frac{-\Delta W M_m}{3mR_mT}}; \quad (1.136)$$

$$r_2 = r_1 e^{\frac{-\Delta W M_m}{3mR_mT}}. \quad (1.137)$$

Předešlý vztah 1.137 představuje obecně odvozený vztah pro výpočet poloměru r_2 míče po izotermickém ději.

Číselné dosazení

Dosazením zadaných číselných hodnot do obecně odvozeného vztahu 1.137 můžeme vypočítat hodnotu poloměru r_2 . Dosazením dostáváme

$$r_2 = 0,15 \cdot e^{\frac{5 \cdot 10^5 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 7 \cdot 8,314 \cdot 298,15}} \text{ m};$$

$$r_2 \approx 0,1963 \text{ m}.$$

Shrnutí zadaného příkladu a námět k zamyšlení

S využitím obecně odvozeného vztahu 1.137 jsme dospěli k následující hodnotě poloměru $r_2 = 19,63 \text{ cm}$. Zamyslete se, jestli se bude zvyšující se molární hmotností M_m zvyšovat i poloměr r_2 . Zkuste číselně určit změnu $\Delta r = r_2 - r_1$ ještě pro jiné plyny.

Kapitola 2

Daltonův zákon aditivity parciálních tlaků

Ve druhé kapitole sbírky řešených příkladů z molekulové fyziky a termodynamiky se budeme zabývat aplikací Daltonova zákona aditivity parciálních tlaků při praktických výpočtech. Daltonův zákon aditivity parciálních tlaků udává vztah na výpočet výsledného tlaku p soustavy n vzájemně neinteragujících plynů.

Říká, že výsledný tlak p uvažované soustavy n plynů v nádobě o objemu V je dán algebraickým součtem jednotlivých parciálních tlaků p_i , kde $1 \leq i \leq n$, které by vytvářely jednotlivé plyny samostatně v daném objemu V . Daltonův zákon aditivity parciálních tlaků můžeme matematicky jednoduše zapsat v následujícím tvaru

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + p_n. \quad (2.1)$$

Daltonův zákon aditivity parciálních tlaků je teoreticky podrobněji zpracován a objasněn například v [2]. U čtenáře se předpokládá, že se s danou problematikou před samotným řešením příkladů seznámil minimálně po stránce teoretické.

2.1 Výpočet výsledného tlaku soustavy čtyř plynů

Zadání příkladu

Uvažujme soustavu čtyř plynů o teplotě $t = 300 \text{ }^\circ\text{C}$ a nádobu ve tvaru rotačního válce o průměru $d = 1,5 \text{ m}$ a o výšce $j = 5 \text{ m}$. První plyn je hélium He o látkovém množství $n_1 = 5,5 \text{ mol}$. Druhý plyn je vodík H_2 o hmotnosti $m_2 = 9,25 \text{ kg}$. Třetí plyn je kyslík O_2 o počtu částic $N_3 = 3,6132 \cdot 10^{24}$. Čtvrtým plynem je dusík N_2 o látkovém množství n_4 , které je rovno hodnotě $n_4 = 3,75 \text{ mol}$. Vypočtete výsledný tlak p dané soustavy plynů v nádobě.

Obecný postup řešení

K řešení příkladu s výhodou využijeme Daltonův zákon aditivity parciálních tlaků, který máme v této sbírce uveden jako vztah 2.1. Daný vztah můžeme pro $n = 4$ upravit na následující tvar

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4. \quad (2.2)$$

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Teplota	t	300 °C
Termodynamická teplota	T	573,15 K
Průměr	d	1,5 m
Výška	j	5 m
Látkové množství	n_1	5,5 mol
Hmotnost	m_2	9,25 kg
Počet částic	N_3	$3,6132 \cdot 10^{24}$
Látkové množství	n_4	3,75 mol
Tlak	p	? Pa

Tabulka 2.1: Zázpis zadaných hodnot v tabelové podobě.

První plyn hélium He máme zadaný látkovým množstvím $n_1 = 5,5$ mol, proto pro parciální tlak p_1 můžeme s využitím stavové rovnice ideálního plynu napsat

$$p_1 = \frac{n_1 R_m T}{V}; \quad (2.3)$$

$$p_1 = \frac{4n_1 R_m T}{\pi d^2 j}. \quad (2.4)$$

Druhý plyn vodík H_2 je zadaný hmotností $m_2 = 9,25$ kg. Pro parciální tlak p_2 můžeme s využitím stavové rovnice ideálního plynu napsat následující vyjádření

$$p_2 = \frac{n_2 R_m T}{V}; \quad (2.5)$$

$$p_2 = \frac{4m_2 R_m T}{M_{m_2} \pi d^2 j}, \quad (2.6)$$

ve kterém M_{m_2} představuje molární hmotnost vodíku, kterou odečteme v periodické tabulce prvků.

Třetí plyn kyslík O_2 je zadaný počtem částic $N_3 = 3,6132 \cdot 10^{24}$. Parciální tlak p_3 je analogicky s využitím stavové rovnice ideálního plynu roven následujícímu vztahu

$$p_3 = \frac{n_3 R_m T}{V}; \quad (2.7)$$

$$p_3 = \frac{4N_3 R_m T}{N_A \pi d^2 j}. \quad (2.8)$$

Čtvrtý plyn dusík N_2 máme zadaný látkovým množstvím $n_4 = 3,75$ mol. Parciální tlak p_4 , který bude daný plyn v nádobě o objemu V vytvářet, je podle stavové rovnice ideálního plynu roven vyjádření

$$p_4 = \frac{n_4 R_m T}{V}; \quad (2.9)$$

$$p_4 = \frac{4n_4 R_m T}{\pi d^2 j}. \quad (2.10)$$

Vyjádření 2.4, 2.6, 2.8 a 2.10 pro jednotlivé parciální tlaky p_1 , p_2 , p_3 a p_4 můžeme dosadit do upraveného Daltonova zákona aditivity parciálních tlaků 2.2. Dostáváme vztah pro výpočet výsledného tlaku p , který je roven

$$p = \frac{4n_1 R_m T}{\pi d^2 j} + \frac{4m_2 R_m T}{M_{m_2} \pi d^2 j} + \frac{4N_3 R_m T}{N_A \pi d^2 j} + \frac{4n_4 R_m T}{\pi d^2 j}, \quad (2.11)$$

který můžeme ekvivalentně přepsat do následujícího tvaru

$$p = \frac{4R_m T}{\pi d^2 j} \left(n_1 + \frac{m_2}{M_{m_2}} + \frac{N_3}{N_A} + n_4 \right). \quad (2.12)$$

S využitím Daltonova zákona aditivity parciálních tlaků jsme odvodili obecný vztah 2.12 pro výpočet výsledného tlaku p dané soustavy plynů.

Číselné dosazení

Dosazením číselných hodnot ze zadání do obecně odvozeného vztahu 2.12 dostáváme číselné vyjádření výsledného tlaku p soustavy čtyř zadaných plynů v nádobě daného tvaru o objemu V

$$p = \frac{4 \cdot 8,314 \cdot 573,15}{\pi \cdot 1,5^2 \cdot 5} \cdot \left(5,5 + \frac{9,25}{2 \cdot 10^{-3}} + \frac{3,6132 \cdot 10^{24}}{6,022 \cdot 10^{23}} + 3,75 \right) \text{ Pa};$$

$$p \approx 2,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}.$$

Shrnutí zadaného příkladu a námět k zamyšlení

Dosazením číselných hodnot do odvozené rovnice 2.12 jsme vypočítali hodnotu výsledného tlaku p soustavy zadaných plynů. Tato hodnota byla $p = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Ze znalosti výsledného tlaku p soustavy zadaných plynů v dané nádobě zkuste vyjádřit, jak velkou silou F působí částice soustavy plynů na plášť rotačního válce.

2.2 Výpočet jednotlivých tlaků zadaných plynů

Zadání příkladu

Uvažujme tři plyny v nádobě o objemu $V = V_1 + V_2 + V_3$ při termodynamické teplotě T . Prvním plynem je argon Ar o látkovém množství $n_1 = 2,5 \text{ mol}$. Druhý plyn v nádobě je vodík H_2 o hmotnosti $m_2 = 3,3 \text{ kg}$ a třetím plynem je kyslík O_2 o látkovém množství n_3 , které je rovno hodnotě $n_3 = 2 \text{ mol}$. Tlak směsi všech těchto plynů v nádobě je $p = 2,5 \cdot 10^7 \text{ Pa}$. Vypočítejte tlaky p'_1 , p'_2 a p'_3 jednotlivých plynů v případě, že by byly tyto plyny samostatně v nádobách o objemech V_1 , V_2 a V_3 . K výpočtu užitě poměr mezi jednotlivými objemy V_1 , V_2 a V_3 , který je

$$V_1 : V_2 : V_3 = 2 : 3 : 4. \quad (2.13)$$

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Látkové množství	n_1	2,5 mol
Hmotnost	m_2	3,3 kg
Látkové množství	n_3	2 mol
Tlak	p	$2,5 \cdot 10^7$ Pa
Poměr objemů	$V_1 : V_2 : V_3$	2 : 3 : 4
Tlak	p'_1	? Pa
Tlak	p'_2	? Pa
Tlak	p'_3	? Pa

Tabulka 2.2: Zázpis zadaných hodnot v tabelové podobě.

Obecný postup řešení

K řešení zadaného příkladu s výhodou využijeme Daltonův zákon aditivity parciálních tlaků 2.1. Tento vztah lze pro $n = 3$ napsat jako následující rovnost

$$p = p_1 + p_2 + p_3. \quad (2.14)$$

Hodnotu výsledného tlaku p soustavy tří plynů v nádobě o celkovém objemu V máme zadanou. Tato hodnota je rovna $p = 2,5 \cdot 10^7$ Pa. Musíme si rozebrat jednotlivé parciální tlaky p_1 , p_2 a p_3 .

První plyn argon Ar máme zadaný jenom pomocí látkového množství $n_1 = 2,5$ mol. Parciální tlak p_1 tedy můžeme s využitím stavové rovnice ideálního plynu vyjádřit následujícím způsobem

$$p_1 = \frac{n_1 R_m T}{V}; \quad (2.15)$$

$$p_1 = \frac{n_1 R_m T}{V_1 + V_2 + V_3}. \quad (2.16)$$

Druhý plyn vodík H_2 je zadaný pouze hmotností $m_2 = 3,3$ kg. Parciální tlak p_2 lze tedy obdobně vyjádřit pomocí stavové rovnice ideálního plynu ve tvaru

$$p_2 = \frac{n_2 R_m T}{V}; \quad (2.17)$$

$$p_2 = \frac{m_2 R_m T}{M_{m_2} (V_1 + V_2 + V_3)}, \quad (2.18)$$

kde M_{m_2} je molární hmotnost vodíku H_2 , kterou zjistíme z periodické tabulky prvků.

Třetí plyn kyslík O_2 máme zadaný jenom látkovým množstvím $n_3 = 2$ mol. Můžeme tedy analogicky využít stavové rovnice ideálního plynu a napsat vztah v následujícím tvaru

$$p_3 = \frac{n_3 R_m T}{V}; \quad (2.19)$$

$$p_3 = \frac{n_3 R_m T}{V_1 + V_2 + V_3}. \quad (2.20)$$

Dosazením vyjádřených vztahů 2.16, 2.18 a 2.20 do vztahu 2.14 a následnou úpravou dostáváme rovnost

$$p = \frac{n_1 R_m T}{V_1 + V_2 + V_3} + \frac{m_2 R_m T}{M_{m_2} (V_1 + V_2 + V_3)} + \frac{n_3 R_m T}{V_1 + V_2 + V_3}; \quad (2.21)$$

$$p = \frac{R_m T}{V_1 + V_2 + V_3} \left(n_1 + \frac{m_2}{M_{m_2}} + n_3 \right). \quad (2.22)$$

Neznámými jsou v tomto případě jednotlivé objemy V_1 , V_2 a V_3 , ze kterých následně vypočítáme jednotlivé hledané hodnoty tlaků p'_1 , p'_2 a p'_3 . Z předešlého vztahu 2.22 můžeme vyjádřit jejich součet $V_1 + V_2 + V_3$. Dospějeme k vyjádření

$$V_1 + V_2 + V_3 = \frac{R_m T}{p} \left(n_1 + \frac{m_2}{M_{m_2}} + n_3 \right). \quad (2.23)$$

Ekvivalentními úpravami jsme dostali jednu rovnici o třech neznámých. V zadání příkladu máme uveden poměr 2.13 mezi jednotlivými objemy V_1 , V_2 a také V_3 . Dle 2.13 platí, že

$$V_2 = \frac{3}{2} V_1. \quad (2.24)$$

S využitím zadaného poměru 2.13 mezi objemy V_1 , V_2 a V_3 lze také vyčíst závislost mezi objemy V_2 a V_3 . Vzhledem i k rovnosti 2.24 můžeme napsat

$$V_3 = \frac{4}{3} V_2; \quad (2.25)$$

$$V_3 = 2V_1. \quad (2.26)$$

Konečně dosazením vyjádřeného vztahu 2.24 a 2.26 do rovnosti 2.23 dostáváme obecný vztah na výpočet hodnoty objemu V_1 , který je po dosazení a úpravě ve tvaru

$$V_1 + \frac{3}{2} V_1 + 2V_1 = \frac{R_m T}{p} \left(n_1 + \frac{m_2}{M_{m_2}} + n_3 \right); \quad (2.27)$$

$$V_1 = \frac{2R_m T}{9p} \left(n_1 + \frac{m_2}{M_{m_2}} + n_3 \right). \quad (2.28)$$

Vztah 2.28 je obecným vyjádřením hodnoty objemu V_1 první nádoby, ve které první plyn argon Ar vytváří tlak p'_1 . Argon Ar máme zadaný látkovým množstvím n_1 , jehož hodnota je rovna $n_1 = 2,5$ mol. S využitím stavové rovnice ideálního plynu a vztahu 2.28 můžeme pro tlak p'_1 napsat vyjádření

$$p'_1 = \frac{n_1 R_m T}{V_1}; \quad (2.29)$$

$$p'_1 = \frac{9pn_1}{2 \left(n_1 + \frac{m_2}{M_{m_2}} + n_3 \right)}. \quad (2.30)$$

Druhý plyn vodík H_2 vytváří v nádobě o objemu V_2 tlak p'_2 . S využitím stavové rovnice ideálního plynu a vztahů 2.24 a 2.28 můžeme pro tlak p'_2 napsat vztah ve tvaru

$$p'_2 = \frac{n_2 R_m T}{V_2}; \quad (2.31)$$

$$p'_2 = \frac{3pm_2}{M_{m_2} \left(n_1 + \frac{m_2}{M_{m_2}} + n_3 \right)}. \quad (2.32)$$

A nakonec třetí plyn kyslík O_2 je zadáný látkovým množstvím $n_3 = 2$ mol. Pomocí vztahů 2.26 a 2.28 můžeme pro tlak p'_3 napsat rovnice

$$p'_3 = \frac{n_3 R_m T}{V_3}; \quad (2.33)$$

$$p'_3 = \frac{9pn_3}{4 \left(n_1 + \frac{m_2}{M_{m_2}} + n_3 \right)}. \quad (2.34)$$

Obecně odvozené vztahy pořadě 2.30, 2.32 a nakonec 2.34 představují vztahy pro výpočet tlaků pořadě p'_1 , p'_2 a p'_3 daných plynů v nádobách o objemech V_1 , V_2 a V_3 samostatně.

Číselné dosazení

Pokud do obecně odvozených vztahů 2.30, 2.32 a 2.34 dosadíme hodnoty ze zadání, můžeme číselně určit jednotlivé hodnoty tlaků p'_1 , p'_2 i p'_3 .

Po dosazení zadaných hodnot do vztahu 2.30 číselně určíme tlak p'_1 . Můžeme tedy psát

$$p'_1 = \frac{9 \cdot 2,5 \cdot 10^7 \cdot 2,5}{2 \cdot \left(2,5 + \frac{3,3}{2 \cdot 10^{-3}} + 2 \right)} \text{ Pa};$$

$$p'_1 \approx 1,7 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Dosazením číselných hodnot ze zadání vyčíslíme i tlak p'_2 . S využitím vztahu 2.32 lze napsat

$$p'_2 = \frac{3 \cdot 2,5 \cdot 10^7 \cdot 3,3}{2 \cdot 10^{-3} \cdot \left(2,5 + \frac{3,3}{2 \cdot 10^{-3}} + 2 \right)} \text{ Pa};$$

$$p'_2 \approx 7,5 \cdot 10^7 \text{ Pa}.$$

Nakonec po dosazení číselných hodnot ze zadání do vztahu 2.34 číselně určíme hodnotu tlaku p'_3 . Daná hodnota je rovna

$$p'_3 = \frac{9 \cdot 2,5 \cdot 10^7 \cdot 2}{4 \cdot \left(2,5 + \frac{3,3}{2 \cdot 10^{-3}} + 2 \right)} \text{ Pa};$$

$$p'_3 \approx 6,8 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

Shrnutí zadaného příkladu

Tlak p'_1 prvního plynu argonu Ar, umístěného do nádoby o objemu V_1 , je roven hodnotě $p'_1 = 1,7 \cdot 10^5$ Pa. Tlak p'_2 druhého plynu vodíku H_2 , umístěného do nádoby o objemu V_2 , je roven hodnotě $p'_2 = 7,5 \cdot 10^7$ Pa. Tlak p'_3 třetího plynu kyslíku O_2 , umístěného do nádoby o objemu V_3 , je roven hodnotě $p'_3 = 6,8 \cdot 10^4$ Pa.

2.3 Výpočet výšky nádoby se zatíženou pohyblivou horní podstavou

Zadání příkladu

Uvažujme uzavřenou nádobu ve tvaru rotačního válce o poloměru r s proměnlivou výškou j . Na horní podstavu jsme umístili krychli z mosazi s délkou strany $a = 2,5$ m o hustotě $\rho = 8600$ kg \cdot m⁻³. Do uzavřené nádoby s proměnlivou výškou j jsme umístili tři plyny o teplotě $T_1 = 293,15$ K. Prvním plynem je dusík N₂, jehož množství molekul je $N_1 = 6,022 \cdot 10^{23}$, druhým plynem je vodík H₂ o látkovém množství $n_2 = 6$ mol a třetím je kyslík O₂ o hmotnosti $m_3 = 4,5$ kg. Po ustálení zatížené horní podstavy ve výšce j_1 jsme plyn ochladili z teploty T_1 na teplotu $T_2 = \frac{1}{4}T_1$ tak, že mezi plynem v nádobě a okolím neprobíhala tepelná výměna. Vypočtete výšku j_2 horní podstavy od dolní podstavy dané nádoby po ochlazení plynu. Uvažujte, že danou soustavu plynů lze nahradit určitým plynem o Poissonově konstantě $\kappa = \frac{7}{5}$. Popsaná situace po ustálení horní podstavy nádoby ve výšce j_1 je znázorněna na obrázku 2.1.

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Délka strany krychle	a	2,5 m
Hustota	ρ	8600 kg \cdot m ⁻³
Termodynamická teplota	T_1	293,15 K
Poměr termodynamických teplot	$\frac{T_1}{T_2}$	4
Počet částic	N_1	$6,022 \cdot 10^{23}$
Látkové množství	n_2	6 mol
Hmotnost	m_3	4,5 kg
Poissonova konstanta	κ	$\frac{7}{5}$
Výška	j_2	? m

Tabulka 2.3: Zápis zadaných hodnot v tabelové podobě.

Obecný postup řešení

S využitím Daltonova zákona aditivity parciálních tlaků 2.1 můžeme pro $n = 3$ psát

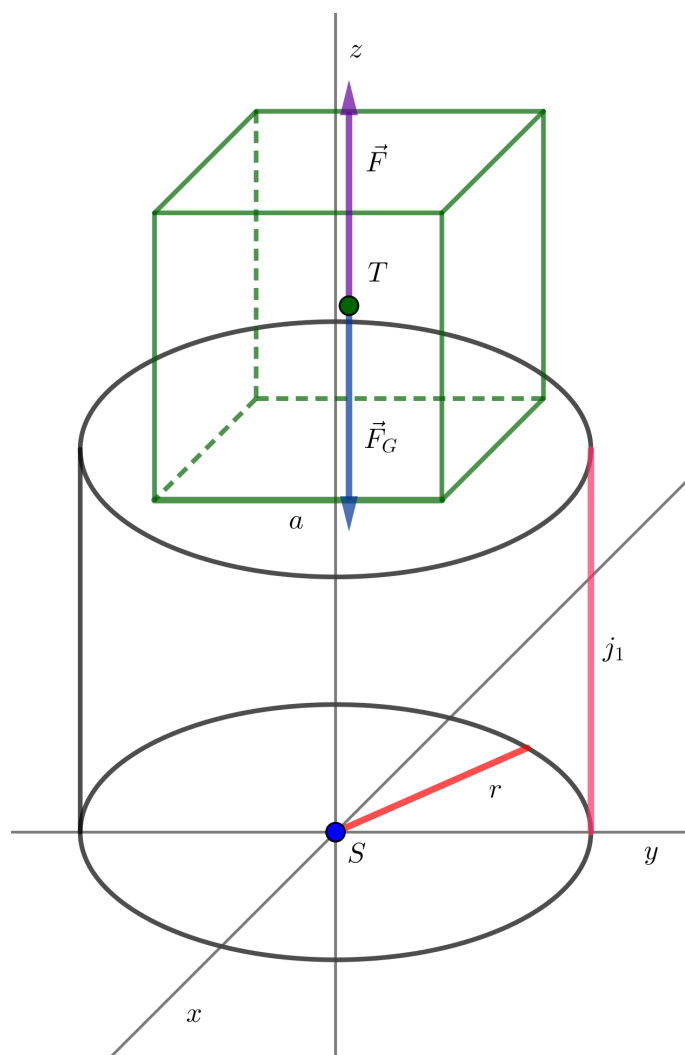
$$p = p_1 + p_2 + p_3. \quad (2.35)$$

První plyn dusík N₂ máme zadaný pouze množstvím molekul $N_1 = 6,022 \cdot 10^{23}$. Pro parciální tlak p_1 prvního plynu dle stavové rovnice ideálního plynu a základních materiálových vztahů platí následující vztahy

$$p_1 = \frac{n_1 R_m T_1}{V_1}; \quad (2.36)$$

$$p_1 = \frac{N_1 R_m T_1}{N_A \pi r^2 j_1}. \quad (2.37)$$

Druhý plyn vodík H₂ je zadaný látkovým množstvím $n_2 = 6$ mol. S využitím stavové rovnice ideálního plynu můžeme pro parciální tlak p_2 napsat



Obrázek 2.1: Situace po ustálení pohyblivé horní podstavy dané nádoby ve výšce j_1 , na které se nachází krychle z mosazi.

$$p_2 = \frac{n_2 R_m T_1}{V_1}; \quad (2.38)$$

$$p_2 = \frac{n_2 R_m T_1}{\pi r^2 j_1}. \quad (2.39)$$

Třetí plyn kyslík O_2 má zadanou hodnotu hmotnosti $m_3 = 4,5$ kg. Parciální tlak p_3 můžeme tedy s využitím stavové rovnice ideálního plynu charakterizovat vztahy

$$p_3 = \frac{n_3 R_m T_1}{V_1}; \quad (2.40)$$

$$p_3 = \frac{m_3 R_m T_1}{M_{m_3} \pi r^2 j_1}, \quad (2.41)$$

kde M_{m_3} představuje molární hmotnost, kterou získáme z periodické tabulky prvků. S využitím vyjádřených parciálních tlaků p_1 , p_2 a p_3 ze vztahů 2.37, 2.39 a 2.41 můžeme dosazením do 2.35 a následnou úpravou pro tlak p napsat

$$p = \frac{N_1 R_m T_1}{N_A \pi r^2 j_1} + \frac{n_2 R_m T_1}{\pi r^2 j_1} + \frac{m_3 R_m T_1}{M_{m_3} \pi r^2 j_1}; \quad (2.42)$$

$$p = \frac{R_m T_1}{\pi r^2 j_1} \left(\frac{N_1}{N_A} + n_2 + \frac{m_3}{M_{m_3}} \right). \quad (2.43)$$

Tlak p se dá vyjádřit pomocí síly F působící na plochu o obsahu S následujícím způsobem

$$p = \frac{F}{S}. \quad (2.44)$$

S využitím vztahů 2.43 a 2.44 můžeme pro sílu F , kterou částice uvažované směsi plynů působí na horní podstavu dané nádoby o obsahu $S = \pi r^2$, napsat vztah

$$F = \frac{R_m T_1}{j_1} \left(\frac{N_1}{N_A} + n_2 + \frac{m_3}{M_{m_3}} \right). \quad (2.45)$$

Po ustálení horní pohyblivé podstavy nádoby ve výšce j_1 od dolní podstavy došlo k tomu, že velikost působící síly F , kterou působí směs plynů na horní podstavu, se rovná velikosti působící tíhové síly F_G daného tělesa, kterou můžeme vyjádřit v následujícím tvaru

$$F_G = mg, \quad (2.46)$$

kde m je hmotnost daného tělesa. S využitím rovnosti 2.46 můžeme vztah 2.45 přepsat do podoby

$$\frac{R_m T_1}{j_1} \left(\frac{N_1}{N_A} + n_2 + \frac{m_3}{M_{m_3}} \right) = mg; \quad (2.47)$$

$$\frac{R_m T_1}{j_1} \left(\frac{N_1}{N_A} + n_2 + \frac{m_3}{M_{m_3}} \right) = \rho a^3 g. \quad (2.48)$$

Vyjádřením neznámé j_1 z rovnosti 2.48 dostáváme ekvivalentní vztah ve tvaru

$$j_1 = \frac{R_m T_1}{\rho a^3 g} \left(\frac{N_1}{N_A} + n_2 + \frac{m_3}{M_{m_3}} \right). \quad (2.49)$$

Po ustálení pohyblivé horní podstavy ve výšce j_1 od dolní podstavy nádoby začneme plyn v nádobě ochlazovat z teploty T_1 na teplotu $T_2 = \frac{1}{4}T_1$ tak, že nebude docházet k tepelné výměně s okolím. Jedná se o adiabatický děj, který je popsán Poissonovou rovnicí ve tvaru

$$pV_1^\gamma = p'V_2^\gamma. \quad (2.50)$$

S využitím stavové rovnice ideálního plynu můžeme předcházející vztah 2.50 přepsat ekvivalentně do tvaru

$$\left(\frac{nR_m T_1}{V_1} \right) V_1^\gamma = \left(\frac{nR_m T_2}{V_2} \right) V_2^\gamma; \quad (2.51)$$

$$\frac{V_1^\gamma}{V_1} T_1 = \frac{V_2^\gamma}{V_2} T_2, \quad (2.52)$$

což lze s využitím zadaného poměru mezi termodynamickými teplotami T_1 a T_2 upravit do následujícího tvaru

$$4V_1^{\kappa-1} = V_2^{\kappa-1}. \quad (2.53)$$

Hledanou neznámou je výška j_2 dané nádoby. Můžeme si ji vyjádřit dosazením za V_1 a V_2 do předchozího vztahu 2.53. Dostáváme rovnost

$$4(\pi r^2 j_1)^{\kappa-1} = (\pi r^2 j_2)^{\kappa-1}; \quad (2.54)$$

$$4j_1^{\kappa-1} = j_2^{\kappa-1}. \quad (2.55)$$

Úpravou výrazu 2.55 dostáváme vyjádření pro výpočet výšky j_2 . Lze psát rovnost ve tvaru

$$j_2 = 4^{\frac{1}{\kappa-1}} j_1. \quad (2.56)$$

Dosazením vyjádření pro výšku j_1 ze vztahu 2.49 do předcházejícího vztahu 2.56 dostáváme vyjádření pro hledanou hodnotu výšky j_2 , které je ve tvaru

$$j_2 = \frac{4^{\frac{1}{\kappa-1}} R_m T_1}{\rho a^3 g} \left(\frac{N_1}{N_A} + n_2 + \frac{m_3}{M_{m_3}} \right). \quad (2.57)$$

Číselné dosazení

Pro hledanou hodnotu výšky j_2 dané nádoby máme vyjádřený obecný vztah 2.57. Dosazením známých číselných hodnot ze zadání do vztahu 2.57 hodnotu výšky j_2 určíme také číselně. Dostáváme

$$j_2 = \frac{4^{\frac{5}{2}} \cdot 8,314 \cdot 293,15}{8600 \cdot 2,5^3 \cdot 9,81} \cdot \left(\frac{6,022 \cdot 10^{23}}{6,022 \cdot 10^{23}} + 6 + \frac{4,5}{32 \cdot 10^{-3}} \right) \text{ m};$$

$$j_2 \approx 8,73 \text{ m}.$$

Shrnutí zadaného příkladu a námět k zamyšlení

Výška j_2 nádoby ve tvaru rotačního válce byla po adiabatickém ochlazení soustavy plynů uvnitř rovna hodnotě $j_2 = 8,73$ m.

Zjistěte, jaká je závislost mezi výslednou hodnotou výšky j_2 a Poissonovou konstantou κ . Zvyšuje se výška j_2 při zvyšování hodnoty Poissonovy konstanty κ ? Nejdřív si obecně vyjádřete hodnotu Poissonovy konstanty κ ze vztahu 2.57 a poté na dotaz odpovězte.

2.4 Tělísko v trubici se soustavou tří plynů

Zadání příkladu

Předpokládejme trubici ve tvaru rotačního válce o průměru $d = 1$ m bez horního uzávěru. Do trubice jsme vložili tělísko stejného tvaru o výšce $j' = 0,35$ m tak, že kolem uvažovaného tělíska v trubici neprojde žádná částice plynu ven z trubice (neuvažujte třecí sílu). Hustota uvažovaného tělíska je $\rho' = 8600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Nádobu jsme naplnili soustavou tří plynů o teplotě $t = 100$ °C. Prvním plynem byl vodík H_2 , druhým plynem byl kyslík O_2 a třetím bylo hélium He . Vypočítejte jednotlivá látková množství n_1 , n_2 a n_3 použitých plynů, pokud při látkovém množství $2n_1$ prvního plynu, n_2 druhého plynu a n_3 třetího plynu se tělísko ustálilo ve výšce $j_1 = 1,204$ m. Při látkovém množství $2n_1$ prvního plynu, $3n_2$ druhého plynu a n_3 třetího plynu se tělísko ustálilo ve výšce $j_2 = 1,739$ m. Při třetím měření jsme použili látkové množství $3n_1$ prvního plynu, $4n_2$ druhého plynu a n_3 třetího plynu. Dosáhli jsme ustálení tělíska ve výšce $j_3 = 2,408$ m. Vypočtete jednotlivé hodnoty látkových množství n_1 , n_2 a n_3 daných plynů.

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Průměr	d	1 m
Výška tělíska	j'	0,35 m
Hustota tělíska	ρ'	$8600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Teplota	t	100 °C
Termodynamická teplota	T	373,15 K
Výška	j_1	1,204 m
Výška	j_2	1,739 m
Výška	j_3	2,408 m
Látkové množství	n_1	? mol
Látkové množství	n_2	? mol
Látkové množství	n_3	? mol

Tabulka 2.4: Zázpis zadaných hodnot v tabelové podobě.

Obecný postup řešení a číselné dosazení

V dané trubici ve tvaru rotačního válce o průměru $d = 1$ m, jejíž horní podstava je tvořena dolní podstavou daného tělíska o stejném průměru $d = 1$ m, je soustava tří plynů. Pro výsledný tlak p můžeme s výhodou využít Daltonův zákon aditivity parciálních tlaků 2.1. Pro $n = 3$ lze daný vztah 2.1 upravit a napsat v následujícím tvaru

$$p = p_1 + p_2 + p_3. \quad (2.58)$$

Pro parciální tlak p_i , kde $i \in \{1,2,3\}$, i -tého plynu můžeme s využitím stavové rovnice ideálního plynu uvést vztah

$$p_i = \frac{n_i R_m T}{V}; \quad (2.59)$$

$$p_i = \frac{4n_i R_m T}{\pi d^2 j}. \quad (2.60)$$

Po vložení daného tělíska ve tvaru rotačního válce o stejném průměru d , jako je průměr trubice, o výšce $j' = 0,35$ m a o hustotě $\rho' = 8600 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ do zkoumané trubice, která obsahuje soustavu tří plynů o látkových množstvích n_1 , n_2 a n_3 , se tělísko ustálí v určité výšce j . Ustálení nastane po dosažení rovnosti velikosti vektoru síly \mathbf{F} , kterou částice daného plynu působí na dolní podstavu tělíska o ploše S , a velikosti vektoru tíhové síly \mathbf{F}_G , kterou je tělísko přitahováno k zemskému povrchu v tíhovém poli Země. V souladu s touto úvahou je možné napsat

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_G = \mathbf{o}; \quad (2.61)$$

$$F = F_G; \quad (2.62)$$

$$p\pi r^2 = \rho' \pi r^2 j' g, \quad (2.63)$$

kde \mathbf{o} představuje nulový vektor. Především rovnost 2.63 můžeme ekvivalentně přepsat do následujícího tvaru

$$p = \rho' j' g. \quad (2.64)$$

Dosažením vyjádření 2.60 pro každý z plynů (tedy pro každé $i \in \{1,2,3\}$) do vztahu 2.58 s využitím vyjádření 2.64 pro výsledný tlak p dostáváme rovnost

$$p = \frac{4n_1 R_m T}{\pi d^2 j} + \frac{4n_2 R_m T}{\pi d^2 j} + \frac{4n_3 R_m T}{\pi d^2 j}; \quad (2.65)$$

$$\rho' j' g = \frac{4R_m T}{\pi d^2 j} (n_1 + n_2 + n_3). \quad (2.66)$$

Neznámými v předešlé rovnosti 2.66 jsou hodnoty jednotlivých látkových množství n_1 , n_2 a n_3 , proto po vyjádření neznámých dospějeme ke vztahu

$$n_1 + n_2 + n_3 = \frac{\rho' j' g \pi d^2 j}{4R_m T}, \quad (2.67)$$

což představuje jednu rovnici o třech neznámých n_1 , n_2 a n_3 .

Výška nádoby	Vodík H ₂	Kyslík O ₂	Hélium He
j_1	$2n_1$	n_2	n_3
j_2	$2n_1$	$3n_2$	n_3
j_3	$3n_1$	$4n_2$	n_3

Tabulka 2.5: Hodnoty látkových množství jednotlivých plynů při daných hodnotách výšek.

S využitím údajů ze zadání příkladu, které jsou přehledně sepsány v předcházející tabulce 2.5, a vztahu 2.67 můžeme napsat následující trojici lineárních rovnic o třech neznámých n_1 , n_2 a n_3

$$2n_1 + n_2 + n_3 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2 j_1}{4R_m T}; \quad (2.68)$$

$$2n_1 + 3n_2 + n_3 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2 j_2}{4R_m T}; \quad (2.69)$$

$$3n_1 + 4n_2 + n_3 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2 j_3}{4R_m T}. \quad (2.70)$$

Řešit soustavu n rovnic o m neznámých lze různými způsoby. Prvně bude uveden postup řešení pomocí matic a Gaussovy eliminační metody. Poté bude uveden postup přes postupné vyjadřování neznámých.

Nejprve tedy vyřešíme soustavu tří lineárních rovnic 2.68, 2.69 a 2.70 o třech neznámých pomocí Gaussovy eliminační metody. Pro danou soustavu lineárních rovnic si můžeme matici napsat v následujícím tvaru

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & \frac{\varrho' j' g \pi d^2 j_1}{4R_m T} \\ 2 & 3 & 1 & \frac{\varrho' j' g \pi d^2 j_2}{4R_m T} \\ 3 & 4 & 1 & \frac{\varrho' j' g \pi d^2 j_3}{4R_m T} \end{array} \right).$$

Řešení touto metodou obecně by bylo obtížnější a časově náročnější. Dosazením zadaných hodnot získáme matici, která bude tvořena pouze čísly. Dostáváme matici ve tvaru

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 13 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{array} \right).$$

Předešlou matici upravíme následujícím způsobem. První řádek vynásobíme číslem (-1) a přičteme jej k druhému řádku. První řádek vynásobíme číslem $(-\frac{3}{2})$ a přičteme jej k třetímu řádku. Dospějeme k následující řádkově ekvivalentní matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 13 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{array} \right).$$

Matici můžeme dále upravit do jiného řádkově ekvivalentního tvaru, pokud druhý řádek vynásobíme číslem $(-\frac{1}{2})$ a přičteme jej k prvnímu řádku. Druhý řádek potom vynásobíme číslem $(-\frac{5}{4})$ a přičteme jej k třetímu řádku. Dostáváme matici ve tvaru

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Předcházející matici můžeme dále upravit pomocí řádkově ekvivalentních úprav následujícím způsobem. Třetí řádek vynásobíme číslem 2 a přičteme jej k prvnímu řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right).$$

V posledním kroku levou část předcházející matice převedeme na jednotkovou matici a získáme tak řešení soustavy lineárních rovnic 2.68, 2.69 a 2.70 pro jednotlivá látková množství n_1 , n_2 a n_3 . Dostáváme matici ve tvaru

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Řešením soustavy tří rovnic 2.68, 2.69 a 2.70 o třech neznámých jsme vypočítali hodnoty jednotlivých látkových množství n_1 , n_2 a n_3 použitých plynů pomocí řádkově ekvivalentních úprav matic. Platí tedy

$$\begin{aligned} n_1 &= 3 \text{ mol;} \\ n_2 &= 2 \text{ mol;} \\ n_3 &= 1 \text{ mol.} \end{aligned}$$

Řešení zadané soustavy tří rovnic o třech neznámých může být pomocí Gaussovy eliminační metody a řádkově ekvivalentních úprav poněkud chaotické a obtížné pro člověka, který s tímto způsobem řešení nebyl doposud seznámen. Uvádím zde řešení dané soustavy lineárních rovnic 2.68, 2.69 a 2.70 i pomocí metody postupného vyjadřování neznámých n_1 , n_2 a n_3 .

Z první rovnice 2.68 si můžeme vyjádřit neznámou n_1 . Pro neznámou n_1 platí následující vyjádření

$$n_1 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2 j_1}{8R_m T} - \frac{1}{2}n_2 - \frac{1}{2}n_3. \quad (2.71)$$

Dosazením za neznámou n_1 z předcházejícího vztahu 2.71 do druhé rovnice 2.69 soustavy dospějeme k rovnosti

$$2 \overbrace{\left(\frac{\varrho' j' g \pi d^2 j_1}{8R_m T} - \frac{1}{2}n_2 - \frac{1}{2}n_3 \right)}^{n_1} + 3n_2 + n_3 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2 j_2}{4R_m T}, \quad (2.72)$$

ze které roznásobením závorky na levé straně dostáváme

$$\frac{\varrho' j' g \pi d^2 j_1}{4R_m T} - n_2 - n_3 + 3n_2 + n_3 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2 j_2}{4R_m T}. \quad (2.73)$$

Vyjádřením neznámé n_2 z předcházejícího vyjádření 2.73 dostáváme vztah pro výpočet neznámé n_2 (kvůli eliminaci neznámé n_3), který je ve tvaru

$$n_2 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2 j_2}{8R_m T} - \frac{\varrho' j' g \pi d^2 j_1}{8R_m T}, \quad (2.74)$$

$$n_2 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2}{8R_m T} (j_2 - j_1). \quad (2.75)$$

Následným dosazením předešlého vyjádření 2.75 pro neznámou n_2 s využitím vztahu 2.71 pro neznámou n_1 do třetí rovnice 2.70 soustavy dostáváme úpravou vztah

$$3 \left\{ \overbrace{\frac{\varrho' j' g \pi d^2 j_1}{8R_m T} - \frac{1}{2} \left[\overbrace{\frac{\varrho' j' g \pi d^2}{8R_m T} (j_2 - j_1)}^{n_2} \right]}^{n_1} - \frac{1}{2} n_3 \right\} + 4 \left[\overbrace{\frac{\varrho' j' g \pi d^2}{8R_m T} (j_2 - j_1)}^{n_2} \right] + n_3 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2 j_3}{4R_m T}. \quad (2.76)$$

Následnou úpravou předešlé rovnosti 2.76 dospějeme k rovnosti

$$\frac{3\varrho' j' g \pi d^2 j_1}{8R_m T} - \frac{3\varrho' j' g \pi d^2}{16R_m T} (j_2 - j_1) - \frac{3}{2} n_3 + \frac{\varrho' j' g \pi d^2}{2R_m T} (j_2 - j_1) + n_3 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2 j_3}{4R_m T}. \quad (2.77)$$

Vyjádřením neznámé n_3 z předešlé rovnice 2.77 a následnou úpravou dostáváme následující vztahy ve tvaru

$$n_3 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2}{R_m T} \left(-\frac{1}{2} j_3 + \frac{3}{4} j_1 - \frac{3}{8} j_2 + \frac{3}{8} j_1 + j_2 - j_1 \right); \quad (2.78)$$

$$n_3 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2}{R_m T} \left(-\frac{1}{2} j_3 + \frac{5}{8} j_2 + \frac{1}{8} j_1 \right). \quad (2.79)$$

Následným dosazením vyjádření 2.79 pro neznámou n_3 a vyjádření 2.75 pro neznámou n_2 do vyjádření 2.71 pro neznámou n_1 dostáváme

$$n_1 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2 j_1}{8R_m T} - \overbrace{\frac{\varrho' j' g \pi d^2}{16R_m T} (j_2 - j_1)}^{\frac{1}{2} n_2} - \overbrace{\frac{\varrho' j' g \pi d^2}{2R_m T} \left(-\frac{1}{2} j_3 + \frac{5}{8} j_2 + \frac{1}{8} j_1 \right)}^{\frac{1}{2} n_3}; \quad (2.80)$$

$$n_1 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2}{R_m T} \left(\frac{1}{8} j_1 - \frac{1}{16} j_2 + \frac{1}{16} j_1 + \frac{1}{4} j_3 - \frac{5}{16} j_2 - \frac{1}{16} j_1 \right); \quad (2.81)$$

$$n_1 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2}{R_m T} \left(\frac{1}{4} j_3 - \frac{3}{8} j_2 + \frac{1}{8} j_1 \right). \quad (2.82)$$

Jednotlivé neznámé hodnoty látkových množství n_1 , n_2 a n_3 jsme si vyjádřili obecně pomocí metody postupného vyjadřování neznámých. Dospěli jsme k následujícímu závěru

$$n_1 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2}{R_m T} \left(\frac{1}{4} j_3 - \frac{3}{8} j_2 + \frac{1}{8} j_1 \right); \quad (2.83)$$

$$n_2 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2}{8R_m T} (j_2 - j_1); \quad (2.84)$$

$$n_3 = \frac{\varrho' j' g \pi d^2}{R_m T} \left(-\frac{1}{2} j_3 + \frac{5}{8} j_2 + \frac{1}{8} j_1 \right). \quad (2.85)$$

Dosazením známých číselných hodnot ze zadání do vztahů 2.83, 2.84 a 2.85 můžeme jednotlivé neznámé hodnoty látkových množství n_1 , n_2 a n_3 určit číselně. Po dosazení dostáváme

$$n_1 = 3 \text{ mol};$$

$$n_2 = 2 \text{ mol};$$

$$n_3 = 1 \text{ mol}.$$

Shrnutí zadaného příkladu a námět k zamyšlení

Vyřešením zadané soustavy tří rovnic 2.68, 2.69 a 2.70 jsme zjistili hodnoty látkových množství n_1 , n_2 a n_3 použitých plynů. Číselně jsou po řadě n_1 , n_2 a n_3 rovny hodnotám po řadě $n_1 = 3$ mol, $n_2 = 2$ mol a $n_3 = 1$ mol.

Zadanou soustavu rovnic 2.68, 2.69 a 2.70 lze vyřešit ještě jiným způsobem, a to například pomocí číselných kongruencí či Cramerova pravidla. Vyzkoušejte řešení dané soustavy i těmito metodami.

Kapitola 3

Maxwellův pravděpodobnostní zákon rozdělení rychlostí molekul ideálního plynu

Následující kapitola se zabývá problematikou Maxwellova pravděpodobnostního zákona rozdělení rychlostí molekul plynu. Teoretický rozbor Maxwellova pravděpodobnostního zákona rozdělení rychlostí molekul plynu je uveden například v [2].

V jednotlivých řešených příkladech se bude využívat složitější matematický aparát. Jedná se o integrální počet reálné funkce jedné reálné proměnné, který je teoreticky zpracován a objasněn například v [6]. U čtenáře se předpokládá znalost základních metod výpočtu Riemannova určitého integrálu (zejména znalost metody substituce a metody per partes) i numerických metod výpočtu.

V obecném řešení některých příkladů v této kapitole je užíváno l'Hospitalovo pravidlo k výpočtu limit. Matematickou definici l'Hospitalova pravidla můžete nalézt například v [6]. V případě, že je toto pravidlo ve výpočtu limity v souladu s matematickou definicí užito, bude tato skutečnost označena následujícím symbolem $\stackrel{l'H}{=}$.

3.1 Obecné odvození Maxwellova pravděpodobnostního zákona rozdělení rychlostí molekul plynu

Zadání příkladu

Obecně odvoďte Maxwellův pravděpodobnostní zákon rozdělení rychlostí molekul ideálního plynu. K řešení využijte základní poznatky, které jsou k dané problematice uvedeny v [2].

Obecný postup řešení

Pro matematické odvození Maxwellova pravděpodobnostního zákona rozdělení rychlostí molekul se zavádí rychlostní prostor, jehož znázornění je na obrázku 3.1. Počet molekul dn , které mají rychlost v v intervalu $\langle v; v + dv \rangle$, je počet molekul, které mají koncový bod jejich vektoru rychlosti v v daném intervalu. V trojrozměrném prostoru se jedná o objem dV mezikoulí od hodnoty poloměru v do $v + dv$. Pro daný objem dV můžeme psát následující rovnost

$$dV = \frac{4}{3}\pi(v + dv)^3 - \frac{4}{3}\pi v^3; \quad (3.1)$$

$$dV = \frac{4}{3}\pi [v^3 + 3v^2 dv + 3v (dv)^2 + (dv)^3 - v^3]. \quad (3.2)$$

Hodnotu přírůstku dv uvažujeme limitně se blížíci 0, proto můžeme členy $3v (dv)^2$ a $(dv)^3$ zanedbat. Po zanedbání daných členů součtu v předešlém vztahu 3.2 můžeme daný vztah psát ve tvaru

$$dV = \frac{4}{3}\pi (3v^2 dv); \quad (3.3)$$

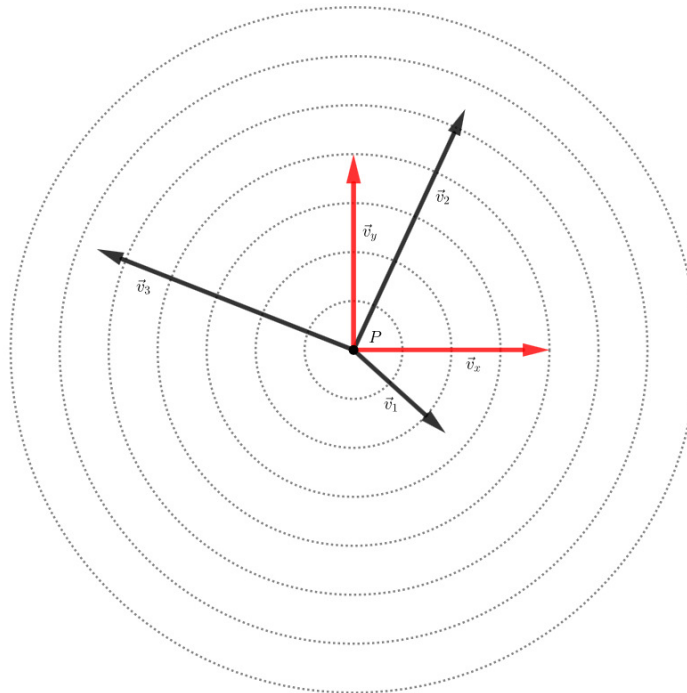
$$dV = 4\pi v^2 dv. \quad (3.4)$$

Pro celkový počet molekul dn s rychlostmi v v daném intervalu $\langle v; v+dv \rangle$ s využitím zobecněné barometrické rovnice a vztahu 3.4 dostáváme následující vztah

$$dn = n dV; \quad (3.5)$$

$$n dV = 4\pi v^2 n_0 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}} dv, \quad (3.6)$$

ve kterém m představuje hmotnost molekuly, T termodynamickou teplotu a n_0 počet molekul v objemové jednotce plynu při tlaku p_0 .



Obrázek 3.1: Znárodnění rychlostního prostoru v rovině $v_z = 0$.

Pro stanovení celkového počtu N molekul uvažovaného plynu využijeme následujícího faktu. Jedná se o molekuly s rychlostmi v v intervalu $\langle 0; +\infty \rangle$, proto je jejich celkový počet roven následujícímu nevlastnímu integrálu vlivem horní meze ve tvaru

$$N = \int_0^{+\infty} dn; \quad (3.7)$$

$$N = \int_0^{+\infty} 4\pi v^2 n_0 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}} dv. \quad (3.8)$$

S využitím základních vlastností při počítání integrálů můžeme integrál z předešlé rovnosti 3.8 přepsat do následujícího ekvivalentního tvaru

$$\int_0^{+\infty} 4\pi v^2 n_0 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}} dv = 4\pi n_0 \int_0^{+\infty} v^2 e^{-qv^2} dv, \quad (3.9)$$

ve kterém q představuje následující substituci konstantních členů

$$q = \frac{m}{2kT}.$$

Integrál v předchozí rovnosti 3.9 nejprve upravíme pomocí metody per partes. Postupujeme následujícím způsobem

$$\left| \begin{array}{ll} u = v & w' = v e^{-qv^2} \\ u' = 1 & w = -\frac{1}{2q} e^{-qv^2} \end{array} \right|;$$

$$4\pi n_0 \int_0^{+\infty} v^2 e^{-qv^2} dv = 4\pi n_0 \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left[-\frac{v}{2qe^{qv^2}} \right]_{v=0}^{\xi} + 4\pi n_0 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2q} e^{-qv^2} dv. \quad (3.10)$$

V předchozí rovnosti 3.10 nejdříve číselně vyjádříme první člen v daném součtu. Vyčíslení provedeme standardně pomocí Newtonova vztahu. Pro první člen tedy platí následující rovnost

$$4\pi n_0 \left[\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\xi}{2qe^{q\xi^2}} \right) + 0 \right] \stackrel{rH}{=} 4\pi n_0 \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4q^2 \xi e^{q\xi^2}} \right); \quad (3.11)$$

$$4\pi n_0 \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4q^2 \xi e^{q\xi^2}} \right) = 0, \quad (3.12)$$

ze které je zřejmé, že první člen v součtu pravé strany rovnosti 3.10 je roven nule. Z rovnosti 3.10 dopočteme zůstávající integrál. Pomocí následující substituce můžeme daný integrál ekvivalentně upravit do jiného tvaru

$$\left| \begin{array}{ll} a = \sqrt{q}v & 0 \rightarrow 0 \\ da = \sqrt{q} dv & +\infty \rightarrow +\infty \end{array} \right|;$$

$$4\pi n_0 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2q} e^{-qv^2} dv = 4\pi n_0 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2q\sqrt{q}} e^{-a^2} da. \quad (3.13)$$

V statistice je známá Gaussova chybová funkce $\zeta(\nu)$, kterou můžeme s výhodou při odvození využít, protože se integrál 3.13 nedá vyřešit analyticky. Tato funkce $\zeta(\nu)$ je dle [6] definována následujícím způsobem

$$\zeta(\nu) = \int_0^{\nu} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da. \quad (3.14)$$

Tuto funkci, kterou máme definovanou jako vztah 3.14, použijeme při odvození Maxwellova pravděpodobnostního zákona rozdělení rychlostí molekul. Pravou stranu rovnosti 3.13 upravíme do následující podoby

$$4\pi n_0 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2q\sqrt{q}} e^{-a^2} da = \frac{\pi\sqrt{\pi}n_0}{q\sqrt{q}} \int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da. \quad (3.15)$$

Pravou stranu předešlého vztahu 3.15 ještě upravíme tak, abychom mohli použít předpis Gaussovy chybové funkce ve tvaru, ve kterém byla ve vztahu 3.14 definována. Uvažujeme tedy následující úpravu

$$\frac{\pi\sqrt{\pi}n_0}{q\sqrt{q}} \int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da = \frac{\pi\sqrt{\pi}n_0}{q\sqrt{q}} \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_0^{\nu} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da; \quad (3.16)$$

$$\frac{\pi\sqrt{\pi}n_0}{q\sqrt{q}} \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_0^{\nu} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da = \frac{\pi\sqrt{\pi}n_0}{q\sqrt{q}} \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \zeta(\nu). \quad (3.17)$$

Dle průběhu Gaussovy chybové funkce $\zeta(\nu)$ znázorněného na obrázku 3.2 je zřejmé, že platí následující limita

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \zeta(\nu) = 1, \quad (3.18)$$

proto s využitím vztahů 3.17 a 3.18 platí výsledný vztah pro výpočet celkového počtu N molekul, který je ve tvaru

$$N = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{q\sqrt{q}} n_0, \quad (3.19)$$

a úpravou vztahu 3.19 i s využitím substitučního vztahu pro q dostáváme konečně pro n_0 následující vyjádření

$$n_0 = \frac{q\sqrt{q}}{\pi\sqrt{\pi}} N = \frac{m}{2\pi kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} N. \quad (3.20)$$

Pro počet molekul dn , jejichž rychlosti v jsou v intervalu $\langle v; v + dv \rangle$, můžeme s využitím 3.20 psát následující rovnost

$$dn = \frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} N v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}} dv. \quad (3.21)$$

Maxwellova rozdělovací funkce $\chi(v)$ je dle [2] uvažovaná funkce, která udává relativní počet molekul vztažený na jednotkový interval rychlostí. Jedná se o následující funkci

$$\chi(v) = \frac{1}{N} \frac{dn}{dv}, \quad (3.22)$$

pro kterou můžeme s využitím 3.21 psát následující rovnost

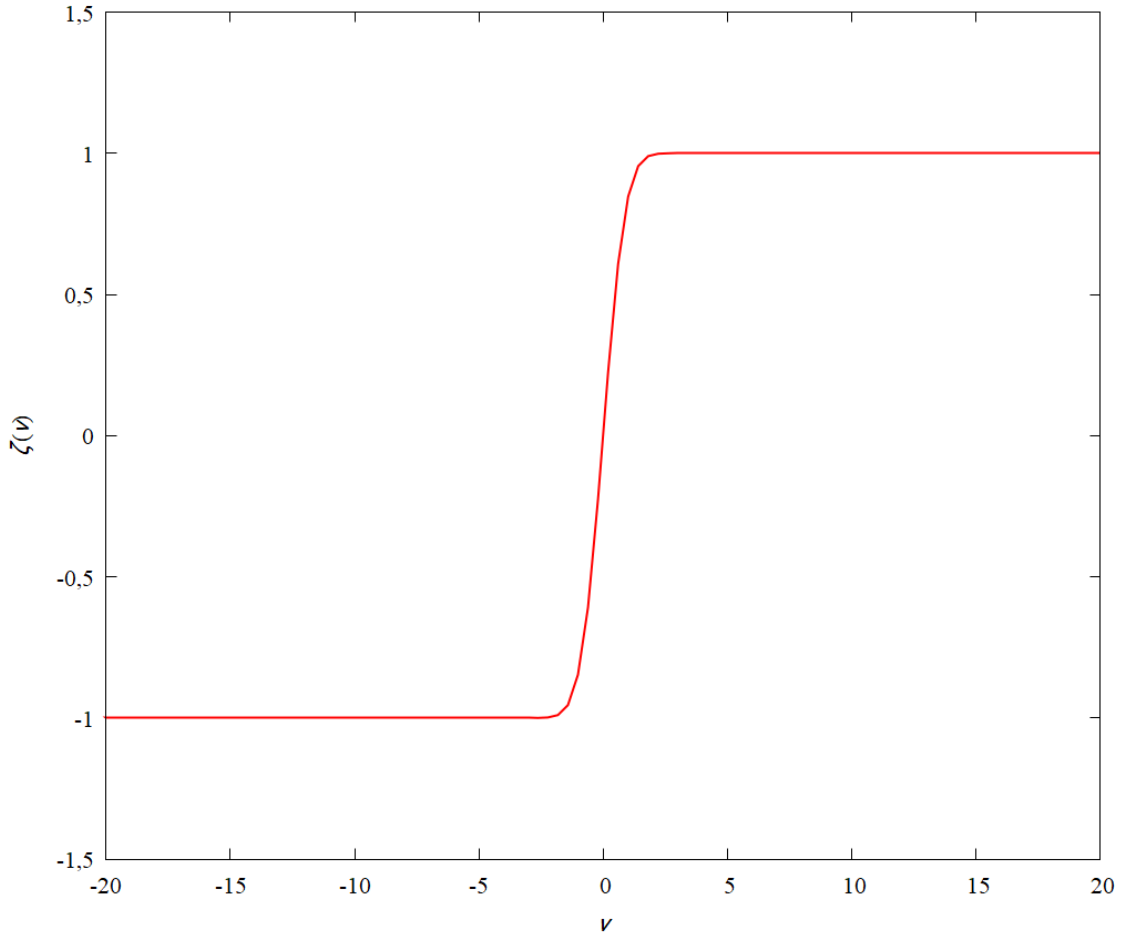
$$\chi(v) = \frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}}. \quad (3.23)$$

Tvar Maxwellovy rozdělovací funkce $\chi(v)$ můžeme s využitím substituce konstantních členů oproti tvaru v 3.23 psát v zjednodušeném tvaru. Zavedeme-li tyto substituce,

$$\frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} = K \quad \frac{m}{2kT} = q,$$

můžeme rovnost 3.23 upravit. Dospějeme ke vztahu

$$\chi(v) = Kv^2 e^{-qv^2}. \quad (3.24)$$



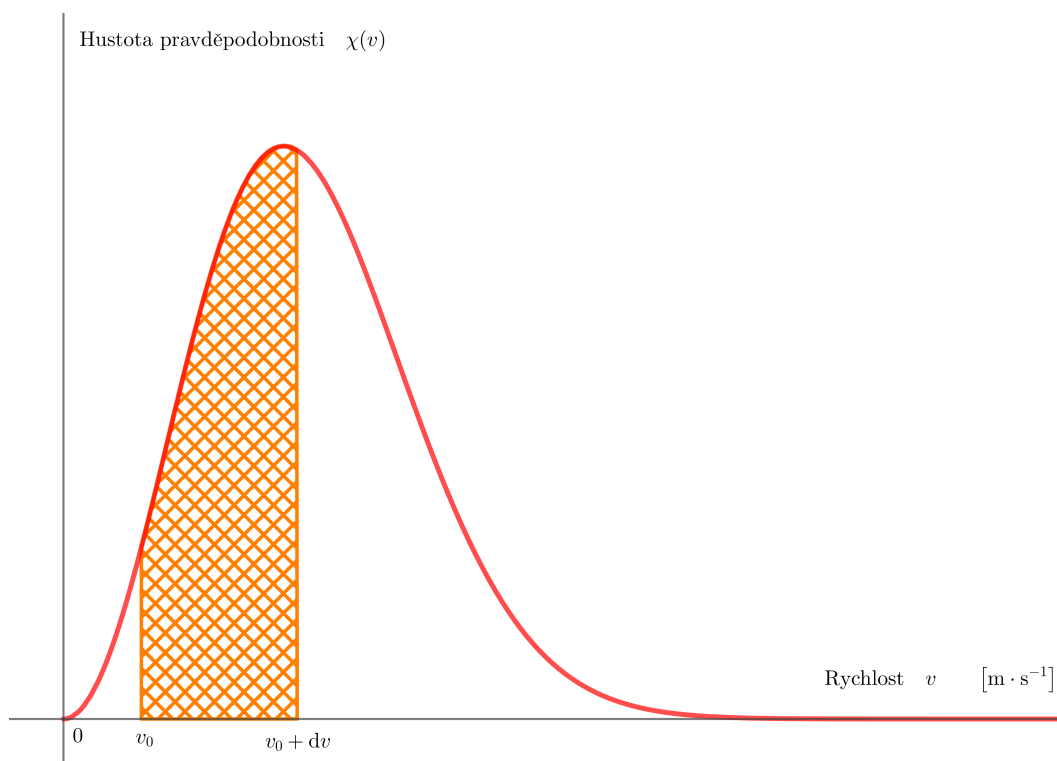
Obrázek 3.2: Průběh Gaussovy chybové funkce $\zeta(v)$ vytvořený v programu GNUPLOT.

Shrnutí zadaného příkladu

Pomocí zavedení rychlostního prostoru a výpočtu integrálu z něho plynoucího jsme dospěli k následujícímu závěru. Maxwellova rozdělovací funkce $\chi(v)$ udávající relativní počet molekul vztažený na jednotkový interval rychlostí má tvar

$$\begin{aligned} \chi(v) &= \frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}}; \\ \chi(v) &= Kv^2 e^{-qv^2}. \end{aligned}$$

Pro úplnost nakonec uvádíme graf znázorňující průběh Maxwellovy rozdělovací funkce $\chi(v)$ pro pevně zvolené hodnoty K a q . Průběh dané funkce je znázorněn na obrázku 3.3.



Obrázek 3.3: Průběh Maxwellovy rozdělovací funkce $\chi(v)$ pro pevně zvolené hodnoty K a q . V obrázku je vyznačena plocha pod křivkou, která udává relativní počet molekul s rychlostmi v v intervalu $\langle v_0; v_0 + dv \rangle$.

3.2 Výpočet jednotlivých rychlostí molekul plynu

Zadání příkladu

Obecně odvoďte vztah pro výpočet nejpravděpodobnější v_p , průměrné \bar{v} a střední kvadratické rychlosti v_k molekul plynu. Určete jejich číselnou hodnotu pro termodynamickou teplotu $T = 853,15$ K, pokud víte, že plynem je dusík N_2 . Hmotnost m dvouatomové molekuly daného plynu je rovna hodnotě $m = 46,5 \cdot 10^{-27}$ kg.

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Termodynamická teplota	T	853,15 K
Hmotnost dvouatomové molekuly	m	$46,5 \cdot 10^{-27}$ kg
Nejpravděpodobnější rychlost	v_p	? $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Průměrná rychlost	\bar{v}	? $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Střední kvadratická rychlost	v_k	? $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Tabulka 3.1: Zápis zadaných hodnot v tabelové podobě.

Obecný postup řešení

Na začátku obecného řešení je potřebné si uvědomit rozdíl mezi jednotlivými rychlostmi. Jak již z názvu vyplývá, nejpravděpodobnější rychlost v_p je taková rychlost, která je nejvíce pravděpodobná ve výskytu molekul plynu s danou rychlostí.

Maxwellova rozdělovací funkce $\chi(v)$ je funkce pravděpodobnosti výskytu molekul s danou rychlostí. S využitím [2] lze říct, že nejpravděpodobnější rychlost v_p odpovídá maximu křivky dané funkce. Toto maximum určíme jako lokální extrém funkce jedné reálné proměnné.

Lokální extrém funkce jedné reálné proměnné vypočteme s využitím [6] následujícím způsobem. Určíme všechny stacionární body, to znamená, že vypočteme tedy první derivaci zkoumané funkce $\chi(v)$ ve tvaru 3.24 a položíme ji rovnu nule. Pro první derivaci funkce $\chi(v)$ platí následující rovnost

$$\frac{d\chi(v)}{dv} = 2Kve^{-qv^2} - 2qv^3Ke^{-qv^2}; \quad (3.25)$$

$$\frac{d\chi(v)}{dv} = 2Kve^{-qv^2} (1 - qv^2). \quad (3.26)$$

Při hledání stacionárních bodů položíme první derivaci funkce $\chi(v)$ rovnu nule a upravujeme danou rovnici. Můžeme tedy psát

$$2Kve^{-qv^2} (1 - qv^2) = 0. \quad (3.27)$$

Vzhledem k tomu, že hmotnost m není nulová, pak i konstanta K je různá od nuly. Rychlost v také neuvažujeme nulovou a exponenciální funkce nikdy nedosahuje nulové funkční hodnoty. Proto platí následující nerovnost

$$2Kve^{-qv^2} \neq 0. \quad (3.28)$$

S využitím nerovnosti 3.28 můžeme rovnost 3.27 přepsat do následujícího tvaru

$$1 - qv^2 = 0, \quad (3.29)$$

kterou lze konečně přepsat do následujícího tvaru

$$v_p = \sqrt{\frac{1}{q}}; \quad (3.30)$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (3.31)$$

Průměrná rychlost \bar{v} je určena jako aritmetický průměr jednotlivých rychlostí molekul plynu. Protože se nejedná o diskrétní veličinu, obecný vztah vypočítáme s využitím vztahu 3.21 následujícím integrálem

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \int_0^{+\infty} v \, dn; \quad (3.32)$$

$$\frac{1}{N} \int_0^{+\infty} v \, dn = \int_0^{+\infty} \frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} v^3 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}} \, dv. \quad (3.33)$$

Zavedeme-li následující dvojici substitucí konstantních členů, můžeme integrál 3.33 upravit do zjednodušeného tvaru

$$\frac{m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} = p \quad \frac{m}{2kT} = q,$$

$$\frac{m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_0^{+\infty} 2v^3 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}} dv = p \int_0^{+\infty} 2v^3 e^{-qv^2} dv. \quad (3.34)$$

Pro výpočet integrálu 3.34 nejdříve využijeme substituční metodu. Zavedeme následující substituci

$$\left| \begin{array}{ll} w = qv^2 & 0 \longrightarrow 0 \\ dw = 2vq dv & +\infty \longrightarrow +\infty \end{array} \right|.$$

S využitím zavedené substituce můžeme integrál 3.34 zapsat v následujícím tvaru

$$p \int_0^{+\infty} 2v^3 e^{-qv^2} dv = \frac{p}{q^2} \int_0^{+\infty} w e^{-w} dw. \quad (3.35)$$

Po zavedení substituce a úpravě zadaného integrálu můžeme předešlou rovnost 3.35 upravit pomocí metody per partes

$$\left| \begin{array}{ll} x = w & y' = e^{-w} \\ x' = 1 & y = -e^{-w} \end{array} \right|,$$

a integrál 3.35 můžeme tedy upravit do následujícího tvaru

$$\frac{p}{q^2} \int_0^{+\infty} w e^{-w} dw = \frac{p}{q^2} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left[-\frac{w}{e^w} \right]_{w=0}^{\xi} + \frac{p}{q^2} \int_0^{+\infty} e^{-w} dw. \quad (3.36)$$

Nejdříve si pomocí Newtonova vztahu vyčíslíme první člen součtu v předchozí rovnosti 3.36. Pro první člen platí tedy

$$\frac{p}{q^2} \left[\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\xi}{e^{\xi}} \right) + 0 \right] \stackrel{L'H}{=} \frac{p}{q^2} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{e^{\xi}} \right); \quad (3.37)$$

$$\frac{p}{q^2} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{e^{\xi}} \right) = 0. \quad (3.38)$$

Z předchozího vztahu 3.38 jsme výpočtem zjistili, že hodnota prvního členu v součtu vztahu 3.36 je rovna nule. Proto budeme pokračovat ve výpočtu zůstávajícího integrálu. Pro zjednodušení zavedeme následující substituci

$$\left| \begin{array}{ll} z = -w & 0 \longrightarrow 0 \\ dz = -dw & +\infty \longrightarrow -\infty \end{array} \right|.$$

S využitím zavedené substituce integrál ve vztahu 3.36 můžeme zapsat a vypočítat následujícím způsobem

$$\frac{p}{q^2} \int_0^{+\infty} e^{-w} dw = -\frac{p}{q^2} \int_0^{-\infty} e^z dz; \quad (3.39)$$

$$-\frac{p}{q^2} \int_0^{-\infty} e^z dz = \frac{p}{q^2} \int_{-\infty}^0 e^z dz; \quad (3.40)$$

$$\frac{p}{q^2} \int_{-\infty}^0 e^z dz = \frac{p}{q^2} \lim_{\vartheta \rightarrow -\infty} [e^z]_{\vartheta}^0. \quad (3.41)$$

Konečně, pomocí substituce konstantních členů za p a q můžeme pravou stranu předešlé rovnosti 3.41 zapsat a vypočítat následujícím způsobem

$$\frac{p}{q^2} \lim_{\vartheta \rightarrow -\infty} [e^z]_{\vartheta}^z = \frac{\frac{m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}}{\left(\frac{m}{2kT}\right)^2} \left[1 - \lim_{\vartheta \rightarrow -\infty} (e^{\vartheta}) \right], \quad (3.42)$$

což po úpravě dává výsledný obecný vztah pro výpočet průměrné rychlosti \bar{v} , který je tedy ve tvaru

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (3.43)$$

Nakonec odvodíme obecný vztah pro výpočet střední kvadratické rychlosti v_k . Obdobně jako v případě odvození vztahu pro průměrnou rychlost \bar{v} můžeme při odvození vztahu pro druhou mocninu střední kvadratické rychlosti v_k s využitím vztahu 3.21 psát

$$v_k^2 = \frac{1}{N} \int_0^{+\infty} v^2 dn; \quad (3.44)$$

$$v_k^2 = \int_0^{+\infty} \frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} v^4 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}} dv. \quad (3.45)$$

Pro lepší přehlednost při počítání integrálu na pravé straně rovnosti 3.45 využijeme následující dvojici substitucí konstantních členů

$$\frac{m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} = p \quad \frac{m}{2kT} = q.$$

Pomocí těchto substitucí můžeme integrál na pravé straně vyjádření 3.45 přepsat a upravit do tvaru

$$\int_0^{+\infty} \frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} v^4 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}} dv = -\frac{p}{q} \int_0^{+\infty} -2qv^4 e^{-qv^2} dv. \quad (3.46)$$

Takto upravený integrál můžeme dále upravit pomocí metody per partes zavedené takto

$$\left| \begin{array}{ll} x = v^3 & y' = -2qve^{-qv^2} \\ x' = 3v^2 & y = e^{-qv^2} \end{array} \right|.$$

Provedením takto zavedené metody per partes dostáváme upravenou pravou stranu rovnosti 3.46 v následujícím tvaru

$$-\frac{p}{q} \int_0^{+\infty} -2qv^4 e^{-qv^2} dv = -\frac{p}{q} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left[\frac{v^3}{e^{qv^2}} \right]_{v=0}^{\xi} + \frac{3p}{q} \int_0^{+\infty} v^2 e^{-qv^2} dv. \quad (3.47)$$

Nejdříve číselně vyjádříme první člen v součtu pravé strany předešlé rovnosti 3.47. Můžeme tedy psát

$$-\frac{p}{q} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left[\frac{v^3}{e^{qv^2}} \right]_{v=0}^{\xi} = 0, \quad (3.48)$$

neboť můžeme opakovaně využít l'Hospitalova pravidla tak, jak je použito zde

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\frac{\xi^3}{e^{q\xi^2}} \right) \stackrel{l'H}{=} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\frac{3\xi^2}{2\xi q e^{q\xi^2}} \right); \\
& \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\frac{3\xi^2}{2\xi q e^{q\xi^2}} \right) \stackrel{l'H}{=} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\frac{6\xi}{2q e^{q\xi^2} + 4\xi^2 q^2 e^{q\xi^2}} \right); \\
& \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\frac{6\xi}{2q e^{q\xi^2} + 4\xi^2 q^2 e^{q\xi^2}} \right) \stackrel{l'H}{=} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{4\xi q^2 e^{q\xi^2} + 8\xi q^2 e^{q\xi^2} + 8q^3 \xi^3 e^{q\xi^2}} \right); \\
& \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{4\xi q^2 e^{q\xi^2} + 8\xi q^2 e^{q\xi^2} + 8q^3 \xi^3 e^{q\xi^2}} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Poté upravíme druhý člen součtu na pravé straně předešlé rovnosti 3.47. Daný integrál jsme již odvozovali, a to v předešlém příkladě při obecném odvození Maxwellova pravděpodobnostního zákona rozdělení rychlostí molekul plynu. Budeme tedy postupovat obdobným způsobem.

Nejdříve užitíme metodu per partes, kterou zavedeme následujícím způsobem

$$\left| \begin{array}{ll} x = v & y' = v e^{-qv^2} \\ x' = 1 & y = -\frac{1}{2q} e^{-qv^2} \end{array} \right|,$$

a integrál na pravé straně rovnosti 3.47 můžeme upravit do následující podoby

$$\frac{3p}{q} \int_0^{+\infty} v^2 e^{-qv^2} dv = \frac{3p}{q} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left[-\frac{v}{2q e^{qv^2}} \right]_{v=0}^{\xi} + \frac{3p}{q} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2q} e^{-qv^2} dv. \quad (3.49)$$

Po provedené metodě per partes číselně určíme první člen součtu na pravé straně rovnosti 3.49. Podle Newtonova vztahu a s využitím l'Hospitalova pravidla platí

$$\frac{3p}{q} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left[-\frac{v}{2q e^{qv^2}} \right]_{v=0}^{\xi} = \frac{3p}{q} \left[\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\xi}{2q e^{q\xi^2}} \right) + 0 \right]; \quad (3.50)$$

$$\frac{3p}{q} \left[\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\xi}{2q e^{q\xi^2}} \right) \right] \stackrel{l'H}{=} \frac{3p}{q} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4q^2 \xi e^{q\xi^2}} \right); \quad (3.51)$$

$$\frac{3p}{q} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4q^2 \xi e^{q\xi^2}} \right) = 0. \quad (3.52)$$

Zabývejme se nyní druhým členem součtu na pravé straně rovnosti 3.49. Zavedeme-li následující substituci

$$\left| \begin{array}{ll} a = \sqrt{q}v & 0 \rightarrow 0 \\ da = \sqrt{q} dv & +\infty \rightarrow +\infty \\ \frac{1}{\sqrt{q}} da = dv & \end{array} \right|,$$

můžeme zkoumaný integrál přepsat v souladu se zavedenou substitucí do následujícího tvaru

$$\frac{3p}{2q^2} \int_0^{+\infty} e^{-qv^2} dv = \frac{3p}{2q^2 \sqrt{q}} \int_0^{+\infty} e^{-a^2} da. \quad (3.53)$$

Jak již bylo v předešlých odstavcích naznačeno, pro odvození obecného vztahu střední kvadratické rychlosti v_k znovu použijeme Gaussovy chybové funkce. Její předpis

je uveden v předešlém příkladě jako vztah 3.14. Provedeme následující ekvivalentní úpravy tak, abychom mohli využít již zmíněné Gaussovy chybové funkce. S využitím 3.14 můžeme psát

$$\frac{3p}{2q^2\sqrt{q}} \int_0^{+\infty} e^{-a^2} da = \frac{3p\sqrt{\pi}}{4q^2\sqrt{q}} \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left(\int_0^\nu \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da \right); \quad (3.54)$$

$$\frac{3p\sqrt{\pi}}{4q^2\sqrt{q}} \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left(\int_0^\nu \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da \right) = \frac{3p\sqrt{\pi}}{4q^2\sqrt{q}} \lim_{\nu \rightarrow +\infty} [\zeta(\nu)]. \quad (3.55)$$

Dle průběhu Gaussovy chybové funkce $\zeta(\nu)$ znázorněného na obrázku 3.2 platí, že

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \zeta(\nu) = 1, \quad (3.56)$$

proto můžeme v úpravě rovnosti 3.55 pokračovat a pro druhou mocninu střední kvadratické rychlosti v_k psát

$$v_k^2 = \frac{3p\sqrt{\pi}}{4q^2\sqrt{q}}. \quad (3.57)$$

S využitím substitučních vztahů pro konstantní členy za p a q a následnou úpravou dostáváme

$$v_k = \sqrt{\frac{3p\sqrt{\pi}}{4q^2\sqrt{q}}}; \quad (3.58)$$

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (3.59)$$

Obecně jsme odvodili jednotlivé vztahy pro výpočet nejpravděpodobnější v_p , průměrné \bar{v} a střední kvadratické rychlosti v_k . Pro nejpravděpodobnější rychlost v_p je to vztah 3.31, pro průměrnou rychlost \bar{v} platí odvozený vztah 3.43 a nakonec pro střední kvadratickou rychlost v_k můžeme vzhledem k odvozenému psát vztah 3.59.

Číselné dosazení zadaných hodnot

Po obecném odvození potřebných vztahů můžeme dosadit číselné hodnoty ze zadání a určit tak požadované veličiny i číselně. Ze zadání vyplývá, že hmotnost m jedné molekuly dusíku N_2 je rovna hodnotě $m = 46,5 \cdot 10^{-27}$ kg a termodynamická teplota T je rovna hodnotě $T = 853,15$ K.

Pro výpočet nejpravděpodobnější rychlosti v_p můžeme s využitím vztahu 3.31 psát

$$v_p = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 853,15}{46,5 \cdot 10^{-27}}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$v_p \approx 711,61 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pro výpočet průměrné rychlosti \bar{v} lze s využitím odvozeného vztahu 3.43 psát

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 853,15}{\pi \cdot 46,5 \cdot 10^{-27}}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$\bar{v} \approx 802,96 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

A nakonec pro střední kvadratickou rychlost v_k lze dle odvozeného vztahu 3.59 psát

$$v_k = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 853,15}{46,5 \cdot 10^{-27}}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$v_k \approx 871,54 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Shrnutí zadaného příkladu a námět k zamyšlení

Dosazením zadaných číselných hodnot do obecně odvozených vztahů po řadě 3.31, 3.43 a 3.59 jsme číselně určili hodnotu po řadě nejpravděpodobnější rychlosti v_p , průměrné rychlosti \bar{v} a střední kvadratické rychlosti v_k . Dospěli jsme po řadě k následujícím hodnotám $v_p = 711,61 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\bar{v} = 802,96 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a nakonec $v_k = 871,54 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Zkuste obecně odvozené vztahy 3.31, 3.43 a 3.59 upravit do jiných ekvivalentních tvarů pomocí materiálových vztahů tak, abyste mohli dosazovat například hodnoty molárních hmotností M_m zadaných plynů.

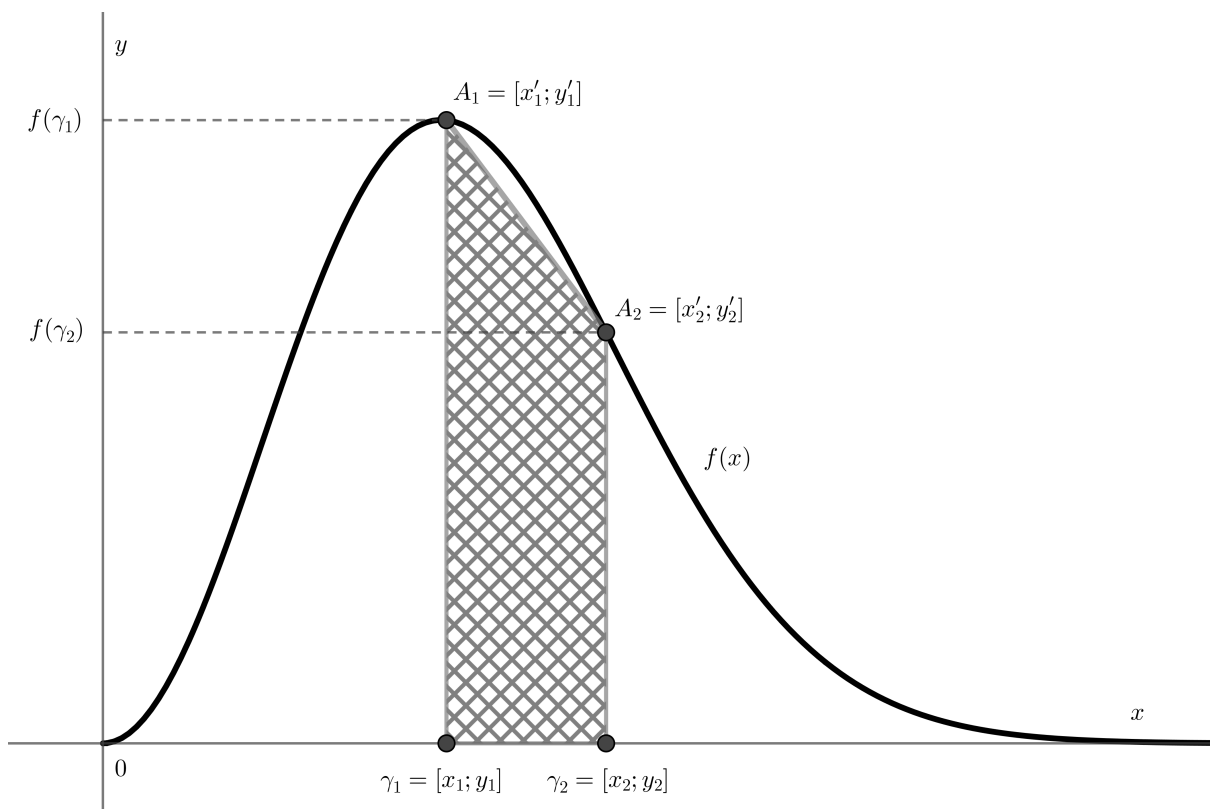
3.3 Relativní počet molekul s rychlostmi v zadaném intervalu s využitím lineární interpolace

Zadání příkladu

Určete relativní počet $\frac{\Delta n}{N}$ molekul zkoumaného ideálního plynu o termodynamické teplotě $T = 453,15 \text{ K}$ s rychlostmi v v intervalu rychlostí $\langle v_p - 2\Delta v; v_p + \Delta v \rangle$, kde v_p představuje nejpravděpodobnější rychlost pohybu molekul. Za přírůstek rychlosti Δv dosazujte hodnotu $\Delta v = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Uvažujte hmotnost m jedné molekuly daného plynu $m = 46,5 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Příklad řešte pomocí metody lineární interpolace.

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Termodynamická teplota	T	453,15 K
Přírůstek rychlosti	Δv	0,5 m · s ⁻¹
Hmotnost molekuly	m	46,5 · 10 ⁻²⁷ kg
Relativní počet molekul	$\frac{\Delta n}{N}$?

Tabulka 3.2: Zázpis zadaných hodnot v tabelové podobě.



Obrázek 3.4: Metoda lineární interpolace.

Obecný postup řešení

V řešení příkladu si nejdříve vysvětlíme, v čem spočívá metoda lineární interpolace. K názorné představě nám pomůže znázornění metody výpočtu na obrázku 3.4.

Uvažujme tedy obecně zadanou reálnou funkci $f(x)$ jedné reálné proměnné a dva body γ_1 a γ_2 takové, že $\gamma_i \in \mathcal{D}_f$, kde \mathcal{D}_f značí definiční obor funkce $f(x)$ a $i \in \{1,2\}$. Obsah plochy, kterou daná funkce $f(x)$ a souřadná osa x v intervalu pro $x \in \langle \gamma_1; \gamma_2 \rangle$ vytváří, se dá kromě výpočtu Riemannova určitého integrálu aproximovat i metodou lineární interpolace.

Metoda lineární interpolace průběh funkce $f(x)$ pro zadaný interval $x \in \langle \gamma_1; \gamma_2 \rangle$ aproximuje úsečkou. Tato úsečka je tvořena vzhledem k značení na obrázku 3.4 body A_1 a A_2 . Tyto body A_i , kde $i \in \{1,2\}$, mají souřadnice v zavedeném kartézském souřadném systému $0xy$ v následujícím tvaru $A_i = [x'_i; y'_i]$. Po úvaze, že y' -ová souřadnice je funkční hodnotou bodu γ_i funkce $f(x)$, lze tyto souřadnice bodu A_i , kde $i \in \{1,2\}$, přepsat do tvaru $A_i = [x'_i; f(\gamma_i)]$.

Výpočet obsahu plochy pod zadanou funkcí $f(x)$ tedy tato metoda převede na výpočet obsahu lichoběžníku se základnami $a_i = |A_i \gamma_i|$ pro $i \in \{1,2\}$ a jeho výškou $j = |\gamma_1 \gamma_2|$.

Nechť mají také body γ_i pro $i \in \{1,2\}$ přiřazené souřadnice ve zvoleném kartézském souřadném systému $0xy$ dle obrázku 3.4. V řešení příkladu budeme pokračovat určením délek jednotlivých úseček vzniklého lichoběžníku.

Pro délku a_i i -té základny, kde $i \in \{1,2\}$, která je tvořena body γ_i a A_i , lze s využitím známého vztahu pro výpočet délky vektoru \mathbf{a}_i , určeného počátečním bodem γ_i a konečným bodem A_i , napsat vztah

$$|\mathbf{a}_i| = |A_i - \gamma_i|; \quad (3.60)$$

$$|\mathbf{a}_i| = \sqrt{(x'_i - x_i)^2 + (f(\gamma_i) - y_i)^2}. \quad (3.61)$$

Vzhledem k tomu, že bod γ_i , kde $i \in \{1,2\}$, leží na souřadné ose x , neboli leží na přímce $y = 0$, musí být y -ová souřadnice tohoto bodu také rovna 0. Tedy bod γ_i , kde $i \in \{1,2\}$, má přiřazené souřadnice ve tvaru $\gamma_i = [x_i; 0]$.

Dále, body γ_i a A_i , kde $i \in \{1,2\}$, tvoří přímku, která je rovnoběžná se souřadnou osou y , neboli leží na přímce $x = x_i$. Vzhledem k této skutečnosti jsou x -ové souřadnice bodů γ_i a A_i pro $i \in \{1,2\}$ stejné. Můžeme tedy napsat vztah

$$x'_i - x_i = 0. \quad (3.62)$$

Vztah 3.61 lze s využitím předešlého vztahu 3.62 přepsat do následujícího tvaru

$$|\mathbf{a}_i| = |f(\gamma_i)|, \quad (3.63)$$

což lze vzhledem k předpokládané nezápornosti funkční hodnoty $f(\gamma_i)$ bodu γ_i , kde $i \in \{1,2\}$, přepsat do konečné podoby

$$|\mathbf{a}_i| = f(\gamma_i). \quad (3.64)$$

Pro délku j výšky lichoběžníku můžeme s využitím obrázku 3.4 a s využitím vztahu pro výpočet velikosti vektoru \mathbf{j} tvořeného počátečním bodem γ_1 a koncovým bodem γ_2 napsat vztah

$$|\mathbf{j}| = |\gamma_2 - \gamma_1|; \quad (3.65)$$

$$|\mathbf{j}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (3.66)$$

Předcházející vztah 3.66 můžeme s využitím nulovosti y -ových souřadnic bodů γ_i , kde $i \in \{1,2\}$, přepsat a upravit do následující podoby

$$|\mathbf{j}| = |x_2 - x_1|. \quad (3.67)$$

Vzhledem k tomu, že $x_2 > x_1$, pak je i jejich rozdíl kladný. Pravou stranu předešlé rovnosti 3.67 lze tedy přepsat do následující podoby

$$|\mathbf{j}| = x_2 - x_1. \quad (3.68)$$

Pro obsah S lichoběžníku můžeme s využitím odvozených vztahů 3.64 a 3.68 napsat následující

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{j}| \sum_{1 \leq i \leq 2} |\mathbf{a}_i|; \quad (3.69)$$

$$S = \frac{1}{2} [f(\gamma_1) + f(\gamma_2)] (x_2 - x_1). \quad (3.70)$$

Předešlou rovnost 3.70 považujeme za obecně odvozený vztah pro výpočet obsahu S plochy pod křivkou při aplikaci metody lineární interpolace.

V řešení zadaného příkladu budeme pokračovat výpočtem relativního počtu molekul s rychlostmi v zkoumaného plynu v intervalu $\overbrace{(v_p - 2\Delta v; v_p + \Delta v)}^{\gamma_1}$. K řešení příkladu použijeme Maxwellovu rozdělovací funkci $\chi(v)$, která je v této kapitole uvedena jako vztah 3.23.

Vzhledem k tomu, že Maxwellova rozdělovací funkce představuje závislost hustoty pravděpodobnosti na rychlosti v , přeznačíme si x -ové souřadnice bodů na souřadnice v proměnné v .

Nejdříve si určíme v -té souřadnice bodů γ_i , kde $i \in \{1,2\}$, které jsou krajními body intervalu rychlostí molekul plynu. Pro v -tou souřadnici bodu γ_i , $i \in \{1,2\}$, platí následující

$$v_1 = v_p - 2\Delta v; \quad (3.71)$$

$$v_2 = v_p + \Delta v. \quad (3.72)$$

Pro velikost vektoru \mathbf{j} lze s využitím vztahů 3.68, 3.71 a 3.72 napsat následující rovnost

$$|\mathbf{j}| = v_2 - v_1; \quad (3.73)$$

$$|\mathbf{j}| = 3\Delta v. \quad (3.74)$$

S využitím vztahů 3.22 a 3.23 lze napsat následující rovnost

$$\frac{dn}{N} = \overbrace{\frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}}}_{f(v)} dv. \quad (3.75)$$

Budeme pokračovat určením funkčních hodnot bodů γ_i pro $i \in \{1,2\}$ funkce $f(v)$. V zadání příkladu máme uvedenou termodynamickou teplotu $T = 453,15$ K, hmotnost m jedné molekuly, která je rovna hodnotě $m = 46,5 \cdot 10^{-27}$ kg, a nakonec hodnotu přírůstku rychlosti $\Delta v = 0,5$ m \cdot s $^{-1}$.

S využitím vztahu 3.31 pro výpočet nejpravděpodobnější rychlosti v_p lze pro funkční hodnotu $f(\gamma_1)$ bodu γ_1 funkce $f(v)$ napsat následující

$$f(\gamma_1) = \frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} (v_p - 2\Delta v)^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{m}{kT} (v_p - 2\Delta v)^2}; \quad (3.76)$$

$$f(\gamma_1) = \frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \left(\sqrt{\frac{2kT}{m}} - 2\Delta v \right)^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{m}{kT} \left(\sqrt{\frac{2kT}{m}} - 2\Delta v \right)^2}. \quad (3.77)$$

S využitím vztahu 3.31 pro výpočet nejpravděpodobnější rychlosti v_p lze pro funkční hodnotu $f(\gamma_2)$ bodu γ_2 funkce $f(v)$ napsat vztahy

$$f(\gamma_2) = \frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} (v_p + \Delta v)^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{m}{kT} (v_p + \Delta v)^2}; \quad (3.78)$$

$$f(\gamma_2) = \frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \left(\sqrt{\frac{2kT}{m}} + \Delta v \right)^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{m}{kT} \left(\sqrt{\frac{2kT}{m}} + \Delta v \right)^2}. \quad (3.79)$$

Vzhledem k vztahům 3.69, 3.70, 3.74, 3.76 a 3.78 lze pro relativní počet molekul s rychlostmi v v intervalu $\langle v_p - 2\Delta v; v_p + \Delta v \rangle$ napsat následující vztah

$$\frac{\Delta n}{N} \approx \frac{3\Delta v}{2} \frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \left[(v_p - 2\Delta v)^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{m}{kT} (v_p - 2\Delta v)^2} + (v_p + \Delta v)^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{m}{kT} (v_p + \Delta v)^2} \right], \quad (3.80)$$

ve kterém v_p představuje nejpravděpodobnější rychlost dle vztahu 3.31.

Číselné dosazení zadaných hodnot

Do předešlého obecně odvozeného vztahu 3.80 s využitím vztahu 3.31 pro výpočet nejpravděpodobnější rychlosti v_p můžeme dosazením zadaných číselných hodnot vyjádřit relativní počet molekul s rychlostmi v v intervalu $\langle v_p - 2\Delta v; v_p + \Delta v \rangle$ číselně. Po dosazení těchto hodnot dospějeme k hodnotě

$$\frac{\Delta n}{N} \approx 0,24 \text{ \%}.$$

Shrnutí zadaného příkladu a námět k zamyšlení

Dosazením zadaných číselných hodnot do obecně odvozeného vztahu 3.80 jsme dospěli k následujícímu výsledku. Relativní počet molekul $\frac{\Delta n}{N}$ zkoumaného plynu s rychlostmi v v intervalu $\langle v_p - 2\Delta v; v_p + \Delta v \rangle$ je roven hodnotě $\frac{\Delta n}{N} = 0,24 \text{ \%}$.

Určete relativní počet molekul $\frac{\Delta n}{N}$ s rychlostmi v v intervalu $\langle v_p - 2\Delta v; v_p + 2\Delta v \rangle$ za stejných zadaných hodnot. Kolik procent molekul zkoumaného plynu má rychlost v v zmíněném intervalu?

3.4 Relativní počet molekul s rychlostmi v zadaném intervalu s využitím Taylorovy řady

Zadání příkladu

S využitím Taylorovy řady pro funkci $f(x) = e^x$ určete relativní počet $\frac{\Delta n}{N}$ molekul dusíku N_2 o termodynamické teplotě $T = 1200 \text{ K}$ s rychlostmi v v intervalu $\langle v_0; v_0 + \Delta v \rangle$. Uvažujte rychlost $v_0 = 650,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a přírůstek rychlosti Δv roven hodnotě $\Delta v = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Hmotnost m dvouatomové molekuly zkoumaného plynu dusíku N_2 je rovna hodnotě $m = 46,5 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Výsledek určete numericky s přesností na $\frac{1}{10000}$.

Obecný postup řešení a číselné dosazení

K vyřešení příkladu musíme dle zadání užít Taylorovu řadu pro funkci $f(x) = e^x$. Taylorovu řadu obecně odvodíme přes Taylorův rozvoj funkce. Taylorův rozvoj obecně zadané reálné funkce $f(x)$ jedné reálné proměnné je dle [6] v bodě $\xi \in \mathcal{D}_f$, kde \mathcal{D}_f představuje definiční obor funkce $f(x)$, v tomto tvaru

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Termodynamická teplota	T	1200 K
Rychlost	v_0	650,0 m · s ⁻¹
Přírůstek rychlosti	Δv	0,5 m · s ⁻¹
Hmotnost dvouatomové molekuly	m	46,5 · 10 ⁻²⁷ kg
Relativní počet molekul	$\frac{\Delta n}{N}$?

Tabulka 3.3: Zázpis zadaných hodnot v tabelové podobě.

$$f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!} (x - \xi) + \frac{f''(\xi)}{2!} (x - \xi)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n + R_n(x), \quad (3.81)$$

ve kterém $R_n(x)$ je zbytek. Pro daný zbytek $R_n(x)$ musí platit následující limita

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0. \quad (3.82)$$

Tuto limitu $n \rightarrow +\infty$ aplikujeme na vztah 3.81, který můžeme přepsat do tvaru

$$f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!} (x - \xi) + \frac{f''(\xi)}{2!} (x - \xi)^2 + \dots + \frac{f^{(j)}(\xi)}{j!} (x - \xi)^j + \dots \quad (3.83)$$

Předešlý vztah 3.83 lze zapsat ekvivalentně v následujícím tvaru

$$f(x) = \sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{f^{(i)}(\xi)}{i!} (x - \xi)^i, \quad (3.84)$$

což představuje Taylorovu řadu reálné funkce $f(x)$ jedné reálné proměnné v bodě $\xi \in \mathcal{D}_f$.

Obecně odvozenou Taylorovu řadu reálné funkce $f(x)$ lze pro $f(x) = e^x$ a volbu bodu $\xi = 0$ přepsat do následujícího tvaru

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^j}{j!} + \dots; \quad (3.85)$$

$$e^x = \sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{x^i}{i!}, \quad (3.86)$$

neboli platí, že

$$(e^x)^{(j)} = e^x; \forall j \in \mathbb{N}.$$

Odvodili jsme tedy Taylorovu řadu pro funkci $f(x) = e^x$. Jedná se o vztah 3.86. Po odvození nutného matematického aparátu můžeme přejít k řešení samotného příkladu.

Máme zadaný dusík N₂ o termodynamické teplotě $T = 1200$ K. Je po nás požadováno určit relativní počet $\frac{\Delta n}{N}$ molekul plynu s rychlostmi v v intervalu $\langle 650,0; 650,5 \rangle$ m · s⁻¹. S využitím vztahu 3.21 můžeme pro relativní počet $\frac{\Delta n}{N}$ molekul v daném intervalu napsat následující integrál

$$\frac{\Delta n}{N} = \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v} \frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}} dv. \quad (3.87)$$

V předešlém integrálu 3.87 zavedeme následující dvojici substitucí za konstantní členy

$$\frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} = p \quad \frac{m}{2kT} = q.$$

S využitím těchto zavedených substitucí lze integrál 3.87 přepsat do následující podoby

$$\int_{v_0}^{v_0+\Delta v} \frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}} dv = p \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} v^2 e^{-qv^2} dv. \quad (3.88)$$

Integrál na pravé straně předešlé rovnosti 3.88 můžeme s využitím vztahu 3.86 přepsat do následující podoby

$$p \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} v^2 e^{-qv^2} dv = p \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} v^2 \left[\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-qv^2)^i}{i!} \right] dv, \quad (3.89)$$

protože platí, že

$$x = -qv^2.$$

Pravou stranu vztahu 3.89 lze upravit na tvar

$$p \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} v^2 \left[\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-qv^2)^i}{i!} \right] dv = p \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} \left[\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i q^i v^{2i+2}}{i!} \right] dv. \quad (3.90)$$

Vzhledem k stejnoměrné konvergenci zkoumané řady lze pořadí integrace a sumace zaměnit¹. S využitím této vlastnosti lze rovnost 3.90 přepsat do následujícího tvaru

¹K tomu, abychom mohli s výhodou využít stejnoměrné konvergence dané řady, musíme ji nejdříve matematicky dokázat. Vzhledem k tomu, že je pojem stejnoměrná konvergence funkční řady součástí matematické analýzy ve druhém ročníku bakalářského studia, není proto samotný důkaz uveden v řešení, ale je uveden zde, v poznámce pod čarou. Dle [6] je zadaná řada $\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{x^i}{i!}$ mocinná, proto se celý důkaz značně zjednoduší. Nejdříve musíme ověřit nutnou podmínku konvergence.

Nutná podmínka konvergence obecně zadané mocinné funkční řady $\sum_{1 \leq i \leq +\infty} a_i(x-c)^i$ říká, že pokud funkční řada $\sum_{1 \leq i \leq +\infty} a_i(x-c)^i$ konverguje, pak platí následující

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} a_i = 0.$$

Po ověření nutné podmínky konvergence řady $\sum_{1 \leq i \leq +\infty} a_i(x-c)^i$ je nutné využít příslušné kritérium ověřující stejnoměrnou konvergenci řady.

U zadané řady $\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{x^i}{i!}$ nejdříve ověříme nutnou podmínku konvergence. Můžeme tedy napsat následující limitu

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{i!} = 0.$$

$$p \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} \left[\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i q^i v^{2i+2}}{i!} \right] dv = p \sum_{0 \leq i \leq +\infty} \left[\int_{v_0}^{v_0+\Delta v} \frac{(-1)^i q^i v^{2i+2}}{i!} dv \right]. \quad (3.91)$$

Pravou stranu předešlého vztahu 3.91 můžeme vzhledem k integraci přes proměnnou v upravit do vztahu ve tvaru

$$p \sum_{0 \leq i \leq +\infty} \left[\int_{v_0}^{v_0+\Delta v} \frac{(-1)^i q^i v^{2i+2}}{i!} dv \right] = p \sum_{0 \leq i \leq +\infty} \left[\frac{(-1)^i q^i}{i!} \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} v^{2i+2} dv \right], \quad (3.92)$$

ve kterém vypočteme integrál na pravé straně. Můžeme tedy napsat

$$p \sum_{0 \leq i \leq +\infty} \left[\frac{(-1)^i q^i}{i!} \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} v^{2i+2} dv \right] = p \sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i q^i}{i!} \left[\frac{v^{2i+3}}{2i+3} \right]_{v=v_0}^{v_0+\Delta v}, \quad (3.93)$$

což lze s využitím Newtonova vztahu upravit do následující podoby

$$p \sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i q^i}{i!} \left[\frac{v^{2i+3}}{2i+3} \right]_{v=v_0}^{v_0+\Delta v} = \sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i p q^i}{(2i+3) i!} \left[(v_0 + \Delta v)^{2i+3} - v_0^{2i+3} \right]. \quad (3.94)$$

Pro relativní počet molekul plynu s rychlostmi v v intervalu $\langle v_0; v_0 + \Delta v \rangle$ můžeme konečně s využitím substitucí za konstantní členy p a q napsat vztah, který je ve tvaru

$$\frac{\Delta n}{N} = \sum_{0 \leq i \leq +\infty} \overbrace{\frac{(-1)^i}{(2i+3) i!} \frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^i}^{\mu(i)} \left[(v_0 + \Delta v)^{2i+3} - v_0^{2i+3} \right]. \quad (3.95)$$

Ověřením nutné podmínky konvergence jsme zjistili, že řada $\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{x^i}{i!}$ může konvergovat. Dále můžeme k ověření konvergence řady využít pouze d'Alambertovo podílové limitní kritérium konvergence řady. Dle tohoto kritéria platí, že řada $\sum_{1 \leq i \leq +\infty} a_i (x-c)^i$ konverguje stejnoměrně, pokud platí následující

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{i+1} (x-c)^{i+1}}{a_i (x-c)^i} \right| < 1.$$

S využitím tohoto kritéria můžeme pro ověření stejnoměrné konvergence zadané řady $\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{x^i}{i!}$ napsat

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{x^{i+1}}{(i+1)!}}{\frac{x^i}{i!}} \right| = \lim_{i \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} \frac{i!}{x^i} \right| = |x| \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{i+1} = 0 < 1.$$

Dokázali jsme, že zkoumaná řada $\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{x^i}{i!}$ konverguje stejnoměrně na \mathbb{R} , protože hodnota limity není závislá na hodnotě x .

Dosažením zadaných číselných hodnot do předešlého vztahu 3.95 a vyčíslením součtu pro několik prvních i tak, aby byla splněna požadovaná přesnost na $\frac{1}{10000}$, lze požadovaný relativní počet molekul plynu určit číselně. V následující tabulce 3.4 jsou uvedeny hodnoty $\mu(i)$ pro několik prvních i .

i	$\mu(i)$
0	$7,937061394 \cdot 10^{-4}$
1	$-4,711760361 \cdot 10^{-4}$
2	$1,398545941 \cdot 10^{-4}$
3	$-2,767443104 \cdot 10^{-5}$
4	$4,107171381 \cdot 10^{-6}$
5	$-4,876369613 \cdot 10^{-7}$

Tabulka 3.4: Hodnoty $\mu(i)$ pro několik prvních i .

Vzhledem k zadané přesnosti $\frac{1}{10000}$ nemusíme číselně určovat členy $\mu(i)$ pro $i > 5$, protože výsledný součet hodnot $\mu(i)$ pro $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ tyto hodnoty pro $i > 5$ neovlivní.

S využitím vztahu 3.95, hodnot z předcházející tabulky 3.4 a vzhledem k zadané přesnosti můžeme napsat následující

$$\frac{\Delta n}{N} \approx \sum_{0 \leq i \leq 5} \mu(i);$$

$$\frac{\Delta n}{N} \approx 0,04 \text{ \%}.$$

Shrnutí zadaného příkladu

Užitím numerického výpočtu zadaného integrálu přes Taylorovu řadu $\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{x^i}{i!}$ příslušející funkci $f(x) = e^x$ nám vyšel relativní počet $\frac{\Delta n}{N}$ molekul zkoumaného plynu s rychlostmi v v zadaném intervalu $\langle v_0; v_0 + \Delta v \rangle$ roven hodnotě $\frac{\Delta n}{N} = 0,04 \text{ \%}$.

3.5 Výpočet relativního počtu molekul plynu s rychlostmi v zadaném intervalu obdélníkovou metodou

Zadání příkladu

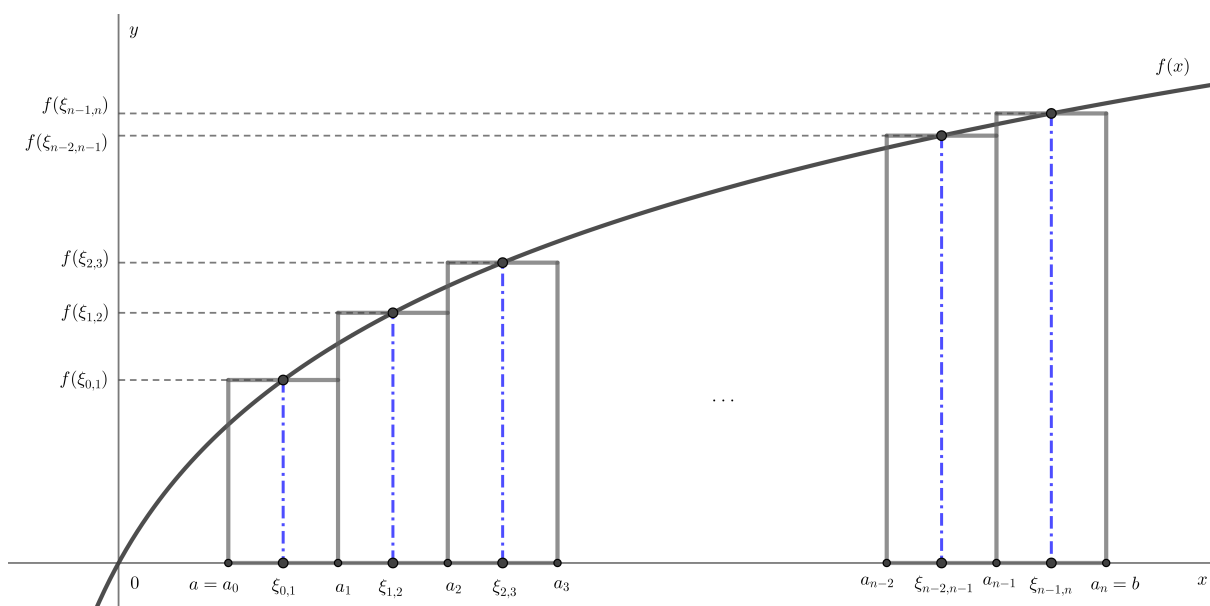
S využitím obdélníkové metody výpočtu integrálu určete relativní počet $\frac{\Delta n}{N}$ molekul zkoumaného plynu s rychlostmi v v intervalu $\langle v_p - 3\Delta v; v_p + \Delta v \rangle$, kde v_p představuje nejpravděpodobnější rychlost, při termodynamické teplotě $T = 673,15 \text{ K}$. Zvolte takové dělení zadaného intervalu $\langle v_p - 3\Delta v; v_p + \Delta v \rangle$, že $|a_i - a_{i-1}| = \Delta v; \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Za Δv dosazujte $\Delta v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Uvažujte, že hmotnost m jedné molekuly zkoumaného plynu je rovna hodnotě $m = 46,5 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Výsledek číselně určete s přesností na $\frac{1}{10000}$.

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Termodynamická teplota	T	673,15 K
Přírůstek rychlosti	Δv	1 m · s ⁻¹
Hmotnost	m	46,5 · 10 ⁻²⁷ kg
Relativní počet	$\frac{\Delta n}{N}$?

Tabulka 3.5: Zázpis zadaných hodnot v tabelové podobě.

Obecný postup řešení a číselné dosazení

Na začátku obecného postupu řešení zadaného příkladu si nejdříve vysvětlíme, v čem spočívá výpočet obsahu plochy ohraničené souřadnou osou x neboli přímkou $y = 0$ a funkcí $f(x)$ obdélníkovou metodou. Dělení obecně zadaného intervalu $\langle a; b \rangle$ pomocí dělicích bodů a princip výpočtu obsahu plochy pod obecně zadanou funkcí $f(x)$ obdélníkovou metodou je znázorněn na obrázku 3.5.



Obrázek 3.5: Znázornění principu výpočtu obsahu plochy pod obecně zadanou funkcí $f(x)$ pomocí obdélníkové metody.

Při obdélníkové metodě musíme rozdělit zadaný interval $\langle a = a_0; b = a_n \rangle$ pomocí dělicích bodů a_1, a_2 až a_{n-1} tak, že je splněna následující podmínka

$$\gamma = |a_i - a_{i-1}| = |a_j - a_{j-1}|; \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.96)$$

Vzdálenost γ libovolných dvou po sobě jdoucích bodů a_{i-1} a a_i , kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, představuje v našem výpočtu velikost jedné ze stran vzniklých obdélníků. Velikost druhé ze stran obdélníků vypočteme jako funkční hodnotu funkce $f(x)$ v bodě $\xi_{i-1,i}$, kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, který představuje střed intervalu $\langle a_{i-1}; a_i \rangle$.

Nakonec, pro obsah S plochy, která je ohraničená souřadnou osou x neboli přímkou $y = 0$ a funkcí $f(x)$, můžeme i s využitím obrázku 3.5 napsat následující vztah

$$S = f(\xi_{0,1}) \overbrace{|a_1 - a_0|}^{\gamma} + f(\xi_{1,2}) \overbrace{|a_2 - a_1|}^{\gamma} + \dots + f(\xi_{n-1,n}) \overbrace{|a_n - a_{n-1}|}^{\gamma}, \quad (3.97)$$

který lze upravit do podoby

$$S = \gamma \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_{i-1,i}). \quad (3.98)$$

Budeme pokračovat řešením zadaného příkladu. Zkoumaný plyn máme zadaný jeho termodynamickou teplotou $T = 673,15$ K a hmotností m jedné molekuly, která je rovna hodnotě $m = 46,5 \cdot 10^{-27}$ kg. Abychom měli značení v souladu s obrázkem 3.5, přeznačíme krajní body intervalu po řadě $v_p - 3\Delta v$ a $v_p + \Delta v$ na body po řadě $a = a_0$ a $b = a_4$. Dle zadání má platit, že vzdálenost dvou po sobě jdoucích bodů a_{i-1} a a_i , kde $i \in \{1,2,3,4\}$, intervalu $\langle a; b \rangle$ je rovna hodnotě $|a_i - a_{i-1}| = \Delta v; \forall i \in \{1,2,3,4\}$.

S využitím vztahu 3.21 můžeme pro relativní počet $\frac{\Delta n}{N}$ molekul splňující zadanou podmínku, že se jejich rychlost v nachází v intervalu $\langle v_p - 3\Delta v; v_p + \Delta v \rangle$, napsat výraz ve tvaru

$$\frac{\Delta n}{N} = \int_{v_p - 3\Delta v}^{v_p + \Delta v} \overbrace{\frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}}}^{f(v)} dv. \quad (3.99)$$

S využitím předcházejících vztahů 3.98 a 3.99 lze relativní počet $\frac{\Delta n}{N}$ těchto molekul charakterizovat rovnicí

$$\frac{\Delta n}{N} \approx \Delta v \sum_{1 \leq i \leq 4} f(\xi_{i-1,i}), \quad (3.100)$$

ve které body $\xi_{i-1,i}$ představují jednotlivé středy uvažovaných intervalů vzniklých dělením intervalu $\langle v_p - 3\Delta v; v_p + \Delta v \rangle$. Jejich přehled je uveden v tabulce 3.6.

i	$\langle a_{i-1} [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]; a_i [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}] \rangle$	$\xi_{i-1,i} [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$
1	$\langle a_0; a_1 \rangle = \langle v_p - 3\Delta v; v_p - 2\Delta v \rangle$	$\xi_{0,1} = v_p - \frac{5}{2}\Delta v$
2	$\langle a_1; a_2 \rangle = \langle v_p - 2\Delta v; v_p - \Delta v \rangle$	$\xi_{1,2} = v_p - \frac{3}{2}\Delta v$
3	$\langle a_2; a_3 \rangle = \langle v_p - \Delta v; v_p \rangle$	$\xi_{2,3} = v_p - \frac{1}{2}\Delta v$
4	$\langle a_3; a_4 \rangle = \langle v_p; v_p + \Delta v \rangle$	$\xi_{3,4} = v_p + \frac{1}{2}\Delta v$

Tabulka 3.6: Přehled jednotlivých intervalů dělení a středů těchto intervalů.

S využitím zadaných číselných hodnot, dat z předcházející tabulky 3.6, vztahu 3.99 a vztahu 3.31 pro nejpravděpodobnější rychlost v_p je možné napsat následující funkční hodnoty $f(\xi_{i-1,i})$ funkce $f(v)$. Tyto hodnoty jsou přehledně sepsány v tabulce 3.7.

i	$\xi_{i-1,i} [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$	$f(\xi_{i-1,i})$
1	$v_p - \frac{5}{2}\Delta v$	$1,31339 \cdot 10^{-3}$
2	$v_p - \frac{3}{2}\Delta v$	$1,31341 \cdot 10^{-3}$
3	$v_p - \frac{1}{2}\Delta v$	$1,31343 \cdot 10^{-3}$
4	$v_p + \frac{1}{2}\Delta v$	$1,31343 \cdot 10^{-3}$

Tabulka 3.7: Přehled funkčních hodnot funkce $f(v)$ v jednotlivých bodech $\xi_{i-1,i}$.

Nakonec, podle vztahu 3.100 a s využitím dat v předcházející tabulce 3.7, můžeme pro relativní počet $\frac{\Delta n}{N}$ molekul s rychlostmi v v intervalu $\langle v_p - 3\Delta v; v_p + \Delta v \rangle$ napsat následující

$$\frac{\Delta n}{N} \approx 0,53 \text{ \%}.$$

Shrnutí zadaného příkladu a námět k zamyšlení

Obdélníkovou metodou výpočtu zadaného integrálu jsme dospěli k hodnotě relativního počtu $\frac{\Delta n}{N}$ molekul s rychlostmi v v zadaném intervalu, která je rovna hodnotě $\frac{\Delta n}{N} = 0,53 \text{ \%}$. Zkuste se zamyslet nad samotnou volbou vzdálenosti Δv dvou po sobě jdoucích dělicích bodů a_{i-1} a a_i intervalu $\langle a; b \rangle$. Jakým způsobem by se musela změnit tato hodnota Δv , abychom dospěli k přesnějšímu výsledku?

3.6 Výpočet hodnoty poměru η

Zadání příkladu

Uvažujme ideální plyn za normálního tlaku p a za termodynamických teplot T_1 a T_2 . Určete hodnotu poměru η s přesností $\frac{1}{1000}$. Tento poměr η je dán poměrem relativního počtu po řadě $\frac{\Delta n_1}{N}$ a $\frac{\Delta n_2}{N}$ molekul uvažovaného ideálního plynu s rychlostmi v v intervalu po řadě $\langle v_{p_1} - \Delta v; v_{p_1} + \Delta v \rangle$ a $\langle v_{p_2} - \Delta v; v_{p_2} + \Delta v \rangle$ při termodynamické teplotě po řadě T_1 a T_2 . Za přírůstek rychlosti Δv dosazujte následující hodnotu $\Delta v = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Nejpravděpodobnější rychlost v_{p_2} molekul zkoumaného plynu při termodynamické teplotě T_2 byla rovna hodnotě $v_{p_2} = 950 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Pro nejpravděpodobnější rychlosti v_{p_1} a v_{p_2} bylo změřeno, že jejich poměr $\chi = \frac{v_{p_1}}{v_{p_2}}$ je roven hodnotě $\chi = \sqrt{2}$. K odvození vztahu užitě Taylorovu řadu pro funkci $f(x) = e^x$ a zejména její vlastnosti stejnoměrné konvergence.

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Přírůstek rychlosti	Δv	$5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Nejpravděpodobnější rychlost	v_{p_2}	$950 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Poměr nejpravděpodobnějších rychlostí	χ	$\sqrt{2}$
Poměr	η	?

Tabulka 3.8: Zázpis zadaných hodnot v tabelové podobě.

Obecný postup řešení a číselné dosazení

V obecném postupu řešení si odvodíme vyjádření pro poměr η mezi relativním počtem $\frac{\Delta n_1}{N}$ molekul ideálního plynu s rychlostmi v v intervalu $\langle v_{p_1} - \Delta v; v_{p_1} + \Delta v \rangle$ při termodynamické teplotě T_1 a relativním počtem $\frac{\Delta n_2}{N}$ molekul plynu s rychlostmi v v intervalu $\langle v_{p_2} - \Delta v; v_{p_2} + \Delta v \rangle$ při termodynamické teplotě T_2 . Je možné napsat následující rovnosti

$$\eta = \frac{\frac{\Delta n_1}{N}}{\frac{\Delta n_2}{N}}; \quad (3.101)$$

$$\eta = \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}. \quad (3.102)$$

S využitím vztahů 3.21 a 3.101 lze předcházející rovnost 3.102 přepsat ekvivalentně do podoby

$$\eta = \frac{\int_{v_{p_1}-\Delta v}^{v_{p_1}+\Delta v} \frac{2m}{kT_1} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT_1}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT_1}} dv}{\int_{v_{p_2}-\Delta v}^{v_{p_2}+\Delta v} \frac{2m}{kT_2} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT_2}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT_2}} dv}. \quad (3.103)$$

Pro nejpravděpodobnější rychlost po řadě v_{p_1} a v_{p_2} daného ideálního plynu při termodynamické teplotě po řadě T_1 a T_2 lze s využitím rovnosti 3.31 napsat

$$v_{p_1} = \sqrt{\frac{2kT_1}{m}}; \quad (3.104)$$

$$v_{p_2} = \sqrt{\frac{2kT_2}{m}}. \quad (3.105)$$

Předešlé vztahy 3.104 a 3.105 použijeme při úpravě rovnosti 3.103. Před samotným použitím těchto vztahů si vyjádření 3.103 upravíme do podoby

$$\eta = \frac{\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{v_{p_1}-\Delta v}^{v_{p_1}+\Delta v} \frac{m}{2kT_1} \sqrt{\frac{m}{2kT_1}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT_1}} dv}{\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{v_{p_2}-\Delta v}^{v_{p_2}+\Delta v} \frac{m}{2kT_2} \sqrt{\frac{m}{2kT_2}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT_2}} dv}; \quad (3.106)$$

$$\eta = \frac{\int_{v_{p_1}-\Delta v}^{v_{p_1}+\Delta v} \frac{m}{2kT_1} \sqrt{\frac{m}{2kT_1}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT_1}} dv}{\int_{v_{p_2}-\Delta v}^{v_{p_2}+\Delta v} \frac{m}{2kT_2} \sqrt{\frac{m}{2kT_2}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT_2}} dv}. \quad (3.107)$$

Napsanou rovnost 3.107 ekvivalentně upravíme s využitím vztahů 3.104 a 3.105 do tvaru

$$\eta = \frac{\int_{v_{p_1}-\Delta v}^{v_{p_1}+\Delta v} \frac{v^2}{v_{p_1}^3} e^{-\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{p_1}^2}} dv}{\int_{v_{p_2}-\Delta v}^{v_{p_2}+\Delta v} \frac{v^2}{v_{p_2}^3} e^{-\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{p_2}^2}} dv}. \quad (3.108)$$

Pro zjednodušení výpočtu budeme pokračovat zavedením substituce do předešlého vztahu 3.108. Tuto substituci uvažujeme v podobě

$$\left| \begin{array}{lll} \vartheta_1 = \frac{v}{v_{p_1}} & \vartheta_2 = \frac{v}{v_{p_2}} & v_{p_1} \pm \Delta v \longrightarrow \frac{v_{p_1} \pm \Delta v}{v_{p_1}} \\ d\vartheta_1 = \frac{1}{v_{p_1}} dv & d\vartheta_2 = \frac{1}{v_{p_2}} dv & v_{p_2} \pm \Delta v \longrightarrow \frac{v_{p_2} \pm \Delta v}{v_{p_2}} \end{array} \right|.$$

Aplikováním popsané substituce ve vztahu 3.108 dostáváme následující rovnost ve tvaru

$$\eta = \frac{\int_{\frac{v_{p_1}-\Delta v}{v_{p_1}}}^{\frac{v_{p_1}+\Delta v}{v_{p_1}}} \vartheta_1^2 e^{-\vartheta_1^2} d\vartheta_1}{\int_{\frac{v_{p_2}-\Delta v}{v_{p_2}}}^{\frac{v_{p_2}+\Delta v}{v_{p_2}}} \vartheta_2^2 e^{-\vartheta_2^2} d\vartheta_2}. \quad (3.109)$$

Podle zadání příkladu využijeme ve výpočtu Taylorovu řadu pro obecně zadanou funkci $f(x) = e^x$, která je v této kapitole odvozena a uvedena jako vztah 3.86. Podle tohoto vztahu 3.86 lze napsat vyjádření

$$e^{-\vartheta_\xi^2} = \sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-\vartheta_\xi^2)^i}{i!}; \xi \in \{1,2\}; \quad (3.110)$$

$$e^{-\vartheta_\xi^2} = \sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i \vartheta_\xi^{2i}}{i!}; \xi \in \{1,2\}, \quad (3.111)$$

které lze dosadit do vztahu 3.109. Dospějeme k rovnostem

$$\eta = \frac{\int_{\frac{v_{p_1}-\Delta v}{v_{p_1}}}^{\frac{v_{p_1}+\Delta v}{v_{p_1}}} \vartheta_1^2 \left[\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i \vartheta_1^{2i}}{i!} \right] d\vartheta_1}{\int_{\frac{v_{p_2}-\Delta v}{v_{p_2}}}^{\frac{v_{p_2}+\Delta v}{v_{p_2}}} \vartheta_2^2 \left[\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i \vartheta_2^{2i}}{i!} \right] d\vartheta_2}; \quad (3.112)$$

$$\eta = \frac{\int_{\frac{v_{p_1}-\Delta v}{v_{p_1}}}^{\frac{v_{p_1}+\Delta v}{v_{p_1}}} \left[\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i \vartheta_1^{2i+2}}{i!} \right] d\vartheta_1}{\int_{\frac{v_{p_2}-\Delta v}{v_{p_2}}}^{\frac{v_{p_2}+\Delta v}{v_{p_2}}} \left[\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i \vartheta_2^{2i+2}}{i!} \right] d\vartheta_2}. \quad (3.113)$$

Vzhledem k dokázané stejnoměrné konvergenci Taylorovy řady pro funkci $f(x) = e^x$ v předešlých příkladech této kapitoly lze zaměnit pořadí integrace a sumace v předešlém vztahu 3.113. Záměnou dostáváme výraz ve tvaru

$$\eta = \frac{\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \left[\int_{\frac{v_{p_1}-\Delta v}{v_{p_1}}}^{\frac{v_{p_1}+\Delta v}{v_{p_1}}} \frac{(-1)^i \vartheta_1^{2i+2}}{i!} d\vartheta_1 \right]}{\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \left[\int_{\frac{v_{p_2}-\Delta v}{v_{p_2}}}^{\frac{v_{p_2}+\Delta v}{v_{p_2}}} \frac{(-1)^i \vartheta_2^{2i+2}}{i!} d\vartheta_2 \right]}, \quad (3.114)$$

kde v čitateli při integraci přes proměnnou ϑ_1 a ve jmenovateli při integraci přes proměnnou ϑ_2 je člen $\frac{(-1)^i}{i!}$ konstantou. Proto jej lze s využitím pravidel pro počítání s integrálem vyjmout před integrál. Jsme tedy oprávněni napsat

$$\eta = \frac{\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \left[\int_{\frac{v_{p_1} - \Delta v}{v_{p_1}}}^{\frac{v_{p_1} + \Delta v}{v_{p_1}}} \vartheta_1^{2i+2} d\vartheta_1 \right]}{\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \left[\int_{\frac{v_{p_2} - \Delta v}{v_{p_2}}}^{\frac{v_{p_2} + \Delta v}{v_{p_2}}} \vartheta_2^{2i+2} d\vartheta_2 \right]}. \quad (3.115)$$

Budeme pokračovat samotným integrováním funkce ϑ_ξ^{2i+2} , kde $\xi \in \{1,2\}$. Integrál z uvažované funkce ϑ_ξ^{2i+2} , kde $\xi \in \{1,2\}$, je jednoduchým tabulkovým integrálem. Z tohoto důvodu je ihned možné s využitím předešlé rovnosti 3.115 dospět k výrazu

$$\eta = \frac{\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \left[\frac{\vartheta_1^{2i+3}}{2i+3} \right]_{\vartheta_1 = \frac{v_{p_1} - \Delta v}{v_{p_1}}}^{\frac{v_{p_1} + \Delta v}{v_{p_1}}}}{\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \left[\frac{\vartheta_2^{2i+3}}{2i+3} \right]_{\vartheta_2 = \frac{v_{p_2} - \Delta v}{v_{p_2}}}^{\frac{v_{p_2} + \Delta v}{v_{p_2}}}}. \quad (3.116)$$

S využitím Newtonova vztahu upravíme předešlé vyjádření 3.116 do podoby vyjadřující hodnotu poměru η . Dostáváme následující rovnost

$$\eta = \frac{\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+3) i!} \left[\left(\frac{v_{p_1} + \Delta v}{v_{p_1}} \right)^{2i+3} - \left(\frac{v_{p_1} - \Delta v}{v_{p_1}} \right)^{2i+3} \right]}{\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+3) i!} \left[\left(\frac{v_{p_2} + \Delta v}{v_{p_2}} \right)^{2i+3} - \left(\frac{v_{p_2} - \Delta v}{v_{p_2}} \right)^{2i+3} \right]}, \quad (3.117)$$

kteřou lze s využitím zadaného poměru χ mezi nejpravděpodobnější rychlostí v_{p_1} ideálního plynu při termodynamické teplotě T_1 a nejpravděpodobnější rychlostí v_{p_2} daného plynu při termodynamické teplotě T_2 ekvivalentně přepsat do podoby

$$\eta = \frac{\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+3) i!} \left[\left(\frac{\chi v_{p_2} + \Delta v}{\chi v_{p_2}} \right)^{2i+3} - \left(\frac{\chi v_{p_2} - \Delta v}{\chi v_{p_2}} \right)^{2i+3} \right]}{\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+3) i!} \left[\left(\frac{v_{p_2} + \Delta v}{v_{p_2}} \right)^{2i+3} - \left(\frac{v_{p_2} - \Delta v}{v_{p_2}} \right)^{2i+3} \right]}. \quad (3.118)$$

Nakonec upravíme předešlý vztah 3.118 do konečné podoby ve tvaru

$$\eta = \frac{\overbrace{\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+3) i!} \left[\left(1 + \frac{\Delta v}{\chi v_{p_2}} \right)^{2i+3} - \left(1 - \frac{\Delta v}{\chi v_{p_2}} \right)^{2i+3} \right]}^{\alpha(i)}}{\underbrace{\sum_{0 \leq i \leq +\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+3) i!} \left[\left(1 + \frac{\Delta v}{v_{p_2}} \right)^{2i+3} - \left(1 - \frac{\Delta v}{v_{p_2}} \right)^{2i+3} \right]}_{\beta(i)}}. \quad (3.119)$$

V následující tabulce 3.9 jsou uvedeny hodnoty $\alpha(i)$ a $\beta(i)$ pro několik prvních i tak, aby byla splněna zadaná přesnost výsledku $\frac{1}{1000}$.

i	$\alpha(i)$	$\beta(i)$
0	$7,4432 \cdot 10^{-3}$	$1,0526 \cdot 10^{-2}$
1	$-7,4434 \cdot 10^{-3}$	$-1,0527 \cdot 10^{-2}$
2	$3,7219 \cdot 10^{-3}$	$5,2639 \cdot 10^{-3}$
3	$-1,2407 \cdot 10^{-3}$	$-1,7548 \cdot 10^{-3}$
4	$3,1020 \cdot 10^{-4}$	$4,3878 \cdot 10^{-4}$
5	$-6,2046 \cdot 10^{-5}$	$-8,7773 \cdot 10^{-5}$
6	$1,0342 \cdot 10^{-5}$	$1,4632 \cdot 10^{-5}$
7	$-1,4777 \cdot 10^{-6}$	$-2,0909 \cdot 10^{-6}$
8	$1,8473 \cdot 10^{-7}$	$2,6144 \cdot 10^{-7}$

Tabulka 3.9: Hodnoty $\alpha(i)$ a $\beta(i)$ ze vztahu 3.119 pro několik prvních i .

Ve výpočtu hodnoty poměru η relativního počtu po řadě $\frac{\Delta n_1}{N}$ a $\frac{\Delta n_2}{N}$ molekul ideálního plynu s rychlostmi v v intervalu po řadě $\langle v_{p_1} - \Delta v; v_{p_1} + \Delta v \rangle$ a $\langle v_{p_2} - \Delta v; v_{p_2} + \Delta v \rangle$ při termodynamické teplotě po řadě T_1 a T_2 se zadanou přesností $\frac{1}{1000}$ můžeme s využitím rovnice 3.119 a hodnot uvedených v tabulce 3.9 napsat následující

$$\eta \approx \frac{\sum_{0 \leq i \leq 8} \alpha(i)}{\sum_{0 \leq i \leq 8} \beta(i)};$$

$$\eta \approx 0,707.$$

Shrnutí zadaného příkladu

Numerickým výpočtem daných integrálů přes Taylorovu řadu funkce $f(x) = e^x$ jsme dospěli k následujícímu závěru. Hodnota poměru η mezi relativním počtem $\frac{\Delta n_1}{N}$ molekul plynu s rychlostmi v v intervalu $\langle v_{p_1} - \Delta v; v_{p_1} + \Delta v \rangle$ při termodynamické teplotě T_1 a relativním počtem $\frac{\Delta n_2}{N}$ molekul s rychlostmi v v intervalu $\langle v_{p_2} - \Delta v; v_{p_2} + \Delta v \rangle$ při termodynamické teplotě T_2 je rovna hodnotě $\eta = 0,707$.

Zkuste vyřešit tento příklad jinou numerickou metodou výpočtu Riemannova určitého integrálu. Zvolte například obdélníkovou metodu s délkou intervalu ν , která je rovna hodnotě $\nu = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a získaný výsledek zaokrouhlete na řád 10^{-3} . Shoduje se výsledek vypočtený přes Taylorovu řadu s výsledkem vypočteným jinou numerickou metodou?

3.7 Výpočet relativního počtu molekul ideálního plynu s využitím Gaussovy chybové funkce

Zadání příkladu

Určete relativní počet $\frac{\Delta n}{N}$ molekul ideálního plynu, kterým je kyslík O_2 , s rychlostmi v v intervalu $\langle v'; +\infty \rangle$ výpočtem pomocí Gaussovy chybové funkce $\zeta(v)$ uvedené v této kapitole jako vztah 3.14. Termodynamická teplota T plynu je rovna hodnotě $T = 573,15$ K. Za rychlost v' dosazujte hodnotu $v' = 800$ m · s⁻¹. K výpočtu užívejte aplikace WOLFRAM ALPHA na internetu, kterou naleznete pod odkazem www.wolframalpha.com. Výsledek určete s přesností $\frac{1}{10000}$.

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Termodynamická teplota	T	573,15 K
Rychlost	v'	800 m · s ⁻¹
Relativní počet molekul	$\frac{\Delta n}{N}$?

Tabulka 3.10: Zápis zadaných hodnot v tabelové podobě.

Obecný postup řešení a číselné dosazení

Podle vztahu 3.21 můžeme pro relativní počet $\frac{\Delta n}{N}$ molekul kyslíku O_2 s rychlostmi v v intervalu $\langle v'; +\infty \rangle$ napsat rovnost ve tvaru

$$\frac{\Delta n}{N} = \int_{v'}^{+\infty} \frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}} dv. \quad (3.120)$$

S využitím pravidel pro počítání s nevlastním integrálem můžeme předešlou rovnost upravit do následujícího tvaru

$$\frac{\Delta n}{N} = \frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\int_{v'}^{\xi} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}} dv \right), \quad (3.121)$$

a zavést substituci p a q konstantních členů následujícím způsobem

$$p = \frac{2m}{kT} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \quad q = \frac{m}{2kT}.$$

Použitím takto zavedené substituce ve vztahu 3.121 dospějeme k rovnici

$$\frac{\Delta n}{N} = p \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\int_{v'}^{\xi} v^2 e^{-qv^2} dv \right). \quad (3.122)$$

V předešlém vztahu 3.122 zavedeme následující substituci

$$\left| \begin{array}{ll} v = \frac{a}{\sqrt{q}} & v' \longrightarrow v' \sqrt{q} \\ dv = \frac{da}{\sqrt{q}} & \xi \longrightarrow \xi \sqrt{q} \end{array} \right|,$$

pomocí které můžeme upravit daný vztah do tvaru

$$\frac{\Delta n}{N} = p \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\int_{v'\sqrt{q}}^{\xi\sqrt{q}} \frac{a^2}{q\sqrt{q}} e^{-a^2} da \right); \quad (3.123)$$

$$\frac{\Delta n}{N} = \frac{p}{q\sqrt{q}} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\int_{v'\sqrt{q}}^{\xi\sqrt{q}} a^2 e^{-a^2} da \right). \quad (3.124)$$

Ve výpočtu integrálu na pravé straně předešlé rovnosti 3.124 budeme pokračovat použitím metody per partes, kterou zavedeme následujícím způsobem

$$\left| \begin{array}{ll} u = a & v' = ae^{-a^2} \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{2}e^{-a^2} \end{array} \right|.$$

Dostáváme následující

$$\frac{\Delta n}{N} = \frac{p}{q\sqrt{q}} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} \frac{a}{e^{a^2}} \right]_{a=v'\sqrt{q}}^{\xi\sqrt{q}} + \frac{p}{q\sqrt{q}} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\int_{v'\sqrt{q}}^{\xi\sqrt{q}} \frac{1}{2} e^{-a^2} da \right). \quad (3.125)$$

Nejdříve se budeme zabývat prvním členem součtu na pravé straně předešlého vztahu 3.125. S využitím Newtonova vztahu můžeme pro první člen napsat

$$\frac{p}{q\sqrt{q}} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} \frac{a}{e^{a^2}} \right]_{a=v'\sqrt{q}}^{\xi\sqrt{q}} = -\frac{1}{2} \frac{p}{q\sqrt{q}} \left[\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\frac{\xi\sqrt{q}}{e^{\xi^2 q}} \right) - \frac{v'\sqrt{q}}{e^{v'^2 q}} \right]. \quad (3.126)$$

Nyní se zabývejme limitou na pravé straně rovnosti 3.126. Jedná se o limitu z neurčitého výrazu, proto použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Dostáváme následující

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\frac{\xi\sqrt{q}}{e^{\xi^2 q}} \right) \stackrel{l'H}{=} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{q}}{2\xi q e^{\xi^2 q}} \right); \quad (3.127)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{q}}{2\xi q e^{\xi^2 q}} \right) = 0. \quad (3.128)$$

Pravou stranu rovnosti 3.126 můžeme s využitím výpočtené hodnoty limity 3.129 upravit do tvaru

$$-\frac{1}{2} \frac{p}{q\sqrt{q}} \left[\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\frac{\xi\sqrt{q}}{e^{\xi^2 q}} \right) - \frac{v'\sqrt{q}}{e^{v'^2 q}} \right] = \frac{1}{2} \frac{pv'}{qe^{v'^2 q}}. \quad (3.129)$$

Druhý člen v součtu na pravé straně rovnosti 3.125 můžeme s využitím pravidel pro počítání s integrálem a limitou upravit do následující podoby

$$\frac{p}{q\sqrt{q}} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\int_{v'\sqrt{q}}^{\xi\sqrt{q}} \frac{1}{2} e^{-a^2} da \right) = \frac{1}{4} \frac{p\sqrt{\pi}}{q\sqrt{q}} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\int_{v'\sqrt{q}}^{\xi\sqrt{q}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da \right). \quad (3.130)$$

Protože integrál je lineární operátor, u kterého platí aditivita vzhledem k mezím, a platí nerovnost $0 < v'\sqrt{q} < \xi\sqrt{q}$, můžeme napsat následující rovnost

$$\int_0^{\xi\sqrt{q}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da = \int_0^{v'\sqrt{q}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da + \int_{v'\sqrt{q}}^{\xi\sqrt{q}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da, \quad (3.131)$$

ze které si vyjádříme druhý člen na pravé straně součtu. Po vyjádření dospějeme ke vztahu

$$\int_{v'\sqrt{q}}^{\xi\sqrt{q}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da = \int_0^{\xi\sqrt{q}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da - \int_0^{v'\sqrt{q}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da. \quad (3.132)$$

Použitím předešlého vztahu 3.132 můžeme limitu na pravé straně rovnosti 3.130 přepsat do podoby

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\int_{v'\sqrt{q}}^{\xi\sqrt{q}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da \right) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\xi\sqrt{q}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da \right) - \int_0^{v'\sqrt{q}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da, \quad (3.133)$$

což lze s využitím rovnosti 3.14 upravit do podoby

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\xi\sqrt{q}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da \right) - \int_0^{v'\sqrt{q}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} [\zeta(\xi\sqrt{q})] - \zeta(v'\sqrt{q}). \quad (3.134)$$

Vzhledem k průběhu Gaussovy chybové funkce $\zeta(\nu)$ lze předešlý vztah 3.134 přepsat na tvar

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} [\zeta(\xi\sqrt{q})] - \zeta(v'\sqrt{q}) = 1 - \zeta(v'\sqrt{q}). \quad (3.135)$$

S využitím vztahů 3.133, 3.134 a 3.135 můžeme rovnost 3.130 upravit. Dospějeme k následujícímu

$$\frac{1}{4} \frac{p\sqrt{\pi}}{q\sqrt{q}} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\int_{v'\sqrt{q}}^{\xi\sqrt{q}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da \right) = \frac{1}{4} \frac{p\sqrt{\pi}}{q\sqrt{q}} [1 - \zeta(v'\sqrt{q})]. \quad (3.136)$$

Dosazením odvozených vztahů 3.129 a 3.136 do vztahu 3.125 dostáváme obecnou rovnici vyjadřující hodnotu relativního počtu $\frac{\Delta n}{N}$ molekul s rychlostí v v zadaném intervalu $\langle v'; +\infty \rangle$, která je ve tvaru

$$\frac{\Delta n}{N} = \frac{1}{2} \frac{pv'}{qe^{v'^2q}} + \frac{1}{4} \frac{p\sqrt{\pi}}{q\sqrt{q}} [1 - \zeta(v'\sqrt{q})]. \quad (3.137)$$

Nakonec upravíme předešlou rovnost 3.137 s využitím substitučních vztahů za konstantní členy p a q a vztahů v [2] do následující podoby

$$\frac{\Delta n}{N} = 2v' \sqrt{\frac{uA_r}{2\pi kT}} e^{-\frac{1}{2} \frac{uA_r v'^2}{kT}} - \zeta \left(v' \sqrt{\frac{uA_r}{2kT}} \right) + 1, \quad (3.138)$$

kde A_r představuje relativní atomovou hmotnost a u je atomová hmotnostní jednotka, která je dle [2, 5] rovna hodnotě $u = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg. Dosazením zadaných hodnot do rovnice 3.138 s využitím aplikace WOLFRAM ALPHA na internetu dospějeme k hodnotě relativního počtu $\frac{\Delta n}{N}$ molekul zkoumaného plynu s rychlostmi v v intervalu $\langle v'; +\infty \rangle$. Dostáváme

$$\frac{\Delta n}{N} \approx 54,20 \ %.$$

Shrnutí zadaného příkladu a námět k zamyšlení

Odvozením obecného vztahu 3.138 pro relativní počet $\frac{\Delta n}{N}$ molekul plynu s rychlostmi v v zadaném intervalu a následným dosazením zadaných hodnot jsme dospěli k hodnotě $\frac{\Delta n}{N} = 54,20 \%$. Číselně určete hodnotu $\frac{\Delta n}{N}$, když za rychlost v' zvolíte nejpravděpodobnější rychlost v_p . Bude relativní počet $\frac{\Delta n}{N}$ roven hodnotě $\frac{\Delta n}{N} = 50 \%$? Pokud ne, v případě jakého statistického rozdělení by tomu tak bylo?

Kapitola 4

Střední volná dráha molekuly

Řešené příklady v této poslední kapitole jsou věnovány střední volné dráze molekuly. Samotná odvození matematických vztahů popisujících střední volnou dráhu molekuly jsou uvedena a popsána například v [2] a nebudou tedy součástí této kapitoly.

Předpokládá se, že si čtenář odvození vztahů dohledá v doporučené literatuře. Příklady, které jsou v této kapitole uvedeny a řešeny, jsou určené na jejich procvičení, zapamatování si a zopakování znalostí a matematických vztahů popisujících střední volnou dráhu molekuly ideálního plynu.

4.1 Určení rozdílu nadmořských výšek

Zadání příkladu

V nadmořské výšce h_1 byla měření při termodynamické teplotě $T = 288,15$ K zjištěna střední volná dráha $\bar{\lambda}_1$ molekul vzduchu rovna hodnotě $\bar{\lambda}_1 = 1,15 \cdot 10^{-7}$ m. Následně, v nadmořské výšce $h_2 = h_1 + \Delta h$, bylo opětovným měřením při stejné termodynamické teplotě $T = 288,15$ K zjištěno, že je střední volná dráha $\bar{\lambda}_2$ molekul vzduchu rovna hodnotě $\bar{\lambda}_2 = 1,45 \cdot 10^{-7}$ m. Určete rozdíl Δh nadmořských výšek h_1 a h_2 , ve kterých bylo měření realizováno. S využitím [5] je v nadmořské výšce $h_0 = 0$ m při termodynamické teplotě $T = 288,15$ K a při tlaku p_0 vzduchu $p_0 = 1000$ hPa hustota ρ_0 vzduchu rovna hodnotě $\rho_0 = 1,21$ kg \cdot m $^{-3}$.

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Termodynamická teplota	T	288,15 K
Střední volná dráha molekul vzduchu ve výšce h_1	$\bar{\lambda}_1$	$1,15 \cdot 10^{-7}$ m
Střední volná dráha molekul vzduchu ve výšce h_2	$\bar{\lambda}_2$	$1,45 \cdot 10^{-7}$ m
Tlak vzduchu v nadmořské výšce h_0	p_0	$1 \cdot 10^5$ Pa
Hustota vzduchu v nadmořské výšce h_0	ρ_0	$1,21$ kg \cdot m $^{-3}$
Rozdíl nadmořských výšek	Δh	? m

Tabulka 4.1: Zápís zadaných hodnot v tabelové podobě.

Obecný postup řešení

Na začátku samotného postupu řešení si uvedeme základní vztah pro střední volnou dráhu $\bar{\lambda}_i$ molekuly zkoumaného plynu, kde $i \in \{1,2\}$, který je s využitím [2] ve tvaru

$$\bar{\lambda}_i = \frac{kT}{p_i \pi d^2 \sqrt{2}}; i \in \{1, 2\}, \quad (4.1)$$

ve kterém T je termodynamická teplota plynu, p_i je tlak plynu a d představuje průměr sféry molekulárního působení. Podle zadání příkladu jsme změřili ve dvou nadmořských výškách po řadě h_1 a $h_2 = h_1 + \Delta h$ střední volnou dráhu molekuly vzduchu po řadě $\bar{\lambda}_1$ a $\bar{\lambda}_2$ za stejné termodynamické teploty T . Je dobré si uvědomit, že dvojice měření proběhla za různých tlaků po řadě p_1 a p_2 , jejichž hodnoty jsou závislé právě na nadmořské výšce h_1 a h_2 provedeného měření.

K odvození matematického vztahu, který by explicitně popisoval hodnotu tlaku p ideálního plynu v určité nadmořské výšce h , použijeme vztah pro hydrostatický tlak p z mechaniky. Pro něj platí s využitím [7] následující vyjádření

$$p = h \rho g, \quad (4.2)$$

kde ρ představuje hustotu látkového prostředí. V předcházejícím vztahu 4.2 je hustota ρ a tíhové zrychlení g konstantní. Pro infinitezimální tlakový rozdíl dp platí výraz ve tvaru

$$dp = -\rho g dh. \quad (4.3)$$

Předpokládejme změnu hydrostatického tlaku p a hustoty ρ ideálního plynu za konstantní termodynamické teploty T . Tato změna je tedy popsána Boyle-Marriotovým zákonem. Izotermický děj popsáný Boyle-Marriotovým zákonem lze matematickou úpravou vyjádřit následujícím způsobem

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p}{\rho}, \quad (4.4)$$

ve kterém po řadě p_0 a ρ_0 jsou známé hodnoty tlaku a hustoty ideálního plynu v určité (referenční) nadmořské výšce h_0 . Vyjádřením neznámé hustoty ρ z předešlého vztahu 4.4 dospějeme k rovnici

$$\rho = \frac{p \rho_0}{p_0}, \quad (4.5)$$

kterou dosadíme do vztahu 4.3. Dosazením vztahu 4.5 do vztahu 4.3 a následnými úpravami lze napsat

$$dp = -\frac{p \rho_0}{p_0} g dh; \quad (4.6)$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dh. \quad (4.7)$$

Předcházející vztah 4.7 představuje separovanou diferenciální rovnici, kterou vyřešíme následujícím způsobem

$$\int \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int dh; \quad (4.8)$$

$$\ln(p) = -\frac{\rho_0}{p_0} gh + C; C \in \mathbb{R}; \quad (4.9)$$

$$p = e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gh + C}; C \in \mathbb{R}, \quad (4.10)$$

kde C je integrační konstanta, kterou vhodně zvolíme. V případě nadmořské výšky $h = h_0 = 0$ m musí platit, že $p = p_0$. Tuto rovnost dostaneme v případě, že položíme integrační konstantu $C = \ln(p_0)$. Dosazením této integrační konstanty C do předešlého vztahu 4.10 a po následné úpravě dostáváme

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g h}. \quad (4.11)$$

Budeme pokračovat obecným odvozením vztahu na výpočet rozdílu Δh nadmořských výšek, ve kterých jsme realizovali měření. S využitím předešlého odvozeného vztahu 4.11 můžeme pro tlak p_1 vzduchu v nadmořské výšce h_1 napsat vyjádření ve tvaru

$$p_1 = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g h_1}. \quad (4.12)$$

Tlak p_2 vzduchu v nadmořské výšce $h_2 = h_1 + \Delta h$ lze analogicky s využitím vztahu 4.11 matematicky popsat rovnicí

$$p_2 = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g h_2}; \quad (4.13)$$

$$p_2 = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g (h_1 + \Delta h)}. \quad (4.14)$$

Vydělením vztahu 4.12 vztahem 4.14 můžeme napsat následující rovnost ve tvaru

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g h_1}}{p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g h_1 - \frac{\rho_0}{p_0} g \Delta h}}; \quad (4.15)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = e^{\frac{\rho_0}{p_0} g \Delta h}. \quad (4.16)$$

Následně si vyjádříme neznámou Δh z předcházející rovnosti 4.16. Vyjádřením dospějeme k výrazu

$$\frac{\rho_0}{p_0} g \Delta h = \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right); \quad (4.17)$$

$$\Delta h = \frac{p_0}{\rho_0 g} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right). \quad (4.18)$$

S využitím vztahu 4.1 lze pro tlak p_1 a tlak p_2 ideálního plynu napsat

$$p_1 = \frac{kT}{\bar{\lambda}_1 \pi d^2 \sqrt{2}}; \quad (4.19)$$

$$p_2 = \frac{kT}{\bar{\lambda}_2 \pi d^2 \sqrt{2}}. \quad (4.20)$$

Vydělením vztahu 4.19 vztahem 4.20 dospějeme k výrazu

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_1}. \quad (4.21)$$

Nakonec, dosazením předešlého vztahu 4.21 do rovnice 4.18 dostáváme obecně odvozený vztah pro výpočet rozdílu Δh dvou nadmořských výšek, ve kterých bylo měření prováděno. Tento vztah je v následující podobě

$$\Delta h = \frac{p_0}{\rho_0 g} \ln\left(\frac{\bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_1}\right). \quad (4.22)$$

Číselné dosazení zadaných hodnot

Dosazením číselných hodnot ze zadání tohoto příkladu do předešlého obecně odvozeného vztahu 4.22 určíme rozdíl Δh nadmořských výšek h_1 a $h_2 = h_1 + \Delta h$. Dostáváme

$$\begin{aligned}\Delta h &= \frac{1 \cdot 10^5}{1,21 \cdot 9,81} \ln \left(\frac{1,45 \cdot 10^{-7}}{1,15 \cdot 10^{-7}} \right) \text{ m;} \\ \Delta h &\approx 1952,82 \text{ m.}\end{aligned}$$

Shrnutí zadaného příkladu a námět k zamyšlení

Podle vykonaných výpočtů jsme dospěli k hodnotě rozdílu Δh nadmořských výšek, která je rovna $\Delta h = 1952,82$ m. Téměř žádné fyzikální měření určité fyzikální veličiny není provedeno s nulovou nejistotou měření. Zkuste se zamyslet a odvodit obecný vztah pro výpočet nejistoty $u_A(\Delta h)$ typu A hodnoty rozdílu Δh nadmořských výšek. Při měření ve výšce h_1 předpokládejte, že střední volná dráha $\bar{\lambda}_1$ molekuly vzduchu o termodynamické teplotě T byla změřena s nejistotou $u_A(\bar{\lambda}_1)$. Následně měřením ve výšce $h_2 = h_1 + \Delta h$ byla zjištěna střední volná dráha $\bar{\lambda}_2$ molekuly vzduchu o termodynamické teplotě T s nejistotou $u_A(\bar{\lambda}_2)$.

K odvození využijte zákon šíření nejistot, který je obecně s využitím [8] ve tvaru

$$u_A(\gamma) = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i} \right)^2 (u_A(\alpha_i))^2},$$

ve kterém předpokládáme, že fyzikální veličina γ je funkcí jednotlivých veličin α_i , kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, a tedy platí, že $\gamma = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Dále předpokládáme, že pro každou fyzikální veličinu α_i , kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, známe její nejistotu $u_A(\alpha_i)$.

4.2 Výpočet průměru sféry molekulárního působení molekuly plynu v uzavřené nádobě

Zadání příkladu

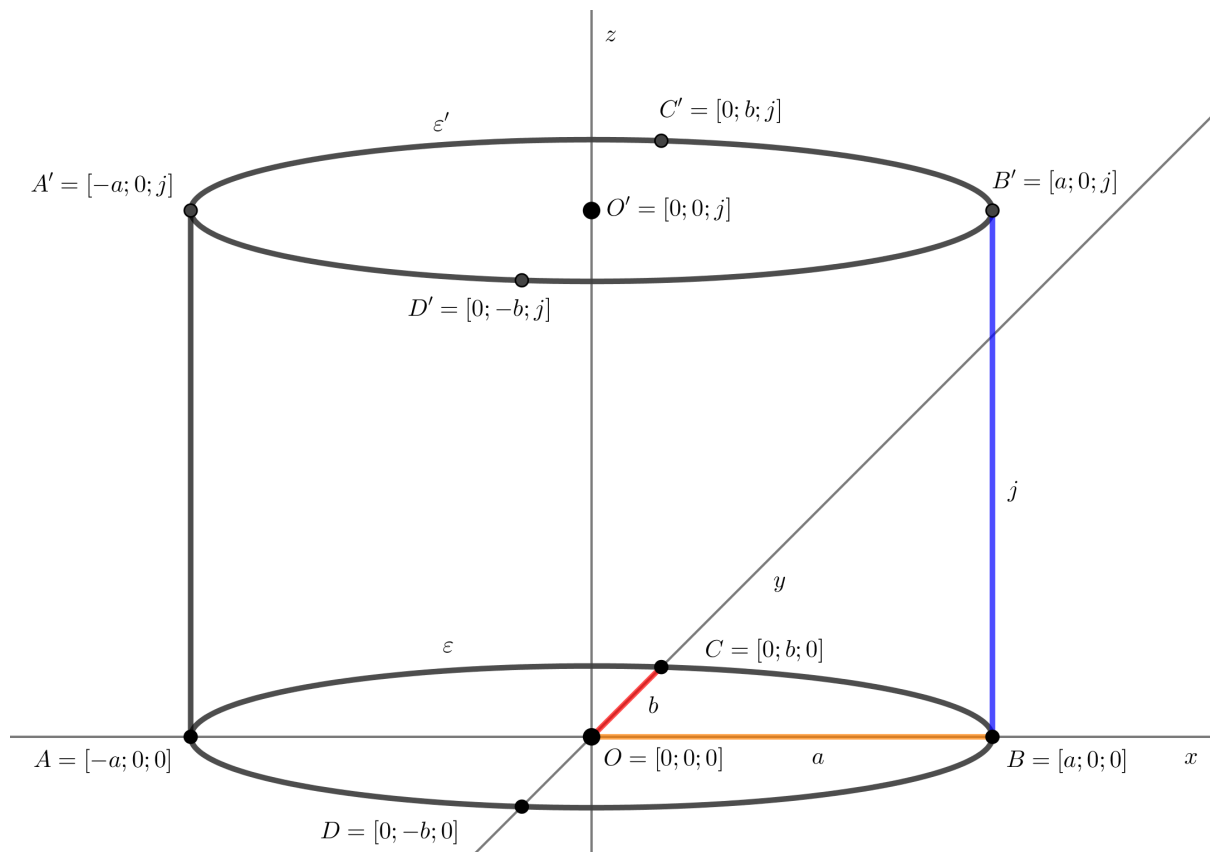
V uzavřené nádobě uvažujeme ideální plyn o látkovém množství $n = 1,25$ mol. Uzavřená nádoba, která je ve tvaru válce s výškou $j = 1$ m a s podstavou ve tvaru elipsy o hlavní poloose $a = 5$ dm a vedlejší poloose $b = 25$ cm, je znázorněna na obrázku 4.1. Za určitých podmínek při pozorování byla zjištěna hodnota střední volné dráhy $\bar{\lambda}$. Tato hodnota je rovna hodnotě $\bar{\lambda} = 10$ nm. Určete průměr d sféry molekulárního působení molekuly tohoto plynu.

Obecný postup řešení

V uzavřené nádobě znázorněné na obrázku 4.1 je umístěn zkoumaný ideální plyn o látkovém množství $n = 1,25$ mol. Za určitých podmínek experimentu bylo zjištěno, že střední volná dráha $\bar{\lambda}$ molekuly tohoto plynu má hodnotu $\bar{\lambda} = 10$ nm. S využitím odvozených vztahů v [2] můžeme pro střední volnou dráhu $\bar{\lambda}$ molekuly ideálního plynu napsat

Zadaná veličina	Značení	Hodnota
Látkové množství	n	1,25 mol
Výška nádoby	j	1 m
Velikost hlavní poloosy	a	0,5 m
Velikost vedlejší poloosy	b	0,25 m
Střední volná dráha molekuly	$\bar{\lambda}$	$1 \cdot 10^{-8}$ m
Průměr sféry molekulárního působení	d	? m

Tabulka 4.2: Zázpis zadaných hodnot v tabelové podobě.



Obrázek 4.1: Znázornění uzavřené nádoby s uvažovaných plynem.

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n_0 \pi d^2 \sqrt{2}}, \quad (4.23)$$

kde d je průměr sféry molekulárního působení, který chceme vypočítat, a n_0 představuje počet částic ideálního plynu vztažený na jednotkový objem. Vyjádřením neznámého průměru d sféry molekulárního působení ze vztahu 4.23 dospějeme k rovnici ve tvaru

$$d = \sqrt{\frac{1}{n_0 \pi \bar{\lambda} \sqrt{2}}}. \quad (4.24)$$

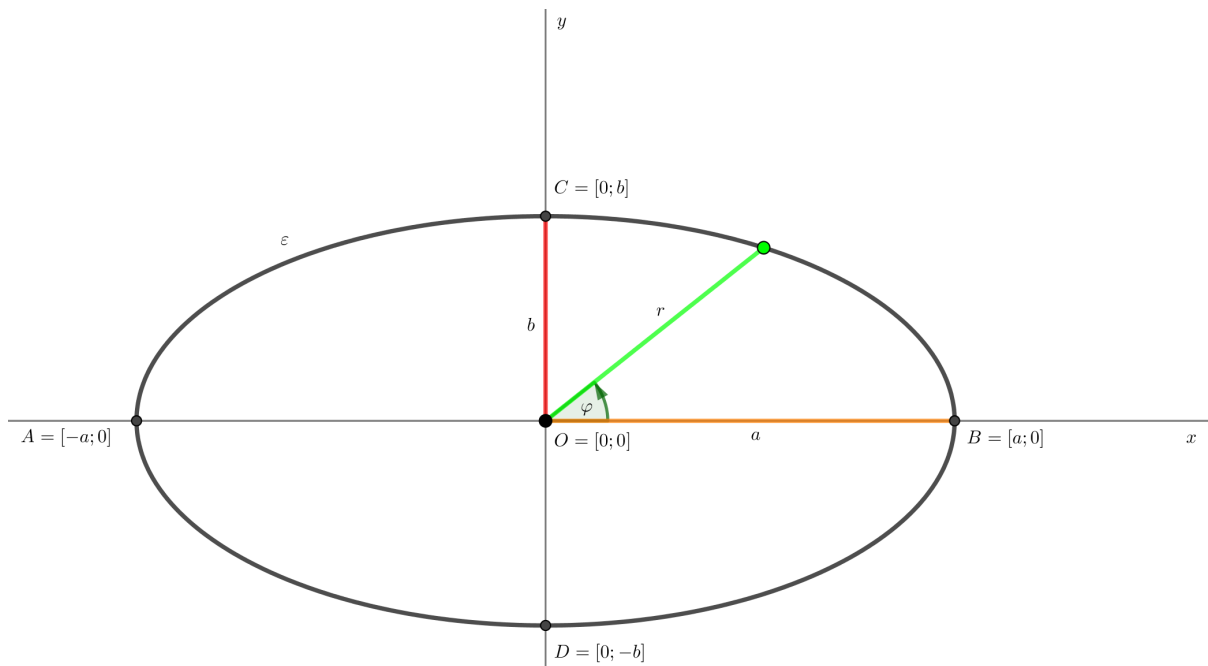
Počet n_0 částic ideálního plynu vztažený na jednotkový objem můžeme matematicky popsat rovnicí

$$n_0 = \frac{N}{V}, \quad (4.25)$$

ve které N představuje celkový počet částic zkoumaného plynu v nádobě o objemu V . Přešlý vztah 4.25 lze dále s využitím základních vztahů z [2] upravit do následující podoby

$$n_0 = \frac{nN_A}{Sj}, \quad (4.26)$$

kde n představuje látkové množství zkoumaného plynu, S je obsah podstavy uzavřené nádoby, ve které je plyn umístěn a nakonec j je její výška.



Obrázek 4.2: Zobrazení výpočtu obsahu S plochy ohraničené elipsou ε v polárních souřadnicích.

Pro obsah S plochy ohraničené elipsou ε platí následující vztah¹

¹Obecný vztah pro výpočet obsahu S plochy, která je ohraničena elipsou ε , nepatří mezi známé vztahy. Samotné odvození není triviální, proto není součástí obecného postupu řešení příkladu a nachází se zde, v poznámce pod čarou.

S využitím obrázku 4.2 předpokládáme, že má střed O elipsy ε souřadnice $O = [0; 0]$ v kartézské soustavě souřadnic a po řadě hlavní a vedlejší vrcholy se nacházejí na souřadných osách po řadě x a y . Elipsa má v takto zvolené kartézské soustavě souřadnic obecnou rovnici v kanonickém tvaru

$$\varepsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Výpočet obsahu S plochy ohraničené elipsou ε je v kartézské soustavě souřadnic obtížnější, proto samotný výpočet provedeme v polárních souřadnicích. Pro polární souřadnice zvolíme následující transformační rovnice

$$\begin{aligned} x &= ar \cos(\varphi); \\ y &= br \sin(\varphi), \end{aligned}$$

ve kterých r představuje velikost průvodiče spojujícího počátek $O = [0; 0]$ a libovolný bod ohraničené oblasti elipsou ε v rovině a φ je úhel mezi kladnou poloosou x a průvodičem. Určíme si integrační meze pro proměnné r a φ s využitím obrázku 4.2.

Vidíme, že velikost úhlu φ se pro pokrytí celé zkoumané oblasti mění od hodnoty $\varphi_1 = 0$ do $\varphi_2 = 2\pi$, tedy interval, ve kterém provedeme integraci pro úhel φ , je $\langle \varphi_1; \varphi_2 \rangle = \langle 0; 2\pi \rangle$. Velikost průvodiče se

$$S = \pi ab, \quad (4.27)$$

ve kterém po řadě a a b představuje velikost po řadě hlavní a vedlejší poloosy elipsy ε . Dosazením předešlého vztahu 4.27 do rovnice 4.26 dospějeme ke vztahu

$$n_0 = \frac{nN_A}{\pi abj}. \quad (4.28)$$

S využitím předešlé rovnosti 4.28 lze vztah 4.24 upravit ekvivalentně do tvaru

$$d = \sqrt{\frac{\pi abj}{nN_A\pi\bar{\lambda}\sqrt{2}}}; \quad (4.29)$$

$$d = \sqrt{\frac{abj}{nN_A\bar{\lambda}\sqrt{2}}}. \quad (4.30)$$

Číselné dosazení zadaných hodnot

Zadané číselné hodnoty dosadíme do předešlého obecně odvozeného vztahu 4.30 a určíme průměr d sféry molekulárního působení molekuly ideálního plynu. Dosazením dostáváme

$$d = \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,25 \cdot 1}{1,25 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 1 \cdot 10^{-8} \cdot \sqrt{2}}} \text{ m};$$

$$d \approx 3,4267 \cdot 10^{-9} \text{ m}.$$

bude měnit od hodnoty $r_1 = 0$ až po hranici dané oblasti, tedy po elipsu ε . Elipsa ε má po dosazení transformačních rovnic do její obecné rovnice v polárních souřadnicích tvar

$$\begin{aligned} \frac{a^2 r^2 \cos^2(\varphi)}{a^2} + \frac{b^2 r^2 \sin^2(\varphi)}{b^2} &= 1; \\ r^2 [\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)] &= 1; \\ r^2 &= 1. \end{aligned}$$

Z předešlých rovností vidíme, že horní integrační mez je pro velikost průvodiče r rovna hodnotě $r_2 = 1$. Interval integrace je pro r následně roven intervalu $\langle r_1; r_2 \rangle = \langle 0; 1 \rangle$. Pro obsah S plochy ohraničené elipsou ε můžeme napsat dvojný integrál

$$S = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \det(J) dr \right) d\varphi,$$

ve kterém $\det(J)$ je determinant Jacobiho matice. Determinant $\det(J)$ Jacobiho matice je v případě takto zadaných transformačních rovnic do polárních souřadnic roven následujícímu

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a \cos(\varphi) & -ar \sin(\varphi) \\ b \sin(\varphi) & br \cos(\varphi) \end{pmatrix} = abr [\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)] = abr.$$

Vyjádřený determinant $\det(J)$ Jacobiho matice dosadíme do předešlého vztahu a počítáme

$$S = ab \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r dr \right) d\varphi = ab \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^1 d\varphi = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{ab}{2} [\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} = \pi ab.$$

Dospěli jsme k závěru, že obsah S plochy ohraničené elipsou ε je obecně roven $S = \pi ab$.

Shrnutí zadaného příkladu a námět k zamyšlení

Dosazením zadaných číselných hodnot do obecného vztahu 4.30 jsme dospěli k číselné hodnotě průměru d sféry molekulárního působení molekuly $d = 3,4267$ nm. Vzhledem ke tvaru daného vztahu 4.30 platí, že je průměr d sféry molekulárního působení molekuly ideálního plynu přímo úměrný druhé odmocnině z reciproké hodnoty látkového množství n .

Zkuste s využitím vztahu

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{p\pi d^2 \sqrt{2}}$$

odvodit závislost průměru d sféry molekulárního působení molekuly ideálního plynu na hodnotě i , kde i představuje počet stupňů volnosti, a váš vztah diskutujte. Jedná se o přímou nebo nepřímou úměru?

Závěr

Tato bakalářská práce nesoucí název *Sbírka řešených úloh z molekulové fyziky a termodynamiky* obsahuje soubor dvaceti řešených příkladů se zaměřením na kinetickou teorii plynů. Příklady jsou na úrovni prvního ročníku bakalářského studia fyziky na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci.

V úvodu práce jsem uvedl několik knižních a jeden internetový zdroj, jenž jsem využil při studiu informací a k inspiraci při samotné tvorbě vlastních zadání příkladů. Práci jsem rozčlenil do čtyř kapitol, které svým zaměřením kopírují náplň jednotlivých částí kapitoly věnované kinetické teorii plynů v studijním textu [2] k předmětu Molekulová fyzika a termodynamika.

V první kapitole jsem se zabýval příklady využívajícími základní matematické vztahy popisující tlak ideálního plynu. Do této kapitoly jsem umístil sedm příkladů využívajících poznatky, které studenti získali během prvního semestru studia fyziky v rámci předmětu Mechanika. Jedná se především o jednoduché fyzikální stroje.

Do druhé kapitoly zaměřené na aplikaci Daltonova zákona aditivity parciálních tlaků se mi podařilo vytvořit čtveřici příkladů. Poslední příklad z této čtveřice využívá v řešení různé metody výpočtu soustavy lineárních rovnic. V řešení tohoto příkladu byla užita Gaussova eliminační metoda při výpočtu přes matice a řádkově ekvivalentní úpravy a také metoda postupného vyjadřování neznámých.

Stěžejní třetí kapitola této bakalářské práce je zaměřena na Maxwellův pravděpodobnostní zákon rozdělení rychlostí molekul ideálního plynu. Na začátku této části práce jsem umístil odvození samotného pravděpodobnostního zákona. Dále jsem se věnoval odvození obecných vztahů pro nejpravděpodobnější, průměrnou a střední kvadratickou rychlost molekul plynu. Součástí třetí kapitoly bakalářské práce je užití různých numerických metod výpočtu Riemannova určitého integrálu, u kterých jsem uvedl princip výpočtu danou metodou i obecně.

Poslední část bakalářské práce diskutuje pojem střední volná dráha molekuly ideálního plynu ve dvou příkladech. Pro čtenáře může být zajímavá či inspirativní část, ve které je odvozen vztah pro výpočet obsahu plochy omezené elipsou, jenž je použit ve výpočtu příkladu.

Samotný text mé bakalářské práce jsem vytvořil ve formě studijního textu určeného především studentům fyziky bakalářského studia k jejich samostudiu, k procvičení a prohloubení probíraného učiva v přednáškách příslušného předmětu nebo k použití ve výuce. Doufám, že studentům, kterým je tato sbírka příkladů především určena, pomůže ulehčit proces pochopení diskutovaných témat.

Na závěr bych rád poznamenal, že psaní samotné práce je pro mne inspirací do budoucna, zejména ve výběru tématu pro diplomovou práci. Vytvořením této bakalářské práce jsem získal dovednost, jak správně vzorově řešit příklady z fyziky. Myslím si, že této dovednosti lze využít v rámci mé budoucí pedagogické praxe a pomůže mi zlepšit efektivnost mnou vedené výuky fyziky. Bakalářská práce byla napsána v typografickém systému \LaTeX a obrazový doprovod jsem vytvořil převážně v programu GEOGEBRA.

Literatura

- [1] HALPERN, Alvin. *3,000 solved problems in physics*. New York: McGraw-Hill Education, 2011. ISBN 978-0-07-176346-2.
- [2] HOLUBOVÁ, Renata. *Molekulová fyzika a termodynamika: Studijní modul*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. ISBN 978-80-244-3299-1.
- [3] BLUNDELL, Stephen a Katherine M. BLUNDELL. *Concepts in thermal physics*. New York, N.Y.: Oxford University Press, 2006, xviii. ISBN 978-0-19-856770-7.
- [4] OBDRŽÁLEK, Jan. *Úvod do termodynamiky, molekulové a statistické fyziky*. Praha: Matfyzpress, 2015. ISBN 978-80-7378-287-0.
- [5] MIKULČÁK, Jiří. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2007. Pomocné knihy pro žáky (Prometheus). ISBN 978-80-7196-345-5.
- [6] ROZENSKÝ, Zdeněk, František MARTAN a Jiří BRABEC. *Matematická analýza. 1. 2. uprav. vyd.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1989. ISBN 8003000440.
- [7] HOLUBOVÁ, Renata. *Mechanika: studijní modul*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2012, 83 s. ISBN 978-80-244-3298-4.
- [8] MLČOCH, Jiří a Tomáš RÖSSLER. *Teorie měření a experimentu*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2005. ISBN 80-244-1230-6.

Přehled používaného značení a hodnot fyzikálních konstant

Název veličiny	Značení	Jednotka
Délka	a, b, c	m
Hmotnost	m	kg
Hustota	ρ	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Koeficient smykového tření	ξ	
Látkové množství	n	mol
Molární hmotnost	M_m	$\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Nejpravděpodobnější rychlost	v_p	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Objem	V	m^3
Obsah	S	m^2
Počet molekul	N	
Počet molekul na jednotku objemu	n_0	m^{-3}
Počet stupňů volnosti	i	
Poissonova konstanta	ν	
Poloměr	r	m
Práce	ΔW	J
Průměr	d	m
Průměrná rychlost	\bar{v}	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Přírůstek rychlosti	Δv	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Relativní počet molekul	$\frac{\Delta n}{N}$	
Rychlost	v	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Střední kinetická energie molekuly	W_k	J
Střední kvadratická rychlost	v_k	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Střední volná dráha molekuly	$\bar{\lambda}$	m
Teplota	t	$^{\circ}\text{C}$
Termodynamická teplota	T	K
Tlak	p	Pa
Velikost vektoru síly \mathbf{F}	F	N
Výška	j	m
Název konstanty	Značení	Hodnota a jednotka
Avogadrova konstanta	N_A	$6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmannova konstanta	k	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Tíhové zrychlení	g	$9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Univerzální plynová konstanta	R_m	$8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Tabulka 4.3: Seznam používaných fyzikálních veličin a konstant.

Seznam obrázků

1.1	Znázornění nádoby s plynem.	10
1.2	Znázornění zařízení s vloženým tělískem.	18
1.3	Znázornění vektorů působících sil \mathbf{F} , \mathbf{F}_G a \mathbf{F}_p na tělísko.	19
1.4	Náčrt podstavy tělíska, která je ve tvaru kosodélníku.	20
1.5	Znázornění podstavy tělesa, která je ve tvaru kosodélníku. Objem V' tělesa představuje objem, ve kterém je umístěn plyn po ustálení tělíska v zařízení.	21
1.6	Znázornění konstrukce výtahu.	24
1.7	Znázornění měřícího zařízení.	28
2.1	Situace po ustálení pohyblivé horní podstavy dané nádoby ve výšce j_1 , na které se nachází krychle z mosazi.	41
3.1	Znázornění rychlostního prostoru v rovině $v_z = 0$	51
3.2	Průběh Gaussovy chybové funkce $\zeta(v)$ vytvořený v programu GNUPLOT.	54
3.3	Průběh Maxwellovy rozdělovací funkce $\chi(v)$ pro pevně zvolené hodnoty K a q . V obrázku je vyznačena plocha pod křivkou, která udává relativní počet molekul s rychlostmi v v intervalu $\langle v_0; v_0 + dv \rangle$	55
3.4	Metoda lineární interpolace.	62
3.5	Znázornění principu výpočtu obsahu plochy pod obecně zadanou funkcí $f(x)$ pomocí obdélníkové metody.	70
4.1	Znázornění uzavřené nádoby s uvažovaným plynem.	85
4.2	Zobrazení výpočtu obsahu S plochy ohraničené elipsou ε v polárních souřadnicích.	86