UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Spojité ekonomické modely

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Matyáš Kovařík**
Studijní program: B1103 – Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika - ekonomie se zaměřením na bankovnictví/pojišťovnictví
Forma studia: Prezenční
Rok odevzdání: Rok odevzdání: 2021

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Matyáš Kovařík

Název práce: Spojité ekonomické modely

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2021

Abstrakt: Bakalářská práce se zabývá spojitými ekonomickými modely. Jedná se o konkrétní ukázku využití diferenciálních rovnic v ekonomické praxi. Kromě ekonomické teorie a teorie diferenciálních rovnic je v práci ukázán princip fungování Domarova a Solowova modelu hospodářského růstu.

Klíčová slova: Diferenciální rovnice, rovnice se separovanými proměnnými, lineární diferenciální rovnice 1. řádu, Bernoulliova rovnice, hospodářský růst, Domarův model, Solowův model růstu

Počet stran: 43

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Matyáš Kovařík

Title: Continuous economic models

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.

The year of presentation: 2021

Abstract: The bachelor thesis deals with continuous economic models. The topic is a concrete usage of differential equations in economic practice. In addition to the economic theory and the theory of differential equations, the work shows the concept of Domar and Solow model of economic growth.

Key words: Differential equations, differential equations with separable variables, first order linear differential equations, Bernoulli equation, economic growth, Domar model, Solow model of economic growth

Number of pages: 43

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením pana docenta Tomečka s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat především svému vedoucímu bakalářské práce, panu docentu Tomečkovi, že měl dostatek trpělivosti a ochoty, aby mi pomohl dovést tuto práci ke zdárnému konci. Po celou dobu psaní bakalářské práce mi poskytoval velmi cenné rady při konzultacích. Také bych rád poděkoval své rodině a přátelům, že mě po celou dobu studia podporovali.

Úvod

V práci nazvané *Spojité ekonomické modely* se budu věnovat vybraným ekonomickým modelům, které lze konstruovat a řešit pomocí diferenciálních rovnic prvního řádu.

Cílem mé bakalářské práce je představit čtenáři některé ekonomické růstové modely. Kromě toho chci prohloubit vlastní znalosti nejen z teorie diferenciálních rovnic, ale i ty ekonomické. Práce by měla posloužit jako praktická ukázka využití teorie diferenciálních rovnic v ekonomické praxi.

Přijde mi až fascinující, jak jsou jednotlivé vědy propojeny, byť se na první pohled mohou zdát naprosto odlišné. Obzvláště matematika je krásná v tom, že se bez ní neobejdou fyzici, chemici, biologové, a dokonce ani ekonomové. Mě nejvíce zaujalo právě spojení matematiky a ekonomie, protože obě tyto vědy studuji. Pokusím se tedy toto spojení ukázat na dalších stranách.

Tato práce je členěna do tří kapitol. V první a druhé kapitole se zaměřím na teorii, kterou následně budu potřebovat v kapitole třetí. První kapitola bude patřit teorii ekonomické. Zaměřím se na teorii hospodářského růstu, rovnováhu na trhu či různé přístupy ekonomických škol. Ve druhé kapitole se budu věnovat základní teorii obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Nadefinuji v ní nejdůležitější pojmy a zaměřím se na metody výpočtu, které využiji dále v práci. Ve třetí kapitole se pak pokusím čtenáři představit dva ekonomické růstové modely. Konkrétně se zaměřím na konstrukci Domarova a Solowova modelu růstu.

Kapitola 1

Vybrané poznatky z ekonomické teorie

V první kapitole se budu věnovat částem ekonomické teorie, jejichž znalost se hodí při konstrukci modelů v kapitole třetí. Zaměřím se na téma trhu a tržní rovnováhy, teorii hospodářského růstu a pokusím se také vysvětlit různé pojetí ekonomické teorie keynesiánských a neoklasických ekonomů. Kapitolu jsem vypracoval s využitím zdrojů [2], [3], [9] a [10].

1.1. Úvod do ekonomické teorie

Ekonomie je součástí života každého člověka. Ať už dobrovolně, nebo nedobrovolně, s některými částmi či oblastmi ekonomie se setkáváme každodenně. Může jít třeba o nákup v obchodě, kde volíme mezi různě drahými a kvalitními produkty nebo třeba o tvorbu domácích rozpočtů na základě příjmů a výdajů rodiny.

Studiem ekonomie jako vědy se zabývalo a zabývá mnoho ekonomů, ovšem definování samotného pojmu *ekonomie* není jednoduché. Využiji definici z knihy [2]: *Ekonomie je vědou, která studuje způsob, jakým lidé používají vzácné zdroje poskytnuté přírodou a předcházejícími generacemi, k produkci výrobků a služeb a jak tyto produkty rozdělují mezi současnou a budoucí spotřebu a mezi jednotlivce a spotřebitelské skupiny.*

Už ze samotné definice ekonomie je zřetelné, o jak rozsáhlou vědu se jedná.

Již tradičně ji dělíme na dvě oblasti - *mikroekonomii* (tj. oblast studující chování dílčích ekonomických jednotek, jako jsou firmy a domácnosti) a *makroekonomii* (v té se zkoumá ekonomika státu jako celek). Můj další text bude spíše makroekonomického charakteru.

1.2. Trh a tržní rovnováha

Slovo *trh* může mít mnoho významů. Ovšem v ekonomii tímto pojmem obecně označujeme jakýkoliv systém nákupu a prodeje výrobků a služeb nebo výrobních faktorů. Trh je klíčový činitel v *tržních ekonomikách*, kde rozhoduje o tom, co se bude pro koho vyrábět, v jakém množství a jakým způsobem. V tržním mechanismu hrají hlavní roli *poptávka* a *nabídka*, které společně utvářejí *cenu* na trhu.

1.2.1. Poptávka

Poptávka je vztah mezi různými cenami zboží a množstvím, které chtějí spotřebitelé, a jsou schopni a ochotni si za danou cenu koupit v určitém časovém intervalu. *Zákon poptávky* tvrdí, že při jinak neměnných okolnostech se bude s růstem ceny P snižovat poptávané množství Q. Naopak při poklesu ceny P se poptávané množství Q zvýší.

Faktorů, které poptávané množství ovlivňují, je celá řada. Kromě výše ceny daného zboží jde zejména o *disponibilní důchod* spotřebitelů, tedy množství finančních prostředků, které spotřebitelé mají. Dále záleží také například na ceně příbuzných produktů, vkusu a preferencích spotřebitelů, na počtu kupujících či na očekávání spotřebitelů výhledově vzhledem k budoucím cenám produktu.

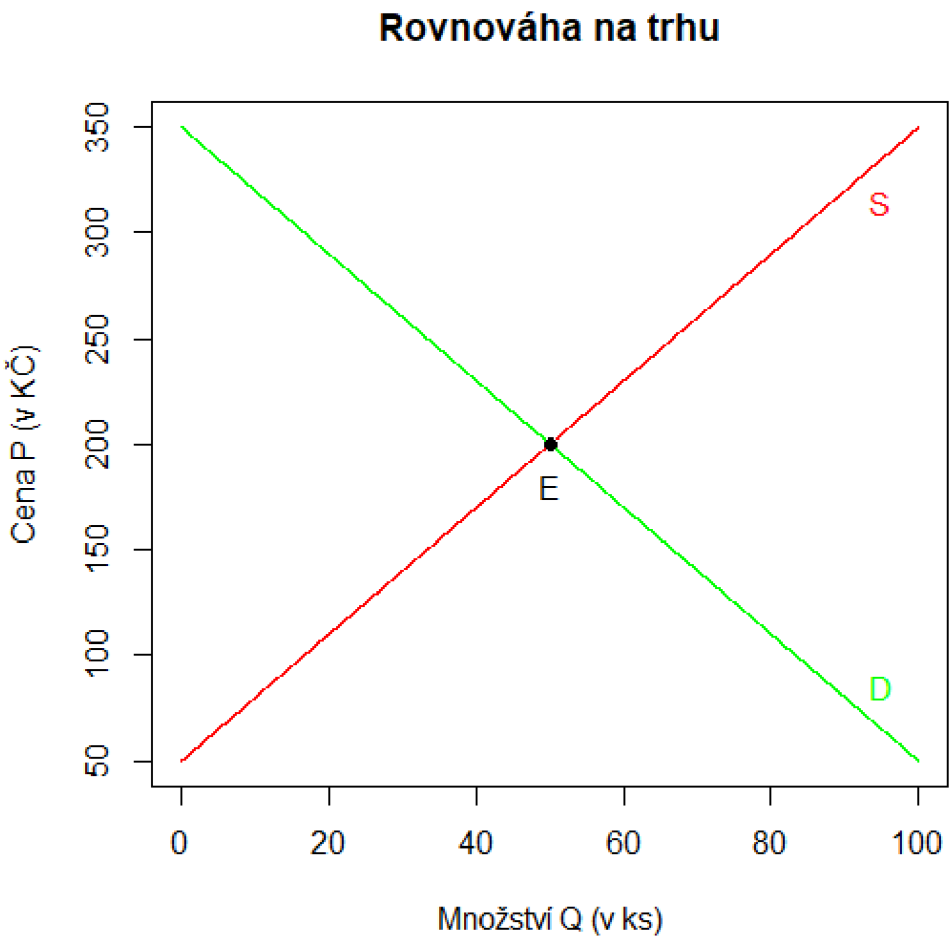
1.2.2. Nabídka

Nabídka je vztah mezi různými cenami zboží a množstvím nabízeným prodávajícími za určité časové období. *Zákon nabídky* tvrdí, že za jinak neměnných okolností bude při růstu ceny růst také nabízené množství.

Podobně jako u poptávky, také nabídku a nabízené množství zboží ovlivňují různé faktory. V první řadě jde o samotnou cenu daného zboží, ale také o ceny jiných produktů, počet prodávajících (množství a rozmanitost konkurence) nebo technologii a náklady spojené s výrobou.

1.2.3. Tržní rovnováha

Působením poptávky a nabídky se časem ustálí cena výrobku na tzv. *rovnovážné úrovni*. Cena, při které se vyrovná poptávané a nabízené množství, se nazývá *rovnovážná cena*. Bod, v němž se protnou křivky poptávky a nabídky, označujeme jako *rovnovážný bod*. Stav ekonomiky, kdy bude vyrovnaná agregátní (celková) poptávka a agregátní nabídka se nazývá *rovnovážný stav* nebo pouze *rovnováha*.



Obrázek 1.1: Tržní rovnováha

Obrázek 1.1 znázorňuje tržní rovnováhu. Červená křivka S vyjadřuje nabídku, zelená křivka D poptávku a bod E je rovnovážným bodem. Rovnovážnou cenou je v tomto konkrétním případě 200 Kč.

1.3. Hospodářský růst

Hospodářský růst (synonymem je pojem *ekonomický růst*) znamená růst *reálného*, neboli *skutečného, produktu* země (nejčastěji je tím myšlen hrubý domácí produkt, tedy HDP) v čase. Je to růst fyzického objemu vyprodukovaných výrobků a služeb za delší období, například rok. Pokud kromě HDP roste také HDP přepočítané na jednoho obyvatele, mluvíme o *ekonomickém rozvoji*.

Studium hospodářského růstu je jedna z nejdůležitějších úloh ekonomie. Ne nadarmo se totiž používá otřepaná fráze *„peníze dělají peníze"*. Pro každého investora bude jistě zajímavější investovat své peníze do ekonomiky, kde se dá očekávat vyšší hospodářský růst (a tím také vyšší růst hodnoty investorových investic), než do ekonomiky s nižším očekávaným hospodářským růstem. S vyššími příjmy plynoucími od investorů mají ekonomiky pochopitelně více disponibilních prostředků, které samy mohou použít pro investování, na rozvoj společnosti a na zvyšování životní úrovně obyvatel. Navíc s ekonomickým růstem ruku v ruce přichází zlepšování postavení země na mezinárodním poli nejen ekonomických, ale i politických vztahů.

Je tedy zřejmé, že pro každý stát je studium hospodářského růstu naprosto stěžejní. Každý stát se snaží o co nejvyšší ekonomický růst, ovšem zejména v posledních letech ve vyspělejších zemích se o něj státy snaží v rámci tzv. *udržitelného rozvoje*. Tímto pojmem je myšlen rozvoj, kdy společnost uspokojí své potřeby, ale při tom nebude omezovat možnosti uspokojení potřeb budoucích generací. Zejména se jedná o snahu omezit zhoršování životního prostředí (kácení deštných pralesů, skleníkový efekt, znečišťování moří a oceánů, nadměrné vyčerpávání energetických zdrojů atp.).

1.3.1. Faktory hospodářského růstu

Dosažení hospodářského růstu není jednoduchý proces, protože jej ovlivňuje několik faktorů. Produkt každé ekonomiky je totiž závislý na množství a produktivitě použitých výrobních faktorů. Faktory hospodářského růstu shrnuje *agregátní produkční funkce* ve tvaru

$$Y = Af(L, K, H),$$

kde Y je *celková produkce*, která se nazývá také *skutečný produkt*, A je konstanta označující efektivitu používání výrobních vstupů, f je funkce tří proměnných, kterými jsou *práce* L, *fyzický kapitál* K (používá se také zkrácené označení *kapitál*) a *lidský kapitál* H.

Prací rozumíme vědomou a účelnou lidskou činnost. Množství práce v ekonomice je určeno počtem osob ochotných a schopných pracovat a také zaměstnaností. *Fyzický kapitál* jsou statky, které byly vyrobeny k tomu, aby se dále používaly k produkci nových statků, tedy například různé stroje, počítače nebo dopravní prostředky. Při zvyšování objemu kapitálu použitého ve výrobním procesu se zpravidla dostaví hospodářský růst. Připojování nového kapitálu k již fungujícímu se nazývá *akumulace kapitálu*. Pojmem *lidský kapitál* je myšlen souhrn znalostí, zkušeností a dovedností, kterými člověk disponuje. Vyšší vzdělanost znamená vyšší hodnoty lidského kapitálu, což napomáhá ekonomickému růstu.

Kromě těchto faktorů ovlivňuje hospodářský růst také *technologický pokrok*, což jsou změny ve výrobních procesech vedoucí k větším nebo kvalitnějším výstupům. Technologický pokrok přináší vyšší efektivitu výrobních faktorů, proto také hraje důležitou roli při snaze o dosažení hospodářského růstu.

1.4. Ekonomické školy a různé pohledy na ekonomii

Ekonomie se formovala po mnoho staletí, ovšem vědecké rozměry začala získávat až v 18. století díky pracem Adama Smitha a Davida Ricarda. Tito ekonomové jsou považováni za zakladatele tzv. *klasické školy ekonomie*, ze které se později vyvinula *neoklasická ekonomická škola*. Postupem času se však objevovali ekonomové a ekonomické školy s rozdílným pohledem na ekonomii a její fungování. Nejvýraznějším zástupcem jiného proudu byl John Maynard Keynes, podle něhož byla pojmenována *keynesiánská ekonomická škola*. Rozdíly těchto škol v pohledu na ekonomii se pokusím vysvětlit v následujících dvou sekcích.

1.4.1. Klasický a neoklasický přístup k ekonomii

Jak jsem již poznamenal, za otce klasické ekonomie považujeme pány Smithe a Ricarda, kteří ve svých dílech sjednotili ekonomické vědění tehdejší doby. Mezi další významné klasiky a neoklasiky řadíme například Thomase Malthause, Johna Stuarta Milla či Alfreda Marshalla. Některé myšlenky zástupců této školy se pokusím shrnout v následujícím odstavci.

Klasici a neoklasici vnímají nezaměstnanost jako přirozený důsledek působení tržního mechanismu. Příčinou nezaměstnanosti je pro ně krátkodobá nerovnováha mezi poptávkou po práci (tedy poptávku podniků po pracovní síle) a nabídkou práce, což může být způsobeno například nedostatečnou informovaností, neochotou mobility či neochotou akceptovat horší (například mzdové) podmínky. Existuje podle nich jen dobrovolná nezaměstnanost, tedy kdo má zájem pracovat, volné pracovní místo si okamžitě najde. Kromě politiky zaměstnanosti se zabývali úlohou státu v ekonomice. Došli k závěru, že tržní mechanismus v ekonomice by se měl nechat fungovat co nejvíce samostatně. Stát by měl činit co nejmenší zásahy a zaměřit se jen na tvorbu pravidel trhu a jejich dodržování.

1.4.2. Keynesovský přístup k ekonomii

John Maynard Keynes začal svou ekonomickou kariéru jako neoklasický ekonom. Zásadní zlom v jeho myšlení nastal s příchodem *Velké hospodářské krize* v roce 1929. Tehdy začal Keynes chápat, že za neúspěšným fungováním kapitalistických ekonomik ve 20. století pravděpodobně stála nedostatečná agregátní poptávka. Jeho stěžejním dílem je *Obecná teorie zaměstnanosti, úroku a peněz*. Mimo jiné v něm tvrdí, že zaměstnanost je závislá na agregátní poptávce, která je složena z výdajů na spotřebu a na investice. Také přišel s teorií sklonu ke spotřebě. *Marginálním sklonem ke spotřebě* rozumíme dodatečný přírůstek spotřeby způsobený jednotkovou změnou disponibilního důchodu a *průměrný sklon ke spotřebě* je definovaný jako podíl spotřeby a disponibilního důchodu.

Na Keynesovo učení navázali další ekonomové. Zmínit musím Evseye Domara a Roye Harroda, kteří vytvořili dynamický model hospodářského růstu (Keynesova obecná teorie byla statická). Ještě dále šel neokeynesiánský ekonom Robert Merton Solow, který do modelu hospodářského růstu zahrnul i technologický pokrok. Domarovým a Solowovým modelem se budu zabývat ve třetí kapitole.

Obecně se dá o keynesiánských ekonomech říci, že považují ekonomiku za vnitřně nestabilní systém, který vyžaduje permanentní zásahy státu, zejména co se týče alokace ekonomických zdrojů. Stát by podle nich měl pro dobré fungování ekonomiky podporovat růst poptávky, aby byl dostatek pracovních míst pro všechny občany, kteří mají zájem pracovat. Tedy aby byla vymýcena nedobrovolná nezaměstnanost, kterou keynesiánci na rozdíl od klasiků uznávají, že existuje.

Kapitola 2

Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

Diferenciální rovnice jsou nedílnou součástí matematické analýzy. A matematická analýza nachází uplatnění v mnoha praktických odvětvích, ekonomii nevyjímaje. Znalost diferenciálních rovnic a schopnost jejich řešení budu potřebovat ve třetí kapitole mé práce při analýze ekonomických modelů. Začnu tedy obecnou teorií diferenciálních rovnic a následně osvětlím základní metody řešení těch typů rovnic, se kterými se setkám v Domarově a Solowově modelu. V této kapitole jsem čerpal ze zdrojů [4], [5], [6], [7], [11] a [12].

2.1. Základní definice a pojmy

Začněme nejprve základními pojmy teorie obyčejných diferenciálních rovnic.

Definice 2.1 *Obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu* nazveme rovnici ve tvaru

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{2.1}$$

kde F je reálná funkce $(n + 2)$ reálných proměnných definovaná na množině $\Psi \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

Poznámka 2.2 Již dopředu je třeba zdůraznit, že *řešením diferenciální rovnice* je funkce jedné proměnné, dále viz Poznámka 2.8.

Poznámka 2.3 Kromě obyčejných diferenciálních rovnic existují také parciální diferenciální rovnice, ve kterých se vyskytují parciální derivace, protože neznámá funkce je funkcí více proměnných. Ve svém textu se ale zaměřím pouze na obyčejné diferenciální rovnice, pro které budu používat pouze zkrácený výraz *diferenciální rovnice*.

Definice 2.4 *Řádem diferenciální rovnice* rozumíme řád nejvyšší derivace hledané funkce, která se v rovnici (2.1) vyskytuje.

Poznámka 2.5 *Diferenciální rovnicí prvního řádu* tedy rozumíme rovnici ve tvaru

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.2}$$

kde $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je definovaná na množině $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$.

Poznámka 2.6 Rovnice (2.2) je v tzv. *implicitním tvaru*. Budu se zabývat speciálním případem, kdy tuto rovnici lze přepsat do jednoduššího, tzv. *explicitního tvaru*:

$$y' = f(x, y), \tag{2.3}$$

kde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definovaná na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Zřejmě pak $\Gamma = \Omega \times \mathbb{R}$. Vyjádření pomocí rovnice (2.3) budu v dalším textu používat více.

Definice 2.7 Nechť $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$. Pak

(a) $h(x)$ nazveme *řešením rovnice* (2.2) na J, jestliže $h(x)$ má derivaci $h'(x)$ pro každé $x \in J$ a platí

  (i) $\forall x \in J$: $(x, h(x), h'(x)) \in \Gamma$,

  (ii) $\forall x \in J$: $F(x, h(x), h'(x)) = 0$.

(b) $h(x)$ nazveme *řešením rovnice* (2.3) na J, jestliže $h(x)$ má derivaci $h'(x)$ pro každé $x \in J$ a platí

  (i) $\forall x \in J$: $(x, h(x)) \in \Omega$,

  (ii) $\forall x \in J$: $h'(x) = f(x, h(x))$.

Poznámka 2.8 Pro řešení obecné rovnice (2.1) by definice byla obdobná jako u Definice 2.7(a), jen derivace by byly až do n-tého řádu.

Poznámka 2.9 V mé práci budu často používat pojmy *obecné a partikulární řešení diferenciální rovnice*. Proto je zde neformálně nadefinuji v následující definici.

Definice 2.10 *Obecným řešením diferenciální rovnice* rozumíme množinu všech řešení diferenciální rovnice. Naproti tomu pojmem *partikulární řešení diferenciální rovnice* myslíme jedno konkrétní řešení vybrané z obecného řešení (dá se získat například konkrétní volbou integrační konstanty).

2.2. Lokální existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy

Diferenciální rovnice mají obvykle nekonečně mnoho řešení. Často nás nebudou zajímat všechna řešení, ale jen taková, která budou splňovat určitou podmínku. Nejčastěji využívaná je tzv. *Cauchyova (počáteční) podmínka.*

Definice 2.11 Nechť $(x_0, y_0) \in \Omega$. Pak *Cauchyovou počáteční úlohou k rovnici* (2.3) nazveme úlohu najít řešení diferenciální rovnice (2.3), která splňuje podmínku

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.4}$$

Podmínku (2.4) nazýváme *Cauchyovou (počáteční) podmínkou. Řešením Cauchyovy úlohy* (2.3), (2.4) bude řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice (2.3) definované na nějakém intervalu I obsahujícím bod x_0 a splňující podmínku (2.4).

Nyní tedy víme, jak vypadá Cauchyova úloha a jak by mělo vypadat řešení této úlohy. Ne vždy ale řešení existuje. Podmínku jeho existence určuje následující věta.

Věta 2.12 (Peanova existenční, viz [5]) *Nechť je funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojitá na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a $(x_0, y_0) \in \Omega$. Potom existuje alespoň jedno řešení počáteční úlohy* (2.3), (2.4)*. Tedy existuje $\delta > 0$ a řešení diferenciální rovnice* (2.3) *definované na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ splňující podmínku* (2.4).

Definice 2.13 (viz [7]) Řekneme, že počáteční úloha $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ *je jednoznačně řešitelná*, jestliže pro každá dvě její řešení y_1, y_2 existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $y_1(x) = y_2(x)$.

Věta 2.12 zaručuje pouze existenci řešení. Jednoznačnost zaručí až další podmínka, nejčastěji se používá tzv. *lokální Lipschitzova podmínka*, která je uvedena v následující definici.

Definice 2.14 Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňuje *lokálně Lipschitzovu podmínku v bodě* (x_0, y_0) *vzhledem k* y, jestliže existuje konstanta $K > 0$ a δ-okolí[1] $\mathcal{U}_\delta((x_0, y_0)) \subset \Omega$, takové, že pro každé dva body $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathcal{U}_\delta((x_0, y_0))$ platí

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Poznámka 2.15 Pro splnění lokální Lipschitzovy podmínky stačí, aby na nějakém okolí bodu (x_0, y_0) byla omezená parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Věta 2.16 (Picardova o existenci a jednoznačnosti, viz [7]) *Nechť je funkce* $f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *spojitá na otevřené množině* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *a v každém bodě množiny* Ω *je splněna Lipschitzova podmínka vzhledem k* y*. Pak pro libovolný bod* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *je počáteční úloha* $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ *jednoznačně řešitelná.*

Poznámka 2.17 Pro existenci řešení tedy stačí, aby funkce f byla spojitá na Ω. Aby navíc řešení bylo jednoznačné, stačí přidat podmínku, aby parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}$ byla omezená na Ω, viz Poznámka 2.15.

2.3. Vybrané typy diferenciálních rovnic 1. řádu a metody jejich řešení

Definice diferenciální rovnice (2.3) je velmi obecná a v praxi se můžeme setkat s mnoha různými typy diferenciálních rovnic, přičemž každý typ vyžaduje jiný postup řešení. Mnoho typů dokonce ani neumíme řešit analyticky, v takovém případě se využívá numerických metod. Ve své práci se ale budu zabývat jen typy, které lze řešit analyticky.

[1](viz [12]) δ-okolí bodu (x_0, y_0) je množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho_E((x, y), (x_0, y_0)) < \delta\}$, kde ρ_E je eukleidovská metrika v $\mathbb{R}^2$. δ-okolí bodu (x_0, y_0) označujeme $\mathcal{U}_\delta((x_0, y_0))$.

Je nutné umět poznat, jakého typu daná rovnice je a znát algoritmus, kterým lze daný typ rovnice řešit. V této kapitole se tedy zaměřím na některé typy diferenciálních rovnic a metody hledání jejich řešení. Konkrétně se budu zabývat rovnicemi se separovanými proměnnými, lineárními diferenciálními rovnicemi 1. řádu a Bernoulliovou rovnicí.

2.3.1. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Definice 2.18 Obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu ve tvaru

$$y' = f(x)g(y), \tag{2.5}$$

kde $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nazveme *rovnicí se separovanými proměnnými.*

Rovnici (2.5) je možné řešit dále uvedeným postupem:

(a) Předpokládejme, že f je spojitá na intervalu (a, b) a $g(y_0) = 0$ pro nějaké y_0 z $\mathcal{D}(g)$.[2] Pak

$$y(x) = y_0, \quad x \in (a, b) \tag{2.6}$$

je *konstantní řešení*, což snadno ověříme dosazením do rovnice (2.5).

(b) Předpokládejme, že f je spojitá funkce na intervalu (a, b) a g je spojitá a nenulová na intervalu (c, d). Nalezneme *předpis* a *definiční obor* řešení y rovnice (2.5), jehož graf je podmnožina obdélníku $(a, b) \times (c, d)$.

Pro řešení y tedy platí $y'(x) = f(x)g(y(x))$ pro $\forall x \in J$, kde $J \subset (a, b)$ je interval. Díky předpokladu nenulovosti funkce g na intervalu (c, d) lze rovnici (2.5) podělit výrazem $g(y(x))$ a dostáváme

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x), \quad x \in J. \tag{2.7}$$

Označme

$$G(s) = \int \frac{1}{g(s)}\, \mathrm{d}s, \quad s \in (c, d),$$

[2](viz [11]) *Definiční obor funkce* $f : A \to \mathbb{R}$ je množina $A \subset \mathbb{R}$, tedy množina, která se zobrazuje do množiny $\mathbb{R}$. Definiční obor funkce f označujeme $\mathcal{D}(f)$. Množinu všech funkčních hodnot funkce f, tj. množinu $\{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in \mathcal{D}(f)\}$ nazveme *obor hodnot funkce* f a označujeme ji $\mathcal{H}(f)$.

tedy

$$G'(s) = \frac{1}{g(s)}, \quad s \in (c,d),$$

tzn. platí, že $G' > 0$, nebo $G' < 0$ na (c,d). Odtud plyne, že existuje $G^{-1} : \mathcal{H}(G) \to (c,d)$. Rovnici (2.7) lze zapsat jako

$$(G(y(x)))' = f(x), \quad x \in J,$$

tzn.

$$G(y(x)) = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C, \quad x \in J$$

a tedy *předpis obecného řešení rovnice* (2.5) je

$$y(x) = G^{-1}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x + C\right). \tag{2.8}$$

Interval J určíme tak, že platí

$$\forall x \in J : \int f(x)\,\mathrm{d}x + C \in \mathcal{H}(G).$$

(c) Řešení získaná v (a) a (b) lze v některých případech *„slepit“* a získat tak další řešení. V této práci se ale s tímto jevem nesetkáme. Pro více informací lze využít např. [5].

Poznámka 2.19 Pokud budeme mít za úkol řešit počáteční úlohu (2.3), (2.4), pak nejprve zjistíme *obecné řešení* ve tvaru (2.8). Pro rovnice prvního řádu se v tomto řešení vždy objeví pouze jediná konstanta. Tu určíme dosazením počáteční podmínky do obecného řešení.

Poznámka 2.20 Na rovnice se separovanými proměnnými lze převést i rovnice, u kterých to nemusí být na první pohled zřejmé. Například rovnice typu

$$y' = f(ax + by + c),$$

kde a, b jsou nenulové koeficienty, by se převedla pomocí *substituce*

$$z = ax + by + c$$

až na rovnici

$$z' = bf(z) + a,$$

což je rovnice se separovanými proměnnými.

2.3.2. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 2.21 *Lineární diferenciální rovnicí (LDR) prvního řádu* nazveme rovnici ve tvaru

$$y' = f(x)y + g(x), \tag{2.9}$$

kde $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce na nějakém intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

Věta 2.22 (O existenci a jednoznačnosti globálního řešení LDR 1. řádu, viz [7]) *Nechť funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité na intervalu I, $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$. Pak počáteční úloha*

$$y' = f(x)y + g(x), \quad y(x_0) = y_0$$

má právě jedno řešení definované na celém intervalu I.

Definice 2.23 Rovnici (2.9), kde $g(x) = 0$ na intervalu I, tedy rovnici ve tvaru

$$y' = f(x)y \tag{2.10}$$

nazýváme *homogenní rovnice*. Pokud $g(x) \neq 0$ pro nějaké $x \in I$, nazveme rovnici (2.9) *nehomogenní rovnicí.*

Poznámka 2.24 (viz [7]) Homogenní rovnice (2.10) je rovnice se separovanými proměnnými. Navíc má (2.10) vždy tzv. *triviální řešení* $y = 0$. Pokud tedy je $y(x_0) = 0$, tak z Věty 2.22 plyne, že $\forall x \in I : y(x) = 0$. Odtud vyplývá, že netriviální řešení nikdy neprotne osu x a díky spojitosti bude celé buď nad, nebo celé pod osou x.

Věta 2.25 (viz [7]) *Nechť y_1, y_2 jsou řešení rovnice* (2.10) *a $c \in \mathbb{R}$. Pak také $y_1 + y_2$ a cy_1 jsou řešení rovnice* (2.10).

Jinak řečeno, součet dvou libovolných řešení i násobek řešení reálným číslem je také řešením rovnice (2.10). Větu 2.25 lze také zobecnit na Větu 2.26.

Věta 2.26 (viz [7]) *Nechť* y_1 *je řešení rovnice* $y' = f(x)y + g_1(x)$ *a* y_2 *je řešení rovnice* $y' = f(x)y + g_2(x),\ x \in I$ *a* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Pak funkce* $c_1y_1 + c_2y_2$ *je řešením rovnice*

$$y' = f(x)y + c_1g_1(x) + c_2g_2(x).$$

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu se dají řešit různými metodami. Já se zaměřím na postup řešení LDR 1. řádu, kde homogenní rovnici budu chápat jako rovnici se separovanými proměnnými a nehomogenní rovnici budu řešit pomocí *metody variace konstanty*. Přistupme tedy nyní k samotnému hledání řešení lineární rovnice.

Obecné řešení homogenní rovnice

Nejprve je nutné vyřešit homogenní rovnici (2.10). To provedeme poměrně snadno, protože se jedná o rovnici se separovanými proměnnými (2.5) pro

$$g(y) = y, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Výsledné *obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice* budu značit symbolem $\overline{y}(x)$.

Nejprve určeme *konstantní řešení*. Platí $g(y) = 0 \iff y = 0$, tzn.

$$y(x) = 0, \quad x \in I \tag{2.12}$$

je jediné konstantní řešení, což je v souladu s Poznámkou 2.24.

Nyní budeme hledat *nekonstantní řešení*, a to v množinách $\Omega_1 = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ a $\Omega_2 = \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$.
Nejprve tedy řešení v množině Ω_1. Rovnici (2.10) upravíme na tvar

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

Po integraci dostáváme

$$\ln|y| = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C, \tag{2.13}$$

kde $C \in \mathbb{R}$. Označme nyní $G(y) = \ln|y| = \ln y$, kde $G : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ a tedy dostáváme

$$\ln y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C,$$

tzn.

$$y(x) = \mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{e}^{C}, \quad x \in I. \tag{2.14}$$

V množině Ω_2 budeme řešení hledat podobně. Dostaneme opět rovnost (2.13). Nyní označme $G(y) = \ln|y| = \ln(-y)$, kde $G : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ a tedy úpravou dostáváme

$$\ln(-y) = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C,$$

výraz odlogaritmujeme

$$-y(x) = \mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{e}^{C}$$

a tedy

$$y(x) = -\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{e}^{C}. \tag{2.15}$$

Získali jsme tedy nulové řešení (2.12), všechna kladná řešení (2.14) i všechna záporná řešení (2.15). Všechny tyto typy řešení lze zapsat jednoduše ve tvaru

$$\overline{y}(x) = K\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}, \quad x \in I, \quad K \in \mathbb{R}, \tag{2.16}$$

což je *obecné řešení homogenní rovnice.*

Partikulární řešení nehomogenní rovnice

Nyní pomocí metody variace konstanty nalezneme *partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice.* Toho dosáhneme za pomoci toho, že do rovnice (2.9) dosadíme výraz z (2.16) s tím, že konstantu K nahradíme funkcí, tedy $K = K(x)$ (odtud název metody variace konstanty). Při hledání partikulárního řešení nehomogenní rovnice, které budu označovat symbolem $Y(x)$, postupujeme následovně:

$$Y(x) = K(x)\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}, \tag{2.17}$$

což ještě zderivujeme

$$Y'(x) = K'(x)\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} + K(x)\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} f(x). \tag{2.18}$$

Funkci (2.17) dosadím do obecného předpisu LDR 1. řádu (2.9) za y a (2.18) dosadím do rovnice (2.9) za y'. Dále tedy platí:

$$K'(x)\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} + K(x)\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} f(x) = f(x)K(x)\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} + g(x).$$

Metoda variace konstanty je založena na tom, že člen $f(x)K(x)\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}$ se objeví na obou stranách rovnice a je možné jej odečíst, což značně zjednoduší rovnici. Dostáváme

$$K'(x)\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x),$$

dále na levé straně rovnice osamostatníme $K'(x)$

$$K'(x) = g(x)\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$$

a integrací určíme $K(x)$

$$K(x) = \int g(x)\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x. \tag{2.19}$$

Vztah (2.19) dosadíme do rovnice (2.17), čímž získáme *partikulární řešení nehomogenní rovnice*:

$$Y(x) = \mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} \int g(x)\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x, \quad x \in I. \tag{2.20}$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice

Posledním krokem, který je třeba učinit, je výpočet *obecného řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice*. Ten získáme součtem obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice, tedy součtem rovnic (2.16) a (2.20), tj.

$$y(x) = \overline{y}(x) + Y(x),$$

tzn.

$$y(x) = K\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} \int g(x)\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x, \quad x \in I$$

a tedy

$$y(x) = \mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\left(K + \int g(x)\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right), \quad x \in I, \tag{2.21}$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Funkce definovaná v (2.21) je obecným řešením rovnice (2.9).

2.3.3. Bernoulliova rovnice

Definice 2.27 *Bernoulliovou rovnicí* nazveme diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = f(x)y + g(x)y^{\alpha}, \tag{2.22}$$

kde f, g jsou spojité funkce na intervalu I, $\forall x \in I : g(x) \neq 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.

Poznámka 2.28 V dalším textu této sekce budu uvažovat, že $\alpha \neq 0$ a také $\alpha \neq 1$, protože pro obě tyto hodnoty α by se jednalo přímo o lineární diferenciální rovnici, jejíž řešení jsem ukázal v minulé sekci.

Poznámka 2.29 V následujícím textu se omezím pouze na hledání kladných řešení.

Bernoulliova rovnice se dá řešit více způsoby. Já se zaměřím na metodu řešení, kdy ji pomocí substituce transformuji na lineární diferenciální rovnici. V rovnici (2.22) provedu substituci

$$z = y^{1-\alpha}, \tag{2.23}$$

což je po zderivování

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$$

a následně

$$\frac{z'}{1-\alpha} = y^{-\alpha}y'. \tag{2.24}$$

Nyní vynásobím obě strany rovnice (2.22) členem $y^{-\alpha}$, tj.

$$y'y^{-\alpha} = y^{-\alpha}\left[f(x)y + g(x)y^{\alpha}\right],$$

$$y'y^{-\alpha} = f(x)y^{1-\alpha} + g(x). \tag{2.25}$$

Dále dám dohromady výrazy (2.24) a (2.25) a s využitím substituce (2.23) dostávám rovnici

$$\frac{z'}{1-\alpha} = f(x)z + g(x),$$

což po osamostatnění z' dává

$$z' = f(x)z(1-\alpha) + g(x)(1-\alpha). \tag{2.26}$$

Tato rovnice je lineární diferencíální rovnicí 1. řádu. Lze ji tedy řešit například pomocí metody variace konstanty. Po nalezení řešení z je třeba se vrátit v substituci (2.23) zpět ke hledanému řešení Bernoulliovy rovnice (2.22).

Kapitola 3

Vybrané spojité ekonomické modely

Ve třetí kapitole se zaměřím na konkrétní spojité ekonomické modely. Budu věnovat pozornost Domarovu a Solowovu modelu růstu. Při psaní této části práce jsem čerpal nejvíce z [1], ale také z [2], [3], [8] a [10].

3.1. Domarův model

Domarův model, pojmenovaný po významném ekonomovi 20. století Evseyi Domarovi, je jedním z modelů hospodářského růstu. Evseye Domara řadíme mezi keynesiánské ekonomy. O keynesiánském pojetí ekonomie jsem psal v sekci 1.4.2. Domarův model slouží k vysvětlení tempa ekonomického růstu na základě výše úspor a kapitálu. Model totiž vyjadřuje, jak se s časem mění skutečný produkt. Je jedním z modelů, které ekonomům a politikům poskytují důležité informace o stavu ekonomiky, díky čemuž mohou činit správná rozhodnutí o ekonomické strategii vůči hospodářskému růstu.

První předpoklad Domarova modelu je, že uvažujeme uzavřenou dvousektorovou ekonomiku. To znamená, že nebereme v potaz vládní zásahy, ani zahraniční obchod, ale pouze existenci dvou sektorů - firem a domácností. V dvousektorovém modelu ekonomiky platí, že v rovnovážném stavu je *agregátní poptávka* (v dalším textu budu agregátní poptávku značit AD) rovna součtu *spotřeby* domácností (C)

a *investic* firem (I). Matematicky vyjádřeno, předpokládáme platnost rovnosti

$$AD = C + I. \tag{3.1}$$

Kromě toho v rovnovážném stavu platí, že agregátní poptávka je rovna *skutečnému produktu* (Y). Platí tedy

$$AD = Y \tag{3.2}$$

a rovnice (3.1) a (3.2) můžu přepsat do tvaru

$$Y = C + I. \tag{3.3}$$

Jednou z hlavních myšlenek Domarova modelu je to, že investicemi můžeme zvýšit *výrobní kapacitu* (Q). V případě, že bude výrobní kapacita vždy plně využitá (což Domarův model vyžaduje), tak přírůstek *potenciálního produktu* (P), který je způsoben zvýšením výrobní kapacity, musí pohltit agregátní poptávka. Jestliže je ale mezní sklon ke spotřebě menší než 1, tak zvýšení spotřeby zachytí jen část zvýšení produkce a zbylou část musí zachytit další zvýšení investic. Toto zvýšení investic ale opět způsobí zvýšení výrobní kapacity a tak dále. Abychom se vyhnuli nevyužité výrobní kapacitě, je tedy nutné investice stále zvyšovat. Je důležité také poznamenat, že Domarův model závisí na čase. Všechny výše uvedené veličiny jsou tedy veličinami časové proměnné t. Pro větší přehlednost nebudu ve svém textu proměnnou t psát.

Rovnost (3.3) můžu zderivovat, což se mi bude dále hodit. Mám tedy rovnici

$$Y' = C' + I', \tag{3.4}$$

která vyjadřuje, že rychlost změny skutečného produktu je rovna rychlosti změny spotřeby a investic.

Druhým předpokladem Solowova modelu je konstantní *průměrný sklon ke spotřebě* (označuji c a platí $c \in \mathbb{R}, c > 0$), tedy předpoklad, že poměr spotřeby ke skutečnému produktu je v čase konstantní, tzn.

$$c = \frac{C}{Y}, \tag{3.5}$$

tedy platí

$$C = cY. \tag{3.6}$$

Průměrný sklon ke spotřebě lze vyjádřit i pomocí *průměrného sklonu k úsporám* (označuji s a platí $s \in \mathbb{R}, s + c = 1$), což se mi v dalším textu bude lépe hodit. Matematické vyjádření vypadá následovně

$$C = (1 - s)Y. \tag{3.7}$$

A tedy rovnici (3.4) lze za pomoci rovnice (3.7) vyjádřit jako

$$Y' = (1 - s)Y' + I'. \tag{3.8}$$

Úpravou rovnice (3.8) získávám

$$Y' = \frac{1}{s} I'. \tag{3.9}$$

Kromě toho potřebuji pomocí investic vyjádřit také potenciální produkt. Ve spojitém modelu platí

$$P' = \sigma I, \tag{3.10}$$

kde σ je koeficient ukazující, jak jednotka investic zvyšuje výrobní kapacitu Q a tím i potenciální produkt P. Za předpokladu, že kapacita produkce je plně využitá, musí být rychlost zvýšení potenciálního produktu rovno rychlosti zvýšení skutečného produktu, tedy

$$Y' = P'. \tag{3.11}$$

Máme tedy rovnice (3.9), (3.10) a (3.11), odkud lze získat rovnici

$$I' = \sigma s I. \tag{3.12}$$

Rovnice (3.12) vyjadřuje vztah, který musí platit, aby kapacita produkce byla stále plně využitá. Rovnice (3.12) je homogenní lineární diferenciální rovnice. Její řešení získám dosazením do (2.16), tj.

$$I(t) = K \mathrm{e}^{\int \sigma s \, \mathrm{d}t},$$

tedy

$$I(t) = K\mathrm{e}^{\sigma st}. \tag{3.13}$$

Pro počáteční hodnotu investic $I(0) = I_0$, kde $I_0 \in \mathbb{R}^+$ (uvažujeme, že investice mohou nabývat jen kladných hodnot), platí dle (3.13) rovnost

$$I_0 = K\mathrm{e}^{\sigma s0} = K.$$

Obecné řešení rovnice (3.12) je tedy v našem případě ve tvaru

$$I(t) = I_0\mathrm{e}^{\sigma st}. \tag{3.14}$$

Z rovnice (3.14) je zřejmé, že hodnota investice musí růst konstantní mírou $s\sigma$. Dále zintegruji obě strany rovnice (3.9) podle proměnné t, tedy

$$\int Y'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{s}I'(t)\,\mathrm{d}t,$$

z čehož dostávám rovnost

$$Y = \frac{1}{s}I + A, \tag{3.15}$$

kde $A \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Pomocí rovnosti (3.14) můžu rovnici (3.15) upravit do tvaru

$$Y(t) = \frac{1}{s}I_0 \cdot \mathrm{e}^{s\sigma t} + A.$$

Za předpokladu, že začínáme v rovnovážném stavu musí být $sY_0 = I_0$, tedy $Y_0 = \frac{1}{s}I_0$. V důsledku toho je zřejmé, že musí být $A = 0$. Takže dostáváme výslednou funkci

$$Y(t) = Y_0 \cdot \mathrm{e}^{s\sigma t}, \tag{3.16}$$

kde $t \in \langle 0, \infty)$. *Odtud je zřejmé, že také skutečný produkt Y roste mírou $s\sigma$.*

Příklad 3.1 Mějme $s = 0{,}24, \sigma = \frac{1}{3}$. Určete podle Domarova modelu, jak v čase roste skutečný produkt Y, vypočítejte hodnotu $Y(t)$ pro $t = 3$ a míru růstu Y pro $t = 3$, jestliže $I_0 = 24, Y_0 = 100$.

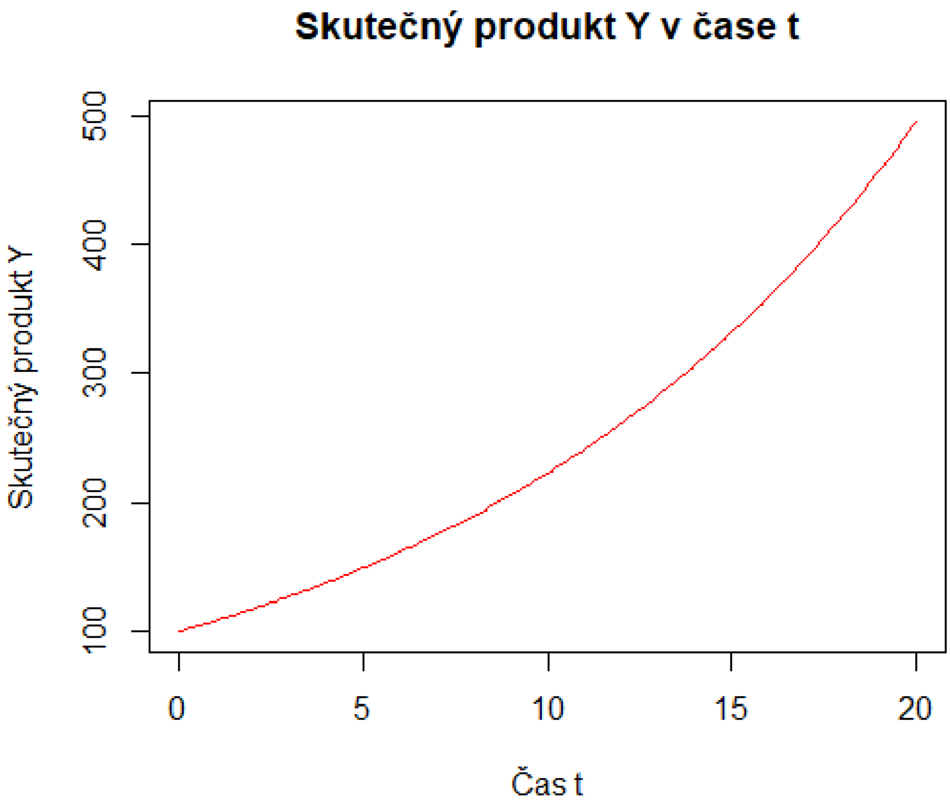
Řešení: Postup výpočtu plně odpovídá výše uvedenému odvození Domarova modelu, proto zde pouze dosadím koeficienty s a σ do výsledné rovnice (3.16), tedy

$$Y(t) = 100 \cdot \mathrm{e}^{0{,}24\frac{1}{3}t} = 100 \cdot \mathrm{e}^{0{,}08t}.$$

Odtud je zřejmé, že skutečný produkt roste mírou 0,08. Konkrétně pro $t = 3$ bude hodnota skutečného produktu následující:

$$Y(3) = 100 \cdot \mathrm{e}^{0{,}24} \approx 127{,}12.$$

Vývoj produktu Y v čase t graficky znázorňuje Obrázek 3.1.



Obrázek 3.1: Vývoj skutečného produktu v čase

3.2. Solowův model růstu

Robert Merton Solow se podobně jako Evseyi Domar zabýval ekonomickým růstem. Nejznámějším Solowovým počinem je růstový model, který se v této kapitole pokusím představit. Solowa řadíme mezi neokeynesiánce, nicméně velmi často vycházel i z neoklasického učení. A právě tomuto Solowovu modelu se někdy říká též *neoklasický růstový model*. Jedná se o velmi důležitý ekonomický model, o čemž svědčí i fakt, že za jeho vytvoření Solow obdržel roku 1987 Nobelovu cenu za ekonomii.

Cílem Solowova modelu je podobně jako u Domarova modelu popsat ekonomický růst. Model se snaží zjistit zejména dvě věci. Tou první je, zda je možné při stále plném využití pracovní síly dosáhnout *růstu skutečného produktu* Y. Druhou otázkou, kterou si model klade, je to, zda je taková situace *stabilní* (stabilitou je myšleno, že při malé změně vstupních parametrů se chování a výsledné hodnoty modelu příliš nezmění a budou konvergovat ke *stálému stavu*[1]). Můžeme vyšetřovat také specifické případy Solowova modelu, já se zaměřím na model s *Cobb-Douglasovou produkční funkcí*. Na rozdíl od Domarova modelu se navíc bude ten Solowův snažit zohlednit také *technologický pokrok*.

3.2.1. Předpoklady modelu

Prvním předpokladem Solowova modelu je, že podobně jako u Domarova modelu uvažujeme uzavřenou dvousektorovou ekonomiku, tedy existenci pouze dvou sektorů - domácností starajících se o *spotřebu* C a firem vytvářejících *investice* I, tj.

$$Y = C + I. \tag{3.17}$$

Druhým předpokladem je, že rychlost růstu skutečného produktu Y je přímo úměrná jeho velikosti, přičemž konstanta úměrnosti je $\frac{s}{k}$ (viz dále). Tedy

[1] Stálým stavem rozumíme dlouhodobý rovnovážný bod ekonomiky. Tedy bod, ve kterém by ekonomika měla skončit nezávisle na výchozích hodnotách kapitálu, za předpokladu, že je v modelu splněna stabilita.

uvažujeme vztah

$$Y' = \frac{s}{k}Y, \tag{3.18}$$

tzn.

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{s}{k}, \tag{3.19}$$

kde Y' značí rychlost růstu skutečného produktu, s je *průměrný sklon k úsporám* (*úspory* označujeme S), tedy

$$s = \frac{S}{Y}. \tag{3.20}$$

Dále k je proměnná definovaná vztahem

$$k = \frac{K'}{Y'}, \tag{3.21}$$

kde K' je rychlost změny *kapitálu*.

Třetí předpoklad říká, že rychlost změny kapitálu za krátký časový okamžik $t > 0$ je rovna hodnotě investic. Platí tedy

$$K'(t) = I(t). \tag{3.22}$$

Poznámka 3.2 V rovnovážném stavu je navíc hodnota investic rovna hodnotě úspor, tedy

$$I = S. \tag{3.23}$$

Proto také platí vztah (3.19) výše.

Čtvrtý předpoklad je, že populace roste konstantní mírou n a stejnou mírou roste také pracující populace. Za těchto předpokladů je podmínkou pro možný růst skutečného produktu při plné zaměstnanosti vztah

$$n = \frac{s}{k}.$$

Z tohoto vztahu můžeme také vyjádřit proměnnou k jako

$$k = \frac{s}{n}. \tag{3.24}$$

Pátým předpokladem Solowova modelu růstu je existence *produkční funkce*, která je *homogenní funkcí prvního stupně*.[2] Dále se v této produkční funkci předpokládá neomezená nahraditelnost mezi *kapitálem* K a *prací* L, tedy že můžeme uvažovat libovolnou výši kapitálu při odpovídajícím množství práce. Produkční funkce, se kterou pracuje Solowův model, uvažuje pouze dva faktory, kapitál K a práci L. Tvar produkční funkce je následující:

$$Y = f(K, L). \tag{3.25}$$

To lze díky faktu, že produkční funkce je homogenní funkcí prvního řádu, zapsat v takzvaném *intenzivním tvaru*

$$\frac{Y}{L} = f(r, 1), \tag{3.26}$$

kde r definované vztahem

$$r = \frac{K}{L} \tag{3.27}$$

je takzvaná *kapitálová intenzita*. Tento pojem značí průměrný objem kapitálu, který připadá pro použití jedním pracovníkem, tedy jednotkou práce.

3.2.2. Růst skutečného produktu

Nejprve se budeme zabývat první otázkou Solowova modelu, tedy zda při stále plném využití pracovní síly L můžeme dosáhnout růstu skutečného produktu Y.

Víme, že platí rovnosti (3.21) a (3.24). Bude nás zajímat, kdy platí také rovnost $k = \frac{K}{Y}$. Tu lze dále upravit pomocí dosazení produkční funkce v intenzivním tvaru (3.26), tzn.

$$k = \frac{K}{Y} = \frac{K}{Lf(r, 1)} = \frac{r}{f(r, 1)},$$

tedy

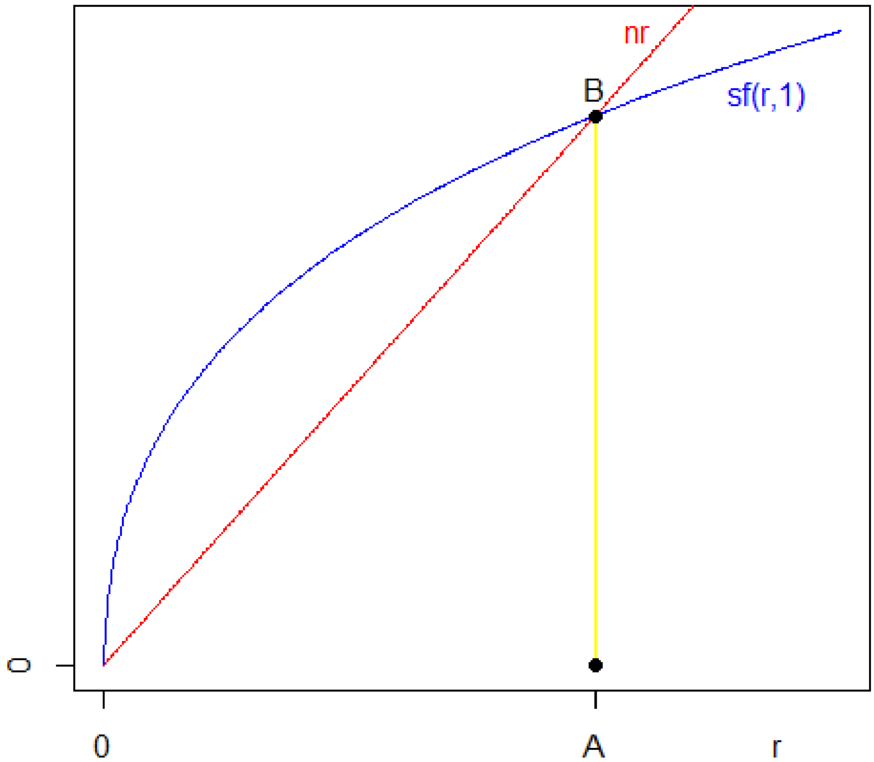
$$\frac{s}{n} = \frac{r}{f(r, 1)}, \tag{3.28}$$

[2] (viz [5]) Funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazveme *homogenní funkcí prvního stupně v* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jestliže $\forall \lambda > 0$ a $\forall x \in \Omega$ je $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

což může být zapsáno také jako

$$sf(r,1) = nr. \tag{3.29}$$

Řešením rovnice (3.28) zjistíme kapitálovou intenzitu r, tedy požadované množství kapitálu K na jednotku práce L. Rovnici (3.29) můžeme znázornit také graficky jako na Obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Grafická interpretace rovnice (3.29)

Pro vhodně zvolenou produkční funkci mají křivky $sf(r,1)$ a nr vždy právě jeden průsečík B. Tento průsečík je *stálý stav v Solowově modelu*. Hodnota A značí požadovanou výši kapitálové intenzity. Ve skutečnosti tato výše kapitálové intenzity také umožňuje růst skutečného produktu. *Růstu skutečného produktu při stále plném využití pracovní síly tedy je možné dosáhnout a bude to tehdy, když bude platit rovnost* $\frac{K}{Y} = \frac{s}{n}$.

3.2.3. Stabilita modelu

Nyní se můžeme přesunout ke druhé otázce, kterou si klademe, tedy k otázce stability. Využijeme zde také rovnice uvedené výše. Z rovnic (3.20), (3.22) a (3.23) plyne, že platí také vztah

$$K' = sY. \tag{3.30}$$

Dále, protože je stále plně využitá pracovní síla, tak platí

$$L(t) = L_0 \mathrm{e}^{nt}. \tag{3.31}$$

Z rovnic (3.27) a (3.31) můžu psát

$$K(t) = rL_0 \mathrm{e}^{nt}. \tag{3.32}$$

Derivací členů K a r podle časové proměnné t dostávám

$$K' = r'L_0 \mathrm{e}^{nt} + nrL_0 \mathrm{e}^{nt},$$

což pomocí rovnic (3.26), (3.30), (3.31) přepíšu do tvaru

$$sL_0 \mathrm{e}^{nt} f(r,1) = r'L_0 \mathrm{e}^{nt} + nrL_0 \mathrm{e}^{nt}.$$

Výraz $L_0 \mathrm{e}^{nt}$ můžeme vykrátit a dostáváme

$$sf(r,1) = r' + nr,$$

odkud vyjádříme r' jako

$$r' = sf(r,1) - nr. \tag{3.33}$$

Rovnice (3.33) je základní rovnicí Solowova modelu. Je vidět, že pokud bychom uvažovali r v rovnovážném stavu, tedy že by platila rovnost $r' = 0$, potom bychom z rovnice (3.33) dostali rovnici (3.29).

Nyní se vraťme k Obrázku 3.2. Vlevo (resp. vpravo) od bodu A je funkce $sf(r,1)$ nad (resp. pod) funkcí nr. Tedy platí $sf(r,1) - nr > 0$ (resp. $sf(r,1) - nr < 0$). Odtud a z rovnice (3.33) plyne, že vlevo (resp. vpravo) od bodu A je hodnota r' kladná (resp. záporná). Tedy hodnota r se zvyšuje (resp. snižuje), pokud je menší (resp. větší), než hodnota r v rovnovážném bodě. *Díky tomu je zaručena a dokázána stabilita.*

3.2.4. Využití Cobb-Douglasovy produkční funkce

Nyní můžeme poměrně snadno vyšetřovat specifické případy a to nahrazením obecné funkce $f(r,1)$ konkrétní funkcí. Často se využívá tzv. *Cobb-Douglasova produkční funkce*, pro kterou jsme schopni určit také předpis řešení diferenciální rovnice (3.33). Cobb-Douglasova produkční funkce má tvar

$$Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha}, \tag{3.34}$$

kde $\alpha \in (0,1)$. Pak dostáváme $f(r,1) = r^{\alpha}$. Základní obecná rovnice (3.33) vypadá následovně

$$r' = sr^{\alpha} - nr. \tag{3.35}$$

Rovnice (3.35) je Bernoulliova diferenciální rovnice. Metodu hledání jejího řešení jsem obecně popsal již v teoretické části k diferenciálním rovnicím v sekci 2.3.3. Užijeme zde tedy substituci

$$z = r^{1-\alpha}. \tag{3.36}$$

Nyní mohu přímo dosadit do odvozené rovnice (2.26), což dává v tomto konkrétním případě výslednou rovnici

$$z' + (1-\alpha)nz = s(1-\alpha). \tag{3.37}$$

Rovnice (3.37) je lineární diferenciální rovnice prvního řádu. V ní nejprve vyřeším homogenní rovnici a následně metodou variace konstanty také nehomogenní rovnici. Homogenní rovnice má tvar

$$z' = -(1-\alpha)nz. \tag{3.38}$$

Tuto rovnici vyřeším dle postupu v sekci 2.3.2 a výsledné obecné řešení homogenní rovnice bude po vzoru (2.16) vypadat následovně:

$$\overline{z} = K\mathrm{e}^{-n(1-\alpha)t}, \tag{3.39}$$

kde K je kladná konstanta, tj. $K > 0$. Pro partikulářní řešení nehomogenní rovnice platí výše odvozdený předpis (2.20). Po dosazení do něj získávám

$$Z(t) = \mathrm{e}^{-\int (1-\alpha)n\,\mathrm{d}t} \int s(1-\alpha)\mathrm{e}^{-\int -(1-\alpha)n\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t,$$

což lze upravit a zjednodušit až na tvar

$$Z(t) = \frac{s}{n}. \tag{3.40}$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice nyní získám sečtením obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice, tedy součtem rovnic (3.39) a (3.40):

$$z(t) = K\mathrm{e}^{-n(1-\alpha)t} + \frac{s}{n}. \tag{3.41}$$

Rovnice (3.41) je obecným řešením nehomogenní lineární diferenciální rovnice (3.37) Nyní se vrátím k rovnici (3.36), ze které si vyjádřím kapitálovou intenzitu r jako

$$r = z^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{3.42}$$

Do rovnice (3.42) dosadím předpis funkce z zjištěný v rovnici (3.41)

$$r(t) = \left[K\mathrm{e}^{-n(1-\alpha)t} + \frac{s}{n}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{3.43}$$

Označme r_0 jako hodnotu funkce r pro $t = 0$. Z rovnice (3.43) dostávám

$$r_0 = \left(K + \frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

odkud si vyjádřím konstantu K jako

$$K = {r_0}^{1-\alpha} - \frac{s}{n}.$$

Tento vztah mohu dosadit do rovnice (3.43) a získávám řešení rovnice (3.35), splňující počáteční podmínku $r(0) = r_0$, ve tvaru

$$r(t) = \left[\left({r_0}^{1-\alpha} - \frac{s}{n}\right)\mathrm{e}^{-n(1-\alpha)t} + \frac{s}{n}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{3.44}$$

Z rovnice (3.44) je zřejmé, že pokud n a $(1-\alpha)$ jsou kladné, tak se zvyšujícím se časem t jde výraz $({r_0}^{1-\alpha} - \frac{s}{n})\mathrm{e}^{-n(1-\alpha)t}$ do nuly a tím pádem se kapitálová intenzita r ustálí na konstantní hodnotě $\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Matematicky zapsáno platí

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

3.2.5. Zohlednění technologického pokroku

Na začátku kapitoly o Solowově modelu jsem zmiňoval, že tento model zohledňuje technologický pokrok. Ten se projevuje zvýšením produktivity práce. To znamená, že v každém čase t stejná jednotka pracovní síly produkuje více než v čase $t-$ dt. Nyní pokud budeme předpokládat, že technologický pokrok se děje stále konstantní měrou, tak můžeme n interpretovat jako míru růstu pracovní síly plus míru technologického pokroku. Práce $L = L_0 e^{nt}$ by v takovém případě byla měřena efektivními jednotkami. Další postup v analýze by byl stejný jako výše.

Obecně se dá říci, že se zvyšující se spotřebou by měl nastat ekonomický růst. Můžeme si tak klást otázku, zda pokud by byla jediným cílem společnosti maximalizace spotřeby na jednotku pracovní síly a systém by směřoval do dlouhodobého rovnovážného bodu, tedy do stálého stavu, jak bychom toho dosáhli? Odpověď na to dává takzvané zlaté pravidlo akumulace kapitálu. Při cestě do stálého stavu rostou všechny proměnné stejnou mírou n, takže platí

$$K' = nK. \tag{3.45}$$

Dále je spotřeba rovna rozdílu skutečného produktu a investic, tedy

$$C = Y - I,$$

což s využitím rovností (3.25) a (3.45) a toho, že $K' = I$ mohu přepsat do tvaru

$$C = f(K, L) - nK.$$

Protože produkční funkce je homogenní funkcí prvního řádu, a protože platí rovnost (3.27), tak mohu pokračovat v úpravě na tvar

$$\frac{C}{L} = f(r, 1) - nr.$$

Hledám maximální výši spotřeby na jednotku práce, tedy maximum výrazu $\frac{C}{L}$. Zderivuji tedy funkci a položím ji rovnu nule, čímž najdu stacionární bod a tím také nutnou podmínku maxima. Tedy

$$\frac{\mathrm{d}[f(r, 1) - nr]}{\mathrm{d}r} = \frac{\partial f}{\partial K}(r, 1) - n = 0. \tag{3.46}$$

Pro druhou derivaci správně se chovající produkční funkce platí $\frac{\partial^2 f(r,1)}{\partial K} < 0$, proto je stacionární bod daný rovnicí (3.46) ostrým lokálním maximem. Výraz $\frac{\partial f(r,1)}{\partial K}$ nazýváme *marginální produkt kapitálu.* Zlaté pravidlo tedy říká, že maximalizace spotřeby na jednotku práce dosáhneme, když se marginální produkt kapitálu $\frac{\partial f(r,1)}{\partial K}$ vyrovná míře růstu pracovní síly n.

Příklad 3.3 Předpokládejme agregátní produkční funkci ve tvaru $Y = K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}}$, míru růstu pracovní síly $n = 0{,}05$ a průměrný sklon k úsporám $s = 0{,}2$. Vyřešte následující úkoly:

(a) Vypočítejte poměr kapitálu a skutečného produktu musí být, aby mohl při plné zaměstnanosti nastat růst skutečného produktu.

(b) Vypočítejte odpovídající hodnotu kapitálové intenzity.

(c) Vyřešte diferenciální rovnici dle Solowova modelu a ukažte, že je rovnovážný bod stabilní.

Řešení: Hledáme poměr $\frac{K}{Y}$, který splňuje podmínku $k = \frac{K}{Y} = \frac{s}{n}$. Tedy vypočítám $k = \frac{s}{n} = \frac{0{,}2}{0{,}05} = 4$, což je odpověď na otázku (a).
V otázce (b) hledáme poměr $r = \frac{K}{L}$, tedy objem kapitálu připadající na jednotku práce. Známe již poměr $k = \frac{K}{Y}$, tak do něj dosadíme produkční funkci $Y = K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}}$ a dostáváme $\frac{K}{Y} = \frac{K}{K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{3}}$. Pro poměr $\frac{K}{L}$ tedy platí $\frac{K}{L} = \left(\frac{K}{Y}\right)^3 = 4^3 = 64$.
Po dosazení známých hodnot má diferenciální rovnice (3.35) tvar

$$r' = 0{,}2 r^{\frac{2}{3}} - 0{,}05 r.$$

Rovnici vyřešíme dle postupu výše metodou variace konstanty s využitím substituce. Výslednou rovnicí je

$$r(t) = \left[A\mathrm{e}^{-0{,}05\left(1-\frac{2}{3}\right)t} + \frac{0{,}2}{0{,}05}\right]^{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}} = \left[A\mathrm{e}^{\frac{-0{,}05}{3}t} + 4\right]^3.$$

Pro $t \to \infty$ jde výraz $A\mathrm{e}^{\frac{-0{,}05}{3}t}$ do nuly. Proto jde $r(t)$ limitně do hodnoty $4^3 = 64$, což je stálý stav, tedy dlouhodobá stabilní rovnovážná hodnota.

Závěr

Téma mé bakalářské práce jsem si zvolil po konzultaci s panem docentem Tomečkem, protože jsem chtěl skloubit svou matematickou část studia s ekonomickou a zjistit, jak se teorie z matematické analýzy dá využít v ekonomii. Práce z mého pohledu splnila účel a jsem rád, že jsem mohl okusit matematicko-ekonomickou symbiózu na vlastní kůži. Věřím, že také čtenář, který práci otevřel s úmyslem najít praktický příklad využití matematiky v ekonomii, zde našel, po čem toužil. Kromě ukázky aplikace matematiky v ekonomii mi práce pomohla rozšířit obzory v teorii matematické i ekonomické a naučila mě generovat obrázky grafů v programu R.

V první kapitole jsem se věnoval ekonomické teorii. Popsal jsem stručně, jakou roli hraje na ekonomickém trhu poptávka a nabídka a vysvětlil jsem pojem rovnováhy na trhu. Další část první kapitoly byla věnována hospodářskému růstu a faktorům, které jej mohou ovlivnit. V poslední části ekonomické teorie jsem popsal, jaký přístup k ekonomii razí neoklasická a keynesiánská škola.

Druhá kapitola byla zaměřena na teorii diferenciálních rovnic. V ní jsem nejprve vysvětlil základní pojmy, následně jsem se věnoval existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy. V poslední části jsem ukázal vybrané typy diferenciálních rovnic prvního řádu a způsoby, jak nalézt jejich řešení. Konkrétně šlo o diferenciální rovnice se separovanými proměnnými, lineární diferenciální rovnice 1. řádu řešené metodou variace konstanty a Bernoulliovu rovnici.

Třetí část jsem věnoval vybraným spojitým modelům ekonomického růstu. Prvním z nich byl Domarův model, který vysvětloval tempo růstu na základě výše úspor a kapitálu. O něco komplexnější byl Solowův model růstu, který na rozdíl od Domarova modelu zohlednil také technologický pokrok. V obou modelech jsem využil grafického znázornění vygenerovaného programem R.

Literatura

[1] GANDOLFO, Giancarlo. *Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1971. ISBN 978-0720430530.

[2] JUREČKA, Václav, Karel HLAVÁČEK, Ivana JÁNOŠÍKOVÁ, Eva KOLCUNOVÁ, Martin MACHÁČEK, Irena PALIČKOVÁ, Lenka SPÁČILOVÁ a Milan ŠIMEK. *Úvod do ekonomie: učební text pro studenty neekonomických oborů*. 4. aktualizované vydání. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2015. ISBN 978-80-248-3731-4.

[3] BRČÁK, Josef a Bohuslav SEKERKA. *Makroekonomie*. Plzeň: Vydavatelství a nakladatelství Aleš Čeněk, 2010. ISBN 978-80-7380-245-5.

[4] KALAS, Josef a Miloš RÁB. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Brno: Vydavatelství Masarykovy univerzity, 1995. ISBN 80-210-1130-0.

[5] KOPÁČEK, Jiří. *Matematická analýza pro fyziky (II)*. Vyd. 2. Praha: Matfyzpress, 2003. ISBN 80-867-3210-X.

[6] FIŠER, Jiří. *Úvod do teorie obyčejných diferenciálních a diferenčních rovnic*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013. ISBN 978-80-244-3401-8.

[7] KUBEN, Jaromír. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1995. ISBN 80-706-7535-7.

[8] ZHANG, Wei-Bin. *Economic Dynamics: Growth and Development*. Berlín: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990. ISBN 978-3-540-53217-0.

[9] PAVELKA, Tomáš. *Makroekonomie: Základní kurz*. II. vydání. Praha: MELANDRIUM, 2007. ISBN 978-80-86175-52-2.

[10] HOLMAN, Robert. *Dějiny ekonomického myšlení*. 2. vyd. Praha: C.H. Beck, 2001. Beckovy ekonomické učebnice. ISBN 80-717-9631-X.

[11] KOUŘILOVÁ, Pavla a Martina PAVLAČKOVÁ. *Základy matematické analýzy a jejich aplikace v ekonomii*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013. ISBN 978-80-244-3317-2.

[12] TOMEČEK, Jan. *Matematická analýza 2*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2020. ISBN 978-80-244-5853-3.