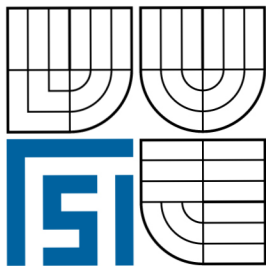


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV PROCESNÍHO A EKOLOGICKÉHO  
INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF PROCEDURAL AND ECOLOGICAL ENGINEERING

**METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ**  
**V IDENTIFIKACI DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ**  
LEAST-SQUARES METHOD IN SYSTEM IDENTIFICATION

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**  
BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**  
AUTHOR

**JIŘÍ MATĚJKA**

**VEDOUcí PRÁCE**  
SUPERVISOR

**ING. VÍTĚZSLAV MÁŠA**

BRNO 2009

## **ABSTRAKT**

Bakalářská práce se zabývá popisem metody nejmenších čtverců a její aplikací v identifikaci dynamických systémů. Předkládá matematické odvození metody nejmenších čtverců a teoretické základy experimentální identifikace systémů. Jako případová studie je v práci realizována parametrizace matematického modelu přívodu spalovacího vzduchu na reálné experimentální jednotce pro spalování biomasy.

## **ABSTRACT**

This bachelor thesis deals with the description of the least squares method and its application in system identification of dynamic processes. It contains mathematical derivation of least squares method and basic principles of system identification. It describes parametrization of an mathematical model of experimental unit for biomass combustion .

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

identifikace, metoda nejmenších čtverců, ARX model

## **KEYWORDS**

identification, least squares method, ARX model

## **PODĚKOVÁNÍ**

Chtěl bych poděkovat vedoucímu práce Ing. Vítězslavu Mášovi za rady a odborné připomínky, kterými mi velmi v přípravě práce pomohl.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu, ze kterých jsem čerpal.

Brno, květen 2009

Jiří Matějka

# Obsah

1 Úvod.....	6
2 Identifikace systémů.....	7
2.1 Základní pojmy.....	7
2.2 Rozdělení identifikačních metod.....	8
2.2.1 Analytická a experimentální identifikace.....	8
2.2.2 Diskrétní versus spojitý popis.....	8
2.2.3 Postup při zpracování dat.....	9
2.2.4 Typ použitého vstupního signálu.....	9
2.3 Postup experimentální identifikace.....	9
2.4 Struktury modelů.....	10
2.4.1 Fyzikální a „Black-box“ modely.....	10
2.4.2 Parametrické a neparametrické modely.....	11
2.4.3 Lineární a nelineární modely.....	11
2.4.4 Obecný tvar lineárního modelu.....	11
2.4.5 ARMAX.....	13
2.4.6 ARX.....	13
2.4.7 OE (Output Error).....	13
2.4.8 BJ (Box-Jenkins).....	14
2.5 Identifikace systému odhadem parametrů modelu.....	14
3 Metoda nejmenších čtverců.....	17
3.1 Aproximace přímkou.....	17
3.2 Kritérium metody.....	18
3.3 Metoda nejmenších čtverců v identifikaci systémů.....	18
3.4 Odhad parametrů metodou nejmenších čtverců.....	18
4 Případová studie.....	20
4.1 Jednotka pro spalování biomasy.....	20
4.2 Naměřená data.....	21
4.3 Kritérium kvality modelu.....	22
4.4 Identifikace.....	22
4.5 Výsledky identifikace.....	23
5 Závěr.....	25
6 Literatura.....	26
7 Seznam příloh.....	27
8 Příloha A.....	28



# 1 Úvod

Podobně jako u technologie a konstrukce tepelných zdrojů dochází k postupným změnám také v oblasti řízení. Byly vyvinuty nové formy řízení obecně označované jako moderní metody řízení (*Advanced Process Control*). Používány bývají především při řízení systémů s větším počtem vstupů a výstupů a v oblasti diskrétního řízení. Některé z těchto nových přístupů se zdají být velmi slibné v průmyslových aplikacích a vzbuzují stále vyšší zájem mezi výzkumnými pracovníky[8].

Širšímu využití těchto moderních metod řízení brání kromě technické i ekonomické náročnosti jejich vývoje zejména nedostatek vhodných dynamických modelů tohoto procesu. Pro testování a případnou implementaci moderních metod řízení (stavové řízení, MPC, aj.) je totiž zpravidla nezbytná znalost modelu regulované soustavy a tento model je pro jejich aplikaci nejprve nutné sestavit. Tato práce se zaměřuje právě na tuto překážku.

Model dynamického systému je určité pravidlo, podle něhož můžeme z předem známých nebo změřených veličin vypočítat časový průběh sledovaných veličin systému. Lze říci, že úkolem modelu je co nejspíšeji predikovat či reprodukovat chování systému[7]. Význam takového modelu se ukazuje i tam, kde je požadována optimalizace parametrů klasické PID regulace (PID tuning) a není možné rozsáhlejší testování v provozním měřítku.

Dynamické matematické modely pro účely řízení lze efektivně získat tzv. *experimentální identifikací*.

Výzkumná činnost v oblasti automatického řízení se v posledních letech zaměřuje právě na metody identifikace v diskrétní časové oblasti[7]. Využití identifikace za účelem sestavení modelu konkrétního technologického celku je předmětem praktické části této práce. Teoretickým úvodem do problematiky se zabývá následující kapitola.

Poznámka. Vektory jsou v práci značeny tučným písmem.





## 2 Identifikace systémů

Identifikace systémů pro nějaký reálný systém hledá jeho model, který by co nejpřesněji popisoval jeho chování, to znamená, aby pro dané vstupy se výstup modelu co nejvíce blížil výstupu reálného systému.

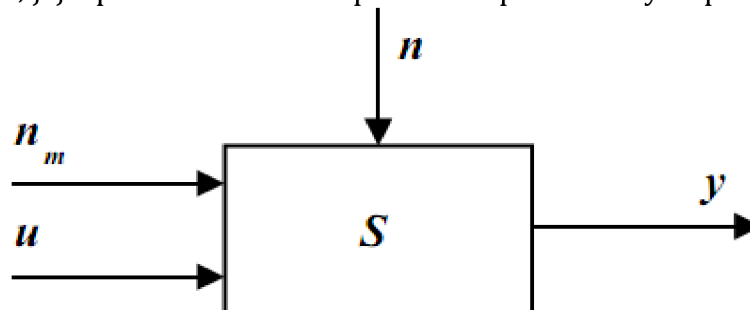
Takovýto model je možno využít k mnoha účelům, například k odhadu výstupů, které nemůžeme měřit, lepšímu porozumění systému nebo testování hypotéz (např. diagnóz v medicíně)[1].

V této kapitole je uvedeno rozdělení identifikačních metod, identifikační postup, struktury a druhy modelů. Kapitola byla sestavena na základě odborné literatury [2], [5] a [6].

### 2.1 Základní pojmy

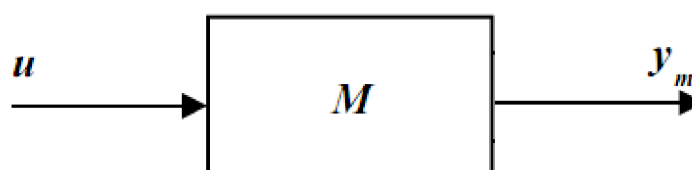
*Systém* je soustava, nebo proces, který považujeme za celek. Charakteristiky systému jsou následující:

- vstup systému  $u$ , což jsou veličiny, jejichž průběh v čase známe a můžeme ho ovlivňovat,
- výstup systému  $y$ , neboli chování systému,
- porucha  $n_m$ , kterou změříme již na vstupu, tzv. *měřitelná porucha*,
- porucha  $n$ , jejíž působení můžeme pozorovat pouze na výstupu.



Obr. 1: Systém.

*Model* je pravidlo (např. rovnice), podle kterého můžeme ze známých (změřených) veličin systému vypočítat další veličiny, které by se měly dostatečně přesně blížít skutečným hodnotám systému. Typicky ze známého vstupu  $u$  spočítáme  $y_m$ , výstup modelu, který se bude blížít  $y$ . Úkolem modelu je tedy co nejméně předpovědět (reprodukovat) chování systému.



Obr. 2: Model

## 2.2 Rozdělení identifikačních metod

Identifikace se rozděluje se podle několika kritérií. Základním kritériem je rozdělení na analytickou a experimentální identifikaci.

### 2.2.1 Analytická a experimentální identifikace

Analytická a experimentální identifikace jsou dva odlišné přístupy, které však umožňují vzájemnou kombinaci. V posledních letech nastal značný rozvoj metod experimentální identifikace.

#### *Analytická identifikace*

sestavuje model na základě matematicko-fyzikální analýzy studovaného systému. Systém je detailně zkoumán a pro každou část jsou sestaveny fyzikální rovnice popisující jeho chování. To ovšem vyžaduje hlubokou znalost fyzikálním pochodů v systému.

Pro složitější systémy je analytický model dosti komplikovaný a počet parametrů modelu je vysoký. To s sebou nese nízkou rychlost vyhodnocování modelu. Na druhou stranu parametry mají jasný fyzikální význam a přesnost výsledků je vysoká, a model má širokou platnost. Takto vytvořený model se nazývá *white-box* model.

Analytická identifikace umožňuje simulovat dynamické vlastnosti systému ještě před jeho zhotovením. Závěry simulace mohou přispět ke konstrukci systému, např. dimenzování zařízení a podobně.

#### *Experimentální identifikace*

považuje identifikovaný systém za černou skříňku (výsledkem je tzv. *black-box* model). Aproximuje chování systému bez znalosti vnitřních pochodů systému. Platí však, že čím širší znalosti o zkoumaném systému máme k dispozici, tím lépe je možno připravit identifikační experiment a tak sestavit přesnější matematický model.

Při experimentální identifikaci působíme na systém pomocí vhodného vstupního signálu a zaznamenáváme jeho výstup. Z těchto hodnot určíme parametry modelu (tzv. *parametrizace*).

Oproti analytické identifikaci musí být systém zkonstruován. Počet parametrů systému je menší než u analytické identifikace, ale parametry nemají jasný fyzikální význam, a tudíž jsou bezrozměrné.

V této práci se v souladu se zadáním práce zabýváme metodou experimentální identifikace.

### 2.2.2 Diskrétní versus spojitý popis

Reálné systémy existují převážně ve spojitě časové oblasti, proto tradiční přístup k modelování takových systémů je popis systému diferenciálními rovnicemi. Simulace diskrétních modelů na počítačích je však mnohem rychlejší, což diskrétní

modely předurčuje pro řízení v reálném čase. Pro popis modelu se používají diferenční rovnice. V této práci se zabýváme identifikací v diskrétní časové oblasti, protože samotnou parametrizaci systému jsme provedli na počítači.

### 2.2.3 Postup při zpracování dat

*Offline* identifikace pracuje tak, že nejdříve v experimentu naměříme data, a až poté jednorázově provedeme identifikaci. Nevýhoda offline identifikace je, že při výpočtu potřebujeme mít veškerá data v paměti.

*Online* identifikace probíhá v reálném čase při připojení počítače ke sledovanému systému. Výhodou je, že získáváme odhad modelu v reálném čase již po provedení několika málo počátečních měření, byť zpočátku to nemusí být přesný odhad.

Tato práce využívá vzhledem ke své praktické části offline identifikaci.

### 2.2.4 Typ použitého vstupního signálu

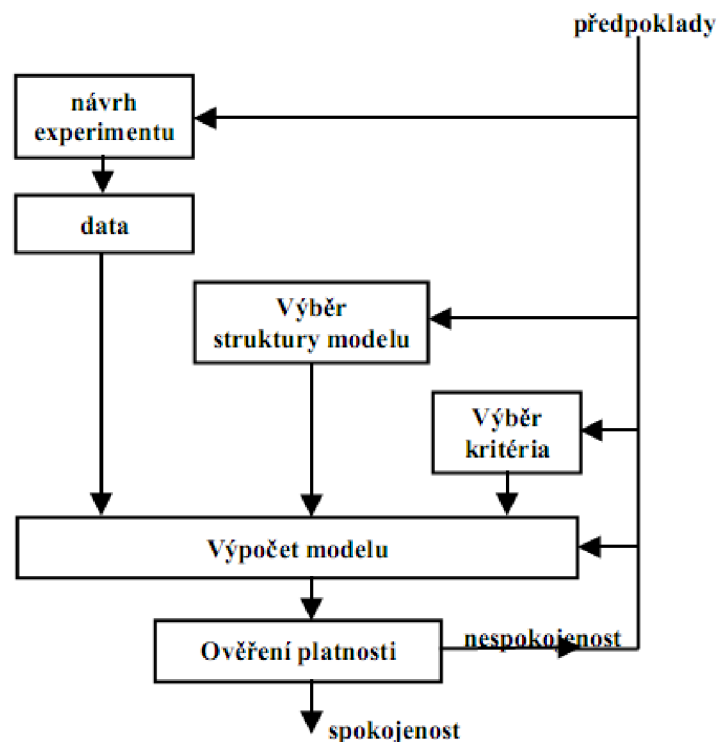
Vstupní signál může být *deterministický*, tedy takový, který lze popsat analyticky - např. skokovou změnou. Může být vytvořen uměle naší záměrnou činností. Naproti tomu *stochastický* signál je náhodný signál, popsáný rozptylem a střední hodnotou. Pro potřeby identifikace je vhodné používat vstupní signál, který vykazuje větší množství odchylek od rovnovážné hodnoty.

## 2.3 Postup experimentální identifikace

Experimentální identifikace je ustálený postup, který sestává z kroků v logickém pořadí, které se mohou opakovat. Schéma postupu je na obr. 3.

1. Naměříme data na reálném systému.
2. Zvolíme vhodný typ modelu, podle typu modelovaného systému a poruchách, které na něj působí.
3. Zvolíme vhodné kritérium kvality – nastavíme přesnost, s jakou chceme model sestavit, tedy jak moc se může výstup modelu lišit od výstupu systému.
4. Vytvoříme model. U parametrických modelů tedy odhadneme parametry modelu. K tomu potřebujeme data (vstup a výstup). Odhad lze provést následujícími metodami:
  - Analýza přechodové a frekvenční charakteristiky. Jedny z nejpoužívanějších metod pro neparаметrické modely. Používají se tehdy, je-li náhodný šum na vstupu soustavy zanedbatelný.
  - Metoda maximální věrohodnosti, která pochází ze statistiky.
  - Metoda nejmenších čtverců a její modifikace. Touto metodou se blíže zabýváme v této práci. Používá se pro parametrické systémy a dává dobré výsledky. Lze ji dobře programově implementovat.
  - Metoda korelační a spektrální analýzy (analýza odezvy na Dirakovův impuls).[1]

5. Otestujeme věrnost modelu oproti systému, a to tak, že porovnáme výstupy systému a modelu, které byly vybuzeny stejnými vstupy. Pokud kritérium kvality selže, vrátíme se do některého z předchozích kroků – zvolíme jiný model, upravíme kritérium. Je také možné, že změřená data nepostačují k dobrému odhadu modelu, např. proto, že reálný systém nebyl při měření dostatečně vybuzen. Pak je třeba provést nové měření.



Obr. 3: Proces identifikace[7]

## 2.4 Struktury modelů

Výběr vhodného modelu patří mezi nejdůležitější kroky v procesu identifikace. Pomůže nám dobrá znalost identifikovaného systému a také dřívější zkušenosti. V praxi se testuje několik různých kandidátů. Uvedeme zde rozdělení typů modelů a několik používaných modelů.

### 2.4.1 Fyzikální a „Black-box“ modely

*Fyzikální model* je výsledkem analytické identifikace, „*black-box*“ model je výsledkem experimentální identifikace. Tyto dva přístupy jsou popsány v části 2.2.1.

### 2.4.2 Parametrické a neparametrické modely

*Parametrické modely* mají danou strukturu a jsou představovány diferenciálními rovnicemi, diferenčními rovnicemi, nebo přenosy. Tyto rovnice obsahují vektor parametrů značený  $\Theta$ , které mění chování modelu. Identifikace pro takovýto model spočívá v určení parametrů modelu. V naší práci používáme parametrický model ARX.

*Neparametrické modely* představují nejčastěji funkční závislost mezi vstupním a výstupním signálem a mohou být určeny graficky nebo tabulkou hodnot. V takovém případě nejsou parametry v modelu přítomny explicitně.

### 2.4.3 Lineární a nelineární modely

Rozlišujeme dvojí linearitu modelů: ve vstupech a v parametrech. Model je lineární ve vstupech, jestliže platí

$$y_m(t, \Theta, \lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda y_m(t, \Theta, u_1) + \mu y_m(t, \Theta, u_2),$$

kde  $y_m$  je výstup modelu v čase  $t$ ,  $\Theta$  je vektor parametrů,  $u_1, u_2$  jsou vstupy. Můžeme ekvivalentně říci, že výstup modelu splňuje princip superpozice s ohledem na vstupy. Předpokládáme zde model s parametry nezávislými na čase.

Model je lineární v parametrech, jestliže platí

$$y_m(t, \lambda \Theta_1 + \mu \Theta_2, u) = \lambda y_m(t, \Theta_1, u) + \mu y_m(t, \Theta_2, u),$$

tedy výstupy modelu splňují princip superpozice s ohledem na parametry.

Je vhodné vždy preferovat lineární modely. Pro modely lineární ve vstupech existuje rozsáhlá matematická teorie. V naší práci pracujeme s lineárním modelem ARX (viz dále).

### 2.4.4 Obecný tvar lineárního modelu

Tvar diskrétního lineárního parametrického modelu s jedním vstupem a jedním výstupem je podle [5] ve tvaru diferenční rovnice:

$$y_m(k) + a_1 y_m(k-1) + \dots + a_n y_m(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m), \quad (1)$$

kde koeficienty  $a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$  se nazývají *parametry modelu*, a naším úkolem je jejich určení.  $k$  je diskrétní čas.  $y_m(k)$  značí výstup modelu v čase  $k$ ,  $u(k)$  je vstup v čase  $k$ .

Systém je fyzikálně realizovatelný, když  $a_0 = 1$ , nebo je-li  $b_0 \neq 0$ , pak  $a_0 \neq 0$  [6]. Je to proto, že nelze počítat hodnotu výstupu z budoucích hodnot vstupu.

Výstup modelu v čase  $k$ ,  $y_m(k)$ , se dá vyjádřit jako

$$y_m(k) = \sum_{i=1}^n a_i y_m(k-i) + \sum_{i=0}^m b_i u(k-i), \quad (2)$$

a po aplikaci Z-transformace

$$Y_m(z) = -Y_m(z)(a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) + U(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-m}). \quad (3)$$

Je zavedeno značení polynomů

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$$

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}.$$

Diskrétní přenos potom vyjádříme jako podíl obrazu vstupu a výstupu v Z - transformaci při nulových počátečních podmínkách

$$G_m(z) = \frac{Y_m(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}. \quad (4)$$

### Poruchy

Chceme-li reflektovat měřitelnou chybu výstupu, tedy nedeterministickou (stochastickou) část systému, musíme do rovnice přidat poruchový signál, který působí na výstupu systému, tvaru

$$R_m(z) = G_r(z) \cdot \varepsilon(z).$$

Pokud je model přesně nastaven, výstupní signál modelu souhlasí s měřitelným výstupním signálem skutečného systému:

$$y(k) = y_m(k) + r_m(k).$$

Po dosazení za  $r_m(k)$  dostaneme

$$Y(z) = Y_m(z) + G_r(z) \varepsilon(z).$$

Deterministická část je popsána přenosem  $G_m(z)$ , stochastická část přenosem  $G_r(z)$ . Přenos  $G_r(z)$  se obecně volí ve tvaru

$$G_r(z) = \frac{C(z)}{A(z)D(z)}, \quad (5)$$

kde zavedené polynomy jsou rovny

$$C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n}$$

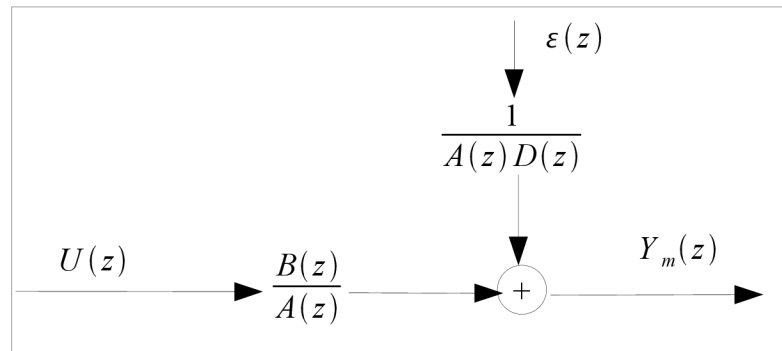
$$D(z) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_n z^{-n}.$$

Obecný tvar modelu včetně chyby je tedy

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U(z) + \frac{C(z)}{A(z)D(z)} \varepsilon(z). \quad (6)$$

Když dosadíme 1 za některé z polynomů A, B, C, D, dostaneme zjednodušené modely, které dále rozebereme.

Koeficienty polynomů A, B, C, D jsou parametry modelu.



Obr. 4: Obecná struktura modelu

### 2.4.5 ARMAX

Přenos tohoto modelu je tvaru

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U(z) + \frac{C(z)}{A(z)} \varepsilon(z). \quad (7)$$

Popisuje dynamické chování poruchových veličin. Hodí se v případě, že poruchové veličiny významněji ovlivňují a jsou měřitelné stejně jako vstupní veličiny. Název je zkratka z „Auto-Regressive Moving Average with eXogenous variable“, což znamená autoregresivní model s klouzavým průměrem s externí proměnnou.

### 2.4.6 ARX

Model ARX má přenos ve tvaru

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U(z) + \frac{1}{A(z)} \varepsilon(z). \quad (8)$$

ARX je nejjednodušší model zahrnující budicí signál. Tato práce pracuje podle zadání s tímto modelem.

### 2.4.7 OE (Output Error)

Tento model nepoužívá žádné parametry pro modelování poruch, tedy neuvažuje dynamiku poruchy. Jeho přenos je ve tvaru

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U(z) + \varepsilon(z). \quad (9)$$

### 2.4.8 BJ (Box-Jenkins)

Tento model má přenos

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U(z) + \frac{C(z)}{D(z)} \varepsilon(z). \quad (10)$$

Poruchy jsou zde modelovány odděleně od dynamiky systému.

## 2.5 Identifikace systému odhadem parametrů modelu

Metody identifikace odhadem parametrů umožňují stanovit parametry modelu zvolené struktury (např. stupeň polynomu, dopravní zpoždění apod.) ze změřené posloupnosti vstupů a výstupů.

Metody předpokládají diskrétní měření signálů, v důsledku čehož uvažujeme dvojici vstupu a výstupu  $y(k)$ ,  $u(k)$  v čase  $k \geq 0$ .

Odvození pro názornost provedeme pro model OE s jedním vstupem a výstupem.

**Poznámka:** hodnoty výstupu modelu  $y_m$  zde budeme pro jednoduchost značit pouze  $y$ , protože nehrozí nejednoznačnost s výstupem reálného systému.

Budeme uvažovat model v následujícím tvaru diferenční rovnice:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m) + e(k) \quad (11)$$

Pokud je model ve tvaru Z přenosu, je možno ho snadno na diferenční rovnici převést. Značkou  $n$ , resp.  $m$  budeme značit počet hodnot vstupů resp. výstupů v minulosti, které bere náš model v úvahu. Jedná se o řád polynomů A a B v zápisu modelu ve tvaru Z přenosu.

Parametry soustředíme do vektoru parametrů

$$\Theta = [a_1 \ a_2 \dots a_n \mid b_0 \ b_1 \dots b_m]^T.$$

Vektor hodnot minulých vstupů a výstupů soustředíme do vektoru

$$\psi(k) = [-y(k-1) \ \dots \ -y(k-n) \mid u(k) \ u(k-1) \ \dots \ u(k-m)]^T.$$

Potom můžeme rovnici (11) zapsat jako

$$y(k) = \psi(k)^T \cdot \Theta + \varepsilon(k). \quad (12)$$

### Dopravní zpoždění

Před dalším odvozením zavedeme *dopravní zpoždění*. Je to zpoždění, se kterým se projeví změna na výstupu, pokud provedeme změnu na vstupu. Identifikujeme diskrétní model, to znamená, že měření probíhá v časových intervalech daných



periodou vzorkování  $T_{vz}$ . Systém má nějaké dopravní zpoždění  $T_d$ , ale protože vzorkujeme, poznáme změnu na výstupu pouze v diskrétních časových bodech. Dopravní zpoždění je tedy určeno vztahem

$$d = \left\lceil \frac{T_d}{T_{vz}} \right\rceil.$$

Dopravní zpoždění zahrneme do rovnice modelu tak, že upravíme vektor vstupů a výstupů pomocí  $d$  na

$$\boldsymbol{\psi}(k) = [-y(k-1) \dots -y(k-n) \mid u(k-d) \ u(k-d-1) \dots u(k-d-m)]^T,$$

což znamená, že hodnoty vstupu bereme v potaz se zpožděním  $d$ , neboli v čase  $k$  uvažujeme hodnotu vstupu  $u(k-d)$ , tedy posunutou o  $d$  časových jednotek do minulosti.

Nadále nebudeme dopravní zpoždění uvažovat, protože je možné jej z rovnic jednoduše vyloučit „ručním“ posunutím vstupů oproti výstupům o  $d$ .

Při experimentální fázi identifikace změříme soubor dvojic vstupů a výstupů, jeho velikost budeme značit  $N$ . Diskrétní čas tedy bude nabývat hodnot  $k = 1, 2, \dots, N$ . Definujeme  $y(k) = 0$  a  $u(k) = 0$  pro  $k < 0$ . Pro situaci v každém čase můžeme sestavit jednu rovnici popisující chování modelu. Můžeme tak sestavit  $N$  lineárních rovnic o  $2n + 1$  neznámých

$$\begin{aligned} y(0) &= b_0 u(0) \\ y(1) &= -a_1 y(0) + b_0 u(0) + b_1 u(1) \\ y(2) &= -a_1 y(0) - a_2 y(1) + b_0 u(0) + b_1 u(1) + b_2 u(2) \\ &\vdots \\ y(k) &= -a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-m) \\ &\vdots \\ y(N) &= -a_1 y(N-1) - \dots - a_n y(N-n) + b_0 u(N) + b_1 u(N-1) + \dots + b_n u(N-m) \end{aligned} \quad (13)$$

Ve vektorovém zápisu můžeme napsat

$$\begin{aligned} y(0) &= \boldsymbol{\psi}(0)^T \cdot \boldsymbol{\Theta} + \varepsilon(0) \\ &\vdots \\ y(k) &= \boldsymbol{\psi}(k)^T \cdot \boldsymbol{\Theta} + \varepsilon(k) \\ &\vdots \\ y(N) &= \boldsymbol{\psi}(N)^T \cdot \boldsymbol{\Theta} + \varepsilon(N) \end{aligned} \quad (14)$$

Soustavu rovnic převedeme na matici. Zavedeme matici dat  $\boldsymbol{\Psi}$ , která je typu  $N \times n + m + 1$ .

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi^T(0) \\ \psi^T(1) \\ \vdots \\ \psi^T(k) \\ \vdots \\ \psi^T(N) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Hodnoty výstupu shrneme do sloupcového vektoru

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(i) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix},$$

hodnoty chyby do vektoru

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon(0) \\ \varepsilon(1) \\ \vdots \\ \varepsilon(i) \\ \vdots \\ \varepsilon(N) \end{bmatrix}.$$

Potom se zápis soustavy rovnic zjednoduší na tvar

$$\mathbf{y} = \Psi \cdot \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (16)$$

Tato soustava má  $N$  rovnic o  $n + m + 1$  neznámých z vektoru  $\boldsymbol{\Theta}$ , což jsou parametry modelu.

Dále předpokládáme, že matice  $\Psi$  bude mít lineárně nezávislé řádky. Toho docílíme tehdy, když je reálný systém vybuzen dostatečně velkou skokovou změnou vstupní veličiny. Potom platí následující:

Pokud bude  $N < n + m + 1$ , nebude mít soustava žádné řešení. Pokud  $N = n + m + 1$ , potom bude mít soustava řešení, ale toto řešení nebude příliš spolehlivé. Pro jiná data než na kterých byl systém identifikován může model dávat velkou chybu.

Proto se doporučuje použít větší počet měření. Volí se  $N \gg n + m + 1$ , soustava je tedy *přeurčená* a nemá přesné řešení. Ke zjištění přibližného řešení takového, aby chyba byla co nejmenší, můžeme použít např. metodu nejmenších čtverců, která je popsána dále.

## 3 Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců je aproximační metoda, která vstupními daty (např. empiricky zjištěnými) proloží co nejpřesněji křivku, která je funkcí zvoleného typu. Kritériem pro co nejpřesnější proložení je v této metodě součet čtverců odchylek od prokládaných dat.

Aproximace znamená, že funkce nemusí procházet přesně sledovanými daty. Naproti tomu u interpolace funkce musí procházet přesně.

Metoda nejmenších čtverců může vypočítat aproximaci mnoha druhů funkcí, např. přímkou, logaritmickou, a především polynomem libovolného stupně.

Nejprve zde uvedeme nejjednodušší případ aproximace.

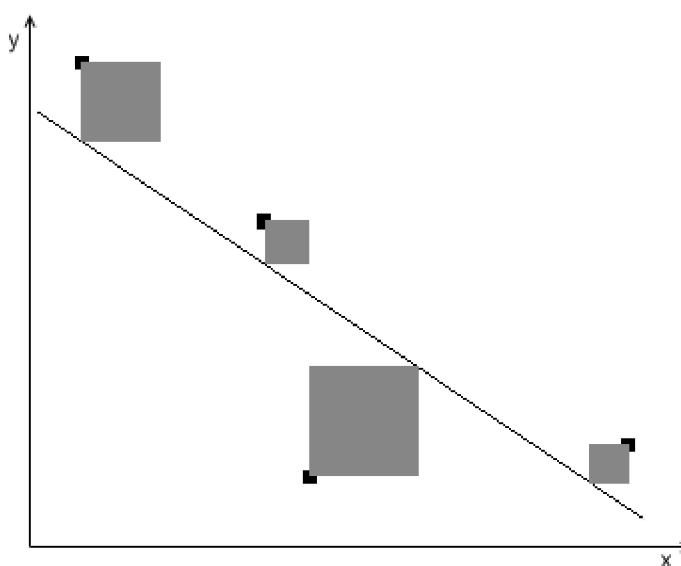
### 3.1 Aproximace přímkou

Předpokládejme vstupní data jako  $n$  dvojic hodnot  $(x_i, y_i), 1 \leq i \leq n$ . Budeme chtít jimi proložit přímkou  $y(x) = k \cdot x + q$ , tedy lineární funkci jedné proměnné.

Rovnice přímky  $y(x) = k \cdot x + q$  je určena čísly  $k, q$ . Ty se určí z množiny naměřených dat rovnicemi

$$k = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$q = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$



Obr. 5: Aproximace přímkou

## 3.2 Kritérium metody

Kritérium ohodnocuje konkrétní aproximační funkci  $y$ , která odhaduje průběh dat. Metoda nejmenších čtverců používá tzv. *kvadratické kritérium*, tedy součet druhých mocnin rozdílů naměřené hodnoty a odhadu funkce. Je tvaru

$$J = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2, \quad (17)$$

pro dvojice dat  $(x_i, y_i), 1 \leq i \leq n$ .

Čím je hodnota kritéria nižší, tím je funkce „lepší“, tedy lépe aproximuje naměřená data.

Na obrázku 5 je jsou zobrazeny kvadráty odchylek jako šedé čtverce.

Nejnižší možná hodnota kritéria je nula. Tuto hodnotu by měla funkce, která by přesně procházela určenými body, tedy by se jednalo dokonce o interpolaci.

Metoda nejmenších čtverců zaručuje nalezení nejlepší funkce, tedy funkce s nejnižší hodnotou kritéria. Příмка nalezená postupem z předchozího odstavce je tedy nejlepší možná podle tohoto kritéria.

## 3.3 Metoda nejmenších čtverců v identifikaci systémů

Metoda nejmenších čtverců (dále m. n. č.) se úspěšně používá v identifikaci systémů pro parametrizaci modelů. Metoda je dobře popsána v literatuře, vždy dochází k řešení a lze ji dobře programově implementovat.

V následující kapitole popíšeme princip odhadu parametrů modelu metodou n. č. offline, tedy jednorázově z předem naměřených dat.

Existují následující rozšíření m. n. č. :

- Rekurzivní metoda n. č. - Používá se pro online identifikaci. Výhodou této metody je paměťová nenáročnost, a také fakt, že výsledky dostáváme ihned při měření dat.
- Metoda n. č. s váhovými koeficienty – Umožňuje upravit váhy jednotlivých měření.
- Metoda přídavných proměnných.

Podrobnější popis metod a odvození vztahů jsou uvedeny v [5].

## 3.4 Odhad parametrů metodou nejmenších čtverců

V této kapitole navážeme na kapitolu 2.5 a popíšeme, jak metoda nejmenších čtverců nalezne nejlepší přibližné řešení rovnice (16). Řešením rovnice je vektor parametrů  $\Theta$ .

Kritérium metody bude

$$J(\Theta) = \varepsilon^T \cdot \varepsilon, \quad (18)$$

což je součet druhých mocnin odchylek jednotlivých rovnic v soustavě od výstupu modelu. Kritérium je závislé na hodnotách parametrů modelu.

Je použita aproximace polynomem. Vyšší stupeň polynomu však neznamená automaticky vyšší přesnost modelu.

Chybu modelu můžeme z rovnice (16) vyjádřit jako  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Theta}$ , po dosazení do kritéria dostaneme

$$J(\boldsymbol{\Theta}) = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Theta})^T \cdot (\mathbf{y} - \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Theta}).$$

Protože chceme minimální hodnotu kvadratického kritéria, položíme parciální derivaci rovnou nule

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{\Theta})}{\partial \boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{0}.$$

Po provedení parciální derivace dostáváme

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{\Theta})}{\partial \boldsymbol{\Theta}} = -2 \cdot \boldsymbol{\Psi}^T \cdot (\mathbf{y} - \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Theta}),$$

z čehož plyne

$$\boldsymbol{\Psi}^T \cdot (\mathbf{y} - \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Theta}) = \mathbf{0}.$$

Z této rovnice můžeme stanovit odhad  $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$  hledaného vektoru parametrů  $\boldsymbol{\Theta}$  :

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = (\boldsymbol{\Psi}^T \cdot \boldsymbol{\Psi})^{-1} \cdot \boldsymbol{\Psi}^T \cdot \mathbf{y}. \quad (19)$$

Nyní jsme odvodili vzorec pro výpočet odhadu parametrů ze změřených dat. Je to odhad, který splňuje kritérium metody nejmenších čtverců. Tuto rovnici je možno přímo využít pro vyčíslení parametrů. V kapitole 4 jsme použili tuto metodu pro identifikaci reálného systému.

Problém však je, že pokud matice  $\boldsymbol{\Psi}$  bude mít lineárně závislé řádky, tak bude singulární a inverzní matice k matici  $\boldsymbol{\Psi}^T \cdot \boldsymbol{\Psi}$  nebude definována. To se může stát v případě nedostatečného vybuzení soustavy při měření dat. V takovém případě je možno použít jiné metody pro získání optimálního odhadu parametrů, např. QR faktorizaci.

Ve speciálním případě  $N = 2n + 1$  bude matice  $\boldsymbol{\Psi}$  čtvercová řádu  $2n+1$  a parametry pak lze stanovit inverzí  $\boldsymbol{\Psi}^{-1}$  jako

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \boldsymbol{\Psi}^{-1} \cdot \mathbf{y}. \quad (20)$$

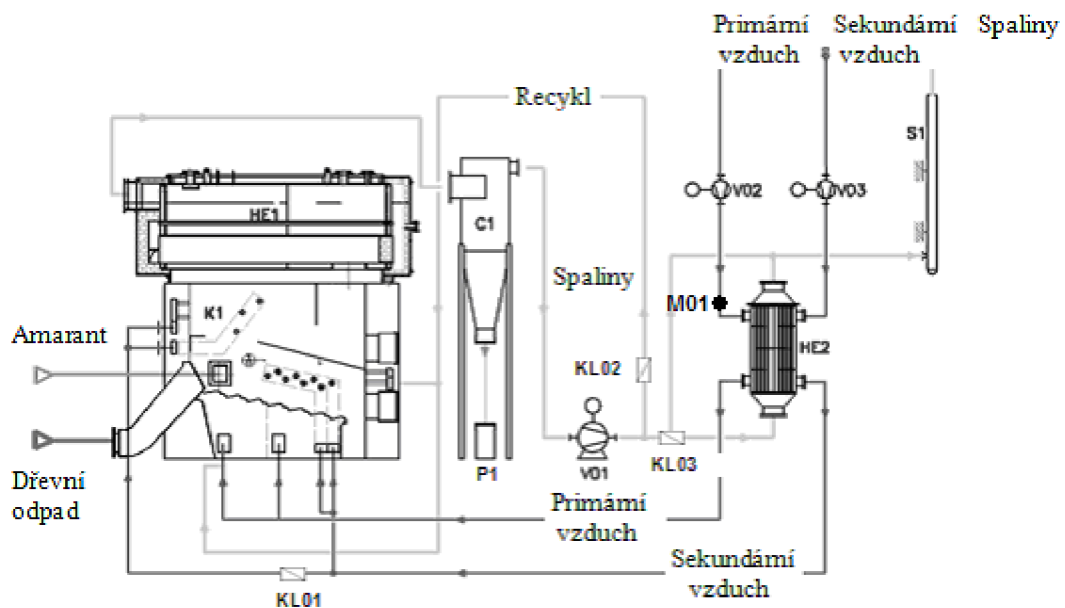


## 4 Případová studie

Popsanou metodu nejmenších čtverců jsme prakticky použili k identifikaci přívodu spalovacího vzduchu do spalovací jednotky pro spalování biomasy. V této kapitole bude tato jednotka představena, a bude popsána provedená identifikace a její výsledky.

### 4.1 Jednotka pro spalování biomasy

Jedná se o evropský projekt, který je zaštitěn Ústavem procesního a ekologického inženýrství Vysokého učení technického v Brně. Hlavním cílem projektu bylo vyvinout a realizovat prototyp ryze české moderní technologie pro energetické využití biomasy a fytomasy (konkrétně ve formě prototypu technologické jednotky, jejíž základ tvoří experimentální teplovodní kotelná středních výkonů) s vysokou termickou účinností, jež umožní testování v provozním měřítku. Předpokládaným palivem jsou různé druhy biomasy. Jednotka stojí v areálu bývalého cukrovaru v Kojetíně, má výkon 1MW. [1]



K1 – Spalovací komora  
HE1 – Teplovodní výměník  
HE2 – Rekuperační výměník  
C1 – Multicyklon  
S1 – Komín  
P1 – Popelnice

V01 – Spalinový ventilátor  
**V02 – Ventilátor primárního vzduchu**  
V03 – Ventilátor sekundárního vzduchu  
KL01 – Klapka sekundárního vzduchu  
KL02 – Klapka recirkulace spalin  
KL03 – Klapka rekuperace spalin  
**M01 – Měření průtoku vzduchu**

Obr. 6: Zjednodušené technologické schéma jednotky

Touto jednotkou se podrobně zabýval ve své diplomové práci R. Macalík ([1]). V jeho práci je uveden podrobný popis jednotky a jejího řídicího systému, jakož i identifikace této jednotky.

V naší práci jsme identifikovali jeden z technologických celků na této jednotce. Jedná se o závislost otáček ventilátoru přívodu primárního vzduchu (V02) na průtoku primárního vzduchu v této jednotce, který je měřen v místě označeném M01.

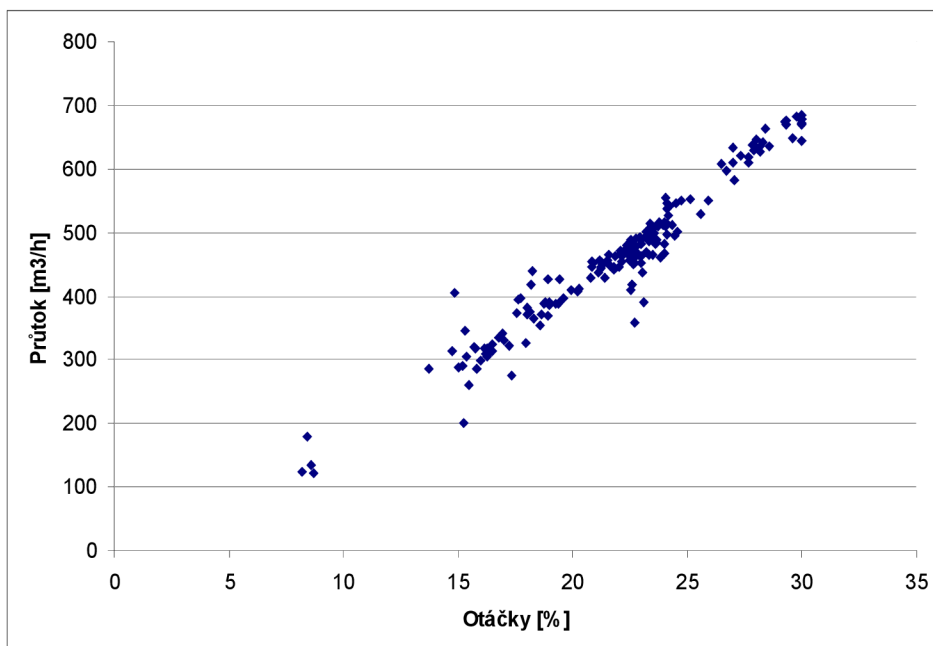
## 4.2 Naměřená data

Pro identifikaci byla použita data z experimentálního měření, které bylo provedeno v topné sezóně.

Otáčky ventilátoru jsou udány v procentech, průtok vzduchu v  $\text{m}^3/\text{hod}$ . Tato dvojice údajů byla měřena se vzorkovací periodou 15 sekund. Celkem jsme měli k dispozici 190 měření.

Vlastní identifikace proběhla na upravených datech, které vykazují lineární závislost, jak je zřejmé z obr. 7. Tato data obsahují časté skokové změny, a proto je možno použít metodu odhadu parametrů pomocí metody nejmenších čtverců, jak je uvedeno v kapitole 3.4.

Tato data jsou obsažena v příloze na CD v souborech *data\_input.m* a *data\_output.m* ve složce matlab.



Obr. 7: Lineární závislost dat



### 4.3 Kritérium kvality modelu

V kap. 2.3 jsme uvedli, že posledním krokem identifikačního postupu je ověření, s jakou přesností získaný model dokáže popsat chování skutečného systému. Tuto míru shody je nutno nějak kvantifikovat, abychom mohli výsledky různých modelů, nebo stejných modelů s různými parametry vzájemně porovnat. V programu Matlab je pro účel verifikace modelu využíván tzv. FIT index, jehož definiční vztah je následující:

$$\text{FIT index} = \left(1 - \frac{|y - \hat{y}|}{|y - \bar{y}|}\right) \cdot 100 \text{ [%]} \quad (21)$$

kde  $y$  je změřený (odhadnutý) výstup,  $\hat{y}$  je simulovaný (předpokládaný) výstup modelu a  $\bar{y}$  je střední hodnota  $y$ .

Můžeme říci, že nejlepší model je ten, jehož hodnota FIT indexu se nejvíc blíží 100%. To znamená takový model, u kterého součet všech odchylek mezi reálným a aproximovaným průběhem je nejmenší, a proto nejlépe popisuje skutečný průběh sledované závislosti.

Z definice funkce FIT index vyplývá, že je možné, aby nabývala záporných hodnot. Záporný (negativní) FIT je horší než nulový (FIT minus 100% znamená dokonale opačný/inverzní průběh funkce) a může být způsobem jedním z následujících důvodů:

- Výpočetní algoritmus selhal ve své konvergenci. Naopak divergoval.
- Nevhodně zvolený odhad parametrů modelu.
- Data pro validaci nebyla vybrána vhodně, nebo byla předzpracována zásadně jiným způsobem, než data k výpočtu (estimation data). [1]

V naší práci jsme FIT index použili jako kritérium hodnocení kvality modelu, protože pro výpočet byl použit program Matlab.

Stanovili jsme minimální požadovanou přesnost modelu, které ze zkušenosti odpovídá hodnota FIT indexu 50%.

### 4.4 Identifikace

Pro potřeby dalšího využití modelu jsme použili model ARX. Na základě změřených dat byl vypočten odhad parametrů modelu ARX metodou nejmenších čtverců.

Po odborné konzultaci byl sestaven program v aplikaci Matlab, který používá výpočet dle kapitol 2.5 a 3.4. V souladu se zadáním práce jsme předpokládali, že měřitelné poruchy jsou nulové. Proto stačilo odhadnout polynomy A a B modelu ARX.

Část programu je uvedena v Příloze A, kompletní program je na přiloženém CD.

Program spočítá odhad parametrů modelu ARX na základě vstupů a výstupů a požadovaných hodnot  $n_a$  – stupně polynomu A,  $n_b$  – stupně polynomu B a dopravního zpoždění  $d$ . Stanovení modelu tedy vychází z experimentálních dat a definované struktury modelu.

Pro srovnání byl po odborné konzultaci sestaven model v modulu Matlabu *System Identification Toolbox*, který je komplexním modulem pro identifikaci systémů. Výsledky byly porovnány s „ručním“ matematickým výpočtem dle kapitol 2.5 a 3.4.

## 4.5 Výsledky identifikace

### *Volba dopravního zpoždění*

Nejlepších výsledků jsme dosáhli s dopravním zpožděním rovným nule. To znamená, že v okruhu primárního vzduchu není zpoždění mezi nastavením výkonu ventilátoru a samotnou změnou průtoku vzduchu. To není překvapivé, vzhledem k tomu, že snímač průtoku vzduchu se v jednotce nachází blízko ventilátoru 700 MM.

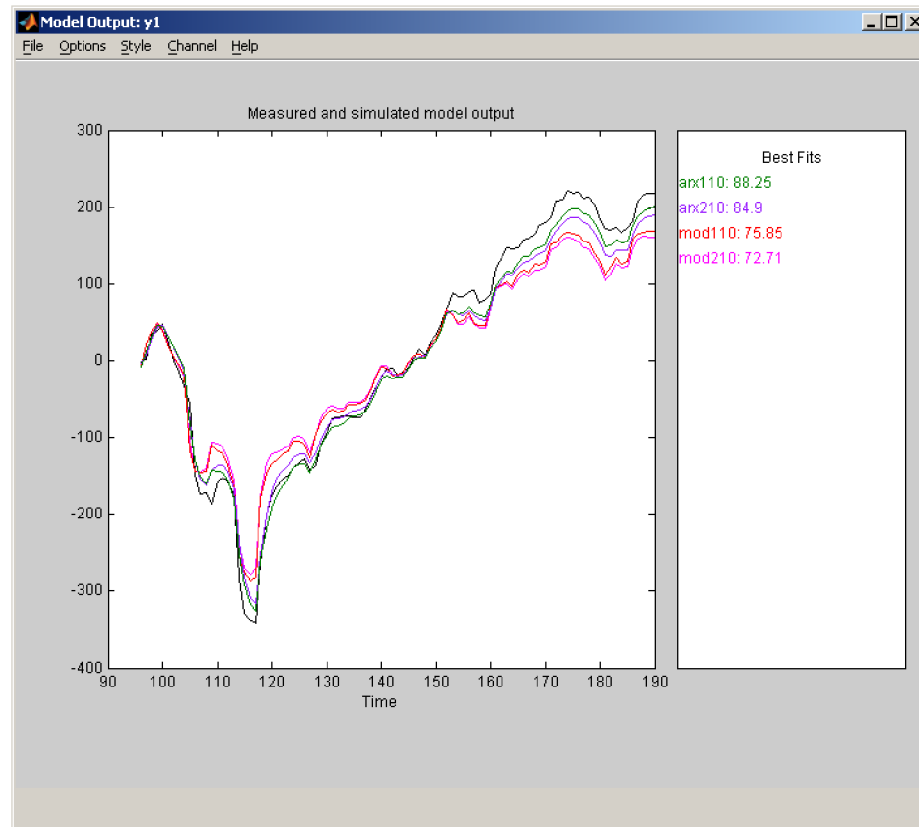
### *Volba stupňů polynomu A a B*

Nejlepších výsledků jsme dosáhli s velmi malými stupni polynomů – 1 nebo 2. Vysvětlujeme to tím, že sledovaná závislost je poměrně jednoduchá.

Uvedeme modely, které dosáhly nejlepších výsledků. Modely uvedeme ve tvaru Z přenosů, jak pro ruční výpočet (značíme „*mod*“), tak pro výpočet pomocí systému *System Identification Toolbox* (SIT) (značíme „*arx*“).

<b>Použitá metoda</b>	<b>Koeficienty <math>n_a = 1, n_b = 1, d = 0</math></b>	<b>Koeficienty <math>n_a = 2, n_b = 1, d = 0</math></b>
ruční výpočet	$G(z) = \frac{15.57}{1 - 0.2591 z^{-1}}$	$G(z) = \frac{13.65}{1 - 0.4485 z^{-1} + 0.1325 z^{-2}}$
metoda systému SIT	$G(z) = \frac{11.09}{1 - 0.5642 z^{-1}}$	$G(z) = \frac{9.707}{1 - 0.7733 z^{-1} + 0.1826 z^{-2}}$

*Tab. 1: Výsledky identifikace*



Obr. 8: Simulace identifikovaných modelů

Na obr.8 je vykreslen reálný výstup systému spolu s výstupy 4 modelů uvedených v tab.1. Černou barvou je vykreslen reálný výstup. V pravé části obrázku jsou vypsány FIT indexy jednotlivých modelů. Data byla pro potřeby identifikace posunuta do počátku.

Naše modely mají poměrně vysoký FIT index, který je v obou případech větší než 70%. To překračuje velkou měrou kritérium, které jsme si stanovili. Metoda nejmenších čtverců se tedy ukázala jako velmi vhodná pro řešení našeho problému.

Modely, které sestavil System Identification Toolbox, mají vyšší FIT index. Na obrázku je také vidět, že výstupy těchto dvou modelů se těsněji přimykají k reálnému výstupu. To vysvětlujeme tím, že Matlab pro výpočet parametrů používá pokročilejší metodu – QR faktorizaci.



## 5 Závěr

Cílem této práce bylo představit metodu nejmenších čtverců a její praktické použití v identifikaci dynamických systémů. Tento cíl byl splněn v kapitole 3, kde byly popsány vzorce pro odhad parametrů touto metodou.

Dalším cílem bylo identifikovat závislost otáček ventilátoru na průtoku vzduchu v jednotce pro spalování biomasy. Pro potřeby dalších výzkumných prací na této jednotce byl použit univerzálnější model ARX. K identifikaci jsme použili vzorce z teoretické části a ruční parametrizaci jsme provedli po odborné konzultaci v Matlabu.

Náš model dosahuje hodnoty FIT indexu 75%, což je velice dobrý výsledek. Metoda nejmenších čtverců se ukázala jako velice vhodná pro parametrizaci takového druhu závislosti.

## 6 Literatura

- [1] MACALÍK, R. *Identifikace regulované soustavy – experimentální jednotka pro spalování biomasy*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008. 73 s.
- [2] LJUNG, L.: *System identification, theory for the user* (2nd. ed.). New Jersey: Prentice Hall, 1999. 609 s. ISBN 0-13-656695-2.
- [3] ZHU, Y.: *Multivariable System Identification for Process Control*. Oxford: Elsevier Science Ltd., 2001. 349 s. ISBN 0-08-043985-3
- [4] MathWorks, Inc.: *Matlab Documentation*. [online]. 28.5.2009. Dostupné z: [www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/](http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/)
- [5] NOSKIEVIČ, P.: *Modelování a identifikace systémů*. MONTANEX a.s., 1999, ISBN 80-7225-030-02.
- [6] ŠVARC, I.: *Automatizace – Automatické řízení*. Brno: CERM, 2002. 200 s. ISBN 80-214-2087-1.
- [7] KAMLER, R. *Metody identifikace spojitéch modelů technologických soustav*. Liberec, Technická univerzita v Liberci, Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií, 1999. 155s.
- [8] HURÁK, Z.: *Moderní metody řízení vs. PID regulátor*. Automa, 2007, roč. 13, č.2, s. 7-12. ISSN 1210-9592
- [9] National Instruments Corporation: *Selecting a Model Structure in the System Identification Process* [online], 1.7.2008. Dostupné z: <http://zone.ni.com/devzone/cda/tut/p/id/4028>

## 7 Seznam příloh

[1] Příloha A – Výpis programu v Matlabu pro určení odhadu parametrů.

[2] CD

- soubor *bakalarska\_prace.pdf* – Text bakalářské práce v PDF.
- složka *matlab* – Kompletní program identifikace pro Matlab.

## 8 Příloha A

Zde je uveden výpis klíčové části programu, kde probíhá výpočet parametrů.

```
function [A B] = mncm (u, y, na, nb, d)
%MNC Spocita odhad vektoru parametru metodou nejmensich ctvercu
% u - sloupcovy vektor vstupu, u(k) je hodnota vstupu v case k
% y - sloupcovy vektor vystupu, y(k) je hodnota vystupu v cas k
% na - stupen polynomu A
% nb - stupen polynomu B
% d - dopravni zpozdeni

N = length(u);

% naplneni matice PSI (pro vstupy a vystupy) ve tvaru N x na+nb:
PSI = zeros(N,na+nb);

for k=1:N
    PSI(k,1:na) = - sub_vektor(y, k-1:-1:k-na);
    PSI(k,na+1:na+nb) = sub_vektor(u, k-d-1:-1:k-d-nb);
end

% vypocet vektoru parametru metodou nejmensich ctvercu:
parametry = inv(PSI' * PSI) * PSI' * y;

% uprava parametru pro sestaveni modelu:
Ax = [1; parametry(1:na)];
Bx = parametry(na+1:na+nb);

A = Ax';
B = Bx';
end
```