Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci

Katedra algebry a geometrie

Matematizace reálných situací a slovní úlohy

Disertační práce

Vedoucí disertační práce: **Doc. RNDr. Stanislav Trávníček CSc.**

Vypracoval: **Mgr. František Šíma**

Olomouc 2013

Prohlášení:

Prohlašuji tímto, že jsem disertační práci zpracoval samostatně za vedení školitele Doc. RNDr. Stanislava Trávníčka, CSc. a že jsem v seznamu literatury uvedl všechny zdroje použité při zpracování práce.

Poděkování:

Děkuji školiteli disertační práce Doc. RNDr. Stanislavu Trávníčkovi CSc. za informace, cenné rady a připomínky i za trpělivost a pochopení, které potřeboval, aby odpovídal na mé dotazy.

O B S A H

Úvod

Často jsem se při výuce matematiky setkával s názorem studentů na určité téma: „A k čemu mi to bude?“ Nejprve jsem tuto otázku považoval za projev nechuti učit se matematiku. Později jsem zjistil, že v některých tematických celcích tuto otázku pokládají studenti velmi často a v jiných jen minimálně. Také jsem si uvědomil, že to není projev nechuti učit se matematiku, ale důsledek určité ztráty motivace. Studenti v částech, které v matematice považují za nepotřebné, ztrácejí motivaci se matematiku učit. Chtějí učivo přijímat uvědoměle, nikoliv jen biflovat se.

Slovní úlohy jsou tematickým celkem matematiky, ve kterém jsem otázku „K čemu mi to bude?“ slýchával jen zřídka. Přesto je to téma, se kterým žáci a studenti mají dosti velký problém. Ne však proto, že by nevěděli k čemu jim slovní úlohy jsou, ale proto, že jej považují za téma velmi obtížné. Stejně tak i vyučující považují slovní úlohy za téma náročné a pro žáky a studenty mnohdy těžko zvladatelné.

Proto bych se rád touto prací zapojil do diskuse o slovních úlohách, o jejich řešení a alespoň nastínil některé problémy, které se jich týkají, zaujal k těmto problémům určitý postoj a snad i na některé otázky dal odpověď.

Vzhledem k tomu, že problematika slovních úloh je velmi obšírná a nelze ji celou v jedné práci obsáhnout, zaměřil jsem se na metody řešení slovních úloh, modely užívané při řešení a klasifikaci vybraných typů slovních úloh. Jako podpůrné prostředky uvádím frekvenci slovních úloh ve vybraných sbírkách úloh z matematiky, testy a dotazníky žáků a studentů na vybraných typech základních a středních škol určitého regionu a jejich vyhodnocení a porovnání.

V kapitole I se zabývám základními pojmy, které souvisí s pojmem slovní úloha. Začínám pojmem úloha, potom pokračuji matematizací reálné situace a dostávám se k přehledu typů slovních úloh. Dále uvádím některá zajímavá třídění slovních úloh zveřejněná v diplomových pracích a v různých článcích. Potom se zabývám frekvencí slovních úloh ve sbírkách slovních úloh vydaných v různých obdobích. Na závěr kapitoly uvádím příklad řešení vybraného problému.

V kapitole II uvádím přehled matematických modelů používaných při řešení slovních úloh. U příkladů jsem se snažil o maximální různorodost, jak zadání slovních úloh (od úloh starověkých až po současné, včetně využití termínů odpovídajících dané době), tak metod (tj výběr vhodného modelu) používaných při jejich řešení (od jednoduchých úsudků a rovnic až po složité metody algebraické a geometrické).

K řešení slovních úloh používám nejen konkrétní modely (zejména lineární a kvadratické rovnice, soustavu lineárních rovnic), ale často zavádím pomocí parametrů obecné modely. Tyto potom vedou na vzorce, pomocí kterých je možné v mnoha případech postup zjednodušit. Není to nic nového, neboť takto postupovali matematici již před mnoha tisíci lety v Číně, Indii, Mezopotámii a Egyptě (jak to dokládají úlohy, které ve své době řešili). Tyto obecné modely se ve školní praxi používají málo (výjimku tvoří zejména finanční matematika), a proto je žáci a studenti neznají. I když některé modely působí až příliš komplikovaně, přesto nebo právě proto je uvádím, aby si student či vyučující mohl jednotlivé metody porovnat a sám si vybrat. Zavádění obecných modelů pro řešení slovních úloh ve školské praxi je samozřejmě věc náročná a složitá. Postoj k těmto problémům bych ponechal na samotných vyučujících a jejich nadřízených (od ředitelů až po ministerstvo). Nechtěl jsem samozřejmě zapomenout ani na metody chybných předpokladů, které se dříve úspěšně používaly při řešení slovních úloh ve starověkých civilizacích v Číně, Indii, Egyptě a jinde.

Dlouho jsem hledal odpověď na otázku, který model při řešení slovní úlohy použít a jakou metodou danou úlohu nejlépe řešit. Absolvoval jsem na toto téma mnoho diskusí a přečetl mnoho článků. Dlouho žádná diskuse ani článek nedokázaly tuto otázku uspokojivě zodpovědět. Až po mnohých letech autor jednoho článku v Pokrocích matematiky, fyziky a astronomie odpověděl na danou otázku takto: „Nejlepší metodou, kterou učitel může použít při výuce, je ta, kterou on sám nejlépe zná.“ Myslím si, že autor dal zatím nejlepší odpověď na položenou otázku. Jde však přitom také o to, aby byl tento učitel dostatečně vzdělaný a neznal dobře jen tuto jedinou metodu, ale dovedl žákům alespoň naznačit i metody jiné.

V kapitole III provádím klasifikaci vybraných skupin slovních úloh. Jedná se o slovní úlohy o celku a částech, o číslech, o pohybu, o směsích, o společné práci a o věku a letopočtu.

Setkával jsem se s různými způsoby klasifikací podle různých kritérií. Ani jeden způsob klasifikace není bez problémů. Některé klasifikace jsou příliš „hrubé“, dělí slovní úlohy na 2 – 3 skupiny, jiné naopak příliš „jemné“ a stává se, že v některé skupině se jen obtížně hledají úlohy, které jsou alespoň matematicky trochu smysluplné (o aplikacích ani nemluvím). V některých klasifikacích je zase velmi problematické slovní úlohy zařadit do skupin. Např. klasifikace podle metod řešení je náročná, protože většinu slovních úloh lze zařadit do více skupin a klasifikace je tak nepřehledná. Pokud chceme mít tuto klasifikaci přehlednou, musíme vybrat pouze jednu metodu a ostatní nepoužívat.

Myslím si, že nejlepší způsob, jak klasifikaci provést, je podle tématu, kterým se slovní úlohy zabývají. I když i zde není třídění stoprocentně jednoznačné, je při něm méně problémů než v jiných uvažovaných případech. Vzhledem k tomu, že klasifikace všech uvedených skupin slovních úloh přesahuje objemově rámec práce, vybral jsem uvedené skupiny. Těchto šest skupin jsem nazval „klasické“, protože slovní úlohy do těchto skupin zařazené se vyskytují již od starověku až do současnosti a stále se objevují ve sbírkách úloh. Proto jsem pro klasifikaci vybraných slovních úloh zvolil třídění podle jednotlivých typů.

Třídění každé skupiny je samostatné, nezávislé na ostatních skupinách. Některé úlohy jsou řešeny jen jednou vybranou metodou (i když existuje více metod řešení), jiné úlohy jsou řešeny dvěma až třemi metodami (zejména ty, které je možné považovat za typové). Nejčastěji je užíváno řešení pomocí rovnic, pomocí úsudku a pomocí obecného modelu. Nakonec jsou připojeny zkouška a odpověď. Metody jsem volil tak, aby byla vidět jejich různorodost.

V kapitole IV jsou vyhodnoceny testy a dotazník, které byly zadány ve školním roce 2010 – 2011 žákům a studentům základních a středních škol v regionu Jihočeského kraje. V testech byly sledovány metody, které žáci a studenti používali při řešení slovních úloh. Bylo vyhodnoceno využití těchto metod na jednotlivých typech škol. Dále je také sledována úspěšnost žáků a studentů při řešení zadaných slovních úloh. Současně při řešení slovních úloh byl studentům a žákům zadán dotazník, ve kterém vyjadřovali svůj postoj ke slovním úlohám a k jejich řešení. Kromě vyhodnocení tohoto dotazníku je také sledována vzájemná provázanost testů a odpovědí v dotazníku.

Úvod by nebyl úplný, kdybych nepoděkoval všem, kteří mi při práci, zejména při sbírání podkladů a materiálů pomáhali. V první řadě je to můj školitel Doc. RNDr. Stanislav Trávníček CSc. Dále chci poděkovat všem vyučujícím matematiky na školách Jihočeského

regionu, kteří se mnou spolupracovali a pomáhali mi se zadáváním testů. Byli z těchto škol: Gymnázium Jírovcova v Českých Budějovicích, Gymnázium v Prachaticích, Gymnázium ve Vodňanech, SPŠ stavební v Českých Budějovicích, SPgŠ v Prachaticích, ZŠ Národní v Prachaticích a ZŠ ve Volyni. Také velké poděkování patří pracovníkům Muzea J. A. Komenského v Přerově, kteří byli při mém bádání ochotní a vstříční.

V přílohách jsou další informace, které vyplývají z tabulek, sbírka řešených příkladů i přehled vzorců, které jsou při řešení příkladů užity. Také jsem do příloh zařadil další tabulky, které doplňují souhrnné tabulky uvedené v disertační práci. V příloze jsou dále naskenována některá zajímavá žákovská a studentská řešení testových úloh. Uvádím zde též seznamy a přehledy, které doplňují a systematizují informace v disertační práci.

Kapitola I - Slovní úlohy a matematizace reálných situací

1.1. Slovní úlohy

Chceme-li se zabývat pojmem *slovní úloha*, musíme se nejprve zabývat pojmem *matematická úloha* a *úloha*.

Při vymezení pojmu ***úloha*** vychází Fridman z problémové situace. Problémová situace vzniká, když se subjekt ve své činnosti (zaměřené na určitý objekt) setkává s konkrétní obtíží, překážkou. Tuto obtíž si uvědomí a hledá způsob jak ji odstranit. Tak vznikají úlohy, jejichž řešení přispívá ke zjednodušení oné problémové situace. Také lze navodit problémovou situaci uměle, a pro řešení problémů v této situaci se opět formulují úlohy. Mezi pojmy *úloha* a *problém* se zpravidla nepociťuje velký rozdíl. Lze to vidět tak, že u *úlohy* jsou zpravidla zadány všechny předpoklady nezbytné k jejímu vyřešení a požadovaný výsledek bývá v úloze přesně zadán, zatímco při analýze a formulaci problému ještě nevíme přesně, z čeho máme vycházet a k čemu můžeme dojít a až nakonec po jeho analýze přesně formulujeme úlohu, která má problém vyřešit. Proto u *problému* se vždy předpokládá větší podíl řešitelovy tvořivosti.

Slovními úlohami se obvykle nazývají úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoli matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení je založeno na vyřešení „příslušné“ aritmetické, algebraické nebo geometrické, resp. konstrukční úlohy.

Slovní úlohy lze rozdělit do dvou skupin: *první skupinu* tvoří slovní úlohy s matematickým obsahem, které jsou vysloveny z větší části slovními výroky s minimálním použitím matematických symbolů. Zde je matematická úloha již dána a není třeba ji sestavovat.

***Příklad* 0.0.1:**
„*Určete takové číslo x, jehož trojnásobek zvětšený o jednu dá* 73.“

Do této skupiny bývají také řazeny geometrické konstrukční úlohy.

Druhou skupinu slovních úloh, kterou se dále budu zabývat, tvoří úlohy sice matematického charakteru, ale jejichž témata jsou vzata ze života, technické praxe, přírodních věd, tedy popisují *reálnou situaci*. Z každé takovéto úlohy je třeba nejprve vytvořit matematickou úlohu neboli danou situaci matematizovat. Toto je možné provést i více způsoby, jak je uvedeno v dalších kapitolách.

***Příklad* 0.0.2:**
Čerstvé houby obsahují 90 % *své celkové váhy, sušené houby jen* 12 %. *Kolik kg sušených hub dostaneme* z 10 *kg čerstvých hub*?

Jelikož řešení slovních úloh je založeno na řešení vhodných úloh matematických, shrňme si nyní několik poznatků o úlohách matematických.

Z problémových matematických situací lze formulovat *matematické úlohy*. Rozlišujeme tři základní typy matematických úloh:

♥ *matematické určovací úlohy,*
♥ *důkazové a existenční úlohy,*
♥ *konstrukční úlohy.*

Matematická určovací úloha má za cíl nalézt či určit všechny matematické objekty požadované vlastnosti.

Zadání matematické určovací úlohy spočívá v tom, že v dané základní množině U (oboru řešení) je třeba určit její podmnožinu P (systém řešení) jako obor pravdivosti jisté výrokové formy f.

Řešení matematické určovací úlohy je činnost, při které máme najít místo dané výrokové formy f jinou (vhodnější) výrokovou formu g, která má v oboru řešení U týž obor pravdivosti P jako výroková forma f. Jedná se o subjektivní moment řešitele, kdy je s výslednou výrokovou formou „spokojen" a kdy pokládá řešení za dokončené.

Pojem matematická určovací úloha shrnuje společné rysy takových úloh, jakými jsou:
♦ řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav;
♦ výpočty měr útvarů (obvodů, obsahů, objemů, povrchů, odchylek);
♦ výpočty limit a derivací funkcí, extrémů funkcí, integrálů;
♦ řešení diferenciálních, diferenčních, rekurentních a funkcionálních rovnic;
♦ hledání optimálních algoritmů nebo tzv. kritických cest atd.

Ve všech vyjmenovaných typech úloh se vyskytují objekty a jejich množiny (množiny čísel, množiny bodů, množiny posloupností apod.), které jsou nosiči určité struktury. Množiny jsou vybaveny vlastnostmi, relacemi, operacemi, jež v nich lze studovat (sčítání, násobení, rovnost, menší než apod.). Pomocí pojmů patřících do této struktury lze pak vyjádřit požadované vlastnosti těch prvků množiny U, které hledáme. K vyjádření vlastností prvků množiny U používáme výrokové formy f, jejich obory pravdivosti P pak vytvářejí podmnožiny množiny U. Cílem určovací úlohy je určit množinu P výčtem jejích prvků nebo pomocí charakteristické vlastnosti.

Důkazová úloha má za cíl rozhodnout, zda je určité tvrzení pravdivé nebo nepravdivé, a dokázat nebo vyvrátit ho. ***Existenční úloha*** má za cíl rozhodnout, zda je pravdivá nebo nepravdivá část tvrzení (zda existuje prvek či skupina prvků, které uvedenému tvrzení vyhovují). Důkazové a existenční úlohy vznikají z úloh určovacích, udáme-li buď částečně nebo úplně soustavu řešení. Potom neprovádíme úplné řešení úlohy (i s rozborem), ale jen ověřujeme, zda daná řešení jsou skutečně řešeními úlohy, tj. provádíme buď úplnou nebo částečnou zkoušku.

Konstrukční úloha je matematická určovací úloha s geometrickým obsahem. Jedná se o tyto geometrické případy – vyšetřování množin bodů dané vlastnosti a konstrukční úlohy v geometrii. V tradičních textech geometrických úloh bývá mnoho skrytých proměnných, proto jsme nuceni provádět diskusi možných hodnot proměnných a jejich vlivu na počet řešení konstrukční úlohy nebo na výsledek vyšetřování množin bodů dané vlastnosti. Chceme-li běžně formulované geometrické úlohy vyřešit úplně, je nutné je chápat jako parametrické systémy úloh. Někteří autoři řadí konstrukční úlohy mezi matematické určovací úlohy.

Poznámka:

Příklady a postupy řešení matematické určovací úlohy, příklady úloh důkazových a existenčních a jejich řešení a příklady a postupy řešení konstrukčních úloh jsou podrobně rozebrány např. v knize [84]. *Nalezneme je samozřejmě i v jiných knihách, např. v knize* [13] *nebo v* [41].

1.2. Matematizace reálných situací

Matematizace reálné situace znamená, že reálnou situaci modelujeme užitím matematiky a pak užitím matematiky řešíme její problémy.

Nejprve uvedu postup matematizace reálných situací, který je v podstatě strategickým návodem, jak v praxi řešit (i složitější) problémy. Takto postupujeme při řešení problémů technologických, ekonomických apod. Zvládnutí praktických problémů probíhá v několika (nikoli disjunktních) krocích:

1. ***Analýza problémové situace***:
Vycházíme z reálné situace, ve které se vyskytují problémy. Tyto problémy musíme rozpoznat a vybrat z nich pro řešení ty podstatné. To jsou takové, jejichž řešení má uplatnění v praxi, a které se stanou předmětem matematizace.

2. ***Definování systému***:
Na předmětu matematizace definujeme systém, označíme prvky a vazby, jimiž se chceme zabývat. Prvky a vazby nevýznamné z hlediska účelu použití dále nebudeme zohledňovat.

3. ***Analýza systému***:
Při analýze systému formulujeme problémy v systému. Vymezíme cíle řešení, podmínky a kritéria. Zvolíme problém k řešení a rozhodneme, zda jde o problém typový nebo unikátní. Je-li problém typový, řešíme jej typovým způsobem, je-li problém podobný s některým dříve vyřešeným problémem, pak hledáme podobné způsoby řešení jako u vyřešených problémů. Celý systém následně rozdělíme na jednotlivé problémové oblasti a formulujeme v nich praktické úlohy.

4. ***Sestavení matematického modelu***:
Ke každé praktické úloze v problémové oblasti vytvoříme samostatný matematický model a formulujeme odpovídající matematické úlohy.

5. ***Řešení matematického modelu***:
Vyřešíme získané matematické úlohy a ve vhodných případech řešíme problém i s využitím počítače.

6. ***Interpretace výsledku***:
Interpretací výsledků se rozumí převedení výsledků matematického řešení do dané problémové oblasti systému; tzn. přeložíme výsledky z jazyka matematiky do jazyka používaného v dané problémové situaci.

7. ***Posouzení interpretace***:
Porovnáme výsledky s cíli, podmínkami a kritérii, které byly formulovány při analýze systému. Na základě tohoto srovnání provádíme *vyhodnocení a úpravy výsledků*.

8. ***Implementace***:
K přenesení výsledků do reálné situace můžeme přistoupit pouze v případě, že výsledky jsou věrohodné a dávají smysl.

9. ***Instalace***:
Pokud jsou výsledky v pořádku, zavádíme zkušební provoz, na jehož základě dolaďujeme chod a pak provádíme úplné zabezpečení provozu.

Pokud výsledky nemají požadovanou úroveň, pak se někde stala chyba. Může být buď v řešení modelu, může se stát, že model není úplný. Může také jít o chybu v analýze či o nevhodnou abstrakci. Potom je třeba prověřit všechny kroky v postupu a provést potřebná doplnění a úpravy. [Jitka Koubová, Aktivity volného času v matematických úlohách (diplomová práce), UP Olomouc, 2004; Jan Koš, Systémové modelování a slovní úlohy zaměřené na zemědělství a blízké obory průmyslu (diplomová práce), UP Olomouc, 1999].

V prostředí školy se zpravidla omezujeme jen na body 4, 5 a 6. Slovní úloha popisující reálný problém je již formulována v textově-grafické podobě, převedeme ji na matematickou úlohu, tu vyřešíme a ověříme, jestli toto řešení má pro popsanou reálnou situaci smysl, tj. provedeme tzv. *interpretaci výsledku matematické úlohy v původní situaci*. Jde tedy vlastně o matematizaci zadané slovní úlohy a lze ji nazvat i *matematizace reálné situace v užším smyslu*.

Celý postup ***matematizace reálné situace v užším smyslu*** můžeme tedy rozčlenit na tři fáze, které lze charakterizovat takto:

1. ***Matematické modelování slovní úlohy*** je vlastně *překlad textu slovní úlohy do jazyka matematiky* pomocí matematických pojmů a symbolů. Z úlohy formulované slovně tak vzniká matematická úloha.

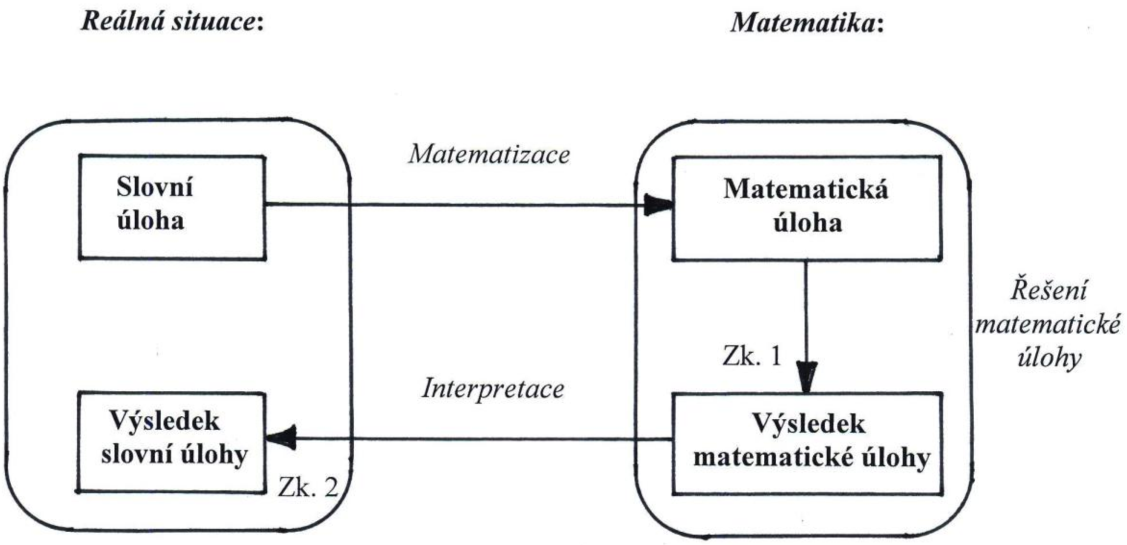
Nejúčinnějšími prostředky matematizace reálné situace jsou:
♠ *obecné matematické pojmy* (množina, operace, relace, zobrazení, funkce, číslo, …)
♠ *složky jazyka matematiky* (proměnné, parametry, výrazy, symbolické zápisy, rovnice, …)
♠ *složky jazyka logiky* (kvantifikátory, logické spojky, výroky, výrokové formy, úsudky, …)
♠ *grafy*

Pomocí těchto prostředků zformulujeme text matematické úlohy, která je matematickým obrazem dané slovní úlohy.

2. ***Řešení matematické úlohy***:
Matematickou úlohu vyřešíme pomocí prostředků matematiky. K řešení použijeme kalkulu a známých algoritmů, pokud nestačí, musíme nové kalkuly nebo metody hledat.

3. ***Interpretace výsledků matematické úlohy***:
Výsledky získané řešením matematické úlohy musíme převést (interpretovat) do reality, která je popsána v zadání úlohy. Interpretované výsledky musíme podrobit zkoušce, zda v zadané realitě mají smysl a lze je považovat za vyřešení zadané praktické slovní úlohy. Interpretaci zakončíme odpovědí, ve které uvedeme výsledky vyhovující zkoušce.

Při školní výuce matematiky se však mohou řešit jen jednoduché reálné problémy. Žáci a studenti se učí matematizovat reálné situace zjednodušeně, tedy pomocí slovních úloh, a pro tento účel stačí, když si postup matematizace slovní úlohy uvědomují pomocí následujícího schématu:



Ve schématu matematizace se objevují dvě zkoušky:

1. *zkoušce podrobujeme řešení matematické úlohy* – způsobem obvyklým v algebře (dosazením, obrácením postupu apod.) ověříme, zda je vytvořená matematická úloha vyřešena správně.
2. *zkoušce podrobíme celý postup včetně ověření daného výsledku v praxi* – zjišťujeme, zda výsledek matematické úlohy po své interpretaci splňuje všechny podmínky v ní obsažené a zda výsledek dané úlohy má nebo nemá praktický smysl.
   Tato zkouška se někdy dělí na dvě samostatné části – ověření postupu a ověření smyslu.

1.3. Dělení slovních úloh a jejich zastoupení v souborech úloh

1.3.1. Dělení slovních úloh

Základní rozdělení úloh řešených v matematice je rozdělení na slovní úlohy a úlohy, které slovními úlohami nejsou.

Úlohy, které *slovními úlohami nejsou*, zpravidla procvičují jednotlivé kalkuly a jsou formulovány pomocí pokynů „Řešte“, „Zjednodušte“, „Upravte“. Toto jsou většinou jediná slova v zadání, zbytek tvoří matematické symboly a výrazy, proto takovéto úlohy označujeme jako *matematické úlohy*.

Slovní úlohy jsou naopak formulovány gramaticky (slovně), případně i s pomocí nějakého obrázku, a matematické symboly se v jejich zadání používají jen zřídka. Jedná se většinou o číselné údaje.

Dělit slovní úlohy můžeme mnoha způsoby. Často se dělí podle toho, jaké matematické modely (metody řešení) se v nich používají, tj. jaké učivo pomocí těchto úloh můžeme procvičovat. Problémem zde je, že většinu slovních úloh můžeme řešit více způsoby, a tak bychom museli jednu a tutéž úlohu zařadit do mnoha skupin. Uveďme si nejčastěji využívané **typy matematických modelů**:

- základní operace,
- přímá úměrnost,
- nepřímá úměrnost,
- procenta,
- grafické znázorňování,
- zaokrouhlování,
- lineární rovnice,
- lineární nerovnice,
- kvadratická rovnice,
- kvadratická nerovnice,
- soustava lineárních rovnic,
- soustava lineárních nerovnic,
- úpravy algebraických výrazů a vzorců,
- funkce a jejich grafy
- Pythagorova věta,
- goniometrie a trigonometrie,
- obvody a obsahy rovinných obrazců,
- povrchy a objemy těles,
- posloupnosti a řady,
- množiny a množinové operace,
- výroky a výroková logika,
- kombinatorika,
- pravděpodobnost,
- statistika.

I když tento výčet je obsáhlý, najdou se i další modely, které lze do tohoto seznamu zařadit. Navíc, jak je uvedeno výše, existuje také řada úloh, kde lze využít i více modelů najednou.

Slovní úlohy lze dělit i podle jiných hledisek. Zajímavé dělení slovních úloh o aktivitách volného času uvádí např. Jitka Koubová ve své diplomové práci „Aktivity volného času v matematických úlohách“ (UP Olomouc, 2004). Současně připojuje procentuální zastoupení těchto úloh v souboru.

Téma úlohy:	**Procentuální zastoupení:**
Hry, soutěže	35,66 %
Sport	25,07 %
Cestování	19,86 %
Kultura	8,12 %
Sběr, ruční, domácí práce	3,90 %
Zájmové kroužky, hobby	3,33 %
Loterie	2,90 %
Veřejné akce	1,16 %

Nejčastěji se slovní úlohy dělí podle jejich **typu**, tedy podle jejich obsahu a metod řešení. Zařazení do jednotlivých skupin je poměrně jednoznačné. Jsou to zejména tyto **typy slovních úloh:**

***Slovní úlohy o celku a částech*:**
Slovní úlohy o celku a částech (o dělení celku na části) jsou úlohy, kde se vyskytuje určitý celek a jeho části, které mohou být stejně nebo různě velké. Známe údaje o některých z těchto veličin a ostatní počítáme. Údajů může být i méně než veličin, pak úlohy vedou na diofantovské rovnice. Podle toho, jaké údaje máme a jaké hodnoty počítáme (zda celek, části, počet částí apod.), můžeme potom dále tyto úlohy dělit.

***Slovní úlohy o číslech*:**
Ve slovních úlohách o číslech je úkolem najít číslo, o němž máme jisté informace nebo známe vlastnosti jednotlivých cifer hledaného čísla. Patří sem také úlohy typu „Myslím si číslo . . .“ Úlohy se mohou týkat i více čísel.

***Slovní úlohy o pohybu*:**
Slovní úlohy o pohybu jsou úlohy, ve kterých se vyskytují informace o době pohybu, o dráze a o rychlosti nějakého objektu ve vzájemné kombinaci. Při řešení takovýchto úloh se nejčastěji vychází ze vztahu (vzorce) pro rovnoměrný pohyb $s = v \cdot t$ pro dráhu s, průměrnou rychlost v a dobu pohybu t. Objekty se mohou pohybovat i jiným pohybem než rovnoměrným.

***Slovní úlohy o směsích*:**
Slovní úlohy o směsích jsou úlohy, v jejichž zadání se setkáváme se smísením roztoků různé koncentrace, sléváním různě teplých kapalin, se slitinami různých kovů, se směsí z různých surovin (potraviny, krmiva, atd.) a se skupinami různých živočichů či předmětů.

***Slovní úlohy o společné práci*:**
Text slovní úlohy o společné práci se většinou váže ke společné práci lidí nebo strojů, naplňování nebo vyprazdňování různých nádrží a spotřebě zásob. Rozhodujícím znakem, který je pro společnou práci specifický, je různá výkonnost subjektů vztažená ke stejné práci. Tato skutečnost je v zadání úloh zdůrazněna nebo vyplývá z kontextu.

***Slovní úlohy o věku a letopočtu*:**
Ve slovních úlohách o věku známe vztahy mezi stářím více osob a počítáme jejich věk. Můžeme také počítat věk jedné osoby, máme-li informace o tomto věku nebo jeho vztahu k určitému letopočtu.

***Slovní úlohy o procentech*:**
Slovní úlohy o procentech jsou úlohy různých typů, ve kterých máme za úkol určit výsledek pomocí procent. Tyto úlohy by bylo možné zařadit i do jiných skupin. Do této skupiny nejsou zařazeny úlohy z finanční matematiky, i když požadujeme výsledek vyjádřit v procentech.

***Slovní úlohy kombinatorické*:**
Do této skupiny patří všechny slovní úlohy, které jsou zadány pomocí kombinatorických pojmů variace, permutace a kombinace, ať už s opakováním nebo bez opakování. Nejsou sem zařazeny úlohy o faktoriálech, kombinačních číslech a matematické úlohy, kdy jsou dány vztahy pro jednotlivé prvky a tyto prvky určujeme.

***Slovní úlohy o hrách a pravděpodobnosti*:**
Slovní úlohy patřící do této skupiny se zabývají výpočtem pravděpodobnosti nejenom při hrách, ale i v jiných oborech lidské činnosti. Patří sem i úlohy, kdy se počítá geometrická pravděpodobnost.

***Slovní úlohy o finančnictví*:**
Do této skupiny patří všechny úlohy finanční matematiky, zejména výpočty úroků a úrokových sazeb, výpočty uspořených částek, výpočty důchodů, půjčky, umořování dluhů, operace s cennými papíry, výpočty měnových kurzů a další operace. Jsou zde také zařazeny úlohy z pojišťovnictví, které se v matematických učebnicích a sbírkách vyskytují jen málo.

***Slovní úlohy o posloupnostech a řadách*:**
Do této skupiny jsou zařazeny všechny slovní úlohy, ve kterých se při výpočtu používá aritmetická nebo geometrická posloupnost, a také úlohy, ve kterých používáme nekonečnou geometrickou řadu. Nejsou sem zařazeny matematické úlohy, kde počítáme prvky posloupností, jež jsou již určeny matematickým vztahem.

***Slovní úlohy statistické*:**
Do této skupiny jsou zařazeny všechny slovní úlohy, ve kterých se počítají statistické pojmy, jako jsou průměry, modus, medián, směrodatná odchylka, rozptyl a další. Jsou zde zařazeny také konstrukce *histogramů*.

***Slovní úlohy na logické operace*:**
Slovní úlohy na logické operace jsou úlohy, které se obvykle řeší pomocí pravidel výrokové logiky. V těchto úlohách se často hledají „logické vztahy“ mezi osobami a předměty. Patří sem také dokazování či vyvracení pravdivosti výroků a výrokových forem a vyhodnocování úsudků.

***Slovní úlohy na extrémy a optimalizaci*:**
Ve slovních úlohách na extrémy máme za úkol určit nejmenší či největší hodnoty určené veličiny. Nejčastěji k tomu používáme matematické analýzy. V úlohách na optimalizaci hledáme nejvýhodnější řešení dané situace.

***Slovní úlohy s fyzikální tematikou*:**
Při řešení slovních úloh s fyzikální tematikou používáme vzorců, které jsou známé ve fyzice. Řadíme sem také úlohy z astronomie a úlohy o působení sil. Nejsou sem zařazeny slovní úlohy o pohybu, které jsou samostatnou skupinou.

***Slovní úlohy o geometrických útvarech*:**
V těchto slovních úlohách určujeme velikosti na geometrických útvarech (vzdálenosti, odchylky apod.). Dále počítáme obsahy a obvody rovinných obrazců a objemy a povrchy těles. Také sem řadíme trigonometrické úlohy, opět zejména výpočty různých metrických hodnot.

Dále je vhodné se ještě zmínit o úlohách, které slovními úlohami nejsou (nebo je alespoň někteří autoři za slovní úlohy nepovažují), ale někdy jsou modelem nějaké praktické úlohy, takže místo v tomto seznamu mají. Ve sbírkách matematických příkladů se vyskytují a budu se dále jimi zabývat. Jsou to tyto **úlohy**:

***Konstrukční úlohy*:**
V konstrukčních úlohách je úkolem sestrojit určitý geometrický útvar, jež má požadované vlastnosti. Konstrukční úlohy stojí na hranici slovních úloh, v našem případě jsou již řazeny

jako samostatná skupina. Do konstrukčních úloh jsou zařazeny i úlohy, kdy máme určit množinu bodů dané vlastnosti, zejména pomocí analytické geometrie.

***Matematické úlohy*:**
Matematické úlohy již nepatří mezi slovní úlohy. Jsou to úlohy typu: „Řešte . . .“, „Upravte . . .“, „Zjednodušte . . .“, ale i „Dokažte . . .“. V matematických učebnicích jich bývá nejvíce, protože jsou základem pro řešení dalších úloh, třeba i slovních.

***Úlohy o množinách*:**
Úlohy o množinách se do učebnic dostávají většinou až v poslední době, a to ještě ve velmi omezeném počtu. Některé množinové metody pomáhají řešit slovní úlohy jiných typů. Do množinových úloh jsou také řazeny úlohy určení definičního oboru (tj. číselné množiny či intervalu).

Tyto skupiny úloh pak bývají dále členěny. Zajímavé dělení slovních úloh o pohybu uvádí Jakub Ševčík ve své diplomové práci „Humanizace matematického vzdělávání (se zaměřením na úlohy o pohybu)“ (UP Olomouc, 1997). Současně připojuje četnost úloh v souboru a jejich procentuální zastoupení v souboru.

Pohybující se objekt:	**Počet úloh:**	**Procentuální zastoupení:**
Pěší	148	28,03 %
Vlaky	132	25,00 %
Automobily	85	16,10 %
Cyklisté	69	13,07 %
Plavidla	42	7,95 %
Vozy (tažené)	27	5,12 %
Letadla	24	4,55 %
Motocykly	20	3,79 %
Jezdci na koních	18	3,41 %
Autobusy	15	2,84 %
Zvířata	10	1,89 %
Plavci	6	1,14 %
Traktory	4	0,76 %
Tramvaje	4	0,76 %
Trolejbusy	4	0,76 %
Balón	1	0,19 %

Dále uvedu ještě jedno rozdělení slovních úloh s praktickými náměty, které jsou základem pro řešení slovních úloh ve školské matematice. Rozdělení je popsáno v [80], str. 81 – 92. Autoři rozdělují slovní úlohy s praktickými náměty podle účelu, jaký má mít slovní úloha při vyučování matematiky, a podle toho, jak se reálná situace popsaná slovní úlohou shoduje (nebo jak by se mohla shodovat) s praxí. Z tohoto hlediska je vhodné rozdělit slovní úlohy s praktickými náměty do čtyř skupin: (a) základní úlohy, (b) aktuální úlohy, (c) cvičné úlohy, (d) zábavné úlohy.

(a) ***Základní úlohy*:**
Základními úlohami rozumíme slovní úlohy vycházející z praxe, jejichž námět a problematika mají trvalejší ráz. Slovní úlohy by měly být systematicky řazeny a tento systém by měl pokrývat maximálně možný počet problémů různých oborů. Jedná se o problémy řešitelné pomocí matematiky. Řešení úloh obsažených v systému by mělo zlepšovat vzdělanostní úroveň

a rozhled žáků. Takové slovní úlohy by měly dobře vystihnout možnou problematiku příslušného úseku praxe. Hlavním zdrojem základních úloh jsou učebnice matematiky a sbírky úloh z matematiky.

(b) ***Aktuální úlohy***:
Aktuální úlohy se od základních úloh liší tím, že reagují na poslední stav a změny v praxi. Jsou založeny na čerstvých údajích týkajících se např. hospodářských výsledků za uplynulé období, výsledků plánování výroby, statistických výsledků při sčítání lidu, současných hospodářských a sociálních opatření i posledních výsledků ve vědě, výzkumu, sportu a kultuře. Takovéto úlohy nenajdeme v učebnicích a sbírkách, mohou a mají je pohotově tvořit sami učitelé matematiky. Při tvorbě musí najít optimální míru jejich použití. Zdrojem aktuálních údajů pro vyučující mohou být zejména různé ročenky, výsledky statistických šetření, ale také informace v tisku a různé normy a zákony, dnes již běžně dostupné na internetu.

(c) ***Cvičné úlohy***:
Cvičné úlohy jsou zaměřeny na procvičování právě probíraného matematického učiva. Praktické pojmy jsou užity jen zčásti a jen pro jednoduchou ilustraci matematických pojmů nebo operací. Cvičné úlohy by měl umět tvořit každý vyučující.

(d) ***Zábavné úlohy***:
Zábavné úlohy, hříčky a hlavolamy bývají rovněž formulovány pomocí praktických pojmů. Jejich význam pro vyučování je nesporný zejména při podněcování zájmu žáků o matematiku. Proto je nacházíme a budeme nacházet v učebnicích, sbírkách příkladů a v různých časopisech. Praktické pojmy zde bývají jen pozadím. Zábavné úlohy budeme proto posuzovat jen částečně jako slovní úlohy s praktickými náměty.

Uvedené rozdělení slovních úloh je jen orientační, nejde o definice třídění, ale pomůže učitelům i studentům posoudit použitelnost úloh a u jednotlivých druhů odlišit nároky na formulaci, aktuálnost, hloubku souvislostí s praxí, přínos vyučujícího apod.

Vzhledem k zaměření práce na matematické modely a metody řešení nebudu dále toto hledisko u jednotlivých úloh sledovat.

1.3.2. Zastoupení slovních úloh v souborech úloh

Při sledování zastoupení jednotlivých úloh v učebnicích matematiky a ve sbírkách úloh je důležité, jaký záměr autor sledoval. Existují sbírky, kdy se autor zabývá pouze slovními úlohami, jindy do sbírky zahrnuje všechny matematické úlohy.

Pro porovnání jsem vybral tyto sbírky příkladů:

Sbírka 1:	*Bydžovský, B., Vojtěch, J.*: Sbírka úloh z matematiky pro vyšší třídy SŠ; 1924.
Sbírka 2:	*Maška, O.*: Matematika v úlohách - I. Aritmetika a algebra; 1936.
Sbírka 3:	*Ostrý, M.*: Aritmetika v úlohách; 1948.
Sbírka 4:	*Vejsada,F., Talafous, F.*: Sbírka úloh z matematiky pro SVVŠ; 1969.
Sbírka 5:	*Benda, P. a kol.*: Sbírka maturitních příkladů z matematiky; 1983.
Sbírka 6:	*Běloun, F. a kol.*: Sbírka úloh z matematiky pro ZŠ; 1998.
Sbírka 7:	*Czudek, P. a kol.*: Slovní úlohy řešené rovnicemi - 555 úloh; 1998.
Sbírka 8:	*Kováčik, J. a kol.*: Řešené příklady z matematiky pro SŠ; 2004.

Sbírky příkladů jsou z let 1924 – 2004. Jsou seřazeny podle roku vydání, časové odstupy mezi nimi jsou většinou 10 – 15 let. Pouze poslední tři sbírky tento interval narušují. Jedná se zvláště o sbírku řešených příkladů z r. 1998, kterou jsem považoval za nutné zařadit, protože se věnovala prvním sedmi typům příkladů. Označuji je jako „klasické“. Četnost příkladů jednotlivých skupin byla následující (viz tabulka 1-1):

Tabulka 1-1:

Typ úlohy	Sbírka 1	Sbírka 2	Sbírka 3	Sbírka 4	Sbírka 5	Sbírka 6	Sbírka 7	Sbírka 8
Celek a část (1)	54	12	3	54	9	136	188	12
Číslo (2)	103	11	7	54	15	22	130	19
Pohyb (3)	75	7	6	70	6	34	55	7
Směsi (4)	27	2	13	22	1	17	70	4
Společná práce (5)	29	3	2	30	5	22	56	7
Věk (6)	10	2	0	1	0	0	16	1
Procenta (7)	6	0	5	14	2	20	2	2
Kombinatorika (8)	15	18	4	10	18	0	0	19
Pravděpodob. (9)	79	32	19	102	19	0	0	45
Finančnictví (10)	84	63	64	22	3	15	0	14
Posloupnost (11)	28	35	10	30	36	0	0	24
Statistika (12)	13	0	0	49	0	26	0	0
Logika (13)	0	0	0	0	13	0	0	0
Extrémy (14)	20	0	5	35	1	0	0	4
Fyzikální (15)	67	2	45	151	17	10	0	1
Geometrické (16)	814	6	39	705	241	277	38	81
Konstrukční (17)	471	0	0	306	123	104	0	0
Matematické (18)	2988	341	380	2357	592	353	0	952
Množiny (19)	0	0	0	58	33	0	0	63
Celkem	4883	534	602	4070	1134	1036	555	1255
Jen SÚ	1424	193	222	1349	386	579	555	240

Z tabulky 1-1 je zřejmé, že zastoupení různých typů úloh v jednotlivých sbírkách je v některých případech téměř rovnoměrné, v jiných případech dosti kolísající. Příkladem kolísavosti jsou slovní úlohy o geometrických útvarech, jejichž zařazení se pohybuje od 3 % do téměř 63 % (rozdíl je téměř 60 %). Naopak příkladem rovnoměrnosti (pomineme-li speciální sbírku 7) jsou slovní úlohy typu 1 – 7, označované jako klasické.

Pro lepší porovnání jednotlivých sbírek úloh jsem hodnoty vyjádřil v procentech (viz tabulka 1-2). V této tabulce jsou již uváděny jen slovní úlohy. Jejich celkový počet je 100 %, ostatní hodnoty jsou uváděny v procentech ve vztahu k celkovému počtu.

V tabulce 1-3 jsou slovní úlohy shrnuty do čtyř skupin – klasické (typy 1 – 7), speciální (typy 8 – 14), fyzikální (typ 15) a geometrické (typ 16). Dále jsou přiřazeny úlohy konstrukční (typ 17), úlohy matematické (typ 18) a úlohy o množinách (typ 19) a je uvedena četnost těchto úloh. V tabulce 1-4 je pak uvedeno jejich procentuální zastoupení.

Tabulka 1-2:

Typ úlohy	Sbírka 1	Sbírka 2	Sbírka 3	Sbírka 4	Sbírka 5	Sbírka 6	Sbírka 7	Sbírka 8
Celek a část (1)	3,8	6,2	1,4	4,0	2,3	23,5	33,9	5,0
Číslo (2)	7,2	5,7	3,2	4,0	3,9	3,8	23,4	7,9
Pohyb (3)	5,3	3,6	2,7	5,2	1,6	5,9	9,9	2,9
Směsi (4)	1,9	1,0	5,9	1,6	0,3	2,9	12,6	1,7
Společná práce (5)	2,0	1,6	0,9	2,2	1,3	3,8	10,1	2,9
Věk (6)	0,7	1,0	0	0,1	0	0	2,9	0,4
Procenta (7)	0,4	0	2,3	1,0	0,5	3,5	0,4	0,8
Kombinatorika (8)	1,1	9,3	1,8	0,8	4,7	0	0	7,9
Pravděpodob. (9)	5,5	16,6	8,6	7,6	4,9	0	0	18,8
Finančnictví (10)	5,9	32,6	28,8	1,6	0,8	2,6	0	5,8
Posloupnost (11)	2,0	18,1	4,5	2,2	9,3	0	0	10,0
Statistika (12)	0,9	0	0	3,6	0	4,5	0	0
Logika (13)	0	0	0	0	3,4	0	0	0
Extrémy (14)	1,4	0	2,3	2,6	0,3	0	0	1,7
Fyzikální (15)	4,7	1	20,3	11,2	4,4	1,7	0	0,4
Geometrické (16)	57,2	3,1	17,6	52,3	62,4	47,8	6,8	33,8
Slovní úlohy	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Tabulka 1-3:

Typ úlohy	Sbírka 1	Sbírka 2	Sbírka 3	Sbírka 4	Sbírka 5	Sbírka 6	Sbírka 7	Sbírka 8
Klasické	304	37	36	245	38	251	517	52
Speciální	239	148	102	248	90	41	0	106
Fyzikální	67	2	45	151	17	10	0	1
Geometrické	814	6	39	705	241	277	38	81
Konstrukční	471	0	0	306	123	104	0	0
Matematické	2988	341	380	2357	592	353	0	952
Množiny	0	0	0	58	33	0	0	63
Celkem	4883	534	602	4070	1134	1036	555	1255

Tabulka 1-4:

Typ úlohy	Sbírka 1	Sbírka 2	Sbírka 3	Sbírka 4	Sbírka 5	Sbírka 6	Sbírka 7	Sbírka 8
Klasické	6,2	6,9	6,0	6,0	3,4	24,2	93,2	4,1
Speciální	4,9	27,7	16,9	6,1	7,9	4,0	0	8,4
Fyzikální	1,4	0,4	7,5	3,7	1,5	1,0	0	0,1
Geometrické	16,7	1,1	6,5	17,3	21,3	26,7	6,8	6,5
Konstrukční	9,6	0	0	7,5	10,8	10,0	0	0
Matematické	61,2	63,9	63,1	57,9	52,2	34,1	0	75,9
Množiny	0	0	0	1,4	2,9	0	0	5,0
Celkem	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Z tabulky 1-4 je opět zřejmé, že sbírka 7 je speciální a při porovnávání zastoupení jednotlivých typů příkladů k ní budeme pouze přihlížet (nebude pro nás směrodatná). Nejčastěji zde absentují úlohy o množinách. Tyto úlohy se ve sledovaném souboru objevují až v r. 1969. Jejich procentuální zastoupení je také nejnižší. Nejčastěji se ve sbírkách objevují matematické úlohy, ze slovních jsou to pak úlohy o geometrických útvarech. Pokud bychom sloučili klasické a speciální slovní úlohy do jednoho celku, pak by se tyto úlohy v kritériu „Procento zastoupení" objevovaly častěji než úlohy o geometrických útvarech. Z toho je zřejmé, jak velmi záleží na zvolené metodice členění.

Vynecháme-li speciální sbírku 7, dostáváme následující pořadí členění typů úloh:

Typ úlohy:	**Procento zastoupení:**	**Pořadí:**	**Četnost zastoupení:**	**Vyjádřeno v procentech:**	**Pořadí:**
Matematické (18)	58,33 %	1.	7963	58,92 %	1.
Geometrické (16)	13,73 %	2.	2163	16,01 %	2.
Speciální (8-14)	10,84 %	3.	974	7,21 %	4.
Klasické (1-7)	8,11 %	4.	963	7,13 %	5.
Konstrukční (17)	5,41 %	5.	1004	7,43 %	3.
Fyzikální (15)	2,23 %	6.	293	2,17 %	6.
Množiny (19)	1,33 %	7.	154	1,14 %	7.
Celkem	**99.98** %		**13514**	**100,01** %	

Ve sloupci „Procento zastoupení" je uveden aritmetický průměr příslušných hodnot (procent) sloupců 1 – 6 a 8 z tabulky 1-4, ve sloupci „Vyjádřeno v procentech" je procentuálně vyjádřena relativní četnost jednotlivých úloh.

Z poslední tabulky je zřejmé, že matematické úlohy převažují nad ostatními úlohami, tvoří více než polovinu všech úloh. Pokud bychom sečetli všechny typy slovních úloh (jedná se o typy 1 – 16 v tabulce 1-1), umístily by se zcela jednoznačně na druhém místě. Až potom by následovaly ostatní typy úloh (samozřejmě s výjimkou matematických).

Porovnávání zastoupení jednotlivých typů slovních úloh je velmi náročné a vyskytuje se při něm několik úskalí. Hned na začátku často stojíme před nerudovským problémem „kam s ním". Stává se, že je možné zařadit určitou slovní úlohu do více kategorií. Držel jsem se členění, které je popsáno výše v části 1.3.1 a je označeno „typy slovních úloh". Dále autoři knih a sbírek sledují určitý záměr. Proto některé úlohy preferují, jiné opomíjejí. Jiné úlohy bude obsahovat sbírka příkladů pro gymnázia, jiné úlohy sbírka příkladů pro obchodní akademie a jiné úlohy sbírka příkladů pro střední školy obecně. Také formulace slovních úloh jsou poplatné době a místu vzniku. Tento problém však má na zařazení úloh jen marginální vliv. A je nutné také připomenout, že i v matematice existuje „společenská objednávka". Proto vznikají sbírky maturitních příkladů, sbírky úloh z finanční matematiky a vznikla tak i sbírka „Slovní úlohy řešené rovnicemi" a také příloha 1 této disertační práce. Proto je třeba konstatovat, že poslední srovnání (viz tabulky 1-1 až 1-4) jsou více informativní a jsou pouze podnětem k zamyšlení nad obsahy dalších sbírek slovních úloh (i těch, které teprve budou vznikat). Znamená to, že četnost úloh by se měla měnit nikoliv podle nějaké obecné šablony, ale podle toho, komu jsou úlohy určeny. Je to vlastně doporučení k tvorbě co nejpestřejší škály sbírek.

1.4. Zapojení matematiky do řešení reálných problémů

Uvedeme si nyní ukázku jednoho (již formulovaného) reálného problému a podrobného popisu jeho řešení užitím matematizace reálné situace v užším smyslu.

***Příklad* 0.0.3:**
Čtyři přátelé – Adam, Bořivoj, Cyril a David – vlastnili nahrávky dechových kapel. Domluvili se, že si skladby vzájemně přehrají. Jak se finančně vyrovnali, zaplatil-li Adam za nahrávky Mistříňanky 36 euro, Bořivoj za nahrávky Budvarky 18 euro, Cyril za nahrávky Zlaťanky 12 euro a David za nahrávky Samsonky 10 euro?

Text příkladu popisuje určitou reálnou situaci. I když můžeme popis považovat za zjednodušený (nemluví se například o dalších nákladech s pořizováním nahrávek – poštovné apod.), můžeme jej považovat za objektivní obraz dané reality. Současně můžeme text označit jako *verbálně-grafický model* reálné situace. Můžeme tedy text považovat za zadání slovní úlohy ve školní matematice.

Reálná situace je popsána verbálně-grafickým modelem takto:
Adam . . . . . Mistříňanka . . . . . zaplaceno 36 €,
Bořivoj . . . . Budvarka . . . . . . zaplaceno 18 €,
Cyril . . . . . . Zlaťanka . . . . zaplaceno 12 €,
David . . . . . Samsonka . . . . . . zaplaceno 10 €.

Analýza reálné situace odhaluje, že každý z přátel zaplatil jinou částku – Adam 36 €, Bořivoj 18 €, Cyril 12 €, David 10 €, ale všichni budou poslouchat stejné nahrávky.

Reálný problém je následující:
Jak se mají finančně vyrovnat, aby „investovali“ nakonec všichni stejně. Musíme určit, kdo a kolik „připlatí“, a kdo z ostatních a kolik si z příplatku „vezme“.

Reálná úloha je následující:
Vyřešte, jak to udělat, aby všichni přátelé zaplatili stejně, a určete, kdo a kolik euro bude doplácet, a kdo a kolik euro si z doplatku vezme, předpokládáme-li uvedené vklady jednotlivých přátel a všichni nakonec zaplatí stejně.

Vytvoříme **matematický model reálné situace**:
Adam . . . . . zaplatil 36 € . . . . . označme a [€] . . . . . vyrovnání bude x [€],
Bořivoj . . . . zaplatil 18 € . . . . . označme b [€] . . . . . vyrovnání bude y [€],
Cyril . . . . . . zaplatil 12 € . . . . . označme c [€] . . . . . vyrovnání bude z [€],
David . . . . . zaplatil 10 € . . . . . označme d [€] . . . . . vyrovnání bude w [€].

Matematický model reálného problému je následující:
Chceme, aby všichni platili stejně, tuto částku označme r. Částka r musí být aritmetickým průměrem všech zaplacených částek. Je tedy rovna

$$r = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

Potom musíme určit hodnoty x, y, z, w tak, aby platilo

$$x = a - r,$$
$$y = b - r,$$
$$z = c - r,$$
$$w = d - r.$$

Dostáváme **matematickou úlohu**:
Najděte taková čísla x, y, z, w, aby platilo: $x = a - r$, $y = b - r$, $z = c - r$, $w = d - r$, kde $r = \frac{a+b+c+d}{4}$.

Řešení matematické úlohy (problému):
Protože dané hodnoty jsme si označili pomocí parametrů a, b, c, d, budeme úlohu řešit parametricky (tedy obecně). Tím dostáváme vztahy (vzorce) pro neznámé x, y, z, w.

$$x = a - r = a - \frac{a+b+c+d}{4} = \underline{\underline{\frac{3a-b-c-d}{4}}}, \tag{1-1a}$$

$$y = b - r = b - \frac{a+b+c+d}{4} = \underline{\underline{\frac{3b-a-c-d}{4}}}, \tag{1-1b}$$

$$z = c - r = c - \frac{a+b+c+d}{4} = \underline{\underline{\frac{3c-a-b-d}{4}}}, \tag{1-1c}$$

$$w = d - r = d - \frac{a+b+c+d}{4} = \underline{\underline{\frac{3d-a-b-c}{4}}}. \tag{1-1d}$$

Pro konkrétní hodnoty dostáváme:

$$x = \frac{3a-b-c-d}{4} = \frac{3\cdot 36-18-12-10}{4} = \underline{\underline{+17}}\ [€],$$

$$y = \frac{3b-a-c-d}{4} = \frac{3\cdot 18-36-12-10}{4} = \underline{\underline{-1}}\ [€],$$

$$z = \frac{3c-a-b-d}{4} = \frac{3\cdot 12-36-18-10}{4} = \underline{\underline{-7}}\ [€],$$

$$w = \frac{3d-a-b-c}{4} = \frac{3\cdot 10-36-18-12}{4} = \underline{\underline{-9}}\ [€].$$

Matematická úloha je vyřešena, zbývá ještě udělat zkoušku 1 (ověření správnosti postupu při řešení matematické úlohy). Tato zkouška bývá často vynechávána, jednak proto, že je pouze ověřením, zda jsou matematické operace správně provedeny, jednak proto, že následuje ještě jedna zkouška a ta je schopna první zkoušku nahradit.

Zkouška 1:
$r = \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{36+18+12+10}{4} = 19$ [€]; $x = a - r = 36 - 19 = 17$ [€], $y = b - r = 18 - 19 = -1$ [€], $z = c - r = 12 - 19 = -7$ [€], $w = d - r = 10 - 19 = -9$ [€].

Nyní provedeme **navrácení do dané reálné situace** – matematický výsledek přeložíme do jazyka výchozí reálné situace a nabídneme jej praxi:
Adam obdrží 17 [€], Bořivoj zaplatí 1 [€], Cyril zaplatí 7 [€] a David zaplatí 9 [€], všichni Adamovi.

Na závěr provedeme **zkoušku 2**:
Platby celkem: 17 – 1 – 7 – 9 = 0 [€]. To znamená, že peníze, které doplatí jednotliví přátelé, si ostatní zase rozeberou. Protože průměrná cena je 19 [€], Adam celkem dostane 36 – 19 = 17 [€], kdežto ostatní budou mít dluh, který musí vyrovnat Adamovi: Bořivoj 18 – 19 = – 1 [€], Cyril 12 – 19 = – 7 [€], David 10 – 19 = – 9 [€].

Praxe tedy přijme řešení a výsledek je realizován: Bořivoj zaplatí Adamovi 1 [€], Cyril 7 [€] a David 9 [€].

Poznámka:
Úlohu jsem řešil obecně, a tím jsem dostal vzorce pro hledané hodnoty. Je možné postupovat i konkrétně. Potom se řešení velmi podobá zkoušce 1. Postup je jednodušší, ale použitelný pouze pro jediné zadání (naopak vzorce můžeme použít pro libovolně zadané hodnoty). Budu-li příště stát znovu před touto volbou, budu opět častěji používat obecný postup.

Kapitola II - Metody řešení slovních úloh a jejich modely

V úvodní části této kapitoly předkládám přehled matematických modelů, které se používají při řešení slovních úloh na základních a středních školách při klasických hodinách matematiky. Dále uvádím některé méně obvyklé matematické modely, které jsou pak rozpracovány v následující kapitole (je možné je použít v nestandardních hodinách). Nakonec zařazuji i složitější modely, které je možné použít při řešení slovních úloh při rozšířené výuce matematiky (v seminářích, na školách s rozšířenou výukou matematiky, při přípravě na různé matematické soutěže apod.). Metodou řešení slovní úlohy pak rozumím volbu matematického modelu včetně postupu, jak problém (úlohu) na zvolený matematický model převedu (dále už zde přívlastek „matematický" vynechávám). Na závěr ještě připomínám trochu opomíjené metody, jsou jimi metody chybných předpokladů.

2.1. Přehled modelů při základní výuce matematiky

2.1.1. Úsudky a množinové modely

2.1.1.1. *Jednoduché úsudky*

Jednoduché úsudky je vhodné použít, je-li reálná situace přehledná a jednotlivé vztahy je možné dobře interpretovat. Ukažme si to v následující slovní úloze o pohybu, kdy jeden subjekt dohání druhý.

***Příklad* 0.1.1:**
Za cyklistou jedoucí průměrnou rychlostí 20 km/h vyjede z téhož místa o 2 hodiny později auto rychlostí 60 km/h. Za jak dlouho dohoní auto cyklistu?

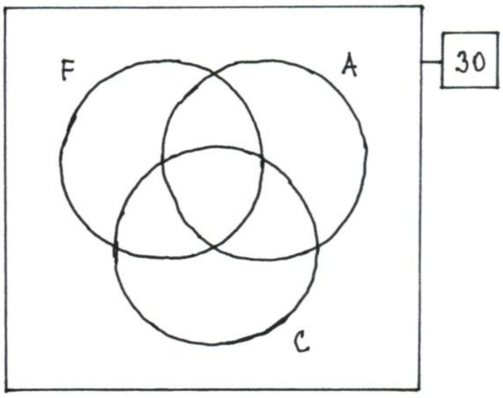
Řešení:
Cyklista získá za 2 hodiny jízdy náskok $2 \cdot 20 = 40$ km. Tento náskok se po výjezdu auta snižuje každou hodinu o $60 - 20 = 40$ km.
O tento náskok přijde cyklista za $40 : 40 = 1$ hodinu.
Zkouška:
Dráha cyklisty $s_c = 20 \cdot 3 = 60$ km.
Dráha auta $s_a = 60 \cdot 1 = 60$ km.
Odpověď:
Auto dohoní cyklistu za 1 hodinu.

2.1.1.2. *Modelování pomocí množin* (*Vennovy diagramy*)

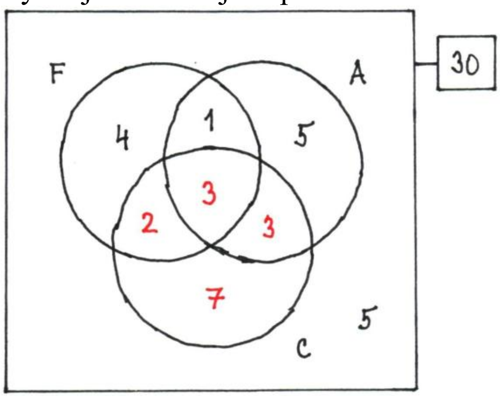
I když ve slovní úloze mohou být vztahy mezi subjekty reálné situace poměrně jednoduché, větší počet subjektů a velký počet údajů o nich nám mohou řešení úlohy komplikovat. Abychom reálnou situaci měli přehlednější, modelujeme ji pomocí Vennových diagramů, tj. užíváme množinový model.

***Příklad* 0.1.2:**
Ve třídě je 30 žáků. 5 z nich nesportuje vůbec, ostatní hrají fotbal, věnují se atletice a jezdí na kole. Z nich 10 hraje fotbal, alespoň dva sporty provozuje 9 žáků, všechny tři sporty provozují 3 žáci. Jen atletice se věnuje 5 žáků, jen cyklistice 7 žáků. Fotbal nebo cyklistiku, ale ne atletiku dělá 13 žáků. Kolik z nich jezdí na kole?

Řešení:
K řešení použijeme Vennovy diagramy pro 3 množiny (fotbal, atletika, cyklistika), základní množina *U* bude celá třída:
Do tohoto diagramu postupně zapisujeme známé údaje, od jednodušších po složitější:



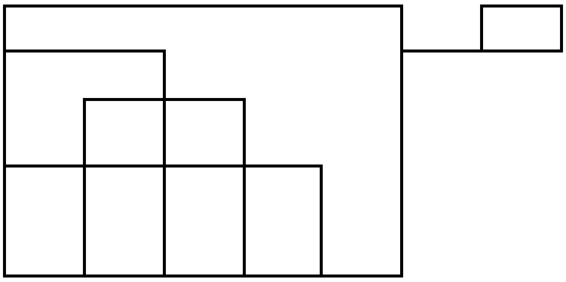
nesportuje . . . . 5 žáků,
všechny tři sporty provozují . . . . 3 žáci,
jen atletice se věnuje . . . . 5 žáků,
jen cyklistice se věnuje . . . . 7 žáků,
alespoň jeden sport provozuje . . . 30 – 5 = 25 žáků,
právě jeden sport provozuje . . . . . 25 – 9 = 16 žáků,
jen fotbal hraje . . . . 16 – 7 – 5 = 4 žáci,
jen fotbal a cyklistiku dělají . . . 13 – 7 – 4 = 2 žáci.
Dále počítáme a zapíšeme do diagramu:
jen fotbal a současně atletiku dělají . . . 10 – 3 – 4 – 2 = 1 žák,
právě dva sporty provozují . . . . 9 – 3 = 6 žáků,
jen atletiku a současně cyklistiku dělají . . . 6 – 2 – 1 = 3 žáci.
Tyto zjištěné údaje zapíšeme do Vennova diagramu:

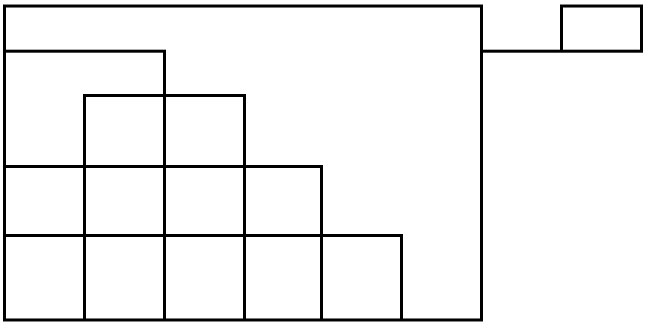


Z grafu (Vennova diagramu) je zřejmé, že na kole jezdí . . . 7 + 3 + 3 + 2 = <u>15 žáků</u>.
Zkouška:
Zkouška (splnění zadaných podmínek) plyne z Vennova diagramu. Mohli bychom ji též udělat tak, že příklad vypočteme jinou metodou, např. pomocí soustav rovnic (což v našem případě není příliš vhodné, neboť jde o soustavu 7 rovnic pro 7 neznámých).

Odpověď:
Na kole jezdí 15 žáků třídy.

Poznámka:
Vennovy diagramy mohou mít různou podobu. Kromě kruhových znázornění jednotlivých množin se v praxi osvědčila znázornění následujícího tvaru (mohou být jak hranatá, tak zaoblená):





2.1.2. Aritmetické a algebraické modely

2.1.2.1. *Aritmetické operace*

Úlohy, které vedou na aritmetické operace, jsou častější u mladších žáků, kteří se těmto operacím učí nebo si je procvičují.

***Příklad* 0.1.3.**
Pan Vávra měl v loňském roce měsíční mzdu 18 500 Kč „čistého“. V zimních měsících měl ztížené pracovní podmínky, takže se jeho čistá mzda zvětšila v lednu a únoru o 8 %, v prosinci a v březnu o 6 %. V červenci měl dovolenou, takže bral jen 93 % normální mzdy. Kolik si za loňský rok vydělal?

Řešení:
Pro řešení není důležité, ve kterých měsících bral pan Vávra jinou mzdu než normálně, takže:
normálních měsíců bylo 7, vydělal si tedy 7·18 500 Kč,
2 měsíce byly s prémií 8 %, což dává 2·1,08·18 500 Kč,
2 měsíce byly s prémií 6 %, což dává 2·1,06·18 500 Kč,
1 měsíc bral jen 93 %, což dává 0,93·18 500 Kč.
Celkem je to S = 7·18 500 + 2·1,08·18 500 + 2·1,06·18 500 + 0,93·18 500.
Pro výpočet na kalkulačce je vhodné vytknout 18 500, takže

S = (7 + 2,16 + 2,12 + 0,93) · 18 500 = (užití kalkulačky) = 225 885 Kč.
Zkoušku
je účelné provést jen novým výpočtem (případně jinou osobou).
Odpověď:
Pan Vávra si v loňském roce vydělal 225 885 Kč.

2.1.2.2. *Užití dělitelnosti*

Na použití dělitelnosti často vedou úlohy, kdy se určité operace opakují v různých neměnných intervalech a nás zajímá, kdy opět nastane stejná situace jako na začátku děje. Vybral jsem úlohu, která se blíží úlohám zábavným.

***Příklad* 0.1.4:**
Je pondělí 6 hodin ráno. Beru si pilulku A, kterou mám užívat každých 6 hodin, pilulku B, kterou mám užívat každých 8 hodin, a pilulku C, kterou mám užívat každých 10 hodin. Kdy zase budu brát všechny tři pilulky najednou?

Řešení:
Je zřejmé, že požadovaná situace nastane za takový počet hodin, který bude nejmenším společným násobkem všech daných intervalů.
A . . . . . 6 h . . . . . $6 = 2 \cdot 3$,
B . . . . . 8 h . . . . . $8 = 2^3$,
C . . . . 10 h . . . . $10 = 2 \cdot 5$,
potom nejmenší společný násobek daných čísel $n(A, B, C) = n(6; 8; 10) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ hodin.
Požadovaná situace nastane za 120 : 24 = 5 dnů, tj. v sobotu v 6 hodin ráno.
Zkouška:
Za 120 hodin vezmu pilulku A celkem 120 : 6 = 20-krát, pilulku B celkem 120 : 8 = 15-krát a pilulku C celkem 120 : 10 = 12-krát. Protože největší společný dělitel těchto čísel D(20; 15; 12) = 1, je 120 hodin první možností, kdy všechny tři pilulky budu brát opět společně.
Odpověď:
Všechny tři pilulky budu brát zase najednou v sobotu v 6 hodin ráno.

2.1.2.3. *Užití přímé úměrnosti*

Časté jsou též úlohy, které se řeší pomocí přímé či nepřímé úměrnosti. Metody řešení se v některých učebnicích nazývají trojčlenka, v jiných se nazývají úměra. Jedná se o jednoduché závislosti, které se objevují již u nejjednodušších úloh na základní škole.

***Příklad* 0.1.5:**
Pro 8 osob se počítá s 500 gramy sýra. Kolik gramů síra je třeba koupit pro 10 osob, chceme-li zachovat velikost porce sýra?

Řešení:
Je zřejmé, že zvětšením počtu osob budeme potřebovat více sýra. Tato závislost se nazývá přímá úměrnost. Označíme-li si neznámou x množství sýra pro 10 osob, můžeme zapsat:

$$\uparrow \begin{array}{l} 8\,osob \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, 500\ g \\ \underline{10\ osob \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\ \ x\ g} \end{array} \uparrow$$

$$\frac{x}{500} = \frac{10}{8} \rightarrow x = \frac{5\,000}{8} \rightarrow \underline{\underline{x = 625}}\ \text{g}.$$

Zkouška:
Protože velikost porce v obou případech musí být stejná, ověříme to.
Velikost jedné porce pro 8 osob je 500 : 8 = 62,5 g, velikost jedné porce pro 10 osob je 625 : 10 = 62,5 g. Všechny porce jsou stejné.
Odpověď:
Pro 10 osob je třeba koupit 625 g sýra.

Poznámka:
Tato úloha je v praxi velmi typická zejména v kuchařství. Recepty na různé druhy pokrmů bývají nejčastěji psány pro 4 porce. Pro jiný počet porcí (ať už méně – pro 2 nebo 3 porce, či více – pro 6, 8 , 10 atd. porcí) je třeba hodnoty velikostí jednotlivých příměsí přepočítávat stejným způsobem.

2.1.2.4. *Užití nepřímé úměrnosti*

***Příklad* 0.1.6:**
Když do prázdného bazénu začne přitékat voda rychlostí 4 hektolitry za minutu, bazén se naplní za 9 hodin. Za jak dlouho by se bazén naplnil výkonnějším čerpadlem, které přivádí do bazénu 5 hektolitrů za minutu?

Řešení:
Je zřejmé, že výkonnější čerpadlo naplní bazén dříve. Tato závislost se nazývá nepřímá úměrnost. Označíme-li si neznámou x dobu práce druhého čerpadla, můžeme zapsat:

$$\downarrow \begin{array}{l} 4\ hl/\text{min} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, 9\ h \\ \underline{5\ hl/\text{min} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, x\ h} \end{array} \uparrow$$

$$\frac{x}{9} = \frac{4}{5} \rightarrow x = \frac{36}{5} \rightarrow x = 7{,}2\ \text{h} = \underline{\underline{7\ \text{h}\ 12\ \text{min}}}.$$

Zkouška:
Za 9 h nateče prvním čerpadlem $9 \cdot 4 = 36$ hl vody, druhým čerpadlem nateče za 7,2 h $7{,}2 \cdot 5 = 36$ hl vody.
Odpověď:
Bazén by se výkonnějším čerpadlem naplnil za 7 hodin 12 minut.

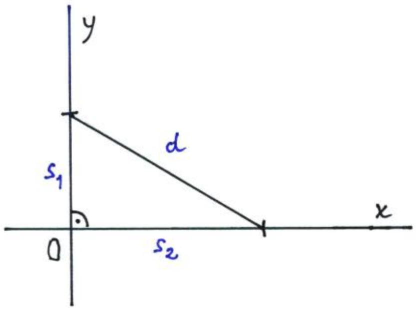
2.1.2.5. *Užití Pythagorovy věty*

Také úlohy, které vedou na užití Pythagorovy věty, se řeší již na základní škole a jsou poměrně časté. Vybral jsem úlohu o pohybu v rovině. Již to, že jsou dráhy pohybujících se subjektů na sebe kolmé, napovídá, že úlohu budeme řešit pomocí Pythagorovy věty.

***Příklad* 0.1.7:**
Z místa, kde se dvě silnice křižují v pravém úhlu, vyjely současně dva povozy, každý po jiné silnici. První ujel za minutu 13,3 m, druhý 15,6 m. Za kolik minut budou od sebe vzdáleny 328 m?

Řešení:
Situace je zakreslena na obrázku 2-1.

Obr. 2-1:



Neznámý čas označme t. Potom první povoz ujede dráhu $s_1 = v_1 \cdot t$, druhý povoz ujede dráhu $s_2 = v_2 \cdot t$. Protože vzdálenost povozů má být v čase t rovna d a velikosti s_1, s_2, d tvoří strany pravoúhlého trojúhelníku, použijeme pro výpočet t Pythagorovu větu.

$$s_1^2 + s_2^2 = d^2$$
$$v_1^2 t^2 + v_2^2 t^2 = d^2$$
$$13{,}3^2 t^2 + 15{,}6^2 t^2 = 328^2$$
$$420{,}25\, t^2 = 107\,584 \quad \big|: 420{,}25$$
$$t^2 = 256 \quad \big| \sqrt{}$$
$$\underline{\underline{t = 16}}\ [\text{min}]$$

Zkouška:
Za 16 min ujede první povoz $13{,}3 \cdot 16 = 212{,}8$ m, druhý povoz ujede $15{,}6 \cdot 16 = 249{,}6$ m. Jejich vzdálenost vypočteme pomocí Pythagorovy věty: $d = \sqrt{212{,}8^2 + 249{,}6^2} = 328$ m.
Odpověď:
Povozy budou od sebe vzdáleny 328 m za 16 minut.

2.1.3. Užití rovnic

2.1.3.1. *Užití lineární rovnice*

Řešení slovní úlohy pomocí lineární rovnice bývá nejužívanějším postupem. Zde jsem vybral úlohu o společné práci, kterou je možno pomocí lineární rovnice řešit přímo nebo na řešení lineární rovnice převést.

***Příklad* 0.1.8:**
Jsem mosazný lev a mými chrliči jsou mé dvě oči, tlama a tlapa mé pravé nohy. Moje pravé oko naplní nádrž za dva dny, moje levé oko za tři dny a moje tlama za čtyři dny. Moje tlapa je

schopna naplnit ji za šest hodin. Řekni mi, za jak dlouho naplní nádrž všechny chrliče dohromady.

Řešení č. 1:
Označíme-li si hledaný počet dní x, potom lze zapsat:
všechny chrliče naplní nádrž za x dní,

pravé oko naplní nádrž za . . . 2 dny . . . za 1 den naplní $\frac{1}{2}$ nádrže, za x dní $\frac{x}{2}$ nádrže,

levé oko naplní nádrž za . . . . 3 dny . . . za 1 den naplní $\frac{1}{3}$ nádrže, za x dní $\frac{x}{3}$ nádrže,

tlama naplní nádrž za . . . . . . 4 dny . . . za 1 den naplní $\frac{1}{4}$ nádrže, za x dní $\frac{x}{4}$ nádrže,

tlapa naplní nádrž za . . . 6 h = $\frac{1}{4}$ dne . . . za 1 den naplní 4 nádrže, za x dní $4 \cdot x$ nádrže.

Z toho plyne

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 4x = 1 \quad \Big| \cdot 12$$

$$6x + 4x + 3x + 48x = 12$$

$$61x = 12 \quad \Big| : 61$$

$$x = \tfrac{12}{61} \text{ dne} \doteq \underline{\underline{\text{4 hodiny 43 minut}}}.$$

Zkouška:
Za $\frac{12}{61}$ dne nateče:

pravým okem: $\frac{12}{61} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{61}$ nádrže, levým okem: $\frac{12}{61} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{61}$ nádrže,

tlamou: $\frac{12}{61} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{61}$ nádrže, tlapou: $\frac{12}{61} \cdot 4 = \frac{48}{61}$ nádrže,

Celkem nateče: $\frac{6}{61} + \frac{4}{61} + \frac{3}{61} + \frac{48}{61} = \frac{61}{61} =$ 1 nádrž.

Odpověď:
Nádrž nateče všemi chrliči najednou asi za 4 hod. 43 min.

Řešení č. 2:
Vyjádříme si jednotlivé výkony za 1 den, hledaný počet dní si označíme x.

Pravé oko naplní nádrž za . . . . . . 2 dny . . . . . za 1 den naplní . . . . . $\frac{1}{2}$ nádrže,

levé oko naplní nádrž za . . . . 3 dny . . . . . za 1 den naplní . . . . . $\frac{1}{3}$ nádrže,

tlama naplní nádrž za . . . . 4 dny . . . . . za 1 den naplní . . . . . $\frac{1}{4}$ nádrže,

tlapa naplní nádrž za . . . . 6 h = $\frac{1}{4}$ dne . . . za 1 den naplní . . . . . 4 nádrže,

všechny chrliče naplní nádrž za . . . x dní . . . . za 1 den naplní . . . . . $\frac{1}{x}$ nádrže.

Pro výkon za 1 den z toho plyne:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 4 = \frac{1}{x} \quad \Big| \cdot 12x$$

a úloha vede na lineární rovnici:

$$6x + 4x + 3x + 48x = 12$$

jejímž řešením je

$$x = \tfrac{12}{61} \text{ dne} \doteq \underline{\underline{\text{4 hodiny 43 minut}}}.$$

Zkouška: a *odpověď* viz řešení č. 1.

2.1.3.2. *Užití kvadratické rovnice*

Také slovní úlohy, které lze řešit kvadratickou rovnicí, se vyskytují poměrně často. Pomocí rovnic řeší slovní úlohy žáci a studenti s oblibou.

***Příklad* 0.1.9:**
Z železniční stanice mělo být vypraveno 11 vlaků po 35 vagónech. Vzhledem k nedostatku lokomotiv byl zmenšen počet vlaků tak, že každý vypravený vlak měl přidáno pětkrát více vagónů, než se ušetřilo lokomotiv. Kolik lokomotiv se ušetřilo a kolik vagónů měl každý vypravený vlak?

Řešení:
Počet ušetřených lokomotiv . . . . x, $0 < x < 11$,
počet lokomotiv po ušetření . . . . $11 - x$,
počet vagónů každého vypraveného vlaku . . . . . $35 + 5x$,
celkový počet vagónů . . . . $11 \cdot 35 = 385$,
potom platí:

$$(11 - x)\cdot(35 + 5x) = 385$$
$$385 + 20x - 5x^2 = 385 \quad \Big| - 385$$
$$-5x^2 + 20x = 0$$
$$-5x\cdot(x - 4) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 4.$$

Protože $x \in (1;\, 11)$, je řešením pouze $\underline{\underline{x = 4}}$.
Zkouška:
Počet ušetřených lokomotiv 4,
počet lokomotiv po ušetření . . . . $11 - 4 = 7$,
počet vagónů každého vypraveného vlaku . . . . . $35 + 5\cdot 4 = 55$,
celkový počet vagónů . . . . $7\cdot 55 = \underline{\underline{385}}$.
Odpověď:
Ušetřily se čtyři lokomotivy a každý vypravený vlak měl 55 vagónů.

***Příklad* 0.1.10:**
Ze stanice vyjedou současně dva vlaky po přímých tratích, jež svírají úhel 156° 30′, jejich rychlosti jsou 13 m a 14,5 m za sekundu; jak jsou od sebe vzdáleny po $5\frac{1}{2}$ minutách?

Řešení:
Dráhy vlaků s_1, s_2 a jejich vzdálenost d tvoří obecný trojúhelník. Strany s_1, s_2 svírají úhel φ = 156° 30′. Vypočteme velikosti stran s_1, s_2 a pomocí kosinové věty nakonec vzdálenost d.
První vlak ujede za 5,5 minuty dráhu $s_1 = v_1\cdot t_1 = 13\cdot 5{,}5\cdot 60 = 4\,290$ m = 4,29 km. Druhý vlak ujede za 5,5 minuty dráhu $s_2 = v_2\cdot t_2 = 14{,}5\cdot 5{,}5\cdot 60 = 4\,785$ m = 4,785 km. Vzdáleni budou

$$d^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2\cdot s_1\cdot s_2\cdot\cos\varphi$$
$$d^2 = 4{,}29^2 + 4{,}785^2 - 2\cdot 4{,}29\cdot 4{,}785\cdot\cos 156°30'$$
$$d^2 \doteq 78{,}95 \quad \Big| \sqrt{\ }$$
$$\underline{\underline{d \doteq 8{,}885}} \text{ km.}$$

Zkouška:
Zkouška vyplývá z platnosti kosinové věty. Např.
Po sekundě budou vlaky vzdáleny

$$d_1 = \sqrt{13^2 + 14{,}5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 14{,}5 \cdot \cos 156°30'} \doteq 26{,}925 \text{ m.}$$

Po 330 sekundách ($5\frac{1}{2}$ minutách) budou vlaky vzdálené $330 \cdot 26{,}925 \doteq 8\,885$ m = 8,885 km.

Odpověď:

Vlaky jsou od sebe vzdáleny po $5\frac{1}{2}$ minutách asi 8,885 km.

Poznámka:

Uvedené dva příklady jsou řešeny pomocí neúplné kvadratické rovnice. Pokud potřebujeme řešit úlohu pomocí úplné kvadratické rovnice, můžeme opět použít rozklad (pokud existuje) nebo řešit rovnici doplněním na čtverec či pomocí diskriminantu. Vzhledem k tomu, že se jedná o metody známé a běžně používané, již je neuvádím.

2.1.3.3. *Užití rovnic vyšších stupňů*

Kromě lineárních a kvadratických rovnic je možné při řešení slovních úloh využít i rovnic vyšších stupňů. Tyto úlohy již nejsou tolik frekventované. Uveďme si jednu z nich, kdy řešení rovnice není složité.

***Příklad* 0.1.11:**

Myslím si číslo. Umocním jej na třetí. Od výsledku odečtu trojnásobek druhé mocniny původního čísla. K novému výsledku přičtu trojnásobek původního čísla a odečtu jedna. Vyjde mi 4096. Jaké jsem si myslel číslo?

Řešení:

Původní myšlené číslo označím ..... x, jeho třetí mocnina je ..... x^3,
odečtu-li trojnásobek druhé mocniny původního čísla $3x^2$, dostávám ..... $x^3 - 3x^2$,
potom přičtu trojnásobek původního čísla $3x$ a odečtu 1, dostávám ..... $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.
Poslední výraz se musí rovnat číslu 4 096, proto platí:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 4\,096$$
$$(x-1)^3 = 16^3 \quad \Big|\ \sqrt[3]{\ }$$
$$x - 1 = 16 \quad \Big|\ +1$$
$$\underline{\underline{x = 17}}$$

Zkouška:

$17^3 - 3 \cdot 17^2 + 3 \cdot 17 - 1 = \underline{\underline{4\,096}}$.

Odpověď:

Původní myšlené číslo je 17.

2.1.3.4. *Užití soustavy rovnic*

Některé slovní úlohy je možné řešit jak jednou rovnicí (zejména lineární), tak soustavu rovnic (také lineárních). Zde jsem vybral úlohu, kterou lze řešit pouze soustavou lineárních rovnic, nikoliv jednou lineární rovnicí. Jsou zde ukázány různé postupy řešení této soustavy.

***Příklad* 0.1.11:**

Ze tří snopů dobré úrody, dvou snopů průměrné úrody a jednoho snopu špatné úrody získali 39 měr zrna. Ze dvou snopů dobré úrody, tří snopů průměrné úrody a jednoho snopu špatné úrody dostali 34 měr zrna. Z jednoho snopu dobré úrody, dvou snopů průměrné úrody a tří snopů špatné úrody získali 26 měr zrna. Kolik měr zrna dostali z každého snopu dobré, průměrné a špatné úrody?

Řešení:
Počet měr zrna z jednoho snopu dobré úrody . . . . d,
počet měr zrna z jednoho snopu průměrné úrody . . . . . p,
počet měr zrna z jednoho snopu špatné úrody . . . . s.
Potom vyjádříme údaje v zadání a dostáváme soustavu:

$$\begin{aligned} 3d + 2p + s &= 39 \\ 2d + 3p + s &= 34 \\ \underline{d + 2p + 3s} &\underline{= 26}\ , \end{aligned}$$

kterou můžeme vyřešit různými metodami. Používají se metody: dosazovací, sčítací, užití úpravy matice koeficientů, Cramerovo pravidlo nebo užití inverzní matice. V dané soustavě jsou koeficienty vcelku jednoduché, takže k řešení použiju metodou sčítací.

$$\begin{array}{l} d + 2p + 3s = 26 \quad \Big|\cdot(-2) \quad \Big|\cdot(-3) \\ 2d + 3p + s = 34 \\ \underline{3d + 2p + s = 39} \\ d + 2p + 3s = 26 \\ \quad -p - 5s = -18 \quad \Big|\cdot(-4) \\ \underline{\quad -4p - 8s = -39} \\ d + 2p + 3s = 26 \\ \qquad p + 5s = 18 \\ \underline{\qquad\quad 12s = 33} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{s = \tfrac{11}{4}}}, \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{p = \tfrac{17}{4}}}, \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{d = \tfrac{37}{4}}}. \end{array}$$

Zkouška:
3 snopy dobré úrody + 2 snopy průměrné úrody + 1 snop špatné úrody:

$$3\cdot\tfrac{37}{4} + 2\cdot\tfrac{17}{4} + 1\cdot\tfrac{11}{4} = \tfrac{111+34+11}{4} = \underline{\underline{39}}\ \text{měr};$$

2 snopy dobré úrody + 3 snopy průměrné úrody + 1 snop špatné úrody:

$$2\cdot\tfrac{37}{4} + 3\cdot\tfrac{17}{4} + 1\cdot\tfrac{11}{4} = \tfrac{74+51+11}{4} = \underline{\underline{34}}\ \text{měr};$$

1 snop dobré úrody + 2 snopy průměrné úrody + 3 snopy špatné úrody:

$$1\cdot\tfrac{37}{4} + 2\cdot\tfrac{17}{4} + 3\cdot\tfrac{11}{4} = \tfrac{37+34+33}{4} = \underline{\underline{26}}\ \text{měr}.$$

Odpověď:
Ze snopu dobré úrody bylo 9,25 míry zrna, ze snopu průměrné úrody bylo 4,25 míry zrna, ze snopu špatné úrody bylo 2,75 míry zrna.

2.1.4. Užití posloupností a řad

2.1.4.1. *Užití aritmetické posloupnosti*

Pokud se číselné údaje uvedené v zadání slovní úlohy pravidelně zvětšují o stále stejnou hodnotu, používáme k řešení aritmetickou posloupnost. Postup je uveden v následující úloze.

***Příklad* 0.1.12:**
Dva lidé vyšli současně z jednoho bodu v opačných směrech po břehu kruhového jezera. První ušel denně 10 km, druhý ušel za den 1 km, ale v každém dalším dni o jeden km více. Když se setkali, zjistili, že první prošel pět osmin obvodu jezera a druhý tři osminy obvodu. Jak dlouhý je obvod jezera a kolik dní byli chodci na cestě?

Řešení:
Počet dní, které šli oba lidé, označme n (jedná se o přirozené číslo).
První ušel dráhu $s_1 = 10 \cdot n$ [km].
Druhý ušel dráhu, kterou můžeme zapsat pomocí aritmetické posloupnosti, jejíž první člen

$a_1 = 1$ a poslední člen $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 1 = n$. Celkem $s_n = \frac{n}{2} \cdot (1+n) = \frac{n^2+n}{2} = s_2$.

Poměr jejich drah je $s_1 : s_2 = 5 : 3$, tedy platí:

$$\frac{10n}{\frac{n^2+n}{2}} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{20n}{n^2+n} = \frac{5}{3} \quad \Big| \cdot 3\,(n^2+n)$$

$$60n = 5n^2 + 5n \quad \Big| -60n$$

$$5n^2 - 55n = 0 \quad \Big| :5$$

$$n\,(n-11) = 0$$

$$n_1 = 0,\ n_2 = 11 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{n = 11}} \ (n \in P).$$

Potom první ušel dráhu $s_1 = 10 \cdot 11 = 110$ km; druhý ušel dráhu $s_2 = \frac{11^2+11}{2} = 66$ km

a obvod jezera je $s_1 + s_2 = 110 + 66 = 176$ km.

Zkouška:
Dráha prvního $s_1 = 10 \cdot 11 = 110$ km; dráha druhého $s_2 = \frac{11}{2} \cdot (1 + 1 + 10 \cdot 1) = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$ km.
Poměr $s_1 : s_2 = 110 : 66 = 5 : 3$.
Odpověď:
Obvod jezera je 176 km a oba lidé byli na cestě 11 dní.

2.1.4.2. *Užití geometrické posloupnosti*

Pokud se číselné údaje uvedené v zadání slovní úlohy pravidelně násobí stále stejnou hodnotou, používáme k řešení geometrickou posloupnost. Postup je uveden v následující úloze.

***Příklad* 0.1.13:**
První den vyroste jedna ze dvou vodních rostlin do výšky tří stop a druhá do výšky jedné stopy. První rostlina vyroste každý další den polovinu toho co den předchozí, zatímco druhá vyroste dvojnásobek toho co den předchozí. Za kolik dní budou mít rostliny stejnou výšku?

Řešení:
Nárůst obou rostlin je možné popsat geometrickou posloupností.
1. rostlina: první člen: 3, kvocient: $\frac{1}{2}$;
2. rostlina: první člen: 1, kvocient: 2.

Součet n členů obou posloupností musí být stejný. Je dán vzorcem

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \text{pro } q \neq 1 \text{ (což je splněno).}$$

Potom: $s_{(1)} = 3 \cdot \dfrac{(\frac{1}{2})^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}$; $s_{(2)} = 1 \cdot \dfrac{2^n - 1}{2 - 1}$. Jestliže $s_{(1)} = s_{(2)}$, potom platí:

$$3 \cdot \frac{(\frac{1}{2})^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$-6 \cdot \left[(\tfrac{1}{2})^n - 1\right] = 2^n - 1$$

$$-6 \cdot (\tfrac{1}{2})^n + 6 = 2^n - 1$$

$$-\frac{6}{2^n} + 6 = 2^n - 1$$

Provedeme substituci $2^n = y$, potom:

$$-\frac{6}{y} + 6 = y - 1 \quad \Big| \cdot y$$

$$-6 + 6y = y^2 - y \quad \Big| + 6 - 6y$$

$$y^2 - 7y + 6 = 0$$

$$(y - 6) \cdot (y - 1) = 0$$

$$y_1 = 6, \ y_2 = 1$$

1) $y_1 = 6 \ \rightarrow \ 2^n = 6 \ \Big| \ln$

$$\ln 2^n = \ln 6$$

$$n \cdot \ln 2 = \ln 6 \ \Big| : \ln 2$$

$$n = \frac{\ln 6}{\ln 2} \doteq \underline{\underline{2{,}585}};$$

pokud uvažujeme pouze celé dny,
úloha nemá řešení;
pokud bereme čas průběžně, potom
budou mít rostliny stejnou výšku
za <u>2 dny 14 hodin a asi 2 minuty</u>.

2) $y_2 = 1 \ \rightarrow \ 2^n = 1$

$$\underline{\underline{n = 0}};$$

stejnou výšku budou mít rostliny
též na počátku, tj. v čase <u>0 dní</u>.

Zkouška:

Řešení 1) první součet: $3 \cdot \dfrac{(\frac{1}{2})^{2{,}585} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \doteq 5{,}000\ 03 \doteq 5$ stop;

druhý součet: $1 \cdot \dfrac{(\frac{1}{2})^{2{,}585} - 1}{2 - 1} \doteq 5000\ 16 \doteq 5$ stop.

Řešení 2) oba součty jsou 0.

Odpověď:

Rostliny budou mít stejnou výšku na počátku (0 stop) a asi po 2 dnech a 14 hodinách (5 stop).

2.1.4.3. *Užití nekonečné geometrické řady*

Možnost použít nekonečnou geometrickou řadu bývá malá. Přesto jsem se rozhodl tuto metodu zařadit. Úlohu je možné řešit i jiným, jednodušším způsobem. Řešení úlohy pomocí nekonečné geometrické řady je uvedeno z didaktických důvodů. Další užití nekonečné geometrické řady je v kapitole III.

***Příklad* 0.1.14:**
Z místa A vyjde posel, který ujde 14 km za 4 hodiny, z místa B, o 24 km vzdáleného, vyjde v týž čas posel druhý, který ujde 12 km za 3 hodiny. Kdy dohoní tento posel prvního?

Řešení:
Jedná se o úlohu podobnou úloze o Achilleovi a želvě, kterou řešili již staří Řekové. Pokud pohyb nebereme spojitě, dostáváme se ke známému Zenonovu paradoxu, při spojitém vnímání pohybu, tento paradox „obejdeme“ a úloha vede na užití součtu nekonečné geometrické řady.
Nejprve si vyjádříme hodinovou rychlost obou poslů.
První posel ujde 14 : 4 = 3,5 km/h, druhý posel ujde 12 : 3 = 4 km/h. Druhý posel je rychlejší, proto prvního dohoní.
Z textu plyne, že první posel vyšel z A směrem od B, nikoliv do B. Protože druhý posel vyšel ve stejnou dobu jako první, má tento náskok 24 km (je to vzdálenost míst A, B).

Obr. 2-2:

Nyní uvažujme takto: Dorazí-li druhý do A (urazí 24 km), první již se vzdálí z A, urazí cestu která bude menší než 24 km (protože jde pomaleji) a dorazí do bodu A_1. Nyní dorazí druhý do bodu A_1 (urazí méně než 24 km) a první dorazí do bodu A_2, který bude opět blíž bodu A_1 než byla vzdálenost bodů A_1A. Tak se budou vzdálenosti neustále zmenšovat a nás zajímá, jak dlouho to bude trvat, až bude vzdálenost rovna nule.

Zapišme si tyto hodnoty do tabulky:

Krok:	Délka cesty 2.:	Čas na cestě 1. i 2.:	Náskok 1.:
0	0 km	0 h	24 km
1	24 km	6 h	21 km
2	21 km	$5\frac{1}{4}$ h	$18\frac{3}{8}$ km
3	$18\frac{3}{8}$ km	$4\frac{19}{32}$ h	$16\frac{5}{64}$ km

atd . . .
Poznámka k vyplnění tabulky:
Má-li první náskok 24 km (řádek druhý), ujde druhý tuto trasu za 24 : 4 = 6 h. Za tuto dobu ujde první $6 \cdot 3{,}5 = 21$ km. Má-li první náskok 21 km (řádek třetí), ujde druhý . . . atd.

Čas strávený na cestě (pro oba posly je stejný) tvoří nekonečnou řadu $6 + 5\frac{1}{4} + 4\frac{19}{32} + \ldots$
Pokud ji dokážeme sečíst, dostáváme hledaný výsledek.
Zjistěme, jaký podíl nám dávají souslední členy:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{5\frac{1}{4}}{6} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{4\frac{19}{32}}{5\frac{1}{4}} = \frac{147}{168} = \frac{7}{8}, \ \ldots \text{atd.}$$

Z této úvahy je zřejmé, že se jedná o nekonečnou geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = 6$ a kvocientem $q = \frac{7}{8}$. Tato řada má součet s, který vypočteme podle vzorce

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{6}{1-\frac{7}{8}} = \underline{\underline{48}} \text{ h.}$$

Zkouška:
Za 48 hodin ujde první posel $48 \cdot 3{,}5 = 168$ km, druhý posel ujde za tutéž dobu 192 km. Rozdíl jejich tras je 192 – 168 = 24 km, což je náskok prvního posla (a současně vzdálenost *A*, *B*).
Odpověď:
Druhý posel dohoní prvního za 48 hodin.

2.1.5. Užití grafů a geometrických zobrazení

2.1.5.1. *Základní, jednoduchá metoda*

Nejjednodušší grafickou metodou je zobrazení údajů pomocí jednoduchých geometrických symbolů do skupin, ze kterých je patrné řešení. Postup je uveden v následující slovní úloze.

***Příklad* 0.1.15:**
Na dvoře jsou slepice a králíci. Mají dohromady 11 hlav a 32 nohy. Kolik je kterých?

Řešení:
K řešení využijeme jednoduchou grafickou metodu, kdy vyjdeme z toho, že všechna zvířata mají alespoň dvě nohy. Zakreslíme si jedenáct dvojic, symbolem nohy bude pro nás »⌋«:

⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ .

V grafu je 22 noh, zbývá nám 10 noh, které po dvou přidáme ke stávajícím a dostáváme:

⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋
⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ ⌋⌋ .

Nyní už jen sečteme, kolik je čtyřnohých – králíků a kolik dvounohých – slepic. Tedy králíků je 5, slepic 6.
Zkouška:
Celkový počet hlav: 5 + 6 = 11.
Celkový počet nohou: $5 \cdot 4 + 6 \cdot 2 = 32$.
Odpověď:
Na dvoře je 5 králíků a 6 slepic.

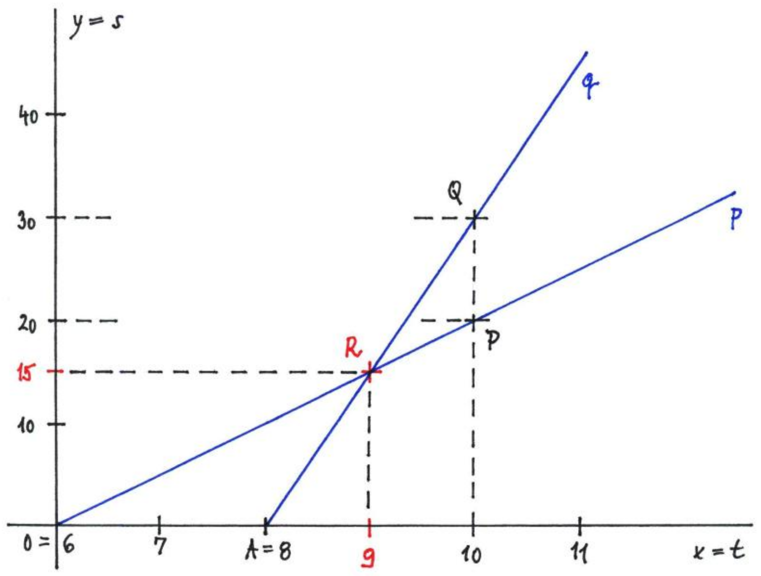
2.1.5.2. *Užití grafů lineárních funkcí*

Velmi názornou pomůckou i prostředkem pro řešení úloh je užití grafů funkcí. Používají se zejména tam, kde jde hodnoty v zadání vyjádřit užitím vhodných funkcí. Zde jsem vybral slovní úlohu, kdy se subjekty pohybují rovnoměrným pohybem. Tento pohyb lze v grafu zobrazit lineární funkcí nebo její částí.

***Příklad* 0.1.16:**
V 6 hodin ráno odpochodovala z kasáren četa vojáků rychlostí 5 km/h. V 8 hodin vyrazila za ní spojka rychlostí 15 km/h. V kolik hodin a jak daleko od kasáren dostihne spojka četu?

Řešení:
Protože oba objekty se pohybují stále stejnou rychlostí je grafem jejich pohybu v kartézské soustavě souřadnic přímka či její část (v našem případě polopřímka); pro sestrojení těchto polopřímek využijeme jejich počátek a další vhodně zvolený bod. Na osu x budeme nanášet čas t (počátkem bude čas $t_0 = 6$ h), na osu y budeme nanášet dráhu s, kterou dané subjekty urazí. Na obou osách budeme volit vhodná měřítka.
Grafem pohybu čety vojáků je polopřímka $p = OP$, $O = [6; 0]$, $P = [10; 20]$, grafem pohybu spojky je polopřímka $q = AQ$, $A = [8; 0]$, $Q = [10; 30]$. Obě polopřímky zobrazíme v kartézské soustavě souřadnic a určíme jejich průsečík $R = [9; 15]$. Jeho souřadnice jsou řešením, $t = 9$ h, $s = 15$ km.

Graf: Obr. 2-3:



Zkouška:
Četa pochodovala 3 hodiny a ušla 15 km, spojka jela 1 hodinu a urazila také 15 km.
Odpověď:
Spojka dostihla četu v 9 hodin 15 km od kasáren.

Poznámka:
K řešení úloh tohoto typu lze s výhodou použít také GeoGebru.

2.1.5.3. *Užití grafů kvadratických funkcí*

***Příklad* 0.1.17:**
Určete dvě po sobě jdoucí čísla, je-li součet jejich druhých mocnin 13.

Řešení:
Označme si menší z čísel x, potom druhé bude $x + 1$ a platí

$$x^2 + (x + 1)^2 = 13 \quad \Big| -13$$
$$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 13 = 0$$
$$2x^2 + 2x - 12 = 0 \quad \Big| : 2$$
$$x^2 + x - 6 = 0.$$

Kvadratickou rovnici vyřešíme graficky. Máme dvě možnosti.

1) Rovnici ponecháme bez úpravy. Sestrojíme graf kvadratické funkce f: $y = x^2 + x - 6$ a určíme průsečíky grafu funkce f s osou x (funkce g: $y = 0$).
Grafem funkce g je osa x, grafem funkce f je parabola. Její vrchol se vypočte pomocí vzorce $V = \left[-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right]$, kde a, b, c jsou koeficienty kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c$. V našem případě $a = 1$, $b = 1$, $c = -6$. Potom

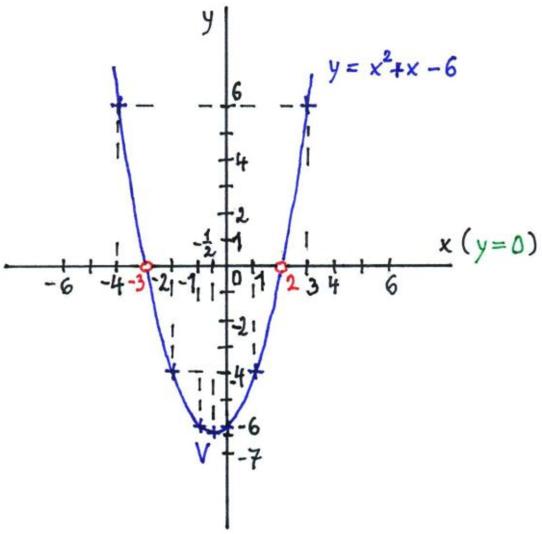
$$V = \left[-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right] = \left[-\frac{1}{2\cdot 1}; -\frac{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}{4\cdot 1}\right] = \left[-\frac{1}{2}; -\frac{25}{4}\right].$$

Vypočteme další hodnoty a zapíšeme do tabulky:

x:	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3
y:	6	0	-4	-6	$-6\frac{1}{4}$	-6	-4	0	6.

Nyní sestrojíme graf funkce f a určíme průsečíky grafu s osou x (viz obrázek 2-4)

Obr. 2-4:



Z grafu je zřejmé, že hledaná čísla jsou $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Potom dvě za sebou jdoucí čísla jsou v prvním případě -3, -2, v druhém případě 2, 3.

2) Rovnici upravíme. Nejlépe je ponechat na levé straně pouze kvadratický člen a na pravou stranu převedeme členy lineární a absolutní. Sestrojíme grafy obou funkcí (ryze kvadratické a lineární). Určíme průsečíky funkcí a jejich x-ové souřadnice budou řešením.
Konkrétně: $x^2 + x - 6 = 0 \quad | -x + 6$
$x^2 = 6 - x$,
potom je funkce f: $y = x^2$, funkce g: $y = 6 - x$. Hodnoty funkcí jsou:

funkce f:

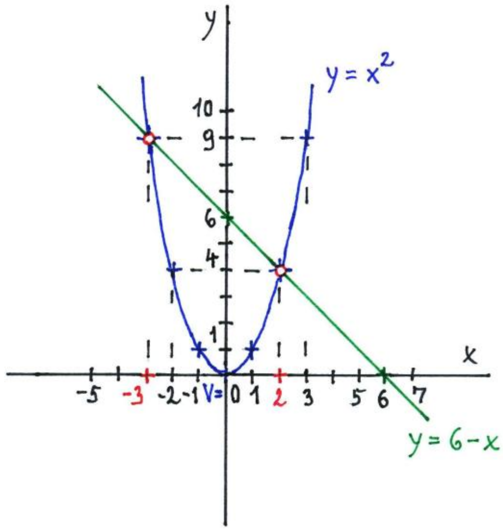
x:	-3	-2	-1	0	1	2	3
y:	9	4	1	0	1	4	9

funkce g:

x:	0	6
y:	6	0

Nyní sestrojíme graf funkcí f, g, určíme průsečíky grafů a najdeme jejich x-ové souřadnice, které jsou řešením (viz obrázek 2-5).
Řešení samozřejmě vychází stejně jako v prvním případě.

Obr. 2-5:



2.1.5.3. *Užití grafů dalších funkcí*

***Příklad* 0.1.18:**

Určete dvě čísla, jejichž součet je 10 a součin 16.

Řešení:

Označíme-li hledaná čísla x, y potom vyjádřením vztahů ze zadání dostáváme soustavu rovnic

$$x + y = 10$$
$$\underline{x \cdot y = 16}\,.$$

Úpravou rovnic dostáváme funkce:

lineární funkci f: $y = 10 - x$, jejímž grafem je přímka,

nepřímou úměrnost g: $y = \dfrac{16}{x}$, jejímž grafem je rovnoosá hyperbola.

Hodnoty funkcí jsou:

funkce f:

x:	0	10
y:	10	0

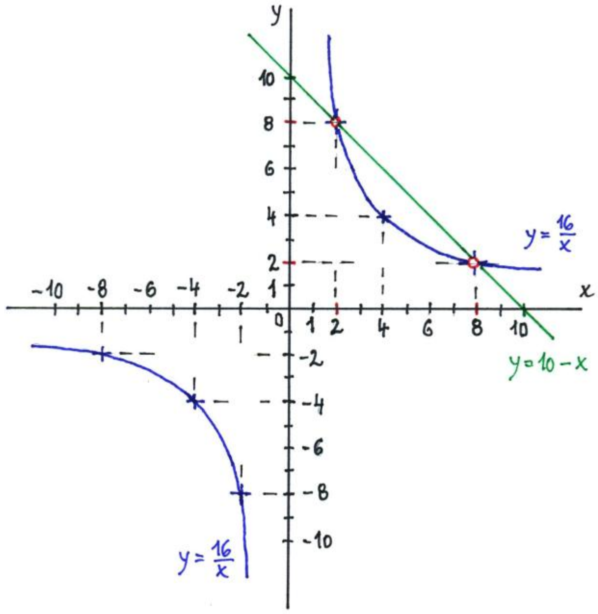
funkce g:

x:	−8	−4	−2	2	4	8
y:	−2	−4	−8	8	4	2

Nyní sestrojíme grafy funkcí f, g, určíme průsečíky grafů a najdeme jejich souřadnice, které jsou řešením (viz obrázek 2-6).

Z grafu je zřejmé, že průsečíky mají souřadnice [2; 8] a [8; 2]. I když nám vychází dvě řešení, jedná se o stejnou dvojici čísel (čísla můžeme zaměnit, protože není určeno jejich pořadí). Proto úloha má jediné řešení.

Obr. 2-6:



Zkouška:
Součet čísel je 2 + 8 = 10, součin čísel je $2 \cdot 8 = 16$.
Odpověď:
Hledaná dvě čísla jsou 2, 8.

2.2. Speciální modely

2.2.1. Diofantovské rovnice

2.2.1.1. *Jednodušší lineární diofantovské rovnice*

Slovní úlohy řešené lineární diofantovskou rovnicí se vyskytují téměř ve všech sbírkách úloh. Vzhledem k tomu, že řešení diofantovských rovnic není součástí běžné výuky matematiky na základních ani na středních školách, uvedu nejprve přehled různých postupů při řešení lineární diofantovaké rovnice a potom příklady jejich užití.

Lineární diofantovská rovnice je rovnice $ax + by = c$, kde $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a, b, c \in Z$ (celá čísla). Tato rovnice má řešení $[x, y]$ pro $x, y \in Z$ právě tehdy, když největší společný dělitel čísel a, b je dělitelem čísla c. Řešení můžeme najít několika způsoby:

1) ***pomocí aritmetických vlastností*:**

Rovnici $ax + by = c$ upravíme na tvar $y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$ nebo $x = -\dfrac{b}{a}y + \dfrac{c}{a}$

a pomocí aritmetických vlastností čísel a, b a parametrů určíme řešení. Tento teoretický postup budu aplikovat hned na následujícím příkladu 0.2.1.

2) ***rozvojem zlomku*** $\frac{a}{b}$**:**

Řešíme rovnici $ax + by = 1$. Jestliže $[u, v]$ je řešením rovnice $ax + by = 1$, tj. $au + bv = 1$, potom obecné řešení je :

$x = cu + bt,\ y = cv - at$, kde t je parametr, $t \in Z$.

Řešení rovnice $ax + by = 1$ dostaneme rozvojem čísla $\frac{a}{b}$ v řetězový zlomek.
V předposledním zlomku je (až na znaménko) jmenovatel roven u, čitatel roven v.

3) ***pomocí kongruencí*****:**

Rovnici $ax + by = c$ lze nahradit kongruencí: $ax \equiv c \mod b$ nebo $by \equiv c \mod a$.
Vezměme:

$ax \equiv c \mod b$**,**

kongruenci upravíme na tvar: $x \equiv k \mod b$, $k \in \langle 0; b)$, potom řešením je:

$x = k + bt,\ t \in Z$ je parametr,

y dostaneme dosazením za x do původní rovnice:

$$a(k + bt) + by = c$$

$$ak + abt + by = c \quad \Big| - ak - abt$$

$$by = c - ak - abt$$

$$y = \frac{c - ak}{b} - at$$

$\frac{c - ak}{b}$ je celé číslo, protože $ax \equiv c \mod b$.

4) ***pomocí vzorců*****:**

a) je-li: $a + b \equiv 1 \mod a$ nebo $a \mid c$, potom: $x = \frac{c - bc}{a} + bt,\ y = c - at$, **(2-1a)**

b) je-li: $a + b \equiv 1 \mod b$ nebo $b \mid c$, potom: $x = c + bt,\ y = \frac{c - ac}{b} - at$, **(2-1b)**

5) ***speciální metoda – Bachetova*****:**

je-li **a**), odečteme od rovnice: $ax + (b - 1)y = at$ a vypočteme x, y,
je-li **b**), odečteme od rovnice: $(a - 1)x + by = bt$ a vypočteme x, y.

6) ***partikulární řešení:***

nalezneme-li jedno řešení $[x_0; y_0]$, potom rovnice má řešení:

$x = x_0 + bk$
$y = y_0 - ak$, kde $k \in Z$ je parametr.

Poznámka:

Postupy řešení a teoretické odvození vzorců jsou podrobně popsány např. v [70], nebo v [84]. *Užití kongruencí k řešení diofantovských rovnic je popsáno např. v* [19] *nebo v* [25]. *Užití řetězových zlomků k řešení Diofantovských rovnic je vysvětleno např. v* [03]. *Myslím si, že zde není nutno zabíhat do podrobností.*

Ukažme si nyní užití těchto řešení v konkrétních případech. Geometrické řešení pomocí mřížových bodů popíšu v části 2.3.2., příklad 0.3.5.

***Příklad* 0.2.1:** (*úloha pochází z Číny*)
Pán dal sluhovi třicet penízů, aby za ně zakoupil 30 ptáků, a to pávy po 3, bažanty po 2 a holuby po $\frac{1}{2}$ peníze. Kolik kterých koupí? (*Stará úloha předpokládá, že je ke koupi dostatečné množství ptáků a že sluha koupil od každého druhu alespoň jeden kus.*)

Řešení č. 1:
Při analýze problémové situace zjistíme, že cílem řešení je určit jednotlivé počty ptáků, které postupně označíme: x – počet pávů, y – počet bažantů, z – počet holubů, kde x, y, z jsou přirozená čísla (vyjadřují počty ptáků; od každého druhu se má koupit alespoň jeden kus).
Protože součet počtu všech ptáků je 30, první rovnice má tvar

$$x + y + z = 30.$$

Jeden páv stojí 3 peníze, potom x pávů stojí $3x$ penízů; jeden bažant stojí 2 peníze, potom y bažantů stojí $2y$ penízů a konečně jeden holub stojí $\frac{1}{2}$ peníze, potom z holubů stojí $\frac{1}{2}z$ penízů.
Druhá rovnice má tvar

$$3x + 2y + \tfrac{1}{2}z = 30 \quad \rightarrow \quad 6x + 4y + z = 60.$$

Úloha vede k řešení soustavy diofantovských rovnic:

$$x + y + z = 30$$
$$6x + 4y + z = 60.$$

Po vyloučení z dospějeme k diofantovské rovnici

$$5x + 3y = 30, \text{ z toho } y = 10 - \tfrac{5}{3}x;$$

x musí být násobkem tří, proto $x = 3$ je jedinou možnou hodnotou x (při $x = 6$ by bylo $y = 0$, což není možné, dále jsou hodnoty y záporné).
Proto $x = 3$, $y = 5$, $z = 22$.
Zkoušku provedeme dosazením vypočtených hodnot do textu:

1 páv stojí .... 3 peníze .... 3 pávi …........ 9 penízů,
1 bažant stojí .... 2 peníze ....5 bažantů .... 10 penízů,
1 holub stojí .... $\frac{1}{2}$ peníze ...... 22 holubů .... 11 penízů,

celkem: 9 + 10 + 11 = 30 penízů.
Odpověď: Sluha koupil 3 pávy, 5 bažantů a 22 holubů.

Řešení č. 2:
Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty pávů, bažantů a holubů a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$$5x + 3y = 30.$$

Tuto rovnici řešíme pomocí kongruencí:

$$5x \equiv 30 \bmod 3 \quad |\ :5$$
$$x \equiv 6 \bmod 3 \quad |\ -6$$
$$x \equiv 0 \bmod 3$$

z toho plyne pro x: $\underline{x = 3t}$ $\rightarrow$

$$5 \cdot 3t + 3y = 30$$
$$15t + 3y = 30 \quad |\ -15t$$
$$3y = 30 - 15t \quad |\ :3$$
$$\underline{y = 10 - 5t}$$

Nyní pro jednotlivé hodnoty t hledáme přípustné hodnoty x, y, z:

......
$t = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0, y = 10, z = 20,$
$t = 1 \quad \rightarrow \quad x = 3, y = 5, z = 22,$
$t = 2 \quad \rightarrow \quad x = 6, y = 0, z = 24,$
......

Protože hledáme řešení z oboru přirozených čísel, jediným řešením je $x = 3$, $y = 5$, $z = 22$. Zkouška a odpověď stejné jako v řešení č. 1.

2.2.1.2. *Složitější lineární diofantovské rovnice*

***Příklad* 0.2.2:**
Vojáci, bylo jich méně než padesát, nastoupili do trojstupu a zbyli 2; když nastoupili do pětistupu, zbyli 3; když nastoupili do sedmistupu, zbyli 2. Kolik jich bylo? (Pozor, v každém případě byl jiný počet řad)

Řešení č. 1 - *pomocí aritmetických vlastností*:
Označme si počet vojáků x, počet řad v prvním případě k, v druhém případě l, v třetím případě m. Vyjádříme-li nyní vztahy ze zadání (tj. matematizujeme-li danou reálnou situaci), dostáváme soustavu rovnic:

$$\frac{x}{3} = k + \frac{2}{3}$$
$$\frac{x}{5} = l + \frac{3}{5}$$
$$\frac{x}{7} = m + \frac{2}{7}.$$

Upravíme-li (vynásobíme příslušnými jmenovateli), dostáváme

$$x = 3k + 2$$
$$x = 5l + 3$$
$$x = 7m + 2.$$

Pravé strany první a druhé rovnice se rovnají, neboť se rovnají levé strany

$$3k + 2 = 5l + 3 \quad \Big| -2$$
$$3k = 5l + 1 \quad \Big| : 3$$
$$k = \frac{5}{3}l + \frac{1}{3}.$$

Nyní dosazujeme za l a hledáme k tak, aby bylo celé číslo. Dostáváme:

$l = 1 \rightarrow k = 2$,
$l = 4 \rightarrow k = 7$,
$l = 7 \rightarrow k = 12$,
$l = 10 \rightarrow k = 17$ … pro tyto hodnoty (pokud by byly řešením) je x již větší než 50.

Dále vezmeme, že se rovnají pravé strany druhé a třetí rovnice

$$5l + 3 = 7m + 2 \quad \Big| -2$$
$$7m = 5l + 1$$
$$m = \frac{5}{7}l + \frac{1}{7}.$$

Nyní dosazujeme za l a hledáme m tak, aby bylo celé číslo. Dostáváme:

$l = 4 \rightarrow m = 3$,
$l = 11 \rightarrow m = 8$ … pro tyto hodnoty (pokud by byly řešením) je x již větší než 50.

Porovnáním výsledků posledních dvou rovnic dostáváme, že $k = 7$, $l = 4$, $m = 3$ a konečně

$$x = 3k + 2 = 5l + 3 = 7m + 2 = 23.$$

Zkouška:
23 : 3 = 7, zb. 2, 23 : 5 = 5, zb. 3, 23 : 7 = 3, zb. 2.
Odpověď:
Vojáků bylo 23.

Řešení č. 2 - *pomocí kongruencí*:
Hledáme řešení lineárního systému kongruencí (každé dva moduly jsou nesoudělné)

$x \equiv b_1 \mod a_1$,

$x \equiv b_2 \mod a_2$,

$x \equiv b_3 \mod a_3$.

Nejdříve nejdeme pomocná čísla n_1, n_2, n_3 vyhovující kongruencím:

$n_1 a_2 a_3 \equiv 1 \mod a_1$,

$n_2 a_1 a_3 \equiv 1 \mod a_2$,

$n_3 a_1 a_2 \equiv 1 \mod a_3$;

Ve zmíněné úloze jde o hodnoty $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 2$;

tj. $35n_1 \equiv 1 \mod 3$,

$21n_2 \equiv 1 \mod 5$,

$15n_3 \equiv 1 \mod 7$;

poslední kongruence zjednodušíme

$2n_1 \equiv 1 \mod 3$,

$n_2 \equiv 1 \mod 5$,

$n_3 \equiv 1 \mod 7$.

Snadno vybereme: $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$; potom

$n_1 a_2 a_3 = 70$, $n_2 a_1 a_3 = 21$, $n_3 a_1 a_2 = 15$.

Hledané číslo x má tvar:

$x \equiv (n_1 a_2 a_3 b_1 + n_2 a_1 a_3 b_2 + n_3 a_1 a_2 b_3) \mod (a_1 a_2 a_3)$

a v naší úloze

$x \equiv (140 + 63 + 30) \mod 105$

nebo

$x = 233 - 105\,t$

a pro $t = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ dostáváme $x = \ldots, 548, 443, 338, 233, 128, 23, -82, \ldots$.

Jedinou vyhovující hodnotou je $x = 23$.

Poznámka:

V řešení č. 2 jsou zkouška a odpověď stejné jako v řešení č. 1.

***Příklad* 0.2.3:**

Bylo vystřeleno několik ran do terče s třemi soustřednými kruhy, označenými čísly 8, 12, 20. Každá rána byla zásahem a celkový počet bodů byl 168. Ve středním kruhu bylo tolik zásahů jako v obou ostatních dohromady. Kolik bylo zásahů v jednotlivých kruzích?

Řešení č. 1:

Při analýze úlohy zjistíme, že máme určit počty zásahů v jednotlivých kruzích. Ty postupně označíme: x – počet zásahů č. 8, y – počet zásahů č. 12, z – počet zásahů č. 20; x, y, z jsou přirozená čísla.

Z toho plyne rovnice

$8x + 12y + 20z = 168$.

Protože zásahů č. 12 je stejně jako ostatních, dostáváme druhou rovnici

$y = x + z$.

Úloha vede k řešení soustavy diofantovských rovnic:

$8x + 12y + 20z = 168$

$y = x + z.$

Po vyloučení y a úpravě dospějeme k diofantovské rovnici

$$5x + 8z = 42, \text{ z toho } z = \frac{42-5x}{8};$$

$42 - 5x$ musí být násobkem osmi a také $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, neboť z je kladné. Potom jedinou možnou hodnotou je $x = 2$ (pro jiné hodnoty x není z přirozené číslo) a $z = 4$.

Proto $x = 2$, $y = 6$, $z = 4$.

Zkoušku provedeme dosazením vypočtených hodnot do textu:

č. 8 …… 2-krát ….. celkem 16,
č. 12 ….. 6-krát ….. celkem 72,
č. 20 ….. 4-krát ….. celkem 80,

celkem všech bodů: 16 + 72 + 80 = 168 a ve středním kruhu je stejně zásahů (6) jako v ostatních (také 6).

Odpověď:

V kruhu č. 8 byly 2 zásahy, v kruhu č. 12 bylo 6 zásahů, v kruhu č. 20 byly 4 zásahy.

Řešení č. 2:

Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty zásahů v jednotlivých kruzích a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$$5x + 8z = 42.$$

Nyní řešíme rovnici $5x + 8z = 1$. Řešení určíme rozvojem čísla $\frac{8}{5}$ v řetězový zlomek.

Rozvoj čísla $\frac{8}{5}$ získáme pomocí Eukleidova algoritmu:

$$8 = 1\cdot 5 + 3$$
$$5 = 1\cdot 3 + 2$$
$$3 = 1\cdot 2 + 1$$
$$2 = 2\cdot 1 + 0.$$

Hledaný řetězový zlomek je $\dfrac{8}{5} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$

a sblížené zlomky jsou:

$$1;\ 1 + \frac{1}{1} = 2;\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2};\ \frac{8}{5}.$$

Předposlední sblížený zlomek má čitatele $2 = \pm v$ a jmenovatele $3 = \pm u$. Je nutno volit $u = -3$, $v = 2$, neboť

$$5\cdot(-3) + 8\cdot 2 = 1.$$

Řešení je potom následující:

$$x = cu + bt = 42\cdot(-3) + 8t = -126 + 8t,$$
$$z = cv - at = 42\cdot 2 - 5t = 84 - 5t.$$

Nyní pro jednotlivé hodnoty t hledáme přípustné hodnoty x, y, z:

......
$t = 15 \quad \rightarrow \quad x = -6, y = 3, z = 9,$
$t = 16 \quad \rightarrow \quad x = 2, y = 6, z = 4,$
$t = 17 \quad \rightarrow \quad x = 10, y = 9, z = -1,$
......

Protože hledáme řešení z oboru přirozených čísel, jediným řešením je $x = 2, y = 6, z = 4$.
Zkouška a odpověď stejné jako v řešení č. 1.

2.2.1.3. *Kvadratická diofantovská rovnice*

***Příklad* 0.2.4:**
Farmář pěstuje zelí vždy na jednom čtvercovém záhonu. Tento rok obsahuje jeho čtvercový záhon o 21 hlávek zelí více než loňský rok. Kolik hlávek zelí pěstuje letos?

Řešení č. 1: - *systematické experimentování*
Tento rok pěstuje o 21 hlávek zelí více, tj. letošní počet hlávek odpovídá čtvercovému číslu o 21 většímu než loni. Při experimentu si do tabulky postupně zapíšeme do prvního řádku loňské množství hlávek (budou to čtvercová čísla) a do druhého řádku zapíšeme letošní množství, které je o 21 větší a budeme hledat, která z těchto čísel jsou čtvercová.

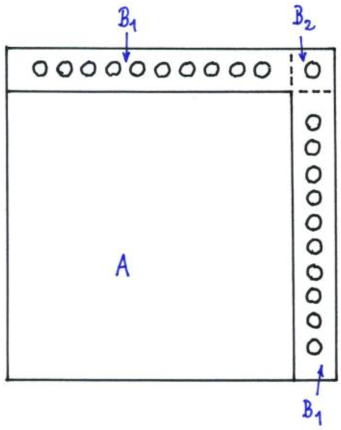
Tab. 2-1:

vloni	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	. . .
letos	22	**25**	30	37	46	57	70	85	102	**121**	142	165	190	. . .

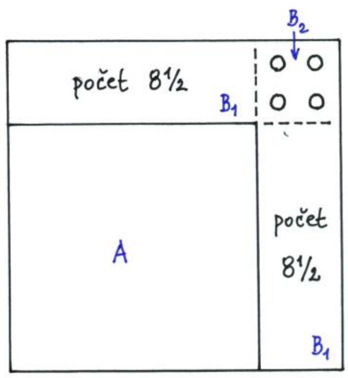
Protože letošní počet hlávek 142 je již menší než následující čtvercové číslo 144 pro loňskou úrodu, experiment zde končí, neboť rozdíly mezi sousedními čtvercovými čísly se zvětšují. Příklad má dvě řešení: Farmář letos pěstuje buď 25 hlávek nebo 121 hlávek zelí.

Řešení č. 2: - *geometrická cesta neboli grafické znázornění*
Pomocí čtverců si do jednoho obrázku znázorníme obě úrody (viz obr. 2-7a – 2-7d).
Navýšení úrody v letošním roce rozdělíme na tři pole, v prostředním musí být čtvercové číslo a zbylé hlávky musíme uspořádat do tolika řad, které nám čtvercové číslo „určí“. Protože obě zbývající pole B_1 obsahují stejný počet prvků, musí být zbylé číslo sudé, což vyhovuje pouze pro případy na obr. 2-7a a 2-7c.

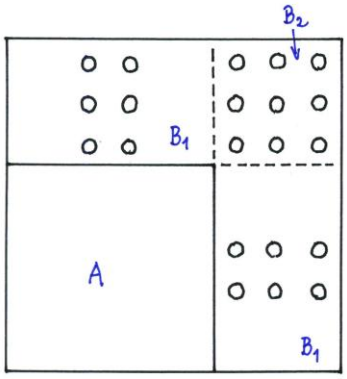
Obr. 2-7a:

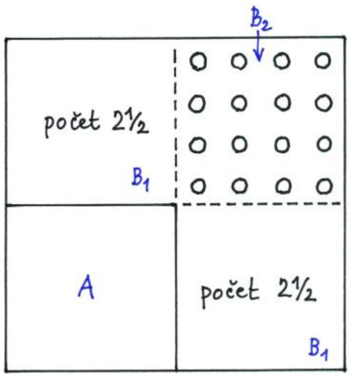


Obr. 2-7b:



Obr. 2-7c: **Obr. 2-7d:**





A – loňská úroda hlávek; B_1, B_2 – navýšení hlávek v letošní úrodě

Úloha má tedy dvě řešení a to:
1) $21 + 10 \cdot 10 = 121$ hlávek zelí;
2) $21 + 2 \cdot 2 = 25$ hlávek zelí.
Farmář tedy letos pěstuje buď 25 hlávek nebo 121 hlávek zelí.

Řešení č. 3:
Označíme-li počet hlávek zelí, které farmář pěstoval letos x^2 (strana záhonu bude mít x hlávek zelí) a počet hlávek zelí, které pěstoval loni y^2, lze danou úlohu vyjádřit rovnicí

$$x^2 - y^2 = 21.$$

Rovnice $x^2 - y^2 = c$ je řešitelná celými čísly tehdy a jen tehdy, je-li c číslo liché nebo dělitelné čtyřmi.
V rovnici $x^2 - y^2 = 21$ nejprve rozložíme levou stranu

$$(x + y) \cdot (x - y) = 21$$

a potom pravou: $21 = 1 \cdot 21 = 3 \cdot 7$ a pak položíme:
1) $x + y = 21$, $x - y = 1$, z čehož plyne $x = 11$, $y = 10$;
2) $x + y = 7$, $x - y = 3$, z čehož plyne $x = 5$, $y = 2$.
Řešením jsou dvě dvojice $[x; y] = [11; 10]$, $[x; y] = [5; 2]$.
Zkouška:
1) $11^2 - 10^2 = 121 - 100 = 21$;
2) $5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$.
Odpověď:
Farmář letos pěstuje letos buď 25 hlávek nebo 121 hlávek zelí.

***Příklad* 0.2.5:**
Otec je stár 29 let, syn 4 roky. Za kolik let bude otec n-krát tak stár jako syn? (n je celé)

Řešení č. 1:
Označme si počet let, za které nastane popsaná situace, x. Potom dostáváme rovnici:

$$x + 29 = n \cdot (x + 4)$$
$$x + 29 = nx + 4n \quad \Big| - nx - 29$$
$$x - nx = 4n - 29$$
$$x \cdot (1 - n) = 4n - 29 \quad \Big| : (1 - n)$$
$$x = \frac{4n - 29}{1 - n}.$$

Nyní volíme n a hledáme přirozené x [aby x bylo přirozené, je $n \in (1;\, 8)$]:

n	2	3	4	5	6	7	8
x	21	$\frac{17}{2}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{7}$

Řešením je pro $x = 1$, $n = 6$ a pro $x = 21$, $n = 2$.

Zkouška:

1) Za 1 rok bude otci 30 let a synovi 5 let, otec bude 6-krát starší.
2) Za 21 let bude otci 50 let a synovi 25 let, otec bude 2-krát starší.

Odpověď:

Otec bude n-krát tak stár jako syn za 1 rok a za 21 let.

Řešení č. 2:

Označme si počet let, za které nastane popsaná situace, x. Potom dostáváme rovnici:

$$x + 29 = n \cdot (x + 4)$$
$$x + 29 = nx + 4n \quad \Big| -x - 29$$
$$nx - x + 4n - 29 = 0,$$

což je tzv. bilineární rovnice (tj. rovnice 2. stupně), obecně rovnice

$$axy + bx + cy + d = 0,$$

kde předpokládáme, že a, b, c, d jsou celá čísla, a, c čísla nesoudělná; potom

$$y = -\frac{bx + d}{ax + c}.$$

Máme tedy určit celé číslo x tak, aby zlomek vyjadřující y byl roven celému číslu.
Položíme

$$p = bx + d$$
$$q = ax + c$$

a vyloučíme-li x; dostaneme

$$ap - bq = ad - bc\,.$$

Jsou-li a, c nesoudělná a číslo q dělí p, musí také q dělit $ad - bc$. Stačí tedy najít dělitele čísla $ad - bc$ a položit je rovny číslu q. Z této rovnosti vypočteme x.

Řešení:

Řešíme bilineární rovnici $xn - x + 4n - 29 = 0$, kterou upravíme na tvar:

$$n = -\frac{-x - 29}{x + 4}.$$

Zde je $a = 1$, $b = -1$, $c = 4$, $d = -29$, potom:

$$ad - bc = 1 \cdot (-29) - (-1) \cdot 4 = -25.$$

Dělitelé m_i čísla -25 jsou $\pm 1, \pm 5, \pm 25$, $x + 4 = m_i$ a řešení jsou:

1) $m_1 = 1 \rightarrow x + 4 = 1 \rightarrow x = -3$; situace nastala před třemi lety (není řešením),
2) $m_2 = -1 \rightarrow x + 4 = -1 \rightarrow x = -5$; situace nemá reálný odraz,
3) $m_2 = 5 \rightarrow x + 4 = 5 \rightarrow x = 1$; řešení, situace nastane za rok,
4) $m_2 = -5 \rightarrow x + 4 = -5 \rightarrow x = -9$; situace nemá reálný odraz,
5) $m_2 = 25 \rightarrow x + 4 = 25 \rightarrow x = 21$; řešení, situace nastane za 21 let,
6) $m_2 = -25 \rightarrow x + 4 = -25 \rightarrow x = -29$; situace nemá reálný odraz.

Daná úloha má tedy dvě řešení.

Zkouška a odpověď stejné jako v řešení č. 1.

***Příklad* 0.2.6:**
Dvojího vína, míru lepšího za osm, míru horšího za pět drachem*), smísil chytrý pán. Co za oba druhy zaplatil, bylo čtvercové číslo. Přidej k tomuto čtverci dané číslo 57, pak získáš jiný čtverec a jeho strana ti řekne množství vína, které všechno smíchal. Nyní mi, chlapče, urči, kolik bylo smíšeno vína lepšího a kolik horšího druhu.

Řešení:
Označme míru lepšího (za osm) – x, míru horšího (za pět) – y a neznámý čtverec – u, potom, po vyjádření slovního textu, dostáváme soustavu rovnic

$$8x + 5y = u^2$$
$$u^2 + 57 = (x + y)^2.$$

Když upravíme druhou rovnici, dostáváme rozdíl čtverců

$$(x + y)^2 - u^2 = 57.$$

Hledáme dvojice druhých mocnin, jejichž rozdíl je 57, tj. řešíme rovnici

$$a^2 - b^2 = 57.$$

Toto splňují dvě dvojice (postup viz příklad 0.2.4)

121 a 64; 841 a 784.

Pro první dvojici dostáváme:

$$(x + y)^2 - u^2 = 121 - 64.$$

Z toho plyne:

$$(x + y)^2 = 121$$
$$\underline{8x + 5y = 64}$$
$$x = 8 - \frac{5}{8}y$$
$$\underline{x + y = 11}$$
$$8 - \frac{5}{8}y + y = 11 \quad \Big| -8$$
$$\frac{3}{8}y = 3 \quad \Big| \cdot \frac{8}{3}$$
$$\underline{y = 8};$$
$$x = 8 - \frac{5}{8}y \Rightarrow \underline{x = 3}.$$

Pro druhou dvojici dostáváme:

$$(x + y)^2 - u^2 = 841 - 784.$$

Z toho plyne:

$$(x + y)^2 = 841$$
$$\underline{8x + 5y = 784}$$
$$x = 98 - \frac{5}{8}y$$
$$\underline{x + y = 29}$$
$$98 - \frac{5}{8}y + y = 29 \quad \Big| -98$$
$$\frac{3}{8}y = -69 \quad \Big| \cdot \frac{8}{3}$$
$$y = -184$$

y je záporné, řešení neexistuje.

Zkouška:
Lepšího vína byly 3 míry, jeho celková cena byla 24 drachem;
horšího vína bylo 8 měr, jeho celková cena byla 40 drachem;
celkem stálo všechno víno 64 drachem; 64 je čtvercové číslo.
Přidáme-li k tomuto číslu 57, dostáváme 121.
Celkem bylo vína 11 měr, druhá mocnina je také 121.

Odpověď:
Lepšího vína byly 3 míry, horšího vína 8 měr.

)** ***drachma = nejrozšířenější stříbrná mince antického řeckého světa, začala se razit v 6. stol. př. n. l., hmotnost se pohybovala kolem 4 g; drachma se dělila na 6 obolů, 100 drachem = 1 mina, 6 000 drachem = 1 talent (okolo 25 kg); drachma byla nahrazena eurem od 1. 1. 2002 (byla nejdéle užívaným platidlem).

2.2.2. Newtonova úloha

Newtonova úloha je speciálním případem úlohy o společné práci. Tráva na louce přirůstá a současně je spásána dobytkem. Nakonec bude spasena úplně. V úlohách jsou popsány tři situace. V první úloze má louka ve všech třech situacích stejnou plochu, v druhé úloze má louka ve třetí situaci jinou plochu a nakonec ve třetí úloze má každá louka jinou plochu. Nyní se podívejme na jednotlivé úlohy. Řešení úloh zpracováno podle [20], [61] a [71].

***Příklad* 0.2.7:**
Tráva na louce roste všude stejně hustě a stejně rychle. Víme, že 70 krav by ji spáslo za 24 dní, zatímco 30 krav by ji spáslo za 60 dní. Kolik krav spase louku za 96 dní?

Řešení č. 1:

Při řešení úlohy tímto způsobem rozdělíme krávy na dvě skupiny (dělení je sice teoretické, ale nepopírá realitu; dokonce počty kusů v jednotlivých skupinách nemusí být celá čísla, celá čísla musí však být jejich součty). Jedna skupina krav spásá dorůstající trávu, druhá trávu už dříve vyrostlou. Velikost první skupiny je přímo úměrná velikosti louky a nezáleží na čase, protože tráva roste stále. Druhá skupina také záleží na velikosti louky a je nepřímo úměrná času; čím déle se pase, tím musí být tato skupina menší.
Při 70 kravách označíme velikost první skupiny x [ks], velikost druhé skupiny y [ks], tedy:

$$x + y = 70.$$

Při 30 kravách označíme velikost první skupiny x_1 [ks], velikost druhé skupiny y_1 [ks], tedy:

$$x_1 + y_1 = 30.$$

Vztahy mezi počty kusů jsou:

$x = x_1$ a $24y = 60\,y_1$, z čehož plyne $y_1 = \frac{2}{5}y$.

Po dosazení za x_1, y_1 dostáváme soustavu rovnic:

$$x + y = 70$$
$$x + \tfrac{2}{5}y = 30,$$

jejímž řešením je : $x = 3\frac{1}{3}$, $y = 66\frac{2}{3}$.

Tím jsme zjistili, že narůstající trávu bude nepřetržitě spásat $3\frac{1}{3}$ krav a již narostlou trávu bude 24 dní spásat $66\frac{2}{3}$ krav (tj. celkem se na louce bude pást 70 krav). Nyní se ptáme, kolik krav bude již narostlou trávu spásat 96 dní (rostoucí trávu bude stále spásat $3\frac{1}{3}$ krav) . Jak již bylo uvedeno, jedná se o nepřímou úměrnost.

$$\uparrow \begin{array}{l} 66\frac{2}{3}\,ks..........24\,dní \\ y_2\,ks..........96\,dní \end{array} \downarrow$$

Z toho plyne: $\dfrac{y_2}{66\frac{2}{3}} = \dfrac{24}{96}$ a řešením je $y_2 = 16\frac{2}{3}$ ks.

Celkem: $x + y_2 = 3\frac{1}{3} + 16\frac{2}{3} = 20$ [ks].

Zkouška: Narůstající trávu bude spásat vždy $3\frac{1}{3}$ krav, již narostlou trávu spásá

v 1. případě .... 24 dní .... $66\frac{2}{3}$ krav,

v 2. případě .... 60 dní .... $26\frac{2}{3}$ krav,

v 3. případě .... 96 dní .... $16\frac{2}{3}$ krav.

Jsou-li počty dní v poměru 24 : 60 : 96, tj. 2 : 5 : 8, musí být převrácené hodnoty počtu krav odpovídající dnům ve stejném poměru (jedná se o nepřímou úměrnost), tj.

$$\frac{1}{66\frac{2}{3}} : \frac{1}{26\frac{2}{3}} : \frac{1}{16\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{200}{3}} : \frac{1}{\frac{80}{3}} : \frac{1}{\frac{50}{3}} = \frac{3}{200} : \frac{3}{80} : \frac{3}{50} = 6 : 15 : 24 = 2 : 5 : 8.$$

Za zkoušku je možné považovat také řešení úlohy jiným způsobem (viz dále).
Odpověď: Louku za 96 dní spase 20 krav.

Řešení č. 2:

Při řešení úlohy tímto způsobem označíme celkový hledaný počet krav x [ks]. Zavedeme pomocnou neznámou – denní přírůstek trávy. Za jeden den naroste na louce množství y trávy, za 24 dní tedy přiroste $24y$ trávy.
Označíme-li celkové množství trávy na začátku pastvy 1, pak za 24 dní sežere 70 krav

$1 + 24y$ trávy;

za jeden den spase celé stádo 70 krav $\frac{1+24y}{24}$ trávy

a jedna kráva spase za jeden den $\frac{1+24y}{24 \cdot 70}$ trávy. **(2-2a)**

Protože 30 krav spase louku za 60 dní, dostáváme stejnou úvahou, že jedna kráva spase za jeden den $\frac{1+60y}{60 \cdot 30}$ trávy. **(2-2b)**

Množství trávy, které spase jedna kráva za jeden den, je stejné pro obě stáda, takže

$$\frac{1+24y}{24 \cdot 70} = \frac{1+60y}{60 \cdot 30}.$$

Z této rovnice určíme přírůstek y trávy za jeden den:

$$y = \tfrac{1}{480}.$$

Z jednoho ze dvou předchozích vztahů (2-2a) nebo (2-2b) (platí pro oba) vypočítáme, jak velkou část původního množství trávy spase jedna kráva za jeden den:

$$\frac{1+24y}{24 \cdot 70} = \frac{1+24 \cdot \frac{1}{480}}{24 \cdot 70} = \frac{1}{1\,600}.$$

Nyní uvažujeme, že x krav spase louku za 96 dní. Jedna kráva spase za jeden den

$\frac{1+96y}{96 \cdot x}$ trávy. **(2-2c)**

Podle předchozích vztahů (2-2a) a (2-2c) sestavíme rovnici pro hledaný počet krav x [ks]:

$$\frac{1+24y}{24 \cdot 70} = \frac{1+96y}{96 \cdot x}, \text{ kde } y = \tfrac{1}{480} \text{ a dostáváme } \frac{1+96 \cdot \frac{1}{480}}{96 \cdot x} = \frac{1}{1\,600}.$$

Řešením této rovnice je $x = 20$ ks.

Zkouška:

množství trávy na louce .... 1 (louka),
přírůstek trávy za 96 dní .... $96 \cdot \frac{1}{480} = \frac{1}{5}$ (louky),
celkem trávy .... $1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ (louky),
1 kráva spase za 1 den .... $\frac{1}{1600}$ (louky),
20 krav spase za 1 den .... $20 \cdot \frac{1}{1\,600} = \frac{1}{80}$ (louky),
20 krav spase za 96 dní .... $96 \cdot \frac{1}{80} = \frac{6}{5}$ (louky).

Z toho plyne, že opravdu 20 krav spase ve stanovené době trávu, která na louce je i trávu, která v této době naroste.
Odpověď: Celou louku spase za 96 dní 20 krav.

***Příklad* 0.2.8:**
Prvá louka o velikosti 100 měr stačí 80 kravám na pastvu po dobu 14 neděl. Pustíme-li tam však na pastvu 120 krav, spasou trávu za 7 neděl. Druhá louka má 400 měr. Máme určit, kolik kusů se na ní může pást po dobu 4 neděl za předpokladu, že tráva je všude stejná i při spasení stejnoměrně dorůstá a všechny krávy spotřebují stejně.

Řešení č. 1:
Krávy opět rozdělíme na dvě skupiny, první spásá dorůstající trávu, druhá trávu už dříve vyrostlou.
Při 80 kravách označíme velikost první skupiny *x* [ks], velikost druhé skupiny *y* [ks], tedy:
$x + y = 80$.
Při 120 kravách označíme velikost první skupiny x_1 [ks], velikost druhé skupiny y_1 [ks], tedy:
$x_1 + y_1 = 120$.
Vztahy mezi počty kusů jsou:
$x = x_1$ a $14y = 7y_1$, z čehož plyne $y_1 = 2y$.
Po dosazení za x_1, y_1 dostáváme soustavu rovnic:
$x + y = 80$
$x + 2y = 120$,
jejímž řešením je : $x = 40$, $y = 40$.
Dorůstající trávu bude nepřetržitě spásat 40 krav a již narostlou trávu bude 14 neděl spásat také 40 krav. Nyní z druhé louky vezměme pouze 100 měr a po výpočtu zjištěnou hodnotu počtu krav upravíme pro skutečnou plochu 400 měr (tj. vynásobíme čtyřmi). Proto se ptáme, kolik krav bude již narostlou trávu spásat 4 neděle (rostoucí trávu bude stále spásat 40 krav) . Jak již bylo uvedeno, jedná se o nepřímou úměrnost.

$$\uparrow \begin{array}{l} 40\,ks..........14\,ned. \\ y_2\,ks...........4\,ned. \end{array} \downarrow$$

Z toho plyne: $\dfrac{y_2}{40} = \dfrac{14}{4}$ a řešením je $y_2 = 140$ ks.
Celkem louku o ploše 100 měr bude spásat: $x + y_2 = 40 + 140 = 180$ [ks].
Pro louku o ploše 400 měr bude počet krav čtyřnásobný, tj. 720 ks.
Zkouška:
Narůstající trávu bude spásat na první louce o velikosti 100 měr 40 krav, na druhé louce o velikosti 400 měr 160 krav. Pro již narostlou trávu platí:
14 neděl .... 1. louku (100 měr) spásá ...... 40 krav,
2. louku (400 měr) spásá ...... $4 \cdot 40 = 160$ krav,
7 neděl .... 1. louku (100 měr) spásá ...... $120 - 40 = 80$ krav,
2. louku (400 měr) spásá ...... $4 \cdot 80 = 320$ krav,
4 neděle .... 2. louku (400 měr) spásá ...... $4 \cdot 140 = 560$ krav.
Počty týdnů jsou v poměru 14 : 7 : 4.
Převrácené hodnoty počtu krav jsou v poměru (jedná se o nepřímou úměrnost), tj.
$\frac{1}{160} : \frac{1}{320} : \frac{1}{560} = \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{7} = 14 : 7 : 4$, což je poměr týdnů.
Odpověď: Na louce o ploše 400 měr se může pást 4 neděle 720 krav.

Řešení č. 2:
Hledaný počet krav je *x* [ks], množství trávy na ploše 100 měr označíme 100. Přírůstek trávy na ploše jedné míry za jednu neděli označíme *y*, na ploše 100 měr 100*y*, za 14 neděl přiroste $14 \cdot 100y$.

Za 14 neděl spase 80 krav $100 + 14 \cdot 100y$ trávy, tj. $100 \cdot (1 + 14y)$;

za jednu neděli spase 80 krav $\dfrac{100 \cdot (1+14y)}{14}$ trávy;

za jednu neděli spase jedna kráva $\dfrac{100 \cdot (1+14y)}{14 \cdot 80}$ trávy.

Protože 120 krav za 7 neděl spase stejnou louku, dostáváme stejnou úvahou, že jedna kráva spase za jednu neděli $\dfrac{100 \cdot (1+7y)}{7 \cdot 120}$ trávy.

Pro obě stáda je toto množství stejné, proto:

$$\frac{100 \cdot (1+14y)}{14 \cdot 80} = \frac{100 \cdot (1+7y)}{7 \cdot 120}.$$

Z této rovnice plyne, že přírůstek trávy za jednu neděli na ploše jedné míry je $y = \frac{1}{14}$, na celé ploše (100 měr) je $100 \cdot \frac{1}{14} = \frac{50}{7}$.

Jedna kráva za jednu neděli spase:

$$\frac{100 \cdot (1+14y)}{14 \cdot 80} = \frac{100 \cdot \left(1+14 \cdot \frac{1}{14}\right)}{14 \cdot 80} = \frac{5}{28} \text{ trávy.}$$

Potom rovnice pro hledaný počet krav x je (pole má plochu 400 měr):

$$\frac{400 \cdot (1+4y)}{4 \cdot x} = \frac{5}{28}, \text{ kde } y = \tfrac{1}{14} \text{ a dostáváme } \frac{400 \cdot \left(1+4 \cdot \frac{1}{14}\right)}{4 \cdot x} = \frac{5}{28}.$$

Řešením této rovnice je $x = 720$ ks.

Zkouška:

množství trávy na 1. louce (100 měr) .... 100 j,
množství trávy na 2. louce (400 měr) .... 400 j,
přírůstek trávy za 4 neděle na 2. louce .... $4 \cdot 400 \cdot \frac{1}{14} = \frac{800}{7}$ j,
celkem trávy na 2. louce .... $400 + \frac{800}{7} = \frac{3\,600}{7}$ j,
1 kráva spase za 1 neděli .... $\frac{5}{28}$ j,
720 krav spase za 1 neděli .... $720 \cdot \frac{5}{28} = \frac{900}{7}$ j,
720 krav spase za 4 neděle .... $4 \cdot \frac{900}{7} = \frac{3\,600}{7}$ j.

Z toho plyne, že opravdu 720 krav spase ve stanovené době trávu, která na 2. louce je i trávu, která zde v této době naroste.

Odpověď: Druhou louku o ploše 400 měr spase za 4 neděle 720 krav.

Poznámka* 1 – *odvození vzorce:

1. louka .... m_i [ha] ....x_i [ks] .... t_i [týd.] ,
2. louka .... m_k [ha] ....x_k [ks] .... t_k [týd.] .

Kromě uvedených hodnot (neznámé či parametry – dle zadání úlohy) zavedeme ještě neznámou y, která představuje přírůstek trávy na jednotce plochy [ha] za jednotku času [týd.].

Za t_i týdnů přiroste na ploše m_i celkem $m_i \cdot t_i \cdot y$ trávy;

za t_i týdnů spase x_i krav $m_i + t_i \cdot m_i \cdot y$ trávy, tj. $m_i\ (1 + t_i \cdot y)$ trávy

a za jeden týden spase jedna kráva $\dfrac{m_i \cdot (1+t_i \cdot y)}{t_i \cdot x_i}$ trávy.

Stejně tak v druhém případě za týden spase jedna kráva $\dfrac{m_k \cdot (1 + t_k \cdot y)}{t_k \cdot x_k}$ trávy.

Protože dané hodnoty se musí rovnat, dostáváme vzorec:

$$\underline{\underline{\frac{m_i \cdot (1 + t_i \cdot y)}{t_i \cdot x_i} = \frac{m_k \cdot (1 + t_k \cdot y)}{t_k \cdot x_k}}}\text{ , kde} \qquad \textbf{(2-3)}$$

m_i, m_k je spásaná plocha v jednotlivých případech,

t_i, t_k je doba spásání v jednotlivých případech,

x_i, x_k je počet ks krav v jednotlivých případech,

y je množství trávy, která naroste za jednotku času.

Pomocí tohoto vzorce je možné řešit předchozí úlohu následujícím způsobem.

Řešení č. 3 (*pomocí vzorce*):

Zadání: 100 měr spase .... 80 krav za 11 neděl,
100 měr spase ....120 krav za 7 neděl,
400 měr spase .... *x* krav za 4 neděle.

Použijeme vzorec: $\dfrac{m_1(1 + t_1 \cdot y)}{t_1 \cdot x_1} = \dfrac{m_2(1 + t_2 \cdot y)}{t_2 \cdot x_2}$, do kterého dosadíme,

potom $\dfrac{100 \cdot (1 + 14y)}{14 \cdot 80} = \dfrac{100 \cdot (1 + 7y)}{7 \cdot 120}$ a vypočteme *y*:

$y = \frac{1}{14}$.

Znovu použijeme vzorec: $\dfrac{m_0(1 + t_0 \cdot y)}{t_0 \cdot x_0} = \dfrac{m_2(1 + t_2 \cdot y)}{t_2 \cdot x_2}$, opět dosadíme, $x_0 = x$,

$\dfrac{400 \cdot (1 + 4 \cdot \frac{1}{14})}{4 \cdot x} = \dfrac{100 \cdot (1 + 7 \cdot \frac{1}{14})}{7 \cdot 120}$ a vypočteme *x*:

$x = 720$.

Druhou louku o ploše 400 měr spase za 4 neděle 720 krav.

***Příklad* 0.2.9:** (*Newtonova úloha.*)

Tři louky se stejně hustou trávou, která stejně rychle roste, mají obsahy ploch $3\frac{1}{3}$ ha, 10 ha a 24 ha. První louka stačila12 býkům na dobu 4 týdnů a druhá louka stačila 21 býkům na dobu 9 týdnů. Kolik býků se může na třetí louce pást 18 týdnů?

Řešení č. 1 (pomocí vzorce):

Zadání: $3\frac{1}{3}$ ha spase .... 12 býků za 4 týdny,
10 ha spase .... 21 býků za 9 týdnů,
24 ha spase .... *x* býků za 18 týdnů.

Použijeme vzorec $\dfrac{m_1(1+t_1\cdot y)}{t_1\cdot x_1}=\dfrac{m_2(1+t_2\cdot y)}{t_2\cdot x_2}$, potom

$$\frac{\frac{10}{3}\cdot(1+4y)}{4\cdot 12}=\frac{10\cdot(1+9y)}{9\cdot 21}$$

a vypočteme $y=\frac{1}{12}$.

Znovu použijeme vzorec: $\dfrac{m_0(1+t_0\cdot y)}{t_0\cdot x_0}=\dfrac{m_2(1+t_2\cdot y)}{t_2\cdot x_2}$, opět dosadíme, $x_0=x$,

$$\frac{24\cdot(1+18\cdot\frac{1}{12})}{18\cdot x}=\frac{10\cdot(1+9\cdot\frac{1}{12})}{9\cdot 21}$$

a vypočteme $x=36$.

Zkouška:

Na louce o ploše 24 ha je ....24 j (trávy),

přírůstek trávy za 18 t. je .... $24\cdot 18\cdot\frac{1}{12}=36$ j (trávy),

celkem je na louce .... $24+36=60$ j (trávy),

1 býk za 1 t. spase .... $\dfrac{10\cdot(1+9\frac{1}{12})}{9\cdot 21}=\dfrac{5}{54}$ j (trávy),

36 býků za 1 t. spasou .... $36\cdot\frac{5}{54}=\frac{10}{3}$ j (trávy),

36 býků za 18 t. spasou .... $18\cdot\frac{10}{3}=60$ j (trávy).

Z toho plyne, že opravdu 36 býků spase ve stanovené době trávu, která na louce je i trávu, která v této době naroste.

Odpověď: Po dobu 18 týdnů uživí louka o ploše 24 ha 36 býků.

Řešení č. 2:

Hledaný počet krav je x [ks], množství trávy, jež vyroste za jeden týden na jednom ha, je y. Na první louce přiroste za týden $(3\frac{1}{3})\cdot y$ trávy a za 4 týdny $\frac{10}{3}\cdot y\cdot 4=\frac{40}{3}y$ původního množství trávy. To je totéž, jako bychom řekli, že se původní obsah plochy zvětšil na $\left(\frac{10}{3}+\frac{40}{3}y\right)$ ha. Jinými slovy, býci sežerou tolik trávy, kolik je původně na louce o obsahu plochy $\left(\frac{10}{3}+\frac{40}{3}y\right)$ ha. Za týden sežere 12 býků $\frac{1}{4}$ trávy a jeden býk za týden $\frac{1}{48}$ tohoto množství, to je množství trávy na louce o obsahu plochy

$$\frac{\frac{10}{3}+\frac{40}{3}y}{48}\text{ ha}=\frac{10+40y}{144}\text{ ha.}$$

Podobně zjistíme obsah plochy, kterou spase jeden býk za jeden týden, z údajů o druhé louce:

týdenní přírůstek na 1 ha .... y,

9-týdenní přírůstek na 1 ha .... $9y$,

9-týdenní přírůstek na 10 ha .... $90y$.

Obsah plochy pastvin, která poskytne pastvu 21 býkům po dobu 9 týdnů, je $(10+90y)$ ha. Obsah plochy, kterou spase jeden býk za jeden týden, je

$$\frac{10+90y}{9\cdot 21}\text{ ha}=\frac{10+90y}{189}\text{ ha.}$$

Obě množství se musí rovnat, tj. musí platit

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+90y}{189}\text{ ; řešením je } y=\tfrac{1}{12}.$$

Obsah plochy louky, která dá dostatek pastvy pro jednoho býka na jeden týden, je:

$$\frac{10+40y}{144}\text{ ha} = \frac{10+40\cdot\frac{1}{12}}{144}\text{ ha} = \frac{5}{54}\text{ ha.}$$

Pro hledaný počet x býků dostáváme rovnici

$$\frac{24+24\cdot 18\cdot\frac{1}{12}}{18\cdot x}=\frac{5}{54}\text{ , odtud } x=36.$$

Třetí louka uživí po dobu 18 týdnů 36 býků.

Řešení č. 3:

Pro zjednodušení řešení budeme všechny údaje transformovat pro louky o ploše 10 ha (tj. 3-krát zvětšíme počet býků)

1. louka ..... 10 ha spase .... 36 býků za 4 týdny,
2. louka ..... 10 ha spase .... 21 býků za 9 týdnů.

Býky rozdělíme opět na dvě skupiny, první spásá dorůstající trávu, druhá trávu už dříve vyrostlou.

Při 36 bycích je velikost první skupiny x [ks], velikost druhé skupiny y [ks], tedy:

$x + y = 36$.

Při 21 bycích je velikost první skupiny x_1 [ks], velikost druhé skupiny y_1 [ks], tedy:

$x_1 + y_1 = 21$.

Vztahy mezi počty kusů jsou:

$x = x_1$ a $4y = 9y_1$, z čehož plyne $y_1 = \frac{4}{9}y$.

Po dosazení za x_1, y_1 dostáváme soustavu rovnic:

$$x + y = 36$$
$$x + \tfrac{4}{9}y = 21,$$

jejímž řešením je: $x = 9$, $y = 27$.

Údaje o velikosti třetí louky budeme opět transformovat na plochu 10 ha (tj. 2,4-krát zmenšíme počet býků).

Stejně jako v předešlé úloze se jedná o nepřímou úměrnost.

$$\uparrow \begin{array}{l} 27\,ks\ldots\ldots\ldots\ldots 4\,týd. \\ y_2\,ks\ldots\ldots\ldots\ldots 18\,týd. \end{array} \downarrow$$

Z toho plyne: $\frac{y_2}{27}=\frac{4}{18}$ a řešením je $y_2 = 6$ ks.

Celkem pro louku o ploše 10 ha: $x + y_2 = 9 + 6 = 15$ [ks].

Pro louku o ploše 24 ha bude počet býků 2,4-násobný, tj. 36 ks.

Zkouška:

Počty býků, které spásají narůstající trávu označme p, kteří spásají již narostlou trávu r.

Potom platí:

na louce o ploše $3\frac{1}{3}$ ha .... se 4 týdny pase 12 býků, z toho .... $p = 3$ .... $r = 9$
na louce o ploše 24 ha .... se 4 týdny pase 86,4 býků, z toho .... $p = 21,6$ ...... $r = 64,8$
na louce o ploše 10 ha .... se 9 týdnů pase 21 býků, z toho .... $p = 9$ .... $r = 12$
na louce o ploše 24 ha .... se 9 týdnů pase 50,4 býků, z toho .... $p = 21,6$ ...... $r = 28,8$
na louce o ploše 24 ha .... se 18 týdnů pase 36 býků, z toho .... $p = 21,6$ ...... $r = 14,4$.

Počty týdnů jsou v poměru 4 : 9 : 18.

Převrácené hodnoty počtu býků jsou v poměru $\frac{1}{64,8} : \frac{1}{28,8} : \frac{1}{14,4} = \frac{1}{9} : \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = 4 : 9 : 18$, což je poměr týdnů.

Odpověď: Louku o výměře 24 ha spase za 18 týdnů 36 býků.

Poznámka* 2 *– odvození vzorce:

1. louka .... h_1 [ha] .... k_1 [ks] .... t_1 [týd.] ,
2. louka .... h_2 [ha] .... k_2 [ks] .... t_2 [týd.] , kde

h_1, h_2 je spásaná plocha v jednotlivých případech,

k_1, k_2 je počet ks býků v jednotlivých případech,

t_1, t_2 je doba spásání v jednotlivých případech.

Změníme plochu jedné louky tak, aby se rovnala ploše druhé louky, např. h_2 na h_1, tj. násobíme plochu i počet býků konstantou $\frac{h_1}{h_2}$ (jedná se o přímou úměrnost), doba spásání louky se nemění. Potom dostaneme:

původní 1. louka .... h_1 [ha] .... k_1 [ks] .... t_1 [týd.] ,

upravená 2. louka .... h_1 [ha] .... $k_2 \cdot \frac{h_1}{h_2}$ [ks] .... t_2 [týd.] ,

Býky rozdělíme opět na dvě skupiny, první spásá dorůstající trávu, druhá trávu už dříve vyrostlou.

Při k_1 bycích je velikost první skupiny x_1 [ks], velikost druhé skupiny y_1 [ks], tedy:

$$x_1 + y_1 = k_1.$$

Při $k_2 \cdot \frac{h_1}{h_2}$ bycích je velikost první skupiny x_2 [ks], velikost druhé skupiny y_2 [ks], tedy:

$$x_2 + y_2 = k_2 \cdot \frac{h_1}{h_2}.$$

Vztahy mezi počty kusů jsou:

$x_2 = x_1$ a $t_1 y_1 = t_2 y_2$ (nepřímá úměrnost), z čehož plyne $y_2 = \frac{t_1}{t_2} y_1$.

Po dosazení za x_2, y_2 dostáváme soustavu rovnic:

$$x_1 + y_1 = k_1,$$

$$x_1 + \frac{t_1}{t_2} y_1 = k_2 \cdot \frac{h_1}{h_2},$$

rovnice odečteme a dostáváme

$$y_1 - \frac{t_1}{t_2} y_1 = k_1 - \frac{k_2 h_1}{h_2},$$

$$y_1 \cdot \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) = \frac{k_1 h_2 - k_2 h_1}{h_2},$$

$$y_1 \cdot \frac{t_2 - t_1}{t_2} = \frac{k_1 h_2 - k_2 h_1}{h_2},$$

a dostáváme pro neznámé x_1, y_1:

$$\underline{\underline{y_1 = \frac{(k_1 h_2 - k_2 h_1)\cdot t_2}{(t_2 - t_1)\cdot h_2}}}, \quad \underline{\underline{x_1 = k_1 - y_1}}\,. \qquad \textbf{(2-4)}$$

Nyní se dostáváme k třetí louce (jako výchozí vezmeme první louku)

1. louka .... h_1 [ha] .... k_1 [ks] .... t_1 [týd.] ,
3. louka .... h_3 [ha] .... k_3 [ks] .... t_3 [týd.] , kde

h_3 je spásaná plocha třetí louky,

k_3 je počet ks býků třetí louky,

t_3 je doba spásání třetí louky.

Zde h_3 upravíme na h_1 a s ním i k_3 tím, že násobíme konstantou $\frac{h_1}{h_3}$ (opět se jedná o přímou úměrnost) a dostáváme

upravená 3. louka .... h_1 [ha] .... $k_3\cdot\frac{h_1}{h_3}$ [ks] .... t_3 [týd.] .

Při k_3 býcích je velikost první skupiny x_3 [ks], velikost druhé skupiny y_3 [ks], tedy:

$$x_3 + y_3 = k_3\cdot\frac{h_1}{h_3},$$

potom rovnici upravíme

$$x_3 + y_3 = k_3\cdot\frac{h_1}{h_3} \qquad \Big|\cdot\frac{h_3}{h_1}$$

$$k_3 = \frac{h_3}{h_1}\cdot x_3 + \frac{h_3}{h_1}\cdot y_3\,.$$

Vztahy mezi počty kusů jsou:

$x_3 = x_1$ a $t_1\, y_1 = t_3\, y_3$ (opět nepřímá úměrnost), z čehož plyne $y_3 = \frac{t_1}{t_3} y_1$.

Po dosazení za x_3, y_3 dostáváme rovnici

$k_3 = \frac{h_3}{h_1}\cdot x_1 + \frac{h_3 t_1}{h_1 t_3}\cdot y_1$, kde neznámou k_3 označíme x_0 a dostáváme vztah

$$\underline{\underline{x_0 = \frac{h_3}{h_1}\cdot x_1 + \frac{h_3 t_1}{h_1 t_3}\cdot y_1}}\,. \qquad \textbf{(2-4a)}$$

Podle vzorců (2-4), (2-4a) můžeme řešit příklad 0.2.9 :

Zadání: 1. louka ..... $3\frac{1}{3}$ ha spase .... 12 býků za 4 týdny,

2. louka ...... 10 ha spase .... 21 býků za 9 týdnů,

3. louka ...... 24 ha spase .... x býků za 18 týdnů.

Řešení: $y_1 = \frac{(k_1 h_2 - k_2 h_1)\cdot t_2}{(t_2 - t_1)\cdot h_2} = \frac{(12\cdot 10 - 21\cdot 3\frac{1}{3})\cdot 9}{(9-4)\cdot 10} = 9,$

$x_1 = k_1 - y_1 = 12 - 9 = 3,$

$x_0 = \frac{h_3}{h_1}\cdot x_1 + \frac{h_3 t_1}{h_1 t_3}\cdot y_1 = \frac{24}{3\frac{1}{3}}\cdot 3 + \frac{24\cdot 4}{3\frac{1}{3}\cdot 18}\cdot 9 = 21{,}6 + 14{,}4 = 36.$

Po dobu 18 týdnů uživí louka o ploše 24 ha 36 býků.

2.2.3. Hledání extrémů

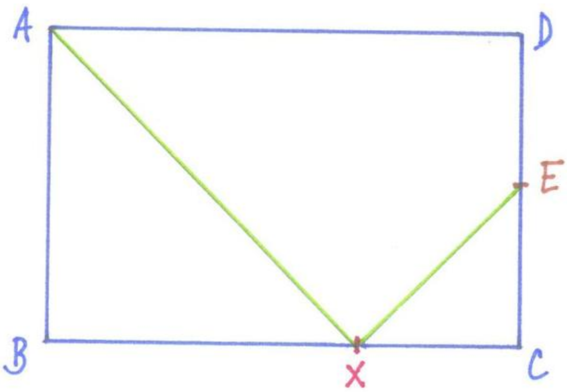
Najít maximální nebo minimální hodnotu dané veličiny je ve slovních úlohách úkol méně častý, pro praxi jsou však takové úlohy velmi důležité. V následujícím příkladu je popsána obměna úlohy známé z knih typu „zajímavá matematika“. Vycházím z řešení které je uvedeno v [87].

***Příklad* 0.2.10:** (*Mokré tričko*)
V městě M, na gymnáziu G se dne D konala soutěž „Mr. Mokré tričko 2006“. Soutěž připravila PK TV (předmětová komise tělesné výchovy) ve spolupráci s PK MA (předmětovou komisí matematiky). Propozice byly na nástěnce již týden před soutěží:

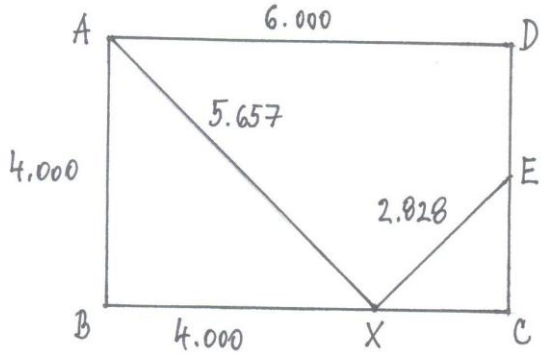
Závodní dráha má tvar obdélníku (viz obr. 2-8), strana *AB* měří 40 m, *BC* má délku 60 m. Závodník doskáká po jedné noze z bodu *A* na stanoviště partnera v bodě *X* na straně *BC*. Ten bude vybaven litrovou lahví vody a polije původně suché tričko závodníka. Závodník pak doskáká po druhé noze do cíle *E*, který bude umístěn na straně *CD*. Místo cíle bude na doporučení vedoucího PK MA odtajněno až 10 minut před startem neboť má vliv na celkovou dráhu závodníka. Účastníci mohou při přípravě využívat pomoci kamarádů (realizačních týmů) i veškeré výpočetní techniky ve škole dostupné. V samotném závodě však musí místo *X* před startem určit pouze partner závodníka, tzv. „polejvák“ a zapsat jej do protokolu. Proškolený pedagog bude kontrolovat, zda tričko je před startem řádně suché a v cíli naopak dostatečně mokré. O pořadí nebude rozhodovat, zda mokré tričko závodníku sluší, ale pouze čas, za který urazí dráhu *AXE*.

Místo cíle *E* bylo 10 minut před závodem oznámeno. Byl jím střed úsečky *CD* na plánu závodiště. Určete polohu místa *X*.

Obr. 2-8:



Obr. 2-9:



Řešení č. 1:
Závodníci prvního družstva si v Cabri geometrii nakreslili plán v měřítku 1 : 1 000 (viz obr. 2-9). Tento program umí určit délku úseček. Ve středu úsečky *CD* umístili bod *E*. Bodem *X* pohybovali po úsečce *BC* a sledovali výslednou dráhu. Tak odhalili místo, ve kterém je dráha minimální. Bylo to v místě vzdáleném 40 m od bodu *B*, minimální dráha vychází 84,85 m. V Cabri geometrii vychází dráha $d = 8{,}485$ cm.

Řešení č. 2:
Závodníci druhého družstva si pomocí Pythagorovy věty vypočetli vzorec pro celkovou vzdálenost *d*:

$$d = \sqrt{x^2 + 1\,600} + \sqrt{(60 - x)^2 + p^2}\ ,$$

kde p je vzdálenost cíle od bodu C a x vzdálenost bodu X od bodu B. Pro výpočet dráhy sestavili tabulku v Excelu po 5 metrech (v řádcích byla vzdálenost BX, ve sloupcích CX a v příslušných „okýnkách“ hodnoty vzdálenosti AXE). Po oznámení, že $p = 20$, bylo z tabulky zřejmé, že $|BX| = 40$, $|AXE| = 84{,}9$. Cíl byl zvolen tak výhodně, že nemuseli ani zaokrouhlovat.

Řešení č. 3:

Závodníci třetího družstva si dráhu AXE vyjádřili jako funkci vzdálenosti BX, tj. $|BX| = x$, potom $|AXE| = f(x)$ a dostali:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1\,600} + \sqrt{(60 - x)^2 + 400}\,.$$

Platí $f\,'(x) = 0$, tedy.

$$\frac{x \cdot \sqrt{x^2 - 120x + 4\,000} + (x - 60) \cdot \sqrt{x^2 + 1\,600}}{\sqrt{x^2 + 1\,600} \cdot \sqrt{x^2 - 120x + 4\,000}} = 0\,,$$

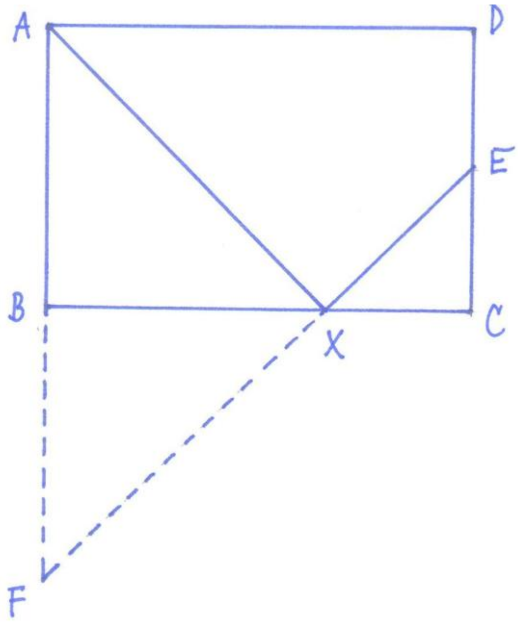
z toho je $x = 40$ a délka dráhy

$$f(x) = 60 \cdot \sqrt{2} = 84{,}852\,813\,74.$$

Řešení č. 4:

Závodníci čtvrtého družstva narýsovali v měřítku plánek hřiště. Sestrojili obraz F bodu A v osové souměrnosti s osou BC. Bod E doplnili podle hlášení před startem (viz obr. 2-10). Je jasné, že součet délek $AX + XE = FX + XE$. Součet na pravé straně rovnosti je podle trojúhelníkové nerovnosti nejmenší, když bod X leží na úsečce FE. Bod X je tedy průsečík úsečky FE s úsečkou BC. Dráha je potom rovna délce úsečky FE. Stanoviště polejváka je po změření úsečky BX právě 40 metrů od bodu B.

Obr. 2-10:



Řešení 5:

Závodníci pátého družstva řešili úlohu podobně jako družstvo č. 4, ale obrázek neměřili, narýsovali jej v Cabri geometrii a program určil přesně souřadnice polejváka.

Řešení 6:
Metoda závodníků šestého družstva byla obdobná, vycházela z osové souměrnosti (viz obr. 2-10). Trojúhelníky *ABX* a *ECX* jsou podobné, a proto musíme rozdělit stranu *BC* v poměru délek stran *AB* a *EC*, to jest 2 : 1. Vyšlo i bez notebooku 40 m. Kalkulačku využili jen k tomu, aby závodníkovi mohli říci, kolik metrů musí naskákat.

Řešení 7:
Závodníci sedmého družstva vycházeli ze stejné úvahy jako předchozí dvě družstva, ale dále postupovali analyticky. Zvolili si soustavu souřadnic s počátkem v bodě *B*, osou *x* v přímce *BC* a osou *y* v přímce *BA*. Souřadnice bodů potom vychází takto: $A = [0;\ 40]$, jeho obraz $F = [0;\ -40]$. Stanoviště cíle bylo v bodě $E = [60;\ p]$. Rovnice přímky *FE* pak byla :

$$(p + 40)\ x - 60y - 2\ 400 = 0.$$

Na startu dosadili za $p = 20$ a měli rovnici přímky *FE*: $60x - 60y - 2\ 400 = 0$, tj.

$$x - y = 40.$$

Pro $y = 0$ vychází $x = 40$. To stačí, aby závodníci věděli, kam se má polejvák s vodou posadit.

Řešení 8:
Závodníci osmého družstva uvažovali úplně jinak: „Divíme se, že nikoho dalšího nenapadlo, že »není noha jako noha«. Nezáleží na tom, zda je nejkratší dráha, ale zda je nejkratší čas“. Závodníci proto zjistili rychlost skákání svého závodníka pro každou nohu zvlášť a určili celkový čas jako funkci vzdálenosti *x* pro případ, že začne rychlejší i pomalejší nohou. Pomocí programu Derive bylo hračkou zjistit minimum funkcí a vybrat optimální strategii.

a) $$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1\ 600}}{2} + \frac{\sqrt{(60-x)^2 + 400}}{1{,}5}$$

$$\frac{3x \cdot \sqrt{x^2 - 120x + 4\ 000} + 4 \cdot (x - 60) \cdot \sqrt{x^2 + 1\ 600}}{6 \cdot \sqrt{x^2 + 1\ 600} \cdot \sqrt{x^2 - 120x + 4\ 000}} = 0$$

$x = 46{,}227\ 608\ 34$

$t(46{,}227\ 608\ 34) = 46{,}754\ 338$

b) $$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1\ 600}}{1{,}5} + \frac{\sqrt{(60-x)^2 + 400}}{2}$$

$$\frac{4x \cdot \sqrt{x^2 - 120x + 4\ 000} + 3 \cdot (x - 60) \cdot \sqrt{x^2 + 1\ 600}}{6 \cdot \sqrt{x^2 + 1\ 600} \cdot \sqrt{x^2 - 120x + 4\ 000}} = 0$$

$x = 31{,}251\ 813\ 93$

$t(31{,}251\ 813\ 93) = 51{,}351\ 057\ 97$

Polejvák čekal na metě 46 m a družstvo očekávalo čas kolem 47 s.

A jaký byl výsledek závodu podle autora?
Bohužel družstvo č. 8 přes nejlepší strategii vinou technické chyby skončilo poslední. Vyhrálo družstvo č. 9, jež nic nepočítalo. Závodníci spoléhali pouze na svalstvo skákajícího a to jim přineslo úspěch. Ale uvidíme příště!

2.3. Přehled modelů při rozšířené výuce matematiky

2.3.1. Složitější úsudky, modely a rovnice

2.3.1.1. *Složité úsudky*

Je-li reálná situace méně přehledná a jednotlivé vztahy lze obtížně interpretovat, pak užití úsudku může být náročné. Ukažme si to v následující úloze o společné práci, kdy už samo téma se může jevit jako náročné. Řešení zpracováno podle [61], str. 37.

***Příklad* 0.3.1:**
Skupina sekáčů trávy měla pokosit dvě louky, z nichž první měla dvakrát větší výměru než druhá. Půl dne všichni sekáči kosili první louku, po obědě se rozdělili na dvě stejně početné skupiny. První skupina zůstala na velké louce a do večera ji pokosila. Druhá kosila do večera menší louku, ale nepokosila ji celou, zbytek dosekal pak jeden sekáč za den. Kolik sekáčů bylo ve skupině?

Řešení:
Jestliže všichni sekáči kosili větší louku jednu polovinu dne a druhou polovinu dne ji pokosila polovina sekáčů, je jasné, že v první polovině dne pokosili $\frac{2}{3}$ a v druhé polovině dne $\frac{1}{3}$ větší louky. Druhá skupina musela odpoledne posekat na malé louce také výměru rovnu $\frac{1}{3}$ větší louky. Protože malá louka má výměru rovnu $\frac{1}{2}$ větší louky, neposekaná část menší louky činila $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ větší louky (toto je výkon jednoho sekáče za jeden den). Jestliže jeden sekáč pokosí $\frac{1}{6}$ větší louky za jeden den a celkem bylo pokoseno $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ větší louky, potom počet sekáčů je $\frac{4}{3}:\frac{1}{6}=8$.
Zkouška:
Všichni sekáči posekali:

celkový výkon za 1. den je dán součinem počtu sekáčů a jejich denního výkonu:

$c = 8\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$ větší louky;

celkový výkon za 2. den je výkon jednoho sekáče, tj. $\frac{1}{6}$ větší louky;

celkem sekáči posekali: $\frac{4}{3}+\frac{1}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$, tj. 1 a $\frac{1}{2}$ velké louky.
Podle zadání má menší louka poloviční rozlohu větší louky, tedy dohromady mají rozlohu 1 a $\frac{1}{2}$ velké louky. Z toho vyplývá, že sekáči pokosili přesně to, co měli.
Odpověď:
Ve skupině bylo 8 sekáčů.

2.4.1.2. *Složitější aritmetické operace*

Existuje mnoho způsobů, jak k řešení slovních úloh použít aritmetické modely. Vybral jsem zde postup, kdy vypočteme násobky hodnot, které odpovídají zadání, a pak vyhledáme jejich společný násobek.

***Příklad* 0.3.2:**
V balírnách mají připravit směs kávy tak, aby 1 kilogram stál 260 Kč. Na skladě jsou dva druhy kávy v ceně 240 Kč za 1 kg a 300 Kč za 1 kg. Kolik kg každého druhu je třeba smíchat, abychom připravili 15 kg požadované směsi?

Řešení:
Celková cena směsi je 3 900 Kč. Do tabulky budeme postupně zapisovat jednotlivé možnosti tak, že začneme množstvím 0 kg dražšího druhu kávy a postupně, po 1 kg, budeme množství zvětšovat. Do posledního řádku budeme zapisovat celkovou cenu (viz tabulka 2-2).

Tab. 2-2:

dražší druh kávy	kg	0	1	2	3	4	**5**	6	. . .
	cena	0	300	600	900	1 200	**1 500**	1 800	. . .
levnější druh kávy	kg	15	14	13	12	11	**10**	9	. . .
	cena	3 600	3 360	3 120	2 880	2 640	**2 400**	2 160	. . .
celkem		3 600	3 660	3 720	3 780	3 840	**3 900**	3 960	. . .

Z tabulky je zřejmé, že dražší kávy bude 5 kg, levnější kávy 10 kg.
Zkouška:
5 kg dražší kávy stojí $5 \cdot 300 = 1\,500$ Kč, 10 kg levnější kávy stojí $10 \cdot 240 = 2\,400$ Kč. Celkem stojí 15 kg směsi $1\,500 + 2\,400 = 3\,900$ Kč, potom 1 kg směsi stojí $3\,900 : 15 = 260$ Kč.
Odpověď:
Je třeba smíchat 5 kg dražší kávy a 10 kg levnější kávy.

Poznámka:
Pokud by výsledné množství směsi bylo velké, začneme tabulku vyplňovat od jiné hodnoty než 0 (k určení hodnoty můžeme využít aritmetický průměr cen apod.). Pokud množství jednotlivých druhů káv je desetinné číslo, musíme ještě v intervalu, kde se vyskytuje řešení, dělit na menší části (po desetinách, dvacetinách, setinách, . . .) nebo k určení přesnější hodnoty použít interpolaci.

2.3.1.3. *Složitější užití dělitelnosti*

Následující úloha je příkladem užití dělitelnosti, kdy známé číslo je třeba rozložit na různé součiny a z nich vybrat hodnoty odpovídající zadání slovní úlohy. K řešení úlohy nestačí pouze užití dělitelnosti, je třeba znát ještě další informace. Řešení zpracováno podle [20], str. 98.

***Příklad* 0.3.3:**
„Kolik lidí žije v tomto domku?“ ptal se sčítací komisař. „Tři.“ „Jak jsou staří?“ „Součin jejich věků je 225, součet jejich věků je roven číslu domu.“ Komisař se podíval na číslo domu a povídá: „To mi stačí. Jste vy nejstarší?“ „Ano“, zněla odpověď. Určíte věky obyvatel?

Řešení:
Součin 225 lze rozložit na $225 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$, z toho lze vybrat trojice:
$[1; 3; 75]$, $[1; 5; 45]$, $[1; 9; 25]$, $[1; 15; 15]$,
$[3; 3; 25]$, $[3; 5; 15]$, $[5; 5; 9]$.
Trojice $[1; 1; 225]$ nemá praktický význam.
Protože komisař potřeboval vědět, kdo je nejstarší, znamená to, že nastal případ, který by bez této znalosti nedovedl rozhodnout. Správná je jedna z trojic se stejným součtem věků.

Z uvedených trojic pouze trojice [1; 15; 15] a [3; 3; 25] mají stejný součet (u kterékoli jiné trojice by se komisař na nic ptát nemusel). Svou otázkou komisař poznal, že správná je trojice [3; 3; 25] – neboť patnáctiletý by o sobě nemohl říci, že je nejstarší. V domě žijí osoby ve věku 3 roky, 3 roky a 25 let.

Zkouška:

Součin věků tří osob je $3 \cdot 3 \cdot 25 = 225$ let. Z řešení plyne, že ještě jeden součin $1 \cdot 15 \cdot 15$ dává stejný součet, proto musel znát komisař ještě jeden údaj – kdo je nejstarší. Ostatní součiny dávají navzájem různé součty, proto nemohou být řešením.

Odpověď:

Osoby v domě jsou staří 3 roky, 3 roky a 25 let.

2.3.1.4. *Užití rovnic vyšších stupňů*

***Příklad* 0.3.4:**

Najděte tři za sebou následující přirozená čísla taková, že třetí mocnina největšího se rovná trojnásobku součtu třetích mocnin zbývajících dvou.

Řešení:

Nejmenší přirozené číslo z hledaných označme n, potom další jsou $n+1$ a $n+2$ a platí

$$(n+2)^3 = 3 \cdot [(n+1)^3 + n^3].$$

Tuto kubickou rovnici pro neznámou n vyřešíme a získáme hledaná čísla:

$$n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = 3 \cdot [n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3]$$

$$n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = 6n^3 + 9n^2 + 9n + 3 \quad \Big| -n^3 - 6n^2 - 12n - 8$$

$$5n^3 + 3n^2 - 3n - 5 = 0.$$

Řešení kubické rovnice:

Kubickou rovnici $an^3 + bn^2 + cn + d = 0$ o neznámé n normujeme (dělíme koeficientem a) a dostáváme normovanou kubickou rovnici

$$n^3 + fn^2 + gn + h = 0.$$

Rovnici převedeme pomocí substituce $n = x - \dfrac{f}{3}$ na redukovaný tvar (bez kvadratického členu)

$$x^3 + px + q = 0$$

a vypočteme diskriminant

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3. \qquad \textbf{(2-5)}$$

1) Je-li $p = q = 0$, pak má rovnice jeden trojnásobný kořen rovný nule.

2) Je-li $D = 0$, $pq \neq 0$, pak má rovnice dva reálné kořeny $x_1 = -2 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{q}{2}}$, $x_{23} = \sqrt[3]{\dfrac{q}{2}}$, z nichž druhý je dvojnásobný.

3) Je-li $D > 0$, pak existuje jedno reálné řešení x, které vypočteme pomocí Cardanových vzorců: $x = u + v$, $u = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{D}}$, $v = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{D}}$. **(2-5a)**

Kromě reálného řešení existují ještě dvě komplexní řešení.

4) Je-li $D < 0$, pak existují tři reálná řešení x, tato řešení nejde vypočítat pomocí Cardanových vzorců, musíme je vypočítat goniometrickým řešením:

$$x_1 = 2\cdot\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}\ ,\ x_2 = -2\cdot\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi-\pi}{3},\ x_3 = -2\cdot\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi+\pi}{3},$$

kde φ lze vypočítat z rovnice $\cos\varphi = \dfrac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}}$. **(2-5b)**

Vzhledem k charakteru úlohy uvádím jen reálná řešení, komplexní řešení vynechávám.

Řešení rovnice $5n^3 + 3n^2 – 3n – 5 = 0$:
Tuto kubickou rovnici normujeme (dělíme číslem 5) a dostáváme

$$n^3 + \frac{3}{5}n^2 - \frac{3}{5}n - 1 = 0.$$

Provedeme substituci $n = x - \frac{1}{5}$ a dostáváme

$$\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{3}{5}\cdot\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{3}{5}\cdot\left(x-\frac{1}{5}\right) - 1 = 0$$

$$x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{25}x - \frac{1}{125} + \frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{25}x + \frac{3}{125} - \frac{3}{5}x + \frac{3}{25} - 1 = 0$$

$$x^3 - \frac{18}{25}x - \frac{108}{125} = 0 \;\rightarrow\; p = -\frac{18}{25},\ q = -\frac{108}{125},$$

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{54}{125}\right)^2 + \left(-\frac{6}{25}\right)^3 = \frac{2\,916 - 216}{15\,625} = \frac{2\,700}{15\,625},$$

$D > 0 \;\rightarrow$ jedno reálné řešení x, řešení vypočteme pomocí Cardanových vzorců:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} = \sqrt[3]{\frac{54}{125} + \sqrt{\frac{2\,700}{15\,625}}} = \sqrt[3]{\frac{54}{125} + \frac{30\sqrt{3}}{125}} = \frac{\sqrt[3]{54 + 30\sqrt{3}}}{5},$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} = \sqrt[3]{\frac{54}{125} - \sqrt{\frac{2\,700}{15\,625}}} = \sqrt[3]{\frac{54}{125} - \frac{30\sqrt{3}}{125}} = \frac{\sqrt[3]{54 - 30\sqrt{3}}}{5},$$

$$x = u + v = \frac{\sqrt[3]{54 + 30\sqrt{3}}}{5} + \frac{\sqrt[3]{54 - 30\sqrt{3}}}{5} = \frac{6}{5};$$

$$n = x - \frac{1}{5} = \frac{6}{5} - \frac{1}{5} = 1.$$

Řešením jsou hodnoty $n = 1$, $n + 1 = 2$, $n + 2 = 3$.
Zkouška:
Třetí mocnina největšího čísla: $3^3 = 27$.
Trojnásobek součtu třetích mocnin zbývajících dvou čísel: $3\cdot(2^3 + 1^3) = 27$.
Odpověď:
Hledaná tři za sebou následující čísla jsou 1; 2; 3.

Poznámka:
Je zřejmé, že jedním řešením rovnice $5n^3 + 3n^2 - 3n - 5 = 0$ je číslo $n = 1$ (toto číslo můžeme určit např. tak, že volíme vhodná čísla a dosazujeme je do polynomu na levé straně rovnice; je-li výsledek roven 0, je dosazené číslo řešením rovnice). Potom je polynom
$5n^3 + 3n^2 - 3n - 5$ dělitelný výrazem $n - 1$ beze zbytku a dostáváme:

$$\begin{array}{l}
(5n^3 + 3n^2 - 3n - 5) : (n - 1) = 5n^2 + 8n + 5 \\
\underline{-(5n^3 - 5n^2)} \\
\quad 8n^2 - 3n \\
\quad \underline{-(8n^2 - 8n)} \\
\qquad 5n - 5 \\
\qquad \underline{-(5n - 5)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Z toho vyplývá:

$$5n^3 + 3n^2 - 3n - 5 = (5n^2 + 8n + 5)\cdot(n - 1)$$

a rovnici můžeme řešit rozkladem:

$$5n^3 + 3n^2 - 3n - 5 = 0$$
$$(5n^2 + 8n + 5)\cdot(n - 1) = 0$$

1) $5n^2 + 8n + 5 = 0, \quad D = -36 \quad \rightarrow$ rovnice nemá reálné řešení;
2) $n - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad n = 1.$

2.3.2. Užití složitějších grafů a geometrických zobrazení.

2.3.2.1. *Užití mřížových bodů*

Grafy s mřížovými body se používají k řešení diofantovských rovnic. V porovnání s užitím grafů funkcí se náročnost řešení prakticky nemění. Ukážeme si to v následující slovní úloze.

***Příklad* 0.3.5:**
Mám-li šesti- a sedmilitrovou nádobu, jakým způsobem načerpám těmito nádobami 50 *l*?

Řešení:
Protože máme nádobu načerpat, uvažujeme pouze přilévání vody, nikoliv odlévání (tj. odčerpávání). Označme si počet šestilitrových nádob x a počet sedmilitrových y. Vyjádříme-li zadání matematicky (provedeme matematizaci reálné situace), dostáváme vztah:

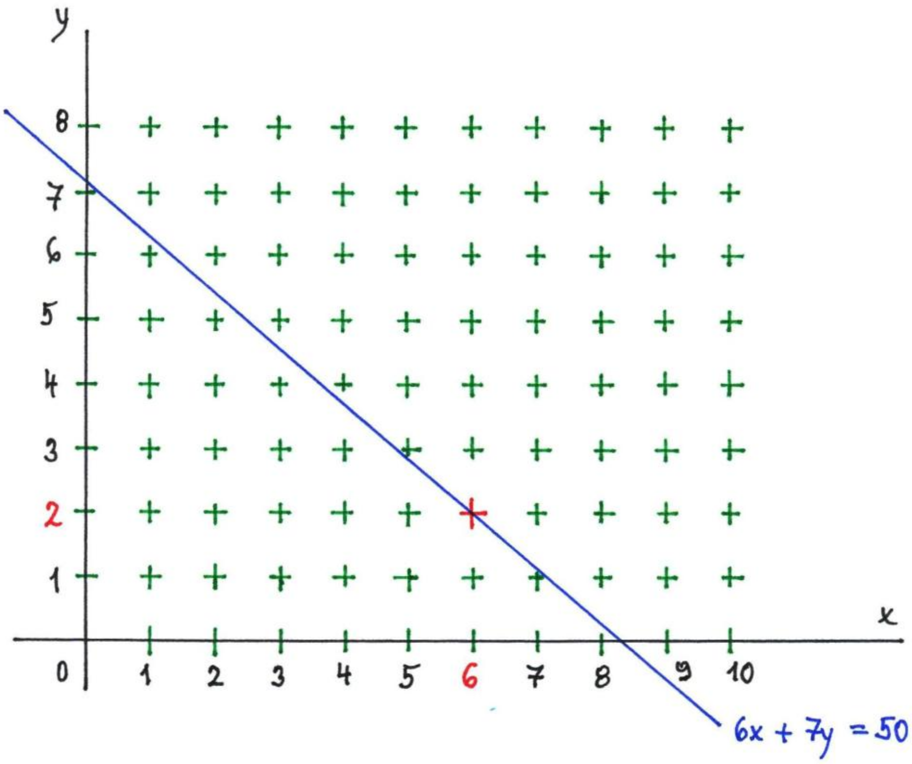
$$6x + 7y = 50.$$

Po úpravě dostáváme zápis lineární funkce:

$$y = \frac{50 - 6x}{7}.$$

Sestrojíme její graf a z grafu určíme hledané hodnoty. Grafem funkce je přímka procházející body $[0; \frac{50}{7}]$, $[\frac{25}{3}; 0]$. Hledané hodnoty jsou celočíselné (kladné) a nazývají se v kartézské soustavě souřadnic mřížové body.

Graf: Obr. 2-11:



Výsledkem je jeden mřížový bod R = [6; 2]. Řešením jsou hodnoty x = 6, y = 2.
Zkouška:
Šestilitrovou nádobu použijeme 6 × . . . objem . . . 36 *l*.
Sedmilitrovou nádobu použijeme 2 × . objem . . . 14 *l*.
Celkem objem 36 + 14 = 50 *l*.
Odpověď:
Šestilitrovou nádobu jsme použili 6-krát, sedmilitrovou nádobu 2-krát.

2.3.2.2. *Užití čtvrté geometrické úměrné*

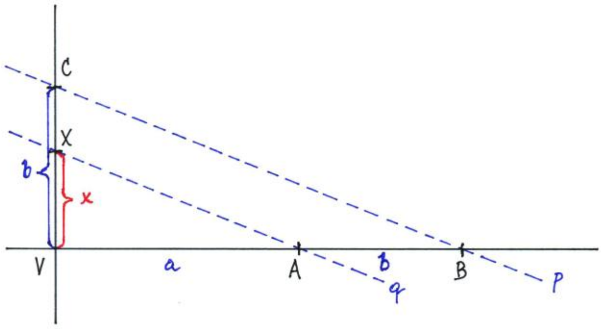
Pomocí čtvrté geometrické úměrné lze sestrojit jakýkoliv výraz vycházející z trojčlenky (tři hodnoty známe, čtvrtou určujeme). Vybral jsem zajímavou aplikaci při řešení úloh o společné práci.

***Příklad* 0.3.6:**
Dvě skupiny pracují na úpravě parku. První skupina by úkol splnila za 30 dní, druhá za 20 dní. Za kolik dní splní úkol společně?

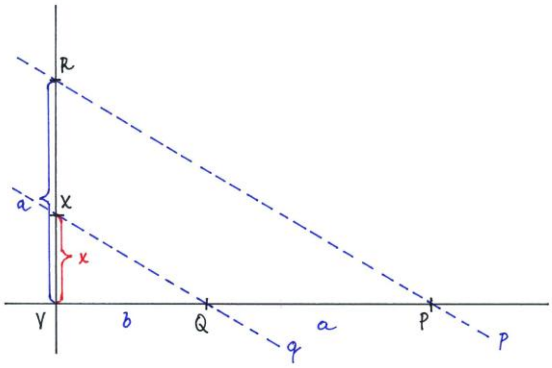
Řešení:
Označme si dobu práce jen první skupiny a [dní], dobu práce jen druhé skupiny b [dní] a dobu společné práce x [dní]. Hledanou hodnotu x sestrojíme pomocí čtvrté geometrické úměrné. Na jedno rameno úhlu (ramena nemusí být kolmá, vrchol označme V) postupně od bodu V naneseme velikosti a = 30, b = 20. Dostáváme tak body A, B, pro které platí: $|VA| = a$, $|AB| = b$. Na druhé rameno úhlu naneseme od bodu V velikost b a dostaneme bod C, pro který platí $|VC| = b$. Potom spojíme bod B s bodem C a dostáváme přímku p. Bodem A ve-

deme přímku q rovnoběžnou s přímkou p. Průsečík přímky q s ramenem VC sestrojeného úhlu označme X. Hledaná veličina x je rovna vzdálenosti $|VX|$ (viz obr. 2-12).
Stejný výsledek dostaneme, zaměníme-li hodnoty a, b (viz obr. 2-13).

Obr. 2-12:



Obr. 2-13:



Zdůvodnění správnosti konstrukce: (viz obrázek 2-12)
Z podobnosti trojúhelníku AVX a BVC lze odvodit

$$\frac{|VX|}{|VA|} = \frac{|VC|}{|VB|} \rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{a+b} \rightarrow x = \frac{ab}{a+b},$$ což je vztah pro výpočet společné práce dvou subjektů.

Naměřením (i výpočtem) vychází $x = 12$ [dní].
Stejný výsledek dostaneme, zaměníme-li hodnoty a, b (viz obrázek 2-13).

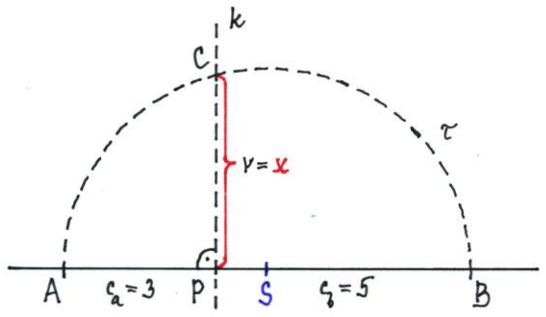
2.3.2.3. *Užití Eukleidovy věty*

Pomocí Eukleidových vět (jak o výšce, tak o odvěsně) lze sestrojit jakoukoliv odmocninu z reálného čísla (předpokládáme, že dané reálné číslo dokážeme zobrazit jako úsečku jeho velikosti). Pro konstrukci musíme číslo rozložit na součin dvou čísel. Pokud bude číslo příliš malé nebo příliš velké, zvětšíme nebo naopak zmenšíme měřítko. Číslo, které takto vznikne, se nazývá geometrickým průměrem daných dvou čísel. Nalezení odmocniny pomocí Eukleidovy věty o výšce je popsáno v následujícím příkladě.

***Příklad* 0.3.7:**
Určete číslo x, které je geometrickým průměrem čísel 3, 5.

Řešení:
Je-li číslo x geometrickým průměrem čísel a, b, platí $x = \sqrt{a \cdot b}$. Jsou-li čísla $a = 3$, $b = 5$, potom $x = \sqrt{15}$. Úlohu budeme řešit graficky. K sestrojení úsečky využijeme Eukleidovu větu o výšce. Platí: $v = \sqrt{c_a \cdot c_b}$, kde v je výška kolmá na přeponu a c_a, c_b jsou úseky na přeponě, které zde určuje výška v. Konstrukce viz obr. 2-14.
Správnost konstrukce vyplývá z platnosti Eukleidovy věty o výšce. Výsledek je $x \doteq 3{,}9$.

Obr. 2-14:



2.3.2.4. *Geometrická cesta* (*způsob řešení pomocí podobnosti*)

Pomocí podobnosti jde geometricky sestrojit výraz, který je součinem či podílem dvou hodnot. Proto je tato geometrická cesta vhodná pro úlohy, které je možné současně řešit pomocí přímé či nepřímé úměry. Je vhodná pro slovní úlohy o společné práci (viz též příklad 0.3.6). Následující příklad je na podobné téma.

***Příklad* 0.3.8:**
Nechť 21 robotů udělá předepsanou práci za 37 hodin. Za 15 hodin však bylo přidáno několik dalších robotů, takže práce byla udělána o 8 hodin dříve. Kolik robotů bylo přidáno?

Řešení:
Řešení je zpracováno podle [41], strana 39, problém 2.
Obsah obdélníku *ABCD* mající délky stran 21 a 37 představuje předepsanou práci. Obsah obdélníku *ABEF* o rozměrech 21 a 15 představuje práci, kterou vykonalo 21 robotů za 15 hodin. Obsah obdélníku *FECD* znázorňuje zbylou práci, kterou je třeba vykonat. Stejný obsah však musí mít i obdélník *FKLH*, tzn. že obdélník *HGCD* o rozměrech 21 a 8 má stejný obsah jako obdélník *EKLG* o rozměrech y a 14. Odtud:

$$21 \cdot 8 = 14 \cdot y,$$

$$y = 12,$$

ale také

$$\frac{14}{21} = \frac{8}{y}.$$

Protože $|EG|:|GH| = |CG|:|GL|$ a při vrcholu *G* je pravý úhel, platí:

$$\Delta EGH \sim \Delta CGL.$$

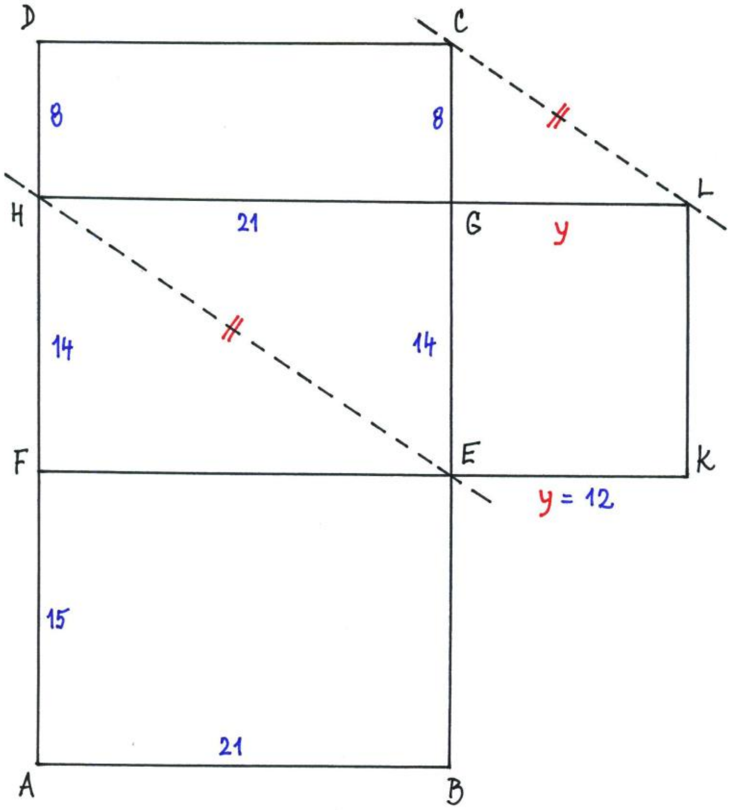
Protože oba trojúhelníky jsou stejnolehlé se středem stejnolehlosti *G*, plyne z toho:

$$EH \parallel CL.$$

Pro řešení stačí sestrojit obdélník *ABCD*, $|AB| = 21$, $|BC| = 37$ a přímky *EF*, *GH*, ve vzdálenostech: $v(EF; AB) = 15$ (doba dosud vykonané práce), $v(GH; CD) = 8$ (doba zkrácení práce). Potom bodem *C* vedeme rovnoběžku s přímkou *EH*, která nám protne *GH* v bodě *L*. Hledaná vzdálenost y potom je:

$$y = |GL|.$$

Obr. 2-15:



2.3.2.5. *Užití geometrického zobrazení*

Ke geometrickému řešení slovních úloh používáme různá geometrická zobrazení. V předchozích úlohách jsme používali výhradně zobrazení v rovině. Chceme-li geometricky řešit úlohu, která vede na soustavu tří rovnic pro tři neznámé, musíme použít některou z promítacích metod v prostoru. Ukažme si to v následující úloze.

***Příklad* 0.3.9:**

Z jednoho snopu dobré úrody, jednoho snopu průměrné úrody a jednoho snopu špatné úrody získali 18 měr zrna. Z jednoho snopu dobré úrody, tří snopů průměrné úrody a tří snopů špatné úrody dostali 36 měr zrna. Ze dvou snopů dobré úrody, tří snopů průměrné úrody a šesti snopů špatné úrody získali 54 měr zrna. Kolik měr zrna dostali z každého snopu dobré, průměrné a špatné úrody?

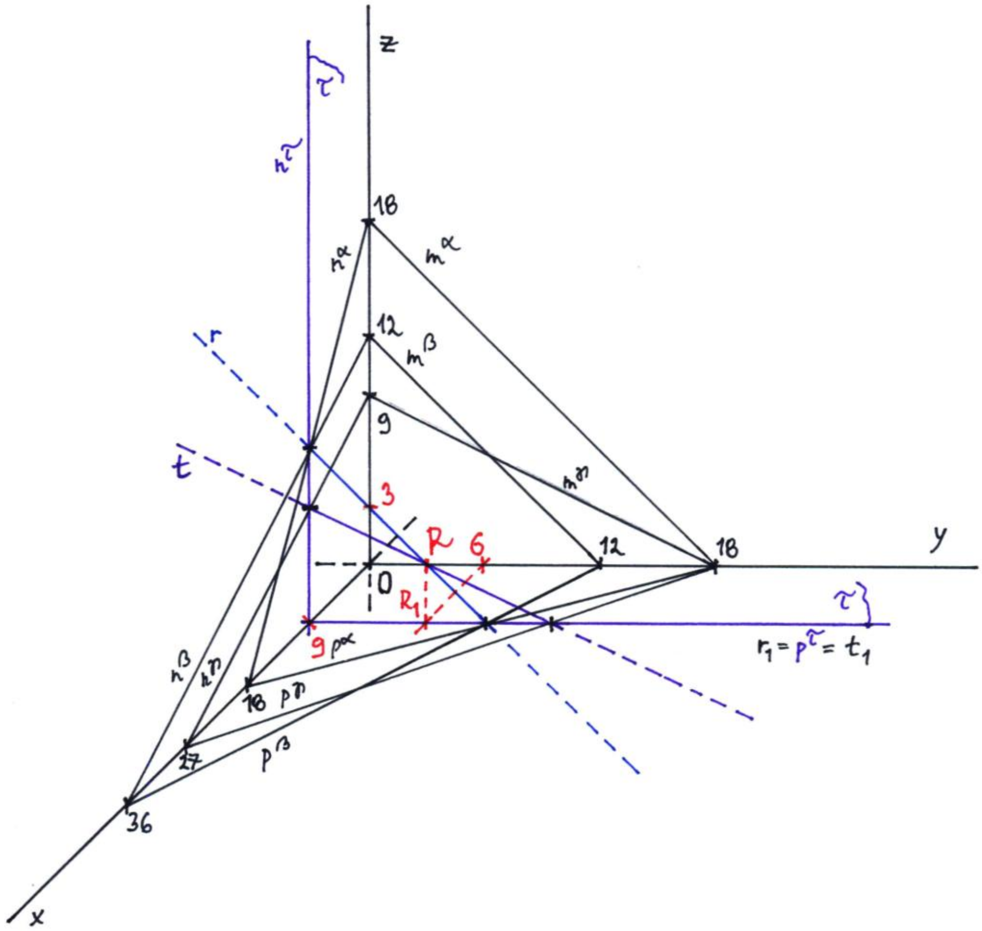
Řešení:

Počet měr zrna z jednoho snopu dobré úrody . . . . d,
počet měr zrna z jednoho snopu průměrné úrody . . . . . p,
počet měr zrna z jednoho snopu špatné úrody . . . . s.
Potom vyjádříme údaje v zadání a dostáváme soustavu:

$$d + p + s = 18$$
$$d + 3p + 3s = 36$$
$$\underline{2d + 3p + 6s = 54}\,,$$

kterou vyřešíme graficky (obr. 2-16).

Obr. 2-16:



Pro zobrazení zvolíme volné rovnoběžné promítání (jako speciální případ kosoúhlého promítání pro $\omega = 135°$, $q = \frac{1}{2}$). Toto zobrazení se v matematice pro prostorové útvary používá nejčastěji. Obrazem každé lineární rovnice je rovina. Řešením je potom průnik těchto rovin. Roviny zobrazíme pomocí bodů X, Y, Z, ve kterých roviny protínají osy x, y, z.

α: $d + p + s = 18$, $X' = [18; 0; 0]$, $Y' = [0; 18; 0]$, $Z' = [0; 0; 18]$,
β: $d + 3p + 3s = 36$, $X'' = [36; 0; 0]$, $Y'' = [0; 12; 0]$, $Z'' = [0; 0; 12]$,
γ: $2d + 3p + 6s = 54$, $X''' = [27; 0; 0]$, $Y''' = [0; 18; 0]$, $Z''' = [0; 0; 9]$.

Nejdříve určíme průsečnici r rovin α, β. Potom užitím pomocné roviny τ sestrojíme průsečík R přímky r a roviny γ ($R = r \cap t$, kde $t = \tau \cap \gamma$).

Z obrázku je zřejmé, že řešením je uspořádaná trojice hodnot. Tyto hodnoty jsou souřadnice bodu $R = [9; 6; 3]$.

Zkouška:

Z jednoho snopu dobré úrody, jednoho snopu průměrné úrody a jednoho snopu špatné úrody získáme celkem $1 \cdot 9 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 3 = 18$ měr zrna.

Z jednoho snopu dobré úrody, tří snopů průměrné úrody a tří snopů špatné úrody získáme celkem $1 \cdot 9 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 36$ měr zrna.

Ze dvou snopů dobré úrody, tří snopů průměrné úrody a šesti snopů špatné úrody získáme celkem $2 \cdot 9 + 3 \cdot 6 + 6 \cdot 3 = 54$ měr zrna.

Odpověď:

Ze snopu dobré úrody dostali 9 měr zrna, ze snopu průměrné úrody dostali 6 měr zrna a ze snopu špatné úrody dostali 3 míry zrna.

2.4. Metody chybných předpokladů

Řešení slovních úloh pomocí metod chybných předpokladů bylo známo již ve starověké Číně, Indii i v Egyptě. Ukažme si alespoň dvě z nich.

2.4.1. Metoda (pravidlo) falešného předpokladu (Regula falsi):

***Příklad* 0.4.1:**
Ze svazku čistých lotosů byly jedna třetina, pětina, resp. šestina postupně obětovány bohům Šivovi, Višnovi či Šúrjovi a čtvrtina byla obětována Bhavanimu. Zbývajících šest bylo darováno vysoce váženému hodnostáři. Kolik bylo lotosů?

Řešení:
Pokud bychom tuto úlohu řešili pomocí rovnice, vede na rovnici $\boldsymbol{ax = c}$.
Odvoďme si nejdříve obecný vztah:
Za hledané řešení zvolíme libovolnou hodnotu z (s velkou pravděpodobností tato hodnota nebude řešením, je tedy chybná), hodnota c se změní na c_0 a dostáváme:

$$az = c_0;$$

vyjádříme a z předchozí rovnice:

$$a = \frac{c_0}{z}$$

a dosadíme do původní rovnice. Dostáváme:

$$\frac{c_0}{z} \cdot x = c \quad \Big| \cdot \frac{z}{c_0}$$

$$\boldsymbol{x} = \underline{\underline{z \cdot \frac{c}{c_0}}}. \qquad \textbf{(2-6)}$$

Číselné řešení:
Zvolíme-li z = 60 (nejmenší společný násobek 3, 5, 6, 4), potom zbývá 3; tedy:

$$z = 60,\ c = 6,\ c_0 = 3;$$

$$x = z \cdot \frac{c}{c_0} = 60 \cdot \frac{6}{3} = \underline{\underline{\mathbf{120}}}.$$

Zkouška:

Šivovi:	120 : 3 = 40
Višnovi:	120 : 5 = 24
Šúrjovi:	120 : 6 = 20
Bhavanimu:	120 : 4 = 30
hodnostáři:	6
	120

Odpověď:
Lotosů bylo 120.

2.4.2. Metoda dvou chybných předpokladů

***Příklad* 0.4.2:**
Chlapci se domluvili, že si společně koupí fotbalový míč. Dá-li každý 150 Kč, bude 30 Kč přebývat, dá-li každý 140 Kč, bude 40 Kč chybět. Kolik bylo chlapců a kolik stál míč?

Řešení:
Použijeme *pravidlo přebytku a nedostatku*:
Nejprve si odvoďme vzorec:
první norma ………………. n_1, ... počet vybíraných Kč, když nastal přebytek,
druhá norma ………………. n_2, $n_1 > n_2$, ... počet vybíraných Kč, když nastal nedostatek,
přebytek ………………….. p, ... hodnota přebytku v Kč,
nedostatek ……………….. q, ... hodnota nedostatku v Kč,
počet kupujících …………. x, ... počet chlapců (jednotek)
cena kup. předmětu ………. y. . . . . cena v Kč
Dostáváme soustavu rovnic:

$$n_1 \cdot x = y + p$$

$$n_2 \cdot x = y - q \quad (n_1 > n_2)$$

a vypočteme neznámé

$$\underline{\underline{x = \frac{p+q}{n_1 - n_2}}} \qquad \textbf{(2-7a)}$$

a $y = n_1 x - p$ nebo $y = n_2 x + q$,

což dává $\underline{\underline{y = \frac{n_1 q + n_2 p}{n_1 - n_2}}}$. **(2-7b)**

Číselné řešení:
Máme $n_1 = 150$, $n_2 = 140$, $p = 30$, $q = 40$, potom

$$x = \frac{p+q}{n_1 - n_2} = \frac{30+40}{150-140} = \frac{70}{10} = \underline{\underline{7}} \text{ [chlapců]};$$

$$y = \frac{n_1 q + n_2 p}{n_1 - n_2} = \frac{150 \cdot 40 + 140 \cdot 30}{150-140} = \frac{10\,200}{10} = \underline{\underline{\mathbf{1020}}} \text{ [cena míče]}.$$

Zkouška:
$150 \cdot 7$ = 1 050, 1 050 – 30 = 1 020 Kč,
$140 \cdot 7$ = 980, 980 + 40 = 1 020 Kč.
Odpověď:
Chlapců bylo 7 a míč stál 1 020 Kč.

***Příklad* 0.4.3:**
Zahradník chce vysázet určitý počet stromů do řad. Vysadí-li po 80 do jedné řady, zbude mu 18 stromů; k tomu, aby je vysázel po 85, se mu nedostává 12 stromů. Kolik měl stromů a do kolika řad je chtěl sázet.

Řešení:
K řešení užijeme vztahy (2-7a), (2-7b), kde $n_1 = 85$, $n_2 = 80$, p = 12, q = 18 (pozor – p odpovídá vždy n_1, q odpovídá vždy n_2), potom

$x = \dfrac{p+q}{n_1 - n_2} = \dfrac{12+18}{85-80} = \underline{\underline{6}}$ řad,

$y = \dfrac{n_1\, q + n_2\, p}{n_1 - n_2} = \dfrac{85 \cdot 18 + 80 \cdot 12}{85-80} = \underline{\underline{498}}$ stromků.

Zkouška:
Vysází-li zahradník do řady 85 stromků, bude chybět $85 \cdot 6 - 498 = 12$ stromků,
vysází-li zahradník do řady 80 stromků, zbude $498 - 80 \cdot 6 = 18$ stromků.

Odpověď:
Zahradník měl 498 stromů a chtěl je vysázet do 6 řad.

Kapitola III - Klasifikace slovních úloh

Slovní úlohy lze klasifikovat různými způsoby. Vybral jsem si ten, který je uváděn nejčastěji. Slovní úlohy jsou klasifikovány podle tématu, kterým se zabývají (tj. „o čem jsou“). Všechny skupiny jsou přehledně popsány v kapitole I, části 3 na str. 15 - 17. Ze všech typů jsem vybral pouze prvních šest, které jsem později označil jako „klasické“. Jsou to typy, které se už objevují v učebnicích matematiky ve starověké Číně, Indii a Egyptě i v mnoha pozdějších učebnicích jiných národů. Jsou to:

- ♦ slovní úlohy o celku a částech,
- ♦ slovní úlohy o číslech,
- ♦ slovní úlohy o pohybu,
- ♦ slovní úlohy o směsích,
- ♦ slovní úlohy o společné práci,
- ♦ slovní úlohy o věku a letopočtu.

V každé z těchto šesti částí rozděluji slovní úlohy do dalších skupin podle jejich charakteristických znaků. Většinou uvádím jedno řešení, z didaktických důvodů někdy dvě řešení, výjimečně řešení tři. V každé skupině uvádím dvě úlohy s řešením. Další řešené úlohy jsou v příloze, kde jsou slovní úlohy rozděleny do skupin stejně jako v této kapitole.

3.1. Slovní úlohy o celku a částech

Slovní úlohy o celku a částech jsou dále členěny podle toho co je předmětem výpočtu (zda celek nebo část) a podle toho jakým způsobem jsou jednotlivé kategorie zadány (např. v jediné nebo ve dvou situacích).

3.1.1. Skupina 1: *„Hledání celku“*

Máme množinu subjektů (nebo též »celek«), které jsou jednoho druhu. Množina (celek) je rozdělena na alespoň dvě části. Je dán počet prvků jedné nebo více částí (alespoň jedna podmínka absolutní), počty prvků ostatních částí jsou dány podmínkami relativními (zlomky nebo procenta) nebo mohou být dány i vazby mezi těmito počty. Úkolem je určit počet prvků celku. Modelem je zpravidla jen jedna lineární rovnice o jedné neznámé, i když někdy z didaktických důvodů je vhodné použít soustavu n rovnic o n neznámých.

***Příklad* 1.1.1:**
Někdo vzal ze sýpky třináctinu množství ječmene. Z toho co zbylo, vzal druhý jednu sedmnáctinu a ponechal 150 heketů *) ječmene. Kolik ječmene bylo v sýpce původně?

Řešení:
Označme si neznámé množství ječmene v sýpce x [heketů], potom:
první si vzal a celkového množství, tj. $a \cdot x$ a zbylo $x - a \cdot x = (1-a) \cdot x$ [heketů],
druhý si vzal b zbytku, tj. $b \cdot (1-a) \cdot x$ a zbylo $(1-a) \cdot x - b \cdot (1-a) \cdot x = (1-a) \cdot (1-b) \cdot x$

) *heket (též heqat) = egyptská dutá míra, asi 4,8 *l*, byl $\frac{1}{10}$ haru nebo $\frac{1}{30}$ královakého kubitu; byl rozdělen do zlomků $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$.

[heketů], což je podle zadání k [heketů], a dostáváme rovnici

$$(1-a)\cdot(1-b)\cdot x = k \quad \Big| : [(1-a)\cdot(1-b)]$$

$$\underline{\underline{x = \frac{k}{(1-a)\cdot(1-b)}}} \quad \text{[heketů].} \qquad \textbf{(3-1)}$$

V našem příkladě je konkrétně $a = \frac{1}{13}$, $b = \frac{1}{17}$, $k = 150$, potom

$$x = \frac{k}{(1-a)\cdot(1-b)} = \frac{150}{(1-\frac{1}{13})\cdot(1-\frac{1}{17})} = \frac{150}{\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{17}} = \frac{33\,150}{192} = \frac{5\,525}{32} = \underline{\underline{172\tfrac{21}{32}}} \text{ [heketů].}$$

Zkouška:

První si vzal $\frac{1}{13}$ celkového množství, tj. $\frac{1}{13}\cdot\frac{5\,525}{32} = \frac{425}{32}$ [heketů] a zbylo $\frac{5\,525}{32} - \frac{425}{32} = \frac{5\,100}{32}$ [heketů],

druhý si vzal $\frac{1}{17}$ zbytku, tj. $\frac{1}{17}\cdot\frac{5\,100}{32} = \frac{300}{32}$ [heketů] a zbylo $\frac{5\,100}{32} - \frac{300}{32} = \frac{4\,800}{32} = 150$ [heketů].

Odpověď:

Původně bylo v sýpce $172\frac{21}{32}$ heketů ječmene.

***Příklad* 1.1.2:**

Zloděj vlezl do sadu a natrhal si jablka. Cestou ze sadu narazil postupně na tři hlídače. Každého podplatil polovinou jablek, které měl právě v tašce. Protože jich ale byl vždy lichý počet, musil se vykoupit „*větší polovičkou*“, tj. počtem zaokrouhleným nahoru na celá jablka. Kolik jablek si natrhal, jestliže vyvázl ze sadu s jedním jablkem?

Řešení:

Jako neznámou x si označme počet ks jablek na počátku. Matematizujeme-li reálnou situaci, dostáváme:

Prvnímu strážci dal $\frac{x+1}{2}$ jablek, zbylo mu $x - \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{2}$ jablek,

druhému strážci dal $\frac{\frac{x-1}{2}+1}{2} = \frac{x+1}{4}$ jablek, zbylo mu $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-3}{4}$ jablek,

třetímu strážci dal $\frac{\frac{x-3}{4}+1}{2} = \frac{x+1}{8}$ jablek, zbylo mu $\frac{x-3}{2} - \frac{x+1}{8} = \frac{x-7}{8}$ jablek,

současně víme, že mu zbylo 1 jablko, proto platí

$$\frac{x-7}{8} = 1,$$

odkud vychází $x = \underline{\underline{15}}$ jablek.

Zkouška:

Když narazil na 1. hlídače, měl zloděj 15 jablek, strážci dal „větší“ polovinu, tj. 8 jablek a zbylo mu 7 jablek. Když narazil na 2. hlídače, dal mu opět „větší“ polovinu, tentokrát ze 7 jablek, tj. 4 jablka a zbyla mu 3 jablka. Nakonec 3. hlídači dal „větší“ polovinu ze 3 jablek, tj. 2 jablka a zbylo mu 1 jablko.

Odpověď:

Zloděj si natrhal 15 jablek.

3.1.2. Skupina 2: *„Hledání části“*

Máme stejnou množinu jako ve skupině 1. *Je dán počet prvků celku (podmínka absolutní) a počty nebo relativní počty prvků všech částí s výjimkou jedné nebo vazby mezi jednotlivými částmi. Má se určit počet prvků této vybrané části, resp. všech částí. Modelem je jedna lineární rovnice o jedné neznámé nebo soustava n rovnic pro n neznámých.*

***Příklad* 1.2.1:**

V ovocném sadu je celkem 87 ovocných stromů a to hrušní, jabloní a třešní. Třešní je o 11 méně než jabloní a o 5 více než hrušní. Kolik je kterých?

Řešení:

Označme si počet hrušní *h*, počet jabloní *j* a počet třešní *t*, potom platí

$$\begin{aligned} h + j + t &= 87 \\ t + 11 &= j \\ t - 5 &= h \\ \hline t - 5 + t + 11 + t &= 87 \quad \vert -16 \\ 3t &= 71 \quad \vert :3 \\ t &= \underline{\underline{27}} \text{ [třešní]}, \\ j = t + 11 &= \underline{\underline{38}} \text{ [jabloní]}, \\ h = t - 5 &= \underline{\underline{22}} \text{ [hrušní]}. \end{aligned}$$

Zkouška:

Stačí ověřit: 22 + 38 + 27 = 87 ks. Správnost ostatních hodnot je zřejmá z postupu řešení.

Odpověď:

V ovocném sadu je 22 hrušní, 38 jabloní a 27 třešní.

***Příklad* 1.2.2:**

159 žáků několika škol bylo ubytováno ve třech chatách označených *A*, *B*, *C*. V chatě *B* bydlelo o 8 žáků méně než v chatě *A* a v chatě *C* o 14 žáků více než v chatě *A*. Kolik žáků bydlelo v jednotlivých chatách?

Řešení:

Neznámé jsou: x = počet žáků v chatě *A*,
y = počet žáků v chatě *B*,
z = počet žáků v chatě *C*;

potom matematizací dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 159, \\ x - y &= 8, \\ z - x &= 14; \end{aligned}$$

jejímž řešením je $[x; y; z] = [51; 43; 65]$.

Zkouška:

Rozdíl $A - B = 51 - 43 = 8$ žáků, rozdíl $C - A = 65 - 51 = 14$ žáků;
celkem 51 + 43 + 65 = 159 žáků.

Odpověď:

V chatě *A* bydlelo 51 žáků, v chatě *B* bydlelo 43 žáků, v chatě *C* bydlelo 65 žáků.

3.1.3. <u>Skupina 3:</u> *„Další hledání"*

Máme stejnou množinu jako ve skupině 1. *Jsou dány počty prvků části nebo více částí a některé vazby mezi jednotlivými částmi nebo vazby mezi částmi a celkem. Má se určit počet prvků této vybrané části, resp. všech částí, resp. počet prvků celku. Modelem je zpravidla opět jen jedna lineární rovnice o jedné neznámé, někdy to může být soustava n rovnic pro n neznámých.*

***Příklad* 1.3.1:**
Ve třech krabicích je uloženo zboží. První krabice obsahuje třetinu všeho zboží. V druhé krabici je šestina všeho zboží, třetí krabice obsahuje polovinu všeho zboží, což je o 20 kg více než ve druhé krabici. Kolik kg je v každé krabici?

Řešení:
Označme si hmotnost veškerého zboží *x*, potom
v 1. krabici bylo $\frac{1}{3}x$ zboží,
v 2. krabici bylo $\frac{1}{6}x$ zboží,
v 3. krabici bylo $\frac{1}{2}x$ zboží, což je také $\frac{1}{6}x + 20$ kg zboží.
Z posledního řádku plyne vztah

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}x + 20 \quad \Big| \cdot 6$$
$$3x = x + 120 \quad \Big| - x$$
$$2x = 120 \quad \Big| : 2$$
$$\underline{x = 60}\,,$$

v 1. krabici bylo $\frac{1}{3}x$ zboží, tj. $\underline{\underline{20}}$ kg,
v 2. krabici bylo $\frac{1}{6}x$ zboží, tj. $\underline{\underline{10}}$ kg,
v 3. krabici bylo $\frac{1}{2}x$ zboží, tj. $\underline{\underline{30}}$ kg.
Zkouška:
Ve 3. krabici bylo o 30 – 10 = 20 kg zboží více než ve 2.
Ve všech krabicích bylo 20 + 10 + 30 = 60 kg zboží.
Odpověď:
V první krabici bylo 20 kg zboží, ve druhé bylo 10 kg zboží a ve třetí 30 kg zboží.

***Příklad* 1.3.2:**
Statkář najal zahradníka na měsíc s tou podmínkou, že mu bude dávat stravu a 80 kr. mzdy za každý odpracovaný den; za den, který neodpracuje, musí platit 30 kr. za stravu. Kolik dní pracoval zahradník, vydělal-li za měsíc 17 zl. 40 kr.*)?

Řešení:
Předpokládejme, že měsíc má 30 dní a označme si počet dní, které zahradník pracoval *x*. Počet dní, které zahradník nepracoval je potom (30 – *x*). Provedeme-li matematizaci reálné situace, dostáváme

$$0{,}80 \cdot x - 0{,}30 \cdot (30 - x) = 17{,}40.$$

---

[2]) ***zlatý*** a ***krejcar*** = měna, která byla zavedena v Rakousku (a tedy i u nás) v r. 1857 a užívala se do r 1892; potom byla zavedena měna korunová.
1 *zlatý* = 100 *krejcarů*; později 1 *zl.* = 2 K.

Tato lineární rovnice má řešení $x = \underline{\underline{24}}$ [dní].
Zkouška:
Za 24 dní dostal zahradník $0{,}80 \cdot 24 = 19{,}20$ zl., za 6 dní zaplatil $0{,}30 \cdot 6 = 1{,}80$ zl., celkem vydělal $19{,}20 - 1{,}80 = 17{,}40$ zl.
Odpověď:
Zahradník pracoval 24 dní.

3.1.4. Skupina 4: *„Porovnání po změnách"*

Máme dvě nebo více množin subjektů. Porovnáváme jejich stavy v různých situacích a zjišťujeme počty prvků těchto množin před změnami a po změnách. Modelem je jedna lineární rovnice nebo soustava dvou nebo více lineárních rovnic (podle počtu objektů). Můžeme též zjišťovat velikost změny. Potom bývá modelem zpravidla jedna lineární rovnice.

***Příklad* 1.4.1:**
Stoupáme po schodech na rozhlednu. Kdyby byl každý schod o 3 cm nižší, bylo by jich na rozhlednu o 60 více. Kdyby byl každý o 3 cm vyšší, bylo by jich o 40 méně, než jich je ve skutečnosti. Jak vysoká je rozhledna?

Řešení:
Označme si počet původních schodů p a výšku schodu x, potom je výška rozhledny $v = p \cdot x$;
po první změně počtu schodů vyjádříme výšku rozhledny $v = (x - 3) \cdot (p + 60)$,
po druhé změně počtu schodů vyjádříme výšku rozhledny $v = (x + 3) \cdot (p - 40)$.
Protože rozhledna je stále stejně vysoká, platí:

$$p \cdot x = (x - 3) \cdot (p + 60),$$
$$\underline{p \cdot x = (x + 3) \cdot (p - 40).}$$
$$px = px - 3p + 60x - 180$$
$$\underline{px = px + 3p - 40x - 120}$$
$$0 = -3p + 60x - 180$$
$$\underline{0 = 3p - 40x - 120}$$
$$0 = 20x - 300 \quad \rightarrow \quad \underline{x = 15} \quad \rightarrow \quad \underline{p = 240}$$

Potom výška rozhledny je $v = p \cdot x = 240 \cdot 15 = 3\,600$ cm $= \underline{\underline{36}}$ m.
Zkouška:
Po první změně – výška schodu 12 cm, počet schodů 300, výška rozhledny $0{,}12 \cdot 300 = 36$ m,
po druhé změně – výška schodu 18 cm, počet schodů 200, výška rozhledny $0{,}18 \cdot 200 = 36$ m.
Odpověď:
Rozhledna je vysoká 36 m.

***Příklad* 1.4.2:**
Osel a velbloud nesli měchy s vodou. Kdyby se oslu ubral jeden měch a naložil se na velblouda, nesl by velbloud dvakrát víc než osel. Kdyby se ubral velbloudu jeden měch a naložil se na osla, nesli by oba stejně. Kolik stejných měchů každý nesl?

Řešení:
Označme si počet měchů, které nese osel x, počet měchů, které nese velbloud y.
Ubereme-li oslu jeden měch a přidáme jej velbloudovi, platí

$(x - 1) \cdot 2 = y + 1.$

Ubereme-li velbloudovi jeden měch a přidáme jej oslovi, platí

$x + 1 = y - 1.$

Dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{array}{lcl} (x-1)\cdot 2 = y+1 & \rightarrow & y = 2x - 3 \\ \underline{x + 1 = y - 1} & & \underline{x + 1 = 2x - 4} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x = 5}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y = 7}} \end{array}$$

Zkouška:

Ubereme-li oslovi jeden měch a přidáme jej velbloudovi, bude mít osel 4 měchy a velbloud 8 měchů, tedy dvojnásobek toho co osel.

Ubereme-li velbloudovi jeden měch a přidáme jej oslovi, bude mít osel 6 měchů a velbloud také 6 měchů, tedy stejně.

Odpověď:

Osel nesl 5 měchů a velbloud 7 měchů.

3.1.5. Skupina 5: *„Porovnání různého uspořádání“*

Máme dánu množinu subjektů. Porovnáváme její stavy v různých situacích a zjišťujeme počty prvků této množiny pomocí jejího různého uspořádání. Modelem je jedna lineární rovnice nebo soustava dvou nebo více lineárních rovnic (*podle počtu subjektů*).

***Příklad* 1.5.1:**

Posadí-li se ve třídě 7 žáků do každé lavice, zbyde v poslední lavici jen 1 žák. Posadí-li se do každé lavice jen 6 žáků, nedostane se na 1 žáka místa. Kolik je žáků?

Řešení:

Označme si počet lavic jako neznámou x, potom matematizací reálné situace dostáváme

$7 \cdot (x - 1) + 1 = 6x + 1,$

jejímž řešením je

$x = \underline{7}$ [lavic],

počet žáků je $6x + 1 = 6 \cdot 7 + 1 = \underline{\underline{43}}$ žáků.

Zkouška:

Posadí-li se žáci do lavic po sedmi, je 43 : 7 = 6, zb. 1, tedy bude obsazeno 6 lavic a v sedmé bude 1 žák, posadí-li se do lavic po šesti, je 43 : 6 = 7, zb. 1, tedy bude obsazeno všech 7 lavic a ještě jeden žák zbyde.

Odpověď:

Žáků je 43.

***Příklad* 1.5.2:**

Harpax počítá své dukáty*). Klade je do čtverce. Když čtverec naplnil, zbyly mu 284 kusy, když chtěl sestavit čtverec, mající o jednu řadu více, nedostávalo se mu 25 kusů. Kolik dukátů měl?

)** ***dukát = mince, které začaly být u nás raženy za vlády Karla IV., jako české dukáty (český zlatý), v oběhu do 17. století; měly na sobě reliéf sv. Václava.

1 *dukát* = 30 *pražských grošů* = 190 *krejcarů*.

Řešení:
Označme si počet dukátů ve straně prvního čtverce x a počet všech dukátů y, potom můžeme popsanou situaci matematiky vyjádřit pomocí soustavy rovnic

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 284 \\ \underline{y} &\underline{= (x+1)^2 - 25} \\ y &= x^2 + 284 \quad \Big| \cdot(-1) \\ \underline{y} &\underline{= x^2 + 2x - 24} \\ 0 &= 2x - 308 \quad \rightarrow \quad \underline{x = 154} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y = 24\,000}}\ [\text{Kč}]. \end{aligned}$$

Zkouška:
Z dukátů vytvoříme čtverec o straně 154 ks, potom obsahuje $154^2 = 23\,716$ ks. Zbývá $24\,000 - 23\,716 = 284$ dukátů.
Z dukátů vytvoříme čtverec o straně 155 ks, potom obsahuje $155^2 = 24\,025$ ks. Přebývá $24\,025 - 24\,000 = 25$ dukátů.
Odpověď:
Harpax měl 24 000 dukátů.

3.1.6. Skupina 6: *„Rovnoměrné rozdělení"*

Máme dánu množinu subjektů. Každý subjekt vlastní určité množství majetku a dochází k jeho rovnoměrnému rozdělení. Zjišťujeme, jak se jednotlivé subjekty mezi sebou vyrovnaly, tj. kdo kolik ostatním zaplatil. Úlohu můžeme řešit úsudkem nebo jednou jednoduchou lineární rovnicí nebo pomocí obecného modelu.

***Příklad* 1.6.1:**
Tři rybáři byli na rybách. První chytil tři ryby, druhý čtyři, všechny ryby byly přibližně stejné. Třetí nechytil nic. Všechny ryby rozdělili rovnoměrně mezi sebe. Třetí, který nechytil žádnou rybu, zaplatil 7 euro jako náhradu. Kolik euro by měl dostat ze sedmi první a kolik druhý rybář?

Řešení č. 1: - *obecný model*
Protože se jedná o charakteristickou úlohu, vyřešme ji nejdříve obecně (postup je podobný jako v př. 0.0.3). Označme si neznámé:
x – počet euro, které obdrží první rybář,
y – počet euro, které obdrží druhý rybář,
z – cena jedné ryby (v eurech).
Potom si označíme dané hodnoty (konstanty):
a – počet ryb, které chytil první rybář (v ks),
b – počet ryb, které chytil druhý rybář (v ks),
e – počet euro, které za ryby zaplatil třetí rybář.
Vyjádříme-li vztahy ze zadání dostáváme:

$$\begin{aligned} &\text{První rybář dostal:} && x = a \cdot z - e \\ &\text{Druhý rybář dostal:} && y = b \cdot z - e \qquad \textbf{(3-2)} \\ &\text{Celkem oba dostali:} && \underline{x + y = e} \end{aligned}$$

Soustava rovnic (3-2) je modelem dané situace. Ze soustavy můžeme vyjádřit x, y, z.

$$\begin{aligned} x = e - y \quad \rightarrow \quad e - y &= a \cdot z - e \\ \underline{y} &\underline{= b \cdot z - e} \\ e - bz + e &= az - e \end{aligned}$$

$$az + bz = 3e \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{z = \frac{3e}{a+b}}} \tag{3-2a}$$

$$\underline{\underline{x}} = a \cdot \frac{3e}{a+b} - e = \frac{3ae - ae - be}{a+b} = \underline{\underline{\frac{2ae - be}{a+b}}} \tag{3-2b}$$

$$\underline{\underline{y}} = b \cdot \frac{3e}{a+b} - e = \frac{3be - ae - be}{a+b} = \underline{\underline{\frac{2be - ae}{a+b}}} \tag{3-2c}$$

Konkrétní řešení:
a = 3 ryby, b = 4 ryby, e = 7 euro.

$z = \dfrac{3e}{a+b} = \dfrac{3 \cdot 7}{3+7} = \underline{\underline{3}}$ [eura],

$x = \dfrac{2ae - be}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 7 - 4 \cdot 7}{3+4} = \underline{\underline{2}}$ [eura],

$y = \dfrac{2be - ae}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 7 - 3 \cdot 7}{3+4} = \underline{\underline{5}}$ [eur].

Za zkoušku můžeme považovat následující řešení.

Řešení č. 2: - rovnice
Úlohu můžeme samozřejmě řešit konkrétně (bez obecných formulací), potom ovšem musíme postupovat pro všechna zadání samostatně a postup řešení tak stále opakovat.
Označme si cenu jedné ryby x euro.
Protože ryb bylo 7, jejich celková cena byla $7x$ euro.
Každý obdržel ryby za $\dfrac{7x}{3}$ euro a jejich cena je 7 euro, proto platí

$$\frac{7x}{3} = 7 \quad \rightarrow \quad \underline{x = 3} \text{ [euro].}$$

První rybář dostal $3 \cdot 3 - 7 = 2$ eura, druhý rybář $4 \cdot 3 - 7 = 5$ eur.
Odpověď:
První rybář obdržel 2 eura, druhý 5 eur.

Řešení č. 3: - aritmetické
Řešení zpracováno podle [46], str. 46.
Každý z rybářů si odnesl třetinu ryb, proto cena 7 euro, kterou zaplatil třetí rybář, byla za třetinu ryb. Všechny ryby stály $3 \cdot 7 = 21$ euro. Jestliže rybáři ulovili 7 ryb, jedna stála 21 : 7 = 3 eura. První rybář chytil tři ryby (za 9 euro), měl dostat 9 – 7 = 2 eura; druhý rybář chytil čtyři ryby (za 12 euro), měl dostat 12 – 7 = 5 euro.
Odpověď:
První rybář obdržel 2 eura, druhý 5 eur.

***Příklad* 1.6.2:**
První soused natrhal 31 kg jablek, druhý soused 89 kg jablek a rozdělili se rovnoměrně s třetím, který nenatrhal žádná jablka. Třetí zaplatil za jablka 400 Kč. Jak si první dva peníze rozdělili?

Řešení č. 1: - *úsudek*
Předpokládáme, že všechna jablka byla stejné ceny. Třetí zaplatil za jablka, kterých byla třetina, 400 Kč, proto všechna jablka stála $400 \cdot 3$ = 1200 Kč.
Jablek bylo 31 + 89 = 120 kg, proto 1 kg stálo 1200 : 120 = 10 Kč.
První soused natrhal 31 kg a vzal si jablka za 400 Kč, proto má dostat
$31 \cdot 10 - 400 = -90$ Kč, to znamená, že musí druhému ještě zaplatit 90 Kč.
Druhý soused natrhal 89 kg a vzal si jablka za 400 Kč, proto má dostat
$89 \cdot 10 - 400 = 490$ Kč.
Celkem dostane druhý soused od ostatních 90 + 400 = 490 Kč.

Řešení č. 2: - *užití obecného modelu – toto řešení můžeme považovat za zkoušku*
První soused natrhal 31 kg $\rightarrow$ $a = 31$,
Druhý soused natrhal 89 kg $\rightarrow$ $b = 89$,
Třetí soused zaplatil 400 Kč $\rightarrow$ $e = 400$.
Pro řešení vyjdeme z modelu (3-2) a užijeme vzorců (3-2a), (3-2b) a (3-2c) :

$$z = \frac{3e}{a+b} = \frac{3 \cdot 400}{31+89} = \underline{\underline{10}} \text{ [Kč]},$$

$$x = \frac{2ae - be}{a+b} = \frac{2 \cdot 31 \cdot 400 - 89 \cdot 400}{31+89} = \underline{\underline{-90}} \text{ [Kč], tj. první ještě zaplatí druhému 90 Kč,}$$

$$y = \frac{2be - ae}{a+b} = \frac{2 \cdot 89 \cdot 400 - 31 \cdot 400}{31+89} = \underline{\underline{490}} \text{ [Kč].}$$

Odpověď:
První soused ještě doplatil druhému 90 Kč, který tak za jablka dostal 490 Kč..

3.1.7. Skupina 7: *„Neúplné jednoduché určení“*

Známe celkový počet prvků skupiny a neúplné údaje pro jejich počet. Určujeme počty jednotlivých prvků. Modelem je soustava m rovnic o n neznámých ($m < n$), *která vede na diofantovskou rovnici, v tomto případě je to lineární diofantovská rovnice o dvou neznámých.*

***Příklad* 1.7.1:**
Dopravní podniky mají k dispozici pro dopravení 12 000 osob dva druhy souprav: souprava *A* pojme 90 osob, souprava *B* 150 osob. Kolik kterých souprav je třeba, aby byl jejich celkový počet co nejmenší.

Řešení:
Označme si počet souprav *A* jako neznámou x a souprav *B* jako neznámou y, potom reálnou situaci převedeme na diofantovskou rovnici

$$90x + 150y = 12\,000 \quad | : 30$$
$$3x + 5y = 400.$$

Tuto rovnici nahradíme kongruencí

$$3x \equiv 400 \bmod 5 \quad | -400$$
$$3x \equiv 0 \bmod 5 \quad | : 3$$
$$x \equiv 0 \bmod 5,$$

z toho plyne $\underline{x = 5t}$, $t \in Z$
a dosadíme do původní rovnice

$3 \cdot 5t + 5y = 50$

a dostáváme $y = \underline{80 - 3t}$, $t \in Z$.

Nyní najdeme řešení postupným dosazováním celých čísel za t:

t	1	2	3	
x	5	10	15	
y	77	74	71	
$\sum$	82	84	86	. . . atd.

Je zřejmé, že řešení je pouze $x = 5$, $y = 77$, protože každá další dvojice dává vždy větší součet.

Zkouška:

Soupravy dohromady pojmou $5 \cdot 90 + 77 \cdot 150 = 12\,000$ osob.

Odpověď:

Je třeba 5 souprav *A* a 77 souprav *B*.

***Příklad* 1.7.2:**

V prodejním stánku měli dva druhy trpaslíků, všech trpaslíků bylo celkem 17. Jeden druh trpaslíků měl na kabátu o 2 knoflíky více. Všichni trpaslíci měli celkem 90 knoflíků. Kolik bylo kterých a kolik měl každý druh trpaslíků knoflíků?

Řešení:

Neznáme počet trpaslíků a počet jejich knoflíků, proto si x označme počet trpaslíků s menším počtem knoflíků, počet knoflíků na kabátě bude každý trpaslík mít n; y si označme počet trpaslíků s větším počtem knoflíků, počet knoflíků na kabátě bude každý trpaslík mít $n + 2$. Budeme-li matematizovat reálnou situaci, dostaneme soustavu rovnic

$$x + y = 17 \quad \Big| -y$$
$$\underline{n \cdot x + (n+2) \cdot y = 90}$$
$$x = 17 - y$$
$$\underline{n \cdot (17 - y) + (n+2) \cdot y = 90}$$
$$17n - ny + ny + 2y = 90$$
$$17n + 2y = 90$$

a tuto diofantovskou rovnici vyřešíme pomocí kongruencí.

$$17n \equiv 90 \bmod 2 \quad \Big| -22$$
$$17n \equiv 68 \bmod 2 \quad \Big| :17$$
$$n \equiv 4 \bmod 2 \quad \Big| -4$$
$$n \equiv 0 \bmod 2$$

z toho plyne pro n: $\underline{n = 2t}$, $t \in Z$ $\rightarrow$ $34t + 2y = 90 \quad \Big| -34t$

$$2y = 90 - 34t \quad \Big| :2$$
$$\underline{y = 45 - 17t},$$

pro x dostáváme: $x = 17 - (45 - 17t)$ $\rightarrow$ $\underline{x = -28 + 17t}$.

Nyní dosazujeme za t celá čísla a hledáme přirozené hodnoty n, $n + 2$, x, y.

t	1	2	3	
n	2	4	6	
***n* + 2**	4	6	8	
x	– 11	6	23	
y	28	11	– 6	. . . atd.

Protože hledáme řešení pouze v oboru přirozených čísel, je řešení pouze $n = 4$, $x = 6$, $n + 2 = 6$, $y = 11$.

Zkouška:
Celkový počet knoflíků šesti trpaslíků s menším počtem knoflíků a jedenácti trpaslíků s větším počtem knoflíků je $6 \cdot 4 + 11 \cdot 6 = 90$.
Odpověď:
Na prodejním stánku měli 6 trpaslíků se 4 knoflíky na kabátě a 11 trpaslíků se 6 knoflíky na kabátě.

3.1.8. <u>Skupina 8:</u> *„Neúplné složité určení"*

Známe celkový počet prvků skupiny a neúplné údaje pro jejich počet. Určujeme počty jednotlivých prvků. Modelem je soustava m rovnic o n neznámých ($m < n$), *která vede na diofantovskou rovnici, v tomto případě je to lineární diofantovská rovnice o třech a více neznámých nebo diofantovská rovnice vyššího stupně.*

***Příklad* 1.8.1:**
Chlapci – bylo jich méně než sto – nastoupili do osmistupu a zbyli tři; když nastoupili do pětistupu, zbyli dva; v šestistupu zbyl jen jeden. Kolik jich bylo?

<u>*Řešení*:</u>
Označme si počet chlapců *x*, počet řad osmistupu *k*, počet řad pětistupu *l* a počet řad šestistupu *m*. Potom postupně vyjádříme počet chlapců pomocí osmistupu, pětistupu a šestistupu:

$$x = 8 \cdot k + 3$$
$$x = 5 \cdot l + 2$$
$$x = 6 \cdot m + 1.$$

Protože levé strany se rovnají musí se rovnat i strany pravé. Z první a druhé rovnice dostáváme (tuto soustavu řešíme metodou porovnávací):

$$8k + 3 = 5l + 2 \quad \Big| -3$$
$$8k = 5l - 1 \quad \Big| : 8$$
$$k = \tfrac{5}{8}l - \tfrac{1}{8}.$$

Nyní dosazujeme za *l* a hledáme *k* tak, aby obě čísla byla přirozená.

$l = 5 \quad \rightarrow \quad k = 3,$
$l = 13 \quad \rightarrow \quad k = 8,$
$l = 21 \quad \rightarrow \quad k = 13,$ atd. pro toto *k* je $x > 100$.

Z druhé a třetí rovnice dostáváme:

$$6m + 1 = 5l + 2 \quad \Big| -1$$
$$6m = 5l + 1 \quad \Big| : 6$$
$$m = \tfrac{5}{6}l + \tfrac{1}{6}$$

Nyní opět dosazujeme za *l* a hledáme *m* tak, aby obě čísla byla přirozená.

$l = 1 \quad \rightarrow \quad m = 1,$
$l = 7 \quad \rightarrow \quad m = 6,$
$l = 13 \quad \rightarrow \quad m = 11,$
$l = 19 \quad \rightarrow \quad m = 16,$
$l = 25 \quad \rightarrow \quad m = 21,$ atd. pro toto *m* je $x > 100$.

Porovnáním výsledků posledních dvou rovnic dostáváme, že $k = 8$, $l = 13$, $m = 11$.
Potom $x = 8 \cdot 8 + 3 = 67$

Zkouška:
Osmistup: 67 : 8 = 8, zb. 3, pětistup: 67 : 5 = 13, zb. 2, šestistup: 67 : 6 = 11, zb. 1.
Odpověď:
Chlapců bylo 67.

***Příklad* 1.8.2:**
Tři druhy plechovek se součástkami byly dopraveny v bedně. Plechovky měly hmotnosti 2 kg, 3kg, 5 kg a objemy po řadě 1 dm^3, 4 dm^3 a 6 dm^3. Celková hmotnost zásilky bez bedny byla 81 kg, celkový objem plechovek 93 dm^3. Jestliže počet nejtěžších plechovek byl největší, kolik plechovek každého druhu bylo v zásilce?

Řešení:
Označme počet nejtěžších plechovek x [ks], prostředních y [ks] a nejlehčích z [ks]. Potom dostáváme:

$$5x + 3y + 2z = 81$$
$$\underline{6x + 4y + z = 93} \quad | - 2$$
$$-7x - 5y = -105 \quad | \cdot (-1)$$
$$7x + 5y = 105$$

Protože $5|105$, platí $x = c + bt$, $y = \frac{c - ac}{b} - at$, $t \in R$, potom

$$x = 105 + 5t,\ y = -126 - 7t \ \text{ a } \ z = \tfrac{1}{2}(81 - 5x - 3y).$$

Hodnoty zapíšeme do tabulky:

***t*:**	***x*:**	***y*:**	***z*:**
–18	15	0	3
–19	10	7	5
–20	5	14	7
–21	0	21	9

Protože počet plechovek je přirozené číslo a největších plechovek je nejvíce, má úloha jediné řešení $x = 10, y = 7, z = 5$.
Zkouška:
Hmotnost: $10 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 81$ kg.
Objem: $10 \cdot 6 + 7 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 93$ dm^3.
Odpověď:
Největších plechovek bylo v zásilce 10, prostředních 7 a nejmenších 5.

3.1.9. Skupina 9: *„Speciální úlohy“*

Poslední skupina obsahuje ty úlohy, které nelze zařadit mezi ostatní. Nelze pro ně vytvořit jednotný model, u každé úlohy jej musíme hledat zvlášť. Jsou zde též zařazeny úlohy, kdy je použita dělitelnost.

***Příklad* 1.9.1:**
Děti se dělily o ořechy. První dostalo 6 ořechů a pětinu zbytku, druhé dostalo 12 ořechů (dvojnásobek toho, co první) a pětinu druhého zbytku, třetí dostalo 18 ořechů (trojnásobek toho, co první) a pětinu třetího zbytku atd. Tak se rozdělily o ořechy stejným dílem. Kolik bylo dětí a kolik bylo ořechů?

Řešení:
Počet ořechů označme *x*, potom

první dítě dostalo . . . . . $6 + \dfrac{x-6}{5} = \dfrac{x+24}{5}$, zbytek byl . . . . . $x - \dfrac{x+24}{5} = \dfrac{4x-24}{5}$,

druhé dítě dostalo . . . . . $12 + \left(\dfrac{4x-24}{5} - 12\right) : 5 = \dfrac{4x+216}{25}$, zbytek byl . . . atd.

Protože všechny děti dostaly stejně musí platit:

$$\frac{x+24}{5} = \frac{4x+216}{25} \quad \Big| \cdot 25$$

$$5x + 120 = 4x + 216 \quad \Big| -4x - 120$$

$$\underline{\underline{x = 96}} \text{ ořechů.}$$

První dítě dostalo $\dfrac{x+24}{5} = \dfrac{96+24}{5} = 24$ ořechů, počet dětí byl $96 : 24 = 4$.

Zkouška:
První dítě dostalo . . . . 6 plus (96 – 6) : 5 = 18, celkem 24 ořechů,
druhé dítě dostalo . . . 12 plus (96 – 24 – 12) : 5 = 12, celkem 24 ořechů,
třetí dítě dostalo . . . . 18 plus (96 – 24 – 24 – 18) : 5 = 6, celkem 24 ořechů,
čtvrté dítě dostalo . . . 24 plus (96 – 24 – 24 – 24 – 24) : 5 = 0, celkem 24 ořechů.
Celkem dostaly 24 + 24 + 24 + 24 = 96 ořechů.
Odpověď:
Byly čtyři děti a rozdělily si celkem 96 ořechů.

***Příklad* 1.9.2:**
Selka přinesla na trh několik liber másla a prodala je. Za každé dvě libry dostala tři slepičky. Slepičky pak nesly vejce. Každá slepička snesla tolik vajec, kolik byla třetina z jejich počtu. Selka pak vzala všechny vejce a na trhu je prodala. Za každých devět vajec dostala tolik krejcarů, kolik vajec každá slepička snesla. Selka za vejce utržila 72 krejcarů. Kolik liber másla, kolik slepic měla a kolik vajec prodala?

Řešení:
Počet liber másla označíme . . . . *x*, počet slepiček . . . . *y*, potom platí vztah:

$$3x = 2y \quad \rightarrow \quad y = \tfrac{3}{2}x.$$

Každá slepička pak snesla

$$\tfrac{1}{3}y = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{2}x = \tfrac{1}{2}x \text{ vajec.}$$

Počet všech vajec je

$$y \cdot \tfrac{1}{3}y = \tfrac{1}{3}y^2 = \tfrac{1}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{2}x\right)^2 = \tfrac{3}{4}x^2.$$

Protože selka utržila za 9 vajec $\frac{1}{2}x$ krejcarů a všechny vejce stály 72 krejcarů, dostáváme trojčlenku (či poměr):

$$\begin{array}{ccc} & 9[vajec]\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,\tfrac{1}{2}x[krejcarů] & \\ \uparrow & & \uparrow \\ & \tfrac{3}{4}x^2\,[vajec]\,.\,.\,.\,.\,72[krejcarů] & \end{array}$$

$$\frac{\tfrac{3}{4}x^2}{9} = \frac{72}{\tfrac{1}{2}x} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{3}{8}x^3 = 648 \quad \Big| \cdot \tfrac{8}{3}$$

$$x^3 = 1728 \quad \Big| \sqrt[3]{\ }$$

$$\underline{\underline{x = 12}} \text{ [liber másla]}$$

Počet slepiček: ..... $\frac{3}{2}x$ ..... 18 slepiček,

počet prodaných vajec ..... $\frac{3}{4}x^2$ ..... 108 vajec.

Zkouška:

Za 2 libry dostala 3 slepičky, potom za 12 liber dostala 18 slepiček.
Počet vajec, které snesla jedna slepička je třetina z 18, tj. 6 ks. Počet všech vajec je pak $6 \cdot 18 = 108$ ks.

Odpověď:

Selka měla 12 liber másla, 18 slepiček a prodala 108 vajec.

3.2. Slovní úlohy o číslech

Slovní úlohy o číslech jsou velmi blízké matematickým úlohám. Hledáme-li neznámá čísla, používáme základní matematické dovednosti, jako jsou operace s čísly, řešení rovnic a nerovnic apod. Proto metody, které používáme při řešení těchto slovních úloh jsou velmi rozmanité. Slovní úlohy jsou členěny podle toho, jak jsou jednotlivá čísla charakterizována.

3.2.1. Skupina 1: „*Myslím si číslo*“

Myslím si číslo (*nebo více čísel*)*, které je* (*jsou*) *řešiteli neznámé, provedu s ním* (*s nimi*) *konečný počet operací a výsledek řešiteli oznámím. Ten hledá číslo, které jsem si myslel. Jindy je třeba vysvětlit postup, kterým jsem k číslu nebo k zajímavému výsledku došel.*

***Příklad* 2.1.1:**

Jestliže se myšlené číslo zdvojnásobí, k součinu přičtu čtyři, součet násobí 5, k součinu se připojí 12; jestliže se tento součet násobí 10 a od součinu se odečte 320, lze na základě zbytku udat číslo myšlené. Jak?

Řešení:

Operace:	Výsledek:
myšlené číslo:	x
zdvojnásobení:	$2x$
přičtení čtyř	$2x + 4$
násobení pěti	$10x + 20$
přičtení dvanácti	$10x + 32$
násobení deseti:	$100x + 320$
odečtení 320:	$100x$

Výsledek je tedy stonásobkem myšleného čísla.

Zkouška:

Stačí vzít jakékoliv číslo a provést s ním určené operace. Tato zkouška je neúplná, úplná zkouška se provádí obrácením postupu.

Odpověď:

Myšlené číslo je setina výsledku.

***Příklad* 2.1.2:**
Myslím si číslo, násobím je pěti, od součinu odečtu 24, výsledek dělím šesti a přičtu pak 13. Dostávám myšlené číslo. Které číslo jsem si myslel?

Řešení:
Myšlené číslo označím x a vyjádřím pomocí matematických operací vztahy pro myšlené číslo:

$$\frac{5x-24}{6}+13=x \quad \Big| \cdot 6$$
$$5x-24+78=6x \quad \Big| -5x$$
$$\underline{\underline{x=54}}$$

Zkouška:
$54 \cdot 5 = 270$, $270 - 24 = 246$, $246 : 6 = 41$, $41 + 13 = 54$.

Odpověď:
Myšlené číslo je 54.

3.2.2. <u>Skupina 2:</u> *„Číslo a jeho vlastnosti“*

Hledaná čísla či číslo jsou určeny pomocí svých vlastností (*součtu, rozdílu, mocniny, násobku, apod.*). *Hledané číslo či čísla nemají již jiný vztah. Z těchto vlastností je nutné hledané číslo či čísla určit.*

***Příklad* 2.2.1:**
Aritmetický průměr dvou čísel je 17 a jejich geometrický průměr je 15. Určete obě čísla.

Řešení:
Označme si první hledané číslo x, druhé y, potom vyjádříme aritmetický a geometrický průměr těchto čísel:

$$\frac{x+y}{2}=17 \quad \Big| \cdot 2$$
$$\sqrt{x\cdot y}=15 \quad \Big|\,^2$$
$$x+y=34 \quad \rightarrow \quad y=34-x$$
$$xy=225$$
$$x\cdot(34-x)=225 \quad \Big| -225$$
$$-x^2+34x-225=0 \quad \Big| \cdot(-1)$$
$$x^2-34x+225=0$$
$$(x-9)\cdot(x-25)=0$$
$$x_1=9 \quad \rightarrow \quad y_1=25$$
$$x_2=25 \quad \rightarrow \quad y_2=9.$$

Úloha má pouze jedno řešení, protože $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1$.
Zkouška:
Aritmetický průměr: $\frac{9+25}{2} = 17$, geometrický průměr: $\sqrt{9\cdot 25} = 15$.

Odpověď:
Hledaná čísla jsou 9, 12.

***Příklad* 2.2.2:**
Součet dvou čísel je 12, součet jejich třetích mocnin je 468. Určete je!

Řešení:
Hledaná čísla označme *x*, *y*, potom platí

$$x + y = 12 \quad \rightarrow \quad x = 12 - y$$
$$\underline{x^3 + y^3 = 468}$$
$$(12 - y)^3 + y^3 = 468$$
$$1728 - 432y + 36y^2 - y^3 + y^3 = 468 \quad \big| - 468$$
$$36y^2 - 432y + 1\,260 = 0 \quad \big| : 36$$
$$y^2 - 12y + 35 = 0$$
$$(y - 5)\cdot(y - 7) = 0$$
$$y_1 = 5 \quad \rightarrow \quad x_1 = 7$$
$$y_2 = 7 \quad \rightarrow \quad x_2 = 5.$$

Z výsledků je zřejmé, že existuje jediné řešení 5, 7.
Zkouška:
Ověříme vztahy v zadání:
$5 + 7 = 12$; $5^3 + 7^3 = 468$.
Odpověď:
Hledaná čísla jsou 5 a 7.

3.2.3. <u>Skupina 3:</u> „*Po sobě jdoucí čísla a jejich vlastnosti*“

Hledaná čísla jsou určena pomocí svých vlastností (*součtu, rozdílu, mocniny, násobku, apod.*). *Hledaná čísla jsou navíc po sobě jdoucí. Z těchto vlastností je nutné hledaná čísla určit.*

***Příklad* 2.3.1:**
Která dvě po sobě jdoucí přirozená čísla mají tu vlastnost, že rozdíl jejich druhých mocnin se rovná 15?

Řešení:
Označme si dvě po sobě jdoucí čísla *n*, *n* +1 a platí pro ně

$$(n + 1)^2 - n^2 = 15$$
$$n^2 + 2n + 1 - n^2 = 15$$
$$2n + 1 = 15 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{n = 7}},\ \underline{\underline{n + 1 = 8}}.$$

Zkouška:
Rozdíl je $8^2 - 7^2 = 15$.
Odpověď:
Hledaná přirozená čísla jsou 7, 8.

***Příklad* 2.3.2:**
Najděte čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla tak, aby součet třetích mocnin prvých tří se rovnal třetí mocnině čtvrtého.

Řešení:
Hledaná přirozená čísla si označme n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Potom platí

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = (n+3)^3$$

$$n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = n^3 + 9n^2 + 27n + 27 \quad \Big| - n^3 - 9n^2 - 27n - 27$$

$$2n^3 - 12n - 18 = 0 \quad \Big| : 2$$

$$n^3 - 6n - 9 = 0$$

a dostáváme kubickou rovnici, kterou můžeme řešit pomocí Cardanových vzorců. Označíme-li si $p = -6$, $q = -9$, potom diskriminant

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{2}\right)^3 = 12{,}25 \quad \rightarrow \quad \sqrt{D} = \sqrt{12{,}25} = 3{,}5$$

a reálné řešení je

$$\underline{\underline{n}} = u + v = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right) + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right) - \sqrt{D}} = \sqrt[3]{4{,}5 + 3{,}5} + \sqrt[3]{4{,}5 - 3{,}5} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = \underline{\underline{3}}.$$

Protože n je přirozené, je řešením naší úlohy.
Lze snadno dokázat, že další dvě hodnoty řešení jsou imaginární {např. dělením $(n^3 - 6n - 9) : (n - 3)$}.
Zkouška:
$3^3 + 4^3 + 5^3 = 216.$
$6^3 = 216.$
Odpověď:
Čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla jsou 3, 4, 5, 6.

3.2.4. Skupina 4: *„Číslo a jeho ciferný součet"*

Hledané číslo je určeno pomocí svých vlastností (*součtu, rozdílu, mocniny, násobku,* apod.). *Hledané číslo je navíc charakterizována svým ciferným zápisem. Z těchto vlastností je nutné hledané číslo určit.*

***Příklad* 2.4.1:**
Dvojciferné číslo má ciferný součet 9. Vyměníme-li pořadí obou číslic, vznikne číslo, které násobeno původním dá 1 458. Které je to číslo?

Řešení:
Označme si první cifru x, druhou cifru y, potom platí

$$x + y = 9 \quad \Big| - y$$

$$\underline{(x + 10y)\cdot(10x + y) = 1\,458}$$

$$x = 9 - y$$

$$\underline{10x^2 + 101xy + 10y^2 = 1\,458}$$

$$10\cdot(9-y)^2 + 101\cdot(9-y)\cdot y + 10y^2 = 1\,458$$

$$810 - 180y + 10y^2 + 909y - 101y^2 + 10y^2 = 1\,458 \quad \Big| - 1\,458$$

$$-81y^2 + 729y - 648 = 0 \quad \Big| : (-81)$$

$$y^2 - 9y + 8 = 0$$

$$(y-1)\cdot(y-8) = 0$$

$$y_1 = 1 \quad \rightarrow \quad x_1 = 8$$

$$y_2 = 8 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1$$

z čehož plyne, že řešení je 18 a 81.

Zkouška:
18 - záměnou cifer dostáváme: 81 a obráceně, součin $18 \cdot 81 = 81 \cdot 18 = 1\,458$.
Odpověď:
Řešením jsou čísla 18, 81.

***Příklad* 2.4.2:**
Čtyřciferné číslo má ciferný součet 13; součet jeho posledních dvou číslic rovná se druhé číslici; součet číslic krajních rovná se polovině této číslice. Jestliže pak se číslo obrátí, vzroste o 819. Udejte toto číslo!

Řešení:
Označme si od největšího řádu po nejmenší postupně číslice x, y, z, w. Potom platí:

$$x + y + z + w = 13$$
$$z + w = y$$
$$x + w = \tfrac{1}{2} y \quad \Big| \cdot 2$$
$$\underline{1\,000w + 100z + 10y + x - (1000x + 100y + 10z + w) = 819}$$

$$x + y + z + w = 13$$
$$z + w = y$$
$$2x + 2w = y$$
$$\underline{-999x - 90y + 90z + 999w = 819} \quad \Big| : (-9)$$

$$x + y + z + w = 13$$
$$z + w = y$$
$$2x + 2w = y$$
$$\underline{-111x - 10y + 10z + 111w = 91}$$

$$x + 2z + 2w = 13$$
$$2x + 2w = z + w$$
$$\underline{-111x - 10z - 10w + 10z + 111w = 91}$$

$$x + 2z + 2w = 13$$
$$2x - z + w = 0 \quad \rightarrow \quad z = 2x + w$$
$$\underline{-111x + 101w = 91}$$

$$5x + 4w = 13 \quad \Big| \cdot 111$$
$$\underline{-111x + 101w = 91} \quad \Big| \cdot 5$$

$$555x + 444w = 1443$$
$$\underline{-555x + 505w = 455}$$

$$949w = 1\,898 \quad \Big| : 949$$
$$\underline{w = 2} \quad \rightarrow \quad 5x + 8 = 13$$
$$\underline{x = 1} \quad \rightarrow \quad \underline{z = 4}$$
$$\underline{y = 6}$$

a čtyřciferné číslo je 1 642.
Zkouška:
$1 + 6 + 4 + 2 = 13$.
$4 + 2 = 6$.
$1 + 2 = 3$, $\tfrac{1}{2} \cdot 6 = 3$.
$2\,461 - 1\,642 = 819$.
Odpověď:
Hledané čtyřciferné číslo je 1 642.

3.2.5. <u>Skupina 5:</u> „*Největší a nejmenší číslo*“

Hledaná čísla či číslo jsou určeny pomocí svých vlastností (*součtu, rozdílu, mocniny, násobku, apod.*). *Hledané číslo či čísla nemají již jiný vztah. Máme určit největší či nejmenší číslo* (*hledáme extrém*), *které splňuje dané požadavky.*

***Příklad* 2.5.1:**
Číslo 28 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl co největší.

Řešení:
Označme si sčítance x, y, pak platí

$$x + y = 28 \quad \rightarrow \quad y = 28 - x$$
$$S = x \cdot y \quad \text{. . . maximální.}$$

Potom

$$S = x \cdot (28 - x) = 28x - x^2.$$

Kvadratická funkce má extrém ve svém vrcholu, který je $V = \left[-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right]$. Nás pouze zajímá x-ová souřadnice; $x = -\frac{b}{2a}$, kde $a = -1$, $b = 28$, proto $x = -\frac{28}{-2} = 14$. Potom také $y = 14$. Protože $a < 0$, má kvadratická funkce ve vrcholu V maximum.
Zkouška:
Neúplnou zkoušku můžeme provést tím, že dosazujeme další hodnoty. Pro žádné dva sčítance, jejichž součet je 28 nebude už součin větší nebo roven $14^2 = 196$.
Zkoušku můžeme také provést tím, že úlohu vypočteme jinou metodou, např. pomocí diferenciálního počtu.
Funkci $S = 28x - x^2$ derivujeme, první derivaci položíme rovnu 0 a pro x dostáváme hodnotu extrému. Abychom zjistili, jaký je to extrém, musíme zjistit hodnotu druhé derivace v bodě x. Pro maximum musí tato hodnota být záporná.

$$S' = 28 - 2x, \quad 28 - 2x = 0 \quad \vert -28$$
$$-2x = -28 \quad \vert : (-2)$$
$$\underline{\underline{x = 14}}$$

Potom druhá derivace $S'' = -2 < 0$ pro všechny hodnoty x.
Závěr: v bodě $x = 14$ je maximum dané funkce.
Odpověď:
Oba sčítanci jsou 14.

***Příklad* 2.5.2:**
Číslo 100 rozložte na dva sčítance takové, aby součet jejich čtverců byl co nejmenší.

Řešení:
Označme si sčítance x, y, potom platí:

$$x + y = 100 \quad \rightarrow \quad y = 100 - x$$
$$S = x^2 + y^2 \quad \text{. . . minimální.}$$

Potom $S = x^2 + (100 - x)^2 = 2x^2 - 200x + 1\,000$
a hledáme extrém kvadratické funkce $S = 2x^2 - 200x + 1\,000$.
Stejně jako ve zkoušce předchozího příkladu funkci $S = 2x^2 - 200x + 1\,000$ derivujeme, první derivaci položíme rovnu 0 a pro x dostáváme hodnotu extrému. Abychom zjistili, jaký je to

extrém, musíme zjistit hodnotu druhé derivace v bodě x. Pro minimum musí tato hodnota být kladná.

$$S' = 4x - 200; \quad 4x - 200 = 0 \quad | + 200$$
$$4x = 200 \quad | : 4$$
$$\underline{\underline{x = 50}}$$

$S'' = 4 > 0$, potom v bodě $x = 50$ má daná funkce minimum.

Zkouška:
Zkoušku můžeme provést užitím jiného postupu (opět třeba pomocí kvadratické funkce) nebo můžeme provést neúplnou zkoušku.

Poznámka:
Neúplná zkouška bývá často pro studenty přesvědčivější než úplná, protože pracují s konkrétními čísly a nemusí užívat teorii.

3.2.6. Skupina 6: *„Nedostatečný počet určujících prvků"*

Hledaná čísla či číslo jsou určeny pomocí svých vlastností (*součtu, rozdílu, mocniny, násobku, apod.*). *V úlohách není dostatečný počet určujících prvků, proto vedou na diofantovské rovnice.*

***Příklad* 2.6.1:**
Najděte dvě přirozená čísla, jejichž rozdíl čtverců je 71.

Řešení:
Označíme-li velikost strany prvního čtverce x a druhého y, lze danou úlohu vyjádřit rovnicí
$$x^2 - y^2 = 71.$$
Rovnice $x^2 - y^2 = c$ je řešitelná celými čísly tehdy a jen tehdy, je-li c číslo liché nebo dělitelné čtyřmi.
V rovnici $x^2 - y^2 = 71$ nejprve rozložíme levou stranu
$$(x + y) \cdot (x - y) = 71,$$
potom pravou: $71 = 1 \cdot 71$ a položíme:
$$x + y = 71, \; x - y = 1,$$
z čehož plyne $x = 36$, $y = 35$.
Zkouška:
$36^2 - 35^2 = 71.$
Odpověď:
Hledaná přirozená čísla jsou 36 a 35.

***Příklad* 2.6.2:**
Pro která čísla x má zlomek $\dfrac{8x-1}{6x+9}$ celočíselnou hodnotu?

Řešení:
Aby zlomek měl celočíselnou hodnotu, musí být čitatel násobkem jmenovatele, musí tedy platit $(8x - 1) = (6x + 9) \cdot k$, kde $k \in Z$ a dostáváme bilineární rovnici
$$6kx + 9k = 8x - 1,$$

kterou upravíme na obecný tvar $y = -\dfrac{bx+d}{ax+c}$, konkrétně

$$k = -\frac{-8x+1}{6x+9}.$$

Protože hodnoty *a, c* jsou soudělná čísla (dělitel 3), vynásobíme společným dělitelem a máme

$$3k = -\frac{-8x+1}{2x+3}$$

a můžeme zapsat

$$l = -\frac{-8x+1}{2x+3}, \text{ kde } l = 3k,\ a = 2,\ b = -8,\ c = 3,\ d = 1.$$

Potom $ad - bc = 2\cdot 1 - (-8)\cdot 3 = 26$.
Dělitelé čísla 26 jsou ± 1, ± 2, ± 13, ± 26; $2x + 3 = m_i$ a řešení jsou:

1) $m_1 = 1 \rightarrow 2x + 3 = 1 \rightarrow x = -1 \rightarrow l = -\frac{9}{1} = -9 \rightarrow k = -3$,

2) $m_2 = -1 \rightarrow 2x + 3 = -1 \rightarrow x = -2 \rightarrow l = -\frac{17}{-1} = 17 \rightarrow k$ – není celé,

3) $m_3 = 2 \rightarrow 2x + 3 = 2 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \rightarrow l = -\frac{5}{2} \rightarrow k$ – není celé,

4) $m_2 = -2 \rightarrow 2x + 3 = -2 \rightarrow x = -\frac{5}{2} \rightarrow l = \frac{21}{2} \rightarrow k$ – není celé,

5) $m_2 = 13 \rightarrow 2x + 3 = 13 \rightarrow x = 5 \rightarrow l = -\frac{-39}{13} = 3 \rightarrow k = 1$,

6) $m_2 = -13 \rightarrow 2x + 3 = -13 \rightarrow x = -8 \rightarrow l = -\frac{63}{-13} = 5 \rightarrow k$ – není celé,

7) $m_2 = 26 \rightarrow 2x + 3 = 26 \rightarrow x = \frac{23}{2} \rightarrow l = -\frac{93}{26} \rightarrow k$ – není celé,

8) $m_2 = -26 \rightarrow 2x + 3 = -26 \rightarrow x = -\frac{29}{2} \rightarrow l = -\frac{115}{26} \rightarrow k$ – není celé.

Řešením jsou čísla $x_1 = -1$ a $x_2 = 5$.

Zkouška:

1) $x = -1$, potom zlomek $\dfrac{8x-1}{6x+9} = \dfrac{8\cdot(-1)-1}{6\cdot(-1)+9} = \dfrac{-9}{3} = -3$.

2) $x = 5$, potom zlomek $\dfrac{8x-1}{6x+9} = \dfrac{8\cdot 5-1}{6\cdot 5+9} = \dfrac{39}{39} = 1$.

Odpověď:

Zlomek $\dfrac{8x-1}{6x+9}$ má pro $x = -1$ celočíselnou hodnotu – 3 a pro $x = 5$ celočíselnou hodnotu 1.

3.3. Slovní úlohy o pohybu

Slovní úlohy o pohybu patří neodmyslitelně do každé sbírky slovních úloh. Jsou členěny podle toho kolik subjektů se pohybuje, po jakých drahách se pohybují a jakým způsobem se pohybují (o jaký pohyb jde).

3.3.1. <u>Skupina 1:</u> *„Jeden subjekt a stálá rychlost“*

Po dráze se pohybuje pouze jeden subjekt. Dráha bývá neuzavřená, může však být i uzavřená (*tj. většinou kruhová*)*. Subjekt se může i nemusí vracet do výchozího bodu. Subjekt* *se celou cestu pohybuje stálou rychlostí. Pokud se vrací do výchozího bodu, může se rychlost subjektu změnit (ale po celou dobu návratu musí být rychlost stálá). Počítáme rychlost subjektu, čas, který potřebuje na cestu nebo velikost dráhy, kterou urazí.*

***Příklad* 3.1.1:**

Vlak získal by na cestě 180 km dlouhé $\frac{2}{3}$ hodiny, kdyby za hodinu urazil vždy o 9 km více. Kolik hodin potřebuje k proběhnutí celé trati?

Řešení:

K řešení použijeme vztahu $s = v \cdot t$ pro rovnoměrný pohyb. Označme neznámou rychlost $v = x$, neznámý čas $t = y$. Potom dostáváme

$$180 = x \cdot y\,.$$

Zvětší-li se rychlost a zkrátí čas, dostáváme

$$180 = (x + 9) \cdot (y - \tfrac{2}{3})\,.$$

Slovní úloha se po matematizaci mění na matematickou úlohu – řešení soustavy rovnic

$$180 = x \cdot y$$
$$\underline{180 = (x+9) \cdot (y - \tfrac{2}{3})}\;.$$

Vyjádříme z první rovnice x (tentokrát záměrně, protože počítáme y) a vypočítáme y:

$$x = \frac{180}{y}$$
$$\underline{180 = \left(\frac{180}{y} + 9\right) \cdot \left(y - \frac{2}{3}\right)}$$
$$180 = 180 + 9y - \frac{120}{y} - 6 \quad \Big| -180 \quad \Big| \cdot \frac{y}{3}$$
$$3y^2 - 2y - 40 = 0 \qquad D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-40) = 484 \quad \rightarrow \quad \sqrt{D} = 22$$
$$y_{12} = \frac{2 \pm 22}{2 \cdot 3} = \begin{cases} 4 \\ -\frac{10}{3} \end{cases}.$$

Protože rychlost nemůže být záporná, je řešením pouze hodnota $y = t = \underline{\underline{4}}$ h.

Zkouška:

Jede-li vlak 4 hodiny, je jeho rychlost 180 : 4 = 45 km/h a urazí 180 km. Potom vlak zrychlí na 45 + 9 = 54 km/h, jede $4 - \frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$ h a ujede $3\frac{1}{3} \cdot 54 = 180$ km.

Odpověď:

Vlak potřebuje na projetí celé trati před zrychlením 4 hodiny.

***Příklad* 3.1.2:**

Chodec má být ve městě za 2 hodiny. Uvažoval takto: „Jdu-li za 1 hodinu 4,5 km, opozdím se o čtvrt hodiny. Jakou rychlostí musím jít, abych byl ve městě 12 minut před stanovenou dobou?“

Řešení:

K řešení použijeme vztahu $s = v \cdot t$ pro rovnoměrný pohyb.

Jde-li chodec rychlostí 4,5 km/h ujde dráhu za 2,25 h, dráha je tedy $4{,}5 \cdot 2{,}25 = 10{,}125$ km.

Protože chce dráhu 10,125 km ujít za $(2 - \frac{12}{60}) = 1{,}8$ h, je jeho rychlost $v = s : t = 10{,}125 : 1{,}8$ = $\underline{\underline{5{,}625}}$ km/h, což je také $5\frac{5}{8}$ km/h.

Zkoušku můžeme udělat obrácením postupu.
Odpověď:
Aby chodec byl ve městě 12 min před stanovenou dobou, musí jít rychlostí 5,625 km/h.

3.3.2. Skupina 2: *„Jeden subjekt a různá rychlost“*

Po dráze se pohybuje pouze jeden subjekt. Dráha bývá neuzavřená, může však být i uzavřená (tj. většinou kruhová). Objekt se může i nemusí vracet do výchozího bodu. Rychlost subjektu se během jedné cesty alespoň jednou změní. Počítáme rychlosti subjektu nebo čas, který potřebuje na překonání jednotlivých úseků nebo vzdálenosti těchto úseků.

***Příklad* 3.2.1:**
Turista ušel 16 km za 3,5 hodiny. První dvě hodiny šel stále stejně rychle. Potom zvolnil chůzi a šel už jen stálou rychlostí o 1 km/h menší než dříve. Určete obě rychlosti.

Řešení:
První neznámou rychlost si označme x [km/h], potom druhá neznámá rychlost je o 1 km/h menší a označíme ji $x - 1$ [km/h]. Protože turista šel první rychlostí 2 hodiny a druhou 1,5 hodiny, platí

$$2 \cdot x + 1{,}5 \cdot (x - 1) = 16$$
$$2x + 1{,}5x - 1{,}5 = 16 \quad \Big| -1{,}5$$
$$3{,}5x = 17{,}5 \quad \Big| : 3{,}5$$
$$\underline{x = 5} \text{ [km/h]} \quad \rightarrow \quad x - 1 = 4 \text{ [km/h]}.$$

Zkouška:
Nejdříve šel turista 2 hodiny rychlostí 5 km/h a ušel $2 \cdot 5 = 10$ km, potom šel turista 1,5 hodinu rychlostí 4 km/h a ušel $1{,}5 \cdot 4 = 6$ km, celkem ušel $10 + 6 = 16$ km.
Odpověď:
První, větší rychlost turisty byla 5 km/h, druhá, menší rychlost byla 4 km/h.

***Příklad* 3.2.2:**
Kdosi se procházel 5 hodin. Zpočátku šel po vodorovné cestě, potom stoupal do vrchu, nakonec se vrátil po stejné trase zpátky do výchozího místa. Po vodorovné části cesty šel rychlostí 4 km/h, během stoupání dosáhl rychlosti 3 km/h, v době klesání šel rychlostí 6 km/h. Určete dráhu, kterou prošel.

Řešení:
Označme si délku trasy, kterou kdosi projde po rovině x [km], kterou projde do kopce a z kopce y [km]. Potom ze vztahu $s = v \cdot t$ pro rovnoměrný pohyb můžeme vyjádřit jednotlivé časy t_1 (pohyb po rovině – bude dvakrát), t_2 (pohyb do kopce), t_3 (pohyb z kopce) a platí

$$x = 4 \cdot t_1 \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{x}{4},$$

$$y = 3 \cdot t_2 \quad \rightarrow \quad t_2 = \frac{y}{3},$$

$$y = 6 \cdot t_3 \quad \rightarrow \quad t_3 = \frac{y}{6},$$

a protože $2 \cdot t_1 + t_2 + t_3 = 5$, dostáváme

$$2 \cdot \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{y}{6} = 6 \quad \Big| \cdot 6$$

$$3x + 3y = 30 \quad \Big| : 3$$

$$x + y = 10$$

Vzdálenost $x + y = 10$ km je pouze cesta tam, musíme ještě připočítat cestu zpět (je stejná), proto celková trasa, kterou ušel kdosi, je dvojnásobná, tedy $2 \cdot 10 = 20$ km.

Zkouška:

Z výpočtu je zřejmé, že nezáleží na velikosti úseků x, y, pouze jejich součet musí být 10 km. Zvolme např. $x = 6$ km, $y = 4$ km, potom čas $t_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ h, čas $t_2 = \frac{4}{3}$ h, čas $t_3 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ h, a celkový čas je $2 \cdot t_1 + t_2 + t_3 = 2 \cdot \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 5$.

Odpověď:

Kdosi prošel dráhu 20 km.

Poznámka 1:

Budou-li v úloze zadány jiné rychlosti, dosazením za t_1, t_2, t_3 do rovnice $2 \cdot t_1 + t_2 + t_3 = 5$ dostáváme rovnici $ax + by = c$. V obecném případě je tedy úloha neurčitá.

Poznámka 2:

Text příkladu je z knihy [40]. Autor zde volí x celkovou dráhu, y označuje délku nakloněné části dráhy. Matematizací reálné situace dostává rovnici

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} x - y \right) + \frac{y}{3} + \frac{y}{6} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} x - y \right) = 5,$$

jejímž řešením je $x = 20$ km.

3.3.3. <u>Skupina 3:</u> *„Dva subjekty proti sobě“*

Po neuzavřené dráze se pohybují proti sobě dva subjekty. Začátek pohybu obou subjektů může být ve stejnou nebo i v různou dobu. Počítáme rychlosti subjektů a čas, který na překonání svých úseků potřebují. Můžeme také počítat vzdálenost bodů, ve kterých subjekty začínají pohyb.

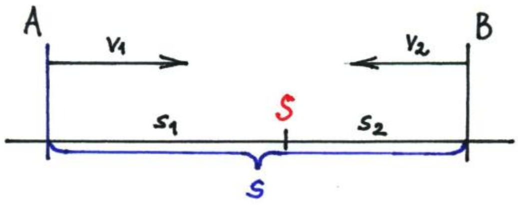
***Příklad* 3.3.1:**

Z města A vyjede do města B nákladní automobil, který ujede za 3 hodiny 135 km. Ve stejnou dobu vyjede z města B do města A osobní automobil, který ujede za 2 hodiny 110 km. Vzdálenost měst A, B je 150 km. Určete jak daleko od města A a za jak dlouho se automobily potkají.

Řešení:

Nejdříve si zjistíme průměrnou rychlost obou automobilů. Vyjdeme ze základního vztahu pro rovnoměrný pohyb $s = v \cdot t$ (předpokládáme, že oba automobily se pohybují rovnoměrně – viz obr. 3-1).

Obr. 3-1:



Rychlost nákladního automobilu v_1 = 135 : 3 = 45 km/h, rychlost osobního automobilu v_2 = 110 : 2 = 55 km/h. Dále platí:

$s_1 = v_1 \cdot t_1, \quad s_2 = v_2 \cdot t_2, \quad s = s_1 + s_2.$

Dosadíme-li do poslední rovnice, dostáváme modelovou situaci

$$\boldsymbol{s = v_1 t_1 + v_2 t_2} \qquad \textbf{(3-3)}$$

Protože oba automobily začínají svůj pohyb ve stejnou dobu, platí $t_1 = t_2 = t$ a dostáváme

$s = v_1 t + v_2 t$,

odkud vyjádříme t:

$$\underline{\underline{t = \frac{s}{v_1 + v_2}}}\,. \qquad \textbf{(3-3a)}$$

Chceme-li vyjádřit s_1, vyjdeme ze vztahu

$$s_1 = v_1 \cdot t_1 = v_1 \cdot t = v_1 \cdot \frac{s}{v_1 + v_2} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{s_1 = \frac{s v_1}{v_1 + v_2}}}\,. \qquad \textbf{(3-3b)}$$

Chceme-li vyjádřit s_2, vyjdeme ze vztahu

$$s_2 = v_2 \cdot t_2 = v_2 \cdot t = v_2 \cdot \frac{s}{v_1 + v_2} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{s_2 = \frac{s v_2}{v_1 + v_2}}}\,. \qquad \textbf{(3-3c)}$$

V konkrétním případě máme hodnoty s = 150 km, v_1 = 45 km/h, v_2 = 55 km/h a z (3-3a) a (3-3b) dostáváme

$$t = \frac{s}{v_1 + v_2} = \frac{150}{45 + 55} = \underline{\underline{1{,}5}}\text{ h.}$$

$$s_1 = \frac{s v_1}{v_1 + v_2} = \frac{150 \cdot 45}{45 + 55} = \underline{\underline{67{,}5}}\text{ km.}$$

Zkouška:

$$s_2 = \frac{s v_2}{v_1 + v_2} = \frac{150 \cdot 55}{45 + 55} = 85{,}5\text{ km; celková dráha je } 67{,}5 + 85{,}5 = 150\text{ km.}$$

Odpověď:

Automobily se potkají 67,5 km od města *A* za 1 hodinu 30 minut..

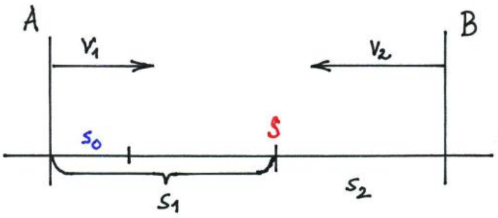
***Příklad* 3.3.2:**

V 7 hodin vyjede z *A* do *B* cyklista průměrnou rychlostí 16 km/h. Když ujede 12 km, vyjede proti němu z *B* do *A* automobil průměrnou rychlostí 62 km/h. Potkají se v 8 hodin 15 minut. Jaká je vzdálenost mezi *A*, *B*?

Řešení:

Nejdříve si zjistíme, v kolik hodin vyjel automobil. Protože cyklista do té doby ujel 12 km, byl už na cestě 12 : 16 = $\frac{3}{4}$ hodiny. Automobil tedy vyjel v 7 hodin 45 minut.

Obr. 3-2:



Vyjdeme opět z modelové situace (3-3), kdy

$s = v_1 t_1 + v_2 t_2$.

Cyklista však už ujel dráhu s_0, teprve potom vyjel automobil. Čas jízdy automobilu označme t, potom je

$v_2 t_2 = v_2 t,\ \ v_1 t_1 = v_1 t + s_0$

a dostáváme

$s = v_1 t + s_0 + v_2 t \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{s = (v_1 + v_2) \cdot t + s_0}}$. **(3-3d)**

V konkrétním případě máme hodnoty $s_0 = 12$ km, $v_1 = 16$ km/h, $v_2 = 62$ km/h, $t = \frac{1}{2}$ h a z (3-3d) dostáváme

$s = (16 + 62) \cdot \frac{1}{2} + 12 = \underline{\underline{51}}$ km.

Zkouška:

Cyklista jede $1\frac{1}{4}$ h rychlostí 16 km/h a ujede $16 \cdot 1\frac{1}{4} = 20$ km, automobil jede $\frac{1}{2}$ h a ujede $62 \cdot \frac{1}{2} = 31$ km. Celkem ujedou 20 + 31 = 51 km, což je délka trasy.

Odpověď:

Vzdálenost mezi A, B je 51 km.

Poznámka:

Pokud bychom znali s a chtěli vyjádřit t, dostáváme z (3-3d)

$$s - s_0 = (v_1 + v_2) \cdot t \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{t = \frac{s - s_0}{v_1 + v_2}}}. \qquad \textbf{(3-3e)}$$

3.3.4. <u>Skupina 4:</u> *„Dva subjekty za sebou“*

Po neuzavřené dráze se pohybují za sebou dva subjekty. Subjekty začínají pohyb ze stejných míst v různou dobu a jeden subjekt dohoní druhý nebo dojedou do cíle ve stejnou dobu. Subjekty též mohou vyjet ve stejnou dobu, ale do cíle dojedou v různých časech. Nebo též subjekty začínají pohyb z různých míst ve stejnou dobu a jeden dohoní druhý. Můžeme počítat rychlosti subjektů, čas, který potřebují na zdolání jednotlivých úseků a velikosti těchto úseků.

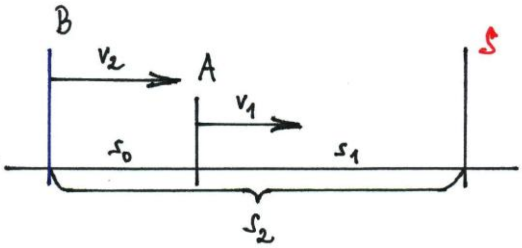
***Příklad* 3.4.1:**

Z místa A vyjde chodec rychlostí 6 km za hod.; z místa B vzdáleného 27 km od A v opačném směru, vyjede současně s ním cyklista rychlostí 24 km za hod. Kdy a kde ho dohoní?

Řešení:

Chodec se pohybuje rychlostí v_1 po dráze s_1 a jeho doba pohybu je t_1, cyklista se pohybuje rychlostí v_2 po dráze s_2 a jeho doba pohybu je t_2, přičemž platí $s_2 = s_1 + s_0$, kde s_0 je náskok chodce před cyklistou (viz obr. 3-3).

Obr. 3-3:



Chodec se pohybuje rychlostí v_1 po dráze s_1 a jeho doba pohybu je t_1, cyklista se pohybuje rychlostí v_2 po dráze s_2 a jeho doba pohybu je t_2, přičemž platí $s_2 = s_1 + s_0$, kde s_0 je náskok chodce před cyklistou.
Vyjdeme ze základního vztahu pro rovnoměrný pohyb $s = v \cdot t$. Potom platí:

$s_1 = v_1 \cdot t_1, \quad s_2 = v_2 \cdot t_2, \quad s_2 = s_1 + s_0.$

Dosadíme-li do poslední rovnice, dostáváme modelovou situaci

$$\boldsymbol{v_2 t_2 = v_1 t_1 + s_0} \,. \qquad \textbf{(3-4)}$$

Protože chodec i cyklista začínají svůj pohyb ve stejnou dobu, platí $t_1 = t_2 = t$ a dostáváme

$v_2 t = v_1 t + s_0,$

odkud vyjádříme t:

$$v_2 t - v_1 t = s_0 \quad \to \quad \underline{\underline{t = \frac{s_0}{v_2 - v_1}}} \,. \qquad \textbf{(3-4a)}$$

Pomocí t pak můžeme vyjádřit dráhu za kterou dohoní cyklista chodce (počítejme vzdálenost od A, dráha cyklisty bude větší o s_0):

$$s = s_1 = v_1 t_1 = v_1 t = v_1 \cdot \frac{s_0}{v_2 - v_1} \quad \to \quad \underline{\underline{s = \frac{s_0 \cdot v_1}{v_2 - v_1}}} \,. \qquad \textbf{(3-4b)}$$

V konkrétním případě máme hodnoty $s_0 = 27$ km, $v_1 = 6$ km/h, $v_2 = 24$ km/h a z (3-4a) a (3-4b) dostáváme

$$t = \frac{s_0}{v_2 - v_1} = \frac{27}{24 - 6} = \underline{\underline{1{,}5}} \text{ hodiny.}$$

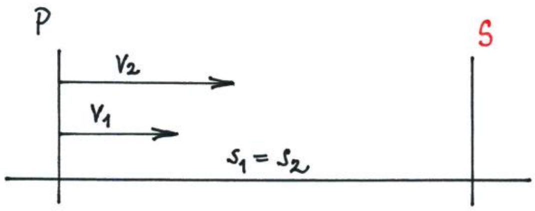
$$s = \frac{s_0 \cdot v_1}{v_2 - v_1} = \frac{27 \cdot 6}{24 - 6} = \underline{\underline{9}} \text{ km (od } A\text{).}$$

Zkouška:
Chodec ujde za 1,5 hodiny $6 \cdot 1{,}5 = 9$ km.
Cyklista ujede za 1,5 hodiny $24 \cdot 1{,}5 = 36$ km, protože má chodec náskok 27 km, ujede z A $36 - 27 = 9$ km.
Odpověď:
Cyklista dohoní chodce za 1,5 hodiny 9 km za A.

***Příklad* 3.4.2:**
V 6 hodin 40 minut vyplul z přístavu parník plující průměrnou rychlostí 12 km/h. Přesně v 10 hodin za ním vyplul motorový člun průměrnou rychlostí 42 km/h. V kolik hodin dohoní člun parník?

Řešení:
Protože parník i člun vyjíždějí ze stejného místa a dohánějí se, bude jejich dráha stejná. Parník se pohybuje rychlostí v_1 dobu t_1 na dráze s, člun se pohybuje rychlostí v_2 dobu t_2 na dráze s.

Obr. 3-4:



Vyjdeme ze základního vztahu pro rovnoměrný pohyb $s = v \cdot t$. Potom platí:

$s_1 = v_1 \cdot t_1$, $s_2 = v_2 \cdot t_2$, $t_1 = t_2 + t_0$, kde t_0 je rozdíl časů plavby obou lodí.

Protože platí $s = s_1 = s_2$, dosadíme do tohoto vztahu z předchozích rovnic a dostáváme modelovou situaci

$$\boldsymbol{v_2 t_2 = v_1 \cdot (t_2 + t_0)}. \qquad \textbf{(3-5)}$$

Z modelové rovnice vyjádříme t_1 a dopočteme t_2:

$$v_2 t_2 = v_1 t_2 + v_1 t_0 \quad \Big| - v_1 t_2$$

$$v_2 t_2 - v_1 t_2 = v_1 t_0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{t_2 = \frac{v_1 t_0}{v_2 - v_1}}}, \qquad \textbf{(3-5a)}$$

$$t_1 = t_2 + t_0 = \frac{v_1 t_0}{v_2 - v_1} + t_0 = \frac{v_1 t_0 + v_2 t_0 - v_1 t_0}{v_2 - v_1} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{t_1 = \frac{v_2 t_0}{v_2 - v_1}}}. \qquad \textbf{(3-5b)}$$

Pokud bychom chtěli určit dráhu s, platí

$$s = s_1 = v_1 t_1 = v_1 \cdot \frac{v_2 t_0}{v_2 - v_1} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{s = \frac{v_1 v_2 t_0}{v_2 - v_1}}}. \qquad \textbf{(3-5c)}$$

V konkrétním případě máme hodnoty $t_0 = 3\frac{1}{3}$ h, $v_1 = 12$ km/h, $v_2 = 42$ km/h a z (3-5a) a (3-5b) dostáváme

$$t_1 = \frac{v_2 t_0}{v_2 - v_1} = \frac{42 \cdot \frac{10}{3}}{42 - 12} = 4\tfrac{2}{3} \text{ h},$$

$$t_2 = \frac{v_1 t_0}{v_2 - v_1} = \frac{12 \cdot \frac{10}{3}}{42 - 12} = 1\tfrac{1}{3} \text{ h}.$$

$6\frac{2}{3} + 4\frac{2}{3} = 10 + 1\frac{1}{3} = 11\frac{1}{3}$ h = 11 h 20 min.

Zkouška:

Rozdíl časů je $4\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$ h. Dráha je $s = \dfrac{v_1 v_2 t_0}{v_1 - v_2} = \dfrac{12 \cdot 42 \cdot \frac{10}{3}}{42 - 12} = 56$ km.

Parník pluje rychlostí 12 km/h $4\frac{2}{3}$ hodiny a urazí dráhu $s = 12 \cdot 4\frac{2}{3}$ h = 56 km, motorový člun pluje rychlostí 42 km/h $1\frac{1}{3}$ hodiny a urazí dráhu $s = 42 \cdot 1\frac{1}{3}$ h = 56 km.

Odpověď:

Motorový člun dohoní parník v 11 hodin 20 minut.

3.3.5. Skupina 5: *„Dva subjekty proti sobě i za sebou"*

Po neuzavřené dráze se pohybují dva subjekty. Subjekty začínají pohyb ze stejných nebo různých míst a část doby se pohybují za sebou a část doby proti sobě. Pohyb často ukončí ve stejnou dobu na stejném místě. Počítáme dráhy subjektů, jejich rychlosti i čas strávený na cestě.

***Příklad* 3.5.1:** *Průzkum na moři*:
Průzkumná loď eskadry dostala za úkol prozkoumat moře ve směru plavby eskadry. Loď se má vrátit k eskadře za 3 h. Za jak dlouho se musí průzkumná loď obrátit k návratu zpět, jestliže její rychlost je 60 mil/h a rychlost eskadry 40 mil/h?

Řešení č. 1:
Eskadra ujede do setkání dráhu s_1 rychlostí v_1 = 40 mil/h. Čas jízdy t_1 = 3 h se skládá ze dvou hodnot; t – času, kdy průzkumná loď jede vpřed a t_0 – času, kdy se průzkumná loď vrací.
Průzkumná loď ujede do setkání dráhu s_2 rychlostí v_2 = 60 mil/h. Dráha s_2 jízdy průzkumné lodi se skládá ze dvou částí, cesty vpřed: $s = v_2 \cdot t = 60t$ a cesty nazpět: $s_0 = v_2 \cdot t_0 = 60t_0$.
Dráhu s_1 eskadry pak můžeme vyjádřit dvojím způsobem:

1) $s_1 = v_1 \cdot t_1 = v_1 \cdot (t + t_0) = 40 \cdot (t + t_0)$, kde $t + t_0 = 3$,

2) $s_1 = s - s_0 = 60t - 60t_0$.

Musí tedy platit rovnost

$$40 \cdot (t + t_0) = 60t + 60t_0,$$

ze které po dosazení $t_0 = 3 - t$ dostáváme

t = 2,5 h, t_0 = 0,5 h.

Zkouška:
Dráha eskadry: $s_1 = v_1\, t_1 = 40 \cdot 3 = 120$ mil.
Dráha pr. lodě: tam: $s = v_2\, t = 60 \cdot 2{,}5 = 150$ mil,
zpět: $s_0 = v_2\, t_0 = 60 \cdot 0{,}5 = 30$ mil,
celkem: $s - s_0 = 150 - 30 = 120$ mil ... $= s_1$

Odpověď:
Průzkumná loď se začala vracet po 2 h 30 min od okamžiku, kdy opustila eskadru.

Řešení č. 2:
Označme t hodin dobu, po niž plula průzkumná loď stejným směrem jako eskadra; to znamená, že zpět se k eskadře vracela $(3 - t)$ hodin. Po dobu, po kterou pluly všechny lodě stejným směrem, se průzkumná loď vzdálila od eskadry o vzdálenost m mil rovnou rozdílu vzdáleností, které urazila ona a eskadra za t hodin. Platí

$m = 60t - 40t = 20t.$

Při návratu k eskadře urazila průzkumná loď vzdálenost $60 \cdot (3 - t)$ mil a samotná eskadra vzdálenost $40 \cdot (3 - t)$ mil. Dohromady urazily $20t$ mil. Platí

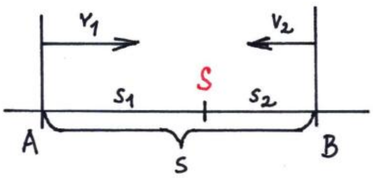
$60 \cdot (3 - t) + 40 \cdot (3 - t) = 20t$,

a proto $t = 2{,}5$.
Zkouška a *odpověď* - viz řešení 1.

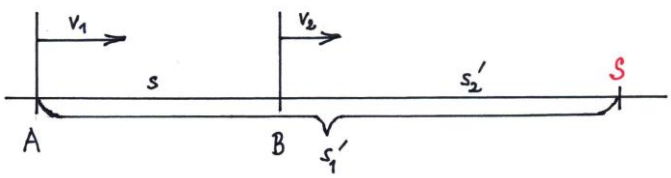
***Příklad* 3.5.2:**
Dva body A, B se pohybují po přímé dráze. Jejich vzdálenost je 4 km. Pohybují-li se proti sobě, setkají se za 45 minut, pohybují-li se v témž smyslu, setkají se za 2 hodiny Určete jejich rychlosti a vzdálenost místa setkání od výchozího místa bodu A (časy jsou kladné).

Numerické řešení:
1) pohyb proti sobě: 2) pohyb za sebou:

Obr. 3-5:



Obr. 3-6:



Vyjdeme ze vztahu $s = v \cdot t$ pro rovnoměrný pohyb, značení jednotlivých veličin viz obr. 3-5, 3-6. Předpokládáme, že $v_1 > v_2$.

Bod A: $s_1 = v_1 \cdot t$ $\qquad s_1' = v_1 \cdot t'$
Bod B: $s_2 = v_2 \cdot t$ $\qquad s_2' = v_2 \cdot t'$
Platí: $s_1 + s_2 = s$ $\qquad s_1' - s_2' = s$

$$v_1 t + v_2 t = s \qquad v_1 t' - v_2 t' = s$$

$$v_1 t + v_2 t = s \quad \Big| : t$$
$$v_1 t' - v_2 t' = s \quad \Big| : t'$$

$$v_1 + v_2 = \frac{s}{t}$$
$$v_1 - v_2 = \frac{s}{t'}$$

$$2v_1 = \frac{s}{t} + \frac{s}{t'} \qquad 2v_2 = \frac{s}{t} - \frac{s}{t'}$$

$$2v_1 = \frac{st' + st}{tt'} \quad \Big| : 2 \qquad 2v_2 = \frac{st' - st}{tt'} \quad \Big| : 2$$

$$v_1 = \frac{s(t+t')}{2tt'} \qquad v_2 = \frac{s(t'-t)}{2tt'} \qquad \textbf{(3-6a,b)}$$

$$s_1 = v_1 \cdot t = \frac{s(t+t')}{2tt'} \cdot t \qquad s_2 = v_2 \cdot t = \frac{s(t-t')}{2tt'} \cdot t$$

$$s_1 = \frac{s(t+t')}{2t'} \qquad s_2 = \frac{s(t'-t)}{2t'} \qquad \textbf{(3-6c,d)}$$

$$s_1' = v_1 \cdot t' = \frac{s(t+t')}{2tt'} \cdot t' \qquad s_2' = v_2 \cdot t' = \frac{s(t-t')}{2tt'} \cdot t'$$

$$s_1' = \frac{s(t+t')}{2t} \qquad s_2' = \frac{s(t'-t)}{2t} \qquad \textbf{(3-6e,f)}$$

Potom pro $t = \frac{3}{4}$ h, $t' = 2$ h, $s = 4$ km:

$$v_1 = \frac{s(t+t')}{2tt'} = \frac{4\cdot(\frac{3}{4}+2)}{2\cdot\frac{3}{4}\cdot 2} = \frac{11}{3} = \underline{\underline{3\tfrac{2}{3}}}\ \text{km},$$

$$v_2 = \frac{s(t'-t)}{2tt'} = \frac{4\cdot(2-\frac{3}{4})}{2\cdot\frac{3}{4}\cdot 2} = \frac{5}{3} = \underline{\underline{1\tfrac{2}{3}}}\ \text{km},$$

$$s_1 = \frac{s(t+t')}{2t'} = \frac{4\cdot(\frac{3}{4}+2)}{2\cdot 2} = \frac{11}{4} = \underline{\underline{2\tfrac{3}{4}}}\ \text{km},$$

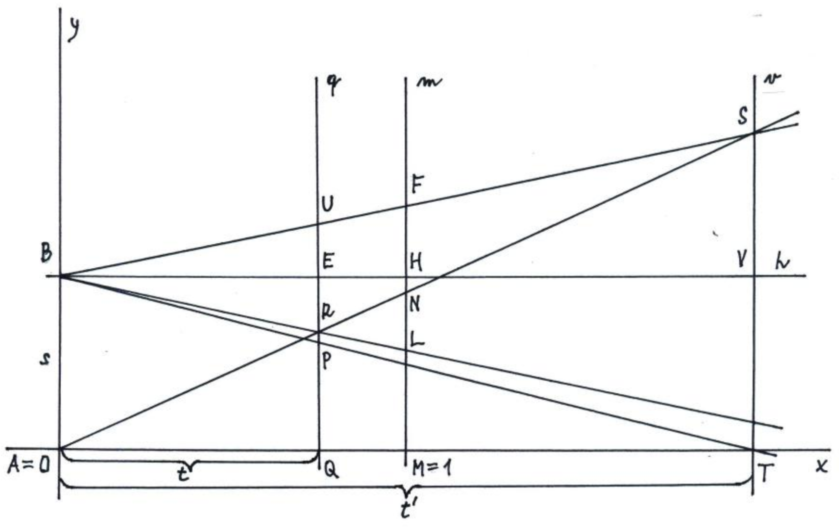
$$s_2 = \frac{s(t'-t)}{2t'} = \frac{4\cdot(2-\frac{3}{4})}{2\cdot 2} = \frac{5}{4} = \underline{\underline{1\tfrac{1}{4}}}\ \text{km},$$

$$s_1{}' = \frac{s(t+t')}{2t} = \frac{4\cdot(\frac{3}{4}+2)}{2\cdot\frac{3}{4}} = \frac{22}{3} = \underline{\underline{7\tfrac{1}{3}}}\ \text{km},$$

$$s_2{}' = \frac{s(t'-t)}{2t} = \frac{4\cdot(2-\frac{3}{4})}{2\cdot\frac{3}{4}} = \frac{11}{3} = \underline{\underline{3\tfrac{2}{3}}}\ \text{km}.$$

Grafické řešení: zpracováno podle [46]

Obr. 3-7:



$\Delta\, ABT \sim \Delta\, QPT \quad\rightarrow\quad |AB| : |QP| = |AT| : |QT|$,
$\Delta\, BVS \sim \Delta\, BEU$; $|AT| = |BV|$, $|QT| = |EV| \quad\rightarrow\quad |AT| : |QT| = |BV| : |EV|$
$\rightarrow\quad |BV| : |EV| = |BS| : |US| \quad\rightarrow\quad |BS| : |US| = |AS| : |RS| \quad\rightarrow$
$\rightarrow\quad |AT| : |QT| = |AS| : |RS|$
$\Delta\, ABS \sim \Delta\, RUS \quad\rightarrow\quad |AS| : |RS| = |AB| : |RU|$
Z toho plyne:
$|AB| : |QP| = |AB| : |RU| \quad\rightarrow\quad |QP| = |RU|$ . . . . . $\underline{\underline{|EU| = |ER| = \tfrac{1}{2}\cdot|RU|}}$
Vyjdeme-li ze vztahu

$$|AB| : |QP| = |AT| : |QT|$$

potom:

$$s : |QP| = t' : (t' - t) \quad\rightarrow\quad |QP| = \frac{s(t'-t)}{t'}$$

Dále $|QR| = |QE| - |ER| = |QE| - \tfrac{1}{2}\cdot|UR| = |QE| - \tfrac{1}{2}\cdot|QP| =$

$= s - \dfrac{s(t'-t)}{t'} = \dfrac{2st' - st' + st}{2t'} = \dfrac{s(t'+t)}{2t'} = s_1.$

$\underline{\underline{|QR| = s_1}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{|ER| = |EU| = s_2}}\,.$

Z podobnosti: $\Delta ATS \sim \Delta AQR$ plyne:

$$|TS| : |QR| = |AT| : |AQ| \quad \rightarrow \quad |TS| = \frac{|AT| \cdot |QR|}{|AQ|} =$$

$$= \frac{t' \cdot \dfrac{s(t'+t)}{2t'}}{t} = \frac{s(t'+t)}{2t} = s_1{}'$$

$\underline{\underline{|TS| = s_1{}'}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{|VS| = s_2{}'}}\,.$

Z podobnosti: $\Delta AQR \sim \Delta AMN$ plyne:

$$|AQ| : |QR| = |AM| : |MN| \quad \rightarrow \quad t : s_1 = 1 : |MN| \quad \rightarrow \quad |MN| = \frac{s_1}{t} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{|MN| = v_1}}\,.$$

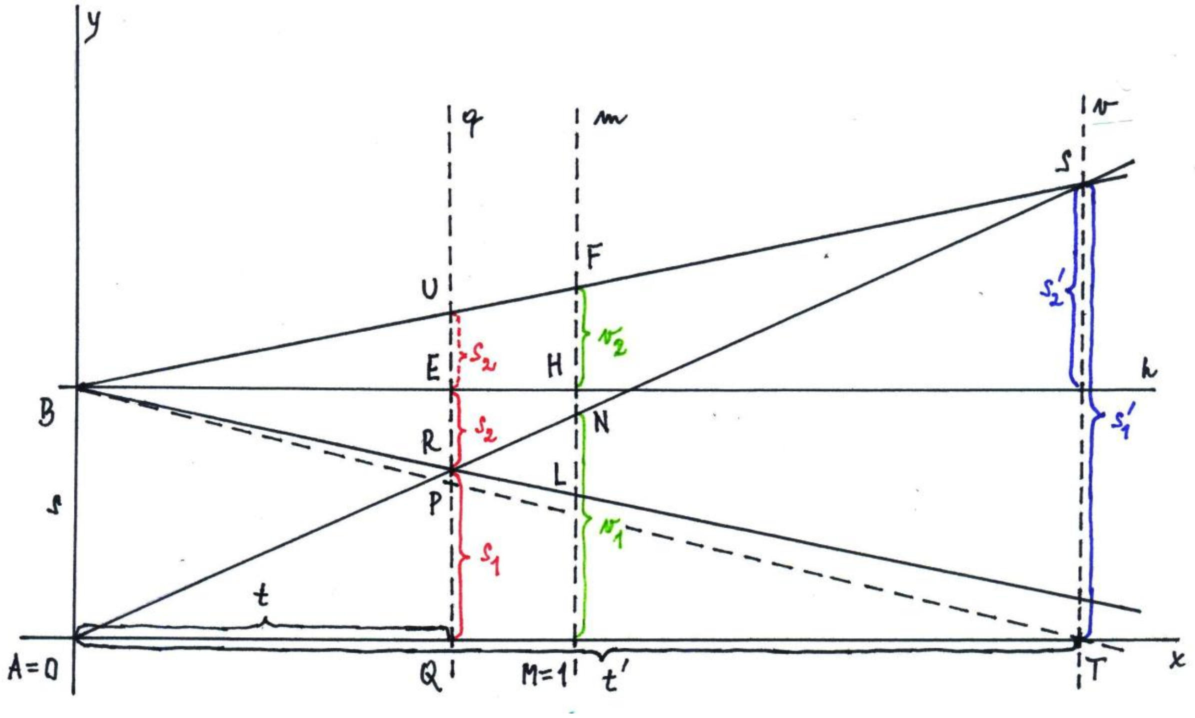
Z podobnosti: $\Delta BEU \sim \Delta BHF$ a vztahu $|EU| = |ER| = |EQ| - |QR| = s - s_1 = s_2$ plyne:

$$|BE| : |EU| = |BH| : |HF| \quad \rightarrow \quad t : s_2 = 1 : |HF| \quad \rightarrow \quad |HF| = \frac{s_2}{t} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{|HF| = v_2}}\,.$$

Ze zjištěných faktů vyplývá následující konstrukce:

Obr. 3-8:



1) nakreslíme osy x, y ($x \perp y$), ... na x budeme nanášet čas, na y dráhu; $M \in x$, $|AM| = 1$; $B \in y$, $|AB| = s = 4$; h, $h \ni B$, $h \parallel x$;

2) $Q, Q \in x,\ |AQ| = t = \frac{3}{4}$;
   $T, T \in x,\ |AT| = t' = 2$;
3) $q, q \ni Q, q\ \ x, q\ \ h = E$;
   $m, m \ni M, m\ \ x, m\ \ h = H$;
   $v, v \ni T, v\ x, v\ h = V$;
4) $P, P = BT\ \ q$;
5) $R, U;\ R \in q,\ |ER| = \frac{1}{2}|QP|,\ |QR| < s$;
   $U \in q,\ |EU| = \frac{1}{2}|QP|,\ |QU| > s$;
6) $AR, AR\ \ m = N, AR\ \ v = S$;
   $BU, BU\ \ m = F, BU\ \ v = S$;
   (přímky AR, BU se protínají v bodě S na přímce v)
   $BR, BR\ \ m = L$;
7) Řešení:
   $s_1 = |QR|,\ s_2 = |ER|$,
   $s_1' = |TS|,\ s_2 = |VS|$,
   $v_1 = |MN|,\ v_2 = |HF|$.

3.3.6. <u>Skupina 6:</u> *„Pohyby v pohybujícím se prostředí“*

Subjekt, který se pohybuje, je ovlivněn pohybujícím se prostředím (proud vody, vítr apod.). Subjekt většinou koná pohyb „tam i zpět“. Máme za úkol vypočítat rychlosti jak subjektu, tak i pohybujícího se prostředí nebo vzdálenosti či čas, který subjekt na pohyb potřebuje.

***Příklad* 3.6.1:**
Parník ujede po proudu trať 16,62 km za 45 minut; proti proudu ujede trať 14,4 km za 48 minut. Jaká je jeho rychlost v klidné vodě?

Řešení:
Označme si x [km/h] rychlost parníku v klidné vodě. Rychlost proudu označme y [km/h].
Rychlost parníku po proudu je $16{,}62 : \frac{3}{4} = 16{,}62 \cdot \frac{4}{3} = 22{,}16$ km/h, rychlost parníku proti proudu je $14{,}4 : \frac{4}{5} = 14{,}4 \cdot \frac{5}{4} = 18$ km/h.
Potom platí

$$\begin{aligned} x + y &= 22{,}16 \\ \underline{x - y} &\underline{= 18} \\ 2x &= 40{,}16 \\ x &= 20{,}08 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Zkouška:
Po proudu – 45 minut:
parník: $20{,}08 \cdot \frac{3}{4} = 15{,}06$ km,
proud: $2{,}08 \cdot \frac{3}{4} = \underline{\ \ 1{,}56 \text{ km,}}$
celkem trať (součet): 16,62 km.
Proti proudu – 48 minut:
parník: $20{,}08 \cdot \frac{4}{5} = 16{,}064$ km,

proud: $2{,}08 \cdot \frac{4}{5}$ = $\underline{\ 1{,}664\text{ km,}}$
celkem trať (rozdíl): 14,4 km.
Odpověď:
Rychlost parníku v klidné vodě je 20,08 km/h.

***Příklad* 3.6.2:**
Motorová loď ujede trať dlouhou 25 km proti proudu za 75 min. Po proudu ujede tutéž trať za 50 min. Jakou rychlostí jede loď a jaká je rychlost proudu (vzhledem k pevné zemi)?

Řešení č. 1: - *pomocí soustavy rovnic*
Označme si rychlost motorové lodi x [km/h], rychlost proudu y [km/h]. Potom vyjdeme ze vztahu $s = v \cdot t$ a dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{array}{l|l} 25 = (x+y)\cdot\frac{5}{6} & \cdot\ 6 \\ \underline{25 = (x-y)\cdot\frac{5}{4}} & \cdot\ 4 \end{array}$$

$$150 = 5x + 5y$$
$$\underline{100 = 5x - 5y}$$
$$250 = 10x \quad \Big| : 10$$
$$\underline{\underline{x = 25}}\ \text{km/h} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y = 5}}\ \text{km/h}$$

Zkouška:
Po proudu jede loď rychlostí 25 + 5 = 30 km/h a za 50 min, tj. $\frac{5}{6}$ h ujede $30 \cdot \frac{5}{6}$ = 25 km.
Proti proudu jede loď rychlostí 25 – 5 = 20 km/h a za 75 min, tj. $\frac{5}{4}$ h ujede $20 \cdot \frac{5}{4}$ = 25 km.
Odpověď:
Loď jede rychlostí 25 km/h, rychlost proudu je 5 km/h.

Řešení č. 2: - *pomocí obecného modelu*
Označme si:
v_1 = rychlost motorové lodi,
v_2 = rychlost proudu;
s_1 = dráhu lodi po proudu,
s_2 = dráhu lodi proti proudu,
t_1 = čas lodi po proudu,
t_2 = čas lodi proti proudu.
Potom platí

$$\begin{array}{l} s_1 = (v_1 + v_2)\cdot t_1 \\ \underline{s_2 = (v_1 - v_2)\cdot t_2} \end{array} \qquad \textbf{(3-7)}$$

a dostáváme model dané situace. Vyjádříme v_1, v_2:

$$s_1 = v_1 t_1 + v_2 t_1$$
$$\underline{s_2 = v_1 t_2 - v_2 t_2}$$

$$v_2 = \frac{s_1 - v_1 t_1}{t_1} \qquad\qquad v_1 = \frac{s_1 - v_2 t_1}{t_1}$$

$$s_2 = v_1 t_2 - \frac{s_1 t_2 - v_1 t_1 t_2}{t_1} \quad \Big| \cdot t_1 \qquad s_2 = \frac{s_1 t_2 - v_2 t_1 t_2}{t_1} - v_2 t_2 \quad \Big| \cdot t_1$$

$$s_2 t_1 = 2 v_1 t_1 t_2 - s_1 t_2 \quad \Big| + s_1 t_2 \qquad s_2 t_1 = s_1 t_2 - 2 v_2 t_1 t_2 \quad \Big| + 2 v_2 t_1 t_2 - s_2 t_1$$

$$2 v_1 t_1 t_2 = s_1 t_2 + s_2 t_1 \quad \Big| : 2 t_1 t_2 \qquad 2 v_2 t_1 t_2 = s_1 t_2 - s_2 t_1 \quad \Big| : 2 t_1 t_2$$

$$v_1 = \frac{s_1 t_2 + s_2 t_1}{2 t_1 t_2} \qquad \textbf{(3-7a)} \qquad v_2 = \frac{s_1 t_2 - s_2 t_1}{2 t_1 t_2} \qquad \textbf{(3-7b)}$$

Je-li $s_1 = s_2 = s$, dostáváme:

$$v_1 = \frac{t_1 + t_2}{2 t_1 t_2} \cdot s \qquad \textbf{(3-7c)} \qquad v_2 = \frac{t_2 - t_1}{2 t_1 t_2} \cdot s\ . \qquad \textbf{(3-7d)}$$

Potom konkrétně $s = 25,\ t_1 = \frac{50}{60} = \frac{5}{6},\ t_2 = \frac{75}{60} = \frac{5}{4}$:

$$v_1 = \frac{t_1 + t_2}{2 t_1 t_2} \cdot s = \frac{\frac{5}{6} + \frac{5}{4}}{2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{4}} \cdot 25 = \underline{\underline{25}} \text{ km/h.}$$

$$v_2 = \frac{t_2 - t_1}{2 t_1 t_2} \cdot s = \frac{\frac{5}{4} - \frac{5}{6}}{2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{4}} \cdot 25 = \underline{\underline{5}} \text{ km/h.}$$

Zkouška a *odpověď* viz řešení č.1.

3.3.7. Skupina 7: *„Doprava v konstantních intervalech“*

Subjekt (*pozorovatel*) *se pohybuje tak, že jej pravidelně potkávají a předjíždějí dopravní prostředky. Máme za úkol spočítat intervaly mezi jednotlivými dopravními prostředky nebo počet těchto prostředků, které pohybujícího se pozorovatele potkají či předjedou.*

***Příklad* 3.7.1:**
Chodec kráčí rychlostí 5 km za hod. podél trati elektrické dráhy. Jestliže v určitém okamžiku potkal vůz elektrické dráhy, po kolika minutách potká druhý, jestliže jezdí vozy v intervalech 5 min. a rychlostí 15 km za hod.? Jestliže v určitém okamžiku jej předjede jeden vůz, po kolika minutách jej předjede druhý vůz?

Řešení:
Vozy elektrické dráhy jezdí v intervalech 5 min, vzdálenost mezi nimi při rychlosti 15 km/h je $(15 : 60) \cdot 5 = 1{,}25$ km. Vůz elektrické dráhy ujede za minutu $15 : 60 = 0{,}25 = \frac{1}{4}$ km, chodec ujde za minutu $5 : 60 = \frac{1}{12}$ km.
Pohybují-li se vůz elektrické dráhy a chodec proti sobě, jejich vzdálenost se zmenší za minutu o $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$ km. Potom vzdálenost $1{,}25 = \frac{5}{4}$ km mezi jednotlivými vozy se zmenší na nulu za $\frac{5}{4} : \frac{1}{3} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ minuty = 3 minuty 45 sekund.
Pohybují-li se vůz elektrické dráhy a chodec za sebou, jejich vzdálenost se zmenší za minutu o $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ km. Potom vzdálenost $1{,}25 = \frac{5}{4}$ km mezi jednotlivými vozy se zmenší na nulu za $\frac{5}{4} : \frac{1}{6} = \frac{30}{4} = 7\frac{1}{2}$ minuty = 7 minut 30 sekund.
Zkouška:
a) Pohyb proti sobě:

Za $3\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$ minuty ujede vůz $\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{15}{16}$ km a chodec ujde $\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{12}=\frac{15}{48}=\frac{5}{16}$ km, dohromady urazí (pohybují se proti sobě, dráhy se sčítají) $\frac{15}{16}+\frac{5}{16}=\frac{20}{16}=\frac{5}{4}$ = 1,25 km.

b) Pohyb za sebou:

Za $7\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$ minuty ujede vůz $\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{15}{8}$ km a chodec ujde $\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{12}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$ km, dohromady urazí (pohybují se za sebou, dráhy se odečítají) $\frac{15}{8}-\frac{5}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$ = 1,25 km.

Odpověď:
Chodec potká vůz elektrické dráhy každé 3 minuty a 45 sekund a v opačném směru jej předjede každých 7 minut a 30 sekund.

Poznámka:
Poměr intervalů a změn rychlostí jsou nepřímo úměrné, tj. čím je změna rychlosti větší, tím je interval kratší. Platí $7\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}$ = (15 + 5) : (15 – 5) = 2 : 1.

***Příklad* 3.7.2:**
Mezi dvěma stanicemi vzdálenými 10 km jezdí tramvaje v mezidobích 5 min. rychlostí 15 km za hodinu v obou směrech; vyjíždět začnou současně z obou konečných stanic. Z prvé stanice vyjde současně s jednou tramvají chodec rychlostí 5 km. Kolik tramvají potká a od kolika bude předhoněn, než dojde do druhé stanice?

Řešení: - *úsudek* I
Vzdálenost 10 km mezi stanicemi ujde chodec rychlostí 5 km/h za 10 : 5 = 2 hodiny. Za tyto 2 hodiny vyjede z konečné stanice v pětiminutových intervalech celkem 120 : 5 = 24 tramvají. Z toho bude 23 na trase, 24. bude již v cíli (na druhé konečné) a 25. bude připravena k výjezdu. Musíme ještě připočítat tramvaje, které jsou již na trase 10 km. Vzdálenost mezi nimi je 1,25 km (viz příklad 3.7.1) a je jich 10 : 1,25 = 8.
Chodec tedy potká 23 + 8 = 31 tramvají na cestě a 32. při výjezdu.
Stejně tak musíme při předhánění 8 tramvají odečíst (stejná úvaha jako při potkávání) a chodce předhoní 23 – 8 = 15 tramvají, 16. jej dohoní na konečné.

Řešení: - *úsudek* II
Chodec ujde vzdálenost 10 km za 2 hodiny.
Za tuto dobu vyjede z obou konečných 2 · (120 : 5) = 48 tramvají. O co více tramvají potká, o to méně jich chodce předjede. Víme, že poměr počtu tramvají, které chodce potkají a které jej předhoní, je roven poměru součtu a rozdílu rychlostí tramvaje a chodce (v tomto pořadí). Poměr je $x : y$ = (15 + 5) : (15 – 5) = 2 : 1. Rozdělíme 48 v poměru 32 a 16.
Z toho plyne, že 32 tramvají chodce potká (32. při výjezdu z konečné) a 16 jej dohoní (16. na konečné).

3.3.8. Skupina 8: *„Zvláštní pohyby po neuzavřené dráze“*

Jedná se o pohyby, které lze jen velmi těžko popsat. Často se jedná o kombinaci pohybů nebo o pohyb soupravy mající danou délku. Nejčastěji počítáme délku soupravy nebo její rychlost.

***Příklad* 3.8.1:**
Po silnici jede pomalu povoz s dlouhým kmenem. Od předního k zadnímu konci potřebujeme 16 kroků, od zadního k přednímu (při stálé rychlosti naší i povozu) 112 kroků. Kolik kroků délky má kmen?

Řešení č. 1:
Označme si d – délku kmene (v krocích). Uděláme-li jeden krok, popojede povoz s kmenem o p našich kroků. Než uděláme 112 kroků, posune se konec kmene k němuž kráčíme o $112p$ kroků. Délka našich 112 kroků je rovna $d + 112p$ a platí

$$112 = d + 112p.$$

Jdeme-li obráceným směrem, je třeba 16 kroků. Mezitím se druhý konec kmene přiblíží o délku $16p$ a platí rovnost

$$16 = d - 16p.$$

Dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 112 &= d + 112p \\ \underline{16} &\underline{= d - 16p} \quad \Big| \cdot 7 \\ 224 &= 8d \quad \Big| : 8 \\ \underline{\underline{d}} &\underline{\underline{= 28}} \text{ [kroků]} \end{aligned}$$

Řešení č. 2: - *pomocí obecného modelu*
Označme si opět d – délku kmene, p – počet kroků o které se posune kmen během našeho jednoho kroku, a – počet kroků, které uděláme od zadního konce kmene k přednímu, b – počet kroků, které uděláme od předního konce kmene k zadnímu ($a > b$), potom stejnými úvahami jako v případě předchozím dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a &= d + ap \quad \Big| \cdot b \\ \underline{b} &\underline{= d - bp} \quad \Big| \cdot a \\ ab &= bd + abp \\ \underline{ab} &\underline{= ad - abp} \\ 2ab &= ad + bd \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{d = \frac{2ab}{a+b}}} \qquad \textbf{(3-8)}$$

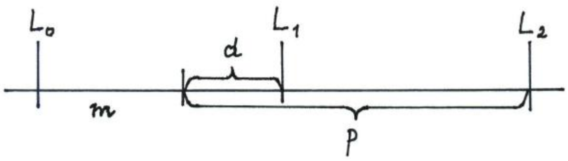
V našem konkrétním případě dostáváme $a = 112$ kroků, $b = 16$ kroků

$$d = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2 \cdot 16 \cdot 112}{16 + 112} = \underline{\underline{28}} \text{ kroků.}$$

***Příklad* 3.8.2:**
Vlak jede přes most 396 m dlouhý. Od okamžiku, kdy lokomotiva vjede na most, až do okamžiku, kdy poslední vůz jej opustí, uplyne 21 vteř.; od tohoto okamžiku pak potřebuje vlak ještě 41 vteř., než lokomotiva dojede k terči stojícímu ve vzdálenosti 1 092 m od mostu. Jak dlouhý je vlak, jakou rychlostí se pohybuje?

Řešení č. 1: - *úsudek*
Vlak jede neznámou rychlostí v. Od okamžiku, kdy vjede lokomotiva na most až do okamžiku, kdy mine terč, uplyne 21 + 41 = 62 sekund. Za tuto dobu ujede 396 + 1 092 = 1 488 metrů. Vlak jede rychlostí $v = 1\,488 : 62 = 24$ m/s.

Obr. 3-9:



Za 21 s ujede lokomotiva vzdálenost $24 \cdot 21 = 504$. Toto je vzdálenost, která je rovna součtu délky mostu a délky vlaku. Délka vlaku je 504 – 396 = 108 m.
Zkouška:
Za 21s ujede lokomotiva vzdálenost $24 \cdot 21 = 504$ m, která je rovna součtu délky mostu a délky vlaku, je to vzdálenost 396 + 108 = 504 m.
Za 41 s ujede lokomotiva vzdálenost $24 \cdot 41 = 984$ m, která je rovna rozdílu vzdálenosti terče od mostu a délky vlaku, je to vzdálenost 1 092 – 108 = 984 m.
Odpověď:
Vlak je dlouhý 108 m a pohybuje se rychlostí 24 m/s.

Řešení č. 2: - *pomocí obecného modelu*
Označme si délku mostu m, délku vlaku d, vzdálenost konce mostu od terče p a rychlost vlaku v. Lokomotiva je na počátku pohybu na začátku mostu v poloze L_0. Za čas $t_1 = 21$ s přejede lokomotiva most a ještě ujede vzdálenost, která se rovná délce vlaku. Dostává se do polohy L_1 a její dráha je $(m + d)$. Platí

$$m + d = v \cdot t_1.$$

Za čas $t_2 = 41$ s se lokomotiva dostává do polohy L_2 a ujede dráhu, která je rovna rozdílu vzdálenosti terče od konce mostu a velikosti délky vlaku. Platí

$$p - d = v \cdot t_2.$$

Matematizací reálné situace dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} m + d &= v \cdot t_1 \\ \underline{p - d} &\underline{= v \cdot t_2}, \end{aligned}$$

která je modelem dané situace.
Sečtením rovnic dostáváme

$$m + p = v \cdot (t_1 + t_2),$$

odkud vyjádříme rychlost v:

$$\underline{\underline{v = \frac{m + p}{t_1 + t_2}}}, \qquad \textbf{(3-9)}$$

kde m, p, t_1, t_2 jsou konstanty určené zadáním.
Dále vyjádříme délku mostu d:

$$d = v \cdot t_1 - m = \frac{m + p}{t_1 + t_2} \cdot t_1 - m = \frac{mt_1 + pt_1 - mt_1 - mt_2}{t_1 + t_2} = \frac{pt_1 - mt_2}{t_1 - t_2}$$

a dostáváme

$$\underline{\underline{d = \frac{pt_1 - mt_2}{t_1 + t_2}}}, \qquad \textbf{(3-10)}$$

kde $pt_1 > mt_2$. Je-li $pt_1 \leq mt_2$, úloha nemá řešení.
V našem případě je $m = 396$ m, $p = 1\,092$ m, $t_1 = 21$ s, $t_2 = 41$ s. Potom

$$v = \frac{m + p}{t_1 + t_2} = \frac{396 + 1\,092}{21 + 41} = \underline{\underline{24}} \text{ m/s};$$

$$d = \frac{pt_1 - mt_2}{t_1 + t_2} = \frac{1\,092 \cdot 21 - 396 \cdot 41}{21 + 41} = \underline{\underline{108}} \text{ m.}$$

Zkouška a *odpověď* – viz řešení č. 1.

3.3.9. <u>Skupina 9:</u> *„Pohyb po uzavřené* (*kruhové*) *dráze"*

Po kruhu se pohybuje jeden nebo více subjektů. Pokud je subjektů více, mohou se pohybovat proti sobě, za sebou nebo kombinací těchto směrů. Počítáme rychlosti subjektů, čas strávený na dráze nebo délku dráhy.

***Příklad* 3.9.1:**

Po okruhu dlouhém 2 550 m jezdí 2 motocykly takovými rychlostmi, že se potkávají každou minutu jezdí-li proti sobě a dohánějí se každých 5 minut, jezdí-li týmž směrem. Určete jejich rychlosti.

Řešení č. 1:

a) Nejprve jezdí proti sobě, pro prvního platí $s_1 = v_1 \cdot t_1$, pro druhého platí $s_2 = v_2 \cdot t_2$ a pro jejich dráhy platí $s_1 + s_2 = 2\,500$, dále platí $t_1 = t_2 = 60$, z čehož plyne

$$60v_1 + 60v_2 = 2\,550.$$

b) Potom jezdí za sebou, pro prvního platí $s_1´ = v_1 \cdot t_1´$, pro druhého platí $s_2´ = v_2 \cdot t_2´$ a pro jejich dráhy platí $s_1´ - s_2´ = 2500$, dále platí $t_1´ = t_2´ = 300$ (tj. mění se dráhy a časy obou, jejich rychlosti zůstávají; předpokládáme, že první je rychlejší), z čehož plyne

$$300v_1 - 300v_2 = 2\,550.$$

Dostáváme soustavu rovnic pro neznámé rychlosti

$$\begin{aligned} 60v_1 + 60v_2 &= 2\,550 \quad &|: 60 \\ \underline{300v_1 - 300v_2} &\underline{= 2\,550} \quad &|: 300 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= 42{,}5 \\ \underline{v_1 - v_2} &\underline{= 8{,}5} \end{aligned}$$

$$2v_1 = 51 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{v_1 = 25{,}5}} \text{ [m/s] = 1,53 km/min = 91,8 km/h}$$

$$v_2 = 42{,}5 - 25{,}5 = \underline{\underline{17}} \text{ [m/s] = 1,02 km/min = 61,2 km/h}$$

Zkouška:

Za minutu ujedou: první = $25{,}5 \cdot 60$ = 1 530 m,
druhý = $17 \cdot 60$ = 1 020 m,
celkem součet = 1 530 + 1 020 = 2 550 m.
Za 5 minut ujedou: první = $25{,}5 \cdot 300$ = 7 650 m,
druhý = $17 \cdot 300$ = 5 100 m,
celkem rozdíl = 7 650 – 5 100 = 2 550 m.

Odpověď:

Rychlosti motocyklů jsou 25,5 m/s a 17 m/s.

Řešení č. 2:

Platí stejné vztahy jako v případě, že je dráha neuzavřená (viz příklad 3.5.2)

$$v_1 = \underline{\underline{\frac{s \cdot (t' + t)}{2tt'}}} \qquad (3\text{-}6a) \qquad v_2 = \underline{\underline{\frac{s \cdot (t' - t)}{2tt'}}} \qquad (3\text{-}6b)$$

V našem konkrétním případě je $d = 2\,550$ m, $t = 60$ s, $t' = 300$ s,

$$v_1 = \frac{s \cdot (t' + t)}{2tt'} = \frac{2\,550 \cdot (300 + 60)}{2 \cdot 60 \cdot 300} = \underline{\underline{25{,}5}} \text{ m/s},$$

$$v_2 = \frac{s \cdot (t' - t)}{2tt'} = \frac{2\,550 \cdot (300 - 60)}{2 \cdot 60 \cdot 300} = \underline{\underline{17}} \text{ m/s}.$$

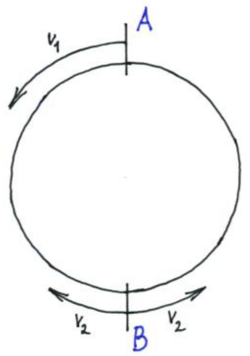
Zkouška a *odpověď* stejně jako v řešení 1.

***Příklad* 3.9.2:**

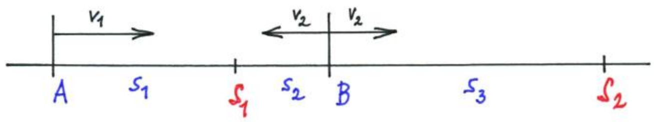
Na kruhové dráze vyjeli od startu proti sobě dva cyklisté, kteří jedou stejnou rychlostí. Z protějšího bodu kruhové dráhy vyjede současně motocyklista a potká prvního cyklistu za 30 sekund a druhého dohoní za 1 minutu a 30 sekund. Určete jakou rychlostí jedou oba cyklisté a jak dlouhá je kruhová dráha, je-li známo, že motocyklista jel rychlostí 60 km/h.

Řešení:

Obr. 3-10:



Obr. 3-11:



Kruhovou dráhu si rozvineme do přímky (viz obr. 3-10 a 3-11). Dále převedeme na stejné jednotky (m, s). Rychlost motocyklisty 60 km/h = $16\frac{2}{3}$ m/s. Jednotlivé dráhy označíme

s_1, s_2, s_3 a platí pro ně

$s_1 = v_1 \cdot t_1 \qquad s_2 = v_2 \cdot t_2 \qquad s_3 = v_3 \cdot t_3$,

dosadíme známé hodnoty a dostáváme

$s_1 = \frac{50}{3} \cdot 30 = 500$ m $\qquad s_2 = v_2 \cdot 30 \qquad s_3 = v_2 \cdot 90$.

Protože motocyklista dohoní druhého cyklistu v bodě S_2, platí pro součet drah

$$s_1 + s_2 + s_3 = 90 \cdot v_1 = 90 \cdot \tfrac{50}{3} = 1\,500 \text{ m}.$$

Potom platí

$$s_2 + s_3 = 1\,500 - 500 = 1\,000 \text{ m}$$

ale také platí

$$s_2 + s_3 = 30v_2 + 90v_2 = 120v_2.$$

Z toho plyne

$$120v_2 = 1\,000 \quad \Big| : 120$$

$$v_2 = \tfrac{25}{3} = 8\tfrac{1}{3} \text{ m/s} = \underline{30 \text{ km/h}}\,.$$

Délka kruhové dráhy je dvojnásobek vzdálenosti AB, tedy

$$o = 2 \cdot (s_1 + s_2);$$

$s_1 = 500$ m, $s_2 = v_2 \cdot t_2 = \frac{25}{3} \cdot 30 = 250$ m;

$o = 2 \cdot (500 + 250) = \underline{\underline{1\,500 \text{ m}}}$.

Zkouška:

Za 30 s ujede motocyklista $\frac{50}{3} \cdot 30 = 500$ m a první cyklista $\frac{25}{3} \cdot 30 = 250$ m, dohromady ujedou 500 + 250 = 750 m, což je polovina kruhové dráhy (startují v kruhu proti sobě).
Za 90 s ujede motocyklista $\frac{50}{3} \cdot 90 = 1\,500$ m a druhý cyklista $\frac{25}{3} \cdot 90 = 750$ m, rozdíl drah je 1 500 – 750 = 750 m, což je opět polovina kruhové dráhy (i zde startují v kruhu proti sobě).

Odpověď:

Kruhová dráha je dlouhá 1 500 m a oba cyklisté jedou rychlostí 30 km/h.

3.3.10. <u>Skupina 10:</u> *„Pohyb v rovině“*

Subjekty se v rovině mohou pohybovat po kolmicích, po různoběžných přímkách, které nejsou kolmé, po stranách trojúhelníku nebo mohou vykonávat jiný pohyb v rovině. Nejčastěji počítáme vzdálenosti subjektů.

***Příklad* 3.10.1:**

Dva cestující vyšli současně z téhož místa, jeden k východu, druhý k severu. První ušel denně o 8 km více než druhý a za 5 dní byli od sebe vzdáleni 200 km. Kolik ušel každý z nich denně?

<u>*Řešení*</u>:

Ušel-li druhý cestující denně x km, potom první cestující ušel denně dráhu $(x + 8)$ km. První ušel za 5 dní celkem dráhu $s_1 = 5 \cdot (x + 8)$ km, druhý ušel za 5 dní celkem dráhu $s_2 = 5x$ km. Protože jejich směry pohybu jsou na sebe kolmé, platí

$$s_1^2 + s_2^2 = 200^2$$
$$[5 \cdot (x + 8)]^2 + [5x]^2 = 200^2$$
$$(5x + 40)^2 + (5x)^2 = 200^2$$
$$25x^2 + 400x + 1\,600 + 25x^2 = 40\,000 \quad \Big| - 40\,000$$
$$50x^2 + 400x - 38\,400 = 0 \quad \Big| : 50$$
$$x^2 + 8x - 768 = 0$$
$$(x - 24) \cdot (x + 32) = 0$$
$$x_1 = 24,\ x_2 = -32 \ \ \ldots \text{ není řešení (je záporné).}$$
$$\underline{x = 24} \quad \rightarrow \quad \underline{x + 8 = 32}.$$

Zkouška:

První cestující ujde za 5 dní $5 \cdot 32 = 160$ km, druhý cestující $5 \cdot 24 = 120$ km a budou vzdáleni $d = \sqrt{160^2 + 120^2} = 200$ km.

Odpověď:

První cestující ušel denně 32 km, druhý 24 km.

***Příklad* 3.10.2:**

Tři místa A, B, C tvoří vrcholy trojúhelníku, při C pravoúhlého. Z A vyjel v 8 hod. ráno povoz rychlostí 10 km, zastavil na 36 min. v C a dojel v poledne do B. Ve $\frac{3}{4}$ 9 vyjel z A jiný povoz rychlostí 8 km přímo do B, kam dojel také v poledne. Jaké jsou vzdálenosti těchto tří míst?

Řešení:
Povoz z *A* do *C* přes *B* jel celkem 3 h 24 min, což je 3,4 h. za tuto dobu ujel dráhu $s_1 = v_1 \cdot t_1 = 10 \cdot 3{,}4 = 34$ km. Druhý povoz, který jel přímo z *A* do *C*, jel 3,25 h a ujel dráhu $s_2 = v_2 \cdot t_2 = 8 \cdot 3{,}25 = 26$ km. Označíme-li si klasickým způsobem strany trojúhelníka *ABC*, dostáváme:

$$a + b = 34$$
$$c = 26$$

a platí Pythagorova věta (pravý úhel je při vrcholu *C*). Řešíme soustavu rovnic

$$a + b = 34 \quad \rightarrow \quad a = 34 - b$$
$$\underline{a^2 + b^2 = 26^2}$$
$$(34 - b)^2 + b^2 = 26^2$$
$$1\,156 - 68b + b^2 + b^2 = 676 \quad \Big| - 676$$
$$2b^2 - 68b + 480 = 0 \quad \Big| : 2$$
$$b^2 - 34b + 240 = 0 \quad \ldots \quad D = 196, \quad \sqrt{D} = 14$$
$$b_{12} = \frac{34 \pm 14}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \underline{10} \\ \underline{24} \end{cases}.$$

Je-li a) $b_1 = 10 \quad \rightarrow \quad a_1 = 24$,
b) $b_2 = 24 \quad \rightarrow \quad a_2 = 10$,
z čehož plyne, že úloha má dvě řešení.
Zkouška:
Zkouška vyplývá z vlastností trojúhelníka a z Pythagorovy věty.
Odpověď:
Z *A* do *B* je 26 km, z *A* do *C* je 10 km nebo 24 km, z *B* do *C* je 24 km nebo 10 km.

3.3.11. Skupina 11: *„Pohyb v prostoru a komplexní úlohy"*

Subjekty se mohou v prostoru pohybovat jakýmkoliv způsobem. Pokud je úloha komplexní, počítají se často i veličiny, které pouze s pohybem souvisí nebo jsou jeho důsledkem. Jinak počítáme veličiny, které pohyb určují. Úlohy tohoto typu se ve sbírkách vyskytují jen zřídka.

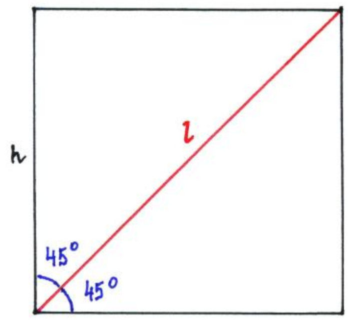
***Příklad* 3.11.1:**
Liána obmotává kmen (dřevinu) pod úhlem 45° od země. Rychlost proudění vody ze země do vrchních částí liány je $v_1 = 4{,}5\ \mathrm{m \cdot h^{-1}}$, rychlost proudění v dřevině je $v_2 = 3{,}5\ \mathrm{m \cdot h^{-1}}$. V které rostlině se voda dostane dříve do výšky $h = 30$ m?

Řešení:
Řešení zpracováno podle [58], str. 5.
V dřevině je rychlost proudění vody $v_2 = 3{,}5\ \mathrm{m \cdot h^{-1}}$, výška je $h = 30$ m a doba potřebná, aby se voda dostala až do této výšky je

$$t_2 = \frac{h}{v_2} = \frac{30}{3{,}5} \doteq 8{,}57 \text{ h},$$

což je asi 8 h 34 min.

Obr. 3-12:



Protože liána obtáčí dřevinu (předpokládáme, že kmen je válcový), tvoří šroubovici. Rozvineme-li povrch dřeviny do plochy, změní se šroubovice na přímku (či lépe její část). Tato přímka svírá se svislým směrem úhel 45° (viz obr. 3-12). Aby se liána dostala do výšky 30 m, musí být dlouhá l m. Pro l platí:

$$\sin 45° = \frac{h}{l} \quad \rightarrow \quad l = \frac{h}{\sin 45°} = \frac{30}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 30\sqrt{2} \doteq 42{,}426 \text{ m.}$$

V liáně je rychlost proudění vody $v_1 = 4{,}5 \text{ m} \cdot \text{h}^{-1}$, výška je $l \doteq 42{,}426$ m a doba potřebná, aby se voda dostala až do této výšky je

$$t_1 = \frac{l}{v_1} = \frac{30\sqrt{2}}{4{,}5} \doteq 9{,}43 \text{ h,}$$

což je asi 9 h 26 min. Doba je kratší v případě dřeviny.
Zkouška:
Zkouška vyplývá z vlastností uvedených pohybů. Výsledek je zdůvodněn též v poznámce.
Odpověď:
Voda dosáhne požadovanou výšku dříve u dřeviny (asi o půl hodiny).

Poznámka:
V dřevině bude voda v požadované výši dříve, platí-li $v_1 < v_2\sqrt{2}$ (toto zde platí). Na výšce, do které má voda v obou rostlinách vystoupit, nezáleží.

***Příklad* 3.11.2:**
Stulík žlutý (Nuphar lutea) roste v rybníce, jeho květ je ve výšce 20 cm nad hladinou vody. Hustota jeho stonku je $0{,}8 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, průměr stonku 2 cm. Když zafouká vítr, celý stulík se ohne a květ je přímo na hladině ve vzdálenosti 80 cm od místa, kde původně rostlina hladinu prorážela. Uvažujme, že se stonek ohýbá pouze na jediném místě, a to těsně u dna. Vypočítejte, jaká je hmotnost ponořené části stonku, když nefouká vítr.

Řešení:
Řešení zpracováno podle [58], str. 5.
Označme si délku stonku x, potom délka stonku, který je ve vodě (při bezvětří) je $(x - 20)$. Potom platí:

$$x^2 = (x - 20)^2 + 80^2$$
$$x^2 = x^2 - 40x + 400 + 6\,400 \quad \Big| -x^2 + 40x$$
$$40x = 6\,800 \quad \Big| :40$$
$$\underline{x = 170} \text{ cm} \quad \rightarrow \quad \underline{x - 20 = 150} \text{ cm.}$$

Nyní vypočteme objem ponořené části podle vzorce

$$V = \pi r^2 v = \pi \cdot 1^2 \cdot 150 = 150\pi \doteq 471{,}2 \text{ cm}^3.$$

Nyní vypočteme hmotnost této části opět podle vzorce

$$m = \rho \cdot V = 0{,}8 \cdot 471{,}2 \doteq \underline{\underline{377}} \text{ g}.$$

Zkouška:
Zkouška vyplývá z platnosti vzorců (včetně Pythagorovy věty).
Odpověď:
Hmotnost ponořené části stonku při bezvětří je asi 377 g.

3.4. Slovní úlohy o směsích

Slovní úlohy o směsích jsou členěny podle počtu složek, které obsahují a jsou doplněny úlohami, kdy jsou směsi v různých situacích nebo jsou nedostatečně určeny. Nejčastěji jsou tyto úlohy řešeny pomocí soustav rovnic, i když je také můžeme řešit pomocí jedné rovnice, pomocí úsudku apod. K řešení těchto úloh můžeme použít též obecných modelů.

3.4.1. Skupina 1: *„Úlohy o směsích se dvěma složkami“*

Úlohy obsahují zadání o směsích (slitinách, roztocích) se dvěma složkami. Proto je lze vyjádřit soustavou dvou rovnic pro dvě neznámé, které také počítáme. K řešení úloh samozřejmě můžeme využít i jiných metod včetně užití obecných modelů. Tyto úlohy někteří autoři ještě dále člení, ale toto členění je příliš podrobné, v některých podskupinách je těžké vůbec najít vhodné úlohy, a proto další členění neprovádím.

***Příklad* 4.1.1:**
Deset litrů moštu je uskladněno ve 13 lahvích, v některých je 0,7 litru, v některých 1 litr. Kolik je menších a kolik větších lahví?

Řešení č. 1:
Označme si počet lahví po 0,7 litru x, počet lahví po 1 litru y. Potom můžeme situaci matematizovat takto:

$$\begin{aligned} x + y &= 13 \\ \underline{0{,}7 \cdot x + y = 10} &\quad \big| \cdot (-1) \\ 0{,}3x &= 3 \quad \big| \cdot \tfrac{10}{3} \\ \underline{\underline{x = 10}} &\quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y = 3}} \end{aligned}$$

Zkouška:
V 10 menších lahvích je $10 \cdot 0{,}7 = 7$ l moštu, ve 3 větších lahvích je $3 \cdot 1 = 3$ l moštu, celkem je v lahvích $7 + 3 = 10$ l moštu.
Odpověď:
Menších lahví po 0,7 l je 10, větší lahve po 1 l jsou 3.

Řešení č. 2:
V předchozím řešení jsme použili soustavu rovnic. Stejně tak můžeme úlohu řešit pomocí jedné rovnice. Označme si počet lahví po 0,7 litru x, potom počet lahví po 1 litru bude $(13 - x)$ a platí

$$0{,}7 \cdot x + 1 \cdot (13 - x) = 10$$
$$0{,}7x + 13 - x = 10 \quad \Big| -13$$
$$-0{,}3x = -3 \quad \Big| \cdot \left(-\tfrac{10}{3}\right)$$
$$\underline{\underline{x = 10}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y = 3}}$$

Řešení č. 3:

Můžeme také vyjít ze vztahů (4-1c): $m_1 = \dfrac{c - c_2}{c_1 - c} \cdot m_2$ a (4-1d): $m = \dfrac{c_1 - c_2}{c_1 - c} \cdot m_2$ (viz příloha 1), kde $m = 13$, $cm = 10$, $c = \dfrac{cm}{m} = \frac{10}{13}$, $c_1 = 0{,}7$, $c_2 = 1$, a dostáváme:

$$m_1 = \frac{c - c_2}{c_1 - c} \cdot m_2 = \frac{\frac{10}{13} - 1}{0{,}7 - 1} \cdot 13 = \underline{\underline{10}}, \quad m = \frac{c_1 - c_2}{c_1 - c} \cdot m_2 = \frac{\frac{10}{13} - 0{,}7}{1 - 0{,}7} \cdot 13 = \underline{\underline{3}}.$$

Zkouška a *odpověď* viz řešení č. 1.

***Příklad* 4.1.2:**
V zásilce byly účtovány knižní publikace dvojího druhu v celkové ceně 9 661 Kč. Publikace prvního druhu byla za 129 Kč, publikace druhého druhu za 158 Kč. Kolik publikací každého druhu bylo v zásilce, bylo-li dražších o 23 více?

Řešení:

Hledané množství publikací m_1, m_2 vypočteme podle vztahů (4-2a): $m_1 = \dfrac{cm + c_2 r}{c_1 + c_2}$, (4-2b): $m_2 = \dfrac{cm - c_1 r}{c_1 + c_2}$ (viz příloha 1). Musíme dát pozor na označení, protože zde je důležité pořadí.
Jako první budeme brát publikace, kterých je víc (předpokládá se, že $m_1 > m_2$).
Potom je v našem případě $c_1 = 158$ Kč, $c_2 = 129$ Kč, $cm = 9\,661$ Kč, $r = 23$ ks a dostáváme

$$m_1 = \frac{cm + c_2 r}{c_1 + c_2} = \frac{9\,661 + 129 \cdot 23}{158 + 129} = \underline{\underline{44}} \text{ ks.}$$

$$m_2 = \frac{cm - c_1 r}{c_1 + c_2} = \frac{9\,661 - 158 \cdot 23}{158 + 129} = \underline{\underline{21}} \text{ ks.}$$

Zkouška:
Publikace 1. druhu stojí celkem $21 \cdot 129 = 2\,709$ Kč,
publikace 2. druhu stojí celkem $44 \cdot 158 = 6\,952$ Kč,
celkem stojí všechny publikace $2\,709 + 6\,952 = 9\,661$ Kč.
Odpověď:
Publikací prvního druhu za 129 Kč bylo 21 ks, publikací druhého druhu za 158 Kč pak bylo 44 ks.

3.4.2. <u>Skupina 2:</u> *„Úlohy o směsích se třemi a více složkami“*

Úlohy obsahují zadání o směsích (slitinách, roztocích) se třemi a více složkami. Přesto je vyjadřujeme soustavou nejčastěji dvou rovnic pro dvě neznámé, protože právě tyto dvě neznámé počítáme. K řešení těchto úloh můžeme použít i jiných metod. Tyto úlohy lze také dále členit. Protože toto členění je velmi variabilní, v literatuře se téměř nevyskytuje.

***Příklad* 4.2.1:**
Máme tři druhy kyseliny octové: 15%, 30% a 50%. Kolikaprocentní kyselinu dostaneme, smícháme-li z prvého 3 litry, z druhého 5 litrů a ze třetího 8 litrů?

Řešení č. 1:
První kyselina obsahuje $3 \cdot 0{,}15 = 0{,}45$ litru stoprocentní kyseliny octové,
druhá kyselina obsahuje $5 \cdot 0{,}0{,}30 = 1{,}50$ litru stoprocentní kyseliny octové,
třetí kyselina obsahuje $8 \cdot 0{,}50 = 4{,}00$ litru stoprocentní kyseliny octové,
dohromady obsahují $0{,}45 + 1{,}50 + 4{,}00 = 5{,}95$ litru stoprocentní kyseliny octové.
Protože jsme dostali celkem 16 litrů kyseliny octové, je její koncentrace rovna
$\frac{5{,}95}{16} \cdot 100 \doteq 37{,}2\%$.
Zkouška:
Viz řešení č. 2.
Odpověď:
Dostaneme asi 37,2% kyselinu octovou.

Řešení č. 2:
K řešení úlohy užijeme obecného modelu a z něho vyplývajícího vztahu (4-11c) (viz příloha 1):
$c = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3}{m}$ (viz příloha 1), kde $c_1 = 0{,}15$, $c_2 = 0{,}3$, $c_3 = 0{,}5$, $m_1 = 3$, $m_2 = 5$, $m_3 = 8$, $m = 16$ a dostáváme
$c = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3}{m} = \frac{0{,}15 \cdot 3 + 0{,}3 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 8}{16} = \frac{595}{1\,600} = 0{,}371\,875$,
což je asi 37,2%.
Zkouška:
První kyselina obsahuje $0{,}15 \cdot 3 = 0{,}45$ *l* octa (100%-ního octa, stejně i dále), druhá kyselina obsahuje $0{,}30 \cdot 5 = 1{,}5$ *l* octa, třetí kyselina obsahuje $0{,}5 \cdot 8 = 4$ *l* octa, celkem všechny tři kyseliny obsahují $0{,}45 + 1{,}5 + 4 = 5{,}95$ *l* octa.
Výsledná kyselina obsahuje $0{,}371875 \cdot 16 = 5{,}95$ *l* octa.
Odpověď:
Dostaneme asi 37,2% kyselinu octovou.

***Příklad* 4.2.2:**
Kolik litrů 8%-ního octa musíme přilít do roztoku, který vznikl nalitím 10 *l* vody do 10 *l* 4%-ního octa, aby vznikl ocet 3 %-ní?

Řešení:
K řešení úlohy užijeme modelu a z něho vyplývajícího vztahu (4-11a) (viz příloha 1) kde c_1 = 8%, c_2 = 4%, c_3 = 0%, c = 3%, m_2 = 10 l, m_3 = 10 l a dostáváme

$$m_1 = \frac{cm_2 + cm_3 - c_2m_2 - c_3m_3}{c_1 - c} = \frac{3\cdot 10 + 3\cdot 10 - 4\cdot 10 - 0\cdot 10}{8-3} = \underline{\underline{4}}\ l.$$

Zkouška:
4 l 8%-ního roztoku obsahuje $4\cdot 0{,}08$ = 0,32 l octa (100%-ního), 10 l 4%-ního roztoku obsahuje $10\cdot 0{,}04$ = 0,4 l octa (100%-ního), a voda neobsahuje žádný ocet, celkem obsahuje roztok 0,32 + 0,4 = 0,72 l octa (100%-ního).
24 l 3%-ního roztoku obsahuje $24\cdot 0{,}03$ = 0,72 l octa (100%-ního).
Odpověď:
Do roztoku musíme přilít 4 litry 8%-ního octa.

Poznámka:
V příkladu 4.2.1 dosazujeme procenta jako poměrnou část (tedy setinu hodnoty, kterou jsou procenta vyjádřena), v příkladu 4.2.2 dosazujeme procenta jako hodnotu. Vzhledem k tomu, že dosazujeme jak do čitatele, tak do jmenovatele zlomku, není rozhodující, kterou z variant volíme. Pokud bychom dosazovali buď jen do čitatele, nebo jen do jmenovatele zlomku, musíme procenta vyjádřit jako poměrnou část.

3.4.3. Skupina 3: *„Úlohy o směsích v různých situacích"*

Úlohy obsahují zadání o směsích (slitinách, roztocích) se dvěma a více složkami ve dvou nebo více různých situacích. Lze je vyjádřit soustavou dvou a více rovnic a počítáme dvě nebo více neznámých.

***Příklad* 4.3.1:**
Kolik stojí jeden kilogram každého druhu zboží, když 3 kg zboží C a 5 kg zboží D stojí 180 Kč a 6 kg zboží C a 4 kg zboží D stojí 180 Kč?

Řešení č. 1: - *pomocí soustavy rovnic*
Cenu za 1 kg zboží C označme x, cenu za 1 kg zboží D označme y, potom platí

$$\begin{array}{rl|l} 3x + 5y = 180 & \cdot\ 4 & \cdot\ (-2) \\ \underline{6x + 4y = 180} & \cdot\ (-5) & \end{array}$$

$$-18x = -180 \quad \Big|\ :(-18) \qquad -6y = -180 \quad \Big|\ :(-6)$$

$$\underline{\underline{x = 10}}\ \text{Kč} \qquad\qquad \underline{\underline{y = 30}}\ \text{Kč}$$

Zkouška:
3 kg zboží C a 5 kg zboží D stojí $3\cdot 10 + 5\cdot 30$ = 180 Kč,
6 kg zboží C a 4 kg zboží D stojí $6\cdot 10 + 4\cdot 30$ = 180 Kč.
Odpověď:
Kilogram zboží C stojí 10 Kč, kilogram zboží D stojí 30 Kč.

Řešení č. 2: - *pomocí obecného modelu*
Užijeme modelu (4-12) a jeho vztahů (viz příloha 1)

(4-12a): $c_1 = \dfrac{lm_2 - km_4}{m_2m_3 - m_1m_4}$, (4-12b): $c_2 = \dfrac{km_3 - lm_1}{m_2m_3 - m_1m_4}$,

kde $m_1 = 3,\ m_2 = 5,\ m_3 = 6,\ m_4 = 4,\ k = 180,\ l = 180$.
Potom

$$c_1 = \frac{lm_2 - km_4}{m_2 m_3 - m_1 m_4} = \frac{180 \cdot 5 - 180 \cdot 4}{5 \cdot 6 - 3 \cdot 4} = \underline{\underline{10 \text{ Kč}}}.$$

$$c_2 = \frac{km_3 - lm_1}{m_2 m_3 - m_1 m_4} = \frac{180 \cdot 6 - 180 \cdot 3}{5 \cdot 6 - 3 \cdot 4} = \underline{\underline{30 \text{ Kč}}}.$$

Zkouška a *odpověď* viz řešení č. 1.

***Příklad* 4.3.2:**

Slitina mědi a zinku váhy 124 gramů ztrácí při vnoření do vody 15 gramů své váhy. Kolik gramů každého kovu je obsaženo v slitině, jestliže 89 gramů mědi ztrácí ve vodě 10 gramů své váhy a 7 gramů zinku ztrácí ve vodě 1 gram své váhy?

Řešení:

Řešení zpracováno podle [46], str. 31
Nejdříve si vytvoříme obecný model, zadané hodnoty označme takto:
h [g] – celková hmotnost (váha) slitiny (h = 124 g),
z [g] – hmotnost (váha) slitiny, která se ztrácí ponořením do vody (z = 15 g);
hmotnost p [g] prvního kovu ztrácí a [g] (p = 89g, a = 10g),
hmotnost q [g] druhého kovu ztrácí b [g] (q = 7g, b = 1g).
Neznámou hmotnost prvního kovu označme x [g], neznámou hmotnost druhého kovu y [g].
Potom platí $x + y = h$.
Podle Archimédova zákona je těleso nadlehčováno v kapalině silou, která se rovná váze kapaliny tělesem vytlačené. Poněvadž hustota vody je 1, je objem číselně roven váze vytlačené vody. Hustotu prvního kovu (mědi) označme ρ_1, hustotu druhého kovu (zinku) označme ρ_2.
Potom platí $p = a \cdot \rho_1,\ \ q = b \cdot \rho_2$.
Vyjádříme si $\rho_1,\ \rho_2$: $\rho_1 = \dfrac{p}{a}, \quad \rho_2 = \dfrac{q}{b}$.
x [g] prvního kovu zaujímá objem $\dfrac{x}{\rho_1} = \dfrac{x \cdot a}{p}$,
y [g] druhého kovu zaujímá objem $\dfrac{y}{\rho_2} = \dfrac{y \cdot b}{q}$.
Pro ztrátu objemu celé slitiny je potom

$$\frac{x \cdot a}{p} + \frac{y \cdot b}{q} = z \quad \Big| \cdot pq$$

$$aqx + bpy = pqz.$$

Modelem naší situace je soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= h \\ aqx + bpy &= pqz \end{aligned} \qquad \textbf{(3-11)}$$

Ze soustavy (3-11) postupně vyjádříme x a y.

1) $y = h - x$

$$aqx + bhp - bpx = pqz \quad \Big| - bph$$

$$x \cdot (aq - bp) = pqz - bph \quad \Big| : (aq - bp)$$

$$\underline{\underline{x = \frac{pqz - bph}{aq - bp}}}. \qquad \textbf{(3-11a)}$$

2) $x = h - y$

$aqh - aqy + bpy = pqz \quad \big| - aqh$

$y \cdot (bp - aq) = pqz - aqh \quad \big| : (bp - aq)$

$$\underline{\underline{y = \frac{pqz - aqh}{bp - aq}}}. \qquad \textbf{(3-11b)}$$

Pro hodnoty musí platit, že všechny jsou kladné, včetně x, y.

a) Je-li $aq \neq bp$, potom má úloha jediné řešení $[x; y]$.

b) Je-li $aq = bp$ a $qz \neq bh$ a $pz \neq ah$, potom úloha nemá řešení.

c) Je-li $aq = bp$ a $qz = bh$ a $pz = ah$, potom úloha má nekonečně mnoho řešení, pro která platí $x + y = h$.

Nyní dosadíme konkrétní hodnoty: $h = 124$ g, $z = 15$ g, $p = 89$ g, $a = 10$ g, $q = 7$ g, $b = 1$ g.

$$x = \frac{pqz - bph}{aq - bp} = \frac{15 \cdot 89 \cdot 7 - 124 \cdot 1 \cdot 89}{10 \cdot 7 - 1 \cdot 89} = \underline{\underline{89}} \text{ [g]},$$

$$y = \frac{pqz - aqh}{bp - aq} = \frac{15 \cdot 89 \cdot 7 - 10 \cdot 124 \cdot 7}{1 \cdot 89 - 10 \cdot 7} = \underline{\underline{35}} \text{ [g]}.$$

Poznámka:

Je možné hodnoty p, q normovat (tj. převést na hodnotu 1), potom soustava (3-11) má tvar

$$\begin{aligned} x + y &= h \\ \underline{ax + by} &\underline{= z} \end{aligned}, \qquad \textbf{(3-12)}$$

kde $a = \dfrac{1}{\rho_1}$, $b = \dfrac{1}{\rho_2}$.

Vyjádříme-li x, y, dostáváme

$$\underline{\underline{x = \frac{z - bh}{a - b}}}, \qquad \underline{\underline{y = \frac{z - ah}{b - a}}}. \qquad \textbf{(3-12a,b)}$$

a konkrétně

$$x = \frac{z - bh}{a - b} = \frac{15 - \frac{1}{7} \cdot 124}{\frac{1}{8{,}9} - \frac{1}{7}} = \underline{\underline{89}} \text{ [g]},$$

$$y = \frac{z - ah}{b - a} = \frac{15 - \frac{1}{8{,}9} \cdot 124}{\frac{1}{7} - \frac{1}{8{,}9}} = \underline{\underline{35}} \text{ [g]}.$$

Dosadíme-li za a, b hodnoty $a = \dfrac{1}{\rho_1}$, $b = \dfrac{1}{\rho_2}$, dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} x + y &= h \\ \underline{\frac{x}{\rho_1} + \frac{y}{\rho_2}} &\underline{= z} \end{aligned}, \qquad \textbf{(3-13)}$$

kde ρ_1, ρ_2 jsou hustoty mědi a zinku (v tomto pořadí).

Vyjádříme-li x, y, dostáváme

$$\underline{\underline{x = \frac{\rho_2 z - h}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \rho_1}}, \qquad \underline{\underline{y = \frac{\rho_1 z - h}{\rho_1 - \rho_2} \cdot \rho_2}}. \qquad \textbf{(3-13a,b)}$$

a konkrétně

$$x = \frac{\rho_2 z - h}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \rho_1 = \frac{7 \cdot 15 - 124}{7 - 8{,}9} \cdot 8{,}9 = \underline{\underline{89}}\ [\mathrm{g}],$$

$$y = \frac{\rho_1 z - h}{\rho_1 - \rho_2} \cdot \rho_2 = \frac{8{,}9 \cdot 15 - 124}{8{,}9 - 7} = \underline{\underline{35}}\ [\mathrm{g}].$$

3.4.4. Skupina 4: *„Speciální úlohy o směsích"*

Úlohy obsahují zadání o směsích (slitinách, roztocích). Úlohy nelze vyjádřit pomocí předchozích soustav dvou rovnic. Počet neznámých se rovná počtu rovnic. Dále jsou zde zařazeny i úlohy, které nejsou dostatečně určeny, počet neznámých je větší než počet rovnic. Úlohy vedou na diofantovské rovnice.

***Příklad* 4.4.1:**
Obchodník koupil dva druhy látek za celkovou cenu 2 530,- Kč. Za 1 m prvního druhu zaplatil 80,- Kč, za 1 m druhého druhu 90,- Kč. Pak prodával 1 m látky o 20,- Kč dráže než sám nakoupil. Když všechno prodal, měl zisk 600,- Kč. Kolik metrů prvního druhu a kolik metrů druhého druhu prodal?

Řešení:
Látky prvního druhu bylo x metrů a 1 metr stál při koupi 80,- Kč, při prodeji 100,- Kč, látky druhého druhu bylo y metrů a 1 metr stál při koupi 90,- Kč, při prodeji 110,- Kč. Potom platí:

$$\begin{aligned} 80x + 90y &= 2\,530 \quad \Big|\cdot(-1) \\ \underline{100x + 110y} &\underline{= 3\,130} \\ 20x + 20y &= 600 \quad \to \quad x = 30 - y \\ 80\cdot(30 - y) + 90y &= 2\,530 \\ 2\,400 - 80y + 90y &= 2\,530 \quad \Big| - 2\,400 \\ 10y &= 130 \quad \to \quad \underline{y = 13} \quad \to \quad \underline{x = 17}\,. \end{aligned}$$

Zkouška:
Obchodník při koupi zaplatil za látku $17\cdot 80 + 13\cdot 90 = 2\,530$,- Kč, při prodeji za látku utržil $17\cdot 100 + 13\cdot 110 = 3\,130$,- Kč. Rozdíl činil 3 130 – 2 530 = 600,- Kč.
Odpověď:
Obchodník prodal 17 m prvního druhu látky a 13 m druhého druhu látky.

***Příklad* 4.4.2:**
Na palouku byli hadi, vrabci, myši, brouci a pavouci. Dohromady měli čtyřikrát více nohou než hlav. Myši a brouci mají dohromady pětkrát více nohou než hlav. Brouci a pavouci mají celkem 100 nohou. Kdyby se hadi odplazili, zůstalo by na palouku pětkrát více nohou než hlav. Kolik kterých živočichů bylo na palouku (brouk má 6 nohou, pavouk 8 nohou)?

Řešení:
Označme si počet hadů x, počet vrabců y, počet myší z, počet brouků u, počet pavouků v, potom můžeme situaci na louce popsat matematicky takto

$$\begin{aligned} (x + y + z + u + v)\cdot 4 &= 2y + 4z + 6u + 8v \quad \Big| - 2y - 4z - 6u - 8v \\ 5z + 5u &= 4z + 6u \quad \Big| 1 - 4z - 5u \end{aligned}$$

$$6u + 8v = 100 \quad \Big|\ :2$$
$$\underline{(x + y + z + u + v)\cdot 5 = 2y + 4z + 6u + 8v} \quad \Big|\ -2y - 4z - 6u - 8v$$
$$4x + 2y - 2u - 4v = 0$$
$$z = u$$
$$3u + 4v = 50$$
$$\underline{3y + z - u - 3v = 0} \quad \rightarrow \quad 3y = 3v \quad \rightarrow \quad y = v$$
$$z = u$$
$$v = \frac{50-3u}{4}$$
$$4x + 2y - 2u - 50 + 3u = 0 \quad \Big|\ +50$$
$$\underline{3y + u - u + \frac{9}{4}u - \frac{150}{4} = 0} \quad \Big|\ \cdot\frac{4}{3}$$
$$4x + 2y + u = 50 \quad \Big|\ \cdot 2$$
$$\underline{4y + 3u = 50} \quad \Big|\ \cdot(-1)$$
$$8x - u = 50$$

a řešíme lineární diofantickou rovnici tak, že zvolíme $\underline{x = t}$, potom

$8t - u = 50 \quad \rightarrow \quad \underline{u = -50 + 8t}$, $t > 6$ (aby u bylo kladné).

Dále: $\underline{z = u}$, $\underline{v = \frac{50-3u}{4}}$, $\underline{y = v}$.

Dostáváme:

t:	7	8	9	. . .
x:	7	8	9	. . .
u:	6	14	22	. . .
v:	8	2	– 16	. . .
y:	8	2	– 16	. . .
z:	6	14	22	. . .

Řešením jsou hodnoty pro $t = 7, 8$. Pro větší hodnoty t jsou počty y, v již záporné.

Zkouška:

a) hadi – 7, vrabci – 8, myši – 6, brouci – 6, pavouci – 8.

Všichni mají počet hlav 7 + 8 + 6 + 6 + 8 = 35, počet jejich nohou je $7\cdot 0 + 8\cdot 2 + 6\cdot 4 + 6\cdot 6 + 8\cdot 8 = 140$. Podíl jejich nohou a hlav je 140 : 35 = 4.

Myši a brouci: počet hlav 6 + 6 = 12, počet nohou $6\cdot 4 + 6\cdot 6 = 60$. Podíl jejich nohou a hlav je 60 : 12 = 5.

Počet nohou brouků a pavouků je $6\cdot 6 + 8\cdot 8 = 100$.

Bez hadů mají ostatní počet hlav 8 + 6 + 6 + 8 = 28, počet jejich nohou je $8\cdot 2 + 6\cdot 4 + 6\cdot 6 + 8\cdot 8 = 140$. Podíl jejich nohou a hlav je 140 : 28 = 5.

b) hadi – 8, vrabci – 2, myši – 14, brouci – 14, pavouci – 2.

Všichni mají počet hlav 8 + 2 + 14 + 14 + 2 = 40, počet jejich nohou je $7\cdot 0 + 2\cdot 2 + 14\cdot 4 + 14\cdot 6 + 2\cdot 8 = 160$. Podíl jejich nohou a hlav je 160 : 40 = 4.

Myši a brouci: počet hlav 14 + 14 = 28, počet nohou $14\cdot 4 + 14\cdot 6 = 140$. Podíl jejich nohou a hlav je 140 : 28 = 5.

Počet nohou brouků a pavouků je $14\cdot 6 + 2\cdot 8 = 100$.

Bez hadů mají ostatní počet hlav 2 + 14 + 14 + 2 = 32, počet jejich nohou je $2\cdot 2 + 14\cdot 4 + 14\cdot 6 + 2\cdot 8 = 160$. Podíl jejich nohou a hlav je 160 : 32 = 5.

Odpověď:

Na palouku bylo 7 hadů, 8 vrabců, 6 myší, 6 brouků a 8 pavouků nebo 8 hadů, 2 vrabci, 14 myší, 14 brouků a 2 pavouci.

3.5. Slovní úlohy o společné práci

Základní členění slovních úloh o společné práci je podle počtu pracovníků, kteří se zúčastňují pracovního procesu. Dále se úlohy dělí podle toho, zda subjekty pracují po celou dobu práce nebo jen část této doby. Také se objevují případy, kdy alespoň jeden subjekt vykonává „opačnou“ práci (tj. společnou práci „boří“). Nakonec jsou zařazeny specifické druhy společné práce.

3.5.1. Skupina 1: *„Plná práce dvou subjektů“*

Úlohy obsahují zadání o společné práci dvou subjektů. Oba subjekty pracují po celou dobu společné práce. Počítáme dobu společné práce nebo dobu, za kterou společnou práci vykonají jednotlivé subjekty.

***Příklad* 5.1.1:**
Na úseku nově budované silnice pokládají dva finišery různé výkonnosti živičný koberec. Položení koberce jedním finišerem by trvalo 78 hodin, druhým 91 hodin. Jak dlouho bude trvat práce při současném nasazení obou strojů?

Řešení č. 1:
První finišer položí za 1 hodinu $\frac{1}{78}$ koberce,
druhý finišer položí za 1 hodinu $\frac{1}{91}$ koberce,
oba finišery položí za 1 hodinu $\frac{1}{x}$ koberce,
potom platí

$$\frac{1}{78}+\frac{1}{91}=\frac{1}{x} \quad \Big|\cdot 7\,098x$$
$$91x + 78x = 7\,098$$
$$169x = 7\,098 \quad \Big| : 169$$
$$\underline{\underline{x = 42}} \text{ hodin.}$$

Zkouška:
Za 42 hodin položí první finišer $42\cdot\frac{1}{78}=\frac{7}{13}$,
za 42 hodin položí druhý finišer $42\cdot\frac{1}{91}=\frac{6}{13}$,
oba finišery položí za 42 hodin $\frac{7}{13}+\frac{6}{13}=1$, tj. celý koberec.
Odpověď:
Při současném nasazení obou strojů bude práce trvat 42 hodin.

Řešení č. 2:
Vyjdeme ze vztahu (5-1a) příslušného modelu (viz příloha 1), kde a = 78, b = 91. Potom

$$s=\frac{ab}{a+b}=\frac{78\cdot 91}{78+91}=\underline{\underline{42}} \text{ hodin.}$$

Zkouška a *odpověď* – viz řešení č. 1.

***Příklad* 5.1.2:**
Jeden ze dvou závodů může splnit objednávku o 4 dny dříve než druhý. Při společné práci by oba závody splnily za 24 dny pětkrát větší objednávku. Za jakou dobu by splnil objednávku každý závod?

Řešení:
První závod splní za 1 den $\frac{1}{x}$ objednávky,

druhý závod splní za 1 den $\frac{1}{x+4}$ objednávky,

oba závody splní za 1 den $\frac{5}{24}$ objednávky,

potom platí

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}=\frac{5}{24} \quad \Big|\cdot 24x\cdot(x+4)$$

$$24\cdot(x+4)+24x=5x\cdot(x+4)$$

$$5x^2+20x=24x+96+24x \quad \Big|-48x-96$$

$$5x^2-28x-96=0 \qquad D=2\,704 \quad \rightarrow \quad \sqrt{D}=52$$

$$x_{12}=\frac{28\pm 52}{2\cdot 5}=\begin{cases}8\\ -2{,}4\end{cases}.$$

Protože $x>0$, jediné řešení je $\underline{x=8}$, potom $\underline{x+4=12}$.
Zkouška:
První závod udělá za 1 den $\frac{1}{8}$ objednávky, druhý závod udělá za 1 den $\frac{1}{12}$ objednávky, oba společně udělají $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24}$ objednávky, což je společný výkon.
Odpověď:
První závod by splnil objednávku za 8 dní, druhý závod ze 12 dní.

3.5.2. Skupina 2: *„Neúplná práce dvou subjektů"*

Úlohy obsahují zadání o společné práci dvou subjektů. Alespoň jeden ze subjektů pracuje jen část doby společné práce. Počítáme dobu společné práce nebo dobu, za kterou společnou práci vykonají jednotlivé subjekty. Můžeme také počítat dobu, za kterou by dokončil společnou práci jeden ze subjektů.

***Příklad* 5.2.1:**
První podnik splní úkol za 7 dní, druhý za 8 dní. Za kolik dní bude úkol hotov při společné práci obou podniků, jestliže pracuje nejdříve první podnik dva dny sám?

Řešení č. 1: - *úsudek*
První podnik splní za 1 den $\frac{1}{7}$ úkolu,

druhý podnik splní za 1 den $\frac{1}{8}$ úkolu.

Protože první podnik pracuje nejdříve 2 dny sám, udělá $\frac{1}{7}\cdot 2=\frac{2}{7}$ úkolu a pro společnou práci zbývá $1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$ úkolu.

Oba podniky udělají společně za 1 den $\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{15}{56}$ úkolu, $\frac{5}{7}$ úkolu udělají za $\frac{5}{7}:\frac{15}{56}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$ dne.

Celý úkol bude splněn za $2+\ 2\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$ dne.

Zkouška:

První podnik pracuje $4\frac{2}{3}$ dne, za tuto dobu udělá $4\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$ úkolu,

druhý podnik pracuje $2\frac{2}{3}$ dne, za tuto dobu udělá $2\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$ úkolu,

dohromady udělají $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$, tj. celý úkol.

Odpověď:

Celý úkol bude splněn za $4\frac{2}{3}$ dne.

Řešení č. 2: - *pomocí rovnice*

Označme si dobu práce prvního podniku x dní. Za 1 den udělá $\frac{1}{7}$ úkolu, za x dní udělá

$\frac{x}{7}$ úkolu.

Druhý podnik pak bude pracovat $(x-2)$ dní. Za 1 den udělá $\frac{1}{8}$ úkolu, za $(x-2)$ dní udělá

$\frac{x-2}{8}$ úkolu.

Dohromady udělají oba podniky celý úkol, proto platí

$$\frac{x}{7}+\frac{x-2}{8}=1 \quad \Big|\cdot 56$$

$$8x+7x-14=56 \quad \Big|+14$$

$$15x=70 \quad \Big|:15$$

$$x=\frac{14}{3}=\underline{\underline{4\tfrac{2}{3}}}\ \text{dne.}$$

Toto je též doba celé práce.

Zkouška a *odpověď* viz řešení č.1.

Řešení č. 3: - *pomocí obecného modelu*

Protože doba práce prvního podniku je rovna době celé práce, budeme počítat tuto dobu.

Vyjdeme z modelu (vztahu) (5-5a) (viz příloha 1), kde $s=\dfrac{ab-bp-aq}{a+b}$.

Celková doba práce je

$$m=s+p=\frac{ab-bp-aq}{a+b}+p=\frac{ab-bp-aq+ap+bp}{a+b}=\frac{a\cdot(b+p-q)}{a+b}$$

a současně $q=0$, proto celková doba práce je

$$\underline{\underline{m=\frac{a\cdot(b+p)}{a+b}}}\ . \qquad \textbf{(3-14)}$$

Totéž dostáváme, vyjdeme-li ze vztahu (5-5f) a za q dosadíme 0.

V naší úloze konkrétně $a=7$ h, $b=8$ h, $p=2$ h, $c=m$, potom

$$m=\frac{a\cdot(b+p)}{a+b}=\frac{7\cdot(8+2)}{7+8}=\frac{70}{15}=\frac{14}{3}=4\tfrac{2}{3}\ \text{hodiny.}$$

Zkouška a *odpověď* viz řešení č.1.

Poznámka:

Jestliže bude pracovat nejdříve druhý sám q hodin, je celková doba práce

$$n = s + q = \frac{ab - bp - aq}{a+b} + q = \frac{ab - bp - aq + aq + bq}{a+b} = \frac{b \cdot (a - p + q)}{a+b}$$

a současně $p = 0$, proto celková doba práce je

$$n = \frac{b \cdot (a+q)}{a+b} \ . \qquad \textbf{(3-15)}$$

***Příklad* 5.2.2:**

Dva dělníci vykonají práci společně za 16 dní. Po 4 dnech společné práce ji dokončí druhý dělník sám za 36 dní. Za kolik dní by ji vykonal každý dělník sám?

Řešení č.1: - *úsudek*

Po 4 dnech vykonají 4 : 16 = $\frac{1}{4}$ práce a zbývá jim udělat $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ práce. Tuto část vykoná sám druhý. Velikost práce je přímo úměrná času, z toho plyne

$$\uparrow \quad \frac{3}{4}\ \textit{práce} \ldots\ldots\ 36\ \textit{dní} \quad \uparrow$$
$$1\ \textit{práce} \ldots\ldots\ x\ \textit{dní}$$

$$x : 36 = 1 : \tfrac{3}{4} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x = 48}}\ \text{dní.}$$

Pro dobu práce prvního platí podle (5-1b) (viz příloha 1)

$$a = \frac{bs}{b-s} = \frac{48 \cdot 16}{48 - 16} = \underline{\underline{24}}\ \text{dní.}$$

Zkouška:

První dělník udělá za 1 den $\frac{1}{24}$ práce, za 4 dny $4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{6}$ práce,

druhý dělník udělá za 1 den $\frac{1}{48}$ práce, za 40 dní $40 \cdot \frac{1}{48} = \frac{5}{6}$ práce,

dohromady udělají $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$, tj. celou práci.

Odpověď:

První dělník by sám vykonal práci za 24 dní, druhý sám za 48 dní.

Řešení č.2: - *pomocí obecného modelu*

Označme si s dobu skutečné společné práce 4 dny, c dobu práce, kdy by udělali celé dílo, a dobu, kterou by na práci potřeboval první sám, b dobu, kterou by na práci potřeboval druhý sám. Dosud udělali $\frac{s}{c}$ práce, zbývá udělat $1 - \frac{s}{c} = \frac{c-s}{c}$ práce.

Velikost práce je přímo úměrná času, z toho plyne

$$\uparrow \quad \frac{c-s}{c}\ \textit{práce} \ldots\ldots\ q\ \textit{dní} \quad \uparrow$$
$$1\ \textit{práce} \ldots\ldots\ldots\ b\ \textit{dní}$$

$$\frac{1}{\frac{c-s}{c}} = \frac{b}{q} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{b = \frac{cq}{c-s}}} \qquad \textbf{(3-16)}$$

Pro a platí podle (5-1b) (viz příloha 1) a (3-16)

$$a = \frac{bc}{b-c}\ , \quad b = \frac{cq}{c-s} \quad \rightarrow \quad a = \frac{c \cdot \frac{cq}{c-s}}{\frac{cq}{c-s} - c} = \frac{\frac{c^2 q}{c-s}}{\frac{cq - c^2 + cs}{c-s}} = \frac{c^2 q}{cq - c^2 + cs}$$

$$\underline{\underline{a = \frac{cq}{q-c+s}}} \quad . \qquad \textbf{(3-17)}$$

V naší úloze je konkrétně c = 16 dní, s = 4 dny, q = 36 dní, potom

$$b = \frac{cq}{c-s} = \frac{16 \cdot 36}{16-4} = \frac{576}{12} = \underline{\underline{48}} \text{ dní.}$$

$$a = \frac{cq}{q-c+s} = \frac{16 \cdot 36}{36-16+4} = \frac{576}{24} = \underline{\underline{24}} \text{ dní.}$$

Zkouška a *odpověď* viz řešení č.1.

3.5.3. Skupina 3: *„Plná práce tří subjektů"*

Úlohy obsahují zadání o společné práci tří subjektů. Všechny subjekty pracují po celou dobu společné práce. Počítáme dobu společné práce nebo počítáme dobu, za kterou společnou práci vykonají jednotlivé subjekty.

***Příklad* 5.3.1:**
V tepelné elektrárně je vytvořena určitá zásoba uhlí. Bude-li v činnosti pouze 1. elektrárenský blok, vystačí zásoba uhlí na 24 dní. Bude-li v činnosti jen 2. blok, vystačí zásoba na 30 dní, bude-li v činnosti jen 3. blok, vystačí zásoba na 20 dní. Určete, na kolik dní vystačí zásoba uhlí, budou-li v činnosti současně všechny tři elektrárenské bloky?

Řešení č.1: - *pomocí rovnice*

1. blok spotřebuje za 1 den $\frac{1}{24}$ zásoby uhlí,

2. blok spotřebuje za 1 den $\frac{1}{30}$ zásoby uhlí,

3. blok spotřebuje za 1 den $\frac{1}{20}$ zásoby uhlí,

všechny bloky spotřebují za 1 den $\frac{1}{x}$ zásoby uhlí,

potom platí

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{x} \quad \Big| \cdot 120x$$

$$5x + 4x + 6x = 120$$

$$15x = 120 \quad \Big| : 15$$

$$\underline{\underline{x = 8}} \ .$$

Zkouška:
Za 8 dní spotřebuje 1. blok $8 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{3}$ zásoby uhlí,
za 8 dní spotřebuje 2. blok $8 \cdot \frac{1}{30} = \frac{4}{15}$ zásoby uhlí,
za 8 dní spotřebuje 3. blok $8 \cdot \frac{1}{20} = \frac{2}{5}$ zásoby uhlí,
celkem za 8 dní spotřebují všechny bloky $\frac{1}{3} + \frac{4}{15} + \frac{2}{5} = 1$ zásobu uhlí.
Odpověď:
Budou-li v činnosti všechny tři elektrárenské bloky, vystačí zásoba uhlí na 8 dní.

Řešení č.2: - pomocí obecného modelu
Vyjdeme ze vztahu (5-11a) (viz příloha 1), kde $a = 24$, $b = 30$, $c = 20$, potom

$$s = \frac{abc}{ab+ac+bc} = \frac{24\cdot 30\cdot 20}{24\cdot 30+24\cdot 20+30\cdot 20} = \underline{\underline{8}} \text{ dní.}$$

Zkouška a *odpověď* viz řešení č.1.

***Příklad* 5.3.2:**
Nádržku lze naplnit třemi kohoutky. Druhým by se naplnila za dobu o polovici delším než prvým, třetím za dobu o 8 hodin delší než prvým; všemi současně se naplní za $4\frac{1}{2}$ hod. Za jakou dobu by se naplnila každým zvláště?

Řešení:
Jen prvním kohoutkem by se nádržka naplnila za x hodin,
jen druhým kohoutkem by se nádržka naplnila za $(x + \frac{1}{2}x) = \frac{3}{2}x$ hodin,
jen třetím kohoutkem by se nádržka naplnila za $(x + 8)$ hodin, potom
jen prvním kohoutkem se za 1 hodinu naplní $\frac{1}{x}$ nádržky,
jen druhým kohoutkem se za 1 hodinu naplní $\frac{2}{3x}$ nádržky,
jen třetím kohoutkem se za 1 hodinu naplní $\frac{1}{x+8}$ nádržky,
všemi třemi kohoutky společně se za 1 hodinu naplní $\frac{1}{4\frac{1}{2}} = \frac{2}{9}$ nádržky,
potom platí

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} + \frac{1}{x+8} = \frac{2}{9} \quad \Big| \cdot 9\cdot x\cdot (x+8)$$

$$9x + 72 + 6x + 48 + 9x = 2x^2 + 16x \quad \Big| - 24x - 120$$

$$0 = 2x^2 - 8x - 120 \quad \Big| : 2$$

$$x^2 - 4x - 60 = 0$$

$$(x-10)\cdot(x+6) = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = 10}},\ x_2 = -6 \text{ (je záporné, není řešení).}$$

Zkouška:
Jen prvním kohoutkem nateče nádržka za 10 h, za 1 h nateče $\frac{1}{10}$ nádržky,
jen druhým kohoutkem nateče nádržka za 15 h, za 1 h nateče $\frac{1}{15}$ nádržky,
jen třetím kohoutkem nateče nádržka za 18 h, za 1 h nateče $\frac{1}{18}$ nádržky,
za 4,5 h nateče všemi kohoutky najednou $4{,}5\cdot(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}) = 4{,}5\cdot\frac{2}{9} = 1$ nádržka.
Odpověď:
Jen prvním kohoutkem by se nádržka naplnila za 10 hodin, jen druhým kohoutkem za 15 hodin, jen třetím kohoutkem za 18 hodin.

3.5.4. <u>Skupina 4:</u> *„Neúplná práce tří subjektů“*

Úlohy obsahují zadání o společné práci tří subjektů. Alespoň jeden ze subjektů pracuje jen část doby společné práce. Počítáme dobu společné práce nebo dobu, za kterou společnou práci vykonají jednotlivé subjekty. Můžeme také počítat dobu, za kterou by dokončil společnou práci jeden ze subjektů.

***Příklad* 5.4.1:**
Daný úkol splní dělník Skála sám za 8 dní, dělník Sekera sám za 10 dní a dělník Sušil sám za 12 dní. Jakou část úkolu mají ještě splnit po dvou dnech společné práce? Za kolik dní splní zbytek úkolu?

<u>*Řešení* č. 1:</u> - *úsudek*
Dělník Skála splní za 1 den $\frac{1}{8}$ úkolu,
dělník Sekera splní za 1 den $\frac{1}{10}$ úkolu,
dělník Sušil splní za 1 den $\frac{1}{12}$ úkolu,
všichni splní za 1 den $\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{37}{120}$ úkolu, za dva dny $\frac{37}{60}$ úkolu.
Zbývá ještě splnit $1-\frac{37}{60}=\underline{\underline{\frac{23}{60}}}$ úkolu.

Dobu vypočteme pomocí přímé úměry (čím je více práce, tím delší dobu ji budeme dělat)

$$\uparrow \quad \begin{array}{l} \frac{37}{60}\ (\textit{práce})\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 2\ (\textit{dny}) \\ \frac{23}{60}\ (\textit{práce})\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ x\ (\textit{dní}) \\ \hline \end{array} \quad \uparrow$$

Z toho plyne úměra

$$\frac{\frac{23}{60}}{\frac{37}{60}}=\frac{x}{2} \qquad \rightarrow \qquad x=\underline{\underline{\frac{46}{37}}}=1\tfrac{9}{37} \doteq \text{ 1 osmihodinová pracovní směna a 2 hodiny.}$$

Zkouška:
Aby splnili úkol, musí všichni pracovat 2 + 1 $\frac{9}{37}=\frac{120}{37}$ dne.
Dělník Skála splní za $\frac{120}{37}$ dne $\frac{1}{8}\cdot\frac{120}{37}=\frac{15}{37}$ úkolu,
dělník Sekera splní za $\frac{120}{37}$ dne $\frac{1}{10}\cdot\frac{120}{37}=\frac{12}{37}$ úkolu,
dělník Sušil splní za $\frac{120}{37}$ dne $\frac{1}{12}\cdot\frac{120}{37}=\frac{10}{37}$ úkolu,
všichni pak splnili $\frac{15}{37}+\frac{12}{37}+\frac{10}{37}=1$ celý úkol.
Odpověď:
Po dvou dnech mají dělníci ještě splnit $\frac{23}{60}$ úkolu. Tuto část dokončí společně za $\frac{46}{37}$ dne.

<u>*Řešení* č. 2:</u> - *pomocí rovnice*
Označme si *x* počet dní, který zbývá všem pracovníkům do ukončení úkolu po dvou dnech.
Dělník Skála splní za 1 den $\frac{1}{8}$ úkolu, za celou dobu práce (x + 2) dny udělá $\dfrac{x+2}{8}$ práce,

dělník Sekera splní za 1 den $\frac{1}{10}$ úkolu, za celou dobu práce (x + 2) dny udělá $\dfrac{x+2}{10}$ práce,

dělník Sušil splní za 1 den $\frac{1}{12}$ úkolu, za celou dobu práce (x + 2) dny udělá $\dfrac{x+2}{12}$ práce,

Dohromady udělají celou práci. Z toho plyne vztah

$$\frac{x+2}{8}+\frac{x+2}{10}+\frac{x+2}{12}=1 \quad \Big|\cdot 120$$
$$15x + 30 + 12x + 24 + 10x + 20 = 120 \quad \Big|-74$$
$$37x = 46 \quad \Big|:37$$
$$\underline{\underline{x = \tfrac{46}{37}}} \text{ dne.}$$

Když udělají celou práci za 2 + $\frac{46}{37} = \frac{120}{37}$ dne, za $\frac{46}{37}$ dne udělají $\frac{46}{37} : \frac{120}{37} = \underline{\underline{\frac{23}{60}}}$ práce.

Zkouška a *odpověď* stejně jako v řešení č.1.

Řešení č. 3: - *pomocí obecného modelu*

Vyjdeme z modelového vztahu (5-11a) (viz příloha 1), kde $s = \dfrac{abc}{ab+ac+bc}$.

Uvažujeme-li, že všichni pracují společně h hodin, pak za tuto dobu udělají

$\dfrac{h}{s} = \dfrac{h\cdot(ab+ac+bc)}{abc}$ práce; zbývá udělat zbytek z, pro který platí

$z = 1-\dfrac{h}{s} = 1-\dfrac{h\cdot(ab+ac+bc)}{abc}$ a pro z platí:

$$\underline{\underline{z = \frac{abc-h\cdot(ab+ac+bc)}{abc}}} \; . \qquad \textbf{(3-18)}$$

Společnou práci dokončí dělníci za dobu t. Platí $t = s - h$, z toho plyne

$$\underline{\underline{t = \frac{abc}{ab+ac+bc} - h}} \; . \qquad \textbf{(3-19)}$$

V naší úloze je konkrétně a = 8 h, b = 10 h, c = 12 h, h = 2 h. Pak dostáváme

$$z = \frac{abc-h\cdot(ab+ac+bc)}{abc} = \frac{8\cdot10\cdot12-2\cdot(8\cdot10+8\cdot12+10\cdot12)}{8\cdot10\cdot12} = \frac{368}{960} = \underline{\underline{\frac{23}{60}}} \text{ práce.}$$

$$t = \frac{abc}{ab+ac+bc} - h = \frac{8\cdot10\cdot12}{8\cdot10+8\cdot12+10\cdot12} - 2 = \frac{960-2\cdot296}{296} = \frac{368}{296} = \underline{\underline{\frac{46}{37}}} \text{ dní.}$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v řešení č.1.

***Příklad* 5.4.2:** (*Dělníci na stavbě*)

První dělník by vykonal určitou práci za 12 dní, druhý dělník by tutéž práci vykonal za 16 dní. Společně pracovali 4 dny. Potom druhého dělníka vystřídal třetí. První a třetí dělník společně zbylou práci vykonali také za 4 dny. Za kolik dní by tuto práci vykonal třetí dělník sám?

Řešení č. 1: - *úsudek*

1. dělník vykoná za 1 den ..... $\frac{1}{12}$ práce, za 4 dny ..... $\frac{1}{12}\cdot 4 = \frac{1}{3}$ práce,

2. dělník vykoná za 1 den ..... $\frac{1}{16}$ práce, za 4 dny ..... $\frac{1}{16}\cdot 4 = \frac{1}{4}$ práce,

dohromady vykonají za 4 dny ..... $\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ práce.

Zbývá vykonat $1-\frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ práce.

1. dělník vykoná za zbývající 4 dny $\frac{1}{3}$ práce, na třetího zbývá $\frac{5}{12}-\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ práce.

3. dělník vykoná za 4 dny $\frac{1}{12}$ práce, za jeden den čtvrtinu, tedy $\frac{1}{12} : 4 = \frac{1}{48}$ práce.

Když 3. dělník vykoná za 1 den $\frac{1}{48}$ práce, celou práci sám vykoná za $\underline{\underline{48}}$ dní.

Zkouška:

1. dělník vykoná za 1 den ..... $\frac{1}{12}$ práce, za 8 dní ..... $\frac{1}{12} \cdot 8 = \frac{2}{3}$ práce,

2. dělník vykoná za 1 den ..... $\frac{1}{16}$ práce, za 4 dny ..... $\frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{1}{4}$ práce,

3. dělník vykoná za 1 den ..... $\frac{1}{48}$ práce, za 4 dny ..... $\frac{1}{48} \cdot 4 = \frac{1}{12}$ práce,

dohromady vykonají za celou dobu $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{8+3+1}{12} = 1$, tedy celou práci.

Odpověď:

Třetí dělník by sám vykonal práci za 48 dní.

Řešení č. 2: - *pomocí rovnice*

Označme si x počet dnů, za které vykoná celou práci sám 3. dělník. Potom můžeme psát:

1. dělník vykoná za 1 den ..... $\frac{1}{12}$ práce a pracuje 8 dní,

2. dělník vykoná za 1 den ..... $\frac{1}{16}$ práce a pracuje 4 dny,

3. dělník vykoná za 1 den ..... $\frac{1}{x}$ práce a pracuje 4 dny.

Dohromady vykonají celou práci. Z toho plyne rovnice

$$8 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{x} = 1,$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{4}{x} = 1 \quad \Big| \cdot 12x$$

$$8x + 3x + 48 = 12x \quad \Big| - 11x$$

$$\underline{\underline{48 = x}}$$

Zkouška a *odpověď* - viz řešení č. 1

Řešení č.3: - *pomocí obecného modelu*

Vyjdeme z modelového vztahu (5-15a) (viz příloha 1), kde

$$s = \frac{abc - bcp - acq - abr - (ac + bc) \cdot u - (ab + bc) \cdot v - (ab + ac) \cdot w}{ab + ac + bc},$$

přičemž $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $w = 0$, $s = 0$ a dostáváme

$$0 = \frac{abc - (ac + bc) \cdot u - (ab + bc) \cdot v}{ab + ac + bc},$$

odkud

$$\underline{\underline{c = \frac{abv}{ab - au - bu - bv}}}, \tag{3-20}$$

kde $a = 12$, $b = 16$, $u = 4$, $v = 4$.

Potom

$$c = \frac{abv}{ab - au - bu - bv} = \frac{12 \cdot 16 \cdot 4}{12 \cdot 16 - 12 \cdot 4 - 16 \cdot 4 - 16 \cdot 4} = \underline{\underline{48}} \text{ dní.}$$

Poznámka:

Do vztahu (5-15a) můžeme ihned dosadit čísla, tj. $a = 12$, $b = 16$, $c = x$ (neznámá), $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $u = 4$, $v = 4$, $w = 0$, $s = 0$ a dostáváme:

$$0 = \frac{12 \cdot 16 \cdot x - 0 - 0 - 0 - (12x + 16x) \cdot 4 - (12 \cdot 16 + 16x) \cdot 4}{12 \cdot 16 + 12x + 16x} \quad \Big| \cdot (192 + 28x)$$

$$0 = 192x - 112x - 768 - 64x \quad \Big| + 768$$

$$768 = 16x \quad \Big| : 16$$

$$\underline{\underline{x = 48}}.$$

3.5.5. <u>Skupina 5:</u> *„Práce čtyř a více subjektů“*

Úlohy obsahují zadání o společné práci čtyř a více subjektů. Subjekty mohou pracovat po celou dobu společné práce nebo jen část doby společné práce. Počítáme dobu společné práce nebo dobu jen části práce některého ze subjektů.

***Příklad* 5.5.1:**
Do nádržky přitéká voda čtyřmi trubkami, z nichž každá sama o sobě by naplnila nádržku za 1, 2, 3, 4 dny. Určete přesně, za jak dlouho se nádržka naplní, přitéká-li voda všemi trubkami najednou? {úlohu uměl řešit již řecký měřič *Heron* v II. stol. př. n. l.}

Řešení:
Jen 1. trubkou nateče za 1 den 1 nádržka,
jen 2. trubkou nateče za 1 den $\frac{1}{2}$ nádržky,
jen 3. trubkou nateče za 1 den $\frac{1}{3}$ nádržky,
jen 4. trubkou nateče za 1 den $\frac{1}{4}$ nádržky,
všemi trubkami nateče za 1 den $\frac{1}{x}$ nádržky,
potom

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{25}{12}=\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x=\frac{12}{25}}}=0{,}48 \text{ dne} = 11 \text{ h } 31 \text{ min } 12 \text{ s.}$$

Zkouška:
Za $\frac{12}{25}$ dne nateče 1. trubkou $\frac{12}{25}$ nádržky, 2. trubkou $\frac{12}{25}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{25}$ nádržky, 3. trubkou $\frac{12}{25}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{25}$ nádržky, 4. trubkou $\frac{12}{25}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{25}$, všemi trubkami pak $\frac{12}{25}+\frac{6}{25}+\frac{4}{25}+\frac{3}{25}$ = 1 nádržka.
Odpověď:
Přitéká-li voda všemi trubkami najednou, naplní se nádržka za 11 h 31 min a 12 s.

***Příklad* 5.5.2:** (*Naplnění nádržky*)
Nádržku lze naplnit čtyřmi rourami: první za $3\frac{1}{3}$ h, druhou za 3 h, třetí za $2\frac{2}{5}$ h, čtvrtou za $2\frac{2}{9}$ h. Za jakou dobu se naplní nádržka:
a) první a čtvrtou rourou;
b) všemi čtyřmi rourami?

Řešení č. 1:
Označme si x počet hodin, za které se celá nádržka naplní 1. a 4. rourou, y počet hodin, za které se celá nádržka naplní všemi rourami. Potom můžeme psát:
1. rourou se naplní nádržka za $\frac{10}{3}$ h, za 1 hodinu se naplní $\frac{3}{10}$ nádržky,
2. rourou se naplní nádržka za 3 h, za 1 hodinu se naplní $\frac{1}{3}$ nádržky,
3. rourou se naplní nádržka za $\frac{12}{5}$ h, za 1 hodinu se naplní $\frac{5}{12}$ nádržky,

4. rourou se naplní nádržka za $\frac{20}{9}$ h, za 1 hodinu se naplní $\frac{9}{20}$ nádržky,
1. a 4. rourou se naplní nádržka za x h, za 1 hodinu se naplní $\frac{1}{x}$ nádržky,
všemi rourami se naplní nádržka za y h, za 1 hodinu se naplní $\frac{1}{y}$ nádržky.
Pro řešení části a) platí rovnice (uvažujeme-li, kolik se naplní za 1 hodinu) :

$$\frac{3}{10}+\frac{9}{20}=\frac{1}{x} \quad \Big| \cdot 20x$$
$$15x = 20$$
$$\underline{\underline{x = \tfrac{4}{3}}} \text{ h} = 1 \text{ h } 20 \text{ min.}$$

Pro řešení části b) platí rovnice (uvažujeme-li, kolik se naplní za 1 hodinu) :

$$\frac{3}{10}+\frac{1}{3}+\frac{5}{12}+\frac{9}{20}=\frac{1}{y} \quad \Big| \cdot 60y$$
$$90y = 60 \quad \Big| : 60$$
$$\underline{\underline{y = \tfrac{2}{3}}} \text{ h} = 40 \text{ min.}$$

Zkouška:
Část a):
1. rourou se naplní za $\frac{4}{3}$ hodiny ..... $\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{5}$ nádržky,
4. rourou se naplní za $\frac{4}{3}$ hodiny ..... $\frac{9}{20}\cdot\frac{4}{3}=\frac{3}{5}$ nádržky,
dohromady se naplní za $\frac{4}{3}$ hodiny ..... $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1$, tedy celá nádržka.
Část b):
1. rourou se naplní za $\frac{2}{3}$ hodiny ..... $\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$ nádržky,
2. rourou se naplní za $\frac{2}{3}$ hodiny ..... $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ nádržky,
3. rourou se naplní za $\frac{2}{3}$ hodiny ..... $\frac{5}{12}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{18}$ nádržky,
4. rourou se naplní za $\frac{2}{3}$ hodiny ..... $\frac{9}{20}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{10}$ nádržky,
dohromady se naplní za $\frac{2}{3}$ hodiny ..... $\frac{1}{5}+\frac{2}{9}+\frac{5}{18}+\frac{3}{10}=\frac{18+20+25+27}{90}=1$, tedy celá nádržka.
Odpověď:
První a čtvrtou rourou se celá nádržka naplní za 1 h 20 min, všemi rourami za 40 min.

Řešení č. 2:
Označme si x počet hodin, za které se celá nádržka naplní 1. a 4. rourou, y počet hodin, za které se celá nádržka naplní všemi rourami. Potom můžeme psát:
1. rourou se naplní nádržka za $\frac{10}{3}$ h, za 1 hodinu se naplní $\frac{3}{10}$ nádržky,
2. rourou se naplní nádržka za 3 h, za 1 hodinu se naplní $\frac{1}{3}$ nádržky,
3. rourou se naplní nádržka za $\frac{12}{5}$ h, za 1 hodinu se naplní $\frac{5}{12}$ nádržky,
4. rourou se naplní nádržka za $\frac{20}{9}$ h, za 1 hodinu se naplní $\frac{9}{20}$ nádržky,
Pro řešení části a) platí rovnice (uvažujeme-li,že nádržka se plní x dní) :

$$\frac{3}{10}\cdot x+\frac{9}{20}\cdot x=1 \quad \Big| \cdot 20$$
$$15x = 20 \quad \Big| : 15$$
$$\underline{\underline{x = \tfrac{4}{3}}} \text{ h} = 1 \text{ h } 20 \text{ min.}$$

Pro řešení části b) platí rovnice (uvažujeme-li,že nádržka se plní y dní) :

$$\frac{3}{10}\cdot y+\frac{1}{3}\cdot y+\frac{5}{12}\cdot y+\frac{9}{20}\cdot y=1 \quad \Big| \cdot 60$$
$$90y = 60 \quad \Big| : 90$$
$$\underline{\underline{y = \tfrac{2}{3}}} \text{ h} = 40 \text{ min.}$$

Zkouška a *odpověď* - viz řešení 1.

3.5.6. Skupina 6: *„Různé druhy práce“*

Úlohy obsahují zadání o společné práci subjektů. Alespoň jeden ze subjektů „pracuje“ tak, že společné práce nepřibývá, ale ubývá. Počítáme dobu společné práce nebo dobu jen části práce některého ze subjektů. Do této skupiny také patří Newtonova úloha.

***Příklad* 5.6.1:**
Nádrž se naplní otvorem *A* za 15 minut. Otvorem *B* může voda odtékat. Otevřeme-li oba otvory současně, vyprázdní se plná nádrž za hodinu. Za kolik minut by se vyprázdnila plná nádrž otvorem *B*? (Otvor *A* uzavřeme.)

Řešení:

Je-li otevřen otvor *A* naplní se za 1 minutu $\frac{1}{15}$ nádrže,

je-li otevřen otvor *B* vyteče za 1 minutu $\frac{1}{x}$ nádrže,

jsou-li otevřeny oba otvory, vyteče za 1 minutu $\frac{1}{60}$ nádrže,

potom platí (vyjadřujeme odtok):

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{15}=\frac{1}{60} \quad \Big| + \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{60}+\frac{1}{15}=\frac{1}{12} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x = 12}} \text{ min.}$$

Zkouška:
Za 1 minutu nateče otvorem *A* $\frac{1}{15}$ nádrže a vyteče otvorem *B* $\frac{1}{12}$, změna pak bude $\frac{1}{15}-\frac{1}{12}=-\frac{1}{60}$, tj. za minutu odteče šedesátina nádrže a za 60 minut vyteče celá nádrž.
Odpověď:
Jen otvorem *B* by se nádrž vyprázdnila za 12 minut.

***Příklad* 5.6.2:**
Do vodojemu vedou tři roury *A*, *B*, *C*. Rourami *A* a *B* voda přitéká a rourou *C* vytéká. Jsou-li otevřeny roury *A* a *B*, naplní se vodojem za 6 hodin, jsou-li otevřeny roury *A* a *C*, naplní se vodojem za $22\frac{1}{2}$ hodiny, jsou-li otevřeny roury *B* a *C*, naplní se vodojem za 90 hodin. Za kolik hodin se vodojem naplní, jsou-li otevřeny všechny roury současně?

Řešení č. 1: - *pomocí rovnice*

Rourou *A* nateče vodojem za *a* hodin, za 1 hodinu nateče $\frac{1}{a}$ vody,

rourou *B* nateče vodojem za *b* hodin, za 1 hodinu nateče $\frac{1}{b}$ vody,

rourou *C* vyteče vodojem za *c* hodin, za 1 hodinu vyteče $\frac{1}{c}$ vody,

rourami *A* a *B* nateče vodojem za 6 hodin, za 1 hodinu nateče $\frac{1}{6}$ vodojemu,
rourami *A* a *C* nateče vodojem za $22\frac{1}{2}$ hodiny, za 1 hodinu nateče $\frac{2}{45}$ vodojemu,

rourami B a C nateče vodojem za 90 hodin, za 1 hodinu nateče $\frac{1}{90}$ vodojemu.
Vyjádříme-li vztahy v zadání, dostáváme soustavu rovnic

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=\frac{2}{45}$$

$$\underline{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{90}}$$

Pro řešení soustavy rovnic použijeme substituci $\frac{1}{a}=u,\ \frac{1}{b}=v,\ \frac{1}{c}=w$ a dostáváme

$$\left.\begin{aligned} u+v&=\tfrac{1}{6}\\ u-w&=\tfrac{2}{45}\end{aligned}\right\}- \quad\rightarrow\quad v+w=\tfrac{1}{6}-\tfrac{2}{45}=\tfrac{11}{90}$$

$$\underline{v-w=\tfrac{1}{90}}$$

$$\left.\begin{aligned} v+w&=\tfrac{11}{90}\\ \underline{v-w}&\underline{=\tfrac{1}{90}}\end{aligned}\right\}+$$

$$2v=\tfrac{12}{90}=\tfrac{2}{15} \quad\rightarrow\quad \underline{v=\tfrac{1}{15}} \quad\rightarrow\quad \underline{b=15}\ \text{dní}$$

$$\tfrac{1}{15}+w=\tfrac{11}{90} \quad\rightarrow\quad \underline{w=\tfrac{1}{18}} \quad\rightarrow\quad \underline{c=18}\ \text{dní}$$

$$u+v=\tfrac{1}{6} \quad\rightarrow\quad \underline{u=\tfrac{1}{10}} \quad\rightarrow\quad \underline{a=10}\ \text{dní}$$

Jsou-li otevřeny všechny roury, nateče za 1 hodinu do vodojemu

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}-\frac{1}{18}=\frac{9+6-5}{90}=\frac{1}{9}\ \text{vodojemu,}$$

celý vodojem nateče za 9 hodin.

Zkouška:

Celý vodojem nateče za 9 hodin, potom

$$9\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-\frac{1}{18}\right)=9\cdot\frac{1}{9}=1$$

Odpověď:

Jsou-li otevřeny všechny roury, vodojem se naplní za 9 hodin.

<u>Řešení č. 2:</u> - *pomocí obecného modelu*

Rourou A nateče vodojem za a hodin, za 1 hodinu nateče $\frac{1}{a}$ vody,

rourou B nateče vodojem za b hodin, za 1 hodinu nateče $\frac{1}{b}$ vody,

rourou C vyteče vodojem za c hodin, za 1 hodinu vyteče $\frac{1}{c}$ vody,

rourami A a B nateče vodojem za u hodin, za 1 hodinu nateče $\frac{1}{u}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ vodojemu,

rourami A a C nateče vodojem za v hodiny, za 1 hodinu nateče $\frac{1}{v}=\frac{1}{a}-\frac{1}{c}$ vodojemu, rourami B a C nateče vodojem za w hodin, za 1 hodinu nateče $\frac{1}{w}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$ vodojemu.

Celý vodojem nateče všemi rourami za s hodin, za 1 hodinu nateče $\frac{1}{s}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$ vodojemu,

Z čehož plyne

$$\frac{1}{s}=\frac{bc+ac-ab}{abc} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{s=\frac{abc}{ac+bc-ab}}}\,. \tag{3-21}$$

Vyjádříme-li vztahy v zadání, dostáváme soustavu rovnic

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{u}$$

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=\frac{1}{v}$$

$$\underline{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{w}}$$

$$\frac{2}{a}+\frac{2}{b}-\frac{2}{c}=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}$$

$$\frac{2bc+2ac-2ab}{abc}=\frac{vw+uw+uv}{uvw}$$

$$\frac{abc}{2ac+2bc-2ab}=\frac{uvw}{uv+uw+vw} \qquad \Big|\cdot 2$$

$$\frac{abc}{ac+bc-ab}=\frac{2uvw}{uv+uw+vw}$$

Podle (3-21) platí

$$\underline{\underline{s=\frac{2uvw}{uv+uw+vw}}} \tag{3-22}$$

V naší úloze konkrétně $u = 6$ hodin, $v = 22\frac{1}{2}$ hodiny, $w = 90$ hodin, potom

$$s=\frac{2uvw}{uv+uw+vw}=\frac{2\cdot 6\cdot 22\frac{1}{2}\cdot 90}{6\cdot 22\frac{1}{2}+6\cdot 90-22\frac{1}{2}\cdot 90}=\frac{24300}{2700}=\underline{\underline{9}}\text{ hodin.}$$

Zkouška a *odpověď* viz řešení č.1.

3.5.7. <u>Skupina 7:</u> *„Specifické druhy práce"*

Úlohy obsahují zadání o společné práci subjektů. V úlohách se mohou vyskytovat větší skupiny subjektů. Jedná se o specifické druhy společné práce nebo o úlohy, které nelze zařadit do předchozích skupin. Často se tyto úlohy řeší úměrou.

***Příklad* 5.7.1:**

Podnikatel je vázán smlouvou dokončit práci do 60 dnů; vypočítá si, že k tomu potřebuje 48 dělníků. Po 32 pracovních dnech vypukne stávka, jež trvá 20 dní. Kolik dělníků přibral podnikatel po stávce, jestliže práci dokončil do smluvené lhůty?

Řešení č. 1: - *pomocí úsudku*
48 dělníků by na stavbě za 60 dní odpracovalo celkem $48 \cdot 60$ = 2 880 dní. Do stávky bylo odpracováno $48 \cdot 32$ = 1 536 dní, zbývá odpracovat 2 880 – 1 536 = 1 344 dní. Na tuto práci zbývá již jen 60 – (32 + 20) = 8 dní. Po tuto dobu musí být na stavbě 1 344 : 8 = 168 dělníků. 48 dělníků již na stavbě pracuje, proto musí podnikatel přibrat dalších 168 – 48 = 120 dělníků.

Řešení č. 2: - *pomocí úměry*
K výpočtu využijeme úměru, budeme počítat, kolik je třeba dělníků aby udělali úkol za zbývajících 8 dní a pak zjistíme kolik jich bude třeba na dokončení (nikoliv celou stavbu).

$$\uparrow \begin{array}{l} 48\ d. \ldots\ldots\ 60\ dní \\ x\ d. \ldots\ldots\ 8\ dní \end{array} \downarrow$$

$$\frac{x}{48} = \frac{60}{8} \quad \rightarrow \quad \underline{x = 360} \text{ dělníků.}$$

K celé práci je třeba 360 dělníků, práce je třeba udělat již jen $(1-\frac{32}{60}) = \frac{7}{15}$, proto také dělníků bude třeba jen $\frac{7}{15}$ z 360, tj. $\frac{7}{15} \cdot 360$ = 168. Protože na stavbě již 48 dělníků pracuje, musíme přidat 168 – 48 = 120 dělníků.
Protože jsme úlohu vyřešili dvěma způsoby, můžeme jedno řešení považovat za zkoušku druhého řešení.
Odpověď:
Aby podnikatel dokončil práci ve smluveném termínu, musí přibrat 120 dělníků.

***Příklad* 5.7.2:**
Rybník počali vypouštět 1. září stavidlem, jímž by se vyprázdnil do 15. října, kdy se má lovit. V měsíci září pršelo tak, že do konce října vytekla jen $\frac{1}{3}$ vody; i vytáhnou ještě druhé stavidlo, které po 10 dnech opět spustí. Voda pak vytéká opět jen prvním stavidlem; rybník je vypuštěn v pravý čas. Za kolik dní by vytekla voda z rybníka jen druhým stavidlem?

Řešení č. 1:
Za měsíc září mělo vytéct $\frac{2}{3}$ vody, vytekla však jen $\frac{1}{3}$ vody. Z toho plyne, že deštěm přibyla $\frac{1}{3}$ vody, potom se oběma stavidly vypustilo $\frac{4}{3}$ vody. Protože první stavidlo bylo otevřeno 45 dní (a za den se vypustí $\frac{1}{45}$ vody) a druhé stavidlo bylo otevřeno 10 dní (za den se vypustí $\frac{1}{x}$ vody), platí:

$$45 \cdot \frac{1}{45} + 10 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{3} \quad \Big| \cdot 3x$$

$$3x + 30 = 4x \quad \Big| - 3x$$

$$\underline{\underline{30 = x}}.$$

Řešení č. 2: - *pomocí úsudku*
Za měsíc září mělo vytéct $\frac{2}{3}$ vody, vytekla však jen $\frac{1}{3}$ vody. Z toho plyne, že deštěm přibyla $\frac{1}{3}$ vody, která druhým stavidlem vytekla za 10 dní, všechna voda pak vyteče za trojnásobek času, tj za 30 dní.
Protože jsme úlohu vyřešili dvěma způsoby, můžeme jedno řešení považovat za zkoušku druhého řešení.
Odpověď:
Jen druhým stavidlem by voda z rybníka vytekla za 30 dní.

3.6. Slovní úlohy o věku a letopočtu

3.6.1. <u>Skupina 1:</u> *„Věk jednoho člověka“*

V textu jsou údaje o letopočtu nebo o věku jednoho člověka, mohou zde být též údaje o věku jednoho člověka, které se váží ke konkrétnímu letopočtu. Hledáme buď popsaný letopočet nebo věk člověka, eventuálně obojí.

***Příklad* 6.1.1:**
Komenský prožil 36 let ve vlasti a na studiích, potom byl $\frac{1}{6}$ svého života v Lešně, na to strávil $\frac{5}{26}$ svého života v Anglii, Elblagu, Lešně, Blatném potoku a opět v Lešně a posledních $\frac{7}{39}$ svého blahodárného života byl v Amsterodamu. Kterého stáří se dožil?

Řešení č. 1:
Označme si věk Komenského x, potom platí

$$36+\frac{1}{6}x+\frac{5}{26}x+\frac{7}{39}x=x,$$

řešení rovnice je $\underline{\underline{x = 78}}$.
Zkouška:
Doba ve vlasti a na studiích je 36 let,
doba v Lešně je $\frac{1}{6}\cdot 78 = 13$ let,
doba v Anglii, Elblagu je $\frac{5}{26}\cdot 78 = 15$ let,
doba v Amsterodamu je $\frac{7}{39}\cdot 78 = 14$ let;
celkem je Komenskému $36 + 13 + 15 + 14 = \underline{78}$ let.
Odpověď:
Komenský se dožil 78 let.

Řešení č. 2:
Věk Komenského musí být společný násobek čísel 6, 26, 39. Tím je číslo (nejmenší násobek) 78. Další násobek 156 již nepřipadá v úvahu.
Zkouška a *odpověď* viz řešení č. 1.

***Příklad* 6.1.2:**
Alexandr pravil ke svým generálům:„*Jsem o dva roky mladší než Hephastion*“. Klytus odvětil:„*Jsem o čtyři roky starší než vy oba dohromady*“. Posléze řekl Kallisthenes:„*Můj otec, který má 96 let, jest tak stár jako vy tři dohromady*“. Jak stár byl Alexandr?

Řešení:
Označíme: a – věk Alexandrův, h – věk Hephastionův, k – věk Klytusův. Potom vyjádřením vztahů v textu dostáváme soustavu rovnic:

$$a + 2 = h$$
$$k = a + h + 4 \quad \rightarrow \quad k = a + a + 2 + 4 = 2a + 6$$
$$\underline{96 = a + h + k}$$

Dosazením do třetí rovnice dostaneme:

$$96 = a + a + 2 + 2a + 6,$$

odkud $\underline{\underline{a = 22}}$.

Zkouška:
Věk Alexandrův: 22 let, věk Hephastionův: 22 + 2 = 24 let, věk Klytusův: 22 + 24 + 4 = 50 let, celkem: 22 + 24 + 50 = <u>96</u> let.
Odpověď:
Alexandr byl stár 22 let.

3.6.2. <u>Skupina 2:</u> *„Věk dvou lidí“*

V textu jsou údaje o věku dvou lidí. Údaje jsou buď absolutní nebo mohou být dány vztahy mezi věkem obou osob, eventuelně se údaje váží ke konkrétnímu letopočtu. Úkolem je určit věk obou lidí nebo jednoho z nich.

***Příklad* 6.2.1:**
Stáří dvou osob je v poměru 5 : 6, před 4 roky bylo v poměru 4 : 5. Které je jejich stáří?

<u>*Řešení*:</u>
Stáří první osoby označme x, druhé y, potom platí

$$x : y = 5 : 6 \quad \Big| \cdot y$$
$$\underline{(x-4) : (y-4) = 4 : 5} \quad \Big| \cdot 5 \cdot (y-4)$$
$$x = \tfrac{5}{6}\, y$$
$$\underline{5 \cdot (\tfrac{5}{6}\, y - 4) = 4 \cdot (y-4)} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y = 24}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x = 20}}$$

Zkouška:
Poměr věků nyní je 20 : 24 = 5 : 6.
Poměr věků před 4 roky byl 16 : 20 = 4 : 5.
Odpověď:
Stáří osob je 20 let a 24 let.

***Příklad* 6.2.2:**
Matce je 44 let, její dceři 14 let. Za kolik let matka bude nebo byla čtyřikrát starší než dcera?

<u>*Řešení* č. 1:</u> – *pomocí rovnice*
Označme x za kolik let bude (nebo byla – vyjde záporně) matka čtyřikrát starší než dcera. Potom platí

$$(44 + x) : (14 + x) = 4.$$

Řešením je $x = -4$, proto se požadovaná událost stala před čtyřmi lety.
Zkouška:
Stáří matky před 4 lety = 44 – 4 = 40 let;
stáří dcery před 4 lety = 14 – 4 = 10 let;
poměr jejich věků je pak = 40 : 10 = 4.
Odpověď:
Matka byla čtyřikrát starší než dcera před 4 lety.

Řešení č. 2: – *pomocí obecného modelu*
Označme x za kolik let bude (nebo byla – vyjde záporně) matka čtyřikrát starší než dcera, současné stáří matky m, současné stáří dcery d a požadovaný poměr jejich věků k. Potom můžeme vytvořit model

$$(m + x) : (d + x) = k \quad \Big| \cdot (d + x)$$
$$m + x = kd + kx \quad \Big| - kd - x$$
$$m - kd = kx - x$$
$$x \cdot (k - 1) = m - kd \quad \Big| : (k - 1)$$

a dostáváme vztah pro x:

$$x = \frac{m - kd}{k - 1}. \qquad \textbf{(3-23)}$$

Je-li $m = 44$, $d = 14$ a $k = 4$, dosadíme do vztahu (3-23) a dostáváme

$$x = \frac{44 - 4 \cdot 14}{4 - 1} = \frac{-12}{3} = -4.$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v řešení č. 1.

3.6.3. Skupina 3: *„Věk tří lidí“*

V textu jsou údaje o věku tří lidí. Údaje jsou absolutní, také mohou být dány vztahy mezi věkem všech osob nebo se věk váže ke konkrétnímu letopočtu. Úkolem je určit věk všech lidí nebo jen některého z nich.

***Příklad* 6.3.1:**
Otci je 52 let, jeho synům 24 a 18 let. Za kolik let bude otci tolik jako oběma synům dohromady?

Řešení č. 1: - *pomocí rovnice*
Označme si x počet let, kdy nastane požadovaná situace, potom platí

$$52 + x = 24 + x + 18 + x$$
$$52 + x = 42 + 2x \quad \Big| - x - 42$$
$$x = 10$$

Zkouška:
Za 10 let bude otci 52 + 10 = 62 let; staršímu synovi bude 24 + 10 = 34, mladšímu synovi bude 18 + 10 = 28 let, dohromady jim bude 34 + 28 = 62 let.
Odpověď:
Za 10 let bude otci tolik jako oběma synům dohromady.

Řešení č. 2: - *pomocí úsudku*
Všichni tři budou stárnout stejně, potom starší syn bude „vyrovnávat“ otcovo stárnutí a mladší bude „vyrovnávat“ stávající rozdíl, který je 52 – (24 + 18) = 10 let. Z toho plyne, že požadovaná situace nastane za 10 let.

Řešení č. 3: - *pomocí obecného modelu*
Označme: x – dobu, za kterou nastane požadovaná situace,
o – věk otce,
s – věk staršího syna,

m – věk mladšího syna,

k – násobek, kolikrát bude otec starší,

potom platí:

$$o + x = k \cdot (s + x + m + x)$$
$$o + x = ks + km + 2kx \quad \big| - x - ks - km$$
$$o - ks - km = 2kx - x$$
$$x \cdot (2k - 1) = o - ks - km \quad \big| : (2k - 1)$$
$$\underline{\underline{x = \frac{o - ks - km}{2k - 1}}}, \quad k \neq \frac{1}{2}. \qquad \textbf{(3-24)}$$

Je-li $k = 1$, dostáváme $\underline{\underline{x = o - s - m}}$.

V našem případě $x = o - s - m$, $o = 52$, $s = 24$, $m = 18$,

a tedy $x = 52 - 24 - 18 \;\rightarrow\; \underline{\underline{x = 10}}$.

Zkouška a *odpověď* stejně jako v řešení č. 1.

***Příklad* 6.3.2:**

Otci je 38 let, dětem 4 a 9 let. Za kolik let bude otec dvakrát starší než obě děti dohromady?

Řešení č. 1: - *pomocí rovnice*

Označme si počet let, kdy nastane požadovaná situace x, potom platí

$$38 + x = (9 + x + 4 + x) \cdot 2$$
$$38 + x = 26 + 4x \quad \big| - x - 26$$
$$3x = 12 \quad \big| : 3$$
$$\underline{\underline{x = 4}}$$

Zkouška:

Za 4 roky bude otci 38 + 4 = 42 let; staršímu synovi bude 9 + 4 = 13, mladšímu synovi bude 4 + 4 = 8 let, dohromady jim bude 13 + 8 = 21 let. Potom poměr 42 : 21 = 2.

Odpověď:

Za 4 roky bude otci dvakrát tolik jako oběma synům dohromady.

Řešení č. 2: - *pomocí obecného modelu*

Podle (3-24) platí: $x = \dfrac{o - ks - km}{2k - 1}$.

V naší úloze je $o = 38$, $s = 9$, $m = 4$, $k = 2$ a potom dostáváme

$$\underline{\underline{x}} = \frac{38 - 2 \cdot 9 - 2 \cdot 4}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{12}{3} = \underline{\underline{4}}$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v řešení č. 1.

3.6.4. Skupina 4: *„Věk čtyř a více lidí“*

V textu jsou údaje o věku čtyř nebo více lidí. Údaje jsou absolutní, mohou být dány vztahy mezi věkem některých (i všech) osob nebo se věk váže ke konkrétnímu letopočtu. Úkolem je určit věk všech lidí nebo jen některého z nich.

***Příklad* 6.4.1:**
V rodině se dvěma dětmi je všem dohromady 100 let. Chlapci je 13 let, jeho sestra je o 4 roky mladší. Otec je o 6 let starší než matka. Kolik roků je každému z rodičů?

Řešení č. 1: – *pomocí rovnice*
Chlapci je 13 let, jeho sestře 13 – 4 = 9 let, otcův věk označme *x*, potom věk matky je $x - 6$.
Dostáváme

$$x + x - 6 + 13 + 9 = 100,$$

odkud $x = 42$.
Zkouška:
Věk otce je 42 let;
věk matky je 42 – 6 = 36 let;
věk chlapce je 13 let, věk jeho sestry je 9 let;
celkem: 42 + 36 + 13 + 9 = 100.
Odpověď:
Otci je 42 let, matce 36 let.

Řešení č. 2: – *pomocí úsudku*
Protože synovi je 13 let, dceři 9 let, zbývá na věk rodičů 100 – (13 + 9) = 78 let.
Průměrný věk rodičů je 78 : 2 = 39 let. Protože věkový rozdíl je 6 let, je otec o 3 roky starší než je průměr, proto je mu 39 + 3 = 42 let. Matka je naopak o 3 roky mladší než je průměr, je jí tedy 39 – 3 = 36 let.
Zkouška a *odpověď* – viz řešení č. 1.

***Příklad* 6.4.2:**
Rodině skládající se z rodičů a dvou dítek, je dohromady 77 let. Matce s mladším dítětem je dohromady o 1 rok méně než otci; se starším dítětem je jí o rok méně než otci a mladšímu dítěti dohromady; věk otcův pak je čtyřikráte větší než součet věků obou dítek. Určete věky všech členů rodiny!

Řešení:
Označme věk otce *x*, věk matky *y*, věk staršího dítěte *z* a věk mladšího dítěte *w*. Potom lze vztahy mezi jednotlivými věky vyjádřit soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 77 \\ x + w &= y + z + 1 \\ x &= y + w + 1 \\ \underline{x} &\underline{= 4 \cdot (z + w)} \end{aligned}$$

Upravíme a dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 77 \\ x - y - z + w &= 1 \\ x - y - w &= 1 \\ \underline{x - 4z - 4w} &\underline{= 0} \ , \end{aligned}$$

kterou můžeme řešit například pomocí matic.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 77 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 77 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -76 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 77 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 38 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & -39 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$, odkud plyne: $\underline{\underline{x = 36}}$, $\underline{\underline{y = 32}}$, $\underline{\underline{z = 6}}$, $\underline{\underline{w = 3}}$.

Zkouška:
Věk otce = 36 let; součet věku matky a mladšího dítěte = 32 + 3 = 35 let;
rozdíl = 36 – 35 = 1 rok.
Věk otce a mladšího dítěte = 36 + 3 = 39 let; věk matky a staršího dítěte = 32 + 6 = 38 let;
rozdíl = 39 – 38 = 1 rok.
Součet věku dětí = 6 + 3 = 9 let; podíl věku otce a dětí = 36 : 9 = 4.
Odpověď:
Otci je 36 let, matce 32 let, dětem 6 let a 3 roky.

3.6.5. Skupina 5: *„Neurčité zadání věku"*

V textu těchto úloh jsou údaje o věku lidí. Údaje jsou absolutní, mohou být dány vztahy mezi věkem některých (i všech) osob nebo se věk váže ke konkrétnímu letopočtu. Údaje jsou buď neúplné nebo jsou nějakým způsobem komplikované (jsou nějak specifické). Jsou zde též úlohy, které nejde zařadit do předchozích skupin. Úkolem je určit věk všech lidí nebo jen některého z nich.

***Příklad* 6.5.1:**
Součet věků všech tří synů pana Nováka je 21. Trojnásobek věku prostředního je roven dvojnásobku rozdílu věků nejstaršího a nejmladšího. Jak jsou staří synové pana Nováka?

Řešení:
Označíme si věky synů: x – nejstaršího, y – prostředního, z – nejmladšího. Potom dostáváme:

$$x + y + z = 21$$
$$3y = 2\cdot(x - z)$$

$$x + y + z = 21 \quad |\cdot 2$$
$$2x - 3y - 2z = 0$$

$$4x - y = 42$$

$$x = \frac{y + 42}{4} \quad \ldots \text{ hledáme } y \text{ tak, aby } x \text{ bylo celočíselné}$$

$y = 2; 6; 10; 14; \ldots$ . . . a vypočteme x, z.

Zapíšeme do tabulky:

x:	*y*:	*z*:	
11	2	8	. . . *z* není nejmladší, nevyhovuje
12	6	3	. . . vyhovuje
13	10	–2	. . . z je záporné, nevyhovuje

Odpověď:
Synové pana Nováka jsou staří 12, 6 a 3 roky.

***Příklad* 6.5.2:** (*Pro trpělivé počtáře*)
Matka má 9 dětí, narozených v pravidelných intervalech. Věky všech jsou dány celými počty let. Součet čtverců věků všech devíti dětí je roven čtverci matčina věku. Jak jsou staří?

Řešení:
Řešení zpracováno podle [71].
Použijme metodu matematizace reálných situací. (Pravděpodobnost, že reálně nastane popsaná situace, je poměrně malá. Jedná-li se o tzv. „zajímavou úlohu“, vystačíme s tvrzením, že tato situace by nastat mohla.)

Nejprve zvolme neznámé. Věk nejmladšího dítěte označíme x, konstantní rozdíl věku dětí y a věk matky z. Všechna čísla x, y, z jsou přirozená (pro x připustíme i nulu).

Zadanou úlohu lze modelovat kvadratickou rovnicí o třech neznámých

$$x^2 + (x + y)^2 + (x + 2y)^2 + (x + 3y)^2 + (x + 4y)^2 + (x + 5y)^2 + (x + 6y)^2 + (x + 7y)^2 + \\ + (x + 8y)^2 = z^2. \qquad (1)$$

řešenou (z pohledu matematiky) v oboru nezáporných celých číslech. Dále rozdíl věku prvního a posledního dítěte je $8y$, což nemůže přesáhnout dobu, po kterou může žena rodit děti. Takže z toho plyne, že pro rozdíl věku dětí platí: $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Řešme nyní rovnici (1).
Po úpravě dostáváme:

$$9x^2 + 72xy + 204\, y^2 = z^2.$$

Na levé straně rovnice vytkneme číslo 3:

$$3 \cdot (3x^2 + 24xy + 68y^2) = z^2.$$

Z toho plyne, že výraz na levé straně rovnice je dělitelný třemi, a proto také z^2 je dělitelné třemi, tj. $3 \mid z^2 \Rightarrow 3 \mid z$ a můžeme psát $z = 3k$, $k \in N$.
Potom platí:

$$3 \cdot (3x^2 + 24xy + 68y^2) = (3k)^2$$

$$3 \cdot (3x^2 + 24xy + 68y^2) = 9k^2 \qquad | : 9$$

$$x^2 + 8xy + \tfrac{68}{3} y^2 = k^2$$

a z toho plyne, že také y^2 a tedy i y je dělitelné třemi, protože výraz na levé straně rovnice je celé číslo. Podle výše uvedeného předpokladu je tedy $y = 3$ a rovnici (1) lze postupně upravit na tvar

$$k^2 = x^2 + 24x + 204$$
$$k^2 = (x + 12)^2 + 60$$
$$k^2 - (x + 12)^2 = 60$$

a obě strany rovnice rozložíme na tvar:

$$(k - x - 12) \cdot (k + x + 12) = 2{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}5;$$

protože druhý výraz je minimálně o 24 větší než první, jediná možnost je

$$k - x - 12 = 2$$

$$k + x + 12 = 30.$$

Odsud $k = 16$, $x = 2$. Potom $z = 48$.

Jediným řešením dané úlohy je tedy věk matky 48 let a stáří devíti dětí: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 a 26 let.

Zkouška:

Součet čtverců všech devíti dětí narozených v pravidelných intervalech je

$2^2 + 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2 + 17^2 + 20^2 + 23^2 + 26^2 = 2304$.

Čtverec matčina věku je $48^2 = 2304$. Obě hodnoty se rovnají.

Odpověď:

Věk matky je 48 let a stáří devíti dětí je: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 a 26 let.

Kapitola IV - Vyhodnocení testů a dotazníků

4.1. Testové úlohy a výsledky testových úloh

Při provádění klasifikace slovních úloh a hledání způsobu jejich řešení jsem dospěl k otázce, jaké způsoby řešení budou preferovat studenti základních a středních škol a jaká bude frekvence použití jednotlivých způsobů řešení. Také mne zajímalo, budou-li nějaké rozdíly mezi chlapci a děvčaty, a to jak v použitých metodách, tak i ve výsledcích. Proto jsem sestavil čtyři varianty testových úloh a ve spolupráci s řediteli a vyučujícími na základních a středních školách Jihočeského kraje byly ve školním roce 2010 – 2011 testy zadány a vyhodnoceny.

4.1.1. Texty testových úloh

Celkem 269 žáků základních škol a studentů středních škol řešilo vybrané slovní úlohy. Test obsahoval čtyři slovní úlohy a časová dotace byla 40 minut. Testy byly ve čtyřech variantách, první příklad byl vždy slovní úloha o celku a částech, druhá vždy o směsích, třetí vždy o pohybu a čtvrtá vždy o společné práci.

Skupinu A řešilo 47 dívek a 35 chlapců, celkem 82 žáků a studentů; skupinu B řešilo 39 dívek a 36 chlapců, celkem 75 žáků a studentů; skupinu C řešilo 28 dívek a 30 chlapců, celkem 58 žáků a studentů; skupinu D řešilo 25 dívek a 29 chlapců, celkem 54 žáků a studentů.

Testy řešilo 71 dívek a 53 chlapců, celkem 124 žáků základních škol (včetně nižšího stupně víceletých gymnázií), testy byly zadány žákům 9. tříd (či žákům kvarty víceletých gymnázií). Dále testy řešilo 68 dívek a 77 chlapců, celkem 145 studentů středních škol, testy byly zadány studentům 1. a 2. ročníků (či studentům kvinty víceletých gymnázií).

Titulní list testu vypadal následovně:

TEST
(student, žák)

Chlapec: …………	☐	**Škola: ZŠ ………………**	☐
Dívka: ……...........	☐	**SŠ: gymnázium …………**	☐
Třída ……...........	☐	**SOŠ ______________**	☐
Číslo ……...........	☐	**jiné ______________**	☐

Legenda:

1. Úlohu můžete řešit jakýmkoliv způsobem.
2. Řešení zapisujte celé (žádnou část řešení nevynechávejte).
3. Při řešení můžete používat kalkulačky.
4. Nezapomeňte u každého příkladu provést zkoušku.

Testy zadávali žákům a studentům jejich vyučující matematiky, kteří byli instruováni tak, aby informace udělené při zadání byly jednotné. Jednotlivé varianty byly přiřazovány náhodně. Třetí příklad ve variantě D byl formulován dvojím způsobem. Jedna z formulací měla být pro řešitele spíše matoucí, druhá (ve variantě D_0) měla být snadněji pochopitelná. Testové úlohy skupin A – D byly následující:

Varianta A:

1. Ve třech skladištích bylo uloženo celkem 70 tun obilí. V druhém skladišti bylo uloženo o 8,5 t méně a ve třetím skladišti o 3,5 t více než v prvním skladišti. Kolik tun obilí bylo uloženo v jednotlivých skladištích?

2. Denní produkce mléka 630 litrů byla k odvozu slita do 22 konví, z nichž některé byly po 25 litrech, jiné po 35 litrech. Všechny konve byly plné. Kolik bylo jednotlivých konví?

3. Kamion jede po dálnici z Prahy do Bratislavy průměrnou rychlostí 72 km/h. V okamžiku, kdy je kamion od Prahy 54 km, vyjíždí z Prahy osobní auto, které jede rovněž do Bratislavy a jehož průměrná rychlost je 90 km/h. Kdy a na kterém kilometru dálnice Praha – Bratislava dohoní osobní auto kamion.

4. Vodní nádrž by se naplnila jen prvním přítokem za 36 minut, jen druhým za 45 minut. Za jak dlouho se nádrž naplní, přitéká-li voda nejprve 9 minut jen prvním přívodem a pak oběma současně?

Varianta B:

1. Písemnou zkoušku z matematiky psalo 37 žáků, nikdo z nich neměl pětku. Jedniček bylo dvakrát víc než čtyřek, dvojek bylo o 6 více než jedniček, trojek bylo 11. Kolik žáků mělo jedničku, kolik dvojku, trojku a čtyřku?

2. Pět litrů bílého vína a šest litrů červeného vína stálo 432 Kč. Jeden litr červeného vína je o 6 Kč dražší než 1 litr bílého vína. Kolik korun zaplatíme za 2 litry bílého a 2 litry červeného vína?

3. Pánové *A* a *B* bydlí ve vzdálenosti 224 km. Vyjedou-li v autech současně ze svých obydlí proti sobě, setkají se po 2 hodinách. Pán *A* ujede za hodinu o 4 km více než pán *B*. Kolik km urazí každý z nich za hodinu?

4. Dělník *A* by sám provedl výkop za 7 hodin, dělník *B* sám za 6 hodin. Protože výkop má být skončen za 2 hodiny, byl přibrán ještě dělník *C*. Za jak dlouho by výkop provedl sám dělník *C*?

Varianta C:

1. Tři sourozenci měli našetřeno celkem 1 274 Kč. Petr měl našetřeno o 15 % více než Jirka a Hanka o 10 % méně než Petr. Kolik korun měl našetřeno každý z nich?

2. Ze dvou druhů čaje o ceně 160 Kč a 220 Kč za 1 kilogram se má připravit 20 kg směsi v ceně 205 Kč za 1 kilogram. Kolik kilogramů každého druhu čaje bude třeba smíchat?

3. Auto ujelo vzdálenost mezi městy *A* a *B* za 4 hodiny. Kdyby se průměrná rychlost auta zvýšila o 17 km/h, ujelo by auto tuto vzdálenost o hodinu dříve. Určete rychlost auta a vzdálenost mezi městy *A* a *B*.

4. Vodní nádrž se naplní jen prvním přítokem za 10 hodin, jen druhým za 12 hodin a jen třetím za 15 hodin. Za jak dlouho se naplní, budou-li otevřeny všechny tři přítoky současně?

Varianta D:

1. Zákazník si koupil tričko, kravatu a košili. Nejprve si vybral košili, k ní pak kravatu, která byla třikrát levnější než košile. Nakonec si koupil tričko, které bylo o 140 Kč dražší než kravata. Celkem zaplatil 940 Kč. Kolik zaplatil za kravatu, kolik za tričko a kolik za košili?

2. 20 brouků a pavouků má dohromady 146 nohou. Kolik je brouků a kolik je pavouků, má-li brouk 6 nohou a pavouk 8 nohou?

3. Po dvojkolejné trati mezi stanicemi *K* a *M* jely proti sobě dva vlaky. První vlak projel vzdálenost mezi stanicemi za dvě hodiny, druhý, který měl průměrnou rychlost o 15 km/h větší, ji projel za 1,5 hodiny. Vypočítejte průměrné rychlosti obou vlaků a vzdálenost stanic *K* a *M*.

   Varianta D_0:

   V pátek urazil nákladní vlak vzdálenost mezi stanicemi *K* a *M* za 2 hodiny. Další nákladní vlak z *K* měl v sobotu průměrnou rychlost o 15 km/h větší, takže do *M* přijel už za 1,5 hod. Vypočítejte průměrné rychlosti obou vlaků a vzdálenost stanic *K* a *M*.

4. Prvním kombajnem lze sklidit obilí z určitého lánu za 30 hodin, druhým, výkonnějším kombajnem za 20 hodin. Za kolik hodin bylo sklizeno obilí z tohoto lánu, jestliže se sklízelo současně oběma kombajny, ale druhý kombajn se porouchal a první ještě pracoval sám 5 hodin, aby dokončil sklizeň?

4.1.2. Výsledky žáků a studentů v testových úlohách

Základem pro porovnání výsledných známek byly průměry ze všech sledovaných škol. Školy byly rozděleny na základní školy a střední školy a navíc byla ještě vyčleněna gymnázia (společně vyšší i nižší). Potom ještě byly speciálně sledovány základní školy bez nižších gymnázií, střední odborné školy (tj. střední školy bez gymnázií), nižší gymnázia (tj. primy až kvarty víceletých gymnázií) a vyšší gymnázia (tj. kvinty až oktávy víceletých gymnázií a čtyřletá gymnázia). Dosažené výsledky ve skupinách A - D shrnuje tabulka 4-1.

Budeme-li porovnávat všechny varianty A – D, lepších výsledků ve velké většině případů dosahovali studenti středních škol (ve srovnání se žáky základních škol) a to ve třinácti z patnácti ukazatelů. Přiřadíme-li k tomu ještě speciálně vyčleněnou skupinu žáků a studentů gymnázií, vidíme, že ve většině ukazatelů jsou tito nejlepší (ve dvanácti z patnácti ukazatelů, ve zbývajících třech jsou to střední školy a to zásluhou středních odborných škol).

Rozdělíme-li školy na základní školy bez gymnázií, střední odborné školy (tj. střední školy bez gymnázií), nižší gymnázia a vyšší gymnázia a hodnotíme-li opět stejných patnáct ukazatelů, potom nejlepších výsledků dosáhla vyšší gymnázia, a to v jedenácti ukazatelích, ve dvou ukazatelích byli nejlepší žáci nižších gymnázií (příklad 2) a ve dvou studenti středních odborných škol (příklad 4). Žáci ze základních škol (bez gymnázií) nebyli nejlepší v žádném z ukazatelů. Nejčastěji nejhorší byli studenti středních odborných škol, a to v osmi ukazatelích; pouze ve čtyřech ukazatelích byli nejhorší žáci základních škol (bez gymnázií) a ve třech ukazatelích byli nejhorší žáci nižších gymnázií. Studenti vyšších gymnázií nebyli nejhorší v žádném ukazateli.

Tabulka 4-1 – Průměrné známky z testů všech variant A – D ve všech typech škol:

Všechny školy:

A - D	D	H	V
1. př.	2,49	2,67	2,58
2. př.	3,28	3,34	3,31
3. př.	3,81	3,57	3,69
4. př.	4,09	3,85	3,97
celé	3,37	3,36	3,37

Střední školy

A - D	D	H	V
1. př.	2,21	2,46	2,34
2. př.	3,48	3,34	3,40
3. př.	3,74	3,56	3,64
4. př.	3,91	3,75	3,82
celé	3,25	3,30	3,28

Základní školy (včetně gy)

A - D	D	H	V
1. př.	2,76	3,07	2,89
2. př.	3,09	3,46	3,25
3. př.	3,87	3,72	3,81
4. př.	4,27	4,14	4,21
celé	3,49	3,58	3,53

Gymnázia

A - D	D	H	V
1. př.	2,15	2,25	2,20
2. př.	2,51	2,88	2,69
3. př.	3,73	3,19	3,46
4. př.	4,42	3,77	4.10
celé	3,15	3,00	3,08

Vyšší gymnázia:

A - D	D	H	V
1. př.	2,12	1,91	2,01
2. př.	2,74	2,76	2,75
3. př.	3,26	3,09	3,16
4. př.	4,03	3,70	3,85
celé	2,94	2,88	2,90

Nižší gymnázia:

A - D	D	H	V
1. př.	2,19	2,95	2,51
2. př.	2,21	3,13	2,60
3. př.	4,33	3,42	3,94
4. př.	4,92	3,92	4,50
celé	3,42	3,26	3,36

Střední odborné školy: **Základní školy (bez gy):**

A - D	D	H	V	A - D	D	H	V
1. př.	2,30	3,05	2,69	1. př.	3,09	3,13	3,11
2. př.	4,17	3,96	4,06	2. př.	3,60	3,65	3,62
3. př.	4,20	4,07	4,13	3. př.	3,61	3,88	3,73
4. př.	3,80	3,80	3,80	4. př.	3,89	4,26	4,05
celé	3,54	3,77	3,65	celé	3,53	3,76	3,63

Nejjednodušším příkladem byl soubor příkladů číslo 1 „o celku a částech“, jehož hodnocení bylo výrazně nejlepší. Druhým v pořadí byl soubor příkladů číslo 2 „o směsích“, jehož hodnocení bylo ještě mírně lepší než byl celkový průměr. Třetím v pořadí byl soubor příkladů číslo 3 „o pohybu“, jehož hodnocení již bylo horší než celkový průměr. Nejtěžším byl soubor příkladů číslo 4 „o společné práci“, jehož hodnocení bylo výrazně nejhorší. Určitý vliv na špatné hodnocení příkladů číslo 4 mělo i to, že tyto příklady byly poslední a někteří řešitelé neměli dostatek času na jejich řešení.

Při porovnávání výsledků dívek a chlapců jsou výsledky u jednotlivých příkladů ve všech školách srovnatelné, mírně lepších výsledků dosahují dívky v prvních dvou příkladech (tyto příklady jsou jednodušší, a proto i průměry známek jsou lepší), v druhých dvou příkladech (tyto příklady jsou těžší, a proto i průměry známek jsou horší) dosahují mírně lepších výsledků chlapci. Celkové výsledky jsou téměř stejné (rozdíl průměrů je 0,01), jsou v rozsahu statistické chyby.

V jednotlivých skupinách typů škol jsou rozdíly mezi výsledky dívek a chlapců rozličné. Nejlépe vyznívá pro dívky hodnocení na základních školách bez nižších gymnázií, kde ve všech pěti sledovaných případech hodnocení jsou dívky úspěšnější, naopak nejhůře vychází hodnocení pro dívky na středních odborných školách, kde jsou dívky lepší pouze v jednom sledovaném případě.

Z jednotlivých variant (viz tabulka 4-2) se celkovému průměru známek velmi blížily varianty A, D, zatímco ve variantě C se výsledky jednotlivých příkladů velmi lišily od celkových průměrů. Celkově výrazně lépe dopadly příklady č. 1 a 2, naopak výrazně hůře příklady č. 3 a 4. Také se jevil velký rozdíl mezi výsledky dívek a chlapců. Zatímco dívky měly výsledky lepší než byl průměr v příkladech č. 1 a 2, chlapci naopak měli lepší výsledky než průměr v příkladech č. 3 a 4. I když v jednotlivých variantách byly určité odlišnosti, celkem se výsledky vyrovnaly k průměru (zejména při srovnání celkových výsledků dívek a chlapců).

Tabulka 4-2 – Průměrné známky z testů variant A, B, C, D ve všech typech škol:

Všechny školy:

A	D	H	V	B	D	H	V
1. př.	2,02	2,34	2,16	1. př.	1,85	2,18	2,01
2. př.	3,09	3,60	3,30	2. př.	2,91	2,92	2,91
3. př.	3,91	4,11	4,00	3. př.	3,50	2,97	3,25
4. př.	4,18	4,24	4,21	4. př.	4,33	3,61	3,99
celé	3,19	3,54	3,34	celé	3,15	2,97	3,07

C	D	H	V	D	D	H	V
1. př.	4,27	3,90	4,08	1. př.	2,40	2,57	2,49
2. př.	4,09	4,08	4,09	2. př.	3,32	3,00	3,15
3. př.	3,91	3,83	3,87	3. př.	3,98	3,62	3,79
4. př.	3,61	3,87	3,74	4. př.	4,10	3,91	4,00
celé	3,93	4,00	3,97	celé	3,44	3,21	3,31

Střední školy

A	D	H	V	B	D	H	V
1. př.	1,90	1,98	1,93	1. př.	1,76	1,96	1,87
2. př.	3,63	3,61	3,62	2. př.	3,08	2,63	2,83
3. př.	3,92	4,14	4,02	3. př.	3,32	2,91	3,10
4. př.	4,08	4,00	4,04	4. př.	4,16	3,28	3,68
celé	3,21	3,41	3,30	celé	3,05	2,74	2,88

C	D	H	V	D	D	H	V
1. př.	4,35	3,92	4,11	1. př.	1,87	2,70	2,34
2. př.	4,10	4,58	4,36	2. př.	3,33	3,10	3,20
3. př.	4,05	3,88	3,93	3. př.	3,80	3,48	3,61
4. př.	3,65	3,96	3,82	4. př.	3,50	3,88	3,71
celé	3,90	4,25	4,09	celé	3,13	3,25	3,20

Základní školy

A	D	H	V	B	D	H	V
1. př.	2,15	2,96	2,44	1. př.	1,93	2,58	2,18
2. př.	2,52	3,58	2,90	2. př.	2,75	3,42	3,02
3. př.	3,91	4,08	3,97	3. př.	3,68	3,08	3,44
4. př.	4,28	4,65	4,42	4. př.	4,50	4,19	4,39
celé	3,17	3,77	3,39	celé	3,25	3,38	3,30

C	D	H	V	D	D	H	V
1. př.	4,22	3,89	4,06	1. př.	3,20	2,28	2,76
2. př.	4,08	3,75	3,92	2. př.	3,30	2,78	3,05
3. př.	3,83	3,81	3,82	3. př.	4,25	3,94	4,11
4. př.	3,58	3,81	3,69	4. př.	5,00	4,00	4,53
celé	3,94	3,83	3,89	celé	3,90	3,11	3,53

Gymnázia

A	D	H	V	B	D	H	V
1. př.	1,98	1,46	1,78	1. př.	1,74	1,75	1,74
2. př.	2,52	2,79	2,62	2. př.	2,32	2,72	2,52
3. př.	4,13	3,39	3,85	3. př.	3,38	2,81	3,11
4. př.	4,76	3,96	4,46	4. př.	4,41	3,38	3,91
celé	3,22	2,86	3,08	celé	3,00	2,81	2,91

C	D	H	V	D	D	H	V
1. př.	4,43	4,00	4,18	1. př.	1,75	2,32	2,10
2. př.	3,57	4,20	3,94	2. př.	2,13	2,39	2,29
3. př.	3,79	3,75	3,76	3. př.	3,42	3,08	3,21
4. př.	3,79	4,15	4,00	4. př.	4,17	3,76	3,92
celé	3,86	4,00	3,94	celé	2,83	2,74	2,78

Ve variantě B byly výsledky proti celkovému průměru téměř ve všech ukazatelích lepší, často výrazně. První tři příklady byly v porovnání s ostatními variantami řešeny nejlépe a ani poslední příklad nebyl výsledkově nejhorší. Zřejmě formulace těchto úloh nejlépe vyhovovala řešitelům (známý problém, podstata problému nebyla náročná, problém pro řešitele lehce uchopitelný apod.).

Nejhůře dopadly výsledky ve variantě C. Zejména první příklad byl výrazně horší než v ostatních skupinách – v průměru o 1,5 stupně! Ukazuje se, že zadání hodnot pomocí procent činí mnoha žákům i studentům problém a pro některé je to problém dokonce neřešitelný. Za zmínku jistě stojí i to, že nejhorších výsledků v tomto příkladě dosáhli studenti gymnázií a nejlepších žáci základních škol, dokonce skupina žáků základních škol bez nižších gymnázií dopadla lépe než ta s nižšími gymnázii. Také výsledek druhého příkladu byl mnohem horší než v jiných variantách. Zde se zřejmě projevilo, že v tomto příkladu jako v jediné skupině byla informace o tom, že se jedná o směs. Tato informace místo, aby vedla k návodu postupu, spíše řešitele vyděsila. Další dva příklady již nepatřily k nejhorším, ale jejich výsledky již ztrátu z prvních dvou příkladů nedokázaly vyrovnat.

Ve variantě D byl příklad číslo 3 formulován dvěma způsoby. V první variantě „D“ mohl řešitele mýlit pohyb dvou vlaků, i když pro vystižení principu úlohy stačil pohyb jednoho vlaku – varianta „D_0“. Při porovnání výsledku obou variant se ukázalo, že odlišné zadání v tomto případě nemělo na výsledky žádný vliv (podrobnější porovnání je v příloze 2).

4.2. Postupy, které při řešení jednotlivých variant užívali žáci a studenti

Nyní jsou uvedeny postupy, které jednotliví řešitelé, žáci základních škol a studenti středních škol, užívali při řešení úloh jednotlivých variant. U každého příkladu je uveden postup, který žáci a studenti užívali nejčastěji. Pokud byl v testu použit i jiný zajímavý postup, je také uveden. Zkoušky a odpovědi jsou uvedeny pouze v řešení č. 1. Další varianty řešení jsou v příloze 2.

Varianta A:

***Příklad* 1 – *řešení*:**
Ve třech skladištích bylo uloženo celkem 70 tun obilí. V druhém skladišti bylo uloženo o 8,5 t méně a ve třetím skladišti o 3,5 t více než v prvním skladišti. Kolik tun obilí bylo uloženo v jednotlivých skladištích?

1. způsob: (pomocí rovnice)

V 1. skladišti .... x [t],
v 2. skladišti .... $x - 8{,}5$ [t],
ve 3. skladišti .... $x + 3{,}5$ [t],

$$x + x - 8{,}5 + x + 3{,}5 = 70$$
$$3x - 5 = 70 \quad | + 5$$
$$3x = 75 \quad | : 3$$
$$\underline{\underline{x = 25}} \text{ [t]},$$

potom v prvním skladišti je 25 t, v druhém 25 – 8,5 = 16,5 t a ve třetím 25 + 3,5 = 28,5 t obilí.
Zkouška – dosazením do textu:
Celkem je 25 + 16,5 + 28,5 = 70 t obilí.
Odpověď:
V jednotlivých skladištích bylo 25 t, 16,5 t a 28,5 t obilí.

2. způsob: (aritmeticky)

Ve všech skladištích je průměrně 70 : 3 = $23{,}\overline{3}$ t obilí. Za základ vezměme, že v 1. skladišti je 23 t obilí, potom ve 2. skladišti musí být 23 – 8,5 = 14,5 t obilí a ve 3. Skladišti 23 + 3,5 = = 26,5 t obilí. Potom je ve všech třech celkem 64 t obilí.
Můžeme postupně do všech třech skladišť přidávat po 1 t a hledat, kdy bude součet 70 t. Postup zapíšeme do tabulky.

Tabulka 4-3:

1. skladiště	23 t	24 t	**25 t**	26 t	. . .
2. skladiště	14,5 t	15,5 t	**16,5 t**	17,5 t	. . .
3. skladiště	26,5 t	27,5 t	**28,5 t**	29,5 t	. . .
celkem	64 t	67 t	**70 t**	73 t	. . .

Hledané hodnoty jsou 25 t (1.), 16,5 t (2.) a 28,5 t (3.). Další řešení již neexistuje, protože součty jsou dále již větší než 70 t.
Postup můžeme zkrátit tím, že zjistíme rozdíl: 70 – 64 = 6 t a ten vydělíme třemi: 6 : 3 = 2. Ke každé hodnotě přidáme 2 t a dostaneme stejný výsledek jako v tabulce.

***Příklad* 2 – *řešení*:**
Denní produkce mléka 630 litrů byla k odvozu slita do 22 konví, z nichž některé byly po 25 litrech, jiné po 35 litrech. Všechny konve byly plné. Kolik bylo jednotlivých konví?

1. způsob: (pomocí soustavy dvou rovnic o dvou neznámých)

Počet konví po 25 l .... x [ks],
počet konví po 35 l .... y [ks],

$$x + y = 22 \quad | - x$$
$$25 \cdot x + 35 \cdot y = 630$$
$$y = 22 - x$$
$$25 \cdot x + 35 \cdot (22 - x) = 630$$
$$25x + 770 - 35x = 630 \quad | - 770$$
$$-10x = -140 \quad | : (-10)$$
$$\underline{\underline{x = 14}} \text{ [ks]} \quad \dots \quad \text{po } 25\ l,$$

po 35 l: $22 - x = 22 - 14 = \underline{\underline{8}}$ [ks].

Zkouška – dosazením do textu:

$14 \cdot 25 = 350\ l$,

$\underline{\ 8 \cdot 35 = 280\ l}$,

Celkem ….. 630 l.

Odpověď:

Konví po 25 l bylo 14, po 35 l bylo 8.

2. způsob: (aritmetický postup)

Do tabulky zapíšeme pro 25-litrové a 35-litrové konve jejich počty a objemy tak, aby v sloupci dávaly počet 22 ks. Objem ve sloupci sečteme a hledáme, kde bude součet 630 l.

Tabulka 4-4:

25 *l*	ks	22	21	20	19	18	17	16	15	**14**	13	12	11	10	9	8	7	6	5	...
	V	550	525	500	475	450	425	400	375	**350**	325	300	275	250	225	200	175	150	125	...
35 *l*	ks	0	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
	V	0	35	70	105	140	175	210	245	**280**	315	350	385	420	455	490	525	560	595	...
součet		550	560	570	580	590	600	610	620	**630**	640	650	660	670	680	690	700	710	720	...

Protože celkový objem stále narůstá, je z tabulky 4-4 zřejmé, že úloha má jediné řešení:
14 ks 25-litrových konví a 8 ks 35-litrových konví.

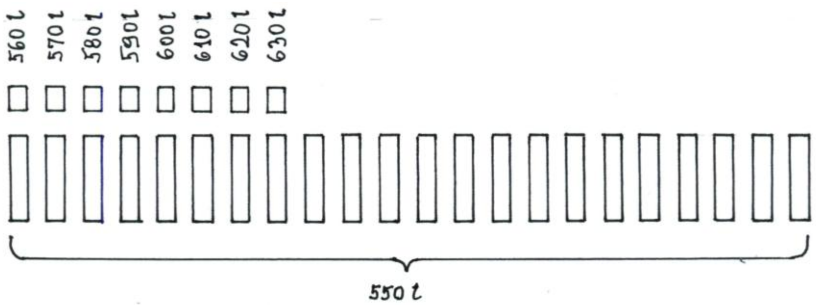
3. způsob: (úsudkem)

Celkový objem je 630 l. kdyby všech 22 konví bylo 25-litrových, je objem $22 \cdot 25 = 550\ l$. Do 630 l zbývá: $630 - 550 = 80\ l$. Toto množství musí pojmout 35-litrové konve. Protože mají objem o 10 l větší, je jich 80 : 10 = 8 ks. 25-litrových konví je pak 22 – 8 = 14 ks.

4. způsob: (graficky)

Všech 22 konví bude obsahovat alespoň 25 l mléka, celkem je to 550l. Zbytek do 630l se nalije do 35-litrových konví. Z grafu je zřejmé, že jich bude 8. 25-litrových konví je pak 14.

Obr. 4-1:



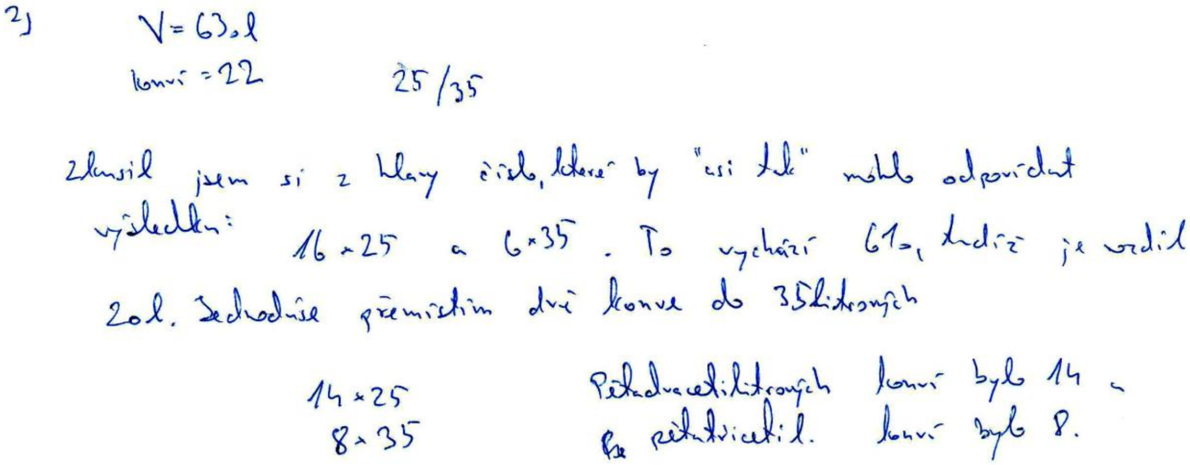
5. způsob: (metoda chybného předpokladu)

Odhadneme čísla, která by mohla odpovídat výsledku: počet 25 l konví – 16, počet 35 l konví – 6 (jejich součet musí být 22).

Potom objem v těchto konvích je 610 *l*, tudíž rozdíl je –20 *l*. Musíme tedy objem zvětšit o 20 *l* tím, že dvě 25 *l* konve přemístíme do 35 *l*. Pětadvacetilitrových konví je 14, pětatřicetilitrových konví je 8.

Tento způsob řešení zvolil student kvinty víceletého gymnázia (viz obr. 4-2):

Obr. 4-2:



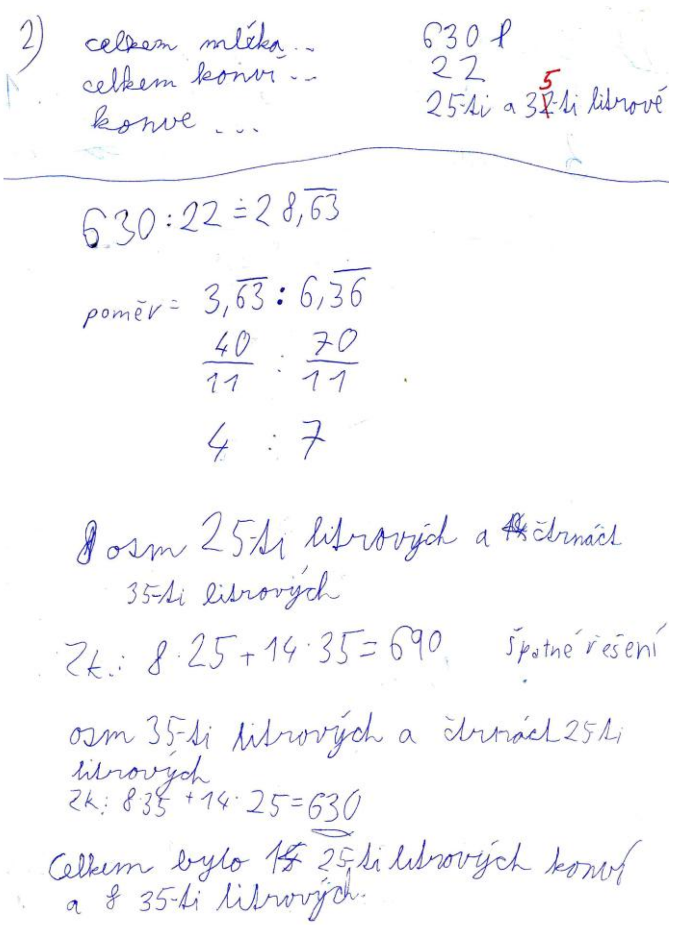
2) V = 630 l
konví = 22
25/35

Zkusil jsem si z hlavy čísla, které by "asi tak" mohly odpovídat výsledku: 16·25 a 6·35. To vychází 610, tudíž je rozdíl 20 l. Jednoduše přemístím dvě konve do 35litrových

14·25 Pětadvacetilitrových konví bylo 14 a
8·35 pětatřicetil. konví bylo 8.

Další zajímavý způsob řešení zvolil student kvarty víceletého gymnázia (viz obr. 4-3):

Obr. 4-3:



2) celkem mléka ... 630 l
celkem konví ... 22
konve ... 25-ti a 35-ti litrové

$630 : 22 \doteq 28,\overline{63}$

poměr $= 3,\overline{63} : 6,\overline{36}$

$\frac{40}{11} : \frac{70}{11}$

$4 : 7$

osm 25-ti litrových a čtrnáct 35-ti litrových

Zk.: $8 \cdot 25 + 14 \cdot 35 = 690$ špatné řešení

osm 35-ti litrových a čtrnáct 25-ti litrových
Zk: $8 \cdot 35 + 14 \cdot 25 = 630$

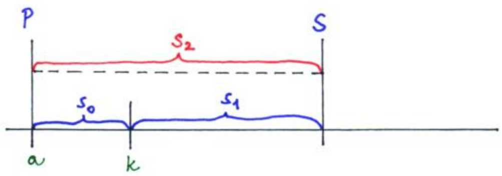
Celkem bylo 14 25-ti litrových konví a 8 35-ti litrových.

Student řešil příklad intuitivně. Pomocí zkoušky odhalil chybu ve svém postupu a opravil se. Teoretické zdůvodnění správnosti postupu je v příloze 2. V příloze 3 jsou další zajímavá žákovská a studentská řešení testových úloh i s přiloženým komentářem.

***Příklad* 3 – *řešení*:**
Kamion jede po dálnici z Prahy do Bratislavy průměrnou rychlostí 72 km/h. V okamžiku, kdy je kamion od Prahy 54 km, vyjíždí z Prahy osobní auto, které jede rovněž do Bratislavy a jehož průměrná rychlost je 90 km/h. Kdy a na kterém kilometru dálnice Praha – Bratislava dohoní osobní auto kamion.

<u>1. způsob:</u> (pomocí porovnání drah – užití rovnice)

Obr. 4-4:



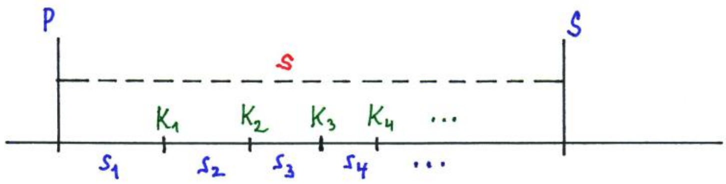
Označme si neznámou dobu jízdy osobního auta x [h]. Osobní auto jede rychlostí 90 km/h, proto do místa setkání S (kdy dohoní kamion), ujede $90x$ [km], kamion má náskok 54 km a jede rychlostí 72 km/h, proto do místa setkání ujede $(72x + 54)$ [km]. Dráhy se rovnají, tedy:

$$\begin{aligned} 72x + 54 &= 90x \quad \Big| -72x \\ 18x &= 54 \quad \Big| :18 \\ \underline{\underline{x = 3}}\ &[\mathrm{h}], \\ s_2 = 90 \cdot 3 &= \underline{\underline{270}}\ [\mathrm{km}]. \end{aligned}$$

Zkouška – dosazením do textu:
kamion .... $72 \cdot 3 + 54 = 270$ [km],
osobní auto .... $90 \cdot 3 = 270$ [km],
tedy obě auta ujela stejnou dráhu.
Odpověď:
Osobní auto dohoní kamion za 3 hodiny po svém výjezdu na 270 km dálnice (měřeno od Prahy).

<u>2. způsob:</u> (užití nekonečné geometrické řady)

Obr. 4-5:



V čase, kdy vyjíždí osobní automobil z Prahy (bod P), je kamion v bodě K_1 a má náskok 54 km. Automobil ujede dráhu s_1 do K_1 za čas $t_1 = 54 : 90 = 0{,}6$ h. Když je automobil v bodě K_1, je kamion již v bodě K_2 a ujede navíc dráhu $s_2 = 72 \cdot 0{,}6 = 43{,}2$ km. Do bodu K_2 z bodu K_1 dojede automobil za čas $t_2 = 43{,}2 : 90 = 0{,}48$ h. Za tuto dobu dojede kamion do bodu K_3 a ujede

dráhu $s_3 = 72 \cdot 0{,}48 = 34{,}56$ km. Do bodu K_3 dojede automobil za čas $t_3 = 34{,}56 : 90 = 0{,}384$ h. Za tuto dobu dojede kamion do bodu K_4 a ujede dráhu $s_4 = 72 \cdot 0{,}384 = 27{,}648$ km. Do bodu K_4 dojede automobil za čas $t_4 = 27{,}648 : 90 = 0{,}3072$ h atd. …
Nyní stačí sečíst obě nekonečné řady (jak pro dráhu, tak pro čas).
Řada $s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \ldots = 54 + 43{,}2 + 34{,}56 + 27{,}648 + \ldots$
je nekonečná geometrická řada, neboť platí

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{s_3}{s_2} = \frac{s_4}{s_3} = \ldots = \frac{43{,}2}{54} = \frac{34{,}56}{43{,}2} = \frac{27{,}648}{34{,}56} = \ldots = 0{,}8 = q\,.$$

Součet této řady je

$$s = \frac{s_1}{1-q} = \frac{54}{1-0{,}8} = \underline{\underline{270}}\ [\text{km}].$$

Řada $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots = 0{,}6 + 0{,}48 + 0{,}384 + 0{,}307\,2 + \ldots$
je nekonečná geometrická řada, neboť platí

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{t_4}{t_3} = \ldots = \frac{0{,}48}{0{,}6} = \frac{0{,}384}{0{,}48} = \frac{0{,}307\,2}{0{,}384} = \ldots = 0{,}8 = q\,.$$

Součet této řady je

$$t = \frac{t_1}{1-q} = \frac{0{,}6}{1-0{,}8} = \underline{\underline{3}}\,[\text{h}].$$

Poznámka:
Postup byl řešitelem pouze započat a nebyl dokončen. Přesto bylo zřejmé, že řešitel chtěl použít k řešení nekonečnou geometrickou řadu.

***Příklad* 4 *– řešení*:**
Vodní nádrž by se naplnila jen prvním přítokem za 36 minut, jen druhým za 45 minut. Za jak dlouho se nádrž naplní, přitéká-li voda nejprve 9 minut jen prvním přívodem a pak oběma současně?

<u>1. způsob:</u> (rovnice – užití normy za 1 minutu)

1. přítokem nateče nádrž ………. za 36 min …….. za 1 min nateče $\frac{1}{36}$ nádrže,
2. přítokem nateče nádrž ………. za 45 min …….. za 1 min nateče $\frac{1}{45}$ nádrže,

oběma přítoky nateče nádrž ……. za x min ……… za 1 min nateče $\frac{1}{x}$ nádrže;
nejdříve nádrž natéká prvním přítokem 9 min, potom oběma x min (až do naplnění):

$$9 \cdot \frac{1}{36} + x \cdot \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{45}\right) = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{5+4}{180} \cdot x = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{20}x = 1 \quad \Big|\cdot 20$$

$$5 + x = 20 \quad \Big| -5$$

$$\underline{x = 15}\ [\text{min}]$$

Celkem: $9 + 15 = \underline{\underline{24}}$ [min].

Zkouška:

1. přítok: voda natéká 24 min, tj. nateče: $24 \cdot \frac{1}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ nádrže,

2. přítok: voda natéká 15 min, tj. nateče: $15 \cdot \frac{1}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ nádrže,

celkem neteče: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ = 1, tedy přesně celá nádrž.

Odpověď:
Nádrž se naplní od otevření prvního přítoku za 24 minut.

2. způsob: (úsudek a poměr)

1. přítokem se naplní za 36 min ..... 1 nádrž,
2. přítokem se naplní za 36 min ..... 36 : 48 = 0,8 nádrže,
oběma přítoky se naplní za 36 min celkem ..... 1 + 0,8 = 1,8 nádrže.
Za 9 minut nateče 1. přítokem $9 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{4}$ nádrže, proto se budou napouštět jen $\frac{3}{4}$ nádrže. Dostáváme trojčlenku (poměr):

$$\uparrow \quad \begin{array}{l} 36 \text{ min} \ldots\ldots 1{,}8 \; \textit{nádrže} \\ x \text{ min} \ldots\ldots \frac{3}{4} \; \textit{nádrže} \end{array} \quad \uparrow$$

Potom $\frac{x}{36} = \frac{\frac{3}{4}}{1{,}8} \quad \to \quad x = \frac{27}{1{,}8} = \underline{15}$ minut. {za 15 min se naplní oběma přítoky $\frac{3}{4}$ nádrže.}

Celá nádrž se naplní za 9 + 15 = $\underline{\underline{24}}$ minut.

Varianta B:

***Příklad* 1 – *řešení*:**

Písemnou zkoušku z matematiky psalo 37 žáků, nikdo z nich neměl pětku. Jedniček bylo dvakrát víc než čtyřek, dvojek bylo o 6 více než jedniček, trojek bylo 11. Kolik žáků mělo jedničku, kolik dvojku, trojku a čtyřku?

1. způsob: (pomocí rovnice)

Počet jedniček	x,	.... 8 žáků;
počet dvojek	$x + 6$,	.... 14 žáků;
počet trojek	11,	.... 11 žáků;
počet čtyřek	$\frac{x}{2}$,	.... 4 žáci;
počet pětek	0,	.... 0 žáků.

Potom celkem: $x + x + 6 + 11 + \frac{x}{2} = 37$

$$2{,}5x + 17 = 37 \quad | -17$$
$$2{,}5x = 20 \quad | : 2{,}5$$
$$\underline{\underline{x = 8}} \text{ žáků.}$$

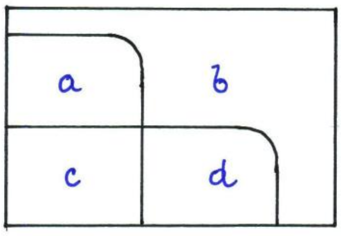
Zkouška:
Poměr jedniček a čtyřek: 8 : 4 = 2 (-krát více);
rozdíl dvojek a jedniček: 14 – 8 = 6;
celkem: 8 + 14 + 11 + 4 = 37 žáků.

Odpověď:
8 žáků mělo jedničku, 14 dvojku, 11 trojku, 4 čtyřku a žádný pětku.

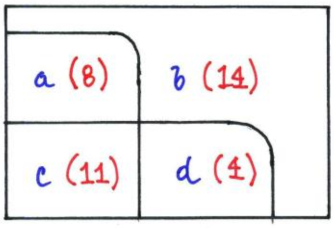
<u>2. způsob:</u> (Vennovy diagramy)

Danou situaci zobrazíme pomocí Vennova diagramu

Obr. 4-6:



Obr. 4-7:



V obr. 4-6 označíme:

a – jedničky, b – dvojky, c – trojky, d – čtyřky.

Zapíšeme-li vztahy, dostáváme soustavu rovnic:

(1) $a + b + c + d = 37,$

(2) $a = 2d,$

(3) $a + 6 = b,$ . . . . . $b = 2d + 6,$

(4) $c = 11,$

odkud: $2d + 2d + 6 + 11 + d = 37 \quad | -17$

$5d = 20 \quad | :5$

$\underline{d = 4} \quad \to \quad \underline{a = 8}, \quad \underline{b = 14}, \quad \underline{c = 11}.$

Poznámka:
Vennův diagram slouží pouze jako názor.

***Příklad* 2 – *řešení*:**
Pět litrů bílého vína a šest litrů červeného vína stálo 432 Kč. Jeden litr červeného vína je o 6 Kč dražší než 1 litr bílého vína. Kolik korun zaplatíme za 2 litry bílého a 2 litry červeného vína?

<u>1. způsob:</u> (pomocí soustavy rovnic)

Litr bílého vína stojí . . . . . x [Kč],
litr červeného vína stojí . . . y [Kč].
Potom platí: $y = x + 6$

$\underline{5x + 6y = 432}$

$5x + 6x + 36 = 432 \quad | -36$

$11x = 36$ [Kč].

Litr bílého – 36 Kč, ... 2 litry . . . . . 72 Kč,
litr červeného – 42 Kč, . . . 2 litry . . . . . <u>84 Kč</u>,
celkem . . <u>156 Kč</u>.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

2. způsob: (pomocí průměru – aritmeticky)

Průměrná cena jednoho litru vína je $432 : 11 \doteq 39{,}30$ Kč. Rozdíl cen je 6 Kč, proto cenu bílého stanovíme na 36 Kč/l, cenu červeného na 42 Kč/l a provedeme zkoušku:

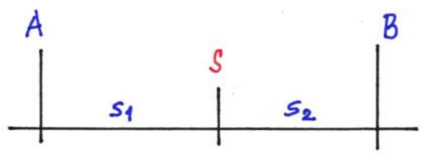
5 l bílého . . . . $5 \cdot 36 = 180$ Kč
6 l červeného . . . . . $6 \cdot 42 = \underline{252 \text{ Kč}}$
celkem . . . . . $\underline{\underline{432 \text{ Kč}}}$

Pokud by zkouška nevyšla, ceny upravíme tak, aby jejich rozdíl byl vždy 6 Kč (až na 10 hal).

***Příklad* 3 – *řešení*:**
Pánové A a B bydlí ve vzdálenosti 224 km. Vyjedou-li v autech současně ze svých obydlí proti sobě, setkají se po 2 hodinách. Pán A ujede za hodinu o 4 km více než pán B. Kolik km urazí každý z nich za hodinu?

1. způsob: (pomocí rovnice)

Obr. 4-8:



Pán z A jede 2 h a ujede za tu dobu o 8 km více. Proto pro dráhy platí:

$s_1 = x$ [km], $s_2 = x - 8$ [km].

Celková dráha je $s = s_1 + s_2$, proto platí:

$$x + x - 8 = 224 \quad | +8$$
$$2x = 232 \quad | : 2$$
$$x = 116 \text{ [km]}, \quad \text{druhý } x - 8 = 108 \text{ [km]}.$$

Rychlost pána A je $116 : 2 = \underline{\underline{58}}$ km/h, rychlost pána B je $108 : 2 = \underline{\underline{54}}$ km/h.
Zkouška:
Rozdíl rychlostí je $58 - 54 = 4$ km/h.
Celková dráha je $58 \cdot 2 + 54 \cdot 2 = 224$ km.
Odpověď:
Pán A urazí 58 km/h, pán B urazí 54 km/h.

2. způsob: (pomocí průměrné rychlosti)

$$v = \frac{s}{t}; \quad s = 224 \text{ km}, \; t = 2 \text{ h}; \quad v = \frac{224}{2} = 112 \text{ km/h}.$$

Auta se za hodinu přibližují průměrnou rychlostí 112 km/h (je to součet jejich rychlostí). Platí:

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 &= 112 \\ \underline{v_1 - v_2} &\underline{= 4} \end{aligned}\right\} +$$

$$2v_1 = 116 \quad \rightarrow \quad v_1 = \underline{\underline{58 \text{ km/h}}}, \quad \rightarrow \quad v_2 = \underline{\underline{54 \text{ km/h}}}.$$

***Příklad* 4 – *řešení*:**
Dělník A by sám provedl výkop za 7 hodin, dělník B sám za 6 hodin. Protože výkop má být skončen za 2 hodiny, byl přibrán ještě dělník C. Za jak dlouho by výkop provedl sám dělník C?

1. způsob: (pomocí rovnice)

1. dělník . . . udělá sám práci za 7 h . . . . . za 1 h udělá . . . $\frac{1}{7}$ práce,

2. dělník . . . udělá sám práci za 6 h . . . . . za 1 h udělá . . . $\frac{1}{6}$ práce,

3. dělník . . . udělá sám práci za x h . . . . . za 1 h udělá . . . $\frac{1}{x}$ práce,

Dělníci pracují společně 2 h, proto pro společnou práci platí:

$$2\cdot\frac{1}{7}+2\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{x}=1$$

$$\frac{2}{7}+\frac{1}{3}+\frac{2}{x}=1 \quad \Big|\cdot 21x$$

$$6x+7x+42=21x \quad \Big|-13x$$

$$42=8x \quad \Big|:8$$

$$x=5{,}25=\underline{\underline{5\text{ h }15\text{ min}}}.$$

Zkouška:

1. dělník za 2 h udělá . . . . . $\frac{2}{7}$ práce,

2. dělník za 2 h udělá . . . . . $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ práce,

3. dělník za 2 h udělá . . . . . $\frac{2}{5{,}25}=\frac{8}{21}$ práce,

všichni pak udělají dohromady $\frac{2}{7}+\frac{1}{3}+\frac{8}{21}=\frac{6+7+8}{21}=\frac{21}{21}=1$ (tj. celou) práci.

Odpověď:
Třetí dělník by sám provedl výkop za 5 h 15 min.

2. způsob: (pomocí procent a poměru = trojčlenky)

A udělá za 7 h . . . 100 %, potom . . . . . za 2 h udělá . . . (100 : 7) · 2 ≐ 28, 571 %,
B udělá za 6 h . . . 100 %, potom . . . . . za 2 h udělá . . . (100 : 6) · 2 ≐ 33, 333 %,
C udělá za x h . . . 100 %, potom . . . . . za 2 h udělá . . . zbytek . . . . ≐ 38, 096 %.
Zbytek: 100 – 28, 571 – 33, 333 = 38, 096.

$$\uparrow\ \begin{array}{l} 2\ h\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 38{,}096\ (\%) \\ x\ h\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 100\quad(\%) \end{array}\ \uparrow$$

$$\frac{x}{2}=\frac{100}{38{,}096} \quad\rightarrow\quad x=\frac{200}{38{,}096}\doteq 5{,}250\text{ h}=\underline{\underline{5\text{ h }15\text{ min}}}.$$

Varianta C:

***Příklad* 1 – *řešení*:**
Tři sourozenci měli našetřeno celkem 1 274 Kč. Petr měl našetřeno o 15 % více než Jirka a Hanka o 10 % méně než Petr. Kolik korun měl našetřeno každý z nich?

1. způsob: (pomocí rovnice)

Jirka ……. 100% …… x [Kč],
Petr ……. 115% …… $1{,}15x$ [Kč],
Hanka …… 90% ze 115%…… $1{,}15x \cdot 0{,}9 = 1{,}035x$ [Kč],

$$x + 1{,}15x + 1{,}035x = 1\,274$$
$$3{,}185x = 1\,274 \quad |: 3{,}185$$
$$\underline{x = 400} \text{ [Kč]},$$

potom v Jirka měl 400 Kč, Petr 1,15 · 400 = 460 Kč a Hanka 0,9 · 460 = 414 Kč.
Zkouška – dosazením do textu:
Celkem je 400 + 460 + 414 = 1 274 Kč.
Odpověď:
Jirka měl našetřeno 400 Kč, Petr 460 Kč a Hanka 414 Kč.

2. způsob: (pomocí rovnice II – užití procent)

Celkem . . . . . . 100% . . . . . 1274 Kč, z toho
Jirka . . . . x %,
Petr . . . . $1{,}15x$ %,
Hanka . . . . . . $0{,}9 \cdot 1{,}15 = 1{,}035x$ %.
Dostáváme rovnici

$$x + 1{,}15x + 1{,}035x = 100$$
$$3{,}185x = 100 \quad |: 3{,}185$$
$$x \doteq 31{,}4\%,$$

potom Jirka . . . . . 31,4% . . . . . 400,04 ≐ 400 Kč,
Petr . . . . . 36,1% . . . . . 459,91 ≐ 460 Kč,
Hanka . . . . 32,5% . . . . . 414,05 ≐ 414 Kč.
Sečtením zjistíme že hodnoty jsou přesné, chyby vznikly při prvním zaokrouhlování a druhým zaokrouhlením byly odstraněny.

***Příklad* 2 – *řešení*:**
Ze dvou druhů čaje o ceně 160 Kč a 220 Kč za 1 kilogram se má připravit 20 kg směsi v ceně 205 Kč za 1 kilogram. Kolik kilogramů každého druhu čaje bude třeba smíchat?

1. způsob: (pomocí jedné rovnice o jedné neznámé)

Množství 1. druhu čaje (po 160 Kč) ………… x [kg],
množství 2. druhu čaje (po 220 Kč) ………… $20 - x$ [kg],

$$160 \cdot x + 220 \cdot (20 - x) = 20 \cdot 205$$
$$160x + 4\,400 - 220\,x = 4\,100 \quad |- 4\,400$$
$$-60x = -300 \quad |: (-60)$$
$$\underline{\underline{x = 5}} \text{ [kg]} \;\ldots\; \text{prvního druhu čaje},$$

druhého druhu čaje: $20 - x = \underline{\underline{15}}$ [kg].
Zkouška – dosazením do textu:
5 · 160 = 800 Kč,
15 · 220 = 3 300 Kč,
Celkem …… 4 100 Kč.
4 100 : 20 = 205 Kč.

Odpověď:
Prvního druhu čaje bylo 5 kg, druhého druhu bylo 15 kg.

2. způsob: (užití obecného modelu II – pomocí poměru)

Vyjdeme z výsledků modelu 1 a vztahů (4-1a) a (4-1b) (viz příloha 1). Ze vztahů

$$m_1 = \frac{c - c_2}{c_1 - c_2} \cdot m, \quad m_2 = \frac{c - c_1}{c_2 - c_1} \cdot m$$

vyplývá pro poměry množství m_1, m_2:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\dfrac{c - c_2}{c_1 - c_2} \cdot m}{\dfrac{c - c_1}{c_2 - c_1} \cdot m} = \frac{(c - c_2) \cdot m \cdot (c_2 - c_1)}{(c - c_1) \cdot m \cdot (c_1 - c_2)} = \frac{c_2 - c}{c - c_1},$$

potom:

$$\underline{\underline{\frac{m_1}{m_2} = \frac{c_2 - c}{c - c_1}}}. \qquad \textbf{(4-1)}$$

Platí tedy $m_1 : m_2 = (220 - 205) : (205 - 160) = 1 : 3$.
Množství m_1 je $\frac{1}{4}$ z 20 kg, tj. 5 kg; množství m_2 je $\frac{3}{4}$ z 20 kg, tj. 15 kg.

Poznámka:
Postup byl řešitelem dobře započat, ale vzhledem k chybě v postupu nebyl úspěšně dokončen.

***Příklad* 3 – *řešení*:**
Auto ujelo vzdálenost mezi městy *A* a *B* za 4 hodiny. Kdyby se průměrná rychlost auta zvýšila o 17 km/h, ujelo by auto tuto vzdálenost o hodinu dříve. Určete rychlost auta a vzdálenost mezi městy *A* a *B*.

1. způsob: (pomocí porovnání drah – užití rovnice)

Označme si neznámou rychlost osobního auta x [km/h]. Osobní auto ujede v prvním případě (při rychlosti x km/h) vzdálenost z *A* do *B* za 4 hodiny, proto hledaná vzdálenost je $4x$ [km]. V druhém případě (při rychlosti $x + 17$ km/h) ujede vzdálenost z *A* do *B* za 3 hodiny, proto hledaná vzdálenost je $3 \cdot (x + 17)$ [km]. Vzdálenosti se rovnají, tedy:

$4x = 3 \cdot (x + 17)$
$4x = 3x + 51 \quad \big| - 3x$
$\underline{\underline{x = 51}}$ [km/h],
$s = 51 \cdot 4 = \underline{\underline{204}}$ [km].

Zkouška – dosazením do textu:
První případ …………… 204 [km],
druhý případ ………… $68 \cdot 3 = 204$ [km],
tedy obě vzdálenosti se rovnají.
Odpověď:
Osobní auto jelo původně rychlostí 51 km/h a vzdálenost mezi *A*, *B* je 204 km.

***Příklad* 4 – *řešení*:**
Vodní nádrž se naplní jen prvním přítokem za 10 hodin, jen druhým za 12 hodin a jen třetím za 15 hodin. Za jak dlouho se naplní, budou-li otevřeny všechny tři přítoky současně?

<u>1. způsob:</u> (pomocí rovnice)

1. přítokem nateče nádrž ………. za 10 h …….. za 1 h nateče $\frac{1}{10}$ nádrže,
2. přítokem nateče nádrž ………. za 12 h …….. za 1 h nateče $\frac{1}{12}$ nádrže,
3. přítokem nateče nádrž ………. za 15 h …….. za 1 h nateče $\frac{1}{15}$ nádrže,

všemi přítoky nateče celá nádrž ……. za x h, platí tedy

$$x\cdot\frac{1}{10}+x\cdot\frac{1}{12}+x\cdot\frac{1}{15}=1 \quad \Big|\cdot 60$$
$$6x+5x+4x=60$$
$$15x=60 \quad \Big|:15$$
$$\underline{\underline{x=4}}\ \text{[h]}.$$

Zkouška:

1. přítok: voda natéká 4 h, tj. nateče: $4\cdot\frac{1}{10}=\frac{2}{5}$ nádrže,
2. přítok: voda natéká 4 h, tj. nateče: $4\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$ nádrže,
3. přítok: voda natéká 4 h, tj. nateče: $4\cdot\frac{1}{15}=\frac{4}{15}$ nádrže,

celkem nateče: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{4}{15}=\frac{6+5+4}{15}$ = 1, tedy přesně celá nádrž.

Odpověď:
Nádrž se naplní všemi přítoky za 4 hodiny.

<u>2. způsob:</u> (aritmeticky + úsudek a celkový objem)

Zvolíme si objem nádrže (velikost nádrže kupodivu nemá vliv na čas naplnění – čím je nádrž větší, tím bude větší výkon přítoků, obojí není předmětem řešení), např. V = 120 l (objem volíme tak, aby byl dělitelný všemi časy).
1. přítok naplní za 1 h 120 : 10 = 12 l,
2. přítok naplní za 1 h 120 : 12 = 10 l,
3. přítok naplní za 1 h 120 : 15 = 8 l,

Dohromady nateče za 1 h všemi přítoky 12 + 10 + 8 = 30 l.
Nádrž se všemi přítoky naplní za 120 : 30 = <u>4</u> hodiny.

Poznámka – obecně:
1. přítok naplní za 1 h $V : 10$ l,
2. přítok naplní za 1 h $V : 12$ l,
3. přítok naplní za 1 h $V : 15$ l,

Dohromady nateče za 1 h všemi přítoky $\frac{V}{10}+\frac{V}{12}+\frac{V}{15}=\frac{V}{4}$ l.

Nádrž se všemi přítoky naplní za $V:\frac{V}{4}$ = 4 hodiny.

Varianta D:

***Příklad* 1 – *řešení*:**
Zákazník si koupil tričko, kravatu a košili. Nejprve si vybral košili, k ní pak kravatu, která byla třikrát levnější než košile. Nakonec si koupil tričko, které bylo o 140 Kč dražší než kravata. Celkem zaplatil 940 Kč. Kolik zaplatil za kravatu, kolik za tričko a kolik za košili?

1. způsob: (pomocí rovnice)

kravata ………… x [Kč],
košile ………… $3x$ [Kč],
tričko ………… $x + 140$ [Kč],

$$x + 3x + x + 140 = 940 \quad | -140$$
$$5x = 800 \quad | :5$$
$$\underline{\underline{x = 160}} \text{ [Kč]},$$

potom kravata stála 160 Kč, košile $3 \cdot 160 = 480$ Kč a tričko $160 + 140 = 300$ Kč.
Zkouška – dosazením do textu:
Celkem je $160 + 480 + 300 = 940$ Kč.
Odpověď:
Kravata stála 160 Kč, košile 480 Kč a tričko 300 Kč.

***Příklad* 2 – *řešení*:**
20 brouků a pavouků má dohromady 146 nohou. Kolik je brouků a kolik je pavouků, má-li brouk 6 nohou a pavouk 8 nohou?

1. způsob: (pomocí soustavy dvou rovnic o dvou neznámých)

Počet pavouků ……….. x [ks],
počet brouků ………….. y [ks],

$$x + y = 20 \quad \rightarrow \quad y = 20 - x$$
$$\underline{8 \cdot x + 6 \cdot y = 146}$$
$$8 \cdot x + 6 \cdot (20 - x) = 146$$
$$8x + 120 - 6x = 146 \quad | -120$$
$$2x = 26 \quad | :2$$
$$\underline{\underline{x = 13}} \text{ [ks]} \quad \ldots \quad \text{pavouků},$$

brouků je: $20 - x = \underline{\underline{7}}$ [ks].
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

2. způsob: (aritmetický postup)

Brouci mají 6 nohou, pavouci 8. Zvolíme si jejich libovolný počet (celkem jich musí být 20), např. 10 a 10 a vypočteme, kolik je to nohou. Protože výsledek je menší než 146, budeme zvětšovat množství pavouků a zmenšovat množství brouků. Výsledky zapíšeme do tabulky:

Tabulka 4-5:

brouk	10	9	8	**7**	6	. . .
pavouk	10	11	12	**13**	14	. . .
celkem	140	142	144	**146**	148	. . .

Z tabulky je zřejmé, že brouků bude 7 a pavouků 13.

***Příklad* 3 – *řešení*:**

Varianta D:

Po dvojkolejné trati mezi stanicemi *K* a *M* jely proti sobě dva vlaky. První vlak projel vzdálenost mezi stanicemi za dvě hodiny, druhý, který měl průměrnou rychlost o 15 km/h větší, ji projel za 1,5 hodiny. Vypočítejte průměrné rychlosti obou vlaků a vzdálenost stanic *K* a *M*.

Varianta D_0:

V pátek urazil nákladní vlak vzdálenost mezi stanicemi *K* a *M* za 2 hodiny. Další nákladní vlak z *K* měl v sobotu průměrnou rychlost o 15 km/h větší, takže do *M* přijel už za 1,5 hod. Vypočítejte průměrné rychlosti obou vlaků a vzdálenost stanic *K* a *M*.

1. způsob: (pomocí porovnání drah – užití rovnice)

Označme si neznámou rychlost pomalejšího vlaku x [km/h]. Tento vlak ujede vzdálenost mezi stanicemi *K* do *M* za 2 hodiny, proto hledaná vzdálenost je $2x$ [km]. Rychlejší vlak ujede vzdálenost mezi *K* a *M* za 1,5 hodiny rychlostí $x + 15$ [km/h], proto hledaná vzdálenost je $1{,}5 \cdot (x + 15)$ [km]. Vzdálenosti se rovnají, tedy:

$$2x = 1{,}5 \cdot (x + 15)$$
$$2x = 1{,}5x + 22{,}5 \quad \Big| -1{,}5x$$
$$0{,}5x = 22{,}5 \quad \Big| \cdot 2$$

$\underline{\underline{x = 45}}$ [km/h], druhý vlak: $\underline{\underline{x + 15 = 60}}$ [km/h],

$s = 45 \cdot 2 = \underline{\underline{90}}$ [km].

Zkouška – dosazením do textu:

Pomalejší vlak …………… $s_1 = 45 \cdot 2 = 90$ [km],

rychlejší vlak ……………. $s_2 = 60 \cdot 1{,}5 = 90$ [km],

tedy obě dráhy se rovnají.

Odpověď:

Pomalejší vlak jel rychlostí 45 km/h, rychlejší vlak rychlostí 60 km/h a vzdálenost mezi *K*, *L* je 90 km.

2. způsob: (pomocí nepřímé úměrnosti)

Rychlost prvního vlaku označme v [km/h], potom rychlost druhého je $v + 15$ [km/h]. První vlak projede trasu za 2 h, druhý za 1,5 h. Jejich rychlosti a časy jsou nepřímo úměrné:

$$\uparrow \begin{array}{l} v \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, 2 \\ v+15 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, 1{,}5 \\ \hline \end{array} \downarrow$$

$$\frac{v+15}{v} = \frac{2}{1{,}5} \quad \Big| \cdot 1{,}5v$$
$$1{,}5v + 22{,}5 = 2v \quad \Big| \; 1 - 1{,}5v$$
$$22{,}5 = 0{,}5v \quad \Big| \; : 0{,}5v$$

$\underline{\underline{v = 45}}$ km/h, rychlost druhého vlaku $\underline{\underline{v' = 60}}$ km/h.

Vzdálenost stanic *K*, *M* je $45 \cdot 2 = 60 \cdot 1{,}5 = \underline{\underline{90}}$ km.

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

***Příklad* 4 – *řešení*:**

Prvním kombajnem lze sklidit obilí z určitého lánu za 30 hodin, druhým, výkonnějším kombajnem za 20 hodin. Za kolik hodin bylo sklizeno obilí z tohoto lánu, jestliže se sklízelo současně oběma kombajny, ale druhý kombajn se porouchal a první ještě pracoval sám 5 hodin, aby dokončil sklizeň?

1. způsob: (rovnice – užití normy za 1 minutu)

1. kombajnem ………. za 30 h …….. za 1 h se sklidí $\frac{1}{30}$ lánu,
2. kombajnem ………. za 20 h …….. za 1 h se sklidí $\frac{1}{20}$ lánu,
oběma kombajny ……. za x h ……… za 1 h se sklidí $\frac{1}{x}$ lánu;
navíc první kombajn dokončil práci za 5 hodin, tj. udělal $5 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{6}$ práce, zbývá $\frac{5}{6}$ práce,
potom platí:

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{x} \cdot \frac{5}{6} \quad \Big| \cdot 60x$$
$$2x + 3x = 50$$
$$5x = 50 \quad \Big| : 5$$
$$x = 10 \text{ [h]}.$$

Celkem sklizeno za 10 + 5 = <u>15 hodin</u>.
Zkouška:
1. kombajn pracoval 15 hodin, sklidil $15 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{2}$ lánu,
2. kombajn pracoval 10 hodin, sklidil $10 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$ lánu,
společně sklidily: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, tedy přesně celý lán.
Odpověď:
Oběma kombajny bude lán sklizen za 15 hodin.

2. způsob: (úsudek a poměr = algebraicky)

1. kombajnem ………. za 30 h …….. za 1 h se sklidí $\frac{1}{30}$ lánu,
2. kombajnem ………. za 20 h …….. za 1 h se sklidí $\frac{1}{20}$ lánu,
oba společně sklidí celé pole za x h, proto platí

$$\frac{x}{30} + \frac{x}{20} = 1 \quad \Big| \cdot 60$$
$$2x + 3x = 60$$
$$5x = 60 \quad \Big| : 5$$
$$x = 12 \text{ [h]}.$$

Oba společně by celé pole sklidili za 12 hodin, ale druhý nepracoval celý čas a práci dokončil první za 5 hodin. Dobu, kterou nepracovali společně, vypočteme pomocí přímé úměrnosti (doba odpracovaná společně je úměrná době odpracované jedním kombajnem):

$$\uparrow \quad \begin{array}{l} 30 \ldots\ldots\ldots 5 \\ 12 \ldots\ldots\ldots y \\ \hline \end{array} \quad \uparrow$$

$$\frac{y}{5} = \frac{12}{30} \quad \rightarrow \quad y = 2;$$

Z toho plyne, že práci, kterou udělají oba společně za 2 h, zvládne první kombajn za 5 h. Tedy výsledný čas je $c = x - 2 + 5 =$ <u>15 h</u>.

3. způsob: (užitím úsudku)

1. kombajn . . . . . za 30 h . . . . . sám pracuje 5 h . . . sklidí $\frac{1}{6}$ pole,
2. kombajn . . . . . za 20 h,
zbývá pro společnou práci . . . $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ pole;
společně . . . . za 1 h . . . $\frac{1}{30}+\frac{1}{20}=\frac{5}{60}$ pole, potom za 10 h . . . $\frac{5}{6}$ pole, což je jejich společný úkol.
Celkem budou sklízet 5 + 10 = 15 hodin.

4.3. Vyhodnocení užitých postupů

Přehled užitých postupů uvádějí následující tabulky:

Tabulka 4-6 – Přehled všech užitých postupů ve všech skupinách (pro jednodušší porovnání jsou hodnoty uvedeny v procentech):

Všechny školy - sk. A - D:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	81,0	1,5	0,7	0,4	0	9,7	6,7	100%
př. 2	53,5	3,3	2,2	1,1	2,6	11,5	25,7	100%
př. 3	42,4	1,1	10,8	0	1,1	11,2	33,5	100%
př. 4	41,3	1,9	9,3	0	0,4	4,5	42,8	100%
celkem	54,6	2,0	5,8	0,4	1,0	9,2	27,1	100%

Základní školy - sk. A - D:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	76,6	0,8	0,8	0	0	14,5	7,3	100%
př. 2	57,3	2,4	0,8	1,6	0,8	11,3	25,8	100%
př. 3	41,1	0,8	5,6	0	0	11,3	41,1	100%
př. 4	37,1	0	6,5	0	0	0,8	55,6	100%
celkem	53,0	1,0	3,4	0,4	0,2	9,5	32,5	100%

Střední školy - sk. A - D:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	84,8	2,1	0,7	0,7	0	5,5	6,2	100%
př. 2	50,3	4,1	3,4	0,7	4,1	11,7	25,5	100%
př. 3	43,4	1,4	15,2	0	2,1	11	26,9	100%
př. 4	44,8	3,4	11,7	0	0,7	7,6	31,7	100%
celkem	55,9	2,8	7,8	0,3	1,7	9,0	22,6	100%

Gymnázia - sk. A - D:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	85,6	2,5	0	0,8	0	5,9	5,1	100%
př. 2	60,2	5,1	2,5	1,7	5,1	10,2	15,3	100%
př. 3	42,4	1,7	12,7	0	1,7	11,0	30,5	100%
př. 4	24,6	4,2	15,3	0	0,8	7,6	47,5	100%
celkem	53,2	3,4	7,6	0,6	1,9	8,7	24,6	100%

Tabulka 4-6 jasně ukazuje, že při řešení preferovali žáci a studenti užití rovnic, celkově více než polovina. Na dalším místě ve frekvenci „užití“ bylo, že úloha nebyla řešena. Neřešených úloh přibývalo s nárůstem obtížnosti těchto úloh. Na zvýšeném počtu neřešených úloh se zřejmě také podílelo to, že řešení úlohy bylo ponecháno až na závěr a pak nezbyl čas. Proto nejčastěji neřešenou úlohou byl příklad č. 4, který byl v textu uveden jako poslední. Neřešených úloh byla asi čtvrtina. Dále v pořadí bylo užití úsudku, jeho zastoupení bylo kolem 5 procent. Velmi málo byly využíváno aritmetického řešení, grafické řešení a některé speciální metody. Téměř 10 procent postupů nebylo možné přesně určit, proto zůstaly nezařazeny a jsou uvedeny ve zvláštní kolonce.

Celkově je možné říci, že mezi volenými postupy nebyl při porovnávání všech variant A – D výrazný rozdíl mezi jednotlivými typy škol. Snad jen žáci základních škol používali méně úsudku, o to více pak příklady neřešili.

Tabulka 4-7 – Přehled všech užitých postupů ve všech skupinách (pro jednodušší porovnání jsou hodnoty uvedeny v procentech, jsou zde rozlišeny výsledky dívek a chlapců – v tomto pořadí):

Všechny školy - sk. A - D: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	87,8 ⁄ 73,8	0,7 ⁄ 2,3	0,7 ⁄ 0,8	0,7 ⁄ 0	0	7,2 ⁄ 12,3	2,9 ⁄ 10,8	100%
př. 2	57,6 ⁄ 49,2	4,3 ⁄ 2,3	2,2 ⁄ 2,3	0,7 ⁄ 1,5	2,9 ⁄ 2,3	9,4 ⁄ 13,8	23,0 ⁄ 28,5	100%
př. 3	46,0 ⁄ 38,5	0,7 ⁄ 1,5	7,2 ⁄ 14,6	0	0 ⁄ 2,3	12,2 ⁄ 10,0	33,8 ⁄ 33,1	100%
př. 4	43,2 ⁄ 39,2	2,2 ⁄ 1,5	5,8 ⁄ 13,1	0	0,7 ⁄ 0	2,2 ⁄ 6,9	46,0 ⁄ 39,2	100%
celkem	58,6 ⁄ 50,2	2,0 ⁄ 1,9	4,0 ⁄ 7,7	0,4 ⁄ 0,4	0,9 ⁄ 1,2	7,7 ⁄ 10,8	26,4 ⁄ 27,9	100%

Základní školy - sk. A - D: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	85,9 ⁄ 64,2	0 ⁄ 1,9	0 ⁄ 1,9	0	0	9,9 ⁄ 20,8	4,2 ⁄ 11,3	100%
př. 2	63,4 ⁄ 49,1	1,4 ⁄ 3,8	1,4 ⁄ 0	1,4 ⁄ 1,9	0 ⁄ 1,9	11,3 ⁄ 11,3	21,1 ⁄ 32,1	100%
př. 3	45,1 ⁄ 35,8	0 ⁄ 1,9	1,4 ⁄ 11,3	0	0	12,7 ⁄ 9,4	40,8 ⁄ 41,5	100%
př. 4	42,3 ⁄ 30,2	0	2,8 ⁄ 11,3	0	0	0 ⁄ 1,9	54,9 ⁄ 56,6	100%
celkem	59,2 ⁄ 44,8	0,4 ⁄ 1,9	1,4 ⁄ 6,1	0,4 ⁄ 0,5	0 ⁄ 0,5	8,5 ⁄ 10,8	30,3 ⁄ 35,4	100%

Střední školy - sk. A - D: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	89,7 / 80,5	1,5 / 2,6	1,5 / 0	1,5 / 0	0	4,4 / 6,5	1,5 / 10,4	100%
př. 2	51,5 / 49,4	7,4 / 1,3	2,9 / 3,9	0 / 1,3	5,9 / 2,6	7,4 / 15,6	25,0 / 26,0	100%
př. 3	47,1 / 40,3	1,5 / 1,3	13,2 / 16,9	0	0 / 3,9	11,8 / 10,4	26,5 / 27,3	100%
př. 4	44,1 / 45,5	4,4 / 2,6	8,8 / 14,3	0	1,5 / 0	4,4 / 10,4	36,8 / 27,3	100%
celkem	58,1 / 53,9	3,7 / 1,9	6,6 / 8,8	0,4 / 0,3	1,8 / 1,6	7,0 / 10,7	22,4 / 22,7	100%

Gymnázia - sk. A - D: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	91,5 / 79,7	1,7 / 3,4	0	1,7 / 0	0	1,7 / 10,2	3,4 / 6,8	100%
př. 2	62,7 / 57,6	6,8 / 3,4	3,4 / 1,7	1,7 / 1,7	6,8 / 3,4	3,4 / 16,9	15,3 / 15,3	100%
př. 3	42,4 / 42,4	0 / 3,4	10,2 / 15,3	0	0 / 3,4	13,6 / 8,5	33,9 / 27,1	100%
př. 4	18,6 / 30,5	5,1 / 3,4	10,2 / 20,3	0	1,7 / 0	5,1 / 10,2	59,3 / 35,6	100%
celkem	53,8 / 52,5	3,4 / 3,4	5,9 / 9,3	0,8 / 0,4	2,1 / 1,7	5,9 / 11,4	28,0 / 21,2	100%

Porovnáme-li rozdíly mezi dívkami a chlapci v používání metod (tabulka 4-7), jsou zejména při užití rovnic a úsudků. Rovnice užívají při řešení mnohem častěji dívky. Pokud je tomu někdy naopak, je to vždy v případech, kdy tuto metodu používá méně řešitelů než jindy. Naopak úsudek používají mnohem častěji chlapci. Pokud jej používají častěji dívky, je to opět v těch případech, kdy jej používá méně řešitelů. V ostatních případech je užití metod rovnocenné. Nebylo-li možné metodu přesně určit, vyskytovalo se to spíše u chlapců, rozdíly však nebyly velké, největší byly u studentů gymnázií. Stejně tak více neřešených příkladů měli chlapci, větší rozdíly byly na základních než na středních školách. Naopak na gymnáziích více neřešených příkladů vykazovaly dívky, rozdíl udělal příklad č. 4 o společné práci, kde jej neřešilo téměř 60 procent dívek. Jednalo se o nejvýraznější rozdíl, a to v obou směrech. Opět se potvrzuje to, že nejčastěji používaná metoda při řešení je použití rovnic (pokud je úloha řešena). Nejméně často řešenou úlohou byl příklad č. 4 o společné práci (je také v textu uvedena jako poslední).

V jednotlivých variantách A, B, C, D jsou samozřejmě rozdíly mezi dívkami a chlapci ještě větší. Pokud nebudeme srovnávat případy, kdy žáci a studenti úlohy neřešili nebo nebylo možno určit jaké řešení zvolili, můžeme odpovědně porovnat pouze případy, kdy byly úlohy řešeny pomocí rovnic a částečně i případy, kdy byly použity úsudky. V některých variantách bylo i stoprocentní použití rovnic, a to u 1. příkladu – dívky gymnázií, varianta D a chlapci gymnázií, varianta A. Se zvyšujícím se číslem příkladu se maximum snižovalo, u 4. příkladu se pohybovalo kolem 60 % (dívky SŠ, skup. B – 52,6 %, chlapci SŠ, skup. B – 69,6 %). Minimum použití rovnic se pohybovalo od 0 % ve 4. příkladu (dívky ZŠ i chlapci ZŠ, varianta D) ke 40 % v 1. příkladu (chlapci gymnázií, varianta C). Tendence minim byla tedy zcela logicky opačná než u maxim. Srovnáme-li použití úsudků, v 1. příkladu se úsudek téměř nevyskytoval (převážně 0 %), v 2. příkladu nepřesáhl u jednotlivých skupin 10 %, pouze ve 3. a 4. příkladu se maximální zastoupení úsudku dostalo přes 30 %, ve všech případech to byli chlapci. Ve všech příkladech se objevily případy, kdy řešitelé neužívali úsudek vůbec, častěji to byly dívky.

Větší výkyvy ve všech hodnoceních variant A, B, C, D byly také dány tím, že jednotlivé varianty měly menší četnost, což se také projevilo na výsledných hodnotách. Tabulky potvrzující tyto závěry jsou uvedeny v příloze 2.

Na závěr uvádím ještě souhrnné tabulky, pomocí kterých lze porovnat jak jednotlivé skupiny, tak celý soubor testových úloh.

Tabulka 4-8 – Celkový přehled všech užitých postupů ve všech skupinách (pro jednodušší porovnání jsou hodnoty uvedeny v procentech):

Všechny školy - porovnání skupin:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
sk. A	55,8	1,5	6,1	0,3	1,5	8,8	25,9	100%
sk. B	66,7	1,3	7,0	0,3	0	6,0	18,7	100%
sk. C	45,3	1,3	3,4	0	1,7	11,6	36,6	100%
sk. D	45,8	4,2	6,0	0,9	0,9	11,6	30,6	100%
sk. A - D	54,6	2,0	5,8	0,4	1	9,2	27,1	100%

Tabulka 4-9 – Přehled všech užitých postupů v jednotlivých skupinách (pro jednodušší porovnání jsou hodnoty uvedeny v procentech, jsou zde rozlišeny výsledky dívek a chlapců – v tomto pořadí):

Všechny školy - porovnání skupin: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
sk. A	62,2 ⁄ 47,1	2,1 ⁄ 0,7	5,3 ⁄ 7,1	0 ⁄ 0,7	1,1 ⁄ 2,1	6,9 ⁄ 11,4	22,3 ⁄ 30,7	100%
sk. B	66,7 ⁄ 65,3	1,3 ⁄ 1,4	3,2 ⁄ 11,1	0,6 ⁄ 0	0,6 ⁄ 0,7	4,5 ⁄ 7,6	23,1 ⁄ 13,9	100%
sk. C	51,8 ⁄ 39,2	1,8 ⁄ 0,8	2,7 ⁄ 4,2	0	1,8 ⁄ 1,7	10,7 ⁄ 12,5	31,3 ⁄ 41,7	100%
sk. D	46,0 ⁄ 45,7	3,0 ⁄ 5,2	4,0 ⁄ 7,8	1,0 ⁄ 0,9	1,0 ⁄ 0,9	11,0 ⁄ 12,1	34,0 ⁄ 27,6	100%
sk. A - D	58,6 ⁄ 50,2	2,0 ⁄ 1,9	4,0 ⁄ 7,7	0,4 ⁄ 0,4	0,9 ⁄ 1,2	7,7 ⁄ 10,8	26,4 ⁄ 27,9	100%

Z celkového přehledu i z přehledu pro dívky a chlapce je evidentní, že zcela jednoznačně byly pro řešení úloh nejčastěji užívány rovnice, často více než v 50 % případů. Jiné užité metody jim nemohou konkurovat, neboť jejich užití je až na jednu výjimku do 8 %, často je užití menší než 3 %. A tak na druhém a třetím místě jsou případy, kdy úlohy nejsou řešeny (až 40 %) nebo způsob řešení nelze určit (kolem 10 %). Druhou nejužívanější metodou je tedy řešení úlohy úsudkem (kolem 6 %). Častěji (až dvojnásobně) užívají úsudek chlapci. Další v pořadí je užití aritmetických výpočtů (kolem 2 %), výrazně nejčastěji bylo aritmetické řešení použito ve variantě D. Užitá speciální řešení byla různorodá, celkově se pohybovala kolem 1 % užití. Nejméně často bylo k řešení použito grafů. Bylo to jen výjimečně, ani v jednom případě nepřesáhla četnost užití 1 %.

Porovnáme-li frekvenci použitých metod a celkový dosažený výsledek, zjistíme, že není důležité jakou metodu řešitel použil, ale to jak dobře tuto metodu zná. Jeví se to zejména při porovnání dívek a chlapců. I když dívky preferovaly jiné metody než chlapci a byly úspěšné v jiných typech úloh, celkový výsledek dívek a chlapců byl srovnatelný (téměř stejný). Je možné konstatovat, že není tolik důležitá volba cesty, ale je důležitější, jak je tato cesta zvládnuta.

4.4. Dotazník a jeho vyhodnocení

4.4.1. Dotazník

V rámci průzkumu řešení slovních úloh na základních a středních školách v Jihočeském kraji byl zadán žákům a studentům dotazník, ve kterém vyjádřili svůj postoj ke slovním úlohám. Dotazníky byly zadány na školách v Českých Budějovicích, Prachaticích, Vodňanech a ve Volyni. Vzhledem k tomu, že předmětem testování byly slovní úlohy o celku a částech, o pohybu, o směsích a o společné práci, i otázky v dotazníku se zaměřily na tyto slovní úlohy. Ostatní slovní úlohy byly zařazeny do skupiny jiné. Na otázky odpovídalo celkem 238 žáků a studentů.

Obr. 4-9 – Text dotazníku:

DOTAZNÍK

Svou odpověď vyznač křížkem. Pokud se možnosti nevylučují, je možné u jedné otázky použít i více křížků. Můžeš připsat i svůj komentář. Piš čitelně. Děkuji.

Chlapec: ………… ☐ **Dívka: ……………** ☐

Škola: ZŠ ……... ☐ **SŠ: gymnázium …………** ☐

SOŠ ______________ ☐

jiné ______________ ☐

1) Slovní úlohy řeším: rád(a) ………….. ☐
jak kdy ………….. ☐
nerad(a) ………… ☐

2) Zdůvodněte své vyjádření v předchozí otázce [proč řeším slovní úlohy (ne)rad(a), co mě vede k tomu, že někdy řeším slovní úlohy rád(a), někdy nerad(a)]:

____

____

3) Které slovní úlohy mám nejraději: o pohybu …………………… ☐
o směsích …………………… ☐
o společné práci ……………… ☐
o celku a částech ……………… ☐
jiné …………………….. ☐

4) Přál(a) bych si, aby slovních úloh bylo: více ………………….. ☐
stejně ……………….. ☐
méně ………………… ☐
nebyly žádné ………… ☐

5) Slovní úlohy slouží k tomu, …
abychom si bystřili mysl ……………………………….. ☐
abychom se seznámili s úlohami z praxe a uměli je řešit …. ☐
abychom se naučili něčemu novému ………………….. ☐
abychom se mohli doma chlubit jak jsme chytří ………….. ☐
aby nás jimi ve škole učitelé trápili ………………….. ☐
k úplně jinému účelu, a to ………_________________________________

6) Proč byly slovní úlohy vymyšleny?

____

Dotazník (obr. 4-9) se skládal ze šesti otázek, z nichž čtyři byly uzavřené (č. 1, 3, 4 a 5) a dvě otevřené (č. 2 a 6). Otevřené otázky doplňovaly a upřesňovaly předchozí otázky uzavřené. V první otázce odpovídali respondenti na to, jak mají slovní úlohy oblíbené, v druhé otázce to zdůvodňovali. Ve třetí otázce respondenti vybírali svoje nejoblíbenější slovní úlohy, ve čtvrté se vyjadřovali k tomu, zda by chtěli slovních úloh řešit více či méně. V páté a šesté otázce se respondenti vyjadřovali k tomu, proč slovní úlohy vznikly a k čemu slouží.

4.4.2. Obliba řešení slovních úloh a nejoblíbenější úlohy

Odpovědi na otázku č. 1 „Slovní úlohy řeším . . ." jsou uvedeny v tabulkách 4-10. Pro snadnější porovnání jsou počty studentů uvedeny v procentech. Je to z důvodu nestejného počtu žáků a studentů v jednotlivých typech škol a nestejného počtu chlapců a dívek v těchto skupinách. Celkem nejvíce respondentů přistupuje k řešení slovních úloh diferencovaně, někdy je řeší rádi jindy neradi. V doplňující otázce č. 2 to zdůvodňují tím, že slovní úlohy, kterým rozumí a které jim jdou, řeší rádi, naopak slovní úlohy, kterým nerozumí a nejdou jim, řeší neradi. Dále pak existuje více těch, kteří slovní úlohy řeší neradi než těch, kteří řeší slovní úlohy rádi. Celkově obě tyto skupiny dohromady jsou menší než skupina prostřední (jak kdy). Srovnatelný výsledek byl zjištěn v práci [88]. Dále jsou v tabulce patrné rozdíly mezi přístupem k oblibě slovních úloh u chlapců a u dívek. Porovnáváme-li jednotlivé hodnoty vůči celku, potom chlapci řeší slovní úlohy raději než dívky, rozdíl však není velký (asi 4 %), naopak dívky řeší slovní úlohy spíše nerady, rozdíl opět není velký (asi 3 %). U těch, kteří řeší slovní úlohy jednou rádi, jednou neradi, se rozdíly mezi chlapci a dívkami téměř neobjevují (do 1 %).

Porovnáme-li hodnoty vyjadřující postoje chlapců a dívek navzájem (tj. „řádkově"), zvětší se nám rozdíly zejména v případech, kdy součet bude menší číslo. Je to v případě, kdy respondenti řeší úlohy rádi (je jich jen 11 %). Tam je potom rozdíl mezi chlapci a dívkami větší než podle skupin (tj. „sloupcově") a činí 18 %.

Celkově lze říci, že respondenti nejčastěji, a to více než polovina, řeší slovní úlohy diferencovaně podle toho jak jim „jdou“. Asi třetina respondentů řeší úlohy nerada, mírně převažují dívky. Pouze desetina respondentů řeší úlohy ráda, mezi nimi převažují chlapci.

Tabulka 4-10 – Obliba řešení slovních úloh:

Slovní úlohy mám:	chlapec	dívka	**celkem**
rád (a)	13	9	11
jak kdy	56	57	56
nerad (a)	31	34	32
celkem	100%	100%	100%

Slovní úlohy mám:	chlapec	dívka	**celkem**
rád (a)	59	41	100%
jak kdy	50	50	100%
nerad (a)	48	52	100%
celkem	50	50	100%

Odpovědi na otázku č. 3 „Které slovní úlohy mám nejraději . . .“ jsou uvedeny v tabulkách 4-11a, 4-11b. Stejně jako v předchozím případě jsou i tyto údaje pro lepší porovnání uvedeny v procentech. V tabulce 4-11a je základem celkový počet všech respondentů v daném sloupečku, v tabulce 4-11b je základem celkový počet respondentů v daném řádku. Zvlášť jsou hodnoceni žáci základních škol a studenti středních škol. Potom jsou hodnoceni společně a na závěr jsou vyčleněni studenti gymnázií (studenti nižších gymnázií patří věkově mezi žáky základních škol, studenti vyšších gymnázií se řadí věkově mezi studenty středních škol). Navíc jsou v každé skupině odděleně hodnoceni chlapci a dívky.

V předepsaných odpovědích jsou uvedeny slovní úlohy o částech a celku, o pohybu, o směsích a o společné práci. Ostatní úlohy jsou řazeny pod symbol jiné a poslední možnost žádné nebo neuvedeno shrnuje případy, kdy respondenti uvedli, že nemají žádné oblíbené slovní úlohy nebo v odpovědi neuvedli nic.

Z celkového porovnání (tabulka 4-11a; poslední sloupec „celkem“) plyne, že nejoblíbenější úlohy jsou úlohy o celku a částech, jako oblíbené se objevily ve čtvrtině případů a celkově nejoblíbenější byly z uvedených čtyř typů ve všech sledovaných skupinách. Navíc ve všech případech byly vždy oblíbenější mezi dívkami (celkově o 10 % více než u chlapců). Vezmeme-li v úvahu, že tento typ úloh je nejjednodušší a postup při jeho řešení je nejvíce mechanický, pak nám z toho plyne, že je nejjednodušší se tento typ úloh „našprtat“. Proto asi nikoho nepřekvapí, že nejoblíbenější jsou úlohy o celku a částech mezi děvčaty gymnázií (až 41 %). Naopak chlapci ve všech typech škol vykazují oblíbenost těchto úloh prakticky stejnou (většinou kolem 20 %) a navíc srovnatelnou s oblíbeností jiných typů slovních úloh.

„Opakem“ v oblíbenosti jsou slovní úlohy o pohybu. Celkově je má raději o 8 % více chlapců než dívek. U dívek patří mezi nejméně oblíbené, není to však vždy jednoznačné. Pro chlapce jsou tyto úlohy ve všech skupinách nejoblíbenější. Nejvíce oblíbené jsou pro chlapce na středních školách a na gymnáziích (23 %).

Tabulka 4-11a – Porovnání oblíbenosti slovních úloh:

ZÁKLADNÍ ŠKOLY A NIŽŠÍ GYMNÁZIA

typ	rád			jak kdy			nerad			celkem		
slovní úlohy	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	29	33	31	13	35	24	19	30	25	16	33	25
o pohybu	14	17	15	21	13	16	13	10	11	18	12	15
o směsích	29	50	38	23	18	20	0	5	3	18	17	17
o společné práci	14	0	8	21	8	14	6	5	6	16	6	11
jiné	14	0	8	21	25	23	50	50	50	27	30	29
žádné nebo neuved.	0	0	0	3	3	3	13	0	6	5	2	3
celkem	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

STŘEDNÍ ŠKOLY

typ	rád			jak kdy			nerad			celkem		
slovní úlohy	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	29	38	31	26	20	24	8	36	22	22	27	25
o pohybu	19	13	17	28	20	25	17	4	10	23	14	19
o směsích	10	13	10	13	5	10	4	8	6	10	7	9
o společné práci	19	13	17	11	33	20	17	16	16	14	25	19
jiné	24	13	21	21	20	20	38	28	33	26	22	24
žádné nebo neuved.	0	13	3	0	3	1	17	8	12	4	5	5
celkem	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

ZÁKLADNÍ A STŘEDNÍ ŠKOLY

typ	rád			jak kdy			nerad			celkem		
slovní úlohy	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	29	36	31	21	28	24	13	33	24	20	30	25
o pohybu	18	14	17	25	16	21	15	7	11	21	13	17
o směsích	14	29	19	17	11	15	3	7	5	13	12	12
o společné práci	18	7	14	15	20	17	13	11	12	15	16	15
jiné	21	7	17	21	23	22	43	38	40	26	26	26
žádné nebo neuved.	0	7	2	1	3	2	15	4	9	4	4	4
celkem	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

GYMNÁZIA

typ	rád			jak kdy			nerad			celkem		
slovní úlohy	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	23	40	28	22	39	30	14	47	28	20	41	29
o pohybu	18	10	16	26	9	18	23	0	13	23	7	16
o směsích	18	30	22	17	15	16	0	0	0	13	14	13
o společné práci	14	10	13	11	15	13	5	6	5	10	12	11
jiné	27	10	22	22	20	21	36	47	41	27	25	26
žádné nebo neuved.	0	0	0	2	2	2	23	0	13	6	1	4
celkem	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Tabulka 4-11b – Porovnání oblíbenosti slovních úloh:

ZÁKLADNÍ ŠKOLY A NIŽŠÍ GYMNÁZIA

typ	rád			jak kdy			nerad			celkem		
slovní úlohy	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	6	6	13	16	44	59	9	19	28	31	69	100%
o pohybu	5	5	11	42	26	68	11	11	21	58	42	100%
o směsích	9	14	23	41	32	73	0	5	5	50	50	100%
o společné práci	7	0	7	57	21	79	7	7	14	71	29	100%
jiné	3	0	3	22	27	49	22	27	49	46	54	100%
žádné nebo neuved.	0	0	0	25	25	50	50	0	50	75	25	100%
celkem	5	5	10	30	31	62	13	16	28	48	52	100%

STŘEDNÍ ŠKOLY

typ	rád			jak kdy			nerad			celkem		
slovní úlohy	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	14	7	21	33	19	52	5	21	26	52	48	100%
o pohybu	12	3	15	45	24	70	12	3	15	70	30	100%
o směsích	13	7	20	47	13	60	7	13	20	67	33	100%
o společné práci	13	3	16	19	41	59	13	13	25	44	56	100%
jiné	12	2	15	27	20	46	22	17	39	61	39	100%
žádné nebo neuved.	0	13	13	0	13	13	50	25	75	50	50	100%
celkem	12	5	17	31	23	54	14	15	29	57	43	100%

ZÁKLADNÍ A STŘEDNÍ ŠKOLY

typ	rád			jak kdy			nerad			celkem		
slovní úlohy	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	11	7	18	26	30	55	7	20	27	43	57	100%
o pohybu	10	4	13	44	25	69	12	6	17	65	35	100%
o směsích	11	11	22	43	24	68	3	8	11	57	43	100%
o společné práci	11	2	13	30	35	65	11	11	22	52	48	100%
jiné	8	1	9	24	23	47	22	22	44	54	46	100%
žádné nebo neuved.	0	8	8	8	17	25	50	17	67	58	42	100%
celkem	9	5	14	31	27	58	13	15	28	54	46	100%

GYMNÁZIA

typ	rád			jak kdy			nerad			celkem		
slovní úlohy	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	10	8	18	24	36	60	6	16	22	40	60	100%
o pohybu	14	4	18	50	14	64	18	0	18	82	18	100%
o směsích	17	13	30	39	30	70	0	0	0	57	43	100%
o společné práci	16	5	21	32	37	68	5	5	11	53	47	100%
jiné	14	2	16	27	20	48	18	18	36	59	41	100%
žádné nebo neuved.	0	0	0	14	14	29	71	0	71	86	14	100%
celkem	13	6	19	32	27	58	13	10	23	57	43	100%

Zbývající dva typy úloh celkově již nepatří v žádné skupině k nejoblíbenějším úlohám, pouze v jednotlivých srovnáních se dostávají mezi nejvíce či nejméně oblíbené – u chlapců na základních školách slovní úlohy o směsích (nejoblíbenější mezi chlapci společně s úlohami o pohybu) a u dívek slovní úlohy o společné práci (nejméně oblíbené mezi dívkami na základních školách) či slovní úlohy o směsích (nejméně oblíbené mezi dívkami na středních školách).

Přejdeme-li k porovnání výsledků v jednotlivých částech (sloupce „rád“, „jak kdy“ a „nerad“), jsou hodnoty více rozdílné. Jedním z důvodů je menší počet respondentů, kteří tvoří základ, a proto i menší odchylka (co do počtu) se, vyjádřena v procentech, více zvýrazní. Ve slovních úlohách o celku a částech téměř vždy řeší raději tyto úlohy dívky (v 11 ze 12 sledovaných případů), největší rozdíl je 28 % (= 36 – 8) na středních školách v části „nerad“. Toto zcela koresponduje se zjištěním v celkovém přehledu.

Celkovému přehledu zcela odpovídá i výsledek ve slovních úlohách o pohybu, kdy naopak tyto úlohy často raději řeší chlapci (v 11 ze 12 případů), největší rozdíl je 23 % (= 23 – 0) na gymnáziích v části „nerad“. Tyto částečné výsledky tak jen potvrzují celková zjištění.

Ve slovních úlohách o směsích a úlohách o společné práci jsou celkové rozdíly malé, a proto v dílčích srovnáních se výsledky chlapců a dívek mění. Shrneme-li výsledky v jednotlivých částech, jsou celkem vyrovnané. Je-li v některé části výsledek příhodnější pro dívky, je hned v další části situace opačná.

Ve všech sledovaných skupinách asi 30 % respondentů uvedlo jako oblíbené jiné slovní úlohy nebo uvedli, že nemají oblíbené žádné slovní úlohy či neuvedli nic (do 5 %). Tyto poslední dvě možnosti nebudeme porovnávat. Jednak nejsou předmětem našeho zájmu, jednak v některých případech velmi malé základy (z celku maximálně 5 %, mnohdy méně) zkreslují výsledné hodnoty. Ne ojediněle se pak tyto hodnoty blíží 75 %.

Vezmeme-li jako základ celkové hodnoty v jednotlivých řádcích (tabulka 4-11b) a provedeme-li srovnání v těchto řádcích (označme jej nové), vidíme, že hodnoty pro všechny (tj. chlapce i dívky) korespondují s výsledky z předchozího srovnání (tabulka 4-11a; označme jej původní). V novém způsobu srovnání jsou rozdíly větší, v některých případech, kdy základní počet chlapců a dívek se výrazněji liší, mohou dokonce vykazovat opačné výsledky. Nejvýrazněji se to projevuje na středních školách ve slovních úlohách o celku a částech, kde v původním hodnocení je jako oblíbenější úlohy uvádí více procent dívek, kdežto v hodnocení novém je jako oblíbenější uvádí více chlapců. Samozřejmě, že „pravdivěji“ vypovídá o vztahu hodnocení původní. Nové hodnocení nám zase lépe vyjadřuje vazbu mezi údaji pro chlapce, pro dívky i pro všechny mezi jednotlivými sloupci „rád“, „jak kdy“ a „nerad“.

U sledovaných typů slovních úloh o celku a částech, o pohybu, o směsích a o společné práci je rozvrstvení jednotlivých hodnot klasické, odpovídající Gaussově křivce rozdělení hodnot. Jinak je tomu však u hodnot slovních úloh typu „jiné“ a „žádné nebo neuvedeno“. Zde jsou zcela srovnatelné hodnoty ve sloupcích „jak kdy“ a „nerad“. Z toho lze usuzovat, že ti, kteří řeší slovní úlohy neradi, nechtějí řešit úlohy žádné (toto zjištění ostatně odpovídá i výsledkům v otázce č. 4) nebo neví, které úlohy by řešili, protože jim pravděpodobně nejdou řešit žádné.

4.4.3. Více či méně slovních úloh

V otázce č. 4 měli žáci a studenti odpovědět, zda si přejí řešit slovních úloh více nebo méně. Nejdříve porovnejme respondenty podle toho co si přejí. Ti, kteří si přejí aby slovních úloh bylo více, řeší tyto úlohy rádi. Ti, kteří si přejí, aby úloh bylo stejně nebo méně někdy řeší slovní úlohy rádi, jindy neradi. Ti, kteří si nepřejí slovní úlohy žádné, je řeší neradi. Je možné říci, že vztah mezi tím zda respondenti řeší úlohy rádi či neradi a zda si přejí aby jich bylo více či méně, je posunut mírně do záporných hodnot, tj. čím nejraději řeší slovní úlohy, tím více si přejí, aby žádné nebyly. Vztahy uvádí první tabulka 4-12.

Tabulka 4-12 – Vztahy mezi přáním a skutečností:

Přeji si, aby slov. úl. bylo:	více	stejně	méně	žádné	nevím*	**celkem**
rád (a)	63	15	3	0	0	12
jak kdy	31	77	62	18	67	59
nerad (a)	6	8	35	82	33	29
celkem	100%	100%	100%	100%	100%	100%

nevím* = včetně neuvedených odpovědí

Přeji si, aby slov. úl. bylo:	více	stejně	méně	žádné	nevím*	**celkem**
rád (a)	37	56	7	0	0	100%
jak kdy	4	58	29	7	2	100%
nerad (a)	1	10	29	58	1	100%
celkem	7	42	26	23	1	100%

nevím* = včetně neuvedených odpovědí

Nyní porovnejme respondenty podle toho, jak rádi řeší slovní úlohy. Ti, kteří řeší slovní úlohy rádi, si spíše přejí, aby slovních úloh bylo stejně, mnohem méně si přejí, aby jich bylo více. Ti, kteří řeší slovní úlohy někdy rádi, někdy neradi, si také nejčastěji přejí, aby slovních úloh bylo stejně, většina ostatních si přeje, aby slovních úloh bylo méně. Ti, kteří řeší slovní úlohy neradi, si přejí, aby slovních úloh bylo méně, mnohem častěji, aby nebyly žádné.

4.4.4. K čemu jsou slovní úlohy

V otázkách č. 5 a č. 6 měli respondenti odpovědět, k čemu slouží slovní úlohy, a proč byly vymyšleny. Výsledky jsou v tabulce 4-13.

Tabulka 4-13 – K čemu slouží slovní úlohy:

Slovní úlohy slouží k tomu, abychom …	**celkem**
si bystřili mysl	24
se seznámili s úlohami z praxe a uměli je řešit	46
se naučili něčemu novému	11
se doma mohli chlubit jak jsme chytří	6
aby nás jimi učitelé ve škole trápili	12
k úplně jinému účelu	1
celkem	100%

Nejčastěji respondenti odpovídali, že slovní úlohy slouží k tomu aby se seznámili s úlohami z praxe a naučili se je řešit. Odpověděla tak téměř polovina žáků a studentů. V další otázce (č. 6) pak doplňovali, že úlohy nebyly vymyšleny, ale přímo vyplynuly z praxe. Téměř čtvrtina respondentů uvedla, že jim úlohy slouží k tomu, aby si bystřili mysl. Odpověď vlastně umocňuje předchozí odpověď – umění řešit slovní úlohy umožňuje bystřit si mysl. Na třetím místě se umístila odpověď „slovní úlohy slouží k tomu, aby nás jimi učitelé ve škole trápili. Dvanáct procent odpovědí (téměř každá sedmá) by nás mělo nutit k zamyšlení. Navíc tuto odpověď častěji uváděli ti, kteří mají ke slovním úlohám záporný postoj a ti, kteří v testech dosahovali podprůměrných výsledků.

Na čtvrtém místě se (těsně o 1 %) umístila odpověď „abychom se naučili něčemu novému“. Také tato odpověď doplňuje první dvě, kdy jde o to naučit se řešit slovní úlohy a zlepšit se. Další odpovědi již nebyly výrazněji zastoupeny.

Celkově lze říci, že z dotazníku jednoznačně nevyplývá, že by slovní úlohy byly neoblíbené. Neoblíbené jsou pouze pro ty, kteří je nechápou a neumějí řešit ať už stabilně nebo jen někdy. Ukazuje se, že je rozdíl v oblíbenosti slovních úloh mezi chlapci a dívkami. Nejvýrazněji se to projevuje ve slovních úlohách o celku a částech a slovních úlohách o pohybu. Dívky výrazně raději řeší slovní úlohy o celku a částech. Tyto úlohy bývají často jednodušší a při řešení je možné použít mechaničtější postup. Chlapci naopak výrazně raději řeší úlohy o pohybu. Tyto úlohy bývají často variabilnější a řešení je mnohdy složitější než u úloh o celku a části. Další typy slovních úloh jsou v oblibě mezi chlapci a dívkami srovnatelné, odchylky jsou většinou statisticky nevýznamné.

Ještě bych chtěl upozornit na velké procento žáků a studentů, kteří uváděli, že slovní úlohy slouží učitelům k tomu, aby je s nimi trápili. Pro tyto žáky a studenty by bylo dobré řešení slovních úloh zjednodušit užitím modelů, usnadnit jim zařazení slovních úloh do jednotlivých skupin podle typů a pomoci jim v řešení větší aplikací vzorců. Návodem by nám mohlo být použití vzorců k řešení úloh slovního charakteru již ve starověké Číně.

Z celkového pohledu není potěšitelné, že většina žáků a studentů má při výběru způsobu řešení slovní úlohy velmi omezený rejstřík metod. Drtivě převažuje používání rovnic. Jiné způsoby jsou spíše výjimkou. Bylo by vhodné, aby vyučující více zařazovali do výuky i jiné postupy při řešení slovních úloh. Je však otázkou nakolik budou limitováni časem a požadavkem na úspěch svého žáka či studenta při zkouškách.

Pokud srovnáme výsledky chlapců a dívek, je potěšitelné, že použitím různých metod nedochází k velkým rozdílům v celkové klasifikaci. Jsem pro to, aby byla podporována, jak kreativita jedněch, tak pečlivost druhých. Stírání rozdílu mezi oběma skupinami by nebylo ku prospěchu.

Závěr

Disertační práce začíná krátkým osvětlením, co je to matematická úloha a jak je z ní odvozena slovní úloha. V této první kapitole je vlastně připravena půda pro vlastní klasifikace slovních úloh a přehled metod, které se používají při jejich řešení.

Záměrem disertační práce bylo podat přehled nejběžnějších řešení slovních úloh, které se používají ve vybraných typech slovních úloh (nebyly zde například zařazeny slovní úlohy kombinatorické, o pravděpodobnosti, z finanční matematiky apod.), které jsem nazval společně „klasické“. Dále byla provedena klasifikace vybraných šesti typů slovních úloh. Nakonec byl vyhodnocen test a dotazník, který byl zadán žákům základních škol a studentům středních škol.

V přehledu postupů, které je možné použít při řešení vybraných slovních úloh, jsem se zaměřil na nejširší užití matematických modelů a příslušných metod řešení; nebyly opomenuty ani jiné, dnes méně užívané metody.

V klasifikaci slovních úloh jsem se zaměřil na šest typů, které jsem označil jako „klasické“. Jsou to typy úloh, které již byly řešeny často před mnoha tisíci let. Jedná se o slovní úlohy o celku a částech, o číslech, o pohybu, o směsích, o společné práci a o věku a letopočtu. Každý z typů byl klasifikován samostatně s přihlédnutím k již uvedeným postupům řešení slovních úloh. V každé skupině, na které jsem členil typy slovních úloh, jsem vybral pro ilustraci dva příklady. Počet dvou příkladů považuji za dostačující, větší počet příkladů nebylo možné zařadit vzhledem k rozsáhlosti tématu. Počet uvedených řešení v daných příkladech se různil, podle toho, zda jsem považoval za vhodné uvést více variant řešení, či jen jednu. Přednost jsem dával řešení pomocí rovnic, úsudku nebo obecného modelu, ale snažil jsem se neopomíjet ani jiná řešení.

V kapitole čtvrté jsem vyhodnotil zadané testové úlohy a přidaný dotazník, které byly zadané žákům a studentům základních a středních škol. Ukázalo se, že při řešení úloh dávají v drtivé většině přednost řešení pomocí rovnic, jiné metody jsou užívané již mnohem méně. Z dotazníku vyplývá, že žáci a studenti řeší slovní úlohy rádi, pokud jim jdou. Teď je třeba ještě zjistit, jak to zařídit, aby jim slovní úlohy „šly“.

V přílohách jsou doplněny některé kapitoly. V příloze 1 jsou do souborné sbírky shromážděny některé řešené příklady, které se vyskytují v disertační práci i další příklady, které ilustrují jednotlivé typy „klasických“ slovních úloh. Tato sbírka může být inspirující zejména pro vyučující. V příloze 2 jsou podrobně zpracovány testové úlohy a dotazník, které byly zadány žákům základních a středních škol. Jsou porovnány výsledky celkové i výsledky jednotlivých typů škol. Jsou doplněny dalšími způsoby řešení a ve většině případů jsou přidána řešení pomocí obecných modelů. Jsou zpracovány všechny postupy, které řešitelé používali. Postupy jsou přehledně klasifikovány pomocí tabulek a navzájem porovnány. Zcela jednoznačně je nejčastější užití rovnic a jejich soustav. S velkým odstupem jsou na druhém místě řešení pomocí úsudku. Užití dalších metod je už velmi řídké a vyskytuje se spíše nárazově. Z toho plyne, že pro vyučující i pro žáky a studenty je nejjednodušší řešit slovní úlohu pomocí rovnice nebo soustavy rovnic. Nakonec je vyhodnocen dotazník, kde se žáci a studenti vyjadřují k tomu v jaké oblibě mají či nemají slovní úlohy. V příloze 3 jsou uvedena naskenovaná zajímavá žákovská a studentská řešení slovních úloh, které byly zadány v testech. V příloze 4 je rejstřík, kde je možné zjistit uvedené vzorce, obrázky a tabulky.

I když některé metody se mohou jevit jako neobratné či složité, snažil jsem se uvést i tyto metody. Vycházím z toho, že v praxi může být někdy jednodušší získat podklady (hodnoty) pro matematicky méně vhodnou metodu. Například při výpočtu obsahu trojúhelníka (v praxi např. výměra trojúhelníkového pole) je snadnější změřit všechny tři strany než konstruovat výšku v trojúhelníku, a pak tuto výšku a základnu na kterou je kolmá změřit. Výpočet obsahu pomocí Heronova vzorce je potom složitější, ale pro dobrého matematika to není problém. Proto je třeba při volbě způsobu řešení přihlédnout nejenom k tomu, zda je postup nejjednodušší, ale také k tomu, kde a jak budeme řešení používat. Tato disertační práce by měla přispět k tomu, aby ti, kteří chtějí řešit slovní úlohy daných kategorií měli dostatečný výběr metod a způsobů řešení těchto úloh.

Vzhledem k velkému rozsahu tématu jsem nemohl v některých případech zacházet do podrobností. Proto jsou pouze naznačeny např. možnosti využití počítačů ve výuce (použití GeoGebry, Cabri geometrie apod.). Nezabývám se také sestavováním počítačových programů, které by bylo možné vytvořit k řešení slovních úloh. Užití počítačů ve výuce nebylo ani námětem mé disertační práce.

Nakonec chci uvést, že díky svým studiím a analýzám tématiky mé disertační práce se mi otevřel mnohem hlubší pohled na problematiku matematizace reálných situací a slovních úloh i na práci v didaktice matematiky obecně. Přiučil jsem se též mnohému při studiu řešených slovních úloh nejen v literatuře od autorů řešení, ale i od studentů při opravě zadaných testových úloh. Doufám, že moje disertační práce bude stejně inspirativní pro pedagogy i studenty učitelství pro jejich zasvěcenější přípravu na hodiny matematiky respektive na budoucí povolání.

Seznam použité literatury :

[01] *Andrys, J., Šisler, M*: O řešení algebraických rovnic. 1. vydání. Praha, Mladá fronta, ŠMM, 1966.

[02] *Bachet de Méziriac, C.-G.*: Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres. Paris, Gauthier-Villars, 1884. 242 s. (První vydání: Lyon, 1624).

[03] *Bartsch, H.-J.*: Matematické vzorce. Druhé, revidované vydání, Praha, SNTL- Nakladatelství technické literatury 1987. 832 s. 04-015-87.

[04] *Bašmakova, I. G.*: Diofant i Diofantovy uravněnija. Moskva, Nauka, 1972.

[05] *Běloun, F. a kol.*: Sbírka úloh z matematiky pro základní školu. Dotisk 8. upraveného vydání. Praha, Prometheus, 2001. ISBN 80-7196-104-3.

[06] *Benda, P. a kol.*: Sbírka maturitních příkladů, matematika. 9. vydání. Praha, SPN, 1983.

[07] *Beran, L., Ondráčková, I.*: Prověřte si své matematické nadání. 1. vydání. Praha, SNTL, 1988; 160 s., 04-015-88.

[08] *Beran, L., Ondráčková, I.*: Žádné obavy z matematiky – Pomoc středoškolákům. 2. vydání. Praha, SPN, 1989. 14-268-89.

[09] *Blažková, R., Matoušková, K., Vaňurová, M.*: Kapitoly z didaktiky matematiky (slovní úlohy, projekty). MU Brno, 2002. ISBN 80-210-3022-4.

[10] *Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šišma, J.*: Odmaturuj z matematiky 3, sbírka řešených příkladů. 1. vydání. Brno, Didaktis, 2004. ISBN 80-7358-010-1.

[11] *Buřil, Z.*: Slovní úlohy v matematice. Metodické postupy při řešení slovních úloh o pohybu, společné práci a směsích. Brno, UJEP Brno, 1985.

[12] *Bydžovský, B., Vojtěch, J.*: Sbírka úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol. 3. vydání. Praha, JČSMF 1924.

[13] *Calda, E., Odvárko, O., Šedivý, J., Židek, S.*: Metody řešení matematických úloh. Praha, SPN, 262 s.; 1990. ISBN 80-04-20434-1.

[14] *Cihlář, J., Lesáková, E., Řídká, E., Zelenka, M.*: Očekávané výstupy v RVP z matematiky ve světle testových úloh. Praha, ÚIV, 2007. ISBN 978-80-211-0544-7.

[15] Compléments du Cours d´Algèbre élémentaire, sixième édition. Tours, Maison A. Mame & fils, 1911.

[16] *Czudek, P. a kol.*: Slovní úlohy řešené rovnicemi pro žáky a učitele ZŠ, studenty a profesory SŠ. Sdružení podnikatelů HAV, Praha 1998.

[17] *Čermák, M., Kamarýt, A., Kořínková, H.*: Sbírka úloh z matematiky. Příručka pro přípravu na vysokou školu. 1. vydání. Praha, SNTL-Polytechnická knižnice, 1967.

[18] *Čermák, P., Červinková, P.*: Odmaturuj z matematiky. Druhé, opravené vydání. Brno, Didaktis, 2003. ISBN 80-86285-97-9.

[19] *Čupr, K.*: Numerické řešení rovnic. Jednota československých matematiků a fyziků. Praha, Prometheus, 84 s.; 1945.

[20] *Dobrovolný, B.*: Matematické rekreace. 2. rozšířené vydání. Praha, SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1969.

[21] *Domin, K.*: Arithmetika v úlohách pro ústavy učitelské. 3. nezměněné vydání. Kutná Hora, tiskem a nákladem Karla Šolce, 1907; 324 s.

[22] *Fischer, R., Malle, G.*: Člověk a matematika (úvod do didaktického myslenia a konania). Bratislava, SPN, 1992. ISBN 80-08-01309-5.

[23] *Graf, U.*: Kabaret matematiky. Praha, Orbis 1943

[24] *Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N.*: Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. UK v Praze-Pedagogická fakulta, 244 s., 2004. ISBN 80-7290-189-3.

[25] *Herman, J., Kučera, R., Šimša, J.*: Metody řešení matematických úloh I. Druhé přepracované vydání. MU Brno, 278 s.; 1996.

[26] *Hogben, L.*: Matematika pro každého. Praha, Nakladatelství Fr. Borový, 1948.

[27] *Hromádko, F., Strnad, A.*: Sbírka úloh z algebry pro vyšší třídy středních škol. 4. vydání. Praha, Jednota českých matematiků, 1890; 244 s.

[28] *Hruša, K., Sedláček, J.*: Řešené úlohy z matematiky. Aritmetika a algebra. 1. vydání. Praha, SNTL-Polytechnická knižnice, 1962.

[29] *Hudcová, M., Kubičíková, L.*: Sbírka úloh z matematiky pro SOU a SOŠ. Dotisk 1. vydání. Praha, Prometheus, 2001. ISBN 80-85849-40-2.

[30] *Hudcová, M., Kubičíková, L.*: Sbírka úloh z matematiky pro SOU, SOŠ a nástavbové studium. 1. vydání. Praha, Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-165-5.

[31] *Chráska, M.*: Metody pedagogického výzkumu (Základy kvantitativního výzkumu). Vydání 1. Praha, Grada, 2007. 272 s. ISBN 978-80-247-1369-4.

[32] *Janeček, F.*: Algebraické výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy. Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, JČSMF, 1991. ISBN 80-7015-300-8.

[33] *Janeček, F.*: Sbírka úloh pro střední školy (Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy). Praha, Prometheus, 2001. ISBN 80-7196-076-4.

[34] *Jarník, J., Šisler, M.*: Jak řešit rovnice a jejich soustavy. 2. doplněné vydání. Praha, SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1969.

[35] *Jelínek, M., Macháček, V.*: Matematika pro kurzy z učiva základní devítileté školy. 10. vydání. Praha, SPN, 1963; 296 s., 14-617-80.

[36] *Jirásek, F. a kol.*: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU, 1. část. Dotisk 5. vydání. Praha, Prometheus, 1986. ISBN 80-85849-55-0.

[37] *Jirásek, F. a kol.*: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU, 2. část. Dotisk 3. upraveného vydání. Praha, Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-012-8.

[38] *Juškevič, A. P.*: Dějiny matematiky ve středověku. Praha, Academia, 1978. 509-21-857.

[39] *Kolman, A.*: Dějiny matematiky ve starověku. Praha, Academia, 1968. 507-21-875.

[40] *Konforovič, A. G.*: Významné matematické úlohy. Praha, Státní pedagogické nakladatelství, 1989. ISBN 80-04-21848-2.

[41] *Kopka, J.*: Metody řešení matematických úloh. Google. 2011.

[42] *Koš, Jan*: Systémové modelování a slovní úlohy zaměřené na zemědělství a blízké obory průmyslu (diplomová práce). UP Olomouc, 1999.

[43] *Kotyra, D., Sivošová, A.*: Jak se naučím řešit slovní úlohy z matematiky. 1. vydání. Mníšek pod Brdy, Educo, 1997. ISBN 80-902080-7-X.

[44] *Koubová, J.*: Aktivity volného času v matematických úlohách (okruh úloh zaměřených na sport, cestování, turistiku, rekreace, hry, hobby, zábavu, kulturu, loterii a sázení), (diplomová práce). UP Olomouc, 2004.

[45] *Kováčik, J. a kol.*: Řešené příklady z matematiky pro střední školy k maturitě, k přijímacím zkouškám na vysokou školu. 1. vydání. Praha ASPI Publishing, 712 s.; 2004.

[46] *Kraemer, E., Hradecký, F., Jozífek, V.*: Sbírka řešených úloh z matematiky (6. až 8. postupný ročník). 1. vydání. Praha, SPN, 1956. 65-3-01.

[47] *Kubát, J.*: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na VŠ. Praha, Victoria Publishing, 1993. ISBN 80-85605-27-9.

[48] *Kubešová, N., Cibulková, E.*: Matematika, přehled středoškolského učiva. 1. vydání. Třebíč, Nakladatelství Petra Velanová, 2006. ISBN 80-86873-03-X.

[49] *Kubínová, M.*: Klíč k matematice aneb Přijdu na to sám! pro 2. stupeň ZŠ i pro nižší ročníky víceletých gymnázií. 1. vydání. Praha, Albatros 2005; 158 s. ISBN 80-00-01591-9.

[50] *Maláč, J., Kurfüfst, J.*; Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ. Praha, SPN, 1981.

[51] *Maška, O.*: Matematika v úlohách, I. Aritmetika a algebra. Nakladatelství Barvič & Novotný, Brno 1936.

[52] *Maška, O.*: Řešené úlohy z matematiky. Aritmetika a algebra. 1. vydání. Praha, SNTL--Polytechnická knižnice, 1958.

[53] *Meyers Großer Rechenduden – Erster Band*; Populární encyklopedie matematiky. Praha, SNTL, 1971; 664 s.

[54] *Nohýl J.*; Matematické úlohy a realita (okruh úloh zaměřených na přírodu, zeměpis, nebeská tělesa a kalendáře), (diplomová práce). UP Olomouc, 1999.

[55] *Novák, B., Stopenová, A.*; Slovní úlohy ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ. UP Olomouc, 1993.

[56] *Novoveský, Š., Križalkovič K., Lečko, I.*: Zábavná matematika. Praha, SPN, 1974.

[57] *Novotná, J.*: Analýza řešení slovních úloh (kapitoly z didaktiky matematiky). UK v Praze-Pedagogická fakulta, 126 s., 2000. ISBN 80-7290-011-0.

[58] *Novotná, J., Bílá, A., Fritzová, H.*: Dohoní gepard klokana? 1. vydání. Praha, Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-081-0.

[59] *Odvárko, O., Kadleček, J.*: Přehled matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií. 1. vydání. Praha, Prometheus 2004. 272 s. ISBN 80-7196-276-7.

[60] *Ostrý, M.*: Aritmetika v úlohách (ke zkouškám z matematiky). Druhé, přepracované vydání. Praha, Česká grafická Unie, 1948.

[61] *Perel´man, J. I.*: Zajímavá algebra. Praha, Polytechnická knižnice, I. řada, Věda a technika populárně, 1985.

[62] *Perel´man, J. I.*: Zajímavá matematika. 1. vydání. Praha, Mladá fronta, 1952.

[63] *Polák, J.*: Středoškolská matematika v úlohách I. Dotisk 1. vydání. Praha, Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-021-7.

[64] *Polák, J.*: Středoškolská matematika v úlohách II. 1. vydání. Praha, Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-166-3.

[65] *Rakoušová, A.*: Integrace obsahu vyučování. 1. vydání. Praha, Grada, 2008. ISBN 978-80-247-2529-1.

[66] *Sedláček, J.*: Nebojte se matematiky. 2. doplněné vydání. Praha, SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1969.

[67] *Schwarz, Š.*: O rovnicích. Praha, Jednota československých matematiků a fyziků, 160 s.; 1947.

[68] *Ševčík, J.*: Humanizace matematického vzdělávání (se zaměřením na úlohy o pohybu), (diplomová práce). UP Olomouc, 1997.

[69] *Šíma, F.*: Deskriptivní geometrie, (studijní opora). 1. vydání. České Budějovice, VŠTE v Českých Budějovicích, 2010. ISBN 978-80-87278-49-9.

[70] *Šíma, F.*: Kongruence a diofantovské rovnice, (diplomová práce). UP Olomouc, 1975.

[71] *Šíma, F.*: Přístup k matematizaci prostřednictvím úloh rekreační matematiky. MFI 19**,** 2009/2010, str. 396-404.

[72] *Trávníček, S.*: Matematické úlohy jako součást literárních textů. MFI 6, 1996/1997), č. 3, str. 113-120, č. 4, str. 169-178.

[73] *Trávníček, S.*: Matematizace reálných situací. MFI 11**,** 2001/2002, č. 7, str. 388-398, Olomouc 2002. ISSN - 1210-1761.

[74] *Trávníček, S.*: O humanizaci matematického vzdělávání. MFI **7**, 1997/1998, č. 5, str. 257--265.

[75] *Trávníček, S.*: Oprava písemek z matematiky. UP Olomouc, 2006. ISBN 80-244-1556-9.

[76] *Trávníček, S.*: Slovní úlohy o celku a částech. MFI 20, 2010/2011, č. 3, str. 165-171.

[77] *Trávníček, S.*: Slovní úlohy o pohybu. MFI 14, 2004/2005, str. 449-462.

[78] *Trávníček, S.*: Úlohy o směsích. MFI 20, 2010/2011, č. 6, str. 361-369.

[79] *Trávníček, S.*: Úlohy o společné práci. MFI 21, 2011/2012, č. 7, str. 428-438.

[80] *Trávníček, S., Trávníčková L.*: Některé výchovné aspekty použití slovních úloh ve vyučování matematice. MFvŠ, roč. 5, 1974/1975, č. 2, str. 81-92.

[81] *Vejmola, S.*: Konec záhady hlavolamů. 1. vydání. Praha, SPN, 1986. 14-618-86.

[82] *Vejsada, F., Talafous, F.*: Sbírka úloh z matematiky pro SVVŠ. 1. vydání. Praha, SPN, 1969. 15-534-69.

[83] *Vocelka, J*: Repetitorium středoškolské matematiky ve slovních úlohách. Praha, Scientia, 2008. ISBN 978-80-86960-34-0.

[84] *Vyšín, J.*: Metodika řešení matematických úloh. 2. doplněné vydání. Praha, Matematická knižnice, 1962.

[85] *Vyšín, J.*: Neurčité rovnice. Praha, Jednota československých matematiků a fyziků, 1949.

[86] *Zelinka, B.*: Matematika hrou i vážně. 1. vydání. Praha, Mladá fronta, ŠMM, 1979.

[87] *Zemek, V.*: Mr. Mokré tričko, počítač a matematika. MFI 15 2005/2006, str. 613-619.

[88] *Zgarbová, P.*: Metakognice jako součást procesu řešení matematických slovních úloh žáků mladšího školního věku, (disertační práce), MU Brno 2011.

[89] *Zhouf, J. a kol.*: Matematické příběhy z korespondenčních seminářů. 1. vydání. Praha, Prometheus, 2006. ISBN 80-7196-304-6.

Seznam příloh:

Název:

Matematizace reálných situací a slovní úlohy

Title:

Mathematisation of Realistic Situations and Word Problems

Titre:

La mathématisation de situations réelles et les problèmes mathématiques

Klíčová slova:

Matematizace reálných situací, slovní úloha, model, metoda řešení slovní úlohy, klasifikace slovních úloh, vyhodnocení testů, vyhodnocení dotazníků

Key words:

Mathematisation of realistic situations, word problem, model, method of word problem solution, classification of word problems, evaluation of tests, evaluation of questionnaires

Mots clefs:

La mathématisation de situations réelles, le problème mathématique, le modèle, la méthode de la solution du problème mathématique, la classification des problèmes mathématiques, l´évaluation des tests, l´évaluation des questionnaires

Anotace:

Disertační práce se zabývá problémem slovních úloh, formulací tohoto pojmu, jejich klasifikací, matematickým modelováním a řešením. Také je zde vyhodnocen test a dotazník, který byl zadán žákům základních škol a studentům středních škol.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. V první kapitole je popsána matematizace reálné situace a tvorba slovní úlohy, dále je provedena klasifikace slovních úloh z hlediska typologie a je vyhodnoceno zastoupení (četnost) jednotlivých typů slovních úloh ve vybraných souborech (sbírkách) slovních úloh. Na konci kapitoly je ukázka zapojení matematiky do řešení reálných situací.

Ve druhé kapitole jsou nastíněny metody řešení slovních úloh a ukázány jednotlivé matematické modely, které jsou používány při řešení těchto úloh. Najdeme zde modely aritmetické, algebraické, geometrické a úsudky, které při řešení vedou na různé rovnice, soustavy rovnic, posloupnosti, řady a také derivace. Postupuje se od jednodušších metod ke složitějším.

Ve třetí kapitole je provedena klasifikace vybraných šesti typů slovních úloh, a to úloh o celku a částech, o číslech, o pohybu, o směsích, o společné práci a o věku a letopočtu. Jednotlivé typy jsou dále členěny na skupiny a po charakterizaci každé skupiny následují vždy dva řešené ukázkové příklady.

Ve čtvrté kapitole se pojednává o testech, které byly zadávány žákům základních škol a studentům středních škol. Po jejich celkovém vyhodnocení následuje porovnání výsledků jednotlivých typů škol a také výsledků dívek a chlapců. Rovněž se sledovalo, jaké metody používali žáci a studenti při řešení úloh a jaký byl rozdíl v použití těchto metod na jednotlivých typech škol a také mezi dívkami a chlapci. Nakonec byl vyhodnocen dotazník, ve kterém žáci a studenti vyjadřovali svůj vztah ke slovním úlohám.

Disertační práce obsahuje mnoho zajímavých informací z oblasti matematizace reálné situace a řešení slovních úloh. Kromě teoretických poznatků je jejím praktickým přínosem zejména množství řešených slovních úloh vybraných typů. Stejně tak jsou pro praxi cenné také informace o přístupu žáků a studentů k řešení slovních úloh. Předložená práce tak může sloužit pedagogům a studentům učitelství jako zdroj informací pro jejich zasvěcenější přípravu na hodiny matematiky respektive na budoucí povolání.

Abstrakt

The thesis deals with the theme of verbal exercises, with the formulation of this term and the classification, mathematical modelling and solution of verbal exercises. The tests and questionnaires which were assigned to pupils (primary school) and students (secondary school) are also assessed.

The text is divided into four chapters. The first chapter deals with the mathematisation of realistic situations and the creation of a verbal exercise. Moreover, the classification of verbal exercises from the point of typology makes part of this chapter. The number (frequency) of different types of verbal exercises in chosen verbal exercise collections is also assessed. The chapter is concluded by an example of mathematics used when solving realistic situations.

The second chapter is dedicated to the methods of verbal exercise solutions and to different mathematical models used for solving these exercises. Furthermore, it deals with the arithmetic, algebraic and geometric models and judgement-based models which lead to different equations, equation systems, progressions and derivations. Simple methods are followed by more complicated ones.

The third chapter classifies six chosen types of verbal exercises – i.e. verbal exercises about the whole and parts, about numbers, movement, mixtures, common work, age and year. Each type of verbal exercises is further divided into groups. The characteristic of each group is followed by two sample solved examples.

The fourth chapter deals with the tests assigned to pupils (primary school) and students (secondary school). The assessment of these tests is followed by the comparison of the results at different types of schools and the comparison of results of girl and boys. Furthermore, the methods used by pupils and students when solving the verbal exercises were observed, as well as the differences in using these methods at particular types of schools and also between girls and boys. Finally, the questionnaire in which the pupils and students expressed their attitude towards verbal exercises was evaluated.

The thesis deals with a lot of interesting information in the field of the mathematisation of a realistic situation and the solution of verbal exercises. Besides the theoretical findings, its practical contribution lies mainly in the amount of solved verbal exercises of different types. The information about the attitude of pupils and students towards the solving of verbal exercises has also a big value in practice. Therefore, the thesis is a valuable source of information for pedagogues and students of pedagogical faculties – it can help them to prepare better for the lessons of mathematics or for their future profession.

Annotation

La thèse s´occupe des problèmes mathématiques, de la formulation de ce terme, de la classification des problèmes mathématiques, de leur modulation mathématique et leur solution. L´évaluation des tests et des questionnaires qui ont été soumis aux élèves (des écoles primaires) et étudiants (des écoles secondaires) fait aussi partie de cette thèse.

La thèse est divisée en 4 chapitres. Le premier s´occupe de la mathématisation d´une situation réelle et de la création d´un problème mathématique. Ensuite, la classification des problèmes mathématiques du point de vue de typologie fait partie de cette chapitre suivie par l´évaluation de la quantité de différents types des problèmes mathématiques dans les collections des problèmes mathématiques choisisses. Ensuite, l´utilisation de mathématique dans la solution des situations réelles est montrée.

Le second chapitre décrit les méthodes de la solution des problèmes mathématiques, montre les modèles mathématiques particuliers qui sont utilisés pour une solution de ces modèles mathématiques. Il s´agit des modèles arithmétiques, algébriques, géométriques et jugements qui pendant la solution mènent aux équations différentes, aux systèmes d´équations, aux progressions et aux dérivations. Les méthodes plus difficiles suivent celles plus faciles.

La classification de six types choisis des problèmes mathématiques fait partie du troisième chapitre. Il s´agit des problèmes mathématiques concernant l´ensemble et les parties, les numéros, le mouvement, les mélanges, le travail commun, l´âge et la date. Chaque type et encore sectionné en groupes et caractérisé. Deux exemples modèles résolus sont mentionnés pour chaque groupe.

Le quatrième chapitre traite les tests, qui ont été soumis aux élèves et étudiants. L´évaluation de ces tests est suivie par la comparaison des résultats selon différents types d´écoles et des résultats des filles et des garçons. On a aussi suivi quelles étaient les méthodes utilisées selon les différents types d´écoles et quelles étaient les différences entre les garçons et les filles en ce qui concerne les méthodes utilisées. Le questionnaire sur l´attitude des élèves et étudiants concernant les problèmes mathématiques est aussi évalué dans ce chapitre.

La thèse contient beaucoup d´informations sur la mathématisation de la situation réelle et sur la solution des problèmes mathématiques. Outre les connaissances théoriques, sa contribution pratique consiste avant tout à la quantité des problèmes mathématiques de différents types résolus. En pratique, on apprécie aussi les informations sur l´attitude des élèves et étudiants concernant la solution des problèmes mathématiques. Cette thèse peut en conséquence aider aux pédagogues et les étudiants des facultés pédagogiques à pouvoir se mieux préparer aux leçons de mathématique ou bien à leur profession future.

Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci

Katedra algebry a geometrie

Sbírka

slovních úloh

Disertační práce

Příloha č. 1

Vedoucí disertační práce:

Doc. RNDr. Stanislav Trávníček CSc.

Vypracoval:

Mgr. František Šíma

Olomouc 2013

O B S A H

Úvod:

Sbírka řešených slovních úloh vznikla jako reakce na požadavek vyučujících, aby měli možnost vybírat si z určitého souboru řešených slovních úloh. Tento soubor by jim tak usnadnil výběr slovních úloh při přípravě na vyučování i k sestavování různých písemných prací.

Slovní úlohy jsou rozděleny do skupin (typů) podle klasifikace v kapitole III disertační práce. Ve skupině jsou nejdříve některé úlohy, které jsou již řešené v disertační práci. Tyto úlohy jsou doplněny dalšími způsoby řešení. Následují úlohy, které jsou řešeny pomocí obecného modelu. Tyto obecné metody vedou na vzorec, který je často používán při řešení dalších úloh. Na závěr se objevují specifické nebo zajímavé příklady, často jsou to příklady rekreační matematiky.

Vzorce, které jsou odvozené, a pak se dále používají, jsou označeny dvojsložkově, např. (4-2). První složka je číslo kapitoly, ve které se vzorec nachází (v našem případě se jedná o kapitolu 4, slovní úlohy o směsích), druhá složka je pořadí vzorce v kapitole (je-li to 2, potom vzorec je druhý v kapitole). Na závěr sbírky je v rejstříku přehled uvedených vzorců.

Příklady jsou značeny následovně:
<u>*Příklad* 1.1.1:</u> = ***Příklad* 1.1.2:** - »rozšíření počtu řešení«.
První část (podtrženo) je označení příkladu ve Sbírce slovních úloh. První číslo je číslo kapitoly, druhé číslo je číslo skupiny v této kapitole a třetí číslo je pořadí příkladu v dané skupině. Druhá část (silně kurzívou – pokud existuje) je označení příkladu v disertační práci. Třetí část (pokud existuje) je poznámka upřesňující informace o úloze nebo o jejím řešení (v tomto případě se jedná o příklad, který je již řešen v disertační práci, je však doplněn dalšími řešeními).

Počty příkladů v jednotlivých skupinách se navzájem dost liší. Důvodem je velmi rozdílné množství jednotlivých příkladů, které se ve sbírkách v různých typech vyskytují. V některých skupinách bylo možné tento rozdíl trochu zmenšit, v jiných to byl problém, protože nově vykonstruované úlohy by vypadaly uměle. Úlohy jsou uvedeny včetně řešení (některá jednodušší řešení jsou krácena), zkoušky (ve většině případů) a odpovědi.

Mojí snahou bylo zařadit co nejvíce variant způsobů řešení, aby byla vidět co největší variabilita možných řešení. V disertační práci toto možné z prostorových důvodů nebylo. Vyučující tak mají možnost vybírat úlohy podle metod řešení a zařazovat je do výuky nebo do testu.

Sbírka úloh by měla být inspirující nejen pro výběr slovních úloh, ale také pro tvorbu dalších, podobných úloh, tj. pro vytvoření tzv. hroznu úloh. Doufám, že sbírka k vysloveným cílům povede a pedagogové a studenti pedagogických směrů zde získají inspiraci pro svoji nelehkou práci při řešení slovních úloh.

1. Slovní úlohy o celku a částech

Slovní úlohy o celku a částech jsou dále členěny podle toho co je předmětem výpočtu (zda celek nebo část) a podle toho jakým způsobem jsou jednotlivé kategorie zadány (např. v jediné nebo ve dvou situacích).

1.1. Skupina 1: *„Hledání celku"*

Máme množinu objektů (nebo též »celek«), které jsou jednoho druhu. Množina (celek) je rozdělena na alespoň dvě části. Je dán počet prvků jedné nebo více částí (alespoň jedna podmínka absolutní), počty prvků ostatních částí jsou dány podmínkami relativními (zlomky nebo procenta) nebo mohou být dány i vazby mezi těmito počty. Úkolem je určit počet prvků celku. Modelem je zpravidla jen jedna lineární rovnice o jedné neznámé, i když někdy z didaktických důvodů je vhodné použít soustavu n rovnic o n neznámých.

Příklad 1.1.1: = ***Příklad* 1.1.2:** - »rozšíření počtu řešení«
Zloděj vlezl do sadu a natrhal si jablka. Cestou ze sadu narazil postupně na tři hlídače. Každého podplatil polovinou jablek, které měl právě v tašce. Protože jich ale byl vždy lichý počet, musil se vykoupit „*větší polovičkou*", tj. počtem zaokrouhleným nahoru na celá jablka. Kolik jablek si natrhal, jestliže vyvázl ze sadu s jedním jablkem?

Řešení č. 1:
Jako neznámou x si označme počet ks jablek na počátku. Matematizujeme-li reálnou situaci, dostáváme:

Prvnímu strážci dal $\frac{x+1}{2}$ jablek, zbylo mu $x-\frac{x+1}{2}=\frac{x-1}{2}$ jablek,

druhému strážci dal $\frac{\frac{x-1}{2}+1}{2}=\frac{x+1}{4}$ jablek, zbylo mu $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{4}=\frac{x-3}{4}$ jablek,

třetímu strážci dal $\frac{\frac{x-3}{4}+1}{2}=\frac{x+1}{8}$ jablek, zbylo mu $\frac{x-3}{2}-\frac{x+1}{8}=\frac{x-7}{8}$ jablek,

současně víme, že mu zbylo 1 jablko, proto platí

$$\frac{x-7}{8}=1,$$

odkud vychází $x = \underline{\underline{15}}$ jablek.

Zkouška:
Když narazil na 1. hlídače, měl zloděj 15 jablek, strážci dal „větší" polovinu, tj. 8 jablek a zbylo mu 7 jablek. Když narazil na 2. hlídače, dal mu opět „větší" polovinu, tentokrát ze 7 jablek, tj. 4 jablka a zbyla mu 3 jablka. Nakonec 3. hlídači dal „větší" polovinu ze 3 jablek, tj. 2 jablka a zbylo mu 1 jablko.
Odpověď:
Zloděj si natrhal 15 jablek.

Řešení č. 2: - {*úsudek „obrácením postupu"*}
Při řešení úlohy budeme „postupovat od konce". Když zloděj narazil na posledního, třetího hlídače dal mu „větší polovinu" jablek. Protože mu zbylo 1 jablko, třetí hlídač dostal 2 jablka. Po vykoupení u druhého hlídače měl zloděj tedy 3 jablka. Druhému hlídači dal proto 4 jablka

a po vykoupení u prvního hlídače měl zloděj 7 jablek. Prvnímu hlídači dal 8 jablek, a když narazil na prvního hlídače, měl zloděj 15 jablek.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

Příklad 1.1.2:
Povídá skladník: „Odeslal jsem polovinu zásoby a jeden kus navíc; vyřadil jsem 10 zmetků a zbývá mi tam třetina původního počtu a 7 celých kusů a dvě třetiny kusu.“ Kolik kusů měl na začátku?

Řešení:
Jako neznámou x si označme počet ks na počátku; potom reálná situace je matematizována rovnicí:

$$\frac{x}{2}+1+10+\frac{x}{3}+7+\frac{2}{3}=x,$$

jejímž řešením je $x = \underline{\underline{112}}$ ks.
Zkouška:
Polovina zásoby a jeden kus navíc je 112 : 2 + 1 = 57 kusů, potom 10 zmetků a nakonec třetina původního počtu a 7 celých kusů a dvě třetinu kusu je 112 : 3 + 7 + $\frac{2}{3}$ je 45 kusů; celkem 57 + 10 + 45 = 112 kusů.
Odpověď:
Skladník měl na začátku 112 kusů

Poznámka:
Přestože v textu úlohy jsou uvedeny třetiny kusu (je jimi popisována skladníkova „operace“ se zásobami), vychází řešení v celých kusech.

Příklad 1.1.3:
Kůl je zaražen do $\frac{1}{4}$ své délky v zemi, $\frac{1}{3}$ je ve vodě a 5 m vyčnívá nad vodou. Jak dlouhý je celý kůl?

Řešení č. 1:
Označme si délku celého kůlu x [m], potom můžeme danou úlohu matematizovat takto:

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}x+5=x \quad \Big| \cdot 12$$
$$3x + 4x + 60 = 12x \quad \Big| - 7x$$
$$60 = 5x \quad \Big| : 5$$
$$\underline{\underline{x = 12}} \text{ [m]}.$$

Zkouška:
Čtvrtina kůlu v zemi má délku $\frac{1}{4} \cdot 12 = 3$ m, třetina kůlu ve vodě má délku $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ m a 5 m kůlu vyčnívá nad vodou. Celková délka kůlu je 3 + 4 + 5 = 12 m.
Odpověď:
Celý kůl je dlouhý 12 metrů.

Řešení č. 2:
Označme si délku celého kůlu x [m]. Poměrnou část kůlu v zemi označme a, potom je v zemi $a \cdot x$ [m] kůlu. Poměrnou část kůlu ve vodě označme b, potom je ve vodě $b \cdot x$ [m] kůlu. Nakonec část kůlu, která vyčnívá nad vodu označme k. Pak platí

$$a \cdot x + b \cdot x + k = x.$$

Z rovnice vyjádříme x. Dostáváme

$$\underline{\underline{x = \frac{k}{1-a-b}}}\ . \qquad \textbf{(1-1a)}$$

V našem případě je $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{3}$, $k = 5$. Z toho vypočteme x:

$$x = \frac{k}{1-a-b} = \frac{5}{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} = \frac{5}{\frac{5}{12}} = \underline{\underline{12}} \text{ m.}$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v řešení č. 1.

Příklad 1.1.4:
Muž zanechal ženě a třem synům jmění následovně: Manželce odkázal ⅓ celého jmění, 1. synovi ⅓ zbytku a 2 600 Kč, z nynějšího zbytku, 2. synovi zase ⅓ a 2 200 Kč, 3. synovi připadl konečný zbytek, obnášející 5 400 Kč. Jaké jmění otec zanechal?

Řešení:
Jako neznámou x si označme celkové jmění muže. Potom pomocí neznámé zapíšeme vztahy v úloze a dostáváme rovnici:

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}x\right)+2\,600+\frac{1}{3}\left\{x-\left[\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}x\right)+2\,600\right]\right\}+2\,200+5\,400=x,$$

jejímž řešením je x = <u>31 500</u> Kč.
Zkouška:
Manželce odkázal ⅓ celého jmění, tj 31 500 : 3 = 10 500 Kč, zbývá 21 000 Kč.
1. synovi odkázal ⅓ zbytku a 2 600 Kč, tj. 21 000 : 3 + 2 600 = 9 600 Kč, zbývá 11 400 Kč.
2. synovi odkázal zase ⅓ nynějšího zbytku a 2 200 Kč, tj. 11 400 : 3 + 2 200 = 6000 Kč a na 3. syna zbývá 5 400 Kč.
Odpověď:
Otec zanechal 31 500 Kč.

Příklad 1.1.5:
Ryba váží ¾ své váhy a desetinu své váhy a ještě 3 kg. Jak je těžká?

Řešení:
Neznámá x = váha ryby; potom dostáváme rovnici:

$$\frac{3}{4}x+\frac{1}{10}x+3=x,$$

jejímž řešením je $\underline{\underline{x = 20}}$ kg.
Odpověď:
Hmotnost ryby je 20 kg.

Příklad 1.1.6:

Víme, že čtvrtina stáda velbloudů se pase v křoví, 15 je jich na břehu řeky a zbytek, tj. dvojnásobek druhé odmocniny z celkového počtu velbloudů, je na úpatí pahorku. Kolik velbloudů je ve stádu?

Řešení:

Neznámá x = počet velbloudů; potom dostáváme rovnici:

$$\frac{1}{4}x + 15 + 2\sqrt{x} = x,$$

která vede na kvadratickou rovnici

$$9x^2 - 424x + 3\,600 = 0$$

jejímž řešením jsou $x_1 = 36$, $x_2 = \frac{100}{9}$; vyhovující řešení je pouze x_1;

tedy počet velbloudů je 36.

Odpověď:

Ve stádu je 36 velbloudů.

Příklad 1.1.7:

Montblanc je hora tak vysoká, že $\frac{1}{13}$ a $\frac{1}{37}$ její výšky dávají dohromady $\frac{1}{2}$ km. Vypočítejte tuto výšku.

Řešení:

Označme x [m] výšku hory Montblanc, potom platí

$$\frac{1}{13}x + \frac{1}{37}x = 500 \quad \Big| \cdot 13 \cdot 37$$

$$50x = 240\,500 \quad \Big| : 50$$

$$x = 4\,810 \text{ [m]}$$

Zkouška:

$\frac{1}{13}$ výšky hory je $\frac{1}{13} \cdot 4\,810 = 370$ m a $\frac{1}{37}$ hory je $\frac{1}{37} \cdot 4\,810 = 130$ m, dohromady 370 + 130 = 500 m = 0,5 km.

Odpověď:

Montblanc je hora vysoká 4 810 m (platilo v době, kdy byl příklad v učebnicích).

Příklad 1.1.8:

Hráč ztratil při první hře $\frac{1}{6}$ svých peněz, při druhé $\frac{1}{10}$, při třetí vyhrál $\frac{1}{3}$ (pokaždé z původní sumy); počítaje potom peníze shledal, že vyzískal 3 Kč. Kolik peněz s sebou přinesl?

Řešení:

Neznámá x = původní počet peněz; potom dostáváme rovnici:

$$x - \frac{1}{6}x - \frac{1}{10}x + \frac{1}{3}x = x + 3,$$

jejímž řešením je $x = 45$ Kč.

Odpověď:

Hráč s sebou přinesl 45 Kč.

Příklad 1.1.9:

Úředník nevystačí se svým služným; potřeboval by služné o $\frac{1}{5}$ větší. I najde si vedlejší zaměstnání, jímž vydělá ročně 7 000 Kč; s tímto úhrnným příjmem nejen že vystačí, nýbrž může za rok ještě uložit $\frac{1}{16}$ veškerého příjmu. Jaké je jeho služné?

Řešení:

Neznámá x = původní počet peněz; potom dostáváme rovnici:

$$x+\frac{1}{5}x=x+7\ 000-\frac{1}{16}(x+7\ 000),$$

jejímž řešením je $\underline{\underline{x = 25\ 000}}$ Kč.

Odpověď:

Úředníkovo roční služné je 25 000 Kč.

Příklad 1.1.10:

Obchodník měl jistou částku peněz. Za první rok utratil 100 liber. Ke zbývající částce přidal jednu její třetinu. Během dalšího roku utratil 100 liber. Potom ke zbytku přidal jednu jeho třetinu. Během třetího roku opět utratil 100 liber. Potom ke zbytku přidal jednu jeho třetinu. Nyní měl obchodník dvakrát více peněz než na začátku. Kolik peněz měl nyní?

Řešení:

Neznámá x = původní částka peněz, nová částka je $2x$; potom řešení vede na rovnici:

$$\frac{64}{27}x-\frac{14\ 800}{27}x=2x,$$

kde x = 1 480 liber; tedy nyní měl $\underline{\underline{2\ 960}}$ liber.

Zkouška:

1 480 – 100 = 1380	1 840 – 100 = 1 740	2 320 – 100 = 2 200
1 380 : 3 = 460	1 740 : 3 = 580	2 200 : 3 = 740
1 380 + 460 = 1 840	1 740 + 580 = 2 320	2 200 + 740 = $\underline{\underline{2\ 960}}$

Odpověď:

Nyní měl 2 960 liber.

Příklad 1.1.11:

Kdosi vydá $\frac{1}{8}$ svého příjmu na byt, třikrát tolik na stravu, $\frac{1}{10}$ na obsluhu, $\frac{1}{5}$ na šatstvo a p. Na ostatní potřeby vydá $\frac{5}{6}$ zbytku a ostatek, totiž 1 200 Kč, uloží. Jaký je jeho příjem?

Řešení:

Neznámá x = příjem; potom dostáváme rovnici:

$$\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}x+\frac{1}{10}x+\frac{1}{5}x+\frac{5}{6}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right)\right]x+1\ 200=x,$$

kde $\underline{\underline{x = 36\ 000}}$ Kč.

Odpověď:

Jeho příjem je 36 000 Kč.

Příklad 1.1.12:
Pokladník hokejového klubu hlásil tržbu za poslední 4 utkání: V 1. utkání jsme získali $\frac{1}{6}$ této částky, za 2. utkání $\frac{1}{4}$, za 3. pak $\frac{1}{3}$ a konečně za čtvrté 24 000 Kč. Jaká byla celková tržba?

Řešení:
Neznámá x = celková tržba; potom dostáváme rovnici:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{4}+\frac{x}{3}+24\,000=x,$$

kde $x = 96\,000$ Kč.
Odpověď:
Celková tržba byla 96 000 Kč.

Příklad 1.1.13:
Pan ředitel ZŠ je matematik, ale zapomněl, kolik má ve škole žáků. Ví však, že 53 % z nich je ve třídách 1. – 5., 14 % je v 6. třídě, 13 % je v 7. třídě, v 8. třídě je o 3 méně než v 7. a v 9. je o 24 méně než v 8. Takže není problém počet žáků jeho ZŠ zjistit.

Řešení:
Neznámá x = počet žáků ZŠ; potom dostáváme rovnici:

$$x\cdot 0{,}53+x\cdot 0{,}14+x\cdot 0{,}13+(x\cdot 0{,}13-3)+(x\cdot 0{,}13-3-24)=x,$$

kde $x = 500$ žáků.
Odpověď:
Počet žáků ZŠ je 500.

Příklad 1.1.14:
Dva přátelé potkali koňaře, který měl pěkného koně. Chtěli ho koupit a proto s koňařem domluvili cenu. Zjistili, že jeden má u sebe $\frac{1}{5}$ ceny koně a druhý $\frac{1}{7}$ ceny koně. Dohromady tedy zaplatili zálohu 72 zlatých. Jaká byla cena koně?

Řešení:
Označme celkovou cenu koně x [zlatých], potom můžeme vyjádřit

$$\frac{1}{5}x+\frac{1}{7}x=92 \quad \Big|\cdot 35$$

$$12x = 2520$$

$$x = 210 \text{ [zlatých]}$$

Zkouška:
$\frac{1}{5}$ ceny koně je $\frac{1}{5}\cdot 210 = 42$ zlatých, $\frac{1}{7}$ ceny koně je $\frac{1}{7}\cdot 210 = 30$ zlatých; celkem 42 + 30 = 72 zlatých.
Odpověď:
Cena koně byla 210 zlatých.

Příklad 1.1.15:
Obchodník nakoupil víno v ceně 30 franků za hektolitr a prodal polovinu po 35 francích za hektolitr, třetinu po 29 francích za hektolitr a zbytek po 32 francích za hektolitr. Vydělal 1815 franků. Kolik hektolitrů vína koupil?

Řešení:
Označme si celkové množství vína x [*hl*]. zbytek vína činil $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ celkového množství vína. Můžeme zapsat

$$35 \cdot \frac{x}{2} + 29 \cdot \frac{x}{3} + 32 \cdot \frac{x}{6} = 30 \cdot x + 1815 \quad \Big| \cdot 6$$
$$105x + 58x + 32x = 180x + 10\,890 \quad \Big| - 180x$$
$$15x = 10\,890 \quad \Big| : 15$$
$$\underline{\underline{x = 726}}\ [hl]$$

Zkouška:
Obchodník utržil celkem $35 \cdot \frac{1}{2} \cdot 726 + 29 \cdot \frac{1}{3} \cdot 726 + 32 \cdot \frac{1}{6} \cdot 726 = 23\,595$ fr. Za víno zaplatil obchodník $30 \cdot 726 = 21\,780$ fr. Jeho zisk byl 23 595 – 21 780 = 1 815 fr.
Odpověď:
Obchodník nakoupil celkem 726 *hl* vína.

Příklad 1.1.16:
Kolik stromů je v ovocné zahradě, v níž pětina stromů jsou jabloně, třetina hrušky; švestek je třikrát tolik oč je více hrušek než jabloní a mimo to jsou v zahradě 3 ořechy.

Řešení:
Označme počet všech stromů v ovocné zahradě x, potom jabloní je $\frac{1}{5}x$, hrušní $\frac{1}{3}x$ a švestek $3 \cdot (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) \cdot x = \frac{2}{5}x$ a pro celkový počet stromů platí

$$x = \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x + 3 \quad \Big| \cdot 15$$
$$15x = 3x + 5x + 6x + 45 \quad \Big| - 14x$$
$$\underline{\underline{x = 45}}\ .$$

Zkouška:
Jabloní je 45 : 5 = 9, hrušní je 45 : 3 = 15, švestek je 3 · (15 – 9) = 18 a ořechy jsou 3. Celkem je v ovocném sadě 9 + 15 + 18 + 3 = 45 stromů.
Odpověď:
V ovocném sadě je celkem 45 stromů.

Příklad 1.1.17:
Z plánované odměny dostal ředitel školy polovinu, zástupce ředitele čtvrtinu, školník osminu a na dva vyučující zbylo 2 125 Kč. Kolik byla plánovaná odměna.

Řešení:
Označme si plánovanou odměnu x [Kč], potom
ředitel dostal a celkového množství,
zástupce ředitele dostal b celkového množství,
školník dostal c celkového množství,
na dva vyučující zbylo d Kč.
Vyjádřením vztahů dostáváme rovnici

$$x = ax + bx + cx + d \quad \Big| - ax - bx - cx$$
$$x - ax - bx - cx = d$$

$$(1-a-b-c)\cdot x = d \quad \Big| : (1-a-b-c)$$
$$x = \underline{\underline{\frac{d}{1-a-b-c}}} \qquad \textbf{(1-1b)}$$
Konkrétní hodnoty jsou $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{8}$, $d = 2\,125$ Kč, potom
$$x = \frac{d}{1-a-b-c} = \frac{2\,125}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}} = \frac{2\,125}{\frac{8-4-2-1}{8}} = \frac{2\,125\cdot 8}{1} = \underline{\underline{17\,000}}\text{ Kč.}$$
Zkouška:
Odměna je $\frac{1}{2}\cdot 17\,000 + \frac{1}{4}\cdot 17\,000 + \frac{1}{8}\cdot 17\,000 + 2\,125 = 8\,500 + 4\,250 + 2\,125 + 2\,125 =$
$= 17\,000$ Kč.
Odpověď:
Plánovaná odměna byla 17 000 Kč.

Příklad 1.1.18:
Žena přinesla jablka na trh a prodala nejprve polovic všech a ještě $\frac{1}{2}$ jablka; ze zbytku prodala opět polovic a $\frac{1}{2}$ jablka a z následujícího zbytku opět polovic a $\frac{1}{2}$ jablka. Kolik jablek přinesla na trh, jestliže ji nakonec zbylo 24 jablek?

Řešení:
Označme si x počet všech jablek, které přinesla žena na trh. Potom
1) nejprve prodala $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$ jablek a v košíku ji zbylo $x-\frac{x+1}{2}=\frac{x-1}{2}$ jablek;
2) potom prodala $\frac{\frac{x-1}{2}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{4}$ jablek a v košíku ji zbylo $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{4}=\frac{x-3}{4}$ jablek;
3) nakonec prodala $\frac{\frac{x-3}{4}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{8}$ jablek a v košíku ji zbylo $\frac{x-3}{4}-\frac{x+1}{8}=\frac{x-7}{8}$ jablek.
Protože ji v košíku zbylo 24 jablek, platí
$$\frac{x-7}{8} = 24 \quad \Big| \cdot 8$$
$$x - 7 = 192 \quad \Big| + 7$$
$$\underline{\underline{x = 199}} \text{ jablek.}$$
Zkouška:
1) Žena nejprve prodala 199 : 2 + $\frac{1}{2}$ = 100 jablek, zbylo jí 99 jablek;
2) potom prodala 99 : 2 + $\frac{1}{2}$ = 50 jablek, zbylo jí 49 jablek;
3) nakonec prodala 49 : 2 + $\frac{1}{2}$ = 25 jablek, zbylo jí 24 jablek.
Odpověď:
Žena přinesla na trh 199 jablek.

Příklad 1.1.19:
Selka nesla na trh košík vajec a chtěla jedno prodávat po 2 kr. Na cestě jich z neopatrnosti 6 rozbila. Aby škodu nahradila prodávala ostatní po $2\frac{1}{2}$ kr. Kolik vajec nesla na trh?

Řešení:
Označme si původní počet vajec x, potom platí

$$2 \cdot x = 2\tfrac{1}{2} \cdot (x - 6) \quad \Big| \cdot 2$$
$$4x = 5x - 30 \quad \Big| + 30 - 4x$$
$$\underline{\underline{30 = x}}\,.$$

Zkouška:
Za všechna vejce by selka utržila $30 \cdot 2 = 60$ kr. Na trh donesla selka $30 - 6 = 24$ vajec. Utržila za ně $24 \cdot 2\tfrac{1}{2} = 60$ kr.

Odpověď:
Selka nesla na trh 30 vajec.

Příklad 1.1.20:
Cena pračky byla dvakrát snížena. Nejprve o 12 %, později ještě o 5 % z nové ceny. Po dvojím snížení cen se pračka prodávala za 10 032 Kč. Jaká byla původní cena?

Řešení:
Označme si původní cenu x [Kč], potom cena po prvním snížení je $(1 - 0{,}12) \cdot x = 0{,}88x$. Cena po druhém snížení je $(1 - 0{,}05) \cdot 0{,}88x = 0{,}95 \cdot 0{,}88x = 0{,}836x$, což je stávající cena. Protože současná cena je 10 032 Kč, platí

$$0{,}836x = 10\,032 \quad \Big| : 0{,}836$$
$$\underline{\underline{x = 12\,000}}\ [\text{Kč}]$$

Zkouška:
Cena po prvním snížení: $12\,000 \cdot 0{,}88 = 10\,560$ Kč.
Cena po druhém snížení: $10\,560 \cdot 0{,}95 = 10\,032$ Kč.

Odpověď:
Původní cena pračky byla 12 000 Kč.

Příklad 1.1.21:
Báje vypravuje, že dala kněžna Libuše třem uchazečům o trůn, aby se přesvědčila, který z nich je nejmoudřejší, tuto úlohu: „Každému z vás uštědřím dárek z tohoto košíku se slívami, které jsem natrhala ve své zahradě. Jeden z vás obdrží polovičku všech slív a ještě jednu slívu, druhý polovičku zbytku a 2 slívy a třetí polovičku ostatku a 3 slívy. Budete-li takto obdarováni, nezbude mi v košíku ani jedna slíva. Kolik slív jsem natrhala?“

Řešení č. 1:
Označme si počet slív, které Libuše natrhala x. Potom první obdržel $\frac{x}{2} + 1 = \frac{x+2}{2}$ slív a zbylo

$$x - \left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{x-2}{2} \text{ slív.}$$

Druhý obdržel $\dfrac{\frac{x-2}{2}}{2} + 2 = \dfrac{x+6}{4}$ slív a zbylo

$$\frac{x-2}{2} - \frac{x+6}{4} = \frac{x-10}{4} \text{ slív.}$$

Třetí obdržel $\dfrac{\frac{x-10}{4}}{2} + 3 = \dfrac{x+14}{8}$ a nezbyla žádná slíva.

Počet slív, které obdrželi jednotliví uchazeči je roven x, proto platí

$$\frac{x+2}{2}+\frac{x+6}{4}+\frac{x+14}{8}=x \quad \Big| \cdot 8$$

$$4x + 8 + 2x + 12 + x + 14 = 8x \quad \Big| - 7x$$

$$\underline{\underline{x = 34}}\,.$$

Zkouška:
První obdržel polovinu a jednu slívu, tj. 34 : 2 + 1 = 18 slív a zbylo 34 – 18 = 16 slív.
Druhý obdržel polovinu zbytku a 2 slívy, tj. 16 : 2 + 2 = 10 slív a zbylo 16 – 10 = 6 slív.
Třetí obdržel polovinu ostatku a 3 slívy, tj. 6 : 2 + 3 = 6 slív a zbylo 6 – 6 = 0 slív.
Odpověď:
Kněžna Libuše natrhala do košíku 34 slív.

Řešení č. 2:
Použijeme obrácený postup, budeme úlohu řešit od konce.
Po třetím obdarování (polovina ostatku a 3 slívy) nezbyla v košíku žádná slíva, proto polovina ostatku je rovna třem slívám, celý ostatek je pak dvojnásobný, tedy 6 slív.
Po druhém obdarování (polovina zbytku a 2 slívy) zbylo v košíku 6 slív, proto polovina zbytku je 6 + 2, tedy 8 slív; celý zbytek je pak dvojnásobný, tedy 16 slív.
Po prvním obdarování (polovina původního počtu a 1 slíva) zbylo v košíku 16 slív, proto polovina původního počtu je 16 + 1, tedy 17 slív; celý počet je pak dvojnásobný, tedy 34 slív.
Zkouška a *odpověď* viz řešení č. 1.

1.2. Skupina 2: *„Hledání části"*

Máme stejnou množinu jako ve skupině 1. *Je dán počet prvků celku* (*podmínka absolutní*) *a počty nebo relativní počty prvků všech částí s výjimkou jedné nebo vazby mezi jednotlivými částmi. Má se určit počet prvků této vybrané části, resp. všech částí. Modelem je jedna lineární rovnice o jedné neznámé nebo soustava n rovnic pro n neznámých.*

Příklad 1.2.1: = ***Příklad*** **0.2.1:** - »rozšíření počtu řešení«
V ovocném sadu je celkem 87 ovocných stromů a to hrušní, jabloní a třešní. Třešní je o 11 méně než jabloní a o 5 více než hrušní. Kolik je kterých?

Řešení č. 1:
Označme si počet hrušní h, počet jabloní j a počet třešní t. Potom platí

$$\begin{aligned} h + j + t &= 87 \\ t + 11 &= j \\ t - 5 &= h \end{aligned}$$

$$t - 5 + t + 11 + t = 87 \quad \big| - 16$$

$$3t = 71 \quad \big| : 3$$

$$t = \underline{\underline{27}} \text{ [třešní]},$$

$$j = t + 11 = \underline{\underline{38}} \text{ [jabloní]},$$

$$h = t - 5 = \underline{\underline{22}} \text{ [hrušní]}.$$

Zkouška:
Stačí ověřit: 22 + 38 + 27 = 87 ks. Správnost ostatních hodnot je zřejmá z postupu řešení.
Odpověď:
V ovocném sadě je 22 hrušní, 38 jabloní a 27 třešní.

Řešení č. 2: - *obecný model*
Označme si počet hrušní h, počet jabloní j a počet třešní t ; rozdíl mezi počtem třešní a jabloní a, rozdíl mezi počtem třešní a hrušní b, celkový počet ovocných stromů m.
Potom je počet hrušní $(t + a)$ a počet hrušní $(t - b)$ a platí

$$t + t + a + t - b = m$$

$$3t + a - b = m \quad \big| - a + b$$

$$3t = m - a + b \quad \big| : 3$$

$$\underline{\underline{t = \frac{m-a+b}{3}}}, \qquad \textbf{(1-2a)}$$

potom $$\underline{\underline{j = t + a}} = \frac{m-a+b}{3} + a = \underline{\underline{\frac{m+2a+b}{3}}}, \qquad \textbf{(1-2b)}$$

$$\underline{\underline{h = t - b}} = \frac{m-a+b}{3} - b = \underline{\underline{\frac{m-a-2b}{3}}}. \qquad \textbf{(1-2c)}$$

V našem příkladě je $a = 11$, $b = 5$, $m = 87$ a užitím vzorců dostáváme

$$t = \frac{m-a+b}{3} = \frac{87-11+5}{3} = \underline{\underline{27}} \text{ [třešní]},$$

$$j = t + a = 27 + 11 = 38 \text{ nebo } j = \frac{m+2a+b}{3} = \frac{87+2\cdot 11+5}{3} = \underline{\underline{38}} \text{ [jabloní]},$$

$$h = t - b = 27 - 5 = 22 \text{ nebo } h = \frac{m-a-2b}{3} = \frac{87-11-2\cdot 5}{3} = \underline{\underline{22}} \text{ [hrušní]}.$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v řešení č. 1.

Příklad 1.2.2:
Na údržbu silnic bylo zajištěno 21 t posypového materiálu. Do konce roku bylo spotřebováno $\frac{1}{3}$ zásoby, v lednu $\frac{1}{4}$, v únoru $\frac{1}{5}$ a v březnu 3 t. Kolik materiálu ještě zbylo?

Řešení:
Označme si zbytek materiálu jako neznámou *x*, potom matematizací dostáváme rovnici:

$$21 \cdot \frac{1}{3} + 21 \cdot \frac{1}{4} + 21 \cdot \frac{1}{5} + 3 + x = 21.$$

Tato lineární rovnice má řešení

$$x = \underline{\underline{1{,}55}} \text{ t}.$$

Zkouška:
Do konce roku spotřebováno $\frac{1}{3} \cdot 21 = 7$ t, v lednu spotřebováno $\frac{1}{4} \cdot 21 = 5{,}25$ t, v únoru spotřebováno $\frac{1}{5} \cdot 21 = 4{,}2$ t, v březnu spotřebováno 3 t a zbylo 1,55t. Celkem bylo posypového materiálu 7 + 5,25 + 4,2 + 3 + 1,55 = 21 t.
Odpověď:
Zbylo ještě 1,55 t posypového materiálu.

Příklad 1.2.3:
Rozdělte 130 ořechů na dvě části tak, aby menší část zvětšená čtyřikrát byla rovna větší části zmenšené třikrát.

Řešení:
Neznámé jsou: x = menší část, y = větší část, potom matematizací dostáváme soustavu rovnic:

$$x + y = 130,$$

$$4x = \frac{y}{3}$$

jejímž řešením je $[x; y] = [10; 120]$.
Zkouška:
Menší část zvětšená čtyřikrát je $10 \cdot 4 = 40$,
větší části zmenšené třikrát je 120 : 3 = 40, a obě hodnoty se rovnají.
Odpověď:
Menší část je 10 ořechů, větší část je 120 ořechů.

Příklad 1.2.4:
Za tři dny prodali v obchodě 1 400 kg brambor. První den prodali o 100 kg brambor méně než druhý den, třetí den tři pětiny toho, co prodali první den. Kolik kg brambor prodali v jednotlivých dnech?

Řešení:
Neznámé jsou: x = množství kg, které prodali 1. den,
y = množství kg, které prodali 2. den,
z = množství kg, které prodali 3. den;
potom dostáváme soustavu rovnic:

$$x + y + z = 1\,400,$$
$$x + 100 = y,$$
$$z = \tfrac{3}{5}x;$$

jejímž řešením je $[x; y; z] = [500; 600; 300]$.

Odpověď:

První den prodali 500 kg brambor, druhý den 600 kg brambor, třetí den 300 kg brambor.

<u>*Příklad* 1.2.5:</u> (*Starořímská úloha*)

Jeden umírající člověk řekl: „Jestliže se mé ženě narodí syn, ať mu patří dvě třetiny jmění a zbytek ženě. Jestliže se narodí dcera, ať jí patří třetina a ženě dvě třetiny“. Narodila se dvojčata – syn a dcera. Jak se má rozdělit jmění, aby se splnila závěť nebožtíka?

<u>*Řešení* č. 1:</u>

Celkové jmění si označíme nejprve ..... x [Kč] , potom

syn dostane ..... $\tfrac{2}{3}x$ [Kč] ,

žena dostane ... $\tfrac{1}{3}x$ [Kč] .

Pro druhý případ si celkové jmění označme ..... y [Kč] (jmění je stejné, ale dělí se mezi jiné osoby), potom

žena dostane ..... $\tfrac{2}{3}y$ [Kč] ,

dcera dostane ... $\tfrac{1}{3}y$ [Kč] .

Protože část jmění, které dostane žena bude nakonec jednotné, musí platit:

$$\tfrac{1}{3}x = \tfrac{2}{3}y\,.$$

Z toho plyne: $x = 2y$, což dosadíme za x do první části a dostáváme:

syn dostane ..... $\tfrac{2}{3}x = \tfrac{2}{3}\cdot 2y = \tfrac{4}{3}y$ [Kč] ,

žena dostane ... $\tfrac{1}{3}x = \tfrac{1}{3}\cdot 2y = \tfrac{2}{3}y$ [Kč] ,

dcera dostane .... $\tfrac{1}{3}y$ [Kč] .

Dostáváme rovnici:

$$\tfrac{4}{3}y + \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}y = 1 \quad \Big| \cdot 3$$
$$4y + 2y + y = 3$$
$$7y = 3$$
$$y = \tfrac{3}{7} \text{ [jmění]}\,.$$

Potom syn dostane .... $\tfrac{4}{3}y = \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{3}{7} = \tfrac{4}{7}$ [jmění] , (asi 57,14 %),

žena dostane .... $\tfrac{2}{3}y = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{7} = \tfrac{2}{7}$ [jmění] , (asi 28,57 %),

dcera dostane ..... $\tfrac{1}{3}y = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{7} = \tfrac{1}{7}$ [jmění] , (asi 14,29 %).

Zkouška:

Sečteme-li velikosti, které dostanou jednotliví členové rodiny, dostáváme:

57,14 + 28,57 + 14,29 = 100,00 %.

Odpověď:

Syn, matka a dcera si rozdělili jmění v poměru 4 : 2 : 1.

<u>*Řešení* č. 2:</u>

Použijeme metodu řešení, kterou již znali staří Egypťané, a která byla téměř zapomenuta. Princip spočívá v tom, že si výsledek odhadneme. S tímto odhadem provedeme zkoušku a zjistíme »kolikrát« (o kolik procent) jsme se spletli a odhadnuté číslo touto hodnotou »opravíme« (zkorigujeme).

Upozornění: Tato metoda není vhodná pro všechny typy úloh.
Předpokládejme, že syn dostane 60 % jmění, potom matka musí dostat 30 % (podle závěti polovinu toho, co syn) a dcera 15 % (polovinu toho, co matka). Sečteme-li tyto hodnoty (60 + 30+ 15 = 105), dostáváme 105 % jmění. Tuto hodnotu musíme upravit na 100 %, tj. všechny odhadnuté hodnoty násobíme číslem $\frac{100}{105} = \frac{20}{21}$.

syn dostane .... $60 \cdot \frac{20}{21} = \frac{400}{7} \doteq 57{,}14$ % [jmění] ,

žena dostane .... $30 \cdot \frac{20}{21} = \frac{200}{7} \doteq 28{,}57$ % [jmění] ,

dcera dostane ..... $15 \cdot \frac{20}{21} = \frac{100}{7} \doteq 14{,}29$ % [jmění] .

Sečteme-li tyto hodnoty, dostaneme 100 %.
Poměr syn – matka – dcera je $\frac{400}{7} : \frac{200}{7} : \frac{100}{7} = 4 : 2 : 1$.
Odpověď:
Syn, matka a dcera si rozdělili jmění v poměru 4 : 2 : 1.

Příklad 1.2.6:
Na hřišti je 52 dětí. $2/7$ počtu chlapců a $2/3$ počtu dívek se rovná počtu dívek. Kolik je na hřišti chlapců a kolik dívek?

Řešení:
Označme počet chlapců *x*, počet dívek *y*, potom dostáváme soustavu rovnic

$$\frac{2}{7}x + \frac{2}{3}y = y \quad \Big| \cdot 21$$
$$\underline{x + y = 52}$$
$$6x + 14y = 21y \quad \Big| -14y$$
$$\underline{x + y = 52} \;\rightarrow\; y = 52 - x$$
$$6x = 7y$$
$$6x = 364 - 7x \quad \Big| +7x$$
$$13x = 364 \quad \Big| : 13$$
$$\underline{\underline{x = 28}} \;\rightarrow\; y = 52 - x \;\rightarrow\; \underline{\underline{y = 24}}$$

Zkouška:
$2/7$ počtu chlapců je $\frac{2}{7} \cdot 28 = 8$, $2/3$ počtu dívek je $\frac{2}{3} \cdot 24 = 16$, dohromady 8 + 16 = 24, což je počet dívek.
Odpověď:
Na hřišti je 28 chlapců a 24 dívek.

Příklad 1.2.7:
Na besedu o volbě povolání pro rodiče a žáky přišlo 48 osob. Maminek bylo o 4 více než tatínků a žáků 9. tříd o 6 méně než polovina dospělých. Kolik bylo kterých?

Řešení:
Neznámé budou: *m* = počet maminek, *t* = počet tatínků, *z* = počet žáků.
Potom dostáváme soustavu rovnic: $m + t + z = 48$

$$m = t + 4$$
$$z + 6 = \tfrac{1}{2}(m + t),$$

jejímž řešením je [m; t; z] = [20; 16; 12], tj. maminek bylo 20, tatínků 16 a žáků 12.
Odpověď:
Na besedu o volbě povolání přišlo 20 maminek, 16 tatínků a 12 žáků.

Příklad 1.2.8:
Nájemce dvora, jehož všechny pozemky mají výměru 107 ha, platí z nich ročně 1630 zlatých nájemného, za každý ha orné půdy 20 zlatých, za každý ha pastviny 11 zlatých. Kolik bylo u dvora orné půdy a kolik pastvin?

Řešení:
Označme počet ha orné půdy x, počet ha pastvin y, potom můžeme zapsat

$$\begin{aligned} x + y &= 107 \quad \Big|\cdot(-11) \\ \underline{20x + 11y} &\underline{= 1\,630} \\ 9x &= 453 \quad \Big|:9 \\ \underline{x = 50\tfrac{1}{3}} &\text{ [ha]} \quad \rightarrow \quad \underline{y = 56\tfrac{2}{3}} \text{ [ha]} \end{aligned}$$

Zkouška:
Nájem z $50\frac{1}{3}$ ha orné půdy je $\frac{151}{3}\cdot 20 = \frac{3\,020}{3} = 1\,006\frac{2}{3}$ zlatých, nájem z $56\frac{2}{3}$ ha pastvin je $\frac{170}{3}\cdot 11 = \frac{1\,870}{3} = 623\frac{1}{3}$ zlatých, celkem je nájem $1\,006\frac{2}{3} + 623\frac{1}{3}$ = 1 630 zlatých.
Odpověď:
U dvora bylo $50\frac{1}{3}$ ha orné půdy a $56\frac{2}{3}$ ha pastvin.

1.3. Skupina 3: *„Další hledání“*

Máme stejnou množinu jako ve skupině 1. *Jsou dány počty prvků části nebo více částí a některé vazby mezi jednotlivými částmi nebo vazby mezi částmi a celkem. Má se určit počet prvků této vybrané části, resp. všech částí, resp. počet prvků celku. Modelem je zpravidla opět jen jedna lineární rovnice o jedné neznámé, někdy to může být soustava n rovnic pro n neznámých.*

Příklad 1.3.1: = ***Příklad* 0.0.2:**
Čerstvé houby obsahují 90 % vody své celkové váhy, sušené houby jen 12 %. Kolik kg sušených hub dostaneme z 10 kg čerstvých hub?

Řešení:
Při sušení hub ubývá jen voda, množství sušiny se přitom nemění. Protože váhové množství vody v houbách se při vysychání mění, bude předmětem našich úvah váhové množství té složky, která zůstává beze změny, tj. váhové množství sušiny.
Váhové množství sušených hub označíme x (v kg). Potom neznámé množství sušených hub obsahuje podle předpokladu 88% sušiny, tj. $0{,}88 \cdot x$ kg sušiny. Toto množství vzniklo usušením 10 kg hub, které podle zadání obsahují 10% sušiny, tj. $0{,}10 \cdot 10$ kg sušiny.
Protože váhové množství sušiny se při sušení nemění, platí:

$$0{,}88 \cdot x = 0{,}1 \cdot 10,$$

z čehož plyne, že $x = \frac{25}{22} = 1{,}1\overline{36} \doteq 1{,}14$ kg sušiny.
Zkouška:
$1{,}1\overline{36}$ kg sušených hub obsahuje $1{,}1\overline{36} \cdot 0{,}12 = 0{,}1\overline{36}$ kg vody. Potom obsahuje $1{,}1\overline{36} - 0{,}1\overline{36}$ = 1 kg sušiny. 10 kg čerstvých hub obsahuje $10 \cdot 0.9 = 9$ kg vody a $10 - 9 = 1$ kg sušiny.
Odpověď:
Z 10 kg čerstvých hub dostaneme asi 1,14 kg sušených hub.

Příklad 1.3.2:
Zemědělci sklidili ze svých polí 120 tun pšenice, což je bez 9 tun desetkrát tolik, co zaseli. Kolik tun zaseli?

Řešení:
Neznámá x = množství osevu; potom dostáváme rovnici:

$$10x - 9 = 120,$$

kde $x = 12{,}9$ t.
Odpověď:
Zemědělci zaseli 12,9 t pšenice.

Příklad 1.3.3:
V první a ve druhé nádobě bylo celkem 25 *l* kapaliny, v první a ve třetí dohromady 30 *l* kapaliny, ve čtvrtině třetí nádoby jen 5 *l* kapaliny. Kolik kapaliny bylo v každé nádobě?

Řešení:
Označme si množství kapaliny v první nádobě x, v druhé nádobě y, ve třetí nádobě z, potom modelem situace je soustava rovnic

$x + y = 25$
$x + z = 30$
$\underline{\tfrac{1}{4}z = 5} \quad \rightarrow \quad \underline{z = 20} \quad \rightarrow \quad x + 20 = 30$

$\underline{x = 10} \quad \rightarrow \quad 10 + y = 25$

$\underline{y = 15}$.

Zkouška:
Množství kapaliny v první a druhé nádobě: 10 + 15 = 25 *l*,
množství kapaliny v první a třetí nádobě: 10 + 20 = 30 *l*,
čtvrtina třetí nádoby: $\tfrac{1}{4} \cdot 20 = 5$ *l*.
Odpověď:
V první nádobě bylo 10 *l* kapaliny, v druhé 15*l* kapaliny a třetí byla na 20 *l* kapaliny.

Příklad 1.3.4:
Poutník jde z Prahy. Tázán, kolik hodin bilo na Pražském hradě, když vyšel, odpovídal: „*Kdyby bylo bilo hodin ještě jednou tolik a polovinu tolik a ještě sedm ran k tomu udeřilo, tehdy by bylo 12 hodin*“. V kolik hodin vyšel poutník z Prahy?

Řešení:
Označme si počet hodin, které bilo na pražském hradě *x*, potom dostáváme

$x + x + \tfrac{1}{2}x + 7 = 12 \quad | \cdot 2$

$5x + 14 = 24 \quad | - 14$

$5x = 10 \quad | : 5$

$\underline{\underline{x = 2}}$

Zkouška:
2 + 2 + 1 + 7 = 12 hodin.
Odpověď:
Poutník vyšel z Prahy ve dvě hodiny.

Příklad 1.3.5:
Tři tucty šroubů stojí tolik korun, kolik je šroubů za 16 korun. Co stojí jeden šroub?

Řešení:
Označme si cenu jednoho šroubu *x* Kč, potom tři tucty stojí *m* Kč a *m* šroubů stojí 16 Kč. Z toho plyne soustava rovnic

$3 \cdot 12 \cdot x = m$

$\underline{m \cdot x = 16} \quad \rightarrow \quad m = \dfrac{16}{x}$

$36x = \dfrac{16}{x} \quad | \cdot x$

$36x^2 = 16 \quad | \sqrt{\ }$

$6x = 4 \quad | : 6$

$\underline{x = \tfrac{2}{3}}$ [Kč]

Zkouška:
Tucet šroubů stojí $12 \cdot \tfrac{2}{3} = 8$ Kč, tři tucty stojí 24 Kč, potom 24 šroubů stojí $24 \cdot \tfrac{2}{3} = 16$ Kč.

Odpověď:
Jeden šroub stojí $\frac{2}{3}$ Kč, tucet šroubů stojí 8 Kč.

Příklad 1.3.6:
9 mužů vydělá za 15 dní 324 K; kolik vydělá 7 žen za 18 dní, je-li denní mzda ženina k denní mzdě mužově v poměru 5 : 8?

Řešení:
1 muž vydělá za 1 den $\frac{324}{9\cdot 15}=\frac{12}{5}$ = 2,4 K. Protože poměr mzdy ženy a muže je 5 : 8, vydělá 1 žena za 1 den $2{,}4\cdot\frac{5}{8}$ = 1,5 K. Potom 7 žen vydělá za 18 dní $1{,}5\cdot 7\cdot 18$ = 189 K.
Zkouška:
Poměr výdělků je 1,5 : 2,4 = 5 : 8.
7 žen vydělá za 18 dní 189 K, potom 1 žena vydělá za 1 den $189 : (7\cdot 18)$ = 1,5 K.
1 muž vydělá za 1 den 2,4 K, potom 9 mužů vydělá za 15 dní $2{,}4\cdot 9\cdot 15$ = 324 K.
Odpověď:
7 žen vydělá za 18 dní 189 K.

Příklad 1.3.7:
Pro 20 koní vystačí 105 q sena na 36 dní; jak dlouho vystačí 16 koní se 70 q sena?

Řešení:
Nejdříve vypočteme kolik sena potřebuje 1 kůň na 1 den. Je to $\frac{105}{20\cdot 36}=\frac{7}{48}$ q. Potom 16 koní potřebuje $16\cdot\frac{7}{48}=\frac{7}{3}$ q sena. Potom doba na kterou vydrží pro 16 koní zásoba 70 q sena je $70:\frac{7}{3}=70\cdot\frac{3}{7}$ = 30 dní.
Zkouška:
Je-li spotřeba 1 koně na 1 den $\frac{7}{48}$ q sena, potom 16 koní za 30 dní spotřebuje $\frac{7}{48}\cdot 16\cdot 30$ = 70 q sena.
Odpověď:
Zásoba 70 q sena vystačí pro 16 koní na 30 dní.

Příklad 1.3.8:
Zvětší-li objem nějaké knihy při 2. vydání o $\frac{1}{12}$, bude mít kniha právě tolik stran přes 500, kolik ji prve do 500 scházelo. Kolik stran má tato kniha?

Řešení:
Označme si počet stran knihy při 1. vydání x a rozdíl této hodnoty do 500 y. Potom platí

$$x = 500 - y$$
$$\underline{x+\tfrac{1}{12}x = 500 + y} \quad \Big|\cdot 12$$

$$x = 500 - y$$
$$\underline{13x = 6\,000 + 12y}$$
$$6\,500 - 13y = 6\,000 + 12y \quad \big| -12y - 6\,500$$
$$-25y = -500 \quad \big| : (-25)$$
$$\underline{y = 20} \quad \rightarrow \quad \underline{x = 480}\,.$$

Zkouška:
Dvanáctina objemu knihy je $\frac{1}{12} \cdot 480 = 40$stran. Při 2. vydání má kniha 480 + 40 = 520 stran.
Rozdíly jsou 520 – 500 = 500 – 480 = 20.
Odpověď:
Tato kniha má (při 1. vydání) 480 stran.

Příklad 1.3.9:
Pán najal sluhu a slíbil mu ročně 120 K mzdy a nový oblek. Po 7 měsících opustil sluha službu a poněvadž nový oblek již měl, bylo mu vyplaceno 40 K mzdy. Jak draze byl oblek počítán?

Řešení:
Výši měsíční odměny označme x [K], cenu obleku y [K]. Potom dostáváme
$$12x = 120 + y$$
$$\underline{7x = 40 + y} \quad \big| \cdot (-1)$$
$$5x = 80 \quad \big| : 5$$
$$\underline{x = 16}\ [\mathrm{K}] \quad \rightarrow \quad \underline{y = 72}\ [\mathrm{K}].$$
Zkouška:
Odměna za 12 měsíců je $12 \cdot 16 = 192$ K. Sluha měl za rok dostat odměnu a nový oblek, což je 120 + 72 = 192 K. Odměna za 7 měsíců je $7 \cdot 16 = 112$ K. Sluha dostal za 7 měsíců část odměny a nový oblek, což je 40 + 72 = 112 K.
Odpověď:
Oblek stál 72 K.

Příklad 1.3.10:
Gymnasium Megarské svěřilo dovednému sochaři zhotovení 9 múz ve stejné ceně za odměnu 36 min a zlatého poháru. Když byly dvě sochy zhotoveny, odstěhoval se řečený sochař do Aeolie a obdržel za odměnu slíbený pohár s podmínkou, aby vrátil 6 min. Zač byl pohár počítán?

Řešení:
Označme si cenu za jednu sochu x [min] a cenu zlatého poháru y [min]. Potom dostáváme
$$9 \cdot x = 36 + y$$
$$\underline{2 \cdot x = y - 6} \quad \rightarrow \quad y = 2x + 6$$
$$9x = 36 + 2x + 6 \quad \big| -2x$$
$$7x = 42 \quad \big| : 7$$
$$\underline{x = 6}\ [\mathrm{min}] \quad \rightarrow \quad \underline{y = 18}\ [\mathrm{min}].$$
Zkouška:
9 soch je v ceně $9 \cdot 6 = 54$ min. Zlatý pohár a odměna dávají 18 + 36 = 54 min.
Za dvě sochy je odměna $2 \cdot 6 = 12$ min, neboli zlatý pohár bez 6 min.
Odpověď:
Pohár byl počítán za 18 min.

1. 4. Skupina 4: *„Porovnání po změnách"*

Máme dvě nebo více množin objektů. Porovnáváme jejich stavy v různých situacích a zjišťujeme počty prvků těchto množin před změnami a po změnách. Modelem je jedna lineární rovnice nebo soustava dvou nebo více lineárních rovnic (podle počtu objektů). Můžeme též zjišťovat velikost změny. Potom bývá modelem zpravidla jedna lineární rovnice.

Příklad 1.4.1: = ***Příklad* 0.2.3:**
Hospodyně má slepice a kachny, celkem 60 kusů. Poněvadž nechce kachny již více chovat, vymění je za slepice a obdrží za 3 kachny 4 slepice. Po výměně měla 68 slepic. Kolik měla původně slepic a kolik kachen?

Řešení č. 1:
Označme si původní počet kachen x a původní počet slepic y, potom platí

$$x + y = 60.$$

Vymění-li hospodyně 3 kachny za 4 slepice, bude mít místo x kachen $\frac{4}{3}x$ slepic a platí

$$\frac{4}{3}x + y = 68.$$

Dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rl} x + y = 60 & \big| \cdot (-1) \\ \frac{4}{3}x + y = 68 & \\ \hline \frac{1}{3}x = 8 & \big| \cdot 3 \\ \underline{x = 24} & \rightarrow \quad \underline{y = 36}\,. \end{array}$$

Zkouška:
Za 24 kachen obdrží hospodyně 24 : 3 · 4 = 32 slepic. Pak má celkem 36 + 32 = 68 slepic.
Odpověď:
Hospodyně měla původně 24 kachen a 36 slepic.

Řešení č. 2:
Při výměně získá hospodyně za každé tři kachny o jednu slepici navíc. Protože má navíc 68 – 60 = 8 slepic, vyměnila 8 trojic kachen, tedy 24 kachen. Protože původně bylo 60 kusů, je slepic 36.
Zkouška a *odpověď* viz řešení č. 1.

Příklad 1.4.2:
V jedné nádobě je 23 litrů vody, ve druhé 7 litrů. Když se do obou nádob přilil stejný objem vody, bylo v první nádobě dvakrát více vody než ve druhé nádobě. Určete objem přilité vody.

Řešení:
Označme objem přilité vody x, potom dostáváme rovnici:

$$23 + x = 2 \cdot (7 + x),$$

jejímž řešením je $\underline{\underline{x = 9}}$ *l*.
Zkouška:
V první nádobě bude po přilití 23 + 9 = 32 *l* vody, v druhé nádobě bude po přilití 7 + 9 = 16 *l* vody. Poměr množství je 32 : 16 = 2 : 1.
Odpověď:
Objem přilité vody je 9 *litrů.*

Příklad 1.4.3:
Eva má šestkrát víc korun než Jana. Kdyby dala Eva Janě 84,- Kč, měla by pořád třikrát víc. Kolik korun děvčata mají?

Řešení:
Neznámá x = počet Kč Jany; potom Eva měla $6x$ Kč a dostáváme rovnici:

$$6x - 84 = 3 \cdot (x + 84),$$

kde řešení $x = 112$; tedy Jana měla 112,- Kč, Eva 672,- Kč.
Odpověď:
Eva má 672,- Kč, Jana má 112,- Kč.

Příklad 1.4.4:
V tanečních bylo chlapců o 2 méně než dívek. Když však přišlo ještě 6 chlapců a počet dívek se zvětšil o jednu třetinu, bylo obojích stejně. Kolik párů potom vytvořili?

Řešení:
Neznámé budou: x = počet chlapců původně, y = počet dívek původně.
Potom dostáváme soustavu rovnic:

$$x + 2 = y$$
$$x + 6 = \tfrac{4}{3} y,$$

jejímž řešením je $[x; y] = [10; 12]$, tj, vytvořili by 16 párů.
Odpověď:
Potom vytvořili 16 párů.

Příklad 1.4.5:
Ve dvou nádobách je voda. Přelijeme-li z první nádoby do druhé 6 litrů, bude v obou stejně. Přelijeme-li z druhé do první 4 litry, bude v první dvakrát tolik jako v druhé. Kolik vody je v každé nádobě?

Řešení:
Neznámé budou: x = množství vody v 1. nádobě v litrech,
y = množství vody v 2. nádobě v litrech.
Potom dostáváme soustavu rovnic:

$$x - 6 = y + 6,$$
$$x + 4 = 2 \cdot (y - 4),$$

jejímž řešením je $[x; y] = [36; 24]$, tj, v 1. nádobě je 36 l, v 2. nádobě je 24 l.
Odpověď:
V první nádobě je 36 litrů, v druhé 24 litrů vody.

Příklad 1.4.6:
Babička měla v košíčku jablíčka. Když jich sedm dala dědovi, měli oba stejně. Když dal děda pět jablek babičce, měla jich pak třikrát víc než děda. Kolik jablek měl každý původně?

Řešení:
Neznámé budou: x = počet dědových jablíček, y = počet babiččiných jablíček.
Potom dostáváme soustavu rovnic:

$$x + 7 = y - 7,$$
$$3 \cdot (x - 5) = y + 5;$$

jejímž řešením je $[x; y] = [17; 31]$, tj, babička měla 31 jablíček, děda 17 jablíček.

Odpověď:
Babička měla v košíčku 31 jablíček, děda měl 17 jablíček.

Příklad 1.4.7: (*Kůň a mezek*)
Kůň a mezek, oba těžce naloženi, šli jeden vedle druhého. Kůň si stěžoval na svůj těžký náklad. „Na co si stěžuješ?“ zeptal se ho mezek. „Vždyť kdybych si vzal jeden z tvých pytlů, byl by můj náklad dvakrát tak těžký jako tvůj. Ale kdybys ty vzal jeden pytel z mých zad, měli bychom oba stejně těžké náklady“. Kolik pytlů nesl kůň a kolik mezek?

Řešení č. 1:
Označme si:
m – počet pytlů, které nese mezek,
k – počet pytlů, které nese kůň.
Potom můžeme vyjádřit:
Přibere-li si mezek jeden pytel (bude jich mít $m + 1$) a kůň bude mít o jeden méně (tj. $k - 1$), potom bude náklad mezka dvojnásobný, bude tedy platit

$$m + 1 = 2 \cdot (k - 1).$$

Přibere-li si kůň jeden pytel (bude jich mít $k + 1$) a mezek bude mít o jeden méně (tj. $m - 1$), potom budou náklady koně a mezka stejné, bude tedy platit

$$k + 1 = m - 1.$$

Dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} m+1 &= 2\cdot(k-1) \\ m-1 &= k+1 \end{aligned},$$

jejímž řešením jsou čísla $k = 5$, $m = 7$.
Zkouška:
Předá-li kůň jeden pytel mezkovi, bude jich mít 4, mezek 8, tj. dvojnásobek.
Předá-li mezek jeden pytel koňovi, bude jich mít 6, kůň také 6.
Odpověď:
Kůň nesl 5 pytlů, mezek 7pytlů.

Řešení č. 2:
Uvažujme: Kdyby mezek převzal od koně jeden pytel, měli by oba stejně. Z toho plyne, že mezek měl původně o 2 pytle více. Můžeme si tedy označit
x = počet pytlů, které nesl kůň,
$x + 2$ = počet pytlů, které nesl mezek.
Vzal-li mezek od koně jeden pytel, měl dvakrát více, tedy platí

$$x + 3 = 2 \cdot (x - 1).$$

Řešením této rovnice je číslo $x = 5$.
Kůň tedy nesl 5 pytlů, mezek 7 pytlů.

Příklad 1.4.8:
Hospodář má stádo hus a ovcí, dohromady 432 kusů. Rozhodne se, že nebude již chovat husy, a proto je vymění za ovce. Dostane za 32 husy 3 ovce, takže má po výměně dohromady 200 ovcí. Kolik hus vyměnil?

Řešení č. 1:
Označme si původní počet husí x a původní počet ovcí y, potom platí

$x + y = 432.$

Vymění-li hospodář 32 husy za 3 ovce, bude mít místo x husí $\frac{3}{32}x$ ovcí a platí

$\frac{3}{32}x + y = 200.$

Dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= 432 \\ \tfrac{3}{32}x + y &= 200 \quad \Big|\cdot(-1) \\ \hline \tfrac{29}{32}x &= 232 \quad \Big|\cdot \tfrac{32}{29} \\ \underline{x = 256} \quad &\rightarrow \quad \underline{y = 176}\,. \end{aligned}$$

Zkouška:

Za 256 hus obdrží hospodář 256 : 32 · 3 = 24 ovcí. Pak má celkem 176 + 24 = 200 ovcí.

Odpověď:

Hospodář vyměnil 256 hus.

Řešení č. 2:

Při výměně obdrží hospodář za každé 32 husy 3 ovce, zmenší se výměnou jedné „skupiny" počet kusů o 29. Protože se celkem zmenší počet kusů o 432 – 200 = 232 kusů, vyměnil hospodář celkem 232 : 29 = 8 „skupin" husí, tedy $8 \cdot 32 = 256$ hus.

Zkouška a *odpověď* viz řešení č. 1.

1. 5. Skupina 5: *„Porovnání různého uspořádání“*

Máme dánu množinu objektů. Porovnáváme její stavy v různých situacích a zjišťujeme počty prvků této množiny pomocí jejího různého uspořádání. Modelem je jedna lineární rovnice nebo soustava dvou nebo více lineárních rovnic (*podle počtu objektů*).

Příklad 1.5.1: = ***Příklad* 0.1.11:** - »rozšíření počtu řešení«
Ze tří snopů dobré úrody, dvou snopů průměrné úrody a jednoho snopu špatné úrody získali 39 měr zrna. Ze dvou snopů dobré úrody, tří snopů průměrné úrody a jednoho snopu špatné úrody dostali 34 měr zrna. Z jednoho snopu dobré úrody, dvou snopů průměrné úrody a tří snopů špatné úrody získali 26 měr zrna. Kolik měr zrna dostali z každého snopu dobré, průměrné a špatné úrody?

Řešení:
Počet měr zrna z jednoho snopu dobré úrody . . . . d,
počet měr zrna z jednoho snopu průměrné úrody . . . . . p,
počet měr zrna z jednoho snopu špatné úrody . . . . s.
Potom vyjádříme údaje v zadání a dostáváme soustavu:

$$\begin{aligned} 3d + 2p + s &= 39 \\ 2d + 3p + s &= 34 \\ \underline{d + 2p + 3s} &\underline{= 26} \end{aligned}$$

kterou můžeme vyřešit různými způsoby.

1. způsob – *dosazovací metoda*:

$$\begin{aligned} 3d + 2p + s &= 39 \\ 2d + 3p + s &= 34 \\ \underline{d + 2p + 3s} &\underline{= 26} \quad \rightarrow \quad d = 26 - 2p - 3s \\ 78 - 6p - 9s + 2p + s &= 39 \quad \Big| -78 \\ \underline{52 - 4p - 6s + 3p + s} &\underline{= 34} \quad \Big| -52 \\ -4p - 8s &= -39 \\ \underline{-p - 5s} &\underline{= -18} \quad \rightarrow \quad p = 18 - 5s \\ 12s - 72 &= -39 \quad \rightarrow \quad 12s = 33 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{s = \tfrac{11}{4}}}; \end{aligned}$$

$$p = 18 - 5s \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{p}} = \tfrac{72-55}{4} = \underline{\underline{\tfrac{17}{4}}};$$

$$d = 26 - 2p - 3s \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{d}} = \tfrac{104-34-33}{4} = \underline{\underline{\tfrac{37}{4}}}.$$

2. způsob – *sčítací metoda*:

$$\begin{aligned} d + 2p + 3s &= 26 \quad \Big| \cdot (-2) \quad \Big| \cdot (-3) \\ 2d + 3p + s &= 34 \\ \underline{3d + 2p + s} &\underline{= 39} \\ d + 2p + 3s &= 26 \\ -p - 5s &= -18 \quad \Big| \cdot (-4) \\ \underline{-4p - 8s} &\underline{= -39} \\ d + 2p + 3s &= 26 \\ p + 5s &= 18 \\ \underline{12s} &\underline{= 33} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{s = \tfrac{11}{4}}}, \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{p = \tfrac{17}{4}}}, \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{d = \tfrac{37}{4}}}. \end{aligned}$$

3. způsob – *pomocí matice*:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&1&39\\2&3&1&34\\1&2&3&26\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&26\\2&3&1&34\\3&2&1&39\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&26\\0&-1&-5&-18\\0&-4&-8&-39\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&26\\0&1&5&18\\0&0&12&33\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&17{,}75\\0&1&0&4{,}25\\0&0&1&2{,}75\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&9{,}25\\0&1&0&4{,}25\\0&0&1&2{,}75\end{array}\right).$$

Řešení: $d = 9{,}25 = \frac{37}{4}$, $p = 4{,}25 = \frac{17}{4}$, $s = 2{,}75 = \frac{11}{4}$.

4. způsob – *pomocí determinantů* (*Cramerovo pravidlo*):

$$|A| = \begin{vmatrix}3&2&1\\2&3&1\\1&2&3\end{vmatrix} = 27 + 2 + 4 - 3 - 6 - 12 = 12.$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix}39&2&1\\34&3&1\\26&2&3\end{vmatrix} = 351 + 52 + 68 - 78 - 78 - 204 = 111.$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix}3&39&1\\2&34&1\\1&26&3\end{vmatrix} = 306 + 39 + 52 - 34 - 78 - 234 = 51.$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix}3&2&39\\2&3&34\\1&2&26\end{vmatrix} = 234 + 68 + 156 - 117 - 204 - 104 = 33.$$

Potom: $d = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{111}{12} = \dfrac{37}{4}$, $p = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{51}{12} = \dfrac{17}{4}$, $s = \dfrac{|A_3|}{|A|} = \dfrac{33}{12} = \dfrac{11}{4}$.

5. způsob – *pomocí inverzní matice*:

Je-li $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}3&2&1\\2&3&1\\1&2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}39\\34\\26\end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}d\\p\\s\end{pmatrix}$, pak platí $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a pro řešení platí:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} * \boldsymbol{b}.$$

Nejprve určíme $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&1&1&0&0\\2&3&1&0&1&0\\1&2&3&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&0&0&1\\2&3&1&0&1&0\\3&2&1&1&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&0&0&1\\0&-1&-5&0&1&-2\\0&-4&-8&1&0&-3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&0&0&1\\0&1&5&0&-1&2\\0&0&12&1&-4&5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&8&0&-1&4&-1\\0&12&0&-5&8&-1\\0&0&12&1&-4&5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}12&0&0&7&-4&-1\\0&12&0&-5&8&-1\\0&0&12&1&-4&5\end{array}\right)$$

$\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix} 7 & -4 & -1 \\ -5 & 8 & -1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ a vypočteme $\boldsymbol{x}$.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} * \boldsymbol{b} = \frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix} 7 & -4 & -1 \\ -5 & 8 & -1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 39 \\ 34 \\ 26 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix} 111 \\ 51 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{37}{4} \\ \frac{17}{4} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix};$$

řešení tedy je: $\underline{\underline{d = \frac{37}{4}}}$, $\underline{\underline{p = \frac{17}{4}}}$, $\underline{\underline{s = \frac{11}{4}}}$.

Zkouška:

3 snopy dobré úrody + 2 snopy průměrné úrody + 1 snop špatné úrody:

$$3\cdot\tfrac{37}{4} + 2\cdot\tfrac{17}{4} + 1\cdot\tfrac{11}{4} = \tfrac{111+34+11}{4} = \underline{\underline{39}} \text{ měr;}$$

2 snopy dobré úrody + 3 snopy průměrné úrody + 1 snop špatné úrody:

$$2\cdot\tfrac{37}{4} + 3\cdot\tfrac{17}{4} + 1\cdot\tfrac{11}{4} = \tfrac{74+51+11}{4} = \underline{\underline{34}} \text{ měr;}$$

1 snop dobré úrody + 2 snopy průměrné úrody + 3 snopy špatné úrody:

$$1\cdot\tfrac{37}{4} + 2\cdot\tfrac{17}{4} + 3\cdot\tfrac{11}{4} = \tfrac{37+34+33}{4} = \underline{\underline{26}} \text{ měr.}$$

Odpověď:

Ze snopu dobré úrody bylo 9,25 míry zrna, ze snopu průměrné úrody bylo 4,25 míry zrna, ze snopu špatné úrody bylo 2,75 míry zrna.

Příklad 1.5.2:

Na první zahradě bylo pětkrát víc keřů rybízu než na druhé zahradě. Když přesadíme 22 keřů z první zahrady do druhé, bude v obou zahradách stejný počet keřů. Kolik keřů rybízu je na každé zahradě?

Řešení:

Neznámá x = počet keřů v 2. zahradě, potom počet keřů v 1. zahradě je $5x$
a dostáváme rovnici:

$$5x - 22 = x + 22,$$

a řešením je $x = 11$; 55 a 11 keřů.

Odpověď:

Na první zahradě je 5 keřů rybízu, na druhé zahradě 11 keřů.

Příklad 1.5.3:

Vojáci měli při nástupu vytvořit čtverec, ale nedařilo se. Poprvé jich zbylo 89. Když se počet v řadě zvětšil o jednoho, zase jich k sestavení čtverce 50 chybělo. Kolik vojáků nastupovalo?

Řešení:

Neznámá je: x = počet vojáků v řadě (či zástupu), potom dostáváme rovnici:

$$x^2 + 89 = (x + 1)^2 - 50,$$

jejímž řešením je $x = 69$, potom počet vojáků je 4 850.

Odpověď:

Nastupovalo 4 850 vojáků.

Příklad 1.5.4:
Každý účastník banketu má zaplatit podíl 60 Kč. Avšak tři z účastníků zapomněli zaplatit a odešli, i musel každý z přítomných zaplatit 75 Kč. Kolik bylo účastníků?

Řešení:
Neznámá x = počet účastníků banketu a dostáváme rovnici:

$$60x = (x - 3) \cdot 75,$$

kde řešení $x = 15$ účastníků.

Odpověď:
Účastníků banketu bylo 15.

Příklad 1.5.5: (*Eulerova úloha*)
Dvě vesničanky přinesly na trh dohromady 100 vajec, jedna více než druhá. Obě utržily stejně. První žena řekla druhé: „Kdybych měla tvoje vejce, vydělala bych 15 krejcarů“. Na to ji druhá odpověděla: „Kdybych já měla tvoje vejce, vydělala bych $6\frac{2}{3}$ krejcaru“. Kolik vajec měla každá vesničanka na začátku?

Řešení č. 1:
Označme si:
a – cena jednoho vejce, které přinesla na trh první vesničanka,
x – počet vajec, které přinesla na trh první vesničanka,
b – cena jednoho vejce, které přinesla na trh druhá vesničanka,
y – počet vajec, které přinesla na trh druhá vesničanka.
Potom můžeme vyjádřit:
a) Obě utržily stejně

$$a \cdot x = b \cdot y.$$

b) Kdyby první měla vejce druhé, vydělala by 15 krejcarů

$$a \cdot y = 15.$$

c) Kdyby druhá měla vejce první, vydělala by $6\frac{2}{3}$ krejcaru

$$b \cdot x = 6\tfrac{2}{3}.$$

d) Dohromady měly 100 vajec

$$x + y = 100.$$

Dostáváme soustavu čtyř rovnic pro čtyři neznámé

$$a \cdot x = b \cdot y$$
$$a \cdot y = 15$$
$$b \cdot x = \tfrac{20}{3}$$
$$x + y = 100$$

kterou vyřešíme. Nejdříve dosadíme ze 2. a 3. rovnice do první a dostáváme

$$\frac{15x}{y} = \frac{20y}{3x} \qquad \text{neboli} \quad 45x^2 = 20y^2.$$

Potom ze 4. rovnice vyjádříme x, $x = 100 - y$ a dosadíme do první rovnice (již upravené)a dostáváme kvadratickou rovnici

$$y^2 - 360y + 18\,000 = 0.$$

Řešením rovnice jsou hodnoty $y_1 = 60$, $y_2 = 300$. Druhá hodnota není možná, protože obě vesničanky měly dohromady jen 100 vajec.
Druhá vesničanka přinesla na trh 60 vajec.
Dosazením do 2. – 4. rovnice zjistíme zbývající hodnoty.
První vesničanka přinesla na trh 40 vajec a prodávala je za $\frac{1}{4}$ krejcaru za kus.
Druhá vesničanka prodávala vejce za $\frac{1}{6}$ krejcaru za kus.
Zkouška:
První vesničanka utržila: $40 \cdot \frac{1}{4} = 10$ krejcarů.
Druhá vesničanka utržila: $60 \cdot \frac{1}{6} = 10$ krejcarů (tedy stejně).
První vesničanka by utržila za vejce druhé: $60 \cdot \frac{1}{4} = 15$ krejcarů.
Druhá vesničanka by utržila za vejce první: $40 \cdot \frac{1}{6} = 6\frac{2}{3}$ krejcaru.

Odpověď:
První vesničanka přinesla na trh 40 vajec, druhá 60 vajec.

Řešení č. 2:
Označíme-li počet vajec, které přinesla na trh první vesničanka p, potom druhá přinesla $100 - p$. Kdyby první měla $100 - p$ vajec, utržila by 15 krejcarů. To znamená, že první vesničanka prodávala vejce po

$$\frac{15}{100 - p} \text{ krejcarech za kus.}$$

Stejně zjistíme, že druhá vesničanka prodávala vejce po

$$6\tfrac{2}{3} : p = \frac{20}{3p} \text{ krejcarech za kus.}$$

Nyní určíme výdělky každé z vesničanek:
První vydělala

$$\frac{15}{100 - p} \cdot p = \frac{15p}{100 - p} \text{ krejcarů,}$$

druhá vydělala

$$\frac{20}{3p} \cdot (100 - p) = \frac{20 \cdot (100 - p)}{3p} \text{ krejcarů.}$$

Protože výdělky obou žen byly stejné, platí

$$\frac{15p}{100 - p} = \frac{20 \cdot (100 - p)}{3p}.$$

Po úpravách dostáváme:

$$p^2 + 160p - 8\,000 = 0,$$

odkud $p_1 = 40$, $p_2 = -200$.
Záporný kořen nemá v našem případě smysl, úloha má pouze jediné řešení:
První vesničanka přinesla 40 vajec a druhá 60 vajec.

Řešení č. 3:
Uvažujme takto:
Předpokládejme, že druhá vesničanka měla k-krát více vajec než první vesničanka (ze zadání úlohy vyplývá, že druhá měla vajec více, proto je $k > 1$, kdyby to neplatilo bude $0 < k < 1$).
Za vejce utržily obě stejné množství peněz. To znamená, že první vesničanka prodala svá vej-

ce k-krát dráž než druhá. Kdyby si vejce vyměnily před prodejem, pak by první vesničanka prodala k-krát více vajec než druhá a prodala by je také k-krát dráž. To znamená, že by stržila k^2-krát více peněz než druhá vesničanka. Odtud máme

$$k^2 = 15 : 6\tfrac{2}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4} \quad ;$$

což dává

$$k = \frac{2}{3} \ .$$

Zbývá rozdělit 100 vajec v poměru 2 : 3. Snadno spočítáme, že první vesničanka měla 40 vajec a druhá 60 vajec.

1.6. <u>Skupina 6:</u> *„Rovnoměrné rozdělení“*

Máme dánu množinu subjektů. Každý subjekt vlastní určité množství majetku a dochází k jeho rovnoměrnému rozdělení. Zjišťujeme, jak se jednotlivé subjekty mezi sebou vyrovnaly, tj. kdo kolik ostatním zaplatil. Úlohu můžeme řešit úsudkem nebo jednou jednoduchou lineární rovnicí nebo pomocí modelu.

<u>*Příklad* 1.6.1:</u>
Dva Arabové chtěli večeřet. První měl 5 jídel, druhý 3 jídla, všechna jídla měla stejnou cenu. Třetí Arab je požádal aby mohl večeřet s nimi. Všech 8 jídel bylo dáno na stůl a každý se zavázal, že zaplatí druhým co snědl. Každý snědl stejně a třetí Arab zaplatil 8 zlatých. Jak se rozdělí o peníze první dva Arabové?

Řešení:
Všichni tři snědli 5 + 3 = 8 jídel stejné ceny, na jednoho připadá $\frac{8}{3}$ jídel.

První snědl $\frac{8}{3}$ jídel, dostal zaplaceno za $5 - \frac{8}{3} = \frac{15-8}{3} = \frac{7}{3}$ jídel.

Druhý snědl $\frac{8}{3}$ jídel, dostal zaplaceno za $3 - \frac{8}{3} = \frac{9-8}{3} = \frac{1}{3}$ jídel.

Třetí platí celé jídlo, tj $\frac{8}{3}$. Za toto jídlo zaplatí 8 zlatých. O peníze se podělí první a druhý v poměru $\frac{7}{3} : \frac{1}{3} = 7 : 1$. Dostane tedy první 7 zlatých, druhý 1 zlatý.

Zkouška:
Třetí zaplatil za $\frac{8}{3}$ jídel 8 zlatých, jedno jídlo tedy stálo 3 zlaté.

První dal na stůl 5 jídel za 15 zlatých, za 8 zlatých snědl (stejně jako třetí), zbývá 15 – 8 = 7 zlatých.
Druhý dal na stůl 3 jídla za 9 zlatých, za 8 zlatých snědl (stejně jako třetí), zbývá 9 – 8 = 1 zlatý.
Odpověď:
První obdržel 7 zlatých, druhý 1 zlatý.

<u>*Příklad* 1.6.2:</u>
První zahradník přinesl 20 kg jablek, 1 kg za 16 Kč; druhý zahradník 8 kg švestek, 1 kg za 12 Kč, třetí zahradník přinesl 4 kg hrušek, 1 kg za 24 Kč, čtvrtý zahradník nepřinesl nic. Rozdělili se rovným dílem (tj. každý si vzal 5 kg jablek, 2 kg švestek a 1 kg hrušek). Kolik každý z nich dostal eventuelně doplatil Kč?

Řešení:
Každý si odnesl ovoce za $5 \cdot 16 + 2 \cdot 12 + 1 \cdot 24 = 128$ Kč.
První přinesl 20 kg jablek celkem za $20 \cdot 16 = 320$ Kč; obdržel 320 – 128 = 192 Kč.
Druhý přinesl 8 kg švestek celkem za $8 \cdot 12 = 96$ Kč; zaplatil 128 – 96 = 32 Kč.
Třetí přinesl 4 kg hrušek celkem za $4 \cdot 24 = 96$ Kč; zaplatil 128 – 96 = 32 Kč.
Čtvrtý nepřinesl nic, zaplatil 128 Kč.
Zkouška:
Zaplaceno dostal pouze první zahradník, a to 192 Kč.
Ostatní zaplatili celkem 32 + 32 + 128 = 192 Kč.
Odpověď:
První zahradník obdržel 192 Kč, druhý a třetí zaplatili 32 Kč, čtvrtý 128 Kč.

Příklad 1.6.3:
Ke společné hostině dal Cajus 7, Sempronius 8 mis, všechny stejné ceny. K tomu přišel Titus a všichni tři jedli společně. Titus podle počtu mis zaplatil Cajovi 14 a Semproniovi 16 stříbrných. Měl Sempronius právo být nespokojen?

Řešení:
Vyjdeme ze vztahů (3-2b) a (3-2c), (viz disertační práce), kde a = 7 mis, b = 8 mis, e = 14 + 16 = 30 stříbrných, potom:

$$x = \frac{2ae - be}{a+b} = \frac{2\cdot 7\cdot 30 - 8\cdot 30}{7+8} = \underline{\underline{12}} \text{ [stříbrných],}$$

$$y = \frac{2be - ae}{a+b} = \frac{2\cdot 8\cdot 30 - 7\cdot 30}{7+8} = \underline{\underline{18}} \text{ [stříbrných].}$$

Sempronius tak dostal o 2 stříbrné méně, protože dostal pouze 16 stříbrných.
Zkouška:
Každý z účastníků hostiny snědl (7 + 8) : 3 = 5 mis.
Jedna mísa stála:

$$z = \frac{3e}{a+b} = \frac{3\cdot 30}{7+8} = \underline{6} \text{ [stříbrných];}$$

potom Cajus má dostat zaplaceno za (7 – 5) = 2 mísy, tj. $2\cdot 6 = 12$ stříbrných a Sempronius má dostat zaplaceno za (8 – 5) = 3 mísy, tj. $3\cdot 6 = 18$ stříbrných.
Odpověď:
Sempronius měl právo být nespokojen, protože dostal o 2 stříbrné méně.

1.7. <u>Skupina 7:</u> *„Neúplné jednoduché určení“*

Známe celkový počet prvků skupiny a neúplné údaje pro jejich počet. Určujeme počty jednotlivých prvků. Modelem je soustava m rovnic o n neznámých ($m < n$)*, která vede na diofantovskou rovnici, v tomto případě je to lineární diofantovská rovnice o dvou neznámých.*

<u>*Příklad* 1.7.1:</u> = ***Příklad* 0.3.1:** (*úloha pochází z Číny*) - »rozšíření počtu řešení«
Pán dal sluhovi třicet penízů, aby za ně zakoupil 30 ptáků, a to pávy po 3, bažanty po 2 a holuby po $\frac{1}{2}$ peníze. Kolik kterých koupí? (*Předpokládáme, že je ke koupi dostatečné množství ptáků a sluha koupil od každého druhu alespoň jeden kus.*)

<u>*Řešení* č. 1:</u>
Při analýze problémové situace zjistíme, že cílem řešení je určit jednotlivé počty ptáků, které postupně označíme: x – počet pávů, y – počet bažantů, z – počet holubů, kde x, y, z jsou přirozená čísla (vyjadřují počty ptáků; z textu plyne, že od každého druhu se má koupit alespoň jeden kus).
Protože součet počtu všech ptáků je 30, první rovnice má tvar

$$x + y + z = 30.$$

Jeden páv stojí 3 peníze, potom x pávů stojí $3x$ penízů; jeden bažant stojí 2 peníze, potom y bažantů stojí $2y$ penízů a konečně jeden holub stojí $\frac{1}{2}$ peníze, potom z holubů stojí $\frac{1}{2}z$ penízů.
Druhá rovnice má tvar

$$3x + 2y + \tfrac{1}{2}z = 30 \quad \rightarrow \quad 6x + 4y + z = 60.$$

Úloha vede k řešení soustavy diofantovských rovnic:

$$x + y + z = 30$$
$$6x + 4y + z = 60.$$

Po vyloučení z dospějeme k diofantovské rovnici

$$5x + 3y = 30, \text{ z toho } y = 10 - \tfrac{5}{3}x;$$

x musí být násobkem tří, proto $x = 3$ je jedinou možnou hodnotou x (při $x = 6$ by bylo $y = 0$, což není možné, dále jsou hodnoty y záporné).
Proto $x = 3$, $y = 5$, $z = 22$.
Zkoušku provedeme dosazením vypočtených hodnot do textu:

1 páv stojí .... 3 peníze .... 3 pávi …....... 9 penízů,
1 bažant stojí .... 2 peníze ....5 bažantů .... 10 penízů,
1 holub stojí .... $\frac{1}{2}$ peníze ...... 22 holubů .... 11 penízů,

celkem: 9 + 10 + 11 = 30 penízů.
Odpověď: Sluha koupil 3 pávy, 5 bažantů a 22 holubů.

<u>*Řešení* č. 2:</u>
Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty pávů, bažantů a holubů a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$$5x + 3y = 30.$$

Nyní řešíme rovnici $5x + 3y = 1$. Řešení určíme rozvojem čísla $\dfrac{5}{3}$ v řetězový zlomek.

Rozvoj čísla $\dfrac{5}{3}$ získáme pomocí Eukleidova algoritmu:

$$5 = 1 \cdot 3 + 2$$
$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$

$2 = 2 \cdot 1 + 0.$

Hledaný řetězový zlomek je $\frac{5}{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}$

a sblížené zlomky jsou:

$1; \; 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = 2; \; \frac{5}{3}.$

Předposlední sblížený zlomek má čitatele $2 = \pm v$ a jmenovatele $1 = \pm u$. Je nutno volit $u = -1$, $v = 2$, neboť

$5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 1.$

Řešení je potom následující:

$x = cu + bt = 30 \cdot (-1) + 3t = -30 + 3t,$

$y = cv - at = 30 \cdot 2 - 5t = 60 - 5t.$

Nyní pro jednotlivé hodnoty t hledáme přípustné hodnoty x, y, z:

......

$t = 10 \quad \rightarrow \quad x = 0, y = 10, z = 20,$

$t = 11 \quad \rightarrow \quad x = 3, y = 5, z = 22,$

$t = 12 \quad \rightarrow \quad x = 6, y = 0, z = 24,$

......

Protože hledáme řešení z oboru přirozených čísel, jediným řešením je $x = 3, y = 5, z = 22$.

Řešení č. 3:

Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty pávů, bažantů a holubů a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$5x + 3y = 30.$

Tuto rovnici řešíme pomocí kongruencí:

$5x \equiv 30 \bmod 3 \quad |:5$

$x \equiv 6 \bmod 3 \quad |-6$

$x \equiv 0 \bmod 3$

z toho plyne pro x: $\underline{x = 3t} \quad \rightarrow \quad 5 \cdot 3t + 3y = 30$

$15t + 3y = 30 \quad | -15t$

$3y = 30 - 15t \quad |:3$

$\underline{y = 10 - 5t}$

Nyní pro jednotlivé hodnoty t hledáme přípustné hodnoty x, y, z:

......

$t = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0, y = 10, z = 20,$

$t = 1 \quad \rightarrow \quad x = 3, y = 5, z = 22,$

$t = 2 \quad \rightarrow \quad x = 6, y = 0, z = 24,$

......

Protože hledáme řešení z oboru přirozených čísel, jediným řešením je $x = 3, y = 5, z = 22$.

Řešení č. 4:

Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty pávů, bažantů a holubů a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$5x + 3y = 30.$

Tuto rovnici řešíme pomocí vzorců:

a) protože v rovnici $ax + by = c$ platí: $a \mid c$, řešení vypočteme podle vzorců:

$x = \dfrac{c - bc}{a} + bt,\ y = c - at\,.$

$x = \dfrac{30 - 3 \cdot 30}{5} + 3t\,,$ $\underline{y = 30 - 5t},$

$\underline{x = -12 + 3t}\,.$

Potom pro $t = 5$ je $x = 3, y = 5, z = 22.$

b) protože v rovnici $ax + by = c$ platí: $b \mid c$, řešení vypočteme podle vzorců:

$x = c + bt,\ y = \dfrac{c - ac}{b} - at\,.$

$\underline{x = 30 + 3t}\,,$ $y = \dfrac{30 - 5 \cdot 30}{3} - 5t\,,$ $\underline{y = -40 - 5t}\,.$

Potom pro $t = -9$ je $x = 3, y = 5, z = 22.$

Řešení č. 5:

Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty pávů, bažantů a holubů a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$5x + 3y = 30.$

Tuto rovnici řešíme pomocí Bachetovy metody:

Od rovnice $ax + by = c$ odečteme a) rovnici $ax + (b - 1)\,y = at$ (platí $a \mid c$);
b) nebo rovnici $(a - 1) + by = bt$ (platí $b \mid c$).

a)
$$\begin{array}{l} 5x + 3y = 30 \\ \underline{-(5x + 2y = 5t)} \\ \underline{y = 30 - 5t} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rl} 5x + 3\,(30 - 5t) = 30 & \\ 5x + 90 - 15t = 30 & \big|\ + 15t - 90 \\ 5x = -60 + 15t & \big|\ : 5 \\ \underline{x = -12 + 3t} & \end{array}$$

Potom dostáváme řešení pro $t = 5$: $x = 3, y = 5, z = 22.$

b)
$$\begin{array}{l} 5x + 3y = 30 \\ \underline{-(4x + 3y = 3t)} \\ \underline{x = 30 - 3t} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rl} 5\,(30 - 3t) + 3y = 30 & \\ 150 - 15t + 3y = 30 & \big|\ + 15t - 150 \\ 3y = -120 + 15t & \big|\ : 3 \\ \underline{y = -40 + 5t} & \end{array}$$

Potom dostáváme řešení pro $t = 9$: $x = 3, y = 5, z = 22.$

Řešení č. 6:

Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty pávů, bažantů a holubů a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$5x + 3y = 30.$

Tuto rovnici řešíme pomocí partikulárního řešení:

Řešení $[x_0; y_0]$ nalezneme tak, že do rovnice jednu neznámou dosadíme a druhou vypočteme, nalezené řešení musí být celočíselné. Např. zvolíme $x_0 = -3$, potom vypočteme $y_0 = 15$ a řešení je: $x = -3 + 3k,\ y = 15 - 5k.$

Pro $k = 2$ dostáváme výsledné řešení $x = 3, y = 5, z = 22.$

Poznámka:

V řešení č. 2 – č. 6 jsou zkouška a odpověď stejné jako v řešení č. 1, proto je neuvádím.

Příklad 1.7.2: (*Pisanova úloha*)
Kdosi koupil 30 ptáků za 30 penízů. Za tři vrabce platil jeden peníz, za dvě hrdličky též jeden peníz, za jednoho holuba dva peníze. Kolik ptáků každého druhu koupil? (*Předpokládáme, že je ke koupi dostatečné množství ptáků a sluha koupil od každého druhu alespoň jeden kus.*)

Řešení č. 1:
Provedeme analýzu problémové situace a zjistíme, že cílem řešení je určit jednotlivé počty ptáků. Neznámé hodnoty počtu postupně označíme x – počet vrabců, y – počet hrdliček, z – počet holubů, kde x, y, z jsou přirozená čísla (vyjadřují počty ptáků; z textu plyne, že od každého druhu máme alespoň jeden kus).
Protože součet počtu všech ptáků je 30, první rovnice má tvar

$$x + y + z = 30.$$

Jeden vrabec stojí $\frac{1}{3}$ peníze, potom x vrabců stojí $\frac{1}{3}x$ penízů; jedna hrdlička stojí $\frac{1}{2}$ peníze, potom y hrdliček stojí $\frac{1}{2}y$ penízů a konečně jeden holub stojí 2 peníze, potom z holubů stojí 2z penízů. Druhá rovnice má tvar

$$\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}y + 2z = 30.$$

Úloha vede k řešení soustavy rovnic:

$$x + y + z = 30$$
$$\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}y + 2z = 30.$$

Po vyloučení z dospějeme k diofantovské rovnici

$$10x + 9y = 180, \text{ z toho } y = 20 - \tfrac{10}{9}x;$$

x musí být násobkem devíti, proto $x = 9$ je jedinou možnou hodnotou x (při $x = 18$ by bylo $y = 0$, což není možné, dále jsou hodnoty y záporné).
Proto $x = 9$, $y = 10$, $z = 11$.
Zkoušku provedeme dosazením vypočtených hodnot do textu:

1 vrabec stojí .... $\frac{1}{3}$ peníze .... 9 vrabců .... 3 peníze,
1 hrdlička stojí .... $\frac{1}{2}$ peníze ....10 hrdliček .... 5 penízů,
1 holub stojí .... 2 peníze .... 11 holubů .... 22 penízů,

celkem: 3 + 5 + 22 = 30 penízů.
Odpověď: Neznámý koupil 9 vrabců, 10 hrdliček a 11 holubů.

Řešení č. 2:
Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty vrabců, hrdliček a holubů a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$$10x + 9y = 180.$$

Nyní řešíme rovnici $10x + 9y = 1$. Řešení určíme rozvojem čísla $\frac{10}{9}$ v řetězový zlomek.

Rozvoj čísla $\frac{10}{9}$ získáme pomocí Eukleidova algoritmu:

$$10 = 1 \cdot 9 + 1$$
$$9 = 9 \cdot 1 + 0.$$

Hledaný řetězový zlomek je $\frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{9}$

a sblížené zlomky jsou: $1 = \frac{1}{1}$; $\frac{10}{9}$.

Předposlední sblížený zlomek má čitatele $1 = \pm v$ a jmenovatele $1 = \pm u$. Je nutno volit

$u = 1$, $v = -1$, neboť

$$10 \cdot 1 + 9 \cdot (-1) = 1.$$

Řešení je potom následující:

$$x = cu + bt = 180 \cdot 1 + 9t = 180 + 9t,$$
$$y = cv - at = 180 \cdot (-1) - 10t = -180 - 10t.$$

Nyní pro jednotlivé hodnoty t hledáme přípustné hodnoty x, y, z:

......
$t = -18 \quad \rightarrow \quad x = 18, y = 0, z = 12,$
$t = -19 \quad \rightarrow \quad x = 9, y = 10, z = 11,$
$t = -20 \quad \rightarrow \quad x = 0, y = 20, z = 10,$
......

Protože hledáme řešení z oboru přirozených čísel, jediným řešením je $x = 9, y = 10, z = 11$.

Řešení č. 3:

Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty vrabců, hrdliček a holubů a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$$10x + 9y = 180.$$

Tuto rovnici řešíme pomocí kongruencí:

$$10x \equiv 180 \bmod 9 \quad \big|: 10$$
$$x \equiv 18 \bmod 9$$

z toho plyne pro x: $\underline{x = 18 + 9t} \quad \rightarrow \quad 10\,(18 + 9t) + 9y = 180$

$$180 + 90t + 9y = 180 \quad \big| -180 - 90t$$
$$9y = -90t \quad \big|: 9$$
$$\underline{y = -10t}$$

Nyní pro jednotlivé hodnoty t hledáme přípustné hodnoty x, y, z:

......
$t = 1 \quad \rightarrow \quad x = 27, y = -10, z = 13,$
$t = 0 \quad \rightarrow \quad x = 18, y = 0, z = 12,$
$t = -1 \quad \rightarrow \quad x = 9, y = 10, z = 11,$
$t = -2 \quad \rightarrow \quad x = 0, y = 20, z = 10,$
$t = -3 \quad \rightarrow \quad x = -9, y = 30, z = 9,$
......

Protože hledáme řešení z oboru přirozených čísel, jediným řešením je $x = 9, y = 10, z = 11$.

Řešení č. 4:

Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty vrabců, hrdliček a holubů a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$$10x + 9y = 180.$$

Tuto rovnici řešíme pomocí vzorců:

a) protože v rovnici $ax + by = c$ platí: $a + b \equiv 1 \bmod b$ i současně $b \mid c$, řešení vypočteme podle vzorců: $x = c + bt,\ y = \dfrac{c - ac}{b} - at$.

$\underline{x = 180 + 9t}$, $y = \dfrac{180 - 10 \cdot 180}{9} - 10t$,

$\underline{y = -180 - 10t}$.

Potom pro $t = -19$ je $x = 9, y = 10, z = 11$.

b) protože v rovnici $ax + by = c$ platí: $a \mid c$, řešení vypočteme podle vzorců:

$$x = \frac{c - bc}{a} + bt,\ y = c - at\ .$$

$$x = \frac{180 - 9 \cdot 180}{10} + 9t\ ,\quad \underline{y = 180 - 10t},$$

$\underline{x = -144 + 9t}$.

Potom pro $t = 17$ je $x = 9, y = 10, z = 11$.

Řešení č. 5:

Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty vrabců, hrdliček a holubů a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$10x + 9y = 180$.

Tuto rovnici řešíme pomocí Bachetovy metody:

Od rovnice $ax + by = c$ odečteme a) rovnici $ax + (b - 1)\,y = at$,

b) nebo rovnici $(a - 1) + by = bt$.

a) $10x + 9y = 180$

$\underline{-(10x + 8y = 10t)}$

$\underline{y = 180 - 10t}$ → $10x + 9\,(180 - 10t) = 180$

$10x + 1620 - 90t = 180 \quad \vert\ + 90t - 1620$

$10x = -1440 + 90t \quad \vert : 10$

$\underline{x = -144 + 9t}$

Potom dostáváme řešení pro $t = 17$: $x = 9, y = 10, z = 11$.

b) $10x + 9y = 180$

$\underline{-(9x + 9y = 9t)}$

$\underline{x = 180 - 9t}$ → $10\,(180 - 9t) + 9y = 180$

$1800 - 90t + 9y = 180 \quad \vert\ + 90t - 1800$

$9y = -1620 + 90t \quad \vert : 10$

$\underline{y = -180 + 10t}$

Potom dostáváme řešení pro $t = 19$: $x = 9, y = 10, z = 11$.

Řešení č. 6:

Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty vrabců, hrdliček a holubů a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$10x + 9y = 180$.

Tuto rovnici řešíme pomocí partikulárního řešení:

nalezneme-li jedno řešení $[x_0; y_0]$, potom rovnice má řešení: $x = x_0 + bk$

$y = y_0 - ak$.

Partikulární řešení $[x_0; y_0]$ nalezneme tak, že do rovnice jednu neznámou dosadíme a druhou vypočteme, nalezené řešení musí být celočíselné. Např. zvolíme $x_0 = 9$, potom vypočteme $y_0 = 10$ a řešení je: $x = 9 + 9k$, $y = 10 - 10k$.

Pro $k = 0$ dostáváme výsledné řešení $x = 9, y = 10, z = 11$.

Poznámka:

V řešení č. 2 – č. 6 jsou zkouška a odpověď stejné jako v řešení č. 1, proto nejsou uváděny.

Příklad 1.7.3: (*z Číny – Čang Čchiou-ťien*)

Kohout stojí pět penízů, slepice tři peníze a tři kuřata jeden peníz. Celkem za 100 penízů koupili 100 ptáků. Kolik koupili kohoutů, slepic a kuřat? (*Předpokládáme, že je ke koupi dostatečné množství ptáků a sluha koupil od každého druhu alespoň jeden kus.*)

Řešení:
Označme po řadě x, y, z počty kohoutů, slepic a kuřat, potom cena za všechny kohouty je $5x$, všechny slepice $3y$ a všechny kuřata $\frac{1}{3}z$. Přepíšeme-li zadání do jazyka matematiky, dostáváme soustavu rovnic

$$5x + 3y + \tfrac{1}{3}z = 100$$
$$x + y + z = 100,$$

která je ekvivalentní s diofantovskou rovnicí $7x + 4y = 100$.
Tudíž $y = 25 - \frac{7}{4}x$, $z = 75 + \frac{3}{4}x$. Hodnoty y, z budou celé kladné, když bude $x = 4k$, $k = 1, 2, 3$, a tedy $x = 4k$, $y = 25 - 7k$, $z = 75 + 3k$.
Řešením jsou trojice [4; 18; 78] , [8; 11; 81] , [12; 4; 84] .
Zkouška:
Zkoušku provedeme pro trojici [4; 18; 78] dosazením vypočtených hodnot do textu:

1 kohout stojí .... 5 penízů .... 4 kohouti …... 20 penízů,
1 slepice stojí .... 3 peníze ....18 slepic .... 54 penízů,
1 kuře stojí .... $\frac{1}{3}$ peníze .... 78 kuřat .... 26 penízů,

celkem: 20 + 54 + 26 = 100 penízů.
Stejně můžeme provést zkoušku pro trojice [8; 11; 81] , [12; 4; 84] .
Odpověď:
Koupili 4 kohouty, 18 slepic, 78 kuřat nebo 8 kohoutů, 11 slepic, 81 kuřat nebo 12 kohoutů, 4 slepice a 84 kuřat. (úloha má tři řešení)

Příklad 1.7.4: = Příklad 4.1.3
Za 250 Kč jsme koupili 100 kusů ovoce. Melouny byly po 25 Kč, jablka po 5 Kč a hrušky po 50 hal. Kolik kusů každého druhu bylo? (*Předpokládáme, že od každého druhu koupili alespoň jeden kus.*)

Řešení č. 1:
Při analýze úlohy zjistíme, že máme určit počty kusů jednotlivých druhů ovoce. Ty postupně označíme: x – počet melounů, y – počet jablek, z – počet hrušek; x, y, z jsou opět přirozená čísla. Protože počet všech kusů ovoce je 100, první rovnice má tvar

$$x + y + z = 100.$$

Jeden meloun stojí 25 Kč, potom x melounů $25x$ Kč, jedno jablko stojí 5 Kč, potom y jablek $5y$ Kč, jedna hruška stojí 50 hal., potom z hrušek stojí $0{,}5z$ Kč. Druhá rovnice má tvar

$$25x + 5y + 0{,}5z = 250.$$

Úloha vede k řešení soustavy rovnic:

$$x + y + z = 100$$
$$25x + 5y + 0{,}5z = 250.$$

Po vyloučení z dospějeme k diofantovské rovnici

$$49x + 9y = 400, \text{ z toho } y = \frac{400 - 49x}{9};$$

$400 - 49x$ musí být násobkem devíti a také $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, neboť y je kladné. Potom jedinou možnou hodnotou $x = 1$ (pro jiné hodnoty x není y přirozené číslo).
Proto $x = 1$, $y = 39$, $z = 60$.
Zkoušku provedeme dosazením vypočtených hodnot do textu:

1 meloun stojí ...... 25 Kč .... 1 meloun …….. 25 Kč,
1 jablko stojí .... 5 Kč .... 39 jablek .... 195 Kč,
1 hruška stojí .... 0,5 Kč ...... 60 hrušek .... 30 Kč,

celkem: 25 + 195 + 30 = 250 Kč.
Odpověď: Byl 1 meloun, 39 jablek a 60 hrušek.

Řešení č. 2:
Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty melounů, jablek a hrušek a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$$49x + 9y = 400.$$

Nyní řešíme rovnici $49x + 9y = 1$. Řešení určíme rozvojem čísla $\frac{49}{9}$ v řetězový zlomek.

Rozvoj čísla $\frac{49}{9}$ získáme pomocí Eukleidova algoritmu:

$$49 = 5 \cdot 9 + 4$$
$$9 = 2 \cdot 4 + 1$$
$$4 = 4 \cdot 1 + 0.$$

Hledaný řetězový zlomek je $\frac{49}{9} = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}$

a sblížené zlomky jsou:

$5;\ \ 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2};\ \ \frac{49}{9}.$

Předposlední sblížený zlomek má čitatele $11 = \pm v$ a jmenovatele $2 = \pm u$. Je nutno volit $u = -2$, $v = 11$, neboť

$$49 \cdot (-2) + 9 \cdot 11 = 1.$$

Řešení je potom následující:

$$x = cu + bt = 400 \cdot (-2) + 9t = -800 + 9t,$$
$$y = cv - at = 400 \cdot 11 - 49t = 4\,400 - 49t.$$

Nyní pro jednotlivé hodnoty t hledáme přípustné hodnoty x, y, z:

......
$t = 88 \quad \rightarrow \quad x = -8, y = 88, z = 20,$
$t = 89 \quad \rightarrow \quad x = 1, y = 39, z = 60,$
$t = 90 \quad \rightarrow \quad x = 10, y = -10, z = 100,$
......

Protože hledáme řešení z oboru přirozených čísel, jediným řešením je $x = 1, y = 39, z = 60$.

Řešení č. 3:
Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty melounů, jablek a hrušek a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$$49x + 9y = 400.$$

Tuto rovnici řešíme pomocí kongruencí:

$$49x \equiv 400 \bmod 9 \quad | -351$$
$$49x \equiv 49 \bmod 9 \quad | : 49$$
$$x \equiv 1 \bmod 9$$

z toho plyne pro x: $\underline{x = 1 + 9t} \quad \rightarrow \quad 49 \cdot (1 + 9t) + 9y = 400$

$$49 + 441t + 9y = 400 \quad | -49 - 441t$$
$$9y = 351 - 441t \quad | : 9$$
$$\underline{y = 39 - 49t}$$

Nyní pro jednotlivé hodnoty t hledáme přípustné hodnoty x, y, z:

......

$t = -1 \quad \rightarrow \quad x = -8, y = 88, z = 20,$

$t = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1, y = 39, z = 60,$

$t = 1 \quad \rightarrow \quad x = 10, y = -10, z = 100,$

......

Protože hledáme řešení z oboru přirozených čísel, jediným řešením je $x = 1, y = 39, z = 60$.

Řešení č. 4:

Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty melounů, jablek a hrušek a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$$49x + 9y = 400.$$

Tuto rovnici řešíme pomocí partikulárního řešení:

Řešení $[x_0; y_0]$ nalezneme tak, že do rovnice jednu neznámou dosadíme a druhou vypočteme, nalezené řešení musí být celočíselné. Např. zvolíme $x_0 = 10$, potom vypočteme $y_0 = -10$ a řešení je: $x = 10 + 9k$, $y = -10 - 49k$.

Pro $k = -1$ dostáváme výsledné řešení $x = 1, y = 39, z = 60$.

Poznámky:

1) V řešení č. 2, 3, 4 jsou zkouška a odpověď stejné jako v řešení č. 1, proto nejsou uváděny.
2) Řešení pomocí vzorců a Bachetovy metody v tomto příkladě není možné, protože není splněna ani jedna z podmínek ($a+b \equiv 1 \mod a$; $a+b \equiv 1 \mod b$; $a \mid c$; $b \mid c$).

Příklad 1.7.5:

Pokladník koupil za 100 Kč 20 známek po 8 Kč, 5 Kč a 1 Kč. Kolik bylo každých? (*Předpokládáme, že od každého druhu koupil pokladník alespoň jeden kus.*)

Řešení č.1:

Při rozboru úlohy zjistíme, že máme určit počty jednotlivých druhů známek. Ty postupně označíme: x – počet známek za 8 Kč, y – počet známek za 5 Kč, z – počet známek za 1 Kč; x, y, z jsou opět přirozená čísla.

Protože počet všech známek je 20, první rovnice má tvar

$$x + y + z = 20.$$

Známky za 8 Kč stojí celkem $8x$ Kč, známky za 5 Kč stojí celkem $5y$ Kč, známky za 1 Kč stojí celkem z Kč. Druhá rovnice má tvar

$$8x + 5y + z = 100.$$

Úloha vede k řešení soustavy diofantovských rovnic:

$$x + y + z = 100$$
$$8x + 5y + z = 100.$$

Po vyloučení z dospějeme k diofantovské rovnici

$$7x + 4y = 80, \text{ z toho } y = 20 - \tfrac{7}{4}x;$$

x musí být násobkem čtyř, proto $x \in \{4, 8, 12, 16\}$. Protože y je přirozené, je x rovno 4 a 8.

Proto řešení jsou: 1) $x = 4, y = 13, z = 3$,

2) $x = 8, y = 6, z = 6$.

Zkoušku provedeme dosazením vypočtených hodnot do textu:

1) 4 osmikorunové známky stojí celkem ……….. 32 Kč,
   13 pětikorunových známek stojí celkem .... 65 Kč,
   3 korunové známky stojí celkem .... 3 Kč,

celkem: 32 + 65 + 3 = 100 Kč.

2) 8 osmikorunových známek stojí celkem …….. 64 Kč,
6 pětikorunových známek stojí celkem .... 30 Kč,
6 korunových známek stojí celkem .... 6 Kč,
celkem: $64 + 30 + 6 = 100$ Kč.

Odpověď: Pokladník koupil 4 osmikorunové, 13 pětikorunových a 3 korunové známky nebo 8 osmikorunových, 6 pětikorunových a 6 korunových známek.

Řešení č. 2:

Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty osmikorunových, pětikorunových a korunových známek a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici $7x + 4y = 80$.

Nyní řešíme rovnici $7x + 4y = 1$. Řešení určíme rozvojem čísla $\frac{7}{4}$ v řetězový zlomek.

Rozvoj čísla $\frac{7}{4}$ získáme pomocí Eukleidova algoritmu:

$7 = 1 \cdot 4 + 3$
$4 = 1 \cdot 3 + 1$
$3 = 3 \cdot 1 + 0.$

Hledaný řetězový zlomek je $\frac{7}{4} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}$

a sblížené zlomky jsou:

$1;\ 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = 2;\ \frac{7}{4}.$

Předposlední sblížený zlomek má čitatele $2 = \pm v$ a jmenovatele $1 = \pm u$. Je nutno volit $u = -1$, $v = 2$, neboť

$7 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 1.$

Řešení je potom následující:

$x = cu + bt = 80 \cdot (-1) + 4t = -80 + 4t,$
$y = cv - at = 80 \cdot 2 - 7t = 160 - 7t.$

Nyní pro jednotlivé hodnoty t hledáme přípustné hodnoty x, y, z:

......
$t = 20 \quad \to \quad x = 0, y = 20, z = 0,$
$t = 21 \quad \to \quad x = 4, y = 13, z = 3,$
$t = 22 \quad \to \quad x = 8, y = 6, z = 6,$
$t = 23 \quad \to \quad x = 12, y = -1, z = 9,$
......

Protože hledáme řešení z oboru přirozených čísel, jsou řešením trojice [4; 13; 3], [8; 6; 6].

Řešení č. 3:

Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty osmikorunových, pětikorunových a korunových známek a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici $7x + 4y = 80$.

Tuto rovnici řešíme pomocí kongruencí:

$7x \equiv 80 \bmod 4 \quad \big|\ -80$
$7x \equiv 0 \bmod 4 \quad \big|\ :7$
$x \equiv 0 \bmod 4$
$\underline{x = 4t} \quad \to \quad 7 \cdot 4t + 4y = 80 \quad \big|\ -28t$

$$4y = 80 - 28t \quad \Big| : 4$$
$$\underline{y = 20 - 7t}$$

Nyní pro jednotlivé hodnoty t hledáme přípustné hodnoty x, y, z:

......

$t = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0, y = 20, z = 0,$

$t = 1 \quad \rightarrow \quad x = 4, y = 13, z = 3,$

$t = 2 \quad \rightarrow \quad x = 8, y = 6, z = 6,$

$t = 4 \quad \rightarrow \quad x = 12, y = -1, z = 9,$

......

Protože hledáme řešení z oboru přirozených čísel, jsou řešením trojice [4; 13; 3], [8; 6; 6].

Řešení č. 4:

Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty osmikorunových, pětikorunových a korunových známek a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici $7x + 4y = 80$.

Tuto rovnici řešíme pomocí vzorců:

protože v rovnici $ax + by = c$ platí: $b \mid c$, řešení vypočteme podle vzorců:

$$x = c + bt,\ y = \frac{c - ac}{b} - at.$$

$$\underline{x = 80 + 4t},\quad y = \frac{80 - 7 \cdot 80}{4} - 7t,$$

$$\underline{y = -120 - 7t}.$$

Potom pro: $t = -19$ je $x = 4, y = 13, z = 3,$

$t = -18$ je $x = 8, y = 6, z = 6.$

Řešení č. 5:

Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty osmikorunových, pětikorunových a korunových známek a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici $7x + 4y = 80$.

Tuto rovnici řešíme pomocí Bachetovy metody:

Od rovnice $ax + by = c$ odečteme rovnici $(a - 1) + by = bt$ (platí $b \mid c$):

$$7x + 4y = 80$$
$$\underline{-(6x + 4y = 4t)}$$
$$\underline{x = 80 - 4t} \quad \rightarrow \quad 7(80 - 4t) + 4y = 80$$
$$560 - 28t + 4y = 80 \quad \Big| + 28t - 560$$
$$4y = -480 + 28t \quad \Big| : 4$$
$$\underline{y = -120 + 7t}$$

Potom dostáváme řešení pro $t = 19$ je $x = 4, y = 13, z = 3,$

$t = 18$ je $x = 8, y = 6, z = 6.$

Řešení č. 6:

Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty osmikorunových, pětikorunových a korunových známek a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici $7x + 4y = 80$.

Tuto rovnici řešíme pomocí partikulárního řešení:

Řešení $[x_0; y_0]$ nalezneme tak, že do rovnice jednu neznámou dosadíme a druhou vypočteme, nalezené řešení musí být celočíselné. Např. zvolíme $x_0 = 4$, potom vypočteme $y_0 = 13$ a řešení je: $x = 4 + 4k,\ y = 13 - 7k$.

Potom dostáváme řešení pro $k = 0$ je $x = 4, y = 13, z = 3,$

$k = 1$ je $x = 8, y = 6, z = 6.$

Poznámka:
V řešení č. 2 – č. 6 jsou zkouška a odpověď stejné jako v řešení č. 1, proto nejsou uváděny.

Příklad 1.7.6:
Při výplatě doplatku se pokladník zmýlil a místo haléřů dal stejný počet korun, místo korun pak haléře. Když se z vyplacené sumy ubral pětihaléř, zbylo přesně dvakrát víc, než mělo být správně vyplaceno. Kolik byl doplatek?

Řešení:
Označme si x počet haléřů, y počet korun, které měl pokladník vyplatit. Doplatek byl potom

$$100y + x.$$

Pokladník se zmýlil a zaměnil počet korun a haléřů, vyplatil tedy

$$100x + y.$$

Dále víme, že ubráním 5 haléřů z druhé (nesprávné) sumy dostáváme dvojnásobek původní (správné) sumy, platí tedy

$$100x + y - 5 = 2 \cdot (100y + x)$$

a dostáváme diofantovskou rovnici

$$98x - 199y = 5,$$

kterou vyřešíme pomocí kongruencí:

$$-199y \equiv 5 \bmod 98 \quad \big| \cdot (-1)$$
$$199y \equiv -5 \bmod 98 \quad \big| -196y + 98$$
$$3y \equiv 93 \bmod 98 \quad \big| : 3$$
$$y \equiv 31 \bmod 98 \quad \rightarrow \quad \underline{y = 31 + 98t},$$
$$98x - 199 \cdot (31 + 98t) = 5$$
$$98x - 6\,169 - 19\,502t = 5 \quad \big| + 6\,169 + 19\,502t$$
$$98x = 6\,174 + 19\,502t \quad \big| : 98$$
$$\underline{x = 63 + 199t}\,.$$

Nyní volíme celé t a hledáme odpovídající řešení x, y.

t:	**x:**	**y:**
0	63	31
1	262	129

. . . . . není řešení, protože $x \geq 100$ (toto platí pro každé další x). Jediným řešením je dvojice $x = 63$ haléřů, $y = 31$ korun.

Zkouška:
Pokladník měl vyplatit doplatek 31 Kč 63 haléřů. Po záměně korun a haléřů má vyplatit 63 korun 31 haléřů. Ubereme-li 5 haléřů, částka činí 63 korun 26 haléřů a její polovina je 31 korun 63 haléřů.

Odpověď:
Doplatek byl 31 Kč 63 haléřů.

Příklad 1.7.7:
Je možné naplnit jedním hektolitrem oleje 15 nádob o objemu 5, 6, 8 litrů?

Řešení:
Počet pětilitrových nádob označme x, počet šestilitrových y, osmilitrových z, potom platí

$$x + y + z = 15 \quad \rightarrow \quad z = 15 - x - y$$

$$\underline{5x + 6y + 8z = 100}$$
$$5x + 6y + 120 - 8x - 8y = 100$$
$$-3x - 2y = -20 \quad \Big| \cdot (-1)$$

a dostáváme lineární diofantovskou rovnici

$$3x + 2y = 20.$$

$$2y \equiv 20 \bmod 3 \quad \Big| : 2$$
$$y \equiv 10 \bmod 3 \quad \rightarrow \quad \underline{y = 10 + 3t}$$
$$3x + 20 + 6t = 20 \quad \Big| - 20 - 6t$$
$$3x = -6t \quad \Big| : 3$$
$$\underline{x = -2t}$$
$$-2t + 10 + 3t + z = 15 \quad \Big| - 10 - t$$
$$\underline{z = 5 - t}\,.$$

Hodnoty x, y, z dostaneme dosazením celých čísel za t:

t:	x:	y:	z:	
0	0	10	5	
– 1	2	7	6	
– 2	4	4	7	
– 3	6	1	8	
– 4	8	– 2	9	. . . . . není řešení, protože $y < 0$.

Připustíme-li, že některý typ konví nemusíme využít (zadání úlohy nepožaduje využití všech typů), máme potom 4 řešení (při požadavku využití všech typů, by byla 3 řešení). Jsou to tyto možnosti:

a) žádná pětilitrová, 10 šestilitrových, 5 osmilitrových;
b) 2 pětilitrové, 7 šestilitrových, 6 osmilitrových;
c) 4 pětilitrové, 4 šestilitrové, 7 osmilitrových;
d) 6 pětilitrových, 1 šestilitrová, 8 osmilitrových.

Zkouška:

Ve všech případech je zřejmé, že počet nádob je 15, ověříme pouze objem.

a) $10 \cdot 6 + 5 \cdot 8 = 100\ l = 1\ hl$;
b) $2 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot 8 = 100\ l = 1\ hl$;
c) $4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 7 \cdot 8 = 100\ l = 1\ hl$;
d) $6 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 8 \cdot 8 = 100\ l = 1\ hl$.

Odpověď:

Hektolitrem oleje můžeme naplnit 15 určených nádob čtyřmi způsoby:

a) žádnou pětilitrovou, 10 šestilitrových, 5 osmilitrových;
b) 2 pětilitrové, 7 šestilitrových, 6 osmilitrových;
c) 4 pětilitrové, 4 šestilitrové, 7 osmilitrových;
d) 6 pětilitrových, 1 šestilitrová, 8 osmilitrových.

Příklad 1.7.8:

Sněmovna cizího státu má 253 poslance, kteří náležejí třem stranám: vládní, neutrální a oposici. Vládní strana je největší, ale nemá absolutní většinu: k jejímu dosažení potřebuje právě 28% hlasů strany neutrální. Obě neoposiční strany mají dohromady víc než dvoutřetinovou většinu. Kolik poslanců mají jednotlivé strany?

Řešení:

Označme si počet poslanců vládní strany v, počet poslanců neutrální strany n, počet poslanců oposiční strany o. Vyjádříme-li údaje v zadání pomocí matematických vztahů, platí $v > n$,

$v > o$, $v + n > 169$ a také

$$v + 0{,}28n = 127.$$

Tuto rovnici upravíme vynásobením 25 na tvar

$$25v + 7n = 3175.$$

Dostáváme lineární diofantovskou rovnici, kterou vyřešíme pomocí kongruence

$$7n \equiv 3\,175 \bmod 75 \quad \big| -3\,175$$
$$7n \equiv 0 \bmod 75 \quad \big| : 7$$
$$n \equiv 0 \bmod 75 \quad \rightarrow \quad \underline{n = 75t}\,,$$

a dosazením do původní rovnice dostaneme v:

$$25v + 7 \cdot 75t = 3175 \quad \big| - 525t$$
$$25v = 3175 - 525t \quad \big| : 25$$
$$\underline{v = 127 - 21t}\,.$$

Hodnoty v, n dostaneme dosazením celých čísel za t, o dopočítáme ($o = 253 - v - n$):

***t*:**	***v*:**	***n*:**	***o*:**	
1	106	75	72	
2	85	150	18	. . . . . toto již není řešení, protože

poslanci vládní strany nemají většinu. Proto je jediné řešení.

Zkouška:

Ověření podmínek:

1) $106 > 75 \Rightarrow v > n$,
2) $106 > 72 \Rightarrow v > o$,
3) $106 + 75 = 181 > 169 \Rightarrow v + n > 169$;
4) 28% poslanců neutrální strany je $0{,}28 \cdot 75 = 21$, s poslanci vládní strany je jich $106 + 21 = 127$, což je absolutní většina.

Odpověď:

Poslanců vládní strany je 106, neutrální strany 75 a opoziční strany 72.

Příklad 1.7.9:

Sto měřic pšenice rozdělte stu lidí tak, aby každý muž získal tři, každá žena dvě a každé dítě půl měřice. Kolik je mužů, kolik žen a kolik dětí? (*Počty mužů, žen i dětí jsou nenulové.*)

Řešení:

Označme si počet mužů x, počet žen y, počet dětí z. Potom dostáváme:

$$x + y + z = 100 \quad \big| \cdot (-1)$$
$$\underline{3x + 2y + \tfrac{1}{2}z = 100} \quad \big| \cdot 2$$
$$5x + 3y = 100$$

a dostáváme diofantovskou rovnici, kterou budeme řešit pomocí kongruencí.

$$5x \equiv 100 \bmod 3 \quad \big| - 90$$
$$5x \equiv 10 \bmod 3 \quad \big| : 5$$
$$x \equiv 2 \bmod 3 \quad \rightarrow \quad x = \underline{2 + 3t}$$
$$5 \cdot (2 + 3t) + 3y = 100 \quad \big| - 10 - 15t$$
$$3y = 90 - 15t \quad \big| : 3$$
$$\underline{y = 30 - 5t}$$

Dostáváme řešení:

***t*:**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	6
x = 2 + 3*t* **:**	**2**	**5**	**8**	**11**	**14**	**17**	20
y = 30 – 5*t* **:**	**30**	**25**	**20**	**15**	**10**	**5**	0
z = 100 – *x* – *y* **:**	**68**	**70**	**72**	**74**	**76**	**78**	80

Úloha má šest řešení, sedmý výsledek pro $t = 6$ nepovažujeme za řešení, protože $y = 0$ (počet žen by byl roven nule).

Zkouška:

Provedeme pouze pro první řešení, tj. $x = 2$, $y = 30$, $z = 68$.

2 muži dostanou $2 \cdot 3 = 6$ měřic, 30 žen dostane $30 \cdot 2 = 60$ měřic, 68 dětí dostane $68 \cdot \frac{1}{2} = 34$, celkem $6 + 60 + 34 = 100$ měřic.

Stejně provedeme další zkoušky.

Odpověď:

Počet mužů, žen a dětí je [2; 30; 68] nebo [5; 25; 70] nebo [8; 20; 72] nebo [11; 15; 74] nebo [17; 5; 78] (v tomto pořadí).

Příklad 1.7.10: (*Koupě známek*)

Máme 1 rubl a naším úkolem je koupit 40 známek – jednokopějkových, čtyřkopějkových a dvanáctikopějkových. Kolik bude známek jednotlivých hodnot, máme-li za ně utratit celý rubl? (*Od každé hodnoty opět koupíme alespoň jednu známku.*)

Řešení:

Označme počet jednokopějkových známek x, čtyřkopějkových známek y a dvanáctikopějkových známek z, potom

$$\begin{aligned} x + 4y + 12z &= 100 \\ \underline{x + y + z = 40} &\quad \Big| \cdot (-1) \\ 3y + 11z &= 60 \end{aligned}$$

a dostáváme lineární diofantovskou rovnici, kterou vyřešíme pomocí kongruencí:

$$\begin{aligned} 11z &\equiv 60 \mod 3 \quad \Big| -3 \cdot k \\ 2z &\equiv 0 \mod 3 \quad \Big| : 2 \\ z &\equiv 0 \mod 3 \quad \to \quad \underline{z = 3t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3y + 33t &= 60 \quad \Big| -33t \\ 3y &= 60 - 33t \quad \Big| : 3 \\ \underline{y} &\underline{= 20 - 11t} \end{aligned}$$

$$x = 40 - y - z \quad \to \quad x = 40 - 20 + 11t - 3t$$

$$\underline{x = 20 + 8t}\,.$$

Nyní volíme t a hledáme x, y, z:

t:	0	1	2
x:	20	28	36
y:	20	9	– 2
z:	0	3	6

řešením je pouze trojice $x = 28$, $y = 9$, $z = 3$.

Zkouška:

Počet známek: $28 + 9 + 3 = 40$ ks. Cena: $28 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 3 \cdot 12 = 100$ kopějek = 1 rubl.

Odpověď:

Za 1 rubl bude 28 jednokopějkových známek, 9 čtyřkopějkových známek a 3 dvanáctikopějkové známky.

Příklad 1.7.11:

Po otci zůstalo dědictví 34 000 zl., o něž se mají pozůstalí rozdělit tak, aby každý syn obdržel 7 500 zl., každá dcera 9 500 zl. Kolik bylo synů a kolik bylo dcer?

Řešení:
Označme si počet synů x a počet dcer y, potom platí

$$7\,500x + 9\,500y = 34\,000 \quad \Big| : 500$$
$$15x + 19y = 68.$$

Tuto diofantovskou rovnici vyřešíme pomocí kongruencí:

$$19y \equiv 68 \bmod 15 \quad \Big| - 30$$
$$19y \equiv 38 \bmod 15 \quad \Big| : 19$$
$$y \equiv 2 \bmod 15 \quad \rightarrow \quad \underline{y = 2 + 15t}$$
$$15x + 38 + 285t = 68 \quad \Big| - 38 - 285t$$
$$15x = 30 - 285t$$
$$\underline{x = 2 - 19t}\,.$$

Nyní volíme t a hledáme x, y:

t:	0	1
x:	2	– 17
y:	2	17

a řešením je dvojice $x = 2$, $y = 2$.
Zkouška:
Dědictví je $2 \cdot 7\,500 + 2 \cdot 9\,500 = 34\,000$ zl.
Odpověď:
O dědictví se podělili 2 synové a 2 dcery.

Příklad 1.7.12:
Knihkupec prodal za 77 zl. 50 výtisků nově vydaných tří druhů spisů. Výtisk prvního stál 2,5 zl., druhého 1,8 zl. a třetího 1 zl. Kolik kusů každého spisu prodal? (*Opět od každého druhu prodal alespoň jeden kus.*)

Řešení:
Označme si x počet výtisků za 2,5 zl., y počet výtisků za 1,8 zl., z počet výtisků za 1 zl. Pak dostáváme

$$x + y + z = 50 \quad \Big| \cdot (-10)$$
$$\underline{2{,}5x + 1{,}8y + z = 77} \quad \Big| \cdot 10$$
$$-10x - 10y - 10z = -500$$
$$\underline{25x + 18y + 10z = 770}$$
$$15x + 8y = 270\,.$$

Tuto diofantovskou rovnici vyřešíme pomocí kongruencí:

$$15x \equiv 270 \bmod 8 \quad \Big| : 15$$
$$x \equiv 18 \bmod 8 \quad \Big| - 16$$
$$x \equiv 2 \bmod 8 \quad \rightarrow \quad \underline{x = 2 + 8t}$$
$$30 + 120t + 8y = 270 \quad \Big| - 30 - 120t$$
$$8y = 240 - 120t \quad \Big| : 8$$
$$\underline{y = 30 - 15t}$$
$$z = 50 - x - y$$
$$z = 50 - 2 - 8t - 30 + 15t \quad \rightarrow \quad \underline{z = 18 + 7t}\,.$$

Dosadíme za t a vypočteme x, y, z:

t:	0	1	2
x:	2	10	18
y:	30	15	0
z:	18	25	32

a řešením jsou trojice [2; 30; 18] a [10; 15; 25].

Zkouška:

1) pro trojici $x = 2, y = 30, z = 18$.
   Počet výtisků je $2 + 30 + 18 = 50$ ks.
   Cena je $2 \cdot 2{,}5 + 30 \cdot 1{,}8 + 18 \cdot 1 = 77$ zl.
2) pro trojici $x = 10, y = 15, z = 25$.
   Počet výtisků je $10 + 15 + 25 = 50$ ks.
   Cena je $10 \cdot 2{,}5 + 15 \cdot 1{,}8 + 25 \cdot 1 = 77$ zl.

Odpověď:

Knihkupec prodal 2 výtisky po 2,5 zl., 30 výtisků po 1,8 zl. a 18 výtisků po 1 zl. nebo 10 výtisků po 2,5 zl., 15 výtisků po 1,8 zl. a 25 výtisků po 1 zl.

Příklad 1.7.13:

Selka nesla do města na trh v koši 20 vajec, velká husí po 3 groších, střední kachní po 2 groších a malá slepičí po půl groši. Kolik bylo kterých, prodala-li je za 20 grošů? (*Selka prodala od každého druhu alespoň jedno vejce.*)

Řešení:

Označme si x počet husích vajec za 3 groše, y počet kachních vajec za 2 groše, z počet vajec za půl groše. Pak dostáváme

$$\begin{array}{rl} x + y + z = 20 & \big| \cdot (-1) \\ \underline{3x + 2y + 0{,}5z = 20} & \big| \cdot 2 \\ 5x + 3y = 20 & \end{array}$$

a tuto diofantskou rovnici vyřešíme pomocí kongruencí:

$$5x \equiv 20 \bmod 3 \quad \big| : 5$$
$$x \equiv 4 \bmod 3 \quad \big| -3$$
$$x \equiv 1 \bmod 3 \quad \rightarrow \quad \underline{x = 1 + 3t}$$
$$5 + 15t + 3y = 20 \quad \big| -5 - 15t$$
$$3y = 15 - 15t \quad \big| : 3$$
$$\underline{y = 5 - 5t}$$
$$z = 20 - x - y$$
$$z = 20 - 1 - 3t - 5 + 5t$$
$$\underline{z = 14 + 2t\,.}$$

Dosadíme za t a vypočteme x, y, z:

***t*:**	0	1
***x*:**	1	4
***y*:**	5	0
***z*:**	14	16

a řešením je trojice $x = 1, y = 5, z = 14$.

Zkouška:

Počet vajec je $1 + 5 + 14 = 20$ ks.

Cena vajec je $1 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 14 \cdot 0{,}5 = 20$ grošů.

Odpověď:

Selka nesla v koši 1 husí vejce, 5 vajec kachních a 14 vajec slepičích.

Příklad 1.7.14:
Ve společnosti dvaceti osob sebralo se na chudé 20 zl. Mužové přispěli po 2 zl., ženy po 1 zl. a děti po $\frac{1}{4}$ zl. Kolik mužů, žen a dětí bylo v této společnosti? (*Předpokládáme, že každý přispěl.*)

Řešení:
Počet mužů označme x, počet žen y, počet dětí z, potom platí

$$\begin{array}{rl} x + y + z = 20 & \Big|\cdot(-1) \\ \underline{2x + y + 0{,}25z = 20} & \Big|\cdot 4 \\ 7x + 3y = 60 & \end{array}$$

a tuto diofantskou rovnici vyřešíme pomocí kongruencí:

$$7x \equiv 60 \bmod 3 \quad \Big| -3\cdot k$$

$$x \equiv 0 \bmod 3 \quad \rightarrow \quad \underline{x = 3t}$$

$$\begin{array}{rl} 21t + 3y = 60 & \Big| -21t \\ 3y = 60 - 21t & \Big| : 3 \\ \underline{y = 20 - 7t} & \end{array}$$

$$z = 20 - x - y$$

$$z = 20 - 3t - 20 + 7t$$

$$\underline{z = 4t}\,.$$

Dosadíme za t a vypočteme x, y, z:

***t*:**	0	1	2	3
***x*:**	0	3	6	9
***y*:**	20	13	6	– 1
***z*:**	0	4	8	12

a řešením jsou trojice [3; 13; 4] a [6; 8; 8].

Zkouška:
1) Počet osob je $3 + 13 + 4 = 20$.
   Vybraná částka je $3\cdot 2 + 13\cdot 1 + 4\cdot \frac{1}{4} = 20$ zl.
2) Počet osob je $6 + 6 + 8 = 20$.
   Vybraná částka je $6\cdot 2 + 6\cdot 1 + 8\cdot \frac{1}{4} = 20$ zl.

Odpověď:
Ve společnosti byli 3 muži, 13 žen a 4 děti nebo 6 mužů, 6 žen a 8 dětí.

Příklad 1.7.15:
Hostinský koupil na trhu zvěřinu trojího druhu a to: zajíce, bažanty a koroptve, celkem 50 kusů a platil za všechno 35 zl. Zajíce platil po 1 zl., bažanty po 2 zl. a dvě koroptve po 75 kr. Kolik nakoupil zajíců, bažantů a koroptví? (*Předpokládáme, že hostinský koupil od každého druhu alespoň jeden kus.*)

Řešení:
Počet zajíců označme x, počet bažantů y, počet koroptví z, potom platí

$$\begin{array}{rl} x + y + z = 50 & \Big|\cdot(-3) \\ \underline{x + 2y + \frac{3}{8}z = 35} & \Big|\cdot 8 \\ 5x + 13y = 130 & \end{array}$$

a tuto diofantskou rovnici vyřešíme pomocí kongruencí:

$$13y \equiv 130 \bmod 5 \quad \Big| : 13$$

$y \equiv 10 \mod 5 \quad | -10$

$y \equiv 0 \mod 5 \quad \rightarrow \quad \underline{y = 5t}$

$5x + 65t = 130 \quad | -65t$

$5x = 130 - 65t \quad | : 5$

$\underline{x = 26 - 13t}$

$z = 50 - x - y$

$z = 50 - 26 + 13t - 5t$

$\underline{z = 24 + 8t}$.

Dosadíme za t a vypočteme x, y, z:

t:	0	1	2
x:	26	13	0
y:	0	5	10
z:	24	32	40

a řešením je trojice $x = 13$, $y = 5$, $z = 32$.

Zkouška:

Počet kusů zvěřiny: 13 + 5 + 32 = 50 ks.

Cena za zvěřinu $13 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 32 \cdot \frac{3}{8} = 35$ zl.

Odpověď:

Hostinský koupil 13 zajíců, 5 bažantů a 32 koroptví.

Příklad 1.7.16:

Při střelbě do terče jsou rány hodnoceny takto: rána do nejmenšího kruhu odmění se 10 zl., rána do největšího kruhu odmění se 6 zl., rána mimo kruh trestá se pokutou 15 zl. Kolik jakých ran dal střelec, vystřelil-li 20-krát a vyhrál 7 zl.?

Řešení:

Počet ran do nejmenšího terče označíme x, počet ran do největšího terče y, počet ran mimo terč z, potom dostáváme:

$x + y + z = 20 \quad | \cdot 15$

$\underline{10x + 6y - 15z = 7}$

$25x + 21y = 307$

a tuto diofantskou rovnici vyřešíme pomocí kongruencí:

$25x \equiv 307 \mod 21 \quad | -21 \cdot k$

$4x \equiv -8 \mod 21 \quad | : 4$

$x \equiv -2 \mod 21 \quad \rightarrow \quad x = -2 + 21t$

$-50 + 525t + 21y = 307 \quad | +50 - 525t$

$21y = 357 - 525t \quad | : 21$

$\underline{y = 17 - 25t}$

$z = 20 - x - y$

$z = 20 + 2 - 21t - 17 + 25t$

$\underline{z = 5 + 4t}$.

Dosadíme za t a vypočteme x, y, z:

t:	0	1	2
x:	– 2	19	40
y:	17	– 8	– 33
z:	5	9	13

Z tabuky je jasné, že úloha nemá řešení.

Příklad 1.7.17: (*Historická úloha*)
Dvanáct lidí nese dvanáct chlebů. Každý muž nese dva chleby, každá žena polovinu chleba a každé dítě čtvrtinu chleba. Kolik bylo mužů, žen a dětí?

Řešení:
Označme si počet mužů x, počet žen y, počet dětí z. Provedeme-li matematizaci reálné situace, dostáváme:

$$x + y + z = 12$$
$$2x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}z = 12 \quad \Big| \cdot 4$$
$$7x + y = 36$$
$$y = 36 - 7x$$
$$x = t,\ y = 36 - 7t,\ \rightarrow \quad t + 36 - 7t + z = 12$$
$$z = -24t + 6t.$$

Nyní si výsledné hodnoty zapišme do tabulky:

***t*:**	0	1	2	3	4	5	6	. . .
***x*:**	0	1	29	3	4	5	6	. . .
***y*:**	36	29	22	15	8	1	– 6	. . .
***z*:**	– 24	– 18	– 12	– 6	0	6	12	. . .

Z tabulky je jasné, že existuje jediné řešení: 5 mužů, 1 žena, 6 dětí. Připustíme-li, že některá skupina nebude zastoupena, dostáváme ještě jedno řešení: 4 muži, 8 žen.
Zkouška:
Celkový počet: 5 + 1 + 6 = 12. Počet chlebů: $5 \cdot 2 + 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 6 \cdot \tfrac{1}{4} = 12$.
Odpověď:
Bylo 5 mužů, 1 žena, 6 dětí.

Příklad 1.7.18:
Petr dluží Pavlovi 17 Kč. Petr má jen pětikorunové, Pavel jen dvoukorunové mince. Jak se vyrovnají?

Řešení:
Označme si počet pětikorunových (Petrových) mincí x, počet dvoukorunových (Pavlových) mincí y, potom můžeme zapsat

$$5x - 2y = 17,$$

z toho plyne

$$y = \frac{5x - 17}{2}.$$

Z výsledku je zřejmé, že x musí být liché číslo. Položme $x = 1 + 2t$, $t \in Z$, potom dostáváme

$$y = \frac{5 \cdot (1 + 2t) - 17}{2} \quad \rightarrow \quad y = -6 + 5t.$$

Nyní volíme t a počítáme x, y a výsledky zapíšeme do tabulky:

***t*:**	0	1	2	3	4	5	6	. . .
***x*:**	1	3	5	7	9	11	13	. . .
***y*:**	– 6	– 1	4	9	14	19	24	. . .

Úloha má nekonečně mnoho řešení. Chceme-li, aby Petr a Pavel použili co nejmenší počet mincí, je potom řešení jedno: Petr zaplatí pěti pětikorunami a Pavel mu vrátí čtyři dvoukoruny.

Zkouška:
Provedeme ji pro nejmenší čísla, pro další čísla by se zkouška dělala stejně. Petr zaplatí pěti pětikorunami, tj. $5 \cdot 5 = 25$ Kč. Pavel vrátí čtyři dvoukoruny, tj. $4 \cdot 2 = 8$ Kč a obdrží tak $25 - 8 = 17$ Kč, což je velikost dluhu.
Odpověď:
Petr zaplatí dluh pěti pětikorunami, Pavel mu vrátí čtyři dvoukoruny. V případě, že nechtějí použít nejmenší počet mincí, použijí jiný způsob placení uvedený v tabulce (možností je nekonečně mnoho).

1.8. Skupina 8: *„Neúplné složité určení“*

Známe celkový počet prvků skupiny a neúplné údaje pro jejich počet. Určujeme počty jednotlivých prvků. Modelem je soustava m rovnic o n neznámých ($m < n$)*, která vede na diofantovskou rovnici, v tomto případě je to lineární diofantovská rovnice o třech a více neznámých nebo diofantovská rovnice vyššího stupně.*

Příklad 1.8.1: = ***Příklad*** **0.2.3:** - »rozšíření počtu řešení«
Bylo vystřeleno několik ran do terče s třemi soustřednými kruhy, označenými čísly 8, 12, 20. Každá rána byla zásahem a celkový počet bodů byl 168. Ve středním kruhu bylo tolik zásahů jako v obou ostatních dohromady. Kolik bylo zásahů v jednotlivých kruzích?

Řešení č. 1:
Při analýze úlohy zjistíme, že máme určit počty zásahů v jednotlivých kruzích. Ty postupně označíme: x – počet zásahů č. 8, y – počet zásahů č. 12, z – počet zásahů č. 20; x, y, z jsou přirozená čísla.
Z toho plyne rovnice

$$8x + 12y + 20z = 168.$$

Protože zásahů č. 12 je stejně jako ostatních, dostáváme druhou rovnici

$$y = x + z.$$

Úloha vede k řešení soustavy diofantovských rovnic:

$$\begin{aligned} 8x + 12y + 20z &= 168 \\ y &= x + z. \end{aligned}$$

Po vyloučení y a úpravě dospějeme k diofantovské rovnici

$$5x + 8z = 42, \text{ z toho } z = \frac{42-5x}{8};$$

$42 - 5x$ musí být násobkem osmi a také $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, neboť z je kladné. Potom jedinou možnou hodnotou $x = 2$ (pro jiné hodnoty x není z přirozené číslo) a $z = 4$.
Proto $x = 2$, $y = 6$, $z = 4$.
Zkoušku provedeme dosazením vypočtených hodnot do textu:

č. 8 …… 2-krát ….. celkem 16,
č. 12 ….. 6-krát ….. celkem 72,
č. 20 ….. 4-krát ….. celkem 80,

celkem všech bodů: 16 + 72 + 80 = 168 a ve středovém kruhu je stejně zásahů (6) jako v ostatních (také 6).
Odpověď:
V kruhu č. 8 byly 2 zásahy, v kruhu č. 12 bylo 6 zásahů, v kruhu č. 20 byly 4 zásahy.

Řešení č. 2:
Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty zásahů v jednotlivých kruzích a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$$5x + 8z = 42.$$

Nyní řešíme rovnici $5x + 8z = 1$. Řešení určíme rozvojem čísla $\frac{8}{5}$ v řetězový zlomek.

Rozvoj čísla $\frac{8}{5}$ získáme pomocí Eukleidova algoritmu:

$$8 = 1 \cdot 5 + 3$$
$$5 = 1 \cdot 3 + 2$$

$3 = 1 \cdot 2 + 1$
$2 = 2 \cdot 1 + 0.$

Hledaný řetězový zlomek je $\dfrac{8}{5} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$

a sblížené zlomky jsou:

$1;\ 1 + \dfrac{1}{1} = 2;\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \dfrac{3}{2};\ \dfrac{8}{5}.$

Předposlední sblížený zlomek má čitatele $2 = \pm v$ a jmenovatele $3 = \pm u$. Je nutno volit $u = -3$, $v = 2$, neboť

$5 \cdot (-3) + 8 \cdot 2 = 1.$

Řešení je potom následující:

$x = cu + bt = 42 \cdot (-3) + 8t = -126 + 8t,$
$z = cv - at = 42 \cdot 2 - 5t = 84 - 5t.$

Nyní pro jednotlivé hodnoty t hledáme přípustné hodnoty x, y, z:

......
$t = 15 \rightarrow x = -6, y = 3, z = 9,$
$t = 16 \rightarrow x = 2, y = 6, z = 4,$
$t = 17 \rightarrow x = 10, y = 9, z = -1,$
......

Protože hledáme řešení z oboru přirozených čísel, jediným řešením je $x = 2, y = 6, z = 4$.

Řešení č. 3:

Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty zásahů v jednotlivých kruzích a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$5x + 8z = 42.$

Tuto rovnici řešíme pomocí kongruencí:

$5x \equiv 42 \bmod 8 \quad | -32$
$5x \equiv 10 \bmod 8 \quad | : 5$
$x \equiv 2 \bmod 8$

z toho plyne pro x: $\underline{x = 2 + 8t}$ $\rightarrow$ $5 \cdot (2 + 8t) + 8z = 42$
$10 + 40t + 8z = 42 \quad | -10 - 40t$
$8z = 32 - 40t \quad | : 8$
$\underline{z = 4 - 5t}$

Nyní pro jednotlivé hodnoty t hledáme přípustné hodnoty x, y, z:

......
$t = -1 \rightarrow x = -6, y = 3, z = 9,$
$t = 0 \rightarrow x = 2, y = 6, z = 4,$
$t = 1 \rightarrow x = 10, y = 9, z = -1,$
......

Protože hledáme řešení z oboru přirozených čísel, jediným řešením je $x = 2, y = 6, z = 4$.

Řešení č. 4:

Stejně jako v předchozím řešení označíme neznámé x, y, z po řadě počty zásahů v jednotlivých kruzích a sestavíme soustavu rovnic, kterou upravíme na rovnici

$5x + 8z = 42.$

Tuto rovnici řešíme pomocí partikulárního řešení:
Partikulární řešení $[x_0; y_0]$ nalezneme tak, že do rovnice jednu neznámou dosadíme a druhou vypočteme, nalezené řešení musí být celočíselné. Např. zvolíme $x_0 = 10$, potom vypočteme $z_0 = -1$ a řešení je: $x = 10 + 8k$, $z = -1 - 5k$.
Pro $k = -1$ dostáváme výsledné řešení $x = 2, y = 6, z = 4$.

Poznámky:
1) V řešení č. 2, 3, 6 jsou zkouška a odpověď stejné jako v řešení č. 1, proto je neuvádím.
2) Řešení pomocí vzorců a Bachetovy metody v tomto příkladě není možné, protože není splněna ani jedna z podmínek ($a+b \equiv 1 \mod a$; $a+b \equiv 1 \mod b$; $a \mid c$; $b \mid c$).

Příklad 1.8.2:
Dvojího vína, míru lepšího za osm, míru horšího za pět drachem, smísil chytrý pán. Co za oba druhy zaplatil, bylo čtvercové číslo. Přidej k tomuto čtverci dané číslo 60, pak získáš jiný čtverec a jeho strana ti řekne množství vína, které všechno smíchal. Nyní mi, chlapče, urči, kolik bylo smíšeno vína lepšího a kolik horšího druhu.

Řešení:
Označme míru lepšího vína . . . . . m [drachem],
míru horšího vína . . . . n [drachem],
množství lepšího vína . . . . x,
množství horšího vína . . . . y,
číslo přidané ke čtverci . . . . a,
první čtvercové číslo . . . . z,
potom druhé čtvercové číslo je . . $x + y$,
a reálná situace je popsána touto soustavou rovnic:
$$mx + ny = z^2$$
$$z^2 + a = (x + y)^2.$$
V našem případě je $m = 8$, $n = 5$, $a = 60$ a dostáváme soustavu
$$8x + 5y = z^2$$
$$z^2 + 60 = (x + y)^2. \qquad \textbf{(1-3)}$$
Z první rovnice dosadíme do druhé a dostáváme kvadratickou diofantovskou rovnici
$$8x + 5y = (x + y)^2.$$
Zavedeme substituci $u = x + y$, potom $y = u - x$ a dostáváme
$$8x + 5(u - x) + 60 = u^2$$
$$8x + 5u - 5x + 60 = u^2$$
$$3x + 5u + 60 = u^2 \quad \Big| -5u - 60$$
$$u^2 - 5u - 60 = 3x \qquad \textbf{(1-3a)}$$
Kvadratickou diofantovskou rovnici (1-3) budeme řešit pomocí kongruence. Platí
$$u^2 - 5u - 60 \equiv 0 \pmod 3$$
Za u budeme postupně dosazovat 0, 1, 2 a budeme zkoumat, zda platí daná kongruence:
$u = 0$, potom $-60 \equiv 0 \pmod 3$;
$u = 1$, potom $-64 \not\equiv 0 \pmod 3$;
$u = 2$, potom $-66 \equiv 0 \pmod 3$.
Máme tedy dvě hodnoty u, které jsou řešením dané kongruence.
1) $u = 0 + 3t \quad \rightarrow \quad u = 3t$ a dosadíme za u do rovnice (1-3).
$$(3t)^2 - 5 \cdot 3t = 3x + 60 \quad \Big| -60$$
$$9t^2 - 15t - 60 = 3x \quad \Big| : 3$$

$\underline{x = 3t^2 – 5t – 20}$

$\underline{y} = 3t – (3t^2 – 5t – 20) = \underline{20 + 8t – 3t^2}$

Nyní dosadíme do soustavy (3-1). Z první rovnice dostáváme:

$8 \cdot (3t^2 – 5t – 20) + 5 \cdot (20 + 8t – 3t^2) = z^2$

$24t^2 – 40t – 160 + 100 + 40t – 15t^2 = z^2$

$9t^2 – 60 = z^2.$

Z druhé rovnice dostáváme:

$z^2 + 60 = (3t^2 – 5t – 20 + 20 + 8t – 3t^2)^2$

$z^2 + 60 = (3t)^2 \quad | – 60$

$z^2 = 9t^2 – 60$;

tedy stejný výsledek jako z první rovnice (je to vlastně kontrola správnosti).

Z poslední kvadratické diofantovské rovnice $z^2 = 9t^2 – 60$ určíme hodnotu t a následně hledané hodnoty x, y.

$9t^2 – z^2 = 60$

$(3t – z)(3t + z) = 60;$

kde $60 = 1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15 = 5 \cdot 12 = 6 \cdot 10.$

Z toho plyne:

a) $3t – z = 1$

$\underline{3t + z = 60}$

$6t = 61 \quad \rightarrow \quad \underline{t = \frac{61}{6}}.$

b) $3t – z = 2$

$\underline{3t + z = 30}$

$6t = 32 \quad \rightarrow \quad \underline{t = \frac{16}{3}}.$

c) $3t – z = 3$

$\underline{3t + z = 20}$

$6t = 23 \quad \rightarrow \quad \underline{t = \frac{23}{6}}.$

d) $3t – z = 4$

$\underline{3t + z = 15}$

$6t = 19 \quad \rightarrow \quad \underline{t = \frac{19}{6}}.$

e) $3t – z = 5$

$\underline{3t + z = 12}$

$6t = 17 \quad \rightarrow \quad \underline{t = \frac{17}{6}}.$

f) $3t – z = 6$

$\underline{3t + z = 10}$

$6t = 16 \quad \rightarrow \quad \underline{t = \frac{8}{3}}.$

Hodnoty t a následné hodnoty x, y, $x = 3t^2 – 5t – 20$, $y = 20 + 8t – 3t^2$ zapíšeme do tabulky.

Tab. 1-1:

t	$\frac{61}{6}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{23}{6}$	$\frac{19}{6}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{8}{3}$
x	$\frac{2871}{12}$	$\frac{116}{3}$	$\frac{59}{12}$	$-\frac{69}{12}$	$-\frac{121}{12}$	– 12
y	$-\frac{2505}{12}$	$-\frac{68}{3}$	$\frac{79}{12}$	$\frac{61}{6}$	$\frac{223}{12}$	20

2) $u = 2 + 3t$ a dosadíme za u do rovnice (1-3a).

$(2 + 3t)^2 – 5 \cdot (2 + 3t) = 3x + 60 \quad | – 60$

$4 + 12t + 9t^2 - 10 - 15t - 60 = 3x$

$$3x = 9t^2 - 3t - 66 \quad | : 3$$

$$\underline{x = 3t^2 - t - 22}$$

$y = 2 + 3t - (3t^2 - t - 22) = \underline{24 + 4t - 3t^2}$

Nyní dosadíme do soustavy (3-1). Z první rovnice dostáváme:

$8 \cdot (3t^2 - t - 22) + 5 \cdot (24 + 4t - 3t^2) = z^2$

$24t^2 - 8t - 176 + 120 + 20t - 15t^2 = z^2$

$$9t^2 + 12t - 56 = z^2.$$

Z druhé rovnice dostáváme:

$z^2 + 60 = (3t^2 - t - 22 + 24 + 4t - 3t^2)^2$

$z^2 + 60 = (3t + 2)^2 \quad | - 60$

$z^2 = (3t + 2)^2 - 60$

$z^2 = 9t^2 + 12t - 56$;

tedy stejný výsledek jako z první rovnice (je to opět kontrola správnosti).

Z kvadratické diofantovské rovnice $z^2 = (3t + 2)^2 - 60$ určíme hodnotu t a následně hledané hodnoty x, y.

$$(3t + 2)^2 - z^2 = 60$$

$(3t + 2 - z)(3t + 2 + z) = 60;$

kde $60 = 1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15 = 5 \cdot 12 = 6 \cdot 10$.

Z toho plyne:

a) $3t + 2 - z = 1$
$\underline{3t + 2 + z = 60}$
$6t + 4 = 61 \quad \rightarrow \quad 6t = 57 \quad \rightarrow \quad \underline{t = \frac{57}{6}}$.

b) $3t + 2 - z = 2$
$\underline{3t + 2 + z = 30}$
$6t + 4 = 32 \quad \rightarrow \quad 6t = 28 \quad \rightarrow \quad \underline{t = \frac{14}{3}}$.

c) $3t + 2 - z = 3$
$\underline{3t + 2 + z = 20}$
$6t + 4 = 23 \quad \rightarrow \quad 6t = 19 \quad \rightarrow \quad \underline{t = \frac{19}{6}}$.

d) $3t + 2 - z = 4$
$\underline{3t + 2 + z = 15}$
$6t + 4 = 19 \quad \rightarrow \quad 6t = 15 \quad \rightarrow \quad \underline{t = \frac{15}{6}}$.

e) $3t + 2 - z = 5$
$\underline{3t + 2 + z = 12}$
$6t + 4 = 17 \quad \rightarrow \quad 6t = 13 \quad \rightarrow \quad \underline{t = \frac{13}{6}}$.

f) $3t + 2 - z = 6$
$\underline{3t + 2 + z = 10}$
$6t + 4 = 16 \quad \rightarrow \quad 6t = 12 \quad \rightarrow \quad \underline{t = 2}$.

Hodnoty t a následné hodnoty x, y, $x = 3t^2 - 5t - 20$, $y = 20 + 8t - 3t^2$ zapíšeme do tabulky.

Tab. 1-2:

t	$\frac{57}{6}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{19}{6}$	$\frac{195}{6}$	$\frac{13}{6}$	2
x	$\frac{2871}{12}$	$\frac{116}{3}$	$\frac{59}{12}$	$-\frac{69}{12}$	$-\frac{121}{12}$	-12
y	$-\frac{2505}{12}$	$-\frac{68}{3}$	$\frac{79}{12}$	$\frac{61}{6}$	$\frac{223}{12}$	20

Z obou případů (viz tabulky) vyplývá, že existuje pouze jedno řešení x, y a to

$$\underline{\underline{x = \tfrac{59}{12}}}, \quad \underline{\underline{y = \tfrac{79}{12}}}.$$

Zkouška:
Suma, kterou zaplatil chytrý pán je
$8 \cdot \frac{59}{12} + 5 \cdot \frac{79}{12} = \frac{867}{12} = \frac{289}{4} = \left(\frac{17}{2}\right)^2$, výsledek je tedy čtverec racionálního čísla $\frac{17}{2}$.
Sečteme-li obě množství vína a umocníme na druhou, dostáváme
$\left(\frac{59}{12} + \frac{79}{12}\right)^2 = \left(\frac{138}{12}\right)^2 = \left(\frac{23}{2}\right)^2 = \frac{529}{4}$. Odečteme-li 60, dostáváme $\frac{529}{4} - 60 = \frac{289}{4} = \left(\frac{17}{2}\right)^2$.
Odpověď:
Lepšího vína bylo $\frac{59}{12}$ míry, horšího vína pak $\frac{79}{12}$ míry.

Příklad 1.8.3:
Na dvoře je 17 slepic, černé a bílé. Každá černá slepice snese za 14 dní stejný počet vajec; každá bílá snese za tuto dobu o 2 vejce méně než černá. Celkem snesou 97 vajec. Kolik je kterých slepic a kolik vajec snesou každá za 14 dní?

Řešení:
Označíme si:
x – počet vajec, které snese černá slepice za 14 dní,
y – počet vajec, které snese bílá slepice za 14 dní,
m – počet černých slepic,
n – počet bílých slepic.
Platí podmínky: $x > 0, y > 0, m > 0, n > 0, x > y$.
Ze zadání vyplývají vztahy:
a) černé slepice snesou o 2 vejce více, tj. $x - y = 2$ (1)
b) všech slepic je 17, tj. $m + n = 17$ (2)
c) celková snůška vajec je 97, tj. $mx + ny = 97$ (3)
Dostáváme tedy soustavu tří rovnic o čtyřech neznámých, čtvrtou rovnici získáme vydělením vztahu (3) vztahem (2).
A) $(mx + ny) : (m + n) = 97 : 17$
x + zbytek $(ny - nx) = 5$ + zbytek 12
$x > 0 \quad (ny - nx) < 0 \quad 5 > 0 \quad 12 > 0$
Protože zbytek na levé straně je záporný a na pravé kladný, tento výsledek vyloučíme a dále v dělení nepokračujeme.
B) $(ny + mx) : (n + m) = 97 : 17$
y + zbytek $(mx - my) = 5$ + zbytek 12
$y > 0 \quad (mx - my) > 0 \quad 5 > 0 \quad 12 > 0$
Nyní jsou oba zbytky kladné a platí jednak : $mx - my = 12$ a jednak: $y = 5$.
Do první rovnice dosadíme za $y = 5$ a vypočteme x; $x = 7$.
Potom za x a y dosadíme do třetí rovnice a s druhou rovnicí dostáváme:

$$m + n = 17$$
$$7m + 5n = 97,$$

vyřešením této soustavy dostáváme: $m = 6$; $n = 11$.
V dělení na levé straně můžeme ještě pokračovat, ale to už nám žádný další výsledek nepřinese:

$$(ny + mx) : (n + m) = 97 : 17$$
$(y + x)$ + zbytek $(-my - mx) = 5$ + zbytek 12

$y + x > 0 \quad -my - mx < 0 \qquad 5 > 0 \quad 12 > 0$

Protože zbytek na levé straně je záporný a na pravé kladný, tento výsledek vyloučíme a dále v dělení nepokračujeme.

Jediným řešením je tedy čtveřice: $x = 7, y = 5, m = 6, n = 11$.

Zkouška:

Černé slepice snesou za 14 dní 7 vajec, bílé 5, rozdíl je 7 – 5 = 2.

Počet vajec celkem je $7 \cdot 6 + 5 \cdot 11 = 97$.

Odpověď:

Černých slepic je 6 a snesou za 14 dní 7 vajec, bílých slepic je 11 a snesou za 14 dní 6 vajec.

Příklad 1.8.4:

Tři sestry přišly na trh prodávat slepice. První přinesla na trh 10 slepic, druhá 16, třetí 26. Dopoledne prodaly část slepic, všechny za stejnou cenu. Po poledni, protože se obávaly, že by neprodaly všechny slepice, snížili cenu a znovu slepice prodávaly za stejnou cenu. Domů se všechny tři vrátily se stejnou částkou peněz; každá sestra prodala slepice za 35 rublů. Za jakou cenu prodávaly slepice před polednem a za jakou po poledni?

Řešení č. 1:

Označme si a [rublů] cenu za jednu slepici prodanou dopoledne, b [rublů] cenu za jednu slepici prodanou odpoledne, $a < b$. Potom si označíme x [ks] počet slepic, které prodala první sestra dopoledne, odpoledne prodala $(10 - x)$ [ks] slepic; $x \in (0; 10)$; dále y [ks] je počet slepic, které prodala dopoledne druhá sestra, odpoledne prodala $(16 - y)$ [ks] slepic; $y \in (0; 16)$; a nakonec z [ks] je počet slepic, které prodala dopoledne třetí sestra, odpoledne prodala $(26 - x)$ [ks] slepic; $z \in (0; 26)$.

Dopoledne prodala první sestra slepice za $a \cdot x$ rublů, odpoledne za $b \cdot (10 - x)$ rublů, celkem za 35 rublů a proto platí

$$ax + b(10 - x) = 35.$$

Dopoledne prodala druhá sestra slepice za $a \cdot y$ rublů, odpoledne za $y \cdot (16 - x)$ rublů, celkem za 35 rublů a proto platí

$$ay + b(16 - y) = 35.$$

Dopoledne prodala třetí sestra slepice za $a \cdot z$ rublů, odpoledne za $b \cdot (26 - z)$ rublů, celkem za 35 rublů a proto platí

$$az + b(26 - z) = 35.$$

Celkem dostáváme tři rovnice pro pět neznámých

$$\begin{aligned} ax + b(10 - x) &= 35 \\ ay + b(16 - y) &= 35 \\ \underline{az + b(26 - z) = 35} &. \end{aligned}$$

Vyjádříme a z první rovnice, $a = \dfrac{35 - b(10 - x)}{x}$, a dosadíme do druhé třetí rovnice

$$\frac{35 - b(10 - x)}{x} \cdot y + b(16 - y) = 35 \quad \Big| \cdot x$$

$$\frac{35 - b(10 - x)}{x} \cdot z + b(26 - z) = 35 \quad \Big| \cdot x$$

$$35y - by(10 - x) + bx(16 - y) = 35x \quad \Big| - 35y$$

$$\underline{35z - bz(10 - x) + bx(26 - z) = 35x} \quad \Big| - 35z$$

$$b \cdot [x(16 - y) - y(10 - x)] = 35x - 35y$$

$$\underline{b \cdot [x(26 - z) - z(10 - x)] = 35x - 35z}$$

$$b = \frac{35x - 35y}{[x(16-y) - y(10-x)]}$$

$$b = \frac{35x - 35z}{[x(26-z) - z(10-x)]}$$

$$\frac{35x - 35y}{[x(16-y) - y(10-x)]} = \frac{35x - 35z}{[x(26-z) - z(10-x)]},$$

$$(x-y)\cdot(26x - xz - 10z - xz) = (x-z)\cdot(16x - xy - 10y - xy)$$

$$26x^2 - 10xz - 26xy + 10yz = 16x^2 - 10xy - 16xz + 10yz \quad \Big| - 16x^2 + 10xy + 16xz - 10yz$$

$$10x^2 - 16xy + 6xz = 0 \quad \Big| : 2x$$

$$5x - 8y + 3z = 0,$$

dostáváme lineární diofantovskou rovnici pro tři neznámé. Zvolíme

$$z = t,$$

potom

$$5x - 8y \equiv -3t \mod 5 \quad \Big| -5x + 10y + 5t$$

$$2y \equiv 2t \mod 5 \quad \Big| : 2$$

$$y \equiv t \mod 5 \quad \rightarrow \quad y = t + 5s$$

a nakonec

$$5x - 8\cdot(t + 5s) + 3t = 0$$

$$5x - 8t - 40s + 3t = 0 \quad \Big| + 5t + 40s$$

$$5x = 5t + 40s \quad \Big| : 5$$

$$x = t + 8s\,.$$

Obecné řešení diofantovské rovnice $5x - 8y + 3z = 0$ je $[t + 8s; t + 5s; t]$.
Nyní volíme t, s a počítáme x, y, z (je zřejmé, že $t > 0$, $s > 0$).

		***x*:**	***y*:**	***z*:**	
t = 0	***s*** = 0	0	0	0	
	s = 1	8	5	0	
	s = 2	16	10	0	. . . $x > 10$,
	. . . . .				
t = 1	***s*** = 0	1	1	1	
	s = 1	9	6	1	
	s = 2	17	11	0	. . . $x > 10$,
	. . . . .				
t = 2	***s*** = 0	2	2	2	
	s = 1	10	7	2	
	s = 2	18	12	2	. . . $x > 10$,
	. . . . .				

Hodnoty x nemohou být stejné (sestry by neutržily stejně) a předpokládáme-li, že $x < 10$, $z > 0$, potom dostáváme jediné řešení $x = 9$, $y = 6$, $z = 1$ a vypočteme ceny slepic dopoledne a odpoledne. Cena odpoledne je

$$b = \frac{35x - 35y}{[x(16-y) - y(10-x)]} = \frac{35\cdot 9 - 35\cdot 6}{9\cdot 10 - 6\cdot 1} = \frac{105}{84} = 1{,}25,$$

a cena dopoledne je

$$a = \frac{35 - b(10-x)}{x} = \frac{35 - 1{,}25\cdot 1}{9} = \frac{33{,}75}{9} = 3{,}75.$$

Zkouška:
První sestra utržila: $9\cdot 3{,}75 + 1\cdot 1{,}25 = 35$ rublů,
druhá sestra utržila: $6\cdot 3{,}75 + 10\cdot 1{,}25 = 35$ rublů,

třetí sestra utržila: $1 \cdot 3{,}75 + 25 \cdot 1{,}25 = 35$ rublů.
Odpověď:
Sestry prodávaly slepice před polednem za 3 ruble 75 kopějek, odpoledne za 1 rubl 25 kopějek.

Poznámka 1:
Pokud připustíme, že hodnoty *x*, *z* mohou být také nulové, dostáváme další dvě řešení:
a) $x = 8$, $y = 5$, $z = 0$ a ceny jsou

$$\text{odpolední:}\quad b = \frac{35x - 35y}{[x(16-y) - y(10-x)]} = \frac{35 \cdot 8 - 35 \cdot 5}{8 \cdot 11 - 5 \cdot 2} = \frac{105}{78} = \frac{35}{26},$$

$$\text{dopolední:}\quad a = \frac{35 - b(10-x)}{x} = \frac{35 - \frac{35}{26} \cdot 2}{8} = \frac{420}{104} = \frac{105}{26}.$$

Zkouška:
První sestra utržila: $8 \cdot \frac{105}{26} + 2 \cdot \frac{35}{26} = \frac{910}{26} = 35$ rublů,

druhá sestra utržila: $5 \cdot \frac{105}{26} + 11 \cdot \frac{35}{26} = \frac{910}{26} = 35$ rublů,

třetí sestra utržila: $26 \cdot \frac{35}{26} = \frac{910}{26} = 35$ rublů.
Odpověď:
Sestry prodávaly slepice před polednem asi za 4 ruble 4 kopějky, odpoledne asi za 1 rubl 35 kopějek.
a) $x = 10$, $y = 7$, $z = 2$ a ceny jsou

$$\text{odpolední:}\quad b = \frac{35x - 35y}{[x(16-y) - y(10-x)]} = \frac{35 \cdot 10 - 35 \cdot 7}{10 \cdot 9 - 7 \cdot 0} = \frac{105}{90} = \frac{7}{6}$$

$$\text{dopolední:}\quad a = \frac{35 - b(10-x)}{x} = \frac{35 - \frac{7}{6} \cdot 0}{10} = 3{,}5$$

První sestra utržila: $10 \cdot 3{,}5 = 35$ rublů,

druhá sestra utržila: $7 \cdot 3{,}5 + 9 \cdot \frac{7}{6} = 35$ rublů,

třetí sestra utržila: $2 \cdot 3{,}5 + 24 \cdot \frac{7}{6} = 35$ rublů.

Sestry prodávaly slepice před polednem za 3 ruble 50 kopějek, odpoledne asi za 1 rubl 17 kopějek.

Poznámka 2:
Zvolíme-li při řešení diofantovské rovnice $5x - 8y + 3z = 0$ parametr *t* jinak, např. $y = t$, dostáváme jiný obecný zápis řešení $[t - 3s;\ t;\ t + 5s]$, ale číselné řešení bude stejné (pro $t = 5$; 6; 7; $s = -1$).

Řešení č. 2: - podle [61], str. 97.
Označme po řadě *x*, *y* a *z* počet slepic, které dopoledne prodala po řadě první, druhá a třetí sestra. Odpoledne pak sestry prodaly $10 - x$, $16 - y$, $26 - z$. Cenu jedné slepice před polednem označíme *m* rublů, po poledni *n* rublů. K objasnění situace sestavíme tabulku

	Počet prodaných slepic:			Cena:
dopoledne:	x	y	z	*m* rublů
odpoledne:	$10 - x$	$16 - y$	$26 - z$	*n* rublů

První sestra utržila

$[mx + n(10 - x)]$ rublů, tudíž $mx + n(10 - x) = 35$;

druhá

$[my + n(16-y)]$ rublů, tudíž $my + n(16-y) = 35$;
třetí

$[mz + n(26-z)]$ rublů, tudíž $mz + n(26-z) = 35$.

Upravíme tyto tři rovnice:

$$(m-n)x + 10n = 35,$$
$$(m-n)y + 16n = 35,$$
$$(m-n)z + 26n = 35.$$

Odečteme od třetí rovnice nejprve první a pak druhou rovnici. Tím dostaneme

$$(m-n)\cdot(z-x) + 16n = 0,$$
$$(m-n)\cdot(z-y) + 10n = 0$$

neboli

$$(m-n)\cdot(x-z) = 16n,$$
$$(m-n)\cdot(y-z) = 10n.$$

Vydělíme první rovnici druhou rovnicí:

$$\frac{x-z}{y-z} = \frac{8}{5}, \text{ tedy } \frac{x-z}{8} = \frac{y-z}{5}.$$

Protože čísla x, y a z jsou celá čísla, také rozdíly $x-z$ a $y-z$ jsou celá čísla. Navíc musí být $x-z$ dělitelné číslem 5 a $y-z$ číslem 8. Označme

$$t = \frac{x-z}{8} = \frac{y-z}{5},$$

odkud

$$x = z + 8t,$$
$$y = z + 5t.$$

Číslo t není pouze celé, ale je i kladné, neboť $x > z$ (v opačném případě by první sestra nemohla při prodeji získat stejné množství peněz jako třetí sestra).

Protože $x < 10$, platí

$$z + 8t < 10.$$

Pro kladná celá čísla z a t může poslední nerovnost nastat pouze v tom případě, kdy $z = 1$ a $t = 1$. Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnic

$$x = z + 8t \text{ a } y = z + 5t,$$

dostaneme

$$x = 9, y = 6.$$

Vraťme se nyní k původním rovnicím

$$mx + n(10-x) = 35,$$
$$my + n(16-y) = 35,$$
$$mz + n(26-z) = 35$$

a dosaďme do nich nalezené hodnoty neznámých x, y a z. Tím dostaneme hodnoty m, n:

$$m = 3\frac{3}{4}, \quad n = 1\frac{1}{4}.$$

Odpověď:

Sestry prodávaly slepice dopoledne po 3 rublech 75 kopejkách, odpoledne po 1 rublu 25 kopejkách.

Poznámka:

Kdybychom připustili, že první sestra prodala všechny své slepice již dopoledne (v zadání úlohy to není výslovně vyloučeno), mohlo by být také $x = 10$. Pak by úloha měla ještě jedno správné řešení (tedy celkem dvě). Získali bychom je stejným postupem:

Dostali bychom nerovnost $z + 8t \leq 10$, která má další řešení $z = 2$ a $t = 1$. Potom $x = 10$, $y = 7$, $z = 2$, $m = 3\frac{1}{2}$, $n = 1\frac{1}{6}$.

Příklad 1.8.5:

Máme dva druhy konzerv různé váhy a jedno kilogramové závaží. Zjistili jsme, že menší konzerva váží méně než kilogram, větší více než kilogram, dvě menší konzervy spolu s kilogramovým závažím váží více než dvě větší konzervy. Dále se podařilo vyvážit 11 menších konzerv 6 většími a kilogramovým závažím. Vyjádřete váhu obou druhů konzerv v dekagramech celými čísly.

Řešení:

Označíme x váhu menší konzervy, y váhu větší konzervy, obě vyjádření v dekagramech; podle textu úlohy jsou x, y celá kladná čísla. Z textu úlohy dostaneme tyto podmínky:

$$x < 100,$$
$$y > 100,$$
$$2x + 100 > 2y,$$
$$11x = 6y + 100.$$

Po malé úpravě dostáváme:

$$11x - 6y = 100,$$
$$x + 50 > y,$$
$$x < 100,\ y > 100,$$
x, y jsou celá kladná čísla.

Jestliže celá čísla x, y vyhovují rovnici $11x - 6y = 100$, pak platí

$$6y = 11x - 100,$$

tj. číslo $11x - 100$ je dělitelné šesti. Přičteme-li k němu libovolný násobek šesti, např. $102 - 12x$, dostaneme opět číslo dělitelné šesti. Existuje tedy celé číslo z tak, že platí

$$6z = (11x - 100) + (102 - 12x) = 2 - x.$$

Odtud plyne, že $x = 2 - 6z$.

Dosadíme-li do původní rovnice za x, dostaneme po úpravě y:

$$y = -13 - 11z.$$

Každé celočíselné řešení původní rovnice je $[2 - 6z; -13 - 11z]$, kde z je celé číslo.

Nyní musíme vybrat taková celá z, aby byly splněny všechny nerovnosti.

Z podmínek $x > 0$, $y > 0$ vyplývá $z < \frac{1}{3}$, $z < -\frac{13}{11}$; jejich shrnutím dostaneme (protože z je celé číslo) $z \leq -2$.

Z podmínky $x < 100$ vyplývá $z > -\frac{98}{6}$, tj. $z \geq -16$.

Z podmínky $y > 100$ dostaneme $z < -\frac{113}{11}$, tj. $z \leq -11$.

Z podmínky $x + 50 > y$ dostaneme po úpravě $z > -13$.

Všechny předchozí nerovnosti splňují čísla $z = -12, -11$.

Dostáváme tabulku:

z	**x**	**y**	**y + 50**
– 11	68	108	118
– 12	74	119	124

Z tabulky je zřejmé, že obě dvojice čísel [68; 108], [74; 119] splňují naši soustavu a jsou tedy hledanými vahami obou druhů konzerv.

Matematický problém má tedy dvě řešení. Pro danou slovní úlohu je však tento výsledek neuspokojivý; váhu konzervy chceme určit jednoznačně. K tomuto účelu je však třeba doplnit podmínky soustavy další podmínkou, kterou lze zjistit vhodným vážením.

Příklad 1.8.6:
Vnuk při návštěvě dědy zjistil, že děda má sto mincí v celkové hodnotě tehdejších tolarů. Dohromady mince váží 76 dekagramů, a když všechny ponořil do skleněné nádoby tvaru válce o průměru 54,7 mm s roztokem, stoupla hladina kapaliny o 4 cm. Vedle ležela tato tabulka:

Hodnota	Průměr	Tloušťka	Hmotnost
1 tol.	24,28 mm	1,08 mm	4,5 g
2 tol.	27,14 mm	1,21 mm	6,5 g
5 tol.	28,51 mm	1,40 mm	7,0 g
10 tol.	28,29 mm	1,75 mm	9,2 g
20 tol.	32,13 mm	1,85 mm	11,0 g

Vnuk chtěl vědět, kolik mincí každé hodnoty děda má. Pomozte mu to určit.

Řešení: - zpracováno podle [88], str. 189.
Objemy jednotlivých mincí jsou:

Hodnota	Hmotnost	Objem
1 tol.	4,5 g	0,5 cm³
2 tol.	6,5 g	0,7 cm³
5 tol.	7,0 g	0,9 cm³
10 tol.	9,2 g	1,1 cm³
20 tol.	11,0 g	1,5 cm³

Celkový objem mincí je objem vytlačené vody. Je to válec s poloměrem $r = 27{,}35$ mm a výškou $v = 4$ cm. Jeho objem je

$$V = \pi r^2 v = \pi \cdot 2{,}735^2 \cdot 4^2 \doteq 94 \text{ cm}^3.$$

Počty mincí označme postupně x, y, z, v, w, potom pro celkový počet mincí platí

$$x + y + z + v + w = 100.$$

Pro hodnoty mincí platí

$$x + 2y + 5z + 10v + 20w = 760.$$

Pro objem mincí přibližně platí

$$0{,}5x + 0{,}7y + 0{,}9z + 1{,}1v + 1{,}5w = 94.$$

Pro celkovou hmotnost mincí platí přibližně

$$4{,}5x + 6{,}5y + 7z + 9v + 11w = 760.$$

Dostáváme tak soustavu čtyř neurčitých rovnic pro pět neznámých

$$\begin{aligned} x + y + z + v + w &= 100 \\ x + 2y + 5z + 10v + 20w &= 760 \\ 0{,}5x + 0{,}7y + 0{,}9z + 1{,}1v + 1{,}5w &= 94 \\ 4{,}5x + 6{,}5y + 7z + 9v + 11w &= 760, \end{aligned}$$

kterou vyřešíme pomocí známých metod.

$$x + y + z + v + w = 100 \quad \Big| \cdot (-1) \quad \Big| \cdot (-5) \quad \Big| \cdot (-9)$$

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 5z + 10v + 20w &= 760\\
5x + 7y + 9z + 11v + 15w &= 940\\
\underline{9x + 13y + 14z + 18v + 22w} &\underline{= 1520},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x + y + z + v + w &= 100\\
y + 4z + 9v + 19w &= 660 \quad \big|\cdot(-2) \quad \big|\cdot(-4)\\
2y + 4z + 6v + 10\,w &= 440\\
\underline{4y + 5z + 9v + 13w} &\underline{= 620}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x + y + z + v + w &= 100\\
y + 4z + 9v + 19w &= 660 \quad \big|\cdot(-2) \quad \big|\cdot(-4)\\
-4z - 12v - 28w &= -880 \quad \big|:(-4) \quad \big|\cdot 11\\
\underline{-11z - 27v - 63w} &\underline{= -2\,020}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x + y + z + v + w &= 100\\
y + 4z + 9v + 19w &= 660\\
z + 3v + 7w &= 220\\
\underline{6v + 14w} &\underline{= 400} \quad \big|:2
\end{aligned}
$$

Dostáváme lineární diofantovskou rovnici

$3v + 7w = 200.$

Rovnici vyřešíme pomocí kongruencí

$7w \equiv 200 \mod 3 \quad \big| -186 \ (= 62\cdot 3)$

$7w \equiv 14 \mod 3 \quad \big| : 7$

$w \equiv 2 \mod 3$

z toho plyne

$\underline{w = 2 + 3t},\ t \in Z.$

Dosazením do předchozích rovnic vypočteme postupně v, z, y, x.

$3v = 200 - 7\cdot(2 + 3t)$

$3v = 186 - 21t \quad \big| : 3$

$\underline{v = 62 - 7t},\ t \in Z,$

$z = 200 - 3v - 7w$

$z = 200 - 3\cdot(62 - 7t) - 7\cdot(2 + 3t)$

$\underline{z = 20},$

$y = 660 - 4z - 9v - 19w$

$y = 660 - 4\cdot 20 - 9\cdot(62 - 7t) - 19\cdot(2 + 3t)$

$\underline{y = -16 + 6t},\ t \in Z,$

$x = 100 + 16 - 6t - 20 - 62 + 7t - 2 - 3t$

$\underline{x = 32 - 2t},\ t \in Z.$

Nyní zjistíme, které celočíselné hodnoty vyhovují našemu řešení a zapíšeme je do tabulky:

***t*:**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
x = 32 – 2*t*:	28	26	24	22	20	18	16	14
y = – 16 + 6*t*:	– 2	2	8	14	20	26	32	38
z = 20:	20	20	20	20	20	20	20	20
v = 62 – 7*t*:	48	41	34	27	20	13	6	– 1
w = 2 + 3*t*:	8	11	14	17	20	23	26	29

Nezáporných hodnot nabývají x, y, z, v, w pro hodnoty parametru t od 3 do 8. Úloha má tak šest řešení. Pouze hodnota z je jednoznačná. Pokud bychom trvali na tom, že úloha musí být řešitelná jednoznačně (není v textu výslovně uvedeno), potom musíme konstatovat, že úloha nemá řešení.

Zkouška:
Zkouška je (pokud chceme ověřit všechna řešení) dlouhá, proto ji neuvedu. Je celkem jednoduchá. Stačí ověřit, že mincí je 100 a jejich hodnota 760. Splnění dalších podmínek zaručuje správný výpočet objemu mincí podle vzorce (toto bychom museli znovu přepočítat).
Odpověď:
Děda má tento počet mincí
26 nebo 24 nebo 22 nebo 20 nebo 18 nebo 16 jednotolarových,
2 nebo 8 nebo 14 nebo 20 nebo 26 nebo 32 dvoutolarových,
20 pětitolarových,
41 nebo 34 nebo 27 nebo 20 nebo 13 nebo 6 desetitolarových
a 11 nebo 14 nebo 17 nebo 20 nebo 23 nebo 26 dvacetitolarových.

1.9. Skupina 9: *„Speciální úlohy“*

Poslední skupina obsahuje ty úlohy, které nelze zařadit mezi ostatní. Nelze pro ně vytvořit jednotný model, u každé úlohy jej musíme hledat zvlášť. Jsou zde též zařazeny úlohy, kdy je použita dělitelnost.

Příklad 1.9.1:
Pan Voráček má možnost nakoupit u známého z Pelhřimova brambory na zimní uskladnění v ceně 6 Kč za kilogram. Jeho rodina spotřebuje 150 kg brambor. Cesta do Pelhřimova a zpět ho bude stát 525 Kč. Vyplatí se panu Voráčkovi tento nákup, nebo je pro něho výhodnější nakupovat brambory průběžně v prodejně za průměrnou cenu 13 Kč za kilogram? Při jakém počtu kilogramů brambor se takový nákup vyplatí?

Řešení:
Označme si hraniční množství brambor x [kg]. Chceme-li, aby byla výhodnější cesta do Pelhřimova, platí

$$6x + 525 < 13x \quad \big| -6x$$
$$525 < 7x \quad \big| : 7$$
$$x > 75 \text{ [kg]}$$

Zkouška:
Při nákupu 75 kg platí:
- při cestě do Pelhřimova: $75 \cdot 6 + 525 = 975$ Kč;
- při nákupu v prodejně: $75 \cdot 13 = 975$ Kč.

Při nákupu 80 kg (výhodný nákup) platí:
- při cestě do Pelhřimova: $80 \cdot 6 + 525 = 1\,005$ Kč;
- při nákupu v prodejně: $80 \cdot 13 = 1\,040$ Kč.

Z výsledků je jasné, že při nákupu nad 75 kg je výhodnější si pro brambory do Pelhřimova zajet.
Odpověď:
Pan Voráček nakoupil 150 kg brambor a je pro něho výhodnější pro brambory dojet do Pelhřimova. Nakupovat průběžně v prodejně se vyplatí panu Voráčkovi, nakoupí-li méně než 75 kg brambor za zimu.

Příklad 1.9.2:
Jeden člověk očekávaje smrt rozdělil dědictví svým dětem takovým způsobem, že první obdržel 1 tolar a sedminu zbytku, druhý obdržel dva tolary a sedminu zbytku, třetí tři tolary a sedminu zbytku a tak dále dalším. Když tímto způsobem rozdělil jmění, zjistil, že každé z dětí obdrželo stejnou částku. Ptáme se kolik je dětí a kolik tolarů rozdělil?

Řešení:
Označme celkové jmění m.
Potom první dostal 1 tolar a sedminu zbytku, tj.:

$$1 + \frac{m-1}{7} = \frac{m+6}{7}$$

druhý dostal 2 tolary a sedminu zbytku, tj.:

$$2 + \frac{m - \frac{m+6}{7} - 2}{7} = 2 + \frac{6m-20}{49} = \frac{6m+78}{49}$$

Protože oba dostali stejně, musí být hodnoty (výrazy) stejné, tedy platí

$$\frac{m+6}{7} = \frac{6m+78}{49} \quad \Big| \cdot 49$$

$$7m + 42 = 6m + 78 \quad \Big| -6m - 42$$

$$\underline{\underline{m = 36}} \text{ [tolarů]}$$

Zkouška:
První: 1 + (36 – 1) : 7 = 6 tolarů, zbývá 30 tolarů.
Druhý: 2 + (30 – 2) : 7 = 6 tolarů, zbývá 24 tolarů.
Třetí: 3 + (24 – 3) : 7 = 6 tolarů, zbývá 18 tolarů.
Čtvrtý: 4 + (18 – 4) : 7 = 6 tolarů, zbývá 12 tolarů.
Pátý: 5 + (12 – 5) : 7 = 6 tolarů, zbývá 6 tolarů.
Šestý: 6 + (6 – 6) : 7 = 6 tolarů, zbývá 0 tolarů.
Odpověď:
Šest dětí si rozdělilo 36 tolarů.

Příklad 1.9.3:
V košíku byla jablka. První dítě si vzalo jedno jablko a 10% jablek, která zbyla v košíku. Druhé dítě si vzalo 2 jablka a 10% jablek, která zbyla v košíku, třetí dítě si vzalo 3 jablka a 10% jablek, která zbyla v košíku a tak dále až poslední si vzalo zbytek. Všechny děti si vzaly z košíku stejný počet jablek. Kolik dětí si bralo z košíku jablka a kolik jablek bylo v košíku?

Řešení:
Označme celkový počet jablek v košíku p.
Potom první dítě si vzalo jedno jablko a 10% jablek, která zbyla v košíku, tj.:

$$1 + (p-1) \cdot 0{,}1 = 0{,}1p + 0{,}9.$$

Druhé dítě si vzalo 2 jablka a 10% jablek, která zbyla v košíku, tj.:

$$2 + (p - 0{,}1p - 0{,}9 - 2) \cdot 0{,}1 = 0{,}09p + 1{,}71.$$

Protože všechny děti si vzaly stejný počet jablek, musí platit

$$0{,}1p + 0{,}9 = 0{,}09p + 1{,}71 \quad \Big| \cdot 100$$

$$10p + 90 = 9p + 171 \quad \Big| -9p - 90$$

$$\underline{\underline{p = 81}}$$

Zkouška:
První dítě: 1 + (81 – 1) · 0,1 = 9 jablek, zbytek 72 jablek.
Druhé dítě: 2 + (72 – 2) · 0,1 = 9 jablek, zbytek 63 jablek.
Třetí dítě: 3 + (63 – 3) · 0,1 = 9 jablek, zbytek 54 jablek.
Čtvrté dítě: 4 + (54 – 4) . 0,1 = 9 jablek, zbytek 45 jablek.
Páté dítě: 5 + (45 – 5) · 0,1 = 9 jablek, zbytek 36 jablek.
Šesté dítě: 6 + (36 – 6) · 0,1 = 9 jablek, zbytek 27 jablek.
Sedmé dítě: 7 + (27 – 7) · 0,1 = 9 jablek, zbytek 18 jablek.
Osmé dítě: 8 + (18 – 8) · 0,1 = 9 jablek, zbytek 9 jablek.
Deváté dítě: zbytek 9 jablek.
Odpověď:
Devět dětí si rozdělilo 81 jablek.

Příklad 1.9.4:
Tři lidé si chtějí rozdělit 21 vinných sudů, z nichž 7 je plných, 7 je poloprázdných a 7 je prázdných. Jak to mají udělat, aby každý obdržel stejný počet sudů a stejné množství vína?

Řešení:
Každý obdrží třetinu sudů, tj. sedm a třetinu množství vína, tj.:

$$\tfrac{1}{3}\cdot(7\cdot 1+7\cdot 0{,}5+7\cdot 0)=3{,}5\,,$$

tedy celkem tři plné a jeden poloprázdný nebo jejich ekvivalenty.
Protože množství je 3,5 plného sudu (množství obsahuje jednu polovinu plného sudu), musí každý obdržet lichý počet poloprázdných sudů. Z toho plyne, že jsou pouze tyto možnosti pro počet poloprázdných sudů:

a) 1 + 1 + 5,
b) 1 + 3 + 3.

V případě a) dostane jeden 5 poloprázdných sudů, jeden plný a jeden prázdný sud, celkem 7 sudů a 3,5 plného sudu vína; ostatní dva dostanou jeden poloprázdný sud a 3 plné a 3 prázdné sudy, celkem 7 sudů a 3,5 plného sudu vína.
V případě b) dostane první jeden poloprázdný sud, 3 plné a 3 prázdné sudy, celkem 7 sudů a 3,5 plného sudu vína; ostatní dva dostanou 3 poloprázdné sudy a 2 plné a 2 prázdné sudy, celkem 7 sudů a 3,5 plného sudu vína.
Úloha má tedy dvě řešení, zkouška je jednoduchá.

Příklad 1.9.5:
Velbloudář zanechal v závěti svým třem synům 17 velbloudů, prvnímu polovinu, druhému třetinu a třetímu devítinu velbloudů. Synové nevěděli jak se rozdělit, 17 není dělitelné ani 2, ani 3 ani 9. Šli tedy za místním mudrcem, aby jim s dělením pomohl. Ten k 17 velbloudům přidal svého jediného a začal dělit. První syn dostal polovinu, tedy 9 velbloudů; druhý syn dostal třetinu, tedy 6 velbloudů a třetí syn dostal devítinu, tedy 2 velbloudy. Synové si tak odvedli celkem 17 velbloudů a mudrc si ponechal svého. Jak je to možné?

Řešení:
Háček spočívá v tom, že součet podílů není 100%. Totiž

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18},$$

což je asi 94,4%. Proto, když vzal mudrc osmnáctého velblouda, podělil syny sedmnácti osmnáctinami a poslední osmnáctinu (svého jediného velblouda) si ponechal.

Příklad 1.9.6: (*Přesouvání peněz*)
Určitý obnos menší než 1 000 Kč je rozdělen do deseti číslovaných hromádek (v celých korunách), přičemž platí:
- Když z 1. hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji ke 2. hromádce,
- pak ze druhé takto zvětšené hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji ke 3. hromádce
- ...
- pak z 9. takto zvětšené hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji k 10. hromádce,
- až nakonec z takto zvětšené 10. hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji k 1. hromádce,

pak bude ve všech hromádkách stejný obnos.
Kolik Kč bylo v jednotlivých hromádkách na začátku?

Řešení č. 1:
Označme $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ původní částky v jednotlivých hromádkách a y částku, která zůstane v každé hromádce nakonec. Potom platí

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 10y.$$

Protože celková částka je menší než 1 000 Kč, musí platit

$$10y < 1\,000 \text{ [Kč]}, \qquad \text{neboli} \qquad y < 100 \text{ [Kč]}.$$

Označme p částku, kterou přesuneme z druhé hromádky na třetí. Potom ve druhé hromádce byla po prvním kroku částka $10p$, zbyla částka $9p = y$, tedy $p = \frac{1}{9}y$. Ve třetí hromádce pak po přidání částky ve druhém kroku bude $x_3 + \frac{1}{9}y$, po odebrání částky ve třetím kroku tam zbude částka

$$y = \frac{9}{10}\left(x_3 + \frac{1}{9}y\right).$$

Z toho $x_3 = y$ a ve třetím kroku přesouváme na čtvrtou hromádku opět částku $p = \frac{1}{9}y$.
Tyto úvahy zopakujeme pro čtvrtou až desátou hromádku a dostaneme

$$x_3 = x_4 = \dots = x_{10} = y$$

a v posledním kroku přesouváme na první hromádku částku $p = \frac{1}{9}y$. V první hromádce bude potom částka

$$\frac{9}{10}x_1 + \frac{1}{9}y = y.$$

Odtud: $x_1 = \frac{80}{81}y$.
V prvním kroku jsme z první hromádky přesunuli na druhou částku

$$\tfrac{1}{10}x_1 = \tfrac{8}{81}y,$$

na druhé hromádce pak byla částka

$$x_2 + \frac{8}{81}y = 10p = \frac{10}{9}y.$$

Odtud: $x_2 = \frac{82}{81}y$.
Na jednotlivých hromádkách tedy byly částky

$$x_1 = \tfrac{80}{81}y,\ x_2 = \tfrac{82}{81}y,\ x_3 = x_4 = \dots = x_{10} = y.$$

Protože podle zadání jsou tyto částky celočíselné a $y < 100$ [Kč], musí platit $y = 81$ [Kč]. Musíme ještě ověřit, zda můžeme přesouvané sumy vyjádřit pomocí dostupných mincí či bankovek. V prvním kroku se přesouvá částka 8Kč, ve druhém 10 Kč, v dalších pak částky 9 Kč, což lze.
Původně byly v jednotlivých hromádkách částky

$$x_1 = 80 \text{ Kč},\ x_2 = 82 \text{ Kč},\ x_3 = x_4 = \dots = x_{10} = 81 \text{ Kč}$$

a na konci byla na každé hromádce částka 81 Kč.
Jako zkoušku můžeme použít řešení č. 2.

Řešení č. 2:
Na všech hromádkách musí být částky menší než 100 (tj. desetina částky, kterou součet nesmí dosáhnout). Protože z první hromádky odebereme desetinu, musí částka na první hromádce být dělitelná deseti, tedy připadají v úvahu jen tyto hodnoty: 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10 Kč.
Pro tyto případy ověříme pokusem, je-li možné, aby některá z těchto možností nastala.
1) $h_1 = 90$ [Kč] :
Odebereme desetinu, tj. 9 Kč, zůstává 81 Kč. Na druhé a dalších hromádkách vždy musí být »přibližně« o 9 Kč méně nebo stejně. Zvolme nejdříve variantu a) „méně“, tj. 81 Kč.

Ke druhé hromádce (81 Kč) přidáme desetinu první hromádky, dostáváme 90 Kč (tato částka opět musí být dělitelná deseti); na první hromádce zatím zůstává 81 Kč.
Z druhé hromádky odebereme desetinu, tj. 9 Kč a přidáme ke třetí hromádce (opět 81 Kč) a dostáváme opět 90 Kč. Na druhé hromádce zůstává 81 Kč.
Z třetí hromádky odebereme desetinu, tj. 9 Kč a přidáme ke čtvrté hromádce (opět 81 Kč) a dostáváme opět 90 Kč. Na třetí hromádce zůstává 81 Kč.
A tak pokračujeme až k desáté hromádce ze které odebereme desetinu, tj. 9 Kč a zůstane na ní 81 Kč. Těchto 9 Kč. přidáme k první hromádce (je na ní zatím 81 Kč), a tak na ní zůstane 90 Kč. Na první hromádce tedy zůstane jiná částka než na ostatních; tyto hodnoty nejsou řešením úlohy.
Budeme-li brát další hodnoty pro variantu a) „méně", vždy na první hromádce zůstane více než na ostatních. Je tedy logické, že k řešení může vést pouze varianta b) „stejně"
Z hodnoty 90 Kč odebereme desetinu, tj. 9 Kč a přidáme k částce 91 Kč (aby součet byl dělitelný deseti). Na první hromádce zůstane 81 Kč, na druhé 100 Kč.
Z druhé hromádky odebereme desetinu, tj. 10 Kč; na této hromádce zbude 90 Kč, částku přidáme ke třetí hromádce (90 Kč) a dostáváme 100 Kč.
Z třetí hromádky odebereme desetinu, tj. 10 Kč; na této hromádce zbude opět 90 Kč, částku přidáme ke třetí hromádce (90 Kč) a dostáváme 100 Kč.
Pokračujeme tak až k desáté hromádce.
Z desáté hromádky odebereme desetinu, tj. 10 Kč; na této hromádce zbude 90 Kč, částku přidáme ke první hromádce (81 Kč) a dostáváme 91 Kč.
Na první hromádce je nyní 91 Kč, na ostatních 90 Kč; tedy není splněna podmínka úlohy a daná čísla nejsou tedy řešením.
2) $h_2 = 80$ [Kč] :
Z úvah v 1) je jasné, že uvažujeme pouze variantu b) „stejně".
Z prvé hromádky (80 Kč) odebereme desetinu, tj. 8 Kč a přidáme ke druhé hromádce (částka na této hromádce musí být 82 Kč, aby součet byl dělitelný deseti). Na první hromádce zůstane 72 Kč, na druhé bude nově 90 Kč.
Z druhé hromádky odebereme desetinu, tj. 9 Kč; na této hromádce zbude 81 Kč, částku přidáme ke třetí hromádce (81 Kč) a dostáváme 90 Kč.
Z třetí hromádky odebereme desetinu, tj. 9 Kč; na této hromádce zbude opět 81 Kč, částku přidáme ke třetí hromádce (81 Kč) a dostáváme 90 Kč.
Pokračujeme tak až k desáté hromádce.
Z desáté hromádky odebereme desetinu, tj. 9 Kč; na této hromádce zbude 81 Kč, částku přidáme ke první hromádce (72 Kč) a dostáváme 81 Kč.
Na všech hromádkách je nyní 81 Kč a hodnoty 80 Kč (první hromádka), 82 Kč (druhá hromádka) a 81 Kč (všechny ostatní hromádky) jsou řešením naší úlohy.
3) $h_3 = 70$ [Kč] :
Opět uvažujeme pouze variantu b) „stejně".
Z prvé hromádky (70 Kč) odebereme desetinu, tj. 7 Kč a přidáme ke druhé hromádce (částka na této hromádce musí být 73 Kč, aby součet byl dělitelný deseti). Na první hromádce zůstane 63 Kč, na druhé bude nově 80 Kč.
Z druhé hromádky odebereme desetinu, tj. 8 Kč; na této hromádce zbude 72 Kč, částku přidáme ke třetí hromádce (72 Kč) a dostáváme 80 Kč.
Z třetí hromádky odebereme desetinu, tj. 8 Kč; na této hromádce zbude opět 72 Kč, částku přidáme ke třetí hromádce (72 Kč) a dostáváme 80 Kč.
Pokračujeme tak až k desáté hromádce.
Z desáté hromádky odebereme desetinu, tj. 8 Kč; na této hromádce zbude 72 Kč, částku přidáme k první hromádce (63 Kč) a dostáváme 71 Kč, tj. o 1 Kč méně než na ostatních.

Na první hromádce je nyní 71 Kč, na ostatních 72 Kč; tedy není splněna podmínka úlohy a daná čísla nejsou tedy řešením.
4) Pro h_4 = 60 Kč až h_9 = 10 Kč stejným způsobem zjistíme, že tato čísla nevyhovují.
Řešením úlohy je tedy pouze případ 2) h_2 = 80 Kč.
Odpověď:
V první hromádce bylo na začátku 80 Kč, v druhé hromádce 82 Kč, v ostatních hromádkách bylo 81 Kč.

2. Slovní úlohy o číslech

Slovní úlohy o číslech jsou velmi blízké matematickým úlohám. Hledáme-li neznámá čísla, používáme základní matematické dovednosti jako jsou operace s čísly, řešení rovnic a nerovnic apod. Proto metody, které používáme při řešení těchto slovních úloh, jsou velmi rozmanité. Slovní úlohy jsou členěny podle toho, jak jsou jednotlivá čísla charakterizována.

2.1. Skupina 1: „*Myslím si číslo*"

Myslím si číslo (*nebo více čísel*), *které je* (*jsou*) *řešiteli neznámé, provedu s ním* (*s nimi*) *konečný počet operací a výsledek řešiteli oznámím. Ten hledá číslo, které jsem si myslel. Jindy je třeba vysvětlit postup, kterým jsem k číslu nebo k zajímavému výsledku došel.*

Příklad 2.1.1:
Napište libovolné trojciferné číslo a pak jej k němu připište ještě jednou, dostanete šesticiferné číslo. Pak toto číslo vydělte 7. Výsledek vyjde beze zbytku. Nový výsledek vydělte 11. Dělení opět vyjde beze zbytku. Nakonec výsledek vydělte číslem 13. Výsledek vyjde opět beze zbytku a je roven původnímu trojcifernému číslu. Vysvětlete.

Řešení:
Např.: 523 523 : 523 = 1 001 (tento výsledek vyjde při každém dělení takto zvolených čísel).
To znamená, že každé takto zapsané šesticiferné číslo je dělitelné 1 001. Platí:

$$1\,001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

Proto při postupném dělení šesticiferného čísla čísly 7, 11, 13 dostáváme trojciferné číslo, které jej tvoří.

Příklad 2.1.2:
Myslím si dvě čísla. Když k dvojnásobku prvního přičtu jednu, od trojnásobku druhého odečtu tři a oba výsledky sečtu, dostanu 25. Když od trojnásobku prvního odečtu jednu, od dvojnásobku druhého odečtu dvě a oba výsledky sečtu, pak dostanu také 25. Která čísla si myslím?

Řešení:
První myšlené číslo označíme x, druhé y.
Zapíšeme-li údaje v textu pomocí x, y, dostáváme:

$$2x + 1 + 3y - 3 = 25 \quad | + 2$$
$$\underline{3x - 1 + 2y - 2 = 25} \quad | + 3$$
$$2x + 3y = 27 \quad | \cdot 3$$
$$\underline{3x + 2y = 28} \quad | \cdot (-2)$$
$$5y = 25 \qquad\qquad 2x + 15 = 27 \quad | - 15$$
$$\underline{\underline{y = 5}} \qquad\qquad 2x = 12 \quad | : 2$$
$$\underline{\underline{x = 6}}$$

Zkouška:
$2 \cdot 6 + 1 = 13$; $3 \cdot 5 - 3 = 12$; $13 + 12 = \underline{25}$

$3 \cdot 6 - 1 = 17$; $2 \cdot 5 - 2 = 8$; $18 + 7 = \underline{25}$

Odpověď:

Hledaná čísla jsou: první 6, druhé 5.

Příklad 2.1.3:

Myslíte si čtyři jednociferná čísla. Vynásobte první myšlené číslo dvěma, potom připočtěte 5 a násobte vše 5-ti; k tomu připočtěte 10, potom k tomu připočtěte druhé myšlené číslo a násobte vše 10-ti; k tomu potom připočtěte třetí myšlené číslo, vše vynásobte 10-ti a připočtěte poslední myšlené číslo. Od výsledku odečtěte 3500 a zbytek dává číslo, které vyjadřuje po řadě čtyři myšlená čísla.

Řešení:

Myslíme si cifry $a = 7$, $b = 5$, $c = 2$, $d = 4$.

Konkrétně:

První myšlené číslo násobíme dvěma	..... $7 \cdot 2 = 14$,
připočteme 5	..... $14 + 5 = 19$,
vše násobíme 5-ti	..... $19 \cdot 5 = 95$,
k tomu připočteme 10	..... $95 + 10 = 105$,
potom připočteme druhé myšlené číslo	..... $105 + 5 = 110$,
vše násobíme 10-ti	..... $110 \cdot 10 = 1\,100$,
k tomu připočteme třetí myšlené číslo	..... $1\,100 + 2 = 1\,102$,
vše násobíme 10-ti	..... $1\,102 \cdot 10 = 11\,020$,
k tomu připočteme poslední myšlené číslo	..... $11\,020 + 4 = 11\,024$,
nyní odečteme 3500	..... $11\,024 - 3\,500 = 7\,524$,

a dostáváme číslo s ciframi v daném pořadí 7, 5, 2, 4.

Obecně:

První myšlené číslo násobíme dvěma	..... $a \cdot 2 = 2a$,
připočteme 5	..... $2a + 5$,
vše násobíme 5-ti	..... $(2a + 5) \cdot 5 = 10a + 25$,
k tomu připočteme 10	..... $10a + 25 + 10 = 10a + 35$,
potom připočteme druhé myšlené číslo	..... $10a + b + 35$,
vše násobíme 10-ti	..... $(10a + b + 35) \cdot 10 = 100a + 10b + 350$,
k tomu připočteme třetí myšlené číslo	..... $100a + 10b + c + 350$,
vše násobíme 10-ti	..... $(100a + 10b + c + 350) \cdot 10 =$ $= 1\,000a + 100b + 10c + 3\,500$,
k tomu připočteme poslední myšlené číslo	..... $1\,000a + 100b + 10c + d + 3\,500$,
nyní odečteme 3500	..... $1\,000a + 100b + 10c + d + 3\,500 - 3\,500 =$ $= 1\,000a + 100b + 10c + d$,

a dostáváme číslo s ciframi v daném pořadí a, b, c, d.

Příklad 2.1.4:

Násobíme-li určité číslo 5-ti, odečteme od součinu 24, dělíme zbytek 6-ti a přičteme pak 13, obdržíme původní číslo. Které je to číslo?

Řešení:

Označme si myšlené číslo x, potom provedené operace můžeme zapsat

$$x = (5 \cdot x - 24) : 6 + 13 \quad \Big| \cdot 6$$

$6x = 5x - 24 + 78 \quad \Big| - 5x$

$\underline{\underline{x = 54}}$.

Zkouška:

$54 \cdot 5 = 270, \quad 270 - 24 = 246, \quad 246 : 6 = 41, \quad 41 + 13 = 54.$

Odpověď:

Myšlené číslo je 54.

2.2. Skupina 2: „*Číslo a jeho vlastnosti*“

Hledaná čísla či číslo jsou určeny pomocí svých vlastností (*součtu, rozdílu, mocniny, násobku, apod.*). *Hledané číslo či čísla nemají již jiný vztah. Z těchto vlastností je nutné hledané číslo či čísla určit.*

Příklad 2.2.1: = ***Příklad* 0.0.1:**
Určete takové číslo x, jehož trojnásobek zvětšený o jednu dá 73.

Řešení:
Hledané číslo je již značeno x, vyjádříme-li údaje v zadání, dostáváme rovnici

$$3 \cdot x + 1 = 73$$

jejímž řešením je číslo,

$$x = 24.$$

Zkouška:
$3 \cdot 24 = 72,\ \ 72 + 1 = 73.$
Odpověď:
Hledané číslo x je 24.

Příklad 2.2.2:
Zvětšíme-li číslo o 2, zvětší se jeho druhá mocnina o 100. Které je to číslo?

Řešení:
Označme si hledané číslo x, potom platí

$$(x + 2)^2 = x^2 + 100$$
$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 100 \quad \big| - x^2 - 4$$
$$4x = 96$$
$$\underline{\underline{x = 24}}$$

Zkouška:
Ověříme vztahy v zadání:
$24^2 = 576,\ \ 26^2 = 676,\ \ 676 - 576 = 100.$

Odpověď:
Hledané číslo je 24.

Příklad 2.2.3:
Součet dvou čísel je 25, rozdíl jejich druhých mocnin je 75. Najděte tato čísla.

Řešení:
Větší číslo označme x, menší číslo y, potom platí

$$x + y = 25 \quad \to \quad y = 25 - x$$
$$\underline{x^2 - y^2 = 75}$$
$$x^2 - 625 + 50x - x^2 = 75 \quad \big| + 625$$
$$50x = 700 \quad \big| : 50$$
$$\underline{\underline{x = 14}} \quad \to \quad \underline{\underline{y = 11}}$$

Zkouška:
Součet: $14 + 11 = 25$, rozdíl druhých mocnin: $14^2 - 11^2 = 75$.

Odpověď:
Hledaná čísla jsou 14, 11.

Příklad 2.2.4:
Zvětší-li se každé ze dvou čísel o tři, jsou pak v poměru 3 : 4. Zvětší-li se však každé o devět, jsou v poměru 5 : 6. Určete tato čísla.

Řešení:
První číslo označme x, druhé číslo y, potom platí

$$(x+3):(y+3)=3:4 \quad \Big| \cdot 4\cdot(y+3)$$
$$\underline{(x+9):(y+9)=5:6} \quad \Big| \cdot 6\cdot(y+9)$$
$$4x+12=3y+9 \quad \Big| -3y-12$$
$$\underline{6x+54=5y+45} \quad \Big| -5y-54$$
$$4x-3y=-3 \quad \Big| \cdot 5$$
$$\underline{6x-5y=-9} \quad \Big| \cdot(-3)$$
$$2x=12 \quad \Big| :2$$
$$\underline{x=6} \quad \rightarrow \quad 24-3y=-3 \quad \rightarrow \quad \underline{y=9}$$

Zkouška:
(6 + 3) : (9 + 3) = 9 : 12 = 3 : 4,
(6 + 9) : (9 + 9) = 15 : 18 = 5 : 6.
Odpověď:
První číslo je 6, druhé je 9.

Příklad 2.2.5:
Které číslo je o 420 větší než jeho druhá odmocnina?

Řešení:
Označme si hledané číslo x, potom dostáváme

$$x=420+\sqrt{x}$$
$$x-420=\sqrt{x} \quad \Big|^2$$
$$x^2-840x+176\,400=x \quad \Big| -x$$
$$x^2-841x+176\,400=0 \qquad D=(-841)^2-4\cdot 176\,400=1\,681 \quad \rightarrow \quad \sqrt{D}=41$$
$$x_{12}=\frac{841\pm 41}{2}=\begin{cases}\underline{441}\\ \underline{400}\end{cases}$$

Zkouška:
1) $x_1 = 441$ L = 441
P = 420 + $\sqrt{441}$ = 441.
2) $x_2 = 400$ L = 400
P = 420 + $\sqrt{400}$ = 420 + 20 = 440 $\neq$ 400,
ale vezmeme-li odmocninu záporně, dostáváme
P′ = 420 + $\sqrt{400}$ = 420 + (– 20) = 420 – 20 = 400.
Odpověď:
Hledané číslo je 441 a pokud vezmeme, že odmocnina z kladného čísla je číslo záporné, pak hledané číslo je i 400.

Příklad 2.2.6:

Kterého čísla devítina je o 6 menší než jeho sedmina?

Řešení:

Označme si hledané číslo x, potom můžeme vyjádřit daný vztah

$$\frac{x}{7} = \frac{x}{9} + 6 \quad \Big| \cdot 63$$

$$9x = 7x + 378 \quad \Big| - 7x$$

$$2x = 378 \quad \Big| : 2$$

$$\underline{\underline{x = 189}}\ .$$

Zkouška:

189 : 7 = 27, 189 : 9 = 21, 27 – 21 = 6.

Odpověď:

Hledané číslo je 189.

2.3. <u>Skupina 3:</u> *„Po sobě jdoucí čísla a jejich vlastnosti“*

Hledaná čísla jsou určena pomocí svých vlastností (*součtu, rozdílu, mocniny, násobku,* apod.). *Hledaná čísla jsou navíc po sobě jdoucí. Z těchto vlastností je nutné hledaná čísla určit.*

<u>*Příklad* 2.3.1:</u> = ***Příklad* 0.3.4:** - »rozšíření o dodatky«
Najděte tři za sebou následující přirozená čísla taková, že třetí mocnina největšího se rovná trojnásobku součtu třetích mocnin zbývajících dvou.

<u>*Řešení*</u>:
Nejmenší přirozené číslo z hledaných označme n, potom další jsou $n+1$ a $n+2$ a platí

$(n+2)^3 = 3\cdot[(n+1)^3 + n^3]$.

Tuto kubickou rovnici pro neznámou n vyřešíme a získáme hledaná čísla:

$n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = 3\cdot[n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3]$

$n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = 6n^3 + 9n^2 + 9n + 3 \quad \big| -n^3 - 6n^2 - 12n - 8$

$5n^3 + 3n^2 - 3n - 5 = 0.$

Řešení kubické rovnice:
Kubickou rovnici $an^3 + bn^2 + cn + d = 0$ o neznámé n normujeme (dělíme koeficientem a) a dostáváme normovanou kubickou rovnici

$n^3 + fn^2 + gn + h = 0.$

Rovnici převedeme pomocí substituce $n = x - \dfrac{f}{3}$ na redukovaný tvar (bez kvadratického členu)

$x^3 + px + q = 0$

a vypočteme diskriminant

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3. \qquad \textbf{(2-1)}$$

1) Je-li $p = q = 0$, pak má rovnice jeden trojnásobný kořen rovný nule.

2) Je-li $D = 0, pq \neq 0$, pak má rovnice dva reálné kořeny $x_1 = -2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}}$, $x_{23} = \sqrt[3]{\dfrac{q}{2}}$, z nichž druhý je dvojnásobný.

3) Je-li $D > 0$, pak existuje jedno reálné řešení x, které vypočteme pomocí Cardanových vzorců: $x = u + v,\ u = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{D}},\ v = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{D}}$. **(2-1a)**
Další dvě řešení jsou komplexní.

4) Je-li $D < 0$, pak existují tři reálná řešení x, tato řešení nejde vypočítat pomocí Cardanových vzorců, musíme je vypočítat goniometrickým řešením:

$$x_1 = 2\cdot\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi}{3},\ x_2 = -2\cdot\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi-\pi}{3},\ x_3 = -2\cdot\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi+\pi}{3},$$

kde φ lze vypočítat z rovnice $\cos\varphi = \dfrac{-\dfrac{q}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{|p|}{3}\right)^3}}$. **(2-1b)**

Vzhledem k charakteru úlohy uvádím jen reálná řešení, komplexní řešení vynechávám.

Řešení rovnice $5n^3 + 3n^2 - 3n - 5 = 0$:
Tuto kubickou rovnici normujeme (dělíme číslem 5) a dostáváme

$$n^3 + \frac{3}{5}n^2 - \frac{3}{5}n - 1 = 0.$$

Provedeme substituci $n = x - \frac{1}{5}$ a dostáváme

$$\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{3}{5}\cdot\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{3}{5}\cdot\left(x - \frac{1}{5}\right) - 1 = 0$$

$$x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{25}x - \frac{1}{125} + \frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{25}x + \frac{3}{125} - \frac{3}{5}x + \frac{3}{25} - 1 = 0$$

$$x^3 - \frac{18}{25}x - \frac{108}{125} = 0 \ \rightarrow \ p = -\frac{18}{25},\ q = -\frac{108}{125},$$

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{54}{125}\right)^2 + \left(-\frac{6}{25}\right)^3 = \frac{2\,916 - 216}{15\,625} = \frac{2\,700}{15\,625},$$

$D > 0 \ \rightarrow$ jedno reálné řešení x, řešení vypočteme pomocí Cardanových vzorců:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} = \sqrt[3]{\frac{54}{125} + \sqrt{\frac{2\,700}{15\,625}}} = \sqrt[3]{\frac{54}{125} + \frac{30\sqrt{3}}{125}} = \frac{\sqrt[3]{54 + 30\sqrt{3}}}{5},$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} = \sqrt[3]{\frac{54}{125} - \sqrt{\frac{2\,700}{15\,625}}} = \sqrt[3]{\frac{54}{125} - \frac{30\sqrt{3}}{125}} = \frac{\sqrt[3]{54 - 30\sqrt{3}}}{5},$$

$$x = u + v = \frac{\sqrt[3]{54 + 30\sqrt{3}}}{5} + \frac{\sqrt[3]{54 - 30\sqrt{3}}}{5} = \frac{6}{5};$$

$$n = x - \frac{1}{5} = \frac{6}{5} - \frac{1}{5} = 1.$$

Řešením jsou hodnoty $n = 1$, $n + 1 = 2$, $n + 2 = 3$.
Zkouška:
Třetí mocnina největšího čísla: $3^3 = 27$.
Trojnásobek součtu třetích mocnin zbývajících dvou čísel: $3 \cdot (2^3 + 1^3) = 27$.
Odpověď:
Hledaná tři za sebou následující čísla jsou 1; 2; 3.

Poznámka:
Je zřejmé, že jedním řešením rovnice $5n^3 + 3n^2 - 3n - 5 = 0$ je číslo $n = 1$ (toto číslo můžeme určit např. tak, že volíme vhodná čísla a dosazujeme je do polynomu na levé straně rovnice; je-li výsledek roven 0, je dosazené číslo řešením rovnice). Potom je polynom $5n^3 + 3n^2 - 3n - 5$ dělitelný výrazem $n - 1$ beze zbytku a dostáváme:

$$\begin{array}{l}
\quad(5n^3 + 3n^2 - 3n - 5) : (n - 1) = 5n^2 + 8n + 5 \\
\underline{-(5n^3 - 5n^2)} \\
\qquad\quad 8n^2 - 3n \\
\qquad \underline{-(8n^2 - 8n)} \\
\qquad\qquad\quad 5n - 5 \\
\qquad\qquad \underline{-(5n - 5)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Z toho vyplývá:

$$5n^3 + 3n^2 - 3n - 5 = (5n^2 + 8n + 5)\cdot(n-1)$$

a rovnici můžeme řešit rozkladem:

$$5n^3 + 3n^2 - 3n - 5 = 0$$

$$(5n^2 + 8n + 5)\cdot(n-1) = 0$$

1) $5n^2 + 8n + 5 = 0$, $D = -36$ $\rightarrow$ rovnice nemá reálné řešení;

2) $n - 1 = 0$ $\rightarrow$ $n = 1$.

Dodatek 1:

Text *příkladu* 2.3.2 upravme takto:

Najděte tři za sebou následující přirozená čísla taková, že třetí mocnina největšího se rovná součtu třetích mocnin zbývajících dvou.

Řešení:

Nejmenší přirozené číslo z hledaných označme n, potom další jsou $n+1$ a $n+2$ a platí

$$(n+2)^3 = (n+1)^3 + n^3.$$

Tuto kubickou rovnici pro neznámou n vyřešíme a získáme hledaná čísla:

$$n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3$$

$$n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = 2n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \quad \Big| - n^3 - 6n^2 - 12n - 8$$

$$n^3 - 3n^2 - 9n - 7 = 0.$$

Dostáváme již normovanou kubickou rovnici a provedeme substituci $n = x + 1$:

$$(x+1)^3 - 3\cdot(x+1)^2 - 9\cdot(x+1) - 7 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 - 6x - 3 - 9x - 9 - 7 = 0$$

$$x^3 - 12x - 15 = 0 \quad \rightarrow \quad p = -12,\ q = -15,$$

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{15}{2}\right)^2 + (-4)^3 = \frac{225}{4} - 64 = \frac{-31}{4} = -8\tfrac{3}{4},$$

$D < 0$ $\rightarrow$ tři reálná řešení x, tato řešení nejde vypočítat pomocí Cardanových vzorců, musíme je vypočítat goniometrickým řešením:

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}} = \frac{\frac{15}{2}}{\sqrt{4^3}} = 0{,}9375 \quad \rightarrow \quad \varphi \doteq 20{,}364°$$

$$x_1 = 2\cdot\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi}{3} = 2\cdot\sqrt{4}\cdot\cos\frac{20{,}264}{3} \doteq 3{,}972;$$

$$x_2 = -2\cdot\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi-\pi}{3} = -2\cdot\sqrt{4}\cdot\cos\frac{20{,}264-180}{3} \doteq -2{,}395;$$

$$x_3 = -2\cdot\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi+\pi}{3} = -2\cdot\sqrt{4}\cdot\cos\frac{2{,}264+180}{3} \doteq -1{,}577.$$

Všechna řešení x_1, x_2, x_3 jsou reálná čísla, proto také řešení n, $n+1$, $n+2$ budou čísla reálná a ne přirozená a podmínkám naší úlohy nevyhovují. Úloha tak nemá řešení v oboru přirozených čísel..

Dodatek 2:

Text *příkladu* 2.3.2 ještě upravme takto:

Najděte tři přirozená čísla taková, že třetí mocnina největšího se rovná součtu třetích mocnin zbývajících dvou.
(Jedná se o speciální případ Velké Fermatovy věty „$x^n + y^n = z^n$“ pro $n = 3$.)

Řešení:
Nejmenší přirozené číslo z hledaných označme n, potom další přirozená čísla zvolme $(n + b)$, $b \in N$, a $(n + a)$, $a \in N$ a předpokládáme-li $a > b$, pak platí:

$$(n + a)^3 = (n + b)^3 + n^3.$$

Tuto kubickou rovnici pro neznámou n řešíme a hledáme „podmínky“ pro parametry a, b. Na základě těchto podmínek budeme hledat a, b:

$$n^3 + 3an^2 + 3a^2n + a^3 = n^3 + 3bn^2 + 3b^2n + b^3 + n^3 \quad \Big| - n^3 - 3bn^2 - 3b^2n - b^3$$

$$3n^2 \cdot (a - b) + 3n \cdot (a^2 - b^2) + (a^3 - b^3) = n^3 \quad \Big| : (a - b)$$

$$3n^2 + 3n \cdot (a + b) + (a^2 + ab + b^2) = \frac{n^3}{a - b}$$

Z výrazu $\frac{n^3}{a-b}$ na pravé straně rovnice vyplývá, že $(a - b) \mid n^3$, potom platí:

$$a - b = k \cdot n \quad \rightarrow \quad a = b + k \cdot n\,; \; k \in Q, k > 0,$$

a dostáváme:

$$3n^2 + 3n \cdot (2b + kn) + (b + kn)^2 + (b + kn) \cdot b + b^2 = \frac{n^3}{kn}$$

$$3n^2 + 6n \cdot b + 3kn^2 + b^2 + 2kn \cdot b + k^2n^2 + b^2 + kn \cdot b + b^2 = \frac{n^2}{k} \quad \Big| \cdot k$$

$$3k \cdot b^2 + 3k^2n \cdot b + 6kn \cdot b + k^3n^2 + 3k^2n^2 + 3kn^2 = n^2 \quad \Big| - n^2$$

$$3k \cdot b^2 + (3k^2n + 6kn) \cdot b + k^3n^2 + 3k^2n^2 + 3kn^2 - n^2 = 0.$$

Jedná se o kvadratickou rovnici pro parametr $b \in N$. Pro další výpočet určíme diskriminant rovnice:

$$D = (3k^2n + 6kn)^2 - 4 \cdot 3k \cdot (k^3n^2 + 3k^2n^2 + 3kn^2 - n^2) =$$
$$= 9k^4n^2 + 36k^3n^2 + 36k^2n^2 - 12k^4n^2 - 36k^3n^2 - 36k^2n^2 + 12kn^2 =$$
$$= -3k^4n^2 + 12kn^2 = 3kn^2 \cdot (-k^3 + 4)$$

a parametr b se rovná:

$$b_{12} = \frac{-3k^2n - 6kn \pm \sqrt{3kn^2 \cdot (4 - k^3)}}{6k} = -\frac{kn}{2} - n \pm \frac{n \cdot \sqrt{3k \cdot (4 - k^3)}}{6k}.$$

Aby bylo možné vypočítat b, musí být výraz pod odmocninou roven druhé mocnině. Proto $3k$ i $4 - k^3$ musí být druhá mocnina. A to je pouze v případě $k = 1$ (viz poznámka). Potom

$$b_{12} = -\frac{n}{2} - n \pm \frac{n \cdot \sqrt{3 \cdot 3}}{6} = \frac{-3n}{2} \pm \frac{n}{2} = \begin{cases} -n \\ -2n \end{cases}.$$

Protože počáteční podmínkou je $b > 0$, $n > 0$, vychází hodnoty b_1, b_2 záporné a nejsou tedy řešením.

Poznámka:
Při hledání k vycházíme z toho, že:

1) výraz $3k \cdot (4 - k^3)$ musí být druhá mocnina. Proto platí např.

   $3k = 4 - k^3 \quad \Big| + k^3 - 4$

   $k^3 + 3k - 4 = 0.$

   Tuto rovnici vyřešíme již známým postupem:

   $p = 3$, $q = -4$

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = (-2)^2 + 1^3 = 5$$

$D > 0 \;\; \rightarrow$ jedno reálné řešení k, řešení vypočteme pomocí Cardanových vzorců:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\,,$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}\,,$$

$$k = u + v = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1\,.$$

2) výraz $3k$ bude druhá mocnina a současně i výraz $4 - k^3$ byla druhá mocnina. Protože oba výrazy musí být kladné, je $k \in (0; \sqrt[3]{4})$. Současně k je násobek 3. Takové k neexistuje.

Příklad 2.3.2:

Součin dvou za sebou jdoucích přirozených čísel, která v číselné řadě bezprostředně následují za neznámým číslem, je o 11 větší než druhá mocnina neznámého čísla. Určete neznámé číslo.

Řešení:

Označme si hledané přirozené číslo n, potom pro něj platí

$$n^2 + 11 = (n+1)\cdot(n+2)$$

$$n^2 + 11 = n^2 + 3n + 2 \quad \Big|\, - n^2 - 2$$

$$9 = 3n \quad \Big|\, : 3$$

$$\underline{\underline{n = 3}}.$$

Zkouška:

Druhá mocnina čísla je $3^2 = 9$.

Součin následujících dvou čísel je $4 \cdot 5 = 20$.

Rozdíl výsledků je $20 - 9 = 11$.

Odpověď:

Hledané číslo je 3.

Příklad 2.3.3:

Je dáno pět po sobě následujících přirozených čísel. Jestliže prostřední číslo odečtu od součtu čtyř ostatních, dostanu 21. Určete tato čísla.

Řešení:

První přirozené číslo označme n, potom platí

$$n + (n+1) - (n+2) + (n+3) + (n+4) = 21$$

$$3n + 6 = 21 \quad \Big|\, -6$$

$$3n = 15 \quad \Big|\, : 3$$

$$\underline{n = 5}$$

Zkouška:

$5 + 6 - 7 + 8 + 9 = 21$

Odpověď:

Hledaná čísla jsou 5; 6; 7; 8; 9.

Příklad 2.3.4:
Určete tři po sobě jdoucí celá čísla, jejichž součet druhých mocnin je roven součtu druhých mocnin dvou po nich bezprostředně následujících celých čísel.

Řešení:
První přirozené číslo označme n, potom platí

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n+3)^2 + (n+4)^2$$
$$n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = n^2 + 6n + 9 + n^2 + 8n + 16$$
$$3n^2 + 6n + 5 = 2n^2 + 14n + 25 \quad \Big| -2n^2 - 14n - 25$$
$$n^2 - 8n - 20 = 0$$
$$(n-10)\cdot(n+2) = 0$$
$$\underline{n_1 = 10}, \ \underline{n_2 = -2}$$

Zkouška:
1) $n_1 = 10$, potom hledaná čísla jsou 10; 11; 12 a platí
$10^2 + 11^2 + 12^2 = 365$; $13^2 + 14^2 = 365$.
2) $n_2 = -2$, potom hledaná čísla jsou – 2; – 1; 0 a platí
$(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 5$; $1^2 + 2^2 = 5$.

Odpověď:
Hledaná trojice čísel je 10; 11; 12 nebo – 2; – 1; 0.

2.4. **Skupina 4:** „*Číslo a jeho ciferný součet*“

Hledané číslo je určeno pomocí svých vlastností (součtu, rozdílu, mocniny, násobku, apod.). Hledané číslo je navíc charakterizována svým ciferným zápisem. Z těchto vlastností je nutné hledané číslo určit.

Příklad 2.4.1:
Čtyřciferné číslo má ciferný součet 22. Obě krajní číslice jsou stejné, rovněž obě vnitřní číslice. Vyměníme-li krajní číslice s vnitřními, zvětší se číslo o 891. Najděte toto číslo.

Řešení:
Označme si krajní cifry x a vnitřní y, potom platí

$$2x + 2y = 22 \quad | : 2$$
$$\underline{1\,000y + 100x + 10x + y - (1\,000x + 100y + 10y + x) = 891}$$
$$x + y = 11$$
$$\underline{891y - 891x = 891} \quad | : 891$$
$$x + y = 11$$
$$\underline{y - x = 1}$$
$$2y = 12 \quad | : 2$$
$$\underline{y = 6} \rightarrow \underline{x = 5}$$

a hledané číslo je 5 665.
Zkouška:
6 556 – 5 665 = 891.
Odpověď:
Číslo je 5 665.

Příklad 2.4.2:
Šesticiferné číslo, mající na prvním místě číslici 2, promění se ve své trojnásobné, přestavíme-li onu číslici na poslední místo. Které číslo je to?

Řešení: - {podle předchozího – autorské, př. 2.4.1}
Označme si posledních pět čísel x, potom platí

$$3 \cdot (200\,000 + x) = 10x + 2$$
$$600\,000 + 3x = 10x + 2 \quad | -3x - 2$$
$$599\,998 = 7x \quad | : 7$$
$$\underline{x = 85\,714}$$

Zkouška:
Číslo 285 714 změníme na 857 142, potom 857 142 : 285 714 = 3.
Odpověď:
Hledané číslo je 285 714.

Příklad 2.4.3:
Které trojciferné číslo, mající na posledním místě číslici 8, má tu vlastnost, že postavíme-li tuto číslici na první místo, obdržíme číslo o 14 menší než je dvojnásobek čísla původního?

Řešení:
Označme si první dvojčíslí x, potom platí

$$(10x + 8) \cdot 2 = 800 + x + 14$$
$$20x + 16 = x + 814 \quad \Big| -x - 16$$
$$19x = 798 \quad \Big| : 19$$
$$\underline{x = 42}\ .$$

Zkouška:

$428 \cdot 2 = 856$, $856 - 842 = 14$.

Odpověď:

Hledané číslo je 428.

2.5. <u>Skupina 5:</u> „*Největší a nejmenší číslo*“

Hledaná čísla či číslo jsou určeny pomocí svých vlastností (*součtu, rozdílu, mocniny, násobku, apod.*). *Hledané číslo či čísla nemají již jiný vztah. Máme určit největší či nejmenší číslo* (*hledáme extrém*), *které splňuje dané požadavky*.

Příklad 2.5.1:
Číslo 64 napište jako součin dvou kladných činitelů tak, aby jejich součet byl co nejmenší.

Řešení:
Označme si činitele x, y, pak platí

$$x \cdot y = 64 \quad \rightarrow \quad y = \frac{64}{x}$$

$$S = x + y \quad \text{. . . minimální.}$$

Potom

$$S = x + \frac{64}{x} = \frac{x^2 + 64}{x}.$$

Stejně jako v předchozí úloze (ve zkoušce) funkci $S = x + \frac{64}{x} = \frac{x^2+64}{x}$ derivujeme, první derivaci položíme rovnu 0 a pro x dostáváme hodnotu extrému. Abychom zjistili, jaký je to extrém, musíme zjistit hodnotu druhé derivace v bodě x. Pro minimum musí tato hodnota být kladná.

$$S' = 1 - \frac{64}{x^2}, \quad 1 - \frac{64}{x^2} = 0 \quad \Big| \cdot x^2$$

$$x^2 - 64 = 0 \quad \Big| + 64$$

$$x^2 = 64 \quad \rightarrow \quad \underline{x = 8} \text{ (činitelé mají být kladní)}$$

$$S'' = \frac{128}{x^3}; \; S\,(x_0 = 8) = \frac{128}{8^3} = \frac{1}{4} > 0 \quad \text{. . . jedná se o minimum.}$$

Zkouška:
Zkouška plyne z vlastností diferenciálního počtu.
Můžeme samozřejmě udělat také neúplnou zkoušku dosazením (stejně jako v jiných příkladech).
Odpověď:
Kladní činitelé součinu jsou oba 8.

Příklad 2.5.2:
Najděte kladné reálné číslo, pro které platí, že součet tohoto čísla a čísla k němu převráceného je co nejmenší.

Řešení:
Označme si hledané číslo x, potom výraz

$$V = x + \frac{1}{x} \quad \text{musí být minimální, tedy hledáme jeho extrém.}$$

$$V' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Big| \cdot x^2$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \underline{x = \pm 1}$, protože $x > 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$.

$V'' = \dfrac{2}{x^3}$, $V''(1) = \dfrac{2}{1^3} = 2 > 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}$ je minimum.

Odpověď:
Hledané kladné reálné číslo je 1.

Příklad 2.5.3:
Určete rozměry obdélníku tak aby při daném obvodu 8m měl maximální obsah.

Řešení:
Označíme-li si čísla, která jsou rozměry obdélníka a, b můžeme vyjádřit obvod o takto:

$O = 2a + 2b = 8 \quad \rightarrow \quad a + b = 4.$

Protože obsah musí být maximální, musí být maximální i výraz

$S = a \cdot b$; hledáme jeho extrém.

Protože $b = 4 - a$, je

$S = a \cdot (4 - a) \quad \rightarrow \quad S = 4a - a^2$

$S' = 4 - 2a = 0 \quad \big| + 2a$

$4 = 2a \quad \big| : 2$

$\underline{\underline{a = 2}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{b = 2}}$

a jedná se o čtverec.
Odpověď:
Hledané rozměry jsou 2m a 2 m, tedy čtverec o hraně 2m.

A ještě jedna úloha, která je zajímavou aplikací hledání extrému:

Příklad 2.5.4: - *Didonina úloha*
Jak vyprávějí pověsti, Dido (zemřela kolem r. 890 př. n. l.), dcera tyrského krále, utekla od otce a vzala s sebou skříňku s cennostmi. Na severním pobřeží Afriky chtěla koupit pozemky; numidský král Hiarba souhlasil s prodejem části území na mořském pobřeží, ale „ne větší, než jakou lze ohraničit volskou kůží". Dido rozřezala kůži na tenké proužky, navázala je do provázku o délce l a ohraničila jimi pozemek s maximální výměrou. Tak bylo založeno Kartágo, jehož první legendární královnou byla Dido. Jaký obrazec Dido ohraničila provázkem?

Řešení č. 1: - {podle [40], str. 46}
Pokud ohraničujeme pozemek křivou čárou, pak řešením bude půlkruh se středem na břehu moře. (Předpokládá se, že linie pobřeží je přímá.) V případě pravoúhelníkového pozemku označme písmenem x délku jeho strany kolmé k pobřeží, délka strany rovnoběžné s pobřežím pak bude $l - 2x$. Úloha vede k výpočtu maxima funkce

$$f(x) = x \cdot (l - 2x) = -2x^2 + lx = -2(x^2 - \frac{1}{2}x) = -2\left(x^2 - 2x \cdot \frac{l}{4} + \frac{l^2}{16}\right) + \frac{l^2}{8} = \frac{l^2}{8} - 2\left(x - \frac{l}{4}\right)^2.$$

Získaný rozdíl bude největší, když se menšitel $2\left(x - \dfrac{l}{4}\right)^2$ bude rovnat nule. Proto se největší hodnota funkce rovná $l^2 : 8$, a to pro $x = l : 4$.

Řešení č. 2:
Opět budeme hledat maximum funkce $f(x) = -2x^2 + lx$. K výpočtu použijeme infinitezimálního počtu (derivace).
Extrém funkce nastane, je-li $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = -4x + l,$$

potom

$$-4x + l = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{l}{4}.$$

Maximum v určeném bodě nastane, je-li $f''(x) < 0$.

$$f''(x) = -4 < 0.$$

Naše funkce $f(x) = -2x^2 + lx$ má maximum pro $x = l : 4$.

Odpověď:
Chtěla-li královna Dido ohraničit co největší obdélníkový pozemek (toto se předpokládá), potom rozměr rovnoběžný s pobřežím byl polovina délky provázku a rozměry kolmé na pobřeží byly čtvrtina délky provázku.

2.6. <u>Skupina 6:</u> *„Nedostatečný počet určujících prvků“*

Hledaná čísla či číslo jsou určeny pomocí svých vlastností (*součtu, rozdílu, mocniny, násobku, apod.*). *V úlohách není dostatečný počet určujících prvků, proto vedou na diofantovské rovnice.*

<u>*Příklad* 2.6.1:</u>
Najděte číslo, které při dělení třemi dá zbytek 2, při dělení pěti zbytek 3, při dělení sedmi zbytek 2.

<u>*Řešení*:</u>
Označme si hledané číslo x, podíl v prvním případě k, v druhém případě l, v třetím případě m. Vyjádříme-li nyní vztahy ze zadání (tj. matematizujeme-li danou reálnou situaci), dostáváme soustavu rovnic:

$$\frac{x}{3} = k + \frac{2}{3}$$
$$\frac{x}{5} = l + \frac{3}{5}$$
$$\frac{x}{7} = m + \frac{2}{7}.$$

Upravíme-li (vynásobíme příslušnými jmenovateli), dostáváme

$$x = 3k + 2$$
$$x = 5l + 3$$
$$x = 7m + 2.$$

Pravé strany první a druhé rovnice se rovnají, neboť se rovnají levé strany

$$3k + 2 = 5l + 3 \quad \Big| -2$$
$$3k = 5l + 1 \quad \Big| :3$$
$$k = \frac{5}{3}l + \frac{1}{3}.$$

Nyní dosazujeme za l a hledáme k tak, aby bylo celé číslo. Dostáváme:

$l = 1 \;\rightarrow\; k = 2,$
$l = 4 \;\rightarrow\; k = 7,$
$l = 7 \;\rightarrow\; k = 12,$
$l = 10 \;\rightarrow\; k = 17$
$l = 13 \;\rightarrow\; k = 22,$
$l = 16 \;\rightarrow\; k = 27,$
$l = 19 \;\rightarrow\; k = 32,$
$l = 22 \;\rightarrow\; k = 37,$
$l = 25 \;\rightarrow\; k = 42,$ atd. . . . dostáváme ∞ řešení.

Dále vezmeme, že se rovnají pravé strany druhé a třetí rovnice

$$5l + 3 = 7m + 2 \quad \Big| -2$$
$$7m = 5l + 1$$
$$m = \frac{5}{7}l + \frac{1}{7}.$$

Nyní dosazujeme za l a hledáme m tak, aby bylo celé číslo. Dostáváme:

$l = 4 \;\rightarrow\; m = 3,$
$l = 11 \;\rightarrow\; m = 8$
$l = 18 \;\rightarrow\; m = 13,$
$l = 25 \;\rightarrow\; m = 18,$ atd. . . . dostáváme ∞ řešení.

Porovnáním výsledků posledních dvou rovnic dostáváme, že $k = 42$, $l = 25$, $m = 18$ a

$$x = 3k + 2 = 5l + 3 = 7m + 2 = 23;$$

nebo $k = 7$, $l = 4$, $m = 3$ a $x = 3k + 2 = 5l + 3 = 7m + 2 = 23$; atd. . . .

Zkouška:
23 : 3 = 7, zb. 2, 23 : 5 = 5, zb. 3, 23 : 7 = 3, zb. 2.; atd. . . .
Odpověď:
Hledaná čísla jsou 23, 128, 233, . . .

Příklad 2.6.2:
Najděte celočíselné velikosti stran čtverců, jejichž rozdíl obsahů je 15.

Řešení:
Označíme-li velikost strany prvního čtverce x a druhého y, lze danou úlohu vyjádřit rovnicí

$$x^2 - y^2 = 15.$$

Rovnice $x^2 - y^2 = c$ je řešitelná celými čísly tehdy a jen tehdy, je-li c číslo liché nebo dělitelné čtyřmi.
V rovnici $x^2 - y^2 = 15$ nejprve rozložíme levou stranu

$$(x + y)\cdot(x - y) = 15$$

a potom pravou: $15 = 1\cdot 15 = 3\cdot 5$ a pak položíme:
1) $x + y = 15$, $x - y = 1$, z čehož plyne $x = 8$, $y = 7$;
2) $x + y = 5$, $x - y = 3$, z čehož plyne $x = 4$, $y = 1$.
Zkouška:
1) $8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15$;
2) $4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$.
Odpověď:
Strany čtverců jsou 8 a 7 nebo 4 a 1.

Příklad 2.6.3:
Dvě celá čísla jsme sečetli, odečetli, vynásobili a vydělili. Když jsme sečetli čtyři získané výsledky, dostali jsme číslo 243. Jaká jsou to čísla?

Řešení:
Hledaná celá čísla označme x, y, potom platí

$$x + y + x - y + x\cdot y + \frac{x}{y} = 243$$

$$2x + xy + \frac{x}{y} = 243 \quad \Big| \cdot y$$

$$2xy + xy^2 + x = 243y$$

$$x\cdot(2y + y^2 + 1) = 243y \quad \Big| : (y + 1)^2$$

$$x = \frac{243y}{(y+1)^2} \quad \rightarrow \quad x = \frac{3^5\cdot y}{(y+1)^2}.$$

Protože x je číslo celé, musí být $(y + 1)$ mocnina 3. V našem případě vyhovují čísla 3 a 9.
1) $y + 1 = 3 \quad \rightarrow \quad \underline{y = 2}$, potom

$$x = \frac{3^5\cdot 2}{(2+1)^2} = 3^3\cdot 2 = 54 \quad \rightarrow \quad \underline{x = 54}.$$

2) $y + 1 = 9 \quad \rightarrow \quad \underline{y = 8}$, potom

$$x = \frac{3^5\cdot 8}{(8+1)^2} = 3\cdot 8 = 24 \quad \rightarrow \quad \underline{x = 24}.$$

Zkouška:

1) $x = 54, y = 2$:

$$54 + 2 + 54 - 2 + 54 \cdot 2 + 54 : 2 = 243.$$

2) $x = 24, y = 8$:

$$24 + 8 + 24 - 8 + 24 \cdot 8 + 24 : 8 = 243.$$

Hledaná čísla jsou 54; 2 a 24; 8.

Příklad 2.6.4:

Najděte číslo menší než 70, které při dělení pěti dá zbytek 4, při dělení šesti zbytek 2, při dělení sedmi zbytek 2.

Řešení - pomocí aritmetických vlastností:

Označme si hledané číslo x, podíl v prvním případě k, v druhém případě l, v třetím případě m. Vyjádříme-li nyní vztahy ze zadání (tj. matematizujeme-li danou reálnou situaci), dostáváme soustavu rovnic:

$$\frac{x}{5} = k + \frac{4}{5}$$
$$\frac{x}{6} = l + \frac{2}{6}$$
$$\frac{x}{7} = m + \frac{2}{7}.$$

Upravíme-li (vynásobíme příslušnými jmenovateli), dostáváme

$$x = 5k + 4$$
$$x = 6l + 2$$
$$x = 7m + 2.$$

Pravé strany první a druhé rovnice se rovnají, neboť se rovnají levé strany

$$5k + 4 = 6l + 2 \quad \Big| -4$$
$$5k = 6l - 2 \quad \Big| : 5$$
$$k = \frac{6}{5}l - \frac{2}{5}.$$

Nyní dosazujeme za l a hledáme k tak, aby bylo celé číslo. Dostáváme:

$l = 2 \rightarrow k = 2$,
$l = 7 \rightarrow k = 8$,
$l = 12 \rightarrow k = 14$,
$l = 17 \rightarrow k = 20$,
$l = 22 \rightarrow k = 26$,
$l = 27 \rightarrow k = 32$,
$l = 32 \rightarrow k = 38$, atd. . . . dostáváme ∞ řešení.

Dále vezmeme, že se rovnají pravé strany druhé a třetí rovnice

$$6l + 2 = 7m + 2 \quad \Big| -2$$
$$7m = 6l \quad \Big| : 7$$
$$m = \frac{6}{7}l.$$

Nyní dosazujeme za l a hledáme m tak, aby bylo celé číslo. Dostáváme:

$l = 7 \rightarrow m = 6$,
$l = 14 \rightarrow m = 12$
$l = 21 \rightarrow m = 18$,
$l = 28 \rightarrow m = 24$, atd. . . . dostáváme ∞ řešení.

Porovnáním výsledků posledních dvou rovnic dostáváme, že $k = 8$, $l = 7$, $m = 6$ a

$$x = 5k + 4 = 6l + 2 = 7m + 2 = 44;$$

další řešení jsou větší než 70.

Zkouška:
44 : 5 = 8, zb. 4, 44 : 6 = 7, zb. 2, 44 : 7 = 6, zb. 2.
Odpověď:
Hledané číslo je 44.

Příklad 2.6.5:
Zlomek $\frac{338}{119}$ rozložte na dva zlomky se jmenovateli 7, 17.

Řešení:
Hledané čitatele označme postupně *a*, *b*. Potom pro rozklad platí

$$\frac{338}{119} = \frac{a}{7} + \frac{b}{17} \quad \Big| \cdot 119$$

$$338 = 17a + 7b.$$

Dostali jsme lineární diofantovskou rovnici, kterou vyřešíme pomocí kongruencí.

$$17a \equiv 338 \bmod 7 \quad \Big| - 287$$
$$17a \equiv 51 \bmod 7 \quad \Big| : 17$$
$$a = 3 \bmod 7 \quad \rightarrow \quad \underline{a = 3 + 7t}$$
$$338 = 17 \cdot (3 + 7t) + 7b$$
$$338 = 51 + 119t + 7b \quad \Big| - 51 - 119t$$
$$287 - 119t = 7b \quad \Big| : 7$$
$$\underline{b = 41 - 17t}$$

Potom dostáváme:

***t*:**	...	– 1	0	1	2	3	...
***a*:**	...	– 4	3	10	17	24	...
***b*:**	...	58	41	24	7	– 10	...

Řešením jsou tři dvojice čitatelů [3; 41], [10; 24], [17; 7].
Zkouška:

a) $\frac{3}{7} + \frac{41}{17} = \frac{3 \cdot 17 + 41 \cdot 7}{119} = \frac{338}{119}$;

b) $\frac{10}{7} + \frac{24}{17} = \frac{10 \cdot 17 + 24 \cdot 7}{119} = \frac{338}{119}$;

c) $\frac{17}{7} + \frac{7}{17} = \frac{17^2 + 7^2}{119} = \frac{338}{119}$.

Odpověď:
Hledané rozklady jsou $\frac{3}{7} + \frac{41}{17} = \frac{10}{7} + \frac{24}{17} = \frac{17}{7} + \frac{7}{17} = \frac{338}{119}$.

Příklad 2.6.6:
Zlomek $\frac{122}{105}$ rozložte na součet zlomků s prvočíselnými jmenovateli.

Řešení č. 1:
Nejdříve zjistíme jmenovatele zlomků. Jsou to prvočísla na které můžeme rozložit číslo 105. Protože 105 = $3 \cdot 5 \cdot 7$, budou jmenovateli tato čísla. Čitatele zlomků označme po řadě čísla *x*, *y*, *z*. Potom pro rozklad platí

$$\frac{122}{105} = \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} \quad \Big| \cdot 105$$

$122 = 35x + 21y + 15z.$

Dostali jsme lineární diofantovskou rovnici, kterou vyřešíme pomocí kongruencí.

$$35x + 21y + 15z \equiv 122 \bmod 7 \quad \Big| - 7\cdot k$$
$$z \equiv 3 \bmod 7 \quad \rightarrow \quad \underline{z = 3 + 7s}$$
$$5x + 21y + 45 + 105s = 122 \quad \Big| - 45 - 105s$$
$$35x + 21y = 77 - 105s$$
$$35x \equiv 77 - 105s \bmod 21 \quad \Big| - 21\cdot k$$
$$14x \equiv 14 - 84s \bmod 21 \quad \Big| : 14$$
$$x \equiv 1 - 6s \bmod 21 \quad \rightarrow \quad \underline{x = 1 - 6s + 21t}$$
$$35\cdot(1 - 6s + 21t) + 21y + 15\cdot(3 + 7s) = 122$$
$$35 - 210s + 735t + 21y + 45 + 105s = 122 \quad \Big| - 80 + 105s - 735t$$
$$21y = 42 + 105s - 735t \quad \Big| : 21$$
$$\underline{y = 2 + 5s - 35t}$$

Vychází pouze jedno řešení pro $s = 0$, $t = 0$. Je jím $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Zkouška:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{1\cdot 5\cdot 7+2\cdot 3\cdot 7+3\cdot 3\cdot 5}{105}=\frac{122}{105}.$$

Odpověď:

Hledaný rozklad je $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{122}{105}$.

Řešení č. 2:

Jmenovatele zlomku rozložíme na součin dvou čísel, např. $105 = 7\cdot 15$. První číslo je již prvočíslo, druhé je ještě číslo složené (zde pak musíme ještě pokračovat). Čitatele zlomků označme po řadě čísla a, b. Potom pro rozklad platí

$$\frac{122}{105}=\frac{a}{7}+\frac{b}{15} \quad \Big|\cdot 105$$
$$122 = 15a + 7b$$

a lineární diofantovskou rovnici vyřešíme pomocí kongruence.

$$15a \equiv 122 \bmod 7 \quad \Big| - 7\cdot k$$
$$a \equiv 3 \bmod 7 \quad \rightarrow \quad \underline{a = 3 + 7t}$$
$$122 = 45 + 105t + 7b \quad \Big| - 45 - 105t$$
$$77 - 105t = 7b \quad \Big| : 7$$
$$\underline{b = 11 - 15t}$$

Dostáváme jediné řešení pro $t = 0$: $a = 3$, $b = 11$ a rozklad je

$$\frac{122}{105}=\frac{3}{7}+\frac{11}{15}.$$

Protože jmenovatel druhého zlomku je číslo složené, musíme v tomto případě ještě pokračovat v rozkladu zlomku $\frac{11}{15}$. Jmenovatele zlomku rozložíme na součin dvou čísel 3; 5. Čitatele zlomků označme po řadě čísla c, d. Potom pro rozklad zlomku platí

$$\frac{11}{15}=\frac{c}{3}+\frac{d}{5} \quad \Big|\cdot 105$$
$$11 = 5d + 3c$$

a lineární diofantovskou rovnici vyřešíme pomocí kongruence.

$$5d \equiv 11 \bmod 3 \quad \Big| - 3\cdot k$$
$$2d \equiv 2 \bmod 3 \quad \Big| : 2$$
$$d \equiv 1 \bmod 3 \quad \rightarrow \quad \underline{d = 1 + 3s}$$
$$11 = 5 + 15s + 3c \quad \Big| - 5 - 15s$$
$$6 - 15s = 3c \quad \Big| : 3$$

$$\underline{c = 2 - 5t}$$

Dostáváme jediné řešení pro $t = 0$: $c = 1$, $d = 2$ a rozklad je

$$\frac{11}{15} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$$

a celý rozklad je

$$\frac{122}{105} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7}.$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v řešení č. 1.

<u>*Příklad* 2.6.7:</u>

Najděte celá nezáporná čísla x a y s vlastností $x^2 - 6y^2 = 1$.

<u>*Řešení*:</u>

Nejdříve vytvoříme hypotézu pomocí hledání takovýchto řešení. Je zřejmé, že platí: $1^2 - 6 \cdot 0 = 1$, tedy $x = 1$, $y = 0$ je jedno řešení.

Pro $x = 2$ platí: $4 - 6y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 2\,(2 - 3y^2) = 1$,

tedy levá strana rovnosti je sudá a pravá lichá. Z toho plyne, že čísla x nemohou být sudá. Proto za x budeme dosazovat jen lichá čísla a budeme hledat y tak, aby platila daná rovnost. Výsledky zapíšeme do tabulky:

x	y	$x^2 - 6y^2$
1	0	1
5	2	1
49	20	1
485	198	1
4801	1960	1
47525	19402	1
. . .	. . .	. . .

Z daných výsledků je možno vytvořit hypotézu:

Definujeme-li posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, tak, že

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 10x_{n+1} - x_n,\; x_1 = 1,\; x_2 = 5; \\ y_{n+2} &= 10y_{n+1} - y_n,\; y_1 = 0,\; y_2 = 2 \end{aligned}, \tag{2-2}$$

Pak pro každé přirozené n platí

$$x_n^2 - 6y_n^2 = 1.$$

Důkaz:

Stačí dokázat: Existuje-li posloupnost $\{a_n\}$ s vlastností

$$a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n,\; n \in N, \tag{2-3}$$

potom pro $\{x_n\}$[resp. $\{y_n\}$] posloupnost splňující vlastnost (2-3) pro niž $x_1 = 1,\; x_2 = 5$ [resp. $y_1 = 0,\; y_2 = 2$] platí pro každé $n \in N$: $x_n^2 - 6y_n^2 = 1$.

Rovnice $\lambda^2 - 10\lambda + 1 = 0$ je charakteristickou rovnicí pro rovnici

$$a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n.$$

Kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{96}}{2 \cdot 1} = \dfrac{10 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$;

$$\lambda_1 = 5 + 2\sqrt{6},\; \lambda_2 = 5 - 2\sqrt{6}.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ splňuje vztah (2-3), jestliže existují konstanty $K_1, K_2 \in R$ tak, že

$$a_n = K_1 \cdot (5+2\sqrt{6})^{n-1} + K_2 \cdot (5-2\sqrt{6})^{n-1}.$$

Píšeme speciálně pro $\{x_n\}$, $\{y_n\}$:

$$x_n = A \cdot (5+2\sqrt{6})^{n-1} + B \cdot (5-2\sqrt{6})^{n-1}$$

$$y_n = C \cdot (5+2\sqrt{6})^{n-1} + D \cdot (5-2\sqrt{6})^{n-1}$$

a dosadíme za n postupně 1 a 2. Potom

$$1 = A + B$$

$$\underline{5 = A \cdot (5+2\sqrt{6}) + B \cdot (5-2\sqrt{6})}$$

$$A = 1 - B$$

$$\underline{5 = 5 + 2\sqrt{6} - 5B - 2B\sqrt{6} + 5B - 2B\sqrt{6}} \quad |-5-2\sqrt{6}$$

$$-2\sqrt{6} = -4B\sqrt{6} \quad | : (-4\sqrt{6})$$

$$\underline{B = \frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad \underline{A = \frac{1}{2}}$$

$$0 = C + D$$

$$\underline{2 = C \cdot (5+2\sqrt{6}) + D \cdot (5-2\sqrt{6})}$$

$$C = -D$$

$$\underline{2 = -5D - 2D\sqrt{6} + 5D - 2D\sqrt{6}}$$

$$2 = -4D\sqrt{6} \quad | : (-4\sqrt{6})$$

$$\underline{D = -\frac{1}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}} \quad \rightarrow \quad \underline{C = \frac{\sqrt{6}}{12}}$$

a tedy: $A = B = \frac{1}{2}$; $C = -D = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

Proto $x_n = \frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\left(5-2\sqrt{6}\right)^{n-1}$

$$y_n = \frac{\sqrt{6}}{12}\left(5+2\sqrt{6}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt{6}}{12}\left(5-2\sqrt{6}\right)^{n-1}.$$

Pak vypočteme [uplatníme vzorec $a^2 + b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$]:

$$x_n^2 - 6y_n^2 = \left(x_n + \sqrt{6}y_n\right)\cdot\left(x_n - \sqrt{6}y_n\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\left(5-2\sqrt{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{6}\right)^{n-1} - \frac{1}{2}\left(5-2\sqrt{6}\right)^{n-1}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\left(5-2\sqrt{6}\right)^{n-1} - \frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\left(5-2\sqrt{6}\right)^{n-1}\right] =$$

$$= \left(5+2\sqrt{6}\right)^{n-1}\cdot\left(5-2\sqrt{6}\right)^{n-1} = \left(25 - 4\cdot 6\right)^{n-1} = 1^{n-1} = \underline{\underline{1}}.$$

Tím je dokázáno, že hledaná řešení jsou dvojice $[x_n;\ y_n]$, které jsou určeny vztahem (2-2).

3. Slovní úlohy o pohybu

Slovní úlohy o pohybu patří neodmyslitelně do každé sbírky slovních úloh. Jsou členěny podle toho kolik subjektů se pohybuje, po jakých drahách se pohybují a jakým způsobem se pohybují (o jaký pohyb jde).

3.1. Skupina 1: *„Jeden subjekt a stálá rychlost“*

Po dráze se pohybuje pouze jeden subjekt. Dráha bývá neuzavřená, může však být i uzavřená (tj. většinou kruhová). Subjekt se může i nemusí vracet do výchozího bodu. Subjekt se celou cestu pohybuje stálou rychlostí. Pokud se vrací do výchozí bodu, může se rychlost subjektu změnit (ale po celou dobu návratu musí být rychlost stálá). Počítáme rychlost subjektu, čas, který potřebuje na cestu nebo velikost dráhy, kterou urazí.

Příklad 3.1.1:
Cyklista vyjel ve 4 hodiny 30 minut a dojel do určeného místa v 7 hodin 50 minut. Jel stále touž průměrnou rychlostí. Kdyby byl ujel za 1 hodinu o $\frac{3}{5}$ km méně, přijel by do vesnice za $3\frac{13}{24}$ hodiny. Jakou jel rychlostí?

Řešení:
K řešení použijeme vztahu $s = v \cdot t$ pro rovnoměrný pohyb.
Průměrnou rychlost cyklisty označme x [km/h], doba jeho jízdy je $3\frac{1}{3}$ h a dráha $s = 3\frac{1}{3} \cdot x$.
Kdyby jel o $\frac{3}{5}$ km/h pomaleji, trvala by mu cesta $3\frac{13}{24}$ h a ujel by stejnou dráhu, potom je $s = 3\frac{13}{24} \cdot (x - \frac{3}{5})$ a platí

$$
\begin{aligned}
3\tfrac{1}{3}x &= 3\tfrac{13}{24} \cdot (x - \tfrac{3}{5}) \\
\tfrac{10}{3}x &= \tfrac{85}{24}x - \tfrac{51}{24} \quad \Big| \cdot 24 \\
80x &= 85x - 51 \quad \Big| - 80x + 51 \\
5x &= 51 \quad \Big| : 5 \\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 10{,}2}} \text{ [km/h]}
\end{aligned}
$$

Zkouška:
Jede-li $3\frac{1}{3}$ h rychlostí $10\frac{1}{5}$ km/h, ujede dráhu $s = 10\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{3} = 34$ km.
Jede-li $3\frac{13}{24}$ h rychlostí $10\frac{1}{5} - \frac{3}{5} = 9\frac{3}{5}$ km/h, ujede dráhu $s = 9\frac{3}{5} \cdot 3\frac{13}{24} = 34$ km.
Odpověď:
Cyklista jel rychlostí 10,2 km/h.

Příklad 3.1.2:
Bezpečnostní referent výrobny se má dostavit co nejrychleji na generální ředitelství, které je vzdáleno 12 km od výrobny. Za jak dlouho se může dostavit, trvá-li přistavení auta 10 minut a je-li průměrná rychlost jízdy po městě nejvýše 35 kmh^{-1}?

Řešení:

Doba cesty se vypočte podle vzorce $t = \dfrac{s}{v}$. Potom

$$t = \frac{12}{35} \doteq 0{,}34286 \doteq 20 \text{ min } 34 \text{ s.}$$

Připočteme-li 10 min na přistavení auta, dostáváme 30 min 34 s.

Zkouška:

Za 20 min 34 s ujede auto průměrnou rychlostí 35 kmh^{-1} dráhu s,

$$s = v \cdot t \doteq 35 \cdot 0{,}3428 \doteq 11{,}997 \doteq 20 \text{ km.}$$

Odpověď:

Referent se na generální ředitelství může dostavit nejdříve za 30 min 34 s.

Příklad 3.1.3:

Konají se závody v běhu na lyžích. Pokud závodník běží celou trať rychlostí 10 km/hod, přiběhne do cíle ve 13 hodin. Pokud běží rychlostí 15 km/hod, doběhne v 11 hodin. Jakou rychlostí musí běžet, aby doběhl ve 12 hodin?

Řešení:

Označíme si čas při rychlejším běhu x [h], potom čas při pomalejším běhu je o 2 hodiny větší, tedy $(x + 2)$ [h]. Vyjdeme ze vztahu $s = v \cdot t$, potom

v prvním případě

$$s = 10 \cdot (x + 2);$$

v druhém případě

$$s = 15 \cdot x.$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned} 10 \cdot (x + 2) &= 15 \cdot x \\ 10x + 20 &= 15x \quad \big| -10x \\ 20 &= 5x \quad \big| : 5 \\ \underline{x = 4} &\text{ [h]} \end{aligned}$$

Závody v běhu na lyžích začaly v 11 – 4 = 7 hodin; jejich délka je $s = v \cdot t = 15 \cdot 4 = 60$ km.

Aby závodník doběhl ve 12 hodin (doba na trati je 5 h), musí běžet rychlostí

$$v = \frac{s}{t} = \frac{60}{5} = \underline{\underline{12}} \text{ km/hod.}$$

Zkouška:

1) Závodník poběží 6 hodin rychlostí 10 km/hod a uběhne $6 \cdot 10 = 60$ km.

2) Závodník poběží 4 hodiny rychlostí 15 km/hod a uběhne $4 \cdot 15 = 60$ km.

3) Závodník poběží 5 hodin rychlostí 12 km/hod a uběhne $5 \cdot 12 = 60$ km.

Odpověď:

Aby závodník doběhl ve 12 hodin, musí běžet rychlostí 12 km/hod.

Příklad 3.1.4:

Turista vystoupil z údolí na horu a opět sestoupil; celý výlet trval 6 hod. 20 min.. Jak vysoko leží vrchol hory nad údolím, jestliže za 1 hod. se vystoupí o 300 m anebo sestoupí o 500 m, a jestliže si turista cestou popřál oddechu 1 hod.?

Řešení:

Celá doba pohybu (výstup a sestup) turisty trval 5 hod 20 min. Označme výšku hory nad údolím h, dobu výstupu x, dobu sestupu y. Potom dostáváme

$$\left.\begin{aligned} h &= x \cdot 300 \\ h &= y \cdot 500 \end{aligned}\right\} \rightarrow \; 300x = 500y.$$

Protože doba sestupu a výstupu je $5\frac{1}{3}$ h, dostáváme

$$\begin{aligned}
x + y &= 5\tfrac{1}{3} \quad \big| \cdot 3 \\
\underline{300x = 500y} &\quad \big| : 100 \\
3x + 3y &= 16 \\
\underline{3x = 5y} & \\
8y = 16 &\quad \big| : 8 \\
\underline{y = 2}\ [\mathrm{h}] \quad \rightarrow \quad 3x = 10 &\quad \rightarrow \quad \underline{x = 3\tfrac{1}{3}}\ [\mathrm{h}].
\end{aligned}$$

Zkouška:

Výstup: $3\frac{1}{3} \cdot 300 = 1\,000$ m.

Sestup: $2 \cdot 500 = 1\,000$ m.

Odpověď:

Vrchol hory leží 1 000 m nad údolím.

Příklad 3.1.5:

Kdosi si vyjde na procházku po stoupající silnici a chce být za $1\frac{1}{2}$ hod. zase doma. Jak daleko může jít, ujde-li při cestě do vrchu 60 m, při cestě s vrchu 75 m za minutu?

Řešení:

Cesta do vrchu . . . . . 60m/min = 3,6 km/h; cesta s vrchu . . . . . . 75 m/min = 4,5 km/h. Označíme-li si dobu výstupu *x* [h] a dobu sestupu *y* [h], potom pro převýšení *h* platí

$$\left.\begin{aligned} h &= x \cdot 3{,}6 \\ h &= y \cdot 4{,}5 \end{aligned}\right\} \rightarrow \; 3{,}6x = 4{,}5y.$$

Dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
3{,}6x &= 4{,}5y \\
\underline{x + y = 1{,}5} &\quad \rightarrow \quad x = 1{,}5 - y \\
3{,}6 \cdot (1{,}5 - y) &= 4{,}5y \\
5{,}4 - 3{,}6y &= 4{,}5y \quad \big| + 3{,}6y \\
5{,}4 &= 8{,}1y \quad \big| : 8{,}1 \\
\underline{y = \tfrac{2}{3}}\ [\mathrm{h}] &\quad \rightarrow \quad x = \tfrac{3}{2} - \tfrac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \underline{x = \tfrac{5}{6}}\ [\mathrm{h}]
\end{aligned}$$

Zkouška:

Stoupání: $60 \cdot 50 = 3\,000$ m, klesání: $75 \cdot 40 = 3\,000$ m.

Odpověď:

Kdosi může jít do vzdálenosti 3 km, pak se musí vrátit.

Příklad 3.1.6:

Plně naložený nákladní automobil s vlekem jede určitou trať průměrnou rychlostí o 6 km/h menší, než je obvyklá průměrná rychlost naloženého automobilu bez vleku. Do cíle jede proto o hodinu déle než obvykle. Na zpáteční cestě jede automobil prázdný a bez vleku, takže jeho průměrná rychlost je o 8 km/h větší než průměrná rychlost naloženého automobilu bez vleku. Tím dohoní hodinu ztraceného času. Vypočtěme, jaká je obvyklá průměrná rychlost naloženého automobilu (bez vleku), jak dlouhá je trať a jak dlouhá je normální doba jízdy.

Řešení:

Rychlost naloženého automobilu bez vleku si označíme v_1, jeho dobu jízdy t_1, rychlost naloženého automobilu s vlekem si označíme v_2, jeho dobu jízdy t_2 a rychlost prázdného automobilu bez vleku si označíme v_3, jeho dobu jízdy t_3, potom platí:

$$v_2 = v_1 - 6,\ \ t_2 = t_1 + 1;\ \ v_3 = v_1 + 8,\ \ t_3 = t_1 - 1.$$

Z toho pro určitou trať plyne

$$s = v_1 \cdot t_1$$
$$s = (v_1 - 6) \cdot (t_1 + 1)$$
$$\underline{s = (v_1 - 6) \cdot (t_1 + 1)}$$
$$s = v_1 \cdot t_1 \qquad \Big|\cdot (-1)$$
$$s = v_1 \cdot t_1 - 6t_1 + v_1 - 6$$
$$\underline{s = v_1 \cdot t_1 + 8t_1 - v_1 - 8}$$
$$0 = -6t_1 + v_1 - 6$$
$$\underline{0 = 8t_1 - v_1 - 8}$$
$$0 = 2t_1 - 14 \quad \rightarrow \quad \underline{t_1 = 7}\ [\mathrm{h}]$$
$$\underline{v_1} = 8t_1 - 8 = 56 - 8 = \underline{48}\ [\mathrm{km/h}]$$
$$\underline{s} = v_1 \cdot t_1 = 7 \cdot 48 = \underline{336}\ [\mathrm{km}]$$

Zkouška:

1) $s = v_1 \cdot t_1 = 7 \cdot 48 = 336$ km;
2) $s = v_1 \cdot t_1 = 8 \cdot 42 = 336$ km;
3) $s = v_1 \cdot t_1 = 6 \cdot 56 = 336$ km.

Odpověď:

Obvyklá průměrná rychlost naloženého automobilu (bez vleku) je 48 km/h, normální doba jízdy je 7 hodin a trať je dlouhá 336 km.

3.2. Skupina 2: „*Jeden subjekt a různá rychlost*“

Po dráze se pohybuje pouze jeden subjekt. Dráha bývá neuzavřená, může však být i uzavřená (*tj. většinou kruhová*). *Objekt se může i nemusí vracet do výchozího bodu. Rychlost subjektu se během jedné cesty alespoň jednou změní. Počítáme rychlosti subjektu nebo čas, který potřebuje na překonání jednotlivých úseků nebo vzdálenosti těchto úseků.*

Příklad 3.2.1:

Z místa A do místa B je 180 km, což se dá ujet za 5 hodin. Jezdec byl na cestě zdržen jednu hodinu. Poté zvýšil rychlost o 12 km/h a jel po svém zdržení ještě 3 hodiny. Kde byl zdržen?

Řešení:

Obvyklá průměrná rychlost z A do B je 180 : 5 = 36 km/h. Jezdec byl zdržen na cestě 1 hodinu a po zdržení jel ještě 3 hodiny, proto před zdržením jel 1 hodinu. Za 1 hodinu ujel 36 km, byl tedy zdržen 36 km od A.

Zkouška:

Jezdec jel před zdržením 1 hodinu rychlostí 36 km/h, po zdržení 3 hodiny rychlostí 36 + 12 = 48 km/h, celkem ujel $36 + 3 \cdot 48 = 180$ km. Doba zdržení se neprojeví, pouze může při výpočtu plést.

Odpověď:

Jezdec byl zdržen 36 km od A.

Příklad 3.2.2:

Dva turisté si vyrazili na procházku. Z chaty se vydali ve tři odpoledne a první úsek šli po rovině rychlostí 4 km/h. Po nějakém čase dorazili k úpatí kopce a začali stoupat nahoru rychlostí 3 km/h. Když se dostali až nahoru, zjistili, že už je pozdě a bez otálení se vydali stejnou cestou zpět. Z kopce šli rychlostí 6 km/h a pak po rovině (stejně jako prvně) 4 km/h. Na chatu se vrátili v devět večer. Kolik za svůj výlet ušli kilometrů?

Řešení:

Označme si velikost dráhy po rovině s_1, čas, za který ji ušli t_1; velikost dráhy nahoru označme s_2, čas potřebný na výstup t_2; velikost dráhy z kopce $s_3 = s_2$ a čas potřebný na sestup $t_3 = \frac{1}{2} t_2$ (protože rychlost je sestupu je dvojnásobná, musí být čas poloviční). Konec cesty je stejný jako začátek (velikost, rychlost i čas). Celkovou dráhu (tam i zpět) označme s. Celkový čas je rozdíl doby příchodu a odchodu, tedy 9 – 3 = 6 hodin. Ze zadání plyne:

$$2t_1 + t_2 + t_3 = 6$$

$$\underline{2s_1 + s_2 + s_3 = s}$$

Protože $s_1 = 4t_1$, $s_2 = 3t_2$, $s_3 = 6t_3 = 3t_2$, dostáváme:

$$2t_1 + \tfrac{3}{2} t_2 = 6 \quad \longrightarrow \quad t_2 = 4 - \tfrac{4}{3} t_1$$

$$\underline{8t_1 + 6t_2 = s}$$

$$8t_1 + 24 - 8t_1 = s$$

$$\underline{\underline{24 = s}}$$

Protože čas t_1 při řešení rovnice vyrušil, výsledek nezávisí na tom jak dlouho šli po rovině a jak dlouho stoupali či klesali (samozřejmě čas musí vyhovovat zadání).

Zkouška:
Vyjdeme z předchozí poznámky a jednotlivé časy si zvolíme např. takto: doba stoupání 2 h, doba klesání 1 h (musí být poloviční), doba cesty po rovině (dohromady tam i zpět) 3 h. Potom celková trasa je $3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 6 = 24$ km. Změníme-li časy na jednotlivých úsecích, vyjde nám opět celá trasa 24 km.
Odpověď:
Turisté ušli za svůj výlet 24 kilometrů.

Poznámka:
Pokud budou rychlosti zadány jinak a hodnota t_1 se při výpočtu nevyruší, vede řešení úlohy na diofantovskou rovnici.

Příklad 3.2.3:
Vlak jede rychlostí 60 km po rovině, 70 km s vrchu a 56 km do vrchu. Kolik roviny, stoupání a klesání obsahuje trať dlouhá 69 km, jestliže ji vlak ujede za 65 min v jednom, za 69,5 min. ve druhém směru? [délky tratí s vrchu a do vrchu mohou být v obou jízdách různé !!]

Řešení:
První úsek tam: čas t_1, rychlost $v_1 = 60$ km/h, dráha $s_1 = v_1 \cdot t_1 = 60t_1$.
Druhý úsek tam: čas t_2, rychlost $v_2 = 56$ km/h, dráha $s_2 = v_2 \cdot t_2 = 56t_2$.
Třetí úsek tam: čas t_3, rychlost $v_3 = 70$ km/h, dráha $s_3 = v_3 \cdot t_3 = 70t_3$.
První úsek zpět: čas t_4, rychlost $v_4 = 56$ km/h, dráha $s_4 = v_4 \cdot t_4 = 56t_4$.
Druhý úsek zpět: čas t_5, rychlost $v_5 = 70$ km/h, dráha $s_5 = v_5 \cdot t_5 = 70t_5$.
Třetí úsek zpět: čas t_1, rychlost $v_1 = 60$ km/h, dráha $s_1 = v_1 \cdot t_1 = 60t_1$.
Protože dráha tam i zpět je 69 km a čas tam 65 min, čas zpět 69,5 min, platí:

$$60t_1 + 56t_2 + 70t_3 = 69$$
$$60t_1 + 56t_4 + 70t_5 = 69$$
$$t_1 + t_2 + t_3 = \tfrac{65}{60}$$
$$t_1 + t_4 + t_5 = \tfrac{69{,}5}{60}\,.$$

Dostáváme tedy soustavu čtyř lineárních rovnic pro pět neznámých, která půjde upravit na jednu lineární rovnici pro dvě neznámé, tedy neurčitou rovnici.
Vyjádříme

$$t_3 = \tfrac{65}{60} - t_1 - t_2$$
$$t_4 = \tfrac{69{,}5}{60} - t_1 - t_5$$

a dosadíme do zbylých dvou rovnic

$$60t_1 + 56t_2 + 70(\tfrac{65}{60} - t_1 - t_2) = 69$$
$$\underline{60t_1 + 56(\tfrac{69{,}5}{60} - t_1 - t_5) + 70t_5 = 69}$$
$$60t_1 + 56t_2 + \tfrac{2\,275}{30} - 70t_1 - 70t_2 = 69 \quad | \cdot 30$$
$$\underline{60t_1 + \tfrac{1\,946}{30} - 56t_1 - 56t_5 + 70t_5 = 69} \quad | \cdot 30$$
$$1\,800t_1 + 1\,680t_2 + 2\,275 - 2\,100t_1 - 2\,100t_2 = 2\,070 \quad | - 2\,070$$
$$\underline{1\,800t_1 + 1\,946 - 1\,680t_1 - 1\,680t_5 + 2\,100t_5 = 2\,070} \quad | - 2\,070$$
$$300t_1 + 420t_2 = 205$$
$$\underline{120t_1 + 420t_5 = 124}$$

Nyní provedeme substituce:

$t_1 = x, \quad t_2 = y, \quad t_3 = \frac{65}{60} - x - y,$

$t_5 = z, \quad t_4 = \frac{69{,}5}{60} - x - z.$

a dostáváme: $300x + 420y = 205 \quad |:5$

$\underline{120x + 420z = 124} \quad |:2$

$$\left.\begin{array}{l} 60x + 84y = 41 \\ \underline{60x + 210z = 62} \end{array}\right\} -$$

$84y - 210z = -21 \quad |:(-21)$

$10z - 4y = 1$ tato diofantovská rovnice nemá celočíselné řešení;
nás však zajímají i neceločíselná řešení, rovnici budeme řešit jako neurčitou. Neznámé budou zlomky menší než 1, např.: $y < \frac{21}{84}$.

Zvolme:

a) $y = \frac{1}{4}$, potom $10z - 1 = 1 \;\rightarrow\; z = \frac{1}{5}$,

$60x + 84 \cdot \frac{1}{4} = 41 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{3}$.

Dostáváme: $t_1 = x = \frac{1}{3}$ h = 20 min, $t_2 = y = \frac{1}{4}$ h = 15 min, $t_3 = \frac{65}{60} - x - y = \frac{65}{60} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$
$= \frac{1}{2}$ h = 30 min, $t_4 = \frac{69{,}5}{60} - x - z = \frac{69{,}5}{60} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = = \frac{37{,}5}{60}$ h = 37,5 min, $t_5 = z = \frac{1}{5}$ h = 12 min.

b) $y = \frac{1}{6}$, potom $10z - \frac{4}{6} = 1 \;\rightarrow\; z = \frac{1}{6}$,

$60x + 84 \cdot \frac{1}{6} = 41 \;\rightarrow\; x = \frac{9}{20}$.

Dostáváme: $t_1 = x = \frac{9}{20}$ h = 27 min, $t_2 = y = \frac{1}{6}$ h = 10 min, $t_3 = \frac{65}{60} - x - y = \frac{65}{60} - \frac{9}{20} - \frac{1}{6} =$
$= \frac{7}{15}$ h = 28 min, $t_4 = \frac{69{,}5}{60} - x - z = \frac{69{,}5}{60} - \frac{9}{20} - \frac{1}{6} = = \frac{32{,}5}{60}$ h = 32,5 min, $t_5 = z = \frac{1}{6}$ h = 10 min.

Atd. … nekonečně mnoho řešení.

Zkouška:

a) Čas tam: $t_1 + t_2 + t_3 = 20 + 15 + 30 = 65$ min $= \frac{65}{60}$ h.

Čas zpět: $t_1 + t_4 + t_5 = 20 + 37{,}5 + 12 = 67{,}5$ min $= \frac{69{,}5}{60}$ h.

Dráha tam: $s_1 + s_2 + s_3 = 60 \cdot \frac{1}{3} + 56 \cdot \frac{1}{4} + 70 \cdot \frac{1}{2} = 20 + 14 + 35 = 69$ km.

Dráha zpět: $s_1 + s_4 + s_5 = 60 \cdot \frac{1}{3} + 56 \cdot \frac{37{,}5}{60} + 70 \cdot \frac{1}{5} = 20 + 35 + 14 = 69$ km.

b) Čas tam: $t_1 + t_2 + t_3 = 27 + 10 + 28 = 65$ min $= \frac{65}{60}$ h.

Čas zpět: $t_1 + t_4 + t_5 = 27 + 32{,}5 + 10 = 67{,}5$ min $= \frac{69{,}5}{60}$ h.

Dráha tam: $s_1 + s_2 + s_3 = 60 \cdot \frac{9}{20} + 56 \cdot \frac{1}{6} + 70 \cdot \frac{7}{15} = 27 + 9\frac{1}{3} + 32\frac{2}{3} = 69$ km.

Dráha zpět: $s_1 + s_4 + s_5 = 60 \cdot \frac{9}{20} + 56 \cdot \frac{32{,}5}{60} + 70 \cdot \frac{1}{6} = 27 + 30\frac{1}{3} + 11\frac{2}{3} = 69$ km.

Atd. … nekonečně mnoho řešení.

Odpověď:

V prvém případě je vodorovný úsek dlouhý 20 km, úsek do vrchu 14 km a úsek s vrchu 35 km, v druhém případě je vodorovný úsek 27 km, úsek do vrchu tam $9\frac{1}{3}$ km, úsek s vrchu tam $32\frac{2}{3}$ km, úsek do vrchu zpět $30\frac{1}{3}$ km, úsek s vrchu zpět $11\frac{2}{3}$ km (tedy úseky nejsou stejné, vlak jel zpět jinou cestou).

Atd. … nekonečně mnoho řešení.

3.3. Skupina 3: *„Dva subjekty proti sobě“*

Po neuzavřené dráze se pohybují proti sobě dva subjekty. Začátek pohybu obou subjektů může být ve stejnou nebo i v různou dobu. Počítáme rychlosti subjektů a čas, který na překonání svých úseků potřebují. Můžeme také počítat vzdálenost bodů, ve kterých subjekty začínají pohyb.

Příklad 3.3.1:
Z Prahy do Olomouce je přibližně 250 km. V 6 hodin vyjel z Prahy do Olomouce rychlík průměrnou rychlostí 85 km/h. Ve stejném okamžiku vyjel z Olomouce do Prahy osobní vlak průměrnou rychlostí 40 km/h. V kolik hodin a v jaké vzdálenosti od Prahy se setkají?

Řešení:
Vycházíme opět ze vztahu $s = v \cdot t$ pro rovnoměrný pohyb. Čas, který pojedou oba vlaky (je stejný) označme x. Potom můžeme vyjádřit dráhy vlaků.
Rychlík z Prahy ujel dráhu $s_1 = v_1 \cdot t = 85x$, osobní vlak z Olomouce ujel dráhu $s_2 = v_2 \cdot t =$ $= 40x$, a protože platí $s = s_1 + s_2$ (vlaky jedou proti sobě), dostáváme rovnici

$$250 = 85x + 40x$$
$$250 = 125x \quad \Big| : 125$$
$$\underline{\underline{x = 2}} \text{ [h]}$$

Zkouška:
Za 2 hodiny ujede rychlík $2 \cdot 85 = 170$ km, osobní vlak $2 \cdot 40 = 80$ km;
celkem ujedou $170 + 80 = 250$ km.
Odpověď:
Vlaky se setkají v 8 hodin 170 km od Prahy.

Příklad 3.3.2:
Dva listonoši A a B vyjíždějí sobě vstříc z míst vzdálených 59 mil. Listonoš A ujede 7 mil za 2 hodiny, listonoš B 8 mil za 3 hodiny, přitom B vyjíždí na cestu o hodinu později než A. Kolik mil ujede A do setkání s B?

Řešení:
Listonoš A ujde za 1 hodinu $7 : 2 = 3{,}5$ míle, listonoš B ujde za 1 hodinu $8 : 3 = 2\frac{2}{3}$ míle, listonoš A je na cestě x hodin, listonoš B je na cestě $(x - 1)$ hodin. Protože listonoši jedou proti sobě, dráhy se sčítají a platí

$$3{,}5 \cdot x + \tfrac{8}{3} \cdot (x - 1) = 59 \quad \Big| \cdot 6$$
$$21x + 16x - 16 = 354 \quad \Big| + 16$$
$$37x = 370 \quad \Big| : 37$$
$$\underline{x = 10} \text{ [h]} \quad \rightarrow \quad \underline{x - 1 = 9} \text{ [h]}.$$

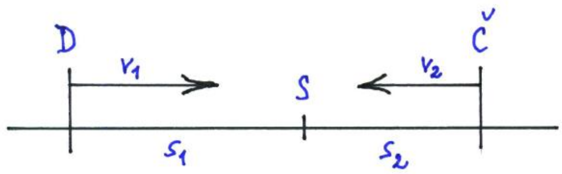
Zkouška:
Listonoš A ujde za 2 hodiny 7 mil, za 10 hodin ujde $5 \cdot 7 = 35$ mil, listonoš B ujde za 3 hodiny 8 mil, za 9 hodin ujde $3 \cdot 8 = 24$ mil; oba dohromady ujdou $35 + 24 = 59$ mil.
Odpověď:
Listonoš A ujde do setkáni s B 35 mil.

Příklad 3.3.3:

Dva přátelé, Džin a Čin, bydlí v jedné ulici. Jednou v neděli o deváté hodině se náhodou oba rozhodli, že se navštíví. Oba si zavolali rikšu a vyjeli současně na ulici. Na ulici se minuli, ale neviděli se. V tom okamžiku Džin právě ujel o 1,5 km větší vzdálenost než Čin. Džin přijel k přítelovu domu za dalších 6 minut 45 sekund. Činovi trvalo ještě 12 minut od střetnutí, než přijel k cíli. Oba rikšové jeli různou, ale stálou rychlostí, kterou udržovali celou cestu. Jak daleko od sebe bydlí přátelé?

Řešení č. 1:

Obr. 3-1:



Označme si dráhu Džina do setkání s_1, dráhu Čina do setkání s_2, potom $s_1 = s_2 + 1{,}5$. Do setkání jeli oba stejnou dobu, proto $t_1 = t_2 = t$.
Po setkání ujel Džin dráhu s_2 za 6 minut 45 sekund – označme t_1'; dráhu s_1 ujel Čin za 12 minut – označme t_2'.

Do setkání: Po setkání:

$s_1 + s_2 = s$,

$s_1 = v_1 \cdot t$, $\quad s_1 = v_2 \cdot t_2' \rightarrow s_1 = 12v_2$,

$s_2 = v_2 \cdot t$, $\quad s_2 = v_1 \cdot t_1' \rightarrow s_2 = 6{,}75v_1$.

Potom platí:

$s_1 - s_2 = 1{,}5 \quad \rightarrow \quad 12v_2 - 6{,}75v_1 = 1{,}5$.

Porovnáme-li dráhy před setkáním a po setkání, dostáváme:

$$v_1 t = 12v_2$$
$$\underline{v_2 t = 6{,}75v_1}$$
$$v_2 = \frac{v_1 t}{12}$$
$$\frac{v_1 t^2}{12} = 6{,}75v_1 \quad \Big| \cdot \frac{12}{v_1}$$
$$t^2 = 6{,}75 \cdot 12$$
$$t = \sqrt{81} = \underline{9} \text{ [s]},$$

potom $v_2 = \dfrac{v_1 t}{12} = \dfrac{v_1 \cdot 9}{12} \quad \rightarrow \quad v_2 = 0{,}75v_1$.

Dosadíme-li do vztahu $s_1 - s_2 = 1{,}5$, dostáváme:

$$12v_2 - 6{,}75v_1 = 1{,}5$$
$$9v_1 - 6{,}75v_1 = 1{,}5$$
$$2{,}25v_1 = 1{,}5 \quad \Big| : 2{,}25$$
$$v_1 = \tfrac{2}{3} \text{ [km/min]} \quad \rightarrow \quad v_2 = 0{,}5 \text{ [km/min]}$$

Pro celkovou dráhu s platí:

$$s = s_1 + s_2 = v_1 t + v_2 t = \left(\tfrac{2}{3} + 0{,}5\right) \cdot 9 = 10{,}5 \text{ km}.$$

Zkouška:

Po setkání ujel Džin $s_2 = v_1 \cdot t_1' = \tfrac{2}{3} \cdot 6{,}75 = 4{,}5$ km.

Po setkání ujel Čin $s_1 = v_2 \cdot t_2' = 0{,}5 \cdot 12 = 6$ km.
Celkem ujeli oba 4,5 + 6 = 10,5 km., což je celková vzdálenost.
Odpověď:
Džin a Čin bydlí 10,5 km od sebe.

Řešení č. 2:
Opět uvažujeme, že do setkání jeli oba stejnou dobu, proto $t_1 = t_2 = t$. Označme si dráhu Džina do setkání s_1, dráhu Čina do setkání s_2, a rozdíl drah d, potom $s_1 = s_2 + d$.
Po setkání ujel dráhu s_2 Džin za čas t_1'; dráhu s_1 ujel Čin čas t_2'.

Do setkání:	Po setkání:
$s_1 + s_2 = s,$	
$s_1 = v_1 \cdot t,$	$s_1 = v_2 \cdot t_2',$
$s_2 = v_2 \cdot t,$	$s_2 = v_1 \cdot t_1'.$

Potom platí:
$s_1 - s_2 = d \quad \rightarrow \quad v_2 t_2' - v_1 t_1' = d.$
Porovnáme-li dráhy před setkáním a po setkání, dostáváme:

$$v_1 t = v_2 t_2' \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{v_1 t}{t_2'}$$

$$\underline{v_2 t = v_1 t_1}$$

$$\frac{v_1 t}{t_2'} \cdot t = v_1 t_1' \quad \Big| \cdot \frac{t_2'}{v_1}$$

$$t^2 = t_1' \cdot t_2'$$

$$\underline{\underline{t = \sqrt{t_1' \cdot t_2'}}} \qquad \textbf{(3-1)}$$

Potom:

$$v_2 = \frac{v_1 \cdot \sqrt{t_1' \cdot t_2'}}{t_2'} \quad \rightarrow \quad \underline{v_2 = v_1 \cdot \sqrt{\frac{t_1'}{t_2'}}}$$

$$\underline{v_1 = v_2 \cdot \sqrt{\frac{t_2'}{t_1'}}}$$

Dále platí: $s_1 - s_2 = d$, z čeho plyne:

a) $v_2 t_2' - v_1 t_1' = d$

$$v_1 \cdot \sqrt{\frac{t_1'}{t_2'}} \cdot t_2' - v_1 t_1' = d$$

$$v_1 \sqrt{t_1' t_2'} - v_1 t_1' = d$$

$$\underline{\underline{v_1 = \frac{d}{\sqrt{t_1' t_2'} - t_1'}}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{v_1 = \frac{d}{t - t_1'}}} \qquad \textbf{(3-1a)}$$

b) $v_2 t_2' - v_1 t_1' = d$

$$v_2 t_2' - v_2 \cdot \sqrt{\frac{t_2'}{t_1'}} \cdot t_1' = d$$

$$v_2 t_2' - v_2 \cdot \sqrt{t_1' t_2'} = d$$

$$\underline{\underline{v_2 = \frac{d}{t_2' - \sqrt{t_1' t_2'}}}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{v_2 = \frac{d}{t_2' - t}}}\,. \qquad \textbf{(3-1b)}$$

Pro celkovou dráhu s potom platí:

$$s = s_1 + s_2 = v_1 t + v_2 t = \frac{dt}{\sqrt{t_1' t_2'} - t_1'} + \frac{dt}{t_2' - \sqrt{t_1' t_2'}} = \underline{\underline{\frac{dt}{t - t_1'} + \frac{dt}{t_2' - t}}}\,. \qquad \textbf{(3-2)}$$

Pro konkrétní hodnoty $t_1' = 6{,}75$, $t_2' = 12$ dostáváme

$$t = \sqrt{t_1' \cdot t_2'} = \sqrt{6{,}75 \cdot 12} = 9$$

a potom:

$$s = \frac{dt}{t - t_1'} + \frac{dt}{t_2' - t} = \frac{1{,}5 \cdot 9}{9 - 6{,}75} + \frac{1{,}5 \cdot 9}{12 - 9} = 6 + 4{,}5 = \underline{\underline{10{,}5}} \text{ km.}$$

Zkouška:

$$v_1 = \frac{d}{t - t_1'} = \frac{1{,}5}{9 - 6{,}75} = \tfrac{2}{3} \text{ [km/min]}; \quad v_2 = \frac{d}{t_2' - t} = \frac{1{,}5}{12 - 9} = 0{,}5 \text{ [km/min], potom}$$

$s = v_1 t_1' + v_2 t_2' = \frac{2}{3} \cdot 6{,}75 + 0{,}5 \cdot 12 = 4{,}5 + 6 = 10{,}5$ km.

Odpověď:

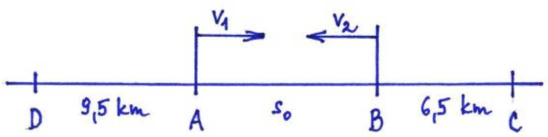
Džin a Čin bydlí 10,5 km od sebe.

<u>*Příklad* 3.3.4:</u>

Z míst A, B vyjeli současně proti sobě dva cyklisté. Setkali se a pokračovali v jízdě; za další hodinu dojel prvý do místa C položeného $6\frac{1}{2}$ km za B, druhý do místa D položeného $9\frac{1}{2}$ km za A. Jaké byly jejich rychlosti? Jaká vzdálenost AB?

Řešení:

Obr. 3.2:



$s = v \cdot t \qquad t_1 = t_2$

Vyjádříme-li vztahy pomocí známých symbolů, dostáváme:

$s_1 = s_0 + 6{,}5 = v_1 \cdot t_1 = 1{,}5 v_1$

$s_2 = s_0 + 9{,}5 = v_2 \cdot t_2 = 1{,}5 v_2$

Ze vztahů dostáváme dvě rovnice pro tři neznámé, které vedou na neurčitou rovnici:

$s_0 + 6{,}5 = 1{,}5 v_1 \quad | \cdot (-1)$

$\underline{s_0 + 9{,}5 = 1{,}5 v_2}$

$3 = 1{,}5(v_2 - v_1) \quad | : 1{,}5$

$v_2 - v_1 = 2$ ….. dostáváme neurčitou rovnici, která má nekonečně mnoho řešení. Dostaneme je tak, že volíme v_1 a počítáme v_2 ($v_1 \geq 4\frac{1}{3}$, $v_2 \geq 6\frac{1}{3}$, protože první cyklista musí dojet do C, druhý do D).

Příklady:

v_1**:**	5	8	11	15	21	…
v_2**:**	7	10	13	17	23	…
s_0**:**	1	5,5	10	16	25	…

Zkouška:

1) První cyklista ujel $5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5$ km, což je $s_0 + 6{,}5 = 1 + 6{,}5 = 7{,}5$.
   Druhý cyklista ujel $7 \cdot 1{,}5 = 10{,}5$ km, což je $s_0 + 9{,}5 = 1 + 9{,}5 = 10{,}5$.

4) První cyklista ujel 15 · 1,5 = 22,5 km, což je s_0 + 6,5 = 16 + 6,5 = 22,5.
   Druhý cyklista ujel 17 · 1,5 = 25,5 km, což je s_0 + 9,5 = 16 + 9,5 = 25,5.
atd…
Odpověď:
1) První jel rychlostí 5 km/h, druhý 7 km/h. Místa *A*,*B* jsou od sebe vzdálena 1 km.
4) První jel rychlostí 15 km/h, druhý 17 km/h. Místa *A*,*B* jsou od sebe vzdálena 16 km.
atd…

Poznámka:
Přestože jsme hledali pouze celočíselná řešení (neurčitou rovnici jsme považovali za diofatovskou), úloha může mít i jiná, kladná reálná řešení, vyhovující dané podmínce.

Příklad 3.3.5:
Dva chodci *A*, *B* jsou od sebe vzdáleni 57,2 km a vyjdou si současně vstříc. Když se sejdou, shledají, že *A* ušel o 4,4 km více, což je způsobeno tím, že ujde za hodinu o 0,8 km více. Po jaké době se setkali? Jak rychle za hodinu jde který?

Řešení:
Chodec z *A* ujde každou hodinu o 0,8 km více než chodec z *B*, celkem ujde o 4,4 km více, z toho plyne, že chodec z *A* šel (stejně jako chodec z *B*) 4,4 : 0,8 = 5,5 h.
Chodec z *B* ušel celkem (57,2 – 4,4) : 2 = 26,4 km, tj. šel rychlostí 26,4 : 5,5 = 4,8 km/h.
Chodec z *A* ušel celkem 57,2 – 26,4 = 30,8 km, tj. šel rychlostí 30,8 : 5,5 = 5,6 km/h.
Zkouška:
Celkem oba chodci ušli 5,6 · 5,5 + 4,8 · 5,5 = 57,2 km.
Odpověď:
Chodci se potkali po 5,5 hodinách, první šel rychlostí 5,6 km/h, druhý rychlostí 4,8 km/h.

Příklad 3.3.6:
Dva cyklisté vyjeli proti sobě současně z míst *A* a *B*. Když se setkali, měl prvý ujeto o 20 km více než druhý a potřeboval ještě 3 hod., aby dojel do *B*; druhý jel ještě 5 hod. 20 min. než dojel do *A*. Jak daleko je z *A* do *B*?

Řešení:
Vyjdeme ze vztahu $s = v \cdot t$. První cyklista (z *A*) jede rychlostí v_1, druhý cyklista (z *B*) jede rychlostí v_2. Do setkání ujede první cyklista dráhu s_1, druhý cyklista dráhu s_2 a platí:

$$s_1 - s_2 = 20.$$

Po setkání platí pro prvního cyklistu:

$$3v_1 = s_2 = v_2 \cdot t,$$

pro druhého cyklistu platí:

$$5\tfrac{1}{3} v_2 = s_1 = v_1 \cdot t.$$

Z toho dostáváme soustavu rovnic:

$$v_1 \cdot t - v_2 \cdot t = 20$$

$$v_1 \cdot t = 5\tfrac{1}{3} v_2$$

$$\underline{v_2 \cdot t = 3v_1}$$

$$v_2 = \frac{3v_1}{t}$$

$$v_1 t - \frac{3v_1}{t} \cdot t = 20$$

$$\underline{v_1 t = \frac{16}{3} \cdot \frac{3v_1}{t}} \quad \rightarrow \quad v_1 t = \frac{16 v_1}{t} \quad \Big| \cdot \frac{t}{v_1}$$

$$t^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \underline{t = 4} \text{ [h] (záporné } t \text{ nelze).}$$

Do rovnice soustavy $v_1 t - \frac{3v_1}{t} \cdot t = 20$ dosadíme $t = 4$ a dostáváme

$4v_1 - 3v_1 = 20 \quad \rightarrow \quad \underline{v_1 = 20}$ [km/h].

Potom $v_2 = \frac{3v_1}{t} \quad \rightarrow \quad \underline{v_2 = 15}$ [km/h].

Celková dráha je $s_1 + s_2 = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = 20 \cdot 4 + 15 \cdot 4 = \underline{\underline{140}}$ km.

Zkouška:

První cyklista ujel dráhu $s_1 = 20 \cdot 4 = 80$ km, druhý cyklista ujel po setkání $5\frac{1}{3} \cdot 15 = 80$ km, což je stejná dráha.

Druhý cyklista ujel dráhu $s_2 = 15 \cdot 4 = 60$ km, první cyklista ujel po setkání $3 \cdot 20 = 60$ km, což je stejná dráha.

Odpověď:

Z *A* do *B* je 140 km.

Příklad 3.3.7:

Ze dvou 30 km od sebe vzdálených stanic *A*, *B* jedou vlaky proti sobě, vlak z *B* vyjede však o ½ hod. později; 10 min. po odjezdu vlaku z *B* jsou vlaky ještě 7 km od sebe vzdáleny, za dalších 10 min. jsou po setkání zase již 2½ km od sebe vzdáleny. Stanovte rychlosti vlaků za minutu.

Řešení:

Vlak z *A* jede rychlostí *x* km/min, doba jízdy je o 30 min delší než vlaku z *B*. Vlak z *B* jede rychlostí *y* km/min. Potom dostáváme

$$40 \cdot x + 10 \cdot y = 23$$
$$\underline{10 \cdot x + 10 \cdot y = 9{,}5} \quad \Big| \cdot (-1)$$
$$30x = 13{,}5 \quad \Big| : 30$$
$$x = 0{,}45 \text{ km/min} = \underline{27 \text{ km/h}};$$
$$4{,}5 + 10y = 9{,}5 \quad \Big| - 4{,}5$$
$$10y = 5 \quad \Big| : 10$$
$$y = 0{,}5 \text{ km/min} = \underline{30 \text{ km/h}}.$$

Zkouška:

1) Vlak z *A*: $40 \cdot 0{,}45 = 18$ km, vlak z *B*: $10 \cdot 0{,}5 = 5$ km. Celkem ujedou $18 + 5 = 23$, zbývá do setkání $30 - 23 = 7$ km.
2) Vlak z *A*: $10 \cdot 0{,}45 = 4{,}5$ km, vlak z *B*: $10 \cdot 0{,}5 = 5$ km. Celkem ujedou $4{,}5 + 5 = 9{,}5$, zbývá do setkání $7 - 9{,}5 = -2{,}5$ km, jsou tedy po setkání vzdáleny 2,5 km.

Odpověď:

Vlak z *A* jede průměrnou rychlostí 450 m/min, vlak z *B* jede průměrnou rychlostí 500 m/min.

Příklad 3.3.8:

Města A a B jsou vzdálena 400 km. Z města A vyjíždí nákladní auto průměrnou rychlostí 50 km/h, o 2 hodiny později z města B osobní auto rychlostí 70 km/h. Mezi oběma městy je motorest, kam obě auta přijedou současně. Jak daleko je motorest od města A?

Řešení:

Z města A vyjíždí nákl. automobil rychlostí v_1 = 50 km/h, jeho doba jízdy je (t + 2) hod. Z města B vyjíždí osob. automobil rychlostí v_2 = 70 km/h, jeho doba jízdy je t hod. Pro jejich dráhy platí:

$$s_1 = 50 \cdot (t + 2)$$
$$s_2 = 70 \cdot t$$
$$\underline{s_1 + s_2 = 400}$$
$$50t + 100 + 70t = 400 \quad \Big| -100$$
$$120t = 300 \quad \Big| :120$$
$$\underline{t = 2{,}5} \text{ hod.}$$

Zkouška:

Nákladní automobil ujede dráhu $s_1 = 50 \cdot 4{,}5 = 225$ km, osobní automobil ujede dráhu $s_2 =$
$= 70 \cdot 2{,}5 = 175$ km. Dohromady ujedou 225 + 175 = 400 km.

Odpověď:

Motorest je 225 km od města A.

Příklad 3.3.9:

Dvě letadla letí z letišť A a B, vzdálených 420 km, navzájem proti sobě. Letadlo z A odstartovalo o 15 min později a letí průměrnou rychlostí o 40 km/h větší než letadlo z B. Určete průměrné rychlosti obou letadel, víte-li, že se setkají 30 minut po startu letadla z A.

Řešení:

Z místa A letí letadlo průměrnou rychlostí $v_1 = (x + 40)$ km/h, jeho doba letu je t hod. Z města B letí letadlo průměrnou rychlostí $v_2 = x$ km/h, jeho doba letu je $(t + \frac{1}{4})$ hod. Je-li $t = \frac{1}{2}$ hod., platí pro jejich dráhy:

$$s_1 = (x + 40) \cdot \tfrac{1}{2}$$
$$s_2 = \tfrac{3}{4} \cdot x$$
$$\underline{s_1 + s_2 = 420}$$
$$(x + 40) \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4} \cdot t = 420 \quad \Big| \cdot 4$$
$$2x + 80 + 3x = 1\,680 \quad \Big| -80$$
$$5x = 1\,600 \quad \Big| :5$$
$$\underline{x = 320} \text{ km/hod.}$$

Potom $v_1 = (x + 40) = \underline{\underline{360}}$ km/hod, $v_2 = x = \underline{\underline{320}}$ km/hod.

Zkouška:

Letadlo z místa A uletí dráhu $s_1 = 360 \cdot \frac{1}{2} = 180$ km, letadlo z místa B uletí dráhu $s_2 = 320 \cdot \frac{3}{4} =$
$= 240$ km. Celkem uletí obě letadla dráhu 180 + 240 = 420 km.

Odpověď:

Letadlo z A letí průměrnou rychlostí 360 km/hod, letadlo z B letí průměrnou rychlostí 320 km/hod.

Příklad 3.3.10:
Dva cestující vyrazili ve stejný okamžik z Paříže a ze Château-Thierry. V momentě, kdy se potkali, první urazil o 12 km více než druhý. Oba pokračovali nezměněnou rychlostí. První dorazil do Château-Thierry $4\frac{2}{3}$ h po setkání, druhý do Paříže $7\frac{5}{7}$ h po setkání. Jaká je vzdálenost mezi oběma městy?

Řešení:
Do setkání se první cestující pohyboval rychlostí v_1 po dobu t a urazil vzdálenost s_1, druhý se do setkání pohyboval rychlostí v_2 po dobu t a urazil dráhu s_2, $s_1 = s_2 + 12$. Z toho plyne

$$s_2 = v_2 \cdot t$$
$$s_2 + 12 = v_1 \cdot t\,.$$

Po setkání se první cestující pohyboval rychlostí v_1 po dobu $4\frac{2}{3}$ h a urazil vzdálenost s_2, druhý se po setkání pohyboval rychlostí v_2 po dobu $7\frac{5}{7}$ h a urazil dráhu $s_1 = s_2 + 12$. Z toho plyne

$$s_2 = \tfrac{14}{3} v_1 \quad \rightarrow \quad v_1 = \tfrac{3}{14} \cdot s_2$$
$$s_2 + 12 = \tfrac{54}{7} v_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = \tfrac{7}{54} \cdot (s_2 + 12)\,.$$

Z obou soustav rovnic můžeme vyjádřit poměr rychlostí v_1, v_2 a dostáváme:

$$1)\ \frac{v_1}{v_2} = \frac{s_2 + 12}{s_2},$$
$$2)\ \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{3}{14} \cdot s_2}{\frac{7}{54} \cdot (s_2 + 12)}.$$

Z toho plyne

$$\frac{s_2 + 12}{s_2} = \frac{\frac{3}{14} \cdot s_2}{\frac{7}{54} \cdot (s_2 + 12)}$$
$$\frac{s_2 + 12}{s_2} = \frac{81 \cdot s_2}{49 \cdot (s_2 + 12)}$$
$$49 \cdot (s_2 + 12)^2 = 81 \cdot (s_2)^2 \quad \Big|\ \sqrt{\ }$$
$$7 \cdot (s_2 + 12) = 9 \cdot s_2$$
$$7s_2 + 84 = 9s_2 \quad \Big| - 7s_2$$
$$84 = 2s_2 \quad \Big| : 2$$
$$\underline{s_2 = 42}\ [\text{km}]$$

Celková vzdálenost je $s = s_1 + s_2 = 2s_2 + 12 = \underline{\underline{96}}$ km.

Zkouška:
Rychlost prvního cestujícího je $v_1 = \frac{3}{14} \cdot s_2 = \frac{3}{14} \cdot 42 = 9$ km/h, rychlost prvního cestujícího je $v_2 = \frac{7}{54} \cdot (s_2 + 12) = \frac{7}{54} \cdot 54 = 7$ km/h. První úsek z Paříže do místa setkání je dlouhý 42 + 12 = 54 km a první cestující jej urazí za 54 : 9 = 6 hodin, druhý úsek ze Château-Thierry do místa setkání je dlouhý 42 km a druhý cestující jej urazí za 42 : 7 = 6 hodin. První cestující dojde po setkání do Château-Thierry za 42 : 9 = $4\frac{2}{3}$ hodiny, druhý cestující dojde po setkání do Paříže za 54 : 7 = $7\frac{5}{7}$ hodiny.

Odpověď:
Vzdálenost mezi Paříží a Château-Thierry je 96 km.

3.4. Skupina 4: „*Dva subjekty za sebou*“

Po neuzavřené dráze se pohybují za sebou dva subjekty. Subjekty začínají pohyb ze stejných míst v různou dobu a jeden subjekt dohoní druhý nebo dojedou do cíle ve stejnou dobu. Subjekty též mohou vyjet ve stejnou dobu, ale do cíle dojedou v různých časech. Nebo též subjekty začínají pohyb z různých míst ve stejnou dobu a jeden dohoní druhý. Můžeme počítat rychlosti subjektů, čas, který potřebují na zdolání jednotlivých úseků a velikosti těchto úseků.

Příklad 3.4.1:

V 8^{30} h vyjela skupina dětí z tábora na celodenní cyklistický výlet. Po deváté se prudce zhoršilo počasí a vedoucí tábora se rozhodl poslat za dětmi po stejné trase autobus, který vyjel v 10^{30} h. Za jak dlouho a v jaké vzdálenosti od tábora dojede autobus děti, jestliže děti ujedou za 1 hodinu průměrně 15 km a autobus jede rychlostí 75 km/h?

Řešení:

K řešení použijeme vztahu $s = v \cdot t$ pro rovnoměrný pohyb. Označme neznámou dobu jízdy dětí x, potom doba jízdy autobusu je $(x - 2)$. Pro jednotlivé dráhy platí:

děti: $s_1 = v_1 \cdot t_1 = 15 \cdot x$,

autobus: $s_2 = v_2 \cdot t_2 = 75 \cdot (x - 2)$.

Protože $s_1 = s_2$, dostáváme

$$15x = 75 \cdot (x - 2)$$
$$15x = 75x - 150 \quad \Big| + 150 - 15x$$
$$150 = 60x \quad \Big| : 60$$
$$\underline{x = 2{,}5}\ [\mathrm{h}]$$

Zkouška:

Děti jedou 2,5 hodiny rychlostí 15 km/h a ujedou $2{,}5 \cdot 15 = 37{,}5$ km,
autobus jede 0,5 hodiny rychlostí 75 km/h a ujede $0{,}5 \cdot 75 = 37{,}5$ km.

Odpověď:

Autobus dojede děti v 11 hodin (za půl hodiny) 37,5 km od tábora.

Příklad 3.4.2:

Pes se žene za králíkem, který je 150 stop před ním. Pes urazí každým skokem 9 stop, zatímco králík urazí 7 stop. Kolik skoků musí udělat pes, aby dohonil králíka?

Řešení č. 1: - *úsudkem*.

Pes každým skokem zkrátí náskok králíka o 2 stopy. Protože králík má náskok 150 stop, dohoní jej pes Za

$$150 : 2 = \underline{75} \text{ skoků.}$$

Zkouška:

Dráha králíka je 150 stop plus 75 skoků po 7 stopách, tj. $150 + 75 \cdot 7 = \underline{675}$ stop.
Dráha psa je 75 skoků po 9 stopách, tj. $75 \cdot 9 = \underline{675}$ stop.
Obě dráhy jsou stejně dlouhé.

Odpověď:

Pes dohoní králíka po 75 skocích.

Řešení č. 2: - *rovnicí* (*využití vzorců pro pohyb*)
Králík má náskok $s_0 = 150$ stop; dále do doby než jej dohoní pes uběhne dráhu s_1, na které udělá p_1 skoků o délce d_1, tedy platí $s_1 = d_1 \cdot p_1$. Protože $d_1 = 7$ a počet p_1 neznáme, označíme jej x. Potom $s_1 = 7 \cdot x$.
Pes uběhne dráhu s_2, na které udělá p_2 skoků o délce d_2, tedy platí $s_2 = d_2 \cdot p_2$. Protože $d_2 = 9$ a $p_2 = p_1$, je $p_2 = x$ a $s_2 = 9 \cdot x$.
Protože pes králíka dohoní, platí:

$$s_2 = s_1 + s_0$$
$$9x = 7x + 150 \quad \Big| -7x$$
$$2x = 150 \quad \Big| : 2$$
$$\underline{\underline{x = 75}} \text{ skoků.}$$

Zkouška a *odpověď* - viz řešení 1.

Řešení 3: - *užití nekonečné geometrické řady*
Králík má náskok 150 stop. Aby se pes dostal na místo králíka, musí udělat $150 : 9 =$
$= \frac{50}{3}$ skoků.
Mezi tím králík urazí $7 \cdot \frac{50}{3} = \frac{350}{7}$ stop.
Nyní má králík náskok $\frac{350}{7}$ stop. Aby se pes opět dostal na místo králíka, musí udělat
$\frac{350}{7} : 9 = \frac{350}{27}$ skoků.
Mezi tím králík urazí $7 \cdot \frac{350}{27} = \frac{2\,450}{27}$ stop.
Nyní má králík náskok $\frac{2450}{27}$ stop. Aby se pes opět dostal na místo králíka, musí udělat
$\frac{2\,450}{27} : 9 = \frac{2\,450}{243}$ skoků; atd.
Počet skoků psa tvoří nekonečnou řadu

$$s = \frac{50}{3} + \frac{350}{27} + \frac{2\,450}{243} + \dots\ ,$$

jejíž kvocient je

$$q = \frac{\frac{350}{27}}{\frac{50}{3}} = \frac{\frac{2\,450}{243}}{\frac{350}{27}} = \dots = \frac{7}{9}.$$

Součet řady vypočteme podle vzorce:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{50}{3}}{1-\frac{7}{9}} = \frac{\frac{50}{3}}{\frac{2}{9}} = \frac{450}{6} = \underline{\underline{75}} \text{ skoků.}$$

Zkouška a *odpověď* - viz řešení 1.

Příklad 3.4.3:
Dvě lodi, vzdálené 2 340 m, plují stejným směrem. První urazí za 1 min 56 m, druhá 74 m. Za jak dlouho dostihne druhá loď první?

Řešení:
Rozdíl v rychlosti lodí je 74 – 56 = 18 m za min. Tedy druhá loď každou minutu sníží ztrátu na první o 18 m. Vzdálenost zlikviduje za 2 340 : 18 = 130 min = 2 h 10 min.
Zkouška:
Za 2 h 10 min ujede první (pomalejší) loď $130 \cdot 56 = 7\,280$ m, za 2 h 10 min ujede druhá (rychlejší) loď $130 \cdot 74 = 9\,620$ m, rozdíl drah je 9 620 – 7 280 = 2 340 m.
Odpověď:
Druhá loď dostihne první za 2 h 10 min.

Příklad 3.4.4:
Lehkonohým ujetou dupotem tepe ostruha půdu, když Achilles závodí se želvou v běhu a dá jí náskok 100 loktů. Achilles uběhne 10 loktů za vteřinu, želva jen jeden loket. 100 loktů uběhne Achilles za 10 vteřin, zatím však želva uběhla o 10 loktů dál. Achilles potřebuje vteřinu, aby uběhl těch 10 loktů, jenže zatím želva uběhne jeden loket. Ten uběhne Achilles za desetinu vteřiny, ale želva je opět o desetinu lokte před ním. Za $1/_{100}$ vteřiny uběhne Achilles i tuto vzdálenost, jenže želva je zatím opět o $1/_{100}$ lokte vpředu. Tak to pokračuje dál. Vzdálenosti se sice zmenšují, ale Achilles nikdy želvu nedohoní. Je to pravda? {Zenonův paradox; 5. stol. př. nl.}

Řešení:
Postup řešení volen tak, aby se blížil principu Zenonovu paradoxu.
První úsek poběží Achilles (i želva) 10 s, druhý 1 s, třetí $\frac{1}{10}$ s, atd. Jedná se o nekonečnou geometrickou řadu, jejíž první člen je a_1 = 10 a kvocient $q = \frac{1}{10}$. Její součet je

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{10}{1-\frac{1}{10}}=\frac{100}{9}=11\tfrac{1}{9}\ \text{s.}$$

Zkouška:
Za $11\frac{1}{9}$ s uběhne Achilles $\frac{100}{9}\cdot 10=\frac{1000}{9}=111\frac{1}{9}$ loktů.
Za $11\frac{1}{9}$ s uběhne želva $\frac{100}{9}\cdot 1=\frac{100}{9}=11\frac{1}{9}$ loktů.
Rozdíl drah je $111\frac{1}{9}-11\frac{1}{9}=100$ loktů.
Odpověď:
Není to pravda, Achilles dohoní želvu za 1 min $51\frac{1}{9}$ s.

Příklad 3.4.5:
Z kasáren vyjela kolona vojenských aut rychlostí 40 km/h. Za 1 h 30 min byla za kolonou vyslána motospojka jedoucí průměrnou rychlostí 70 km/h. Za jak dlouho a v jaké vzdálenosti od kasáren dohoní motospojka kolonu?

Řešení:
Za 1 h 30 min ujela kolona $1{,}5\cdot 40$ = 60 km, což je její náskok před motospojkou v době, kdy motospojka vyjíždí. Motospojka každou hodinu sníží náskok kolony o 70 – 40 = 30 km.
Náskok bude motospojka dohánět 60 : 30 = 2 h.
Zkouška:
Kolona pojede 3 h 30 min a ujede $3{,}5\cdot 40$ = 140 km, motospojka pojede 2 h a ujede $2\cdot 70$ = =140 km.
Odpověď:
Motospojka dohoní kolonu za 2 hodiny ve vzdálenosti 140 km od kasáren.

Příklad 3.4.6:
V 5 hodin vyšel turista z noclehárny na delší cestu. Za hodinu ušel 5 km. Současně s ním vyjel z noclehárny stejným směrem cyklista rychlostí 17 km/h. Za jak dlouho budou od sebe vzdáleni 20 km?

Řešení:
Oba se budou pohybovat stejnou dobu, kterou si označíme t. Potom turista ujde dráhu $s_1 = 5t$, cyklista ujede dráhu $s_2 = 17t$. Protože rozdíl drah je 20 km, platí

$$17t - 5t = 20$$
$$12t = 20 \quad \big| : 12$$
$$t = \tfrac{5}{3}\ \text{h} = 1\ \text{h}\ 40\ \text{min.}$$

Zkouška:
Turista ujde za 1 h 40 min: $\frac{5}{3} \cdot 5 = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$ km.

Cyklista ujede za 1 h 40 min: $\frac{5}{3} \cdot 17 = \frac{85}{3} = 28\frac{1}{3}$ km.

Rozdíl jejich drah je $28\frac{1}{3} - 8\frac{1}{3} = 20$ km.

Odpověď:
Cyklista a turista budou od sebe vzdáleni 20 km za 1 h 40 min.

Příklad 3.4.7:
Z Brna vyjede v 7 hod. 15 min. nákladní vlak rychlostí 20 km za hodinu směrem k Břeclavi; v 8 hod. 21 min. rychlík rychlostí 65 km týmž směrem. Kdy a kde dostihne rychlík první vlak, jestliže nákladní vlak stojí na příslušné stanici 12 min., nežli rychlík dojede?

Řešení:
Dobu jízdy rychlíku označme t [h], potom doba jízdy nákladního vlaku je $t - \frac{12}{60} + \frac{66}{60} = t + 0{,}9$ [h]. Dráha rychlíku je $s_1 = 20 \cdot (t + 0{,}9)$, dráha nákladního vlaku je $s_2 = 65 \cdot t$. Protože oba vlaky ujedou stejnou dráhu, platí $s_1 = s_2$ a dostáváme

$$20 \cdot (t + 0{,}9) = 65 \cdot t$$
$$20t + 18 = 65t \quad \big| -20t$$
$$18 = 45t \quad \big| : 45$$
$$\underline{t = \tfrac{2}{5}}\ \text{h} = 24\ \text{min.}$$

Rychlík dostihne první vlak v 8 h 21 min + 24 min = 8 h 45 min a ujede $65 \cdot \frac{2}{5} = 26$ km.

Zkouška:
Nákladní vlak jede 66 + 24 – 12 = 78 min a ujede $\frac{78}{60} \cdot 20 = 26$ km, rychlík ujede též 26 km.

Odpověď:
Rychlík dostihne první vlak v 8 h 45 min 26 km od Brna.

Příklad 3.4.8:
Města A, B a C leží v tomto pořadí na jedné silnici. Vzdálenost měst A a B je 30 km. Z města A vyjede do C osobní auto (prům. rychlost 60 km/h) a zároveň z města B do C nákladní auto (40 km/h). Za jak dlouho dojede osobní auto nákladní?

Řešení:
Osobní auto každou hodinu sníží náskok nákladního o 60 – 40 = 20 km/h. Protože nákladní auto má náskok 30 km, bude to osobnímu trvat 30 : 20 = 1,5 h.

Zkouška:
Osobní auto ujede za 1,5 hod trasu $60 \cdot 1{,}5 = 90$ km, nákladní auto ujede za 1,5 hod trasu $40 \cdot 1{,}5 = 60$ km.

Odpověď:
Osobní auto dojede nákladní za 1,5 hodiny.

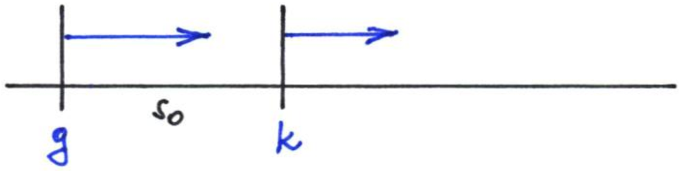
Příklad 3.4.9:
Při cyklistických závodech jede peloton průměrnou rychlostí 36 km/h. Opravou defektu se jeden závodník zdržel 5 minut. O kolik km/h byla pak jeho rychlost větší než rychlost pelotonu, když ho dostihl za 20 minut? Jak dlouho by mu to trvalo, kdyby peloton okamžitě po defektu zvýšil rychlost na 40 km/h?

Řešení:
Zdrží-li se závodník 5 minut, ujede peloton $36 \cdot \frac{1}{12} = 3$ km. Protože závodník musí peloton dostihnout za 20 minut, musí jet za hodinu trojnásobnou rychlostí, tj $3 \cdot 3 = 9$ km/h.
Pokud pojede peloton rychlostí 40 km/h, ujede za 5 minut $40 \cdot \frac{1}{12} = 3\frac{1}{3}$ km. Závodník dohání peloton rychlostí 45 km/h, tedy rozdíl je 5 km/h. Závodník dohoní peloton za $\frac{10}{3} : 5 = \frac{2}{3}$ h = 40 min.
Zkouška:
1) Rychlost pelotonu je v_1 = 36 km/h, doba jízdy je t_1 = 25 min = $\frac{5}{12}$ h a dráha, kterou peloton ujede je $s_1 = 36 \cdot \frac{5}{12} = 15$ km.
Rychlost závodníka je v_2 = 45 km/h, doba jízdy je t_1 = 20 min = $\frac{1}{3}$ h a dráha, kterou peloton ujede je $s_2 = 45 \cdot \frac{1}{3} = 15$ km.
2) Rychlost pelotonu je v_1 = 40 km/h, doba jízdy je t_1 = 45 min = $\frac{3}{4}$ h a dráha, kterou peloton ujede je $s_1 = 40 \cdot \frac{3}{4} = 30$ km.
Rychlost závodníka je v_2 = 45 km/h, doba jízdy je t_1 = 40 min = $\frac{2}{3}$ h a dráha, kterou peloton ujede je $s_2 = 45 \cdot \frac{2}{3} = 30$ km.
Odpověď:
Rychlost závodníka proti pelotonu byla o 9 km/h větší, kdyby peloton zvětšil rychlost na 40 km/h, musel by jej závodník dohánět 40 minut.

Příklad 3.4.10:
Gepard vyvine na krátkou vzdálenost rychlost kolem 100 km$\cdot$h^{-1}. Pokud však kořist nedohoní po 400 m sprintu, musí zpomalit a před dalším lovem si odpočinout. Z jaké minimální vzdálenosti mu může uniknout klokan, který na krátkou vzdálenost dosahuje rychlost asi 55 km$\cdot$h^{-1}? Co vás na této úloze zaráží?

Řešení:

Obr. 3-3:



klokan: $s_1 = v_1 t_1 + s_0$ . . . . $s_1 = 55t + s_0$
gepard: $s_2 = v_2 t_2$ . . . . . . $s_2 = 100t$

$s_2 = 0{,}4 \quad \rightarrow \quad 0{,}4 = 100t \quad \rightarrow \quad t = 0{,}004$ h = 14,4 s

$0{,}4 = 55 \cdot 0{,}004 + s_0 \quad \rightarrow \quad s_0 = 0{,}18$ km = 180 m

Zkouška:

gepard: rychlost: 100 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ = $\frac{250}{9} m \cdot s^{-1}$;

dráha: $s = vt = \frac{250}{9} \cdot 14{,}4 = 400$ m.

klokan: rychlost: 55 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ = $\frac{550}{36} m \cdot s^{-1}$;

dráha: $s = vt = \frac{550}{36} \cdot 14{,}4 = 220$ m.

Rozdíl drah: 400 – 220 = 180 m.

Odpověď:

Klokan musí mít náskok před gepardem minimálně větší než 180 m.

Poznámka:

Gepard a klokan žijí na různých kontinentech.

3.5. Skupina 5: *„Dva subjekty proti sobě i za sebou"*

Po neuzavřené dráze se pohybují dva subjekty. Subjekty začínají pohyb ze stejných nebo různých míst a část doby se pohybují za sebou a část doby proti sobě. Pohyb často ukončí ve stejnou dobu na stejném místě. Počítáme dráhy subjektů, jejich rychlosti i čas trávený na cestě.

Příklad 3.5.1:
Dva povozy vyjely současně ze dvou míst 3 km vzdálených. Jedou-li proti sobě, setkají se za 15 minut; jedou-li za sebou, dohoní jeden druhý za 1 hodinu. Jaká je rychlost každého z nich?

Řešení č. 1:
a) Nejprve jedou proti sobě, pro prvního platí $s_1 = v_1 \cdot t_1$, pro druhého platí $s_2 = v_2 \cdot t_2$ a pro jejich dráhy platí $s_1 + s_2 = 3$, dále platí $t_1 = t_2 = \frac{1}{4}$, z čehož plyne

$$\tfrac{1}{4}v_1 + \tfrac{1}{4}v_2 = 3.$$

b) Potom jedou za sebou, pro prvního platí $s_1' = v_1 \cdot t_1'$, pro druhého platí $s_2' = v_2 \cdot t_2'$ a pro jejich dráhy platí $s_1' - s_2' = 3$, dále platí $t_1' = t_2' = 1$ (tj. mění se dráhy a časy obou, jejich rychlosti zůstávají; předpokládáme, že první je rychlejší), z čehož plyne

$$v_1 - v_2 = 3.$$

Dostáváme soustavu rovnic pro neznámé rychlosti

$$\tfrac{1}{4}v_1 + \tfrac{1}{4}v_2 = 3 \quad \Big| \cdot 4$$

$$\underline{v_1 - v_2 = 3}$$

$$v_1 + v_2 = 12$$

$$\underline{v_1 - v_2 = 3}$$

$$2v_1 = 15 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{v_1 = 7{,}5}} \text{ [km/h] = 125 m/min}$$

$$v_2 = 12 - 7{,}5 = \underline{\underline{4{,}5}} \text{ [km/h] = 75 m/min}$$

Zkouška:
Za 15 minut ujedou: první = $125 \cdot 15$ = 1 875 m,
druhý = $75 \cdot 15$ = 1 125 m,
celkem součet = 1 875 + 1 125 = 3 000 m = 3 km.
Za 60 minut ujedou: první = $125 \cdot 60$ = 7 500 m,
druhý = $75 \cdot 60$ = 4 500 m,
celkem rozdíl = 7 500 – 4 500 = 3 000 m = 3 km.
Odpověď:
Rychlosti motocyklů jsou 7,5 km/h a 4,5 km/h.

Řešení č. 2:
Uvažujme stejně, ale obecně:
a) Nejprve jedou proti sobě, pro prvního platí $s_1 = v_1 \cdot t_1$, pro druhého platí $s_2 = v_2 \cdot t_2$ a pro jejich dráhy platí $s_1 + s_2 = d$, dále platí $t_1 = t_2 = t$, z čehož plyne

$$v_1 t + v_2 t = d\ .$$

b) Potom jedou za sebou, pro prvního platí $s_1' = v_1 \cdot t_1'$, pro druhého platí $s_2' = v_2 \cdot t_2'$ a pro jejich dráhy platí $s_1' - s_2' = d$, dále platí $t_1' = t_2' = t'$ (tj. mění se dráhy a časy obou, jejich rychlosti zůstávají; předpokládáme, že první je rychlejší), z čehož plyne

$$v_1 t' - v_2 t' = d \,.$$

Dostáváme soustavu rovnic pro neznámé rychlosti

$$v_1 t + v_2 t = d$$

$$\underline{v_1 t' - v_2 t' = d} \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{v_1 t' - d}{t'}$$

$$v_1 t + \frac{v_1 t' - d}{t'} \cdot t = d \quad \rightarrow \quad v_1 t t' + v_1 t t' - d\,t = d\,t'$$

$$\underline{\underline{v_1 = \frac{d\,t' + d\,t}{2 t t'}}} \qquad \textbf{(3-3a)}$$

$$v_2 = \frac{v_1 t' - d}{t'} \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{\dfrac{d\,t' + d\,t}{2 t t'} \cdot t' - d}{t'} = \frac{\dfrac{d\,t' + d\,t - 2d\,t}{2t}}{t'}$$

$$\underline{\underline{v_2 = \frac{d\,t' - d\,t}{2 t t'}}} \qquad \textbf{(3-3b)}$$

Potom v našem konkrétním případě je d = 3 km, t = $\frac{1}{4}$ h, t' = 1 h,

$$v_1 = \frac{d\,t' + d\,t}{2 t t'} = \frac{3 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{4}}{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1} = \underline{\underline{7{,}5}} \text{ km/h,}$$

$$v_2 = \frac{d\,t' - d\,t}{2 t t'} = \frac{3 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{1}{4}}{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1} = \underline{\underline{4{,}5}} \text{ km/h.}$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v řešení 1.

Příklad 3.5.2: *Průzkum na moři* 2:

Průzkumná loď eskadry dostala za úkol prozkoumat moře 70 mil ve směru, ve kterém se pohybuje eskadra. Přitom eskadra pluje rychlostí 35 mil/h a průzkumná loď rychlostí 70 mil/h. Určete za jak dlouhou dobu se průzkumná loď vrátí k eskadře.

Řešení:

Průzkumná loď musí nejdříve dojet do vzdálenost 70 mil (za 1 hodinu) a pak se obrátí. V momentě obratu ujede eskadra (také za 1 hodinu) 35 mil a do setkání s průzkumnou lodí ji zbývá také 35 mil.. Protože potom se obě plavidla pohybují proti sobě, přibližují se rychlostí 70 + 35 = 105 mil/h. Protože mají ujet ještě 35 mil, bude jim to trvat 35 : 105 = $\frac{1}{3}$ h = 20 min. Celkem popluje průzkumná loď 1 h 20 min (stejně jako eskadra).

Zkouška:

Za 1 h 20 min ujede průzkumná loď dráhu $1\frac{1}{3} \cdot 70 = 93\frac{1}{3}$ mil, za stejnou dobu ujede eskadra dráhu $1\frac{1}{3} \cdot 35 = 46\frac{2}{3}$ mil. Celkem ujedou obě plavidla $93\frac{1}{3} + 46\frac{2}{3} = 140$ mil, což je dvojnásobek vzdálenosti.

Odpověď:

Průzkumná loď se vrátí k eskadře za 1 hodinu 20 minut.

Příklad 3.5.3:
Místa *A* a *B* jsou od sebe vzdálena 180 km. Z místa *A* vyjede po přímočaré silnici auto směrem k místu *B* rychlostí 60 km/hod. V okamžiku, kdy auto vyjede z místa *A*, vyletí z místa *B* moucha rychlostí 120 km/hod a letí autu naproti. Když doletí k autu, vrátí se opět stejnou rychlostí do místa *B*, pak letí opět k autu a vše se opakuje tak dlouho, až auto dojede do místa *B*. Jakou celkovou dráhu vykoná moucha?

Řešení č. 1: - *úsudek* I - {podle [86], str. 52}
Moucha létá stejnou dobu jako jede auto. Auto ujede 180 km průměrnou rychlostí 60 km/h. Jede proto 180 : 60 = 3 hodiny. Moucha uletí za 3 hodiny průměrnou rychlostí 120 km/ h celkem $3 \cdot 120 = 360$ km.

Řešení č. 1: - *úsudek* II
Moucha létá dvakrát rychleji, proto i poměr drah bude 2 : 1 (čas bude stejný). Auto ujede 180 km (vzdálenost *A* a *B*), proto moucha nalétá $2 \cdot 180 = 360$ km.

Řešení č. 3: - *pomocí nekonečné geometrické řady*
Do prvního setkání uletí moucha 120 km ($\frac{2}{3}$ vzdálenosti) a auto ujede 60 km ($\frac{1}{3}$ vzdálenosti), potom letí moucha zpět do *B* opět 120 km a auto ujede 60 km, jejich vzdálenost je 60 km (tedy třetinová). Do druhého setkání uletí moucha 40 km (opět $\frac{2}{3}$ vzdálenosti) a auto ujede 20 km (opět $\frac{1}{3}$ vzdálenosti), potom letí moucha zpět do *B* opět 40 km a auto ujede 20 km, jejich vzdálenost je 20 km (opět třetinová předchozí vzdálenosti); atd.
Moucha při letu proti autu urazí postupně dráhy 120 km, 40 km, $13\frac{1}{3}$ km, atd. Tyto hodnoty jsou členy nekonečné geometrické řady, první člen $a_1 = 120$, kvocient $q = \frac{1}{3}$ a součet je

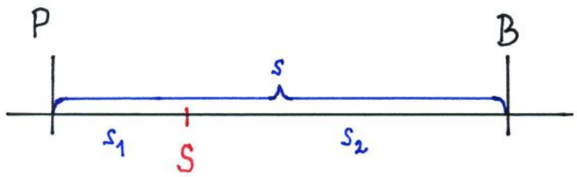
$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{120}{1-\frac{1}{3}} = 180 \text{ km.}$$

Protože při cestě zpět uletí moucha stejné množství kilometrů, je její dráha $2 \cdot 180 = 360$ km.
Zkouška:
Za zkoušku můžeme považovat předchozí řešení.
Odpověď:
Moucha vykoná celkovou dráhu 360 km.

Příklad 3.5.4:
Každý den přesně v poledne přilétá na letiště v Praze letadlo se spěšnou zásilkou. Pro zásilku vyráží z Benešova auto tak, aby si ji vyzvedlo přesně v poledne. Poté se s ní vrací zpět do Benešova. Jednoho dne ale přistálo letadlo dříve, a tak z letiště vypravili autu naproti poslíčka na kole. Poslíček jel čtyřikrát pomaleji než auto. Když se za 20 minut s autem setkal, předal poslíček zásilku a auto odjelo zpět. O kolik minut bylo auto v Benešově dříve než obvykle?

Řešení č. 1:
Označme vzdálenost mezi Prahou a Benešovem *s*, dobu jízdy auta z Benešova do Prahy *t* (předpokládáme, že zpáteční cestu pojede auto stejný čas). Dále označme rychlost auta *x* km/h, potom rychlost poslíčka je $\frac{x}{4}$ km/h. Dráhu ujetou poslíčkem označme s_1, doba jeho jízdy je $t_1 = 20$ min $= \frac{1}{3}$ h. Dráhu ujetou autem „jednoho dne" do setkání s poslíčkem označme s_2, dobu jízdy auta t_2 (viz obr. 3-4).

Obr. 3-4:



Potom platí:

$$2s = x \cdot 2t$$
$$2s = s_1 + 2s_2$$
$$2s_1 = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot x$$
$$\underline{2s_2 = 2t_2 \cdot x}$$
$$2tx = 2t_2x + \tfrac{1}{6}x \quad \Big| : x$$
$$2t = 2t_2 + \tfrac{1}{6} \quad \rightarrow \quad 2t_2 = 2t - \tfrac{1}{6}.$$

Rozdíl časů je $\frac{1}{6}$ hodiny, což je 10 minut.

Za zkoušku můžeme považovat následující řešení.

Řešení č. 2:

Poslíček jel 20 minut, auto jede čtyřikrát rychleji, proto trasu ujetou poslíčkem ujede auto za čtyřikrát menší čas, tedy za 5 minut. Protože auto by tuto trasu mělo ujet dvakrát (tam i zpět), ušetří dvojnásobek času, tedy 10 minut.

Zkouška:

Za zkoušku můžeme považovat předchozí řešení.

Odpověď:

Auto se vrátí do Benešova o 10 minut dříve.

Příklad 3.5.5:

Hřebec a kobyla běží z Čenanu do knížectví Čchi, jež je vzdáleno 3 000 délkových měr. Za první den hřebec uběhl 193 měr a v každém dalším dni o 13 měr více. Kobyla uběhla v prvním dni 97 měr a v každém dalším dni o půl míry méně. Hřebec doběhl do knížectví Čchi jako první, otočil se a v nějakém místě potkal kobylu. Po kolika dnech se potkali a kolik měr uběhl do okamžiku setkání každý kůň?

Řešení:

Protože hřebec uběhne první den 193 měr a každý další den o 13 měr více, je jeho dráha součtem n členů aritmetické posloupnosti, kde a_1 = 193, d = 13. Stejně tak kobyla uběhne první den 97 měr a každý další den o 0,5 míry méně, je proto její dráha také součtem stejných n členů jiné aritmetické posloupnosti, kde b_1 = 97, $\delta = -0{,}5$.

Pro součty n členů aritmetické posloupnosti platí:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n), \text{ kde } a_n = a_1 + (n-1) \cdot d .$$

Potom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + nd - d).$$

Protože součet obou drah je 6 000 délkových měr, dostáváme vztah

$$\frac{n}{2}\cdot(386+13n-13)+\frac{n}{2}\cdot(194-0{,}5n+0{,}5)=6\ 000 \quad \Big|\cdot 4$$

$$772n + 26n^2 - 26n + 388n - n^2 + n = 24\ 000 \quad \Big| - 24\ 000$$

$$25n^2 + 1135n - 24\ 000 = 0$$

$$5n^2 + 227n - 4\ 800 = 0 \qquad D = 147\ 529 \ \rightarrow\ \sqrt{D} \doteq 384{,}095$$

$$n_{12} \doteq \frac{-227 \pm 384{,}095}{2\cdot 5} \doteq \begin{cases} 15{,}7 \\ -61{,}1 \end{cases}$$

Z vypočtených hodnot vyplývá, že hřebec a kobyla budou na cestě 15 a část dne. Proto vypočteme, kolik každý z nich uběhne za 15 dní a část 16. dne dopočteme.

Hřebec uběhne za 15 dní celkem

$$s_{15} = \frac{15}{2}\cdot(2\cdot 193+15\cdot 13-13) = 4\ 260 \text{ měr.}$$

Kobyla uběhne za 15 dní celkem

$$s_{15}' = \frac{15}{2}\cdot(2\cdot 97-15\cdot 0{,}5+0{,}5) = 1\ 402{,}5 \text{ míry.}$$

Celkem uběhnou dohromady 4 260 + 1 402,5 = 5 662,5 míry. Zbývá jim uběhnout

6 000 – 5 662,5 = 337,5 míry.

Šestnáctý den poběží hřebec rychlostí $a_{16} = 193+15\cdot 13 = 388$ měr za den, kobyla poběží rychlostí $b_{16} = 97-15\cdot 0{,}5 = 89{,}5$ míry za den. Oba by se za 16. den přiblížili k sobě o vzdálenost 388 + 89,5 = 477,5 míry. Protože vzdálenost mezi nimi je jen 337,5 míry, uběhne hřebec $\dfrac{388}{477{,}5}\cdot 337{,}5 = \dfrac{388\cdot 675}{955} = \dfrac{388\cdot 135}{191} = \dfrac{52\ 380}{191} = 274\tfrac{46}{191}$ míry;

a kobyla uběhne $\dfrac{89{,}5}{477{,}5}\cdot 337{,}5 = \dfrac{89{,}5\cdot 675}{955} = \dfrac{89{,}5\cdot 135}{191} = \dfrac{24\ 165}{382} = 63\tfrac{99}{382}$ míry.

Hřebec uběhne celkem 4 260 + $274\tfrac{46}{191} = 4\ 534\tfrac{46}{191}$ míry.

Kobyla uběhne celkem 1 402,5 + $63\tfrac{99}{382} = 1\ 465\tfrac{191+99}{382} = 1\ 465\tfrac{145}{191}$ míry.

Poslední den běží oba dobu $\dfrac{337{,}5}{477{,}5} = \dfrac{675}{955} = \dfrac{135}{191}$ dne a celkem běží $15\tfrac{135}{191}$ dne.

Zkouška:

Zkouška vyplývá z vlastností aritmetických posloupností.

Celkem uběhnou v určené době hřebec a kobyla

$$4\ 534\tfrac{46}{191} + 1\ 465\tfrac{145}{191} = 6\ 000 \text{ měr.}$$

Odpověď:

Hřebec uběhne 4 534 $\tfrac{46}{191}$ míry, kobyla uběhne 1 465 $\tfrac{145}{191}$ míry a než se potkají budou společně na cestě 15 $\tfrac{135}{191}$ dne.

3.6. Skupina 6: *„Pohyby v pohybujícím se prostředí“*

Subjekt, který se pohybuje, je ovlivněn pohybujícím se prostředím (proud vody, vítr apod.). Subjekt většinou koná pohyb „tam i zpět“. Máme za úkol vypočítat rychlosti jak subjektu, tak i pohybujícího se prostředí nebo vzdálenosti či čas, který subjekt na pohyb potřebuje.

Příklad 3.6.1:
Motorová lodice dojede po řece z místa *A* do místa *B* vzdáleného 36 km po proudu za $1\frac{1}{2}$ hodiny, přičemž jede středem řeky, kde proud je nejsilnější. Zpáteční cestu koná touž silou motoru, avšak podél břehu, kde síla proudu je o $\frac{2}{5}$ menší; vykoná ji za $2\frac{1}{4}$ hod. Jak silný je proud uprostřed řeky? Jak rychle pohání lodici motor?

Řešení:
Označme si:
v_1 = rychlost motorové lodi,
v_2 = rychlost proudu,
k = zmenšení rychlosti proudu;
s = dráhu lodi po proudu i proti proudu,
t_1 = dobu plavby lodi po proudu,
t_2 = dobu plavby lodi proti proudu.
Potom platí

$$\begin{aligned} s &= (v_1 + v_2)\cdot t_1 \\ s &= (v_1 - k\cdot v_2)\cdot t_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(3-4)}$$

a dostáváme model dané situace. Vyjádříme v_1, v_2:

$$\begin{aligned} s &= v_1 t_1 + v_2 t_1 \\ s &= v_1 t_2 - k v_2 t_2 \end{aligned}$$

$$v_2 = \frac{s - v_1 t_1}{t_1} \qquad\qquad v_1 = \frac{s - v_2 t_1}{t_1}$$

$$s = v_1 t_2 - \frac{k s t_2 - k v_1 t_1 t_2}{t_1} \quad \Big| \cdot t_1 \qquad\qquad s = \frac{s t_2 - v_2 t_1 t_2}{t_1} - k v_2 t_2 \quad \Big| \cdot t_1$$

$$st_1 = v_1 t_1 t_2 - k s t_2 + k v_1 t_1 t_2 \quad \Big| + k s t_2 \qquad st_1 = st_2 - v_2 t_1 t_2 - k v_2 t_1 t_2 \quad \Big| + v_2 t_1 t_2 + k v_2 t_1 t_2 - st_1$$

$$v_1 t_1 t_2 + k v_1 t_1 t_2 = s t_2 + k s t_1 \qquad\qquad v_2 t_1 t_2 + k v_2 t_1 t_2 = st_2 - st_1 \quad \Big| : 2 t_1 t_2$$

$$v_1 (t_1 t_2 + k t_1 t_2) = s(t_1 + k t_2) \ \Big| : (t_1 t_2 + k t_1 t_2) \qquad v_2 (t_1 t_2 + k t_1 t_2) = s(t_2 - t_1) \ \Big| : (t_1 t_2 + k t_1 t_2)$$

$$v_1 = \frac{s(t_1 + k t_2)}{t_1 t_2 (1 + k)} \quad \textbf{(3-4a)} \qquad\qquad v_2 = \frac{s(t_2 - t_1)}{t_1 t_2 (1 + k)} \quad \textbf{(3-4b)}$$

Potom konkrétně $s = 36,\ t_1 = \frac{3}{2},\ t_2 = \frac{9}{4},\ k = \frac{3}{5}$:

$$v_1 = \frac{s(t_1 + k t_2)}{t_1 t_2 (1+k)} = \frac{36\cdot(\frac{3}{2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{9}{4})}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}\cdot(1+\frac{3}{5})} = \frac{36\cdot(\frac{3}{2} + \frac{27}{20})}{\frac{27}{8}\cdot\frac{8}{5}} = \frac{36\cdot\frac{57}{20}}{\frac{27}{5}} = \frac{10\ 260}{240} = \underline{\underline{19}} \text{ km/h.}$$

$$v_2 = \frac{s(t_2 - t_1)}{t_1 t_2 (1+k)} = \frac{36\cdot(\frac{9}{4} - \frac{3}{2})}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}\cdot(1+\frac{3}{5})} = \frac{36\cdot\frac{3}{4}}{\frac{27}{8}\cdot\frac{8}{5}} = \frac{27}{\frac{27}{5}} = \underline{\underline{5}} \text{ km/h.}$$

Zkouška:
Po proudu se lodice pohybuje rychlostí 19 + 5 = 24 km/h a vzdálenost 36 km ujede za 36 : 24 = 1,5 hodiny.
Proti proudu se lodice pohybuje rychlostí 19 – 3 = 16 km/h a vzdálenost 36 km ujede za 36 : 16 = 2,25 hodiny.
Odpověď:
Motor pohání lodici rychlostí 19 km/h. Proud řeky uprostřed má rychlost 5 km/h, po straně 3 km/h.

Příklad 3.6.2:

Letadlo, poháněné rychlostí 120 km za hodinu, projede vzdálenost 198 km za 3 hod. 20 min. tam a zpět, jednou po větru, podruhé proti větru. Jaká je rychlost větru?

Řešení:

Označme si:
v_1 = rychlost letadla,
v_2 = rychlost větru,
s = dráhu letadla po větru i proti větru,
t_1 = dobu letu letadla po větru,
t_2 = dobu letu letadla proti větru.
Potom platí

$$\begin{aligned} s &= (v_1 + v_2)\cdot t_1 \\ s &= (v_1 - v_2)\cdot t_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(3-5)}$$

a dostáváme model dané situace. Vyjádříme celkový čas t, pro který platí $t = t_1 + t_2$:

$$\left.\begin{aligned} s &= v_1t_1 + v_2t_1 \\ s &= v_1t_2 - v_2t_2 \end{aligned}\right\} + \qquad\qquad \left.\begin{aligned} s &= v_1t_1 + v_2t_1 \\ s &= v_1t_2 - v_2t_2 \end{aligned}\right\} -$$

$$2s = v_1t_1 + v_1t_2 + v_2t_1 - v_2t_2$$
$$2s = v_1\cdot(t_1+t_2) + v_2\cdot(t_1-t_2) \quad \Big| -v_1(t_1+t_2)$$
$$v_2\cdot(t_1-t_2) = 2s - v_1\cdot(t_1+t_2) \quad \Big| : v_2$$
$$t_1 - t_2 = \frac{2s - v_1t}{v_2} \quad \rightarrow$$

$$0 = v_1t_1 - v_1t_2 + v_2t_1 + v_2t_2$$
$$0 = v_1\cdot(t_1-t_2) + v_2\cdot(t_1+t_2)$$
$$t_1 + t_2 = t$$
$$0 = v_1\cdot\frac{2s - v_1t}{v_2} + v_2t \quad \Big| \cdot v_2$$
$$0 = 2sv_1 - v_1^2t + v_2^2t \quad \Big| + v_1^2t - 2sv_1$$
$$v_2^2t = v_1^2t - 2sv_1 \quad \Big| : t$$
$$v_2^2 = v_1^2 - \frac{2sv_1}{t} \quad \Big| \sqrt{\ }$$
$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2sv_1}{t}} \qquad \textbf{(3-5a)}$$

Potom konkrétně s = 198 km, v_1 = 120 km/h, t = 3 h 20 min = $3\frac{1}{3}$ h:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2sv_1}{t}} = \sqrt{120^2 - \frac{2\cdot 198\cdot 120}{3\frac{1}{3}}} = \sqrt{144} = 12 \text{ km/h}.$$

Zkouška:

Čas letu po větru $t_1 = \dfrac{s}{v_1+v_2} = \dfrac{198}{120+12} = 1{,}5$ h = 1 h 30 min.

Čas letu proti větru $t_2 = \dfrac{s}{v_1-v_2} = \dfrac{198}{120-12} = 1{,}8\overline{3} = 1\tfrac{5}{6}$ h = 1 h 50 min.

Celková doba letu je 1 h 30 min + 1 h 50 min = 3 h 20 min.

Odpověď:

Rychlost větru je 12 km/h.

<u>*Příklad* 3.6.3:</u>

Parník potřebuje o 48 min. déle, aby projel trať 18 km dlouhou proti vodě, než jede-li po proudu. Dva parníky, jež vyjely v touž dobu proti sobě z obou konců trati, setkají se po $\tfrac{3}{4}$ hod. Za jakou dobu projede každý celou trať?

<u>*Řešení*:</u>

Označme si:

v_1 = rychlost parníku,

v_2 = rychlost proudu,

s = dráhu lodi po proudu i proti proudu,

t_1 = dobu plavby parníku po proudu,

t_2 = dobu plavby parníku proti proudu.

Protože oba parníky ujedou společně celou trať za $\tfrac{3}{4}$ hodiny, platí

$$\tfrac{3}{4}\cdot(v_1+v_2)+\tfrac{3}{4}(v_1-v_2)=18$$

$$1{,}5v_1 = 18 \quad \Big| : 1{,}5$$

$$\underline{v_1 = 12} \text{ [km/h].}$$

Celou dráhu projede parník po proudu za dobu t_1 [h], proti proudu za dobu $t_2 = t_1 + 0{,}8$ [h]. Z toho ze vztahu (3-5) dostáváme

$$18 = (12+v_2)\cdot t_1$$

$$\underline{18 = (12-v_2)\cdot(t_1+0{,}8)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 18 = 12t_1 + v_2t_1 \\ \underline{18 = 12t_1 - v_2t_1 + 9{,}6 - 0{,}8v_2} \end{array}\right\} +$$

$$36 = 24t_1 + 9{,}6 - 0{,}8v_2 \quad \Big| +0{,}8v_2 - 36$$

$$0{,}8v_2 = 24t_1 - 26{,}4 \quad \Big| : 0{,}8$$

$$v_2 = 30t_1 - 33$$

a dosadíme do první rovnice soustavy

$$18 = 12t_1 + 30t_1^2 - 33t_1 \quad \Big| - 18$$

$$0 = 30t_1^2 - 21t_1 - 18 \quad \Big| : 3$$

$$10t_1^2 - 7t_1 - 6 = 0 \quad \ldots\ldots \quad D = 289 \quad \ldots\ldots \quad \sqrt{D} = 17$$

$$t_1, t_1' = \frac{7 \pm 17}{20} = \begin{cases} 1{,}2 \\ -0{,}5 \end{cases}.$$

Vyhovuje pouze kladné řešení. Je tedy t_1 = 1,2 h = 1 h 12 min, t_2 = 2 h (o 48 min více). K provedení zkoušky dopočteme ještě v_2:

$$v_2 = 30t_1 - 33 \quad \rightarrow \quad \underline{v_2 = 3} \text{ [km/h]}.$$

Zkouška:
Oba parníky ujedou společně celou trať za $\frac{3}{4}$ hodiny, potom:

$$s = (12+3)\cdot\tfrac{3}{4} + (12-3)\cdot\tfrac{3}{4} = 11{,}25 + 6{,}75 = 18 \text{ km}.$$

Po proudu trvá cesta 18 : (12 + 3) = 1,2 h = 72 min = 1 h 12 min.
Proti proudu trvá cesta 18 : (12 – 3) = 2 h.
Rozdíl doby plavby je 120 – 72 = 48 min.
Odpověď:
Parník plující proti vodě projede celou trať za 2 hodiny, parník plující po proudu projede trať za 1 hodinu 12 minut.

Příklad 3.6.4: *Parník a vory*:
Z města A do města B jede parník po proudu řeky a bez zastávek 5 h. Jede-li stejnou rychlostí proti proudu z města B do města A, urazí stejnou vzdálenost za 7 h (opět bez zastávek). Kolik hodin potřebují na cestu z A do B vory? (Vory se pohybují rychlostí proudu řeky.)

Řešení č. 1:
Označme p [h] čas, který potřebuje parník k tomu, aby urazil ve stojaté vodě (pouze vlastní rychlostí) vzdálenost mezi A a B. Dále označme v [h] čas, který potřebují vory. Pak parník urazí po proudu za 1 h $(1/p + 1/v)$ vzdálenosti AB a proti proudu $(1/p - 1/v)$ této vzdálenosti. Podle zadání urazí parník po proudu za 1 h $\frac{1}{5}$ vzdálenosti AB, proti proudu $\frac{1}{7}$ vzdálenosti AB. Dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{v} &= \frac{1}{5} \\ \frac{1}{p} - \frac{1}{v} &= \frac{1}{7} \end{aligned}.$$

Stačí odečíst druhou rovnici od první a dostaneme

$$\frac{2}{v} = \frac{2}{35},$$

z toho plyne, že $v = 35$.
Odpověď:
Vory doplují z města A do města B za 35 hodin.

Řešení č. 2:
Označme v_1 rychlost parníku (ve stojaté vodě), v_2 rychlost vorů (tj. rychlost proudu). Po proudu pluje parník rychlostí $(v_1 + v_2)$, proti proudu rychlostí $(v_1 - v_2)$. Ze základního vzorce $s = v \cdot t$ potom pro plavbu parníku po proudu dostáváme

$$s = (v_1 + v_2)\cdot 5 \qquad (1)$$

a pro plavbu proti proudu

$$s = (v_1 - v_2)\cdot 7, \qquad (2)$$

z rovnosti pravých stran

$$(v_1 + v_2)\cdot 5 = (v_1 - v_2)\cdot 7$$

odvodíme vztah: $v_1 = 6v_2$.

Považujeme-li dráhu s za jednotku (normu), můžeme dosadit $s = 1$ a dále $v_1 = 6v_2$ do vztahů (1), eventuelně (2) a dostáváme

$$1 = (6v_2 + v_2) \cdot 5$$

a z toho vychází: $v_2 = \frac{1}{35}$ km/h.

Ze vztahu $s_2 = v_2 \cdot t_2$ vypočteme t_2 dosazením za $s_1 = s = 1$, $v_2 = \frac{1}{35}$, tedy: $1 = \frac{1}{35} \cdot t_2$

a $t_2 = 35$ h.

Zkouška:

Je-li $v_1 : v_2 = 6 : 1$, potom platí $t_1 : t_2 = 1 : 6$ (platí nepřímá úměrnost); je tedy

$$v_1 = \frac{6}{35} \text{ km/h}, \quad t_1 = \frac{35}{6} \text{ h.}$$

Rychlost lodi po proudu je $v_1 + v_2 = \frac{6}{35} + \frac{1}{35} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}$ km/h a loď ujede

$s = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$, tedy přesně celou trasu (ani méně ani více).

Rychlost lodi proti proudu je $v_1 - v_2 = \frac{6}{35} - \frac{1}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$ km/h a loď ujede

$s = \frac{1}{7} \cdot 7 = 1$, tedy opět právě celou trasu.

Odpověď:

Vory doplují z města A do města B za 35 hodin.

3.7. Skupina 7: *„Doprava v konstantních intervalech“*

Subjekt (*pozorovatel*) *se pohybuje tak, že jej pravidelně potkávají a předjíždějí dopravní prostředky. Máme za úkol spočítat intervaly mezi jednotlivými dopravními prostředky nebo počet těchto prostředků, které pohybujícího se pozorovatele potkají či předjedou.*

Příklad 3.7.1: *Tramvaj a chodec* 1:
Při chůzi podél tramvajové linky zpozoroval chodec, že každých 10 min ho dohonila jedna tramvaj a že každých 6 minut ho minula tramvaj v opačném směru. Přitom tramvaje i chodec se pohybovali rovnoměrně. Spočítejme jaké jsou intervaly mezi odjezdy tramvají z konečných stanic.

Řešení č. 1:
Označme si vzdálenost mezi jednotlivými tramvajemi s, dráhu tramvaje, která chodce potkává (od doby, kdy jej potká předchozí tramvaj) s_1, dráhu chodce, když jej potkává tramvaj (od doby, kdy jej potká předchozí tramvaj) s_2, dráhu tramvaje, která chodce dohání (od doby, kdy jej dohoní předchozí tramvaj) s_1', dráhu chodce, když jej dohání tramvaj (od doby, kdy jej dohoní předchozí tramvaj) s_2', t_0 dobu, za kterou ujede tramvaj vzdálenost mezi jednotlivými vozidly tramvají, t dobu, kterou jede tramvaj i jde chodec, než se znovu potkají, t' dobu, kterou jede tramvaj i jde chodec, než tramvaj chodce dohoní. Potom můžeme pomocí těchto symbolů vyjádřit danou situaci takto:

$$s = s_1 + s_2 = v_1 t + v_2 t = (v_1 + v_2)\cdot t\,,$$
$$s = s_1' - s_2' = v_1 t' - v_2 t' = (v_1 - v_2)\cdot t',$$
$$s = v_1 t_0.$$

Z rovnosti levých stran prvních dvou rovnic plyne i rovnost pravých stran těchto rovnic a platí

$$(v_1 + v_2)\cdot t = (v_1 - v_2)\cdot t',$$

a vyjádříme v_2:

$$v_1 t + v_2 t = v_1 t' - v_2 t' \quad \Big|\ - v_1 t + v_2 t'$$
$$v_2 t + v_2 t' = v_1 t' - v_1 t$$
$$v_2\cdot(t + t') = v_1 t' - v_1 t$$
$$v_2 = \frac{v_1 t' - v_1 t}{t + t'}.$$

Ze třetí rovnice vyjádříme t_0 a dosadíme za v_2:

$$t_0 = \frac{s}{v_1} = \frac{v_1 + v_2}{v_1}\cdot t = \frac{v_1 + \dfrac{v_1 t' - v_1 t}{t + t'}}{v_1}\cdot t = \frac{v_1 t + v_1 t' + v_1 t' - v_1 t}{v_1\cdot(t + t')}\cdot t$$
$$t_0 = \frac{2 v_1 t'}{v_1\cdot(t + t')}\cdot t$$
$$\underline{\underline{t_0 = \frac{2 t t'}{t + t'}}}. \qquad \textbf{(3-6)}$$

V našem případě je $t = 6$ min, $t' = 10$ min, potom

$$t_0 = \frac{2 t t'}{t + t'} = \frac{2\cdot 6\cdot 10}{6 + 10} = 7{,}5 \text{ min}.$$

Zkouška:
Ze vztahu

$$(v_1 + v_2)\cdot t = (v_1 - v_2)\cdot t'$$

lze odvodit

$$\frac{t}{t'} = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}, \qquad \textbf{(3-6a)}$$

z čehož plyne, že poměr časů t, t' je závislý pouze na poměru rychlostí v_1, v_2, nikoliv na jejich velikostech. Proto můžeme jednu velikost volit a druhou počítat. Zvolme rychlost tramvaje 18 km/h = 300 m/min, potom vzdálenost mezi jednotlivými vozy tramvají je

$s = v_1 t_0 = 300 \cdot 7{,}5 = 2250$ m.

Pro rychlost chodce platí

$$s = v_1 t + v_2 t \qquad \text{nebo} \qquad s = v_1 t' - v_2 t',$$

$$v_1 t_0 = v_1 t + v_2 t \quad \Big| - v_1 t \qquad\qquad v_1 t_0 = v_1 t' - v_2 t' \quad \Big| - v_1 t'$$

$$v_1 t_0 - v_1 t = v_2 t \quad \Big| : t \qquad\qquad v_1 t_0 - v_1 t' = - v_2 t' \quad \Big| : (- t')$$

$$v_2 = \frac{t_0 - t}{t} \cdot v_1 \quad \textbf{(3-6b)} \qquad\qquad v_2 = \frac{t' - t_0}{t'} \cdot v_1 \quad \textbf{(3-6c)}$$

Z těchto vztahů pro poměr rychlostí plyne

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{t_0 - t}{t} = \frac{t' - t_0}{t'} \qquad \textbf{(3-6d)}$$

a je opět zřejmé, že pro rychlosti známe pouze jejich poměr, nikoliv velikosti (ty můžeme volit tak, aby byly reálné).

Protože jsme zvolili rychlost tramvaje v_1 = 300 m/min, můžeme vypočítat rychlost chodce podle vztahu (vzorce)

$$v_2 = \frac{t_0 - t}{t} \cdot v_1 = \frac{7{,}5 - 6}{6} \cdot 300 = 75 \text{ m/min}$$

nebo podle vzorce

$$v_2 = \frac{t' - t_0}{t'} \cdot v_1 = \frac{10 - 7{,}5}{10} \cdot 300 = 75 \text{ m/min.}$$

Při potkávání platí

$s = s_1 + s_2 = v_1 t + v_2 t = 300 \cdot 6 + 75 \cdot 6 = 2250$ m.

Při dohánění platí

$s = s_1' - s_2' = v_1 t' - v_2 t' = 300 \cdot 10 - 75 \cdot 10 = 2250$ m.

Intervaly mezi odjezdy tramvají z konečných stanic jsou 7,5 min.

Řešení č. 2:

Označme x intervaly mezi odjezdy z konečných stanic.

Ze zadání plyne, že x min poté, co chodec potká tramvajový vůz, přijede na totéž místo další tramvaj.

Jestliže tramvaj chodce dohání, pak ve zbývajících $(10 - x)$ min musí ujet vzdálenost, kterou on ujde za 10 min. Tedy vzdálenost, kterou chodec urazí za 1 min, ujede tramvaj za

$$\frac{10 - x}{10} \text{ min.}$$

Jede-li tramvaj v protisměru, potká chodce za 6 min po předcházející tramvaji a během zbývajících $(x - 6)$ min ujede stejnou vzdálenost, kterou on ujde za 6 min. To znamená, že vzdálenost, kterou chodec ujde za 1 min, ujede tramvaj za

$$\frac{x - 6}{6} \text{ min.}$$

Protože tramvaje se pohybují rovnoměrně, musí se vzdálenosti rovnat, a tak dostáváme rovnici

$$\frac{10-x}{10}=\frac{x-6}{6} \quad \Big| \cdot 30$$

$$30 - 3x = 5x - 30 \quad \Big| + 3x + 30$$

$$60 = 8x$$

$$\underline{x = 7{,}5} \text{ [min]}$$

Tramvaje vyjíždějí z konečné stanice každé 7,5 minuty.

Příklad 3.7.2: *Tramvaj a chodec* 2:

Při chůzi podél tramvajové linky zpozoroval chodec, že každých 12 min ho dohonila jedna tramvaj a že každé 4 minuty ho minula tramvaj v opačném směru. Přitom tramvaje i chodec se pohybovali rovnoměrně. Spočítejme jaké jsou intervaly mezi odjezdy tramvají z konečných stanic.

Řešení č. 1:

Označme x intervaly mezi odjezdy z konečných stanic.
Ze zadání plyne, že x min poté, co chodec potká tramvajový vůz, přijede na totéž místo další tramvaj.
Jestliže tramvaj chodce dohání, pak ve zbývajících $(12 - x)$ min musí ujet vzdálenost, kterou on ujde za 12 min. Tedy vzdálenost, kterou chodec urazí za 1 min, ujede tramvaj za

$$\frac{12-x}{12} \text{ min.}$$

Jede-li tramvaj v protisměru, potká chodce za 4 min po předcházející tramvaji a během zbývajících $(x - 4)$ min ujede stejnou vzdálenost, kterou on ujde za 4 min. To znamená, že vzdálenost, kterou chodec ujde za 1 min, ujede tramvaj za

$$\frac{x-4}{4} \text{ min.}$$

Protože tramvaje se pohybují rovnoměrně, musí se vzdálenosti rovnat, a tak dostáváme rovnici

$$\frac{12-x}{12}=\frac{x-4}{4},$$

jejímž řešením je $x = 6$.
Tramvaje vyjíždějí z konečné stanice každých 6 minut.

Řešení č. 2:

Označme s [m] vzdálenost mezi dvěma po sobě následujícími tramvajemi. Potom vzdálenost mezi chodcem a tramvají jedoucí proti němu se zmenší za 1 min o $s/4$ [m] (protože dohromady chodec urazí za 4 min vzdálenost mezi tramvají, která ho právě potkala, a další tramvají, a tato vzdálenost je označena s [m]). Jestliže tramvaj chodce dohání, zmenšuje se vzdálenost mezi nimi za 1 min o $s/12$ [m].
Předpokládejme nyní, že chodec šel 1 min dopředu, pak se obrátil a šel zpět opět 1 min (tj. vrátil se na původní místo). Během první minuty se vzdálenost mezi chodcem a tramvají, která jede proti němu, zmenšila o $s/4$ [m] a během druhé minuty (když ho tatáž tramvaj dohání) se vzdálenost zmenšila o $s/12$ [m] . To znamená, že za 2 min se vzdálenost mezi nimi zmenší o $(s/4 + s/12) = s/3$ [m]. Totéž se však stane, bude-li chodec po celé 2 min stát na místě, protože nakonec se vrátil na výchozí místo. Kdyby se nepohyboval, pak by se tramvaj k němu přiblížila za 2 min o $s/3$ [m] a za minutu o $s/6$ [m] (tj. o polovinu předchozí vzdál.) a celou

vzdálenost s [m] by tramvaj urazila za 6 min. To znamená, že každých 6 min mine stojící osobu jedna tramvaj, což je interval mezi jednotlivými tramvajemi.
Tramvaje tedy vyjíždějí z konečné stanice každých 6 minut.

Řešení č. 3:
Interval vypočteme podle vztahu (3-6) z příkladu 3.7.1.

$$t_0 = \frac{2tt'}{t+t'} = \frac{2\cdot 4\cdot 12}{4+12} = \underline{\underline{6}} \text{ minut.}$$

Příklad 3.7.3: *Tramvaj a chodec* 3:
Při chůzi podél tramvajové linky zpozoroval chodec, že každých 8 min ho dohonila jedna tramvaj a že každé 2 minuty ho minula tramvaj v opačném směru. Přitom tramvaje i chodec se pohybovali rovnoměrně. Spočítejme jaké jsou intervaly mezi odjezdy tramvají z konečných stanic.

Řešení č. 1:
Označme x intervaly mezi odjezdy z konečných stanic.
Ze zadání plyne, že x min poté, co chodec potká tramvajový vůz, přijede na totéž místo další tramvaj.
Jestliže tramvaj chodce dohání, pak ve zbývajících $(8 - x)$ min musí ujet vzdálenost, kterou on ujde za 8 min. Tedy vzdálenost, kterou chodec urazí za 1 min, ujede tramvaj za

$$\frac{8-x}{8} \text{ min.}$$

Jede-li tramvaj v protisměru, potká chodce za 2 min po předcházející tramvaji a během zbývajících $(x - 2)$ min ujede stejnou vzdálenost, kterou on ujde za 2 min. To znamená, že vzdálenost, kterou chodec ujde za 1 min, ujede tramvaj za

$$\frac{x-2}{2} \text{ min.}$$

Protože tramvaje se pohybují rovnoměrně, musí se vzdálenosti rovnat, a tak dostáváme rovnici

$$\frac{8-x}{8} = \frac{x-2}{2} \quad \Big| \cdot 8$$

$$8 - x = 4x - 8 \quad \Big| + x + 8$$

$$16 = 5x \quad \Big| : 5$$

$$\underline{x = 3{,}2} \text{ [min]}$$

Tramvaje vyjíždějí z konečné stanice každé 3,2 minuty.

Řešení č. 2:
Interval vypočteme podle vztahu (3-6) z příkladu 3.7.1.

$$t_0 = \frac{2tt'}{t+t'} = \frac{2\cdot 2\cdot 8}{2+8} = \underline{\underline{3{,}2}} \text{ minuty.}$$

3.8. Skupina 8: *„Zvláštní pohyby po neuzavřené dráze"*

Jedná se o pohyby, které lze jen velmi těžko popsat. Často se jedná o kombinaci pohybů nebo o pohyb soupravy mající danou délku. Nejčastěji počítáme délku soupravy nebo její rychlost.

Příklad 3.8.1:
Kolem nástupiště délky d metrů projíždí stálou rychlostí vlak. Vlak mine nástupiště za t_1 vteřin; výpravčího, který stojí na nástupišti, mine vlak za t_2 vteřin. Jaká je délka vlaku a jakou rychlostí jede? Úlohu řešte pro d = 200 m, t_1 = 17,5 vt., t_2 = 5 vt.

Řešení č. 1: - »úsudkem«
Fáze „lokomotiva mine nástupiště za t_0 vteřin" znamená toto: od okamžiku, kdy lokomotiva dospěla k počátku nástupiště, až do okamžiku, kdy lokomotiva opustila konec nástupiště, uplynulo t_0 vteřin; $t_0 = t_1 - t_2$. (Z toho plyne, že lokomotiva urazí délku nástupiště d za $t_1 - t_2$ vteřin, délku vlaku za t_2 vteřin.)
Pro rovnoměrný pohyb platí vzorec $s = v \cdot t$. Z toho plyne (pro $s = d$, $t = t_0$):

$$d = v \cdot (t_1 - t_2),$$

odkud $v = \dfrac{d}{t_1 - t_2}$.

Dále z toho plyne (pro $s = x$, $t = t_2$):

$$x = vt_2.$$

Číselně potom $v = \dfrac{d}{t_1 - t_2} = \dfrac{200}{17{,}5 - 5} = \underline{\underline{16}}$ [m/vt.]; $x = vt_2 = 16 \cdot 5 = \underline{\underline{80}}$ [m].

Zkouška:
Jede-li vlak podél celého nástupiště rychlostí 16 m/vt. po dobu 17,5 vt., ujede
$s = v \cdot t = 16 \cdot 17{,}5 = 280$ m, a to je délka nástupiště a vlaku dohromady.
Jede-li vlak podél výpravčího rychlostí 16 m/vt. po dobu 5 vt., ujede
$s = v \cdot t = 16 \cdot 5 = 80$ m, a to je délka vlaku.
Odpověď:
Vlak o délce 80 m jede rychlostí 16 m/vt.

Řešení č. 2: - *pomocí obecného modelu*
Fáze „vlak mine nástupiště za t_1 vteřin" znamená toto: od okamžiku, kdy lokomotiva dospěla k počátku nástupiště, až k okamžiku, kdy poslední vagón opustil konec nástupiště, uplynulo t_1 vteřin.
Fáze „vlak mine výpravčího za t_2 vteřin" znamená toto: od okamžiku, kdy lokomotiva dospěla k výpravčímu, až k okamžiku, kdy poslední vagón jej minul, uplynulo t_2 vteřin.
Pro rovnoměrný pohyb platí vzorec $s = v \cdot t$.
Neznámé objekty: x . . . délka vlaku vyjádřená v metrech, v . . . rychlost vlaku vyjádřená v metrech za vteřinu.
Než vlak mine nástupiště, urazí lokomotiva (i každý vagón) dráhu $d + x$ metrů, než vlak mine výpravčího, urazí lokomotiva (i každý vagón) dráhu x metrů. Podle vzorce pro dráhu rovnoměrného pohybu platí

$$d + x = vt_1,$$
$$x = vt_2.$$

Pro rychlost vlaku v vychází (po dosazení za x do první rovnice soustavy a vyjádření v)

$$v = \frac{d}{t_1 - t_2}; \tag{3-7}$$

Pro délku vlaku x vychází (viz druhá rovnice soustavy):

$$x = vt_2.$$

nebo (po dosazení za v do první rovnice soustavy a vyjádření x)

$$x = \frac{dt_2}{t_1 - t_2}. \tag{3-8}$$

Číselně pak vychází:

$$v = \frac{d}{t_1 - t_2} = \frac{200}{17{,}5 - 5} = \underline{\underline{16}} \text{ [m/vt.]};$$

$$x = vt_2 = 16 \cdot 5 = \underline{\underline{80}} \text{ [m]}, \quad \text{nebo}$$

$$x = \frac{dt_2}{t_1 - t_2} = \frac{200 \cdot 5}{17{,}5 - 5} = \underline{\underline{80}} \text{ [m]}.$$

Zkouška a *odpověď* – viz řešení 1.

Příklad 3.8.2:

Vozka, sedící na kozlíku naloženého vozu, zpozoroval, že se vzadu uvolnil nějaký řetěz. Sestoupil s kozlíku a kráčel ke konci vozu, zatímco vůz jel dál rovnoměrnou rychlostí. Ke konci vozu potřebuje vozka 8 kroků. Upevní řetěz a vrací se zpět na kozlík. Protože vůz stále rovnoměrně jede, potřebuje vozka nyní 24 kroků, aby došel na své stanoviště. Jak dlouhý je vůz, měřeno v krocích?

Řešení:

Příklad řeší stejný problém jako předchozí příklad 3.8.1 a použijeme stejný vztah,

$$d = \frac{2ab}{a + b}, \quad a = 24 \text{ kroků}, \; b = 8 \text{ kroků}.$$

$$d = \frac{2ab}{a + b} = \frac{2 \cdot 24 \cdot 8}{24 + 8} = \underline{\underline{12}} \text{ kroků}.$$

Odpověď:

Vůz je dlouhý 12 kroků.

Příklad 3.8.3:

Někteří občané Liberecka mohli sledovat, jak dělníci dopravního podniku stěhují velkou rekreační loď na Máchovo jezero. Transport těžkého nákladu, který byl dopravován po silnici, vzbudil velký zájem zejména u mládeže. Milana zajímalo, jak je loď dlouhá, chtěl by vědět, kolik kroků měří paluba. Doufal, že se doprava na chvíli zastaví, aby si nezvyklý náklad mohl svým krokem přeměřit, ale loď se sune po silnici volným tempem bez zastávky. Milan je však nejlepší matematik ve třídě, ví si tedy brzy rady. Jde nejprve po okraji silnice ve směru jízdy od jednoho konce lodi ke druhému a zjistí, že k tomu potřebuje 120 kroků; pak se obrátí a zjistí, že k cestě proti směru jízdy je třeba 30 kroků. Stačí už tyto údaje k tomu, aby mohl vypočítat délku lodi? (Poznamenejme, že Milan nezná ani rychlost dopravy, ani rychlost své chůze.)

Řešení:
Příklad řeší stejný problém jako předchozí příklad 3.8.1 a použijeme stejný vztah,

$$d = \frac{2ab}{a+b}, \quad a = 120 \text{ kroků}, b = 30 \text{ kroků}.$$

$$d = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2 \cdot 120 \cdot 30}{120 + 30} = \underline{\underline{48}} \text{ kroků}.$$

Odpověď:
Údaje Milanovi stačí, loď je dlouhá 48 kroků.

3.9. <u>Skupina 9:</u> *„Pohyb po uzavřené* (*kruhové*) *dráze"*

Po kruhu se pohybuje jeden nebo více subjektů. Pokud je subjektů více, mohou se pohybovat proti sobě, za sebou nebo kombinací těchto směrů. Počítáme rychlosti subjektů, čas strávený na dráze nebo délku dráhy.

<u>*Příklad* 3.9.1:</u>
Kolik je hodin, když se na hodinách mezi čtvrtou a pátou kryjí malá a velká ručička?

<u>*Řešení* č.1:</u>
Než se velká ručička dostane na místo malé, „ujde" 20 minut, malá mezi tím „jde" dvanáctkrát pomaleji a „ujde" tedy $\frac{1}{12}\cdot 20 = \frac{5}{3}$ minuty.
Aby se velká ručička opět dostala na místo malé, „ujde" nyní ještě $\frac{5}{3}$ minuty, malá mezi tím „ujde" $\frac{1}{12}\cdot\frac{5}{3} = \frac{5}{36}$ minuty.
Aby se velká ručička opět dostala na místo malé, „ujde" nyní ještě $\frac{5}{36}$ minuty, malá mezi tím „ujde" $\frac{1}{12}\cdot\frac{5}{36} = \frac{5}{432}$ minuty; atd.
Dráha velké ručičky tvoří nekonečnou geometrickou řadu

$$s = 20 + \frac{5}{3} + \frac{5}{36} + \frac{5}{432} + \ldots,$$

jejíž první člen $a_1 = 20$ a kvocient $q = \dfrac{\frac{5}{3}}{20} = \dfrac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{3}} = \dfrac{\frac{5}{432}}{\frac{5}{36}} = \ldots = \dfrac{1}{12}$.
Součet vypočteme podle vzorce:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{20}{1-\frac{1}{12}} = \frac{20}{\frac{11}{12}} = \frac{240}{11} = 21{,}\overline{81} \doteq 21{,}82 \doteq \underline{\underline{21 \text{ min } 49 \text{ s}}}.$$

Zkouška:
Za $\frac{240}{11}$ minuty ujde velká ručička dráhu $\frac{240}{11} = 21\frac{9}{11}$.
Za tutéž dobu ujde malá ručička dvanáctkrát méně, tj. $\frac{240}{11} : 12 = \frac{20}{11} = 1\frac{9}{11}$.
Rozdíl je $21\frac{9}{11} - 1\frac{9}{11}$ = 20 (minut).
Odpověď:
Na hodinách bude asi 4 hodiny 21 minut a 49 sekund.

Poznámka:
Úloha se řeší stejně, pokud malá a velká ručička se zamění i pokud jdou hodiny „obráceně" (tj. pozpátku).

<u>*Řešení* č. 2:</u> - pomocí rovnice a vzorců o pohybu
Velká ručička „ujde" dráhu . . . s_1 . . . rychlostí . . . v_1 . . . v čase . . . t_1.
Malá ručička „ujde" dráhu . . . s_2 . . . rychlostí . . . v_2 . . . v čase . . . t_2.
Platí: $v_1 = 12v_2$ $\rightarrow$ je-li $v_2 = 1$, potom $v_1 = 12$
$s_1 = s_2 + 120$ [°] – tj. středový úhel odpovídající 4 hodinám na ciferníku
$t_1 = t_2$
a do druhé rovnice dosadíme a dostaneme
$v_1t_1 = v_2t_2 + 120$
$12t_1 = t_1 + 120$
$11t_1 = 120$ . . . . . $t_1 = \frac{120}{11}$.

Potom ..... $s_1 = v_1 t_1 = 12 \cdot \frac{120}{11} = \frac{1440}{11}$ [°] = $21,\overline{81} \doteq 21,82 \doteq$ $\underline{\underline{21 \text{ min } 49}}$ s. $\{1° = \frac{1}{6}$ min$\}$
Zkouška a *odpověď* stejné jako v předchozím řešení.

Příklad 3.9.2:
Obvod kruhové jízdárny dlouhý 360 m oběhne jeden kůň o 12 vteř. dříve než druhý, poněvadž uběhne v minutě dráhu o 20 m větší. Kolik uběhne každý kůň za minutu?

Řešení:
Použijeme vztahu $s = v \cdot t$ pro rovnoměrný pohyb (je-li dráha přímá nebo kruhová, nemá na řešení této úlohy vliv). Označme si neznámou rychlost prvního koně x, dobu jeho oběhu y.
První kůň uběhne: $s_1 = v_1 \cdot t_1 \;\Rightarrow\; 360 = x \cdot y$,
druhý kůň uběhne: $s_2 = v_2 \cdot t_2 \;\Rightarrow\; 360 = (x - 20) \cdot (y + 0,2)$
a dostáváme soustavu rovnic

$$360 = x \cdot y \quad \rightarrow \quad y = \frac{360}{x}$$

$$\underline{360 = xy + 0,2x - 20y - 4}$$

$$360 = 360 + 0,2x - \frac{7\,200}{x} - 4 \quad \Big|\, -360 \,\Big| \cdot 5x$$

$$0 = x^2 - 20x - 36\,000 \qquad D = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36\,000) = 144\,400, \quad \sqrt{D} = 380$$

$$x_{12} = \frac{20 \pm 380}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 200 \\ -180 \end{cases},$$

řešením je $x = 200$ m/min $\rightarrow$ $x - 20 = 180$ m/min.
Zkouška:
První kůň běží rychlostí 200 m/min po dobu 360 : 200 = 1,8 min = 1 min 48 s a uběhne dráhu $s = 200 \cdot 1,8 = 360$ m.
Druhý kůň běží rychlostí 180 m/min po dobu 360 : 180 = 2 min a uběhne dráhu $s = 180 \cdot 2 = 360$ m.
Odpověď:
První kůň uběhne za minutu 200 m, druhý kůň 180 m.

Příklad 3.9.3:
Na kruhové dráze vyjedou z téhož místa dva cyklisté a) v témže směru, b) proti sobě. První objede dráhu za 1 min. 52 vteř., druhý za 2 min. 24 vteř. Po jaké době se potkají? Po jaké době se dohoní?

Řešení:
Nejdříve vyjádříme rychlost prvního cyklisty ze vzorce $s = v \cdot t$:

$$s = v_1 \cdot t_1 \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{s}{t_1} = \frac{s}{112} \text{ [m/s]},$$

Potom vyjádříme rychlost druhého cyklisty ze stejného vzorce:

$$s = v_2 \cdot t_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{s}{144} \text{ [m/s]}.$$

Pro pohyb cyklistů v témže směru platí:

$$s = v_1 t_1 - v_2 t_2$$

$$s = \frac{s}{112}t - \frac{s}{144}t \quad \Big| : t$$

$$1 = \frac{t}{112} - \frac{t}{144} \quad \Big| \cdot 1\,008$$

$1\,008 = 9t - 7t$

$1\,008 = 2t \quad \big| : 16$

$\underline{t = 504}$ [s] = $\underline{8 \text{ min } 24 \text{ s}}$.

Pro pohyb cyklistů proti sobě platí:

$$s = v_1 t_1 + v_2 t_2$$

$$s = \frac{s}{112}t + \frac{s}{144}t \quad \Big| : t$$

$$1 = \frac{t}{112} + \frac{t}{144} \quad \Big| \cdot 1\,008$$

$1\,008 = 9t + 7t$

$1\,008 = 16t \quad \big| : 16$

$\underline{t = 63}$ [s] = $\underline{1 \text{ min } 3 \text{ s}}$.

Zkouška:

První cyklista ujede za sekundu $\frac{1}{122}$ okruhu, druhý za sekundu $\frac{1}{144}$ okruhu.

Jedou-li za sebou ujedou za 504 s celkem $504 \cdot (\frac{1}{122} + \frac{1}{144}) = 504 \cdot \frac{9+7}{1\,008} = 504 \cdot \frac{1}{504} = 1$ okruh.

Jedou-li proti sobě ujedou za 63 s celkem $63 \cdot (\frac{1}{122} - \frac{1}{144}) = 63 \cdot \frac{9-7}{1\,008} = 63 \cdot \frac{1}{63} = 1$ okruh.

Odpověď:

Cyklisté se potkají po 1 min 3s a dohoní po 8 min 24 s.

Příklad 3.9.4:

Z určitého místa *A* závodní dráhy vyjedou současně cyklista a motocyklista. První objede dráhu za 2 min. 30 vteř., druhý za 1 min. 10 vteř. Po kolika obězích setkají se opět v místě *A*?

Řešení:

Poprvé se potkají, když celkový čas bude nejmenším společným násobkem časů objezdu dráhy obou.

NSN (150; 70) = 1 050.

Potom první objede dráhu celkem 1 050 : 150 = 7–krát, druhý objede dráhu celkem 1 050 : 70 = 15–krát.

Zkouška:

První po sedmi objezdech bude na dráze $7 \cdot 150$ = 1 050 s, druhý bude po patnácti objezdech na dráze $15 \cdot 70$ = 1 050 s.

Odpověď:

V místě *A* se opět setkají po 7-mi objezdech prvního a 15-ti objezdech druhého.

Příklad 3.9.5: *Na velodromu*:

Na kruhové cyklistické dráze jedou dva cyklisté stálou rychlostí. Když jedou opačnými směry, potkají se každých 10 s; když jedou oba stejným směrem, dohoní jeden druhého vždy po 170 s. Určete rychlosti obou cyklistů, víme-li, že kruhová dráha měří 170 m.

Řešení:
Princip úlohy je stejný jako v příkladu 3.9.2 v disertační práci, proto užijeme i stejné vzorce (3-6a), (3-6b):

$$v_1 = \frac{dt' + dt}{2tt'} \;, \quad v_2 = \frac{dt' - dt}{2tt'} \,.$$

Potom v našem konkrétním případě je d = 170 m, t = 10 s, t' = 170 s,

$$v_1 = \frac{dt' + dt}{2tt'} = \frac{170 \cdot 170 + 170 \cdot 10}{2 \cdot 10 \cdot 170} = \underline{\underline{9}} \text{ m/s},$$

$$v_2 = \frac{dt' - dt}{2tt'} = \frac{170 \cdot 170 - 170 \cdot 10}{2 \cdot 10 \cdot 170} = \underline{\underline{8}} \text{ m/s}.$$

Zkouška:
Za 10 s ujede první $10 \cdot 9$ = 90 m, druhý ujede $10 \cdot 8$ = 80 m. Dohromady ujedou 90 + 80 = 170 m.
Za 170 s ujede první $170 \cdot 9$ = 1530 m, druhý ujede $170 \cdot 8$ = 1360 m. Rozdíl jejich drah je 1530 – 1360 = 170 m.
Odpověď:
Rychlost prvního cyklisty je 9 m/s, druhého 8 m/s.

Příklad 3.9.6: (*Záměna hodinových ručiček*)
Uvažujme polohu ručiček ve 12 hodin. Kdybychom v této poloze zaměnili velkou a malou ručičku, dostaneme smysluplný časový údaj. Ale jindy – například v 6 hodin – by výměna byla absurdní, dávala by polohu, která se na správných hodinkách nemůže objevit; minutová ručička nemůže ukazovat 6, když hodinová ručička ukazuje 12. Vzniká tedy otázka: Kdy a jak často jsou hodiny v takové poloze, pro niž je záměna smysluplná a dává novou správnou polohu hodinových ručiček?

Řešení:
Řešení zpracováno podle [61], str. 41.
Měřme vzdálenost ručiček na ciferníku od bodu, kde je číslo 12, a to v šedesátinách kruhu. Předpokládejme, že jedna z požadovaných poloh ručiček nastala v okamžiku, kdy se hodinová ručička posunula o x dílků od cifry 12 a minutová ručička o y dílků od cifry 12. Poněvadž se hodinová ručička posune za 12 h o 60 dílků, musela se tato hodinová ručička posunout za (x/5) h o x dílků. Jinými slovy, uplynulo (x/5) h od okamžiku, kdy hodiny ukazovaly 12 hod.
Minutová ručička uběhla y dílků za (y/60) h. Jinými slovy, minutová ručička ukazovala na cifru 12 před (y/60) h, tedy

$$\left(\frac{x}{5} - \frac{y}{60} \right) \text{h}$$

po té, kdy obě ručičky ukazovaly cifru 12. Číslo (x/5-y/60) je celé (mezi 0 a 11), protože ukazuje, kolik celých hodin uběhlo od okamžiku, kdy hodiny ukazovaly 12 h.
Zaměníme-li obě ručičky, dostaneme stejným způsobem, že od okamžiku, kdy hodiny ukazovaly 12 h, po okamžik, který ukazují nyní, uběhlo

$$\frac{y}{5} - \frac{x}{60}$$

celých hodin. Toto číslo je opět celé (mezi 0 a 11).
Tím jsme dostali soustavu rovnic

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{60} = i$$
$$\frac{y}{5} - \frac{x}{60} = j$$
,

kde i a j jsou nějaká celá čísla mezi 0 a 11. Ze soustavy zjistíme, že

$$x = \frac{60 \cdot (12i + j)}{143},$$
$$y = \frac{60 \cdot (12j + i)}{143}.$$

Dosadíme-li za i a j všechny dvojice čísel mezi 0 a 11, dostaneme všechny hledané polohy ručiček. Protože ke každé z 12 hodnot i můžeme za j dosadit všech 12 čísel, dostáváme celkově $12 \cdot 12 = 144$ možných řešení. Ale ve skutečnosti je jich pouze 143, protože řešení pro $i = 0$ a $j = 0$ a řešení pro $i = 11$ a $j = 11$ dávají stejnou polohu ručiček.

Pro $i = 11$ a $j = 11$ máme

$$x = 60, y = 60,$$

tj. ručičky ukazují 12 h; stejně tak v případě $i = 0$ a $j = 0$ platí $x = 0, y = 0$, což je táž poloha ručiček.

Nebudeme probírat všechna řešení, podíváme se pouze na dvě:

První příklad $i = 1, j = 1$:

$$x = \frac{60 \cdot 13}{143} = 5\frac{5}{11}\ , \quad y = 5\frac{5}{11}\ ,$$

tj. hodiny ukazují 1 h $5\frac{5}{11}$ min. neboli 1 h 5 min. 27 vt.; ručičky se překrývají, a proto je samozřejmě můžeme zaměnit (stejně jako ve všech ostatních případech, kdy se ručičky překrývají).

Druhý příklad $i = 8, j = 5$:

$$x = \frac{60 \cdot (5 + 12 \cdot 8)}{143} \doteq 42{,}38\,,$$
$$y = \frac{60 \cdot (8 + 12 \cdot 5)}{143} \doteq 28{,}53\,.$$

Odpovídající časy jsou 8 h 28,53 min. neboli 8 h 28 min. 32 vt. a 5 h 42,38 min. neboli 5 h 42 min. 23 vt.

Celkový počet řešení známe: 143. Abychom našli všechna místa na ciferníku odpovídající hledané poloze ručiček, musíme rozdělit obvod ciferníku na 143 stejných částí. Tím dostaneme 143 hledaných bodů (samozřejmě ciferník dělíme tak, aby jedním z bodů byla cifra 12). Žádný další bod pak již nevyhovuje zadání úlohy.

Příklad 3.9.7: (*Překrývání hodinových ručiček*)

Kolikrát za den se na hodinách minutová a hodinová ručička překrývají. Kolik je hodin, stane-li se to mezi třetí a čtvrtou?

Řešení č. 1:

K vyřešení využijeme výsledků předchozí úlohy 3.9.6.

Do vztahu můžeme dosazovat čísla 0 až 11, je tedy dvanáct možností, ovšem případy 0 a 11 vedou na stejné řešení. Celkem je tedy jedenáct možností.

Ručičky se mají krýt mezi 3. a 4. hodinou. Proto dosadíme do vztahů

$$x = \frac{60 \cdot (12i + j)}{143},$$
$$y = \frac{60 \cdot (12j + i)}{143},$$
hodnoty $i = 3$, $j = 3$ a dostáváme:
$$x = y = \frac{60 \cdot (12 \cdot 3 + 3)}{143} = \frac{60 \cdot 3}{11} \doteq 16{,}36 \; .$$
Ručičky se kryjí mezi třetí a čtvrtou, když ukazují 3 h 16,36 min. neboli 3 h 16 min. 22 vt.

Řešení č. 2:

Řešení zpracováno podle [61], str. 43.

Opět vyjdeme z rovnic, které jsme odvodili při řešení minulé úlohy. Protože se ručičky překrývají, musí platit $x = y$ a $i = j$. Dosazením do soustavy rovnic
$$\frac{x}{5} - \frac{y}{60} = i$$
$$\frac{y}{5} - \frac{x}{60} = j$$
dostáváme jedinou rovnici
$$\frac{x}{5} - \frac{x}{60} = i,$$
kde i je celé číslo mezi 0 a 11. Odtud pak
$$x = \frac{60 \cdot i}{11}.$$
Z 12 možných hodnot m dostaneme pouze 11 různých poloh ručiček, protože pro $i = 11$ je $x = 60$, tj. obě ručičky uběhly 60 dílků a dostaly se na cifru 12. Táž situace ovšem nastává pro $i = 0$, kdy $x = y = 0$.

Chceme-li vědět, kdy se ručičky překrývají mezi 3. a 4. hodinou, dosadíme za i do předchozího vztahu hodnotu 3, potom
$$x = \frac{60 \cdot 3}{11} \doteq 16{,}36.$$
Ručičky se kryjí mezi třetí a čtvrtou, když ukazují 3 h 16 min. 22 vt.

Řešení č. 3:

Z praxe víme, že se ručičky kryjí ve 12 h, potom mezi 1. a 2. hodinou, mezi 2. a 3. hodinou, mezi 3. a 4. hodinou, mezi 4. a 5. hodinou, mezi 5. a 6. hodinou, mezi 6. a 7. hodinou, mezi 7. a 8. hodinou, mezi 8. a 9. hodinou, mezi 9. a 10. hodinou, mezi 10. a 11. hodinou a pak až ve 12 hodin (což jsme již uvedli). Celkem se překrývají 11 - krát.

Chceme-li zjistit, kolik bude hodin, když se tyto ručičky překrývají po 3. hodině, uvažujme takto: Velká ručička „ujde“ 15 minut než se dostane na místo malé, malá mezi tím „jde“ dvanáctkrát pomaleji a „ujde“ tedy $15 \cdot \frac{1}{12} = \frac{15}{12}$ minuty. Velká „ujde“ $\frac{15}{12}$ minuty, malá „ujde“ dvanáctinu, tj. $\frac{15}{12 \cdot 12}$ minuty atd.

Velká tedy „ujde“ 15 min. a $\frac{15}{12}$ min. a $\frac{15}{12 \cdot 12}$ min. atd. Jedná se tedy o nekonečnou geometrickou řady s prvním členem $a_1 = 15$ a kvocientem $q = \frac{1}{12}$.

Její součet vypočteme podle vzorce

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{15}{1-\frac{1}{12}}=\frac{15}{\frac{11}{12}}=\frac{15\cdot 12}{11}\doteq 16{,}36\,.$$

Mezi třetí a čtvrtou se ručičky budou překrývat ve 3 h 16 min. 22 vt.

Řešení č. 4:

Nyní se zaměříme jen na otázku, v kolik hodin se obě ručičky budou překrývat.
Velká ručička „ujde“ dráhu ... $\boldsymbol{s_1}$ ... rychlostí ... $\boldsymbol{v_1}$ ... v čase ... $\boldsymbol{t_1}$.
Malá ručička „ujde“ dráhu ... $\boldsymbol{s_2}$ ... rychlostí ... $\boldsymbol{v_2}$ ... v čase ... $\boldsymbol{t_2}$.
Platí: $v_1 = 12\, v_2$ → zvolíme-li rychlost $v_2 = 1$ (volba jedné rychlosti nám neovlivní výsledek), je rychlost $v_1 = 12$

$s_1 = s_2 + 90$ [°], (90° je čtvrtina kruhu)

$t_1 = t_2$

a budeme postupně dosazovat do druhé rovnice, nejdříve $s_1 = v_1\, t_1$, $s_2 = v_2\, t_2$

$v_1\, t_1 = v_2\, t_2 + 90$

$12\, t_1 = t_2 + 90$

$12\, t_1 = t_1 + 90$

$11\, t_1 = 90$ .... $t_1 = \frac{90}{11}$ [°]

Potom ..... $s_1 = v_1\, t_1 = 12\cdot\frac{90}{11}\doteq 98{,}18$ [°] , což je asi 16,36 min. (1° je $\frac{1}{6}$ minuty).
Mezi třetí a čtvrtou se ručičky budou překrývat ve 3 h 16 min. 22 vt.

3.10. <u>Skupina 10:</u> *„Pohyb v rovině“*

Subjekty se v rovině mohou pohybovat po kolmicích, po různoběžných přímkách, které nejsou kolmé, po stranách trojúhelníku nebo mohou vykonávat jiný pohyb v rovině. Nejčastěji počítáme vzdálenosti subjektů.

Příklad 3.10.1:
Dva povozy počali současně jeti po dvou silnicích kolmo se protínajících ke křižovatce, od které byl prvý vzdálen 830 m, druhý 1060 m; prvý ujel za minutu 75 m, druhý 100 m. Za kolik minut přiblíží se k sobě povozy až na 100 m?

Řešení:
K řešení použijeme analytickou geometrii. Soustavu souřadnic umístíme tak, že osa y bude první silnicí, osa x bude druhou silnicí, počátek bude průsečík silnic, vzdálenosti budou v metrech, čas v minutách, počet minut označme n. Polohu prvního povozu na počátku jízdy označme A, potom jeho souřadnice jsou $A = [0; 830]$, změna polohy bodu A bude určena proměnlivými souřadnicemi $A = [0; 830 - 75n]$. Polohu druhého povozu na počátku jízdy označme B, potom jeho souřadnice jsou $B = [1\,060; 0]$, změna polohy bodu B bude určena proměnlivými souřadnicemi $B = [1\,060 - 100n; 0]$. Protože vzdálenost mezi povozy má být 100 metrů, z analytické geometrie plyne

$$\sqrt{(1\,060-100n)^2+(75n-830)^2}=100 \quad \Big|^2$$

$$1\,123\,600 - 212\,000n + 10\,000n^2 + 5\,625n^2 - 124\,500n + 688\,900 = 10\,000 \quad \Big| - 10\,000$$

$$15\,625n^2 - 336\,500n + 1\,802\,500 = 0 \quad \Big| : 125$$

$$125n^2 - 2\,692n + 14\,420 = 0$$

$$D = 36\,864 \quad \rightarrow \quad \sqrt{D} = 192 \quad \rightarrow \quad n_{12} = \frac{2\,692 \pm 192}{2\cdot 125} = \begin{cases} 11{,}536 \\ 10 \end{cases}.$$

Zkouška:
1) Po 11,536 s ujede první povoz $11{,}536\cdot 75 = 865{,}2$ m a je vzdálen od křižovatky $|830 - 865{,}2| = 35{,}2$ m. Druhý povoz ujede $11{,}536\cdot 100 = 1\,153{,}6$ a je vzdálen od křižovatky $|1\,060 - 1\,153{,}6| = 93{,}6$ m.
Vzdálenost povozů je $d = \sqrt{35{,}2^2+93{,}6^2} = 100$ m.
2) Po 10 s ujede první povoz $10\cdot 75 = 750$ m a je vzdálen od křižovatky $|830 - 750| = 80$ m.
Druhý povoz ujede $10\cdot 100 = 1\,000$ m a je vzdálen od křižovatky $|1\,060 - 1\,000| = 60$ m.
Vzdálenost povozů je $d = \sqrt{80^2+60^2} = 100$ m.
Odpověď:
Povozy budou od sebe vzdáleny 100 m poprvé po 10 s, podruhé po 11,536 s.

Příklad 3.10.2:
Dvě tělesa A, B se pohybují na dvou přímkách, jež se protínají kolmo, směrem od průsečíku. V době 0 je A vzdáleno 175 m, B 20 m od průsečíku. Kdy bude (nebo byla) vzájemná vzdálenost obou těles 370 m, je-li rychlost A 49 m, rychlost B 28 m za min.?

Řešení:
K řešení opět použijeme analytickou geometrii. Soustavu souřadnic umístíme tak, že první přímka splyne s osou y, druhá přímka splyne s osou x, počátek bude průsečík přímek, vzdálenosti budou v metrech, čas v minutách, počet minut označme n. Polohou prvního tělesa A na

počátku pohybu bude bod *A*, jeho souřadnice jsou *A* = [0; 175], změna polohy bodu *A* bude určena proměnlivými souřadnicemi *A* = [0; 175 – 49*n*]. Polohou druhého tělesa na počátku pohybu bude bod *B*, jeho souřadnice jsou *B* = [20; 0], změna polohy bodu *B* bude určena proměnlivými souřadnicemi *B* = [20 – 28*n*; 0]. Protože vzdálenost mezi tělesy má být 370 metrů, z analytické geometrie plyne

$$\sqrt{(20-28n)^2+(175-49n)^2}=370$$

$$400 - 1\,120n + 784n^2 + 2\,401n^2 - 17\,150n + 30\,625 = 136\,900 \quad \Big| - 136\,900$$

$$3\,185n^2 - 18\,270n - 105\,875 = 0 \quad \Big| : 5$$

$$637n^2 - 3\,654n - 21\,175 = 0$$

$$D = 67\,305\,616 \quad \rightarrow \quad \sqrt{D} = 8\,204 \quad \rightarrow \quad n_{12} = \frac{3\,654 \pm 8\,204}{2\cdot 637} = \begin{cases} \frac{121}{13} \\ -\frac{25}{7} \end{cases}.$$

Zkouška:

1) Po $\frac{121}{13}(\doteq 9{,}31)$ s se těleso *A* posune o $\frac{121}{13}\cdot 49 = \frac{5\,929}{13}$ m a je vzdáleno od průsečíku $\left|175-\frac{5\,929}{13}\right| = \frac{3\,654}{13}$ m. Druhé těleso *B* se posune o $\frac{121}{13}\cdot 28 = \frac{3\,388}{13}$ m a je vzdáleno od průsečíku $\left|20-\frac{3\,388}{13}\right| = \frac{3\,128}{13}$ m.

Vzdálenost těles je $d = \sqrt{(\frac{3\,654}{13})^2+(\frac{3\,128}{13})^2} = 370$ m.

2) Před $\frac{25}{7}(\doteq 3{,}57)$ s bylo těleso *A* posunuto o $\frac{25}{7}\cdot 49 = 175$ m před průsečík a je vzdáleno $|175 + 175| = 350$ m. Druhé těleso *B* bylo posune o $\frac{25}{7}\cdot 28 = 100$ m před průsečík a je vzdáleno $|20 + 100| = 120$ m.

Vzdálenost těles je $d = \sqrt{350^2+120^2} = 370$ m.

Odpověď:

Vzdálenost obou těles byla 370 m $\frac{25}{7}$ s před začátkem pohybu a $\frac{121}{13}$ s po začátku pohybu.

Příklad 3.10.3:

Na ramenech pravého úhlu pohybují se dvě tělesa rovnoměrně směrem k vrcholu; v době 0 mají od něho vzdálenosti 40 a 27 m; po uplynutí jedné vteřiny mají vzájemnou vzdálenost 40 m, po 4 vteřinách 17 m. Určete jejich rychlosti.

Řešení:

K řešení opět použijeme analytickou geometrii. Soustavu souřadnic umístíme tak, že první rameno úhlu splyne s osou *y*, druhé rameno úhlu splyne s osou *x*, počátek bude vrchol úhlu, vzdálenosti budou v metrech, čas v sekundách, počet sekund označme *n*. Polohou prvního tělesa bude bod *A*, jeho souřadnice jsou *A* = [0; 40], změna polohy bodu *A* bude určena proměnlivými souřadnicemi *A* = [0; 40 – $a\cdot n$], kde *a* je rychlost pohybu tělesa *A*. Polohou druhého tělesa bude bod *B*, jeho souřadnice jsou *B* = [27; 0], změna polohy bodu *B* bude určena proměnlivými souřadnicemi *B* = [20 – $b\cdot n$; 0], kde *b* je rychlost pohybu tělesa *B*. Vzdálenost mezi tělesy *A*, *B* je po 1 sekundě 40 m a platí

$$\sqrt{(27-b)^2+(40-a)^2}=40.$$

Vzdálenost mezi tělesy *A*, *B* je po 4 sekundách 17 m a platí

$$\sqrt{(27-4b)^2+(40-4a)^2}=17.$$

Řešíme soustavu rovnic

$$(27 - b)^2 + (40 - a)^2 = 1\,600$$
$$\underline{(27 - 4b)^2 + (40 - 4b)^2 = 289}$$
$$729 - 54b + b^2 + 1\,600 - 80a + a^2 = 1\,600 \quad \Big|-1\,600$$
$$\underline{729 - 216b + 16b^2 + 1\,600 - 320a + 16a^2 = 289} \quad \Big|-289$$
$$a^2 + b^2 - 80a - 54b + 729 = 0 \quad \Big|\cdot(-16)$$
$$\underline{16a^2 + 16b^2 - 320a - 216b + 2\,040 = 0}$$
$$960a + 648b - 9\,624 = 0 \quad \Big|:24$$

$$40a + 27b - 401 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{401 - 27b}{40},$$ dosadíme do první rovnice soustavy a dostáváme

$$\left(\frac{401-27b}{40}\right)^2 + b^2 - 80\cdot\left(\frac{401-27b}{40}\right) - 54b + 729 = 0 \quad \Big|\cdot 1\,600$$

$$160\,801 - 21\,654b + 729b^2 + 1\,600b^2 - 1\,283\,200 + 86\,400b - 86\,400b + 1\,166\,400 = 0$$
$$2\,329b^2 - 21\,654b + 44\,001 = 0$$

$$D = 58\,982\,400 \quad \rightarrow \quad \sqrt{D} = 7\,680 \quad \rightarrow \quad b_{12} = \frac{21\,654 \pm 7\,680}{2\cdot 2\,329}\begin{cases} \doteq 6{,}298 \\ = 3 \end{cases}.$$

$$a_1 \doteq \frac{401 - 27\cdot 6{,}298}{40} \doteq 5{,}774;\quad a_2 = \frac{401 - 27\cdot 3}{40} = 8.$$

Zkouška:

1) První těleso se pohybuje rychlostí 8 m/s, druhé rychlostí 3 m/s. Po 1 s je první těleso vzdáleno od počátku 40 – 8 = 32 m, druhé těleso 27 – 3 = 24 m. Vzdálenost těles je $d = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40$ m. Po 4 s je první těleso vzdáleno od počátku $40 - 4\cdot 8 = 8$ m, druhé těleso $27 - 4\cdot 3 = 15$ m. Vzdálenost těles je $d = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ m.
2) První těleso se pohybuje rychlostí 5,774 m/s, druhé rychlostí 6,298 m/s. Po 1 s je první těleso vzdáleno od počátku 40 – 5,774 = 34,226 m, druhé těleso 27 – 6,298 = 20,702 m. Vzdálenost těles je $d = \sqrt{34{,}226^2 + 20{,}702^2} \doteq 40$ m. Po 4 s je první těleso vzdáleno od počátku $40 - 4\cdot 5{,}774 = 16{,}904$ m, druhé těleso $27 - 4\cdot 6{,}298 = 1{,}808$ m. Vzdálenost těles je $d = \sqrt{16{,}904^2 + 1{,}808^2} \doteq 17$ m.

Odpověď:

Tělesa se pohybují rychlostmi 8 m/s a 3 m/s nebo rychlostmi 5,774 m/s a 6,298 m/s.

Příklad 3.10.4: (*Dva vlaky*)

Dvě železniční tratě se kříží pod pravým úhlem. K místu křížení se současně blíží po obou tratích dva vlaky; jeden z nádraží, které leží 40 km od křížení, druhý z nádraží, které je 50 km od křížení. První vlak ujede za 1 min 0,8 km, druhý 0,6 km. Za kolik minut od výjezdu z obou nádraží budou vlaky od sebe nejméně vzdáleny? Jaká je tato vzdálenost?

Řešení:

K řešení opět použijeme analytickou geometrii. Soustavu souřadnic umístíme tak, že první trať splyne s osou y, druhá trať splyne s osou x, počátek bude místo křížení, vzdálenosti budou v kilometrech, čas v minutách, počet minut označme n. Polohou prvního vlaku bude bod M, jeho souřadnice jsou $M = [0;\ 40]$, změna polohy bodu M bude určena proměnlivými souřadnicemi $M = [0;\ 40 - 0{,}8n]$. Polohou druhého vlaku bude bod N, jeho souřadnice jsou $N = [50;\ 0]$, změna polohy bodu N bude určena proměnlivými souřadnicemi $N = [50 - 0{,}6n;\ 0]$. Vzdálenost vlaků M, N je možné pomocí analytické geometrie vyjádřit takto:

$$V = \sqrt{(50-0{,}6n)^2 + (0{,}8n-40)^2}$$

$$V = \sqrt{2\,500 - 60n + 0{,}36n^2 + 0{,}64n^2 - 64n + 1\,600}$$

$$V = \sqrt{n^2 - 124n + 4\,100}\,.$$

Protože chceme, aby vzdálenost byla co nejmenší, musíme najít pro funkci vzdálenosti V její minimum. K tomu použijeme derivací

$$V' = \frac{2n-124}{2\cdot\sqrt{n^2-124n+4\,100}}\,.$$

Chceme-li najít extrém , musí platit

$$\frac{2n-124}{2\cdot\sqrt{n^2-124n+4\,100}} = 0 \quad \rightarrow \quad 2n - 124 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{n = 62}\text{ [min]}.$$

Ještě pomocí druhé derivace zjistíme, zda se jedná skutečně o minimum:

$$V'' = \frac{2\cdot 2\cdot\sqrt{n^2-124n+4\,100} - (2n-124)\cdot 2\cdot \dfrac{2n-124}{\sqrt{n^2-124n+4\,100}}}{4\cdot(n^2-124n+4\,100)}\,.$$

$$V''(62) = \frac{4\cdot 16-0}{4\cdot 256} = \frac{1}{16} > 0 \quad \rightarrow \quad \text{jedná se o lokální minimum.}$$

Vzdálenost vlaků po 62 minutách:

První vlak bude vzdálen od místa křížení $40 - 62\cdot 0{,}8 = -9{,}6$ km, tedy vlak bude již 9,6 km za místem křížení. Druhý vlak bude vzdálen od místa křížení $50 - 62\cdot 0{,}6 = 12{,}8$ km, Vlaky budou vzdálené $d = \sqrt{9{,}6^2 + 12{,}8^2} = 16$ km.

Zkouška:

Vyplývá z vlastností diferenciálního počtu.

Můžeme též náhodně vyzkoušet, zda neexistuje nějaká menší vzdálenost. Např. po 50 s ujede první vlak $40 - 50\cdot 0{,}8 = 0$ km (vlak je v místě křížení) a druhý vlak $50 - 50\cdot 0{,}6 = 20$ km. Z toho plyne, že vlaky jsou vzdálené 20 km.

Odpověď:

Vlaky budou od sebe nejméně vzdáleny po 62 minutách od výjezdu a to 16 km.

3.11. Skupina 11: *„Pohyb v prostoru a komplexní úlohy"*

Subjekty se mohou v prostoru pohybovat jakýmkoliv způsobem. Pokud je úloha komplexní, počítají se často i veličiny, které pouze s pohybem souvisí nebo jsou jeho důsledkem. Jinak počítáme veličiny, které pohyb určují. Úlohy tohoto typu se ve sbírkách vyskytují jen zřídka.

Příklad 3.11.1:
Pilot letadla postupně vystoupal do výše 3 400 a udržoval s letadlem stálou výšku, rychlost a východní směr. Když se cestující podíval z okénka letadla, spatřil jihovýchodním směrem pod hloubkovým úhlem 45° kulovitý tvar vodojemu. Půl minuty nato, když vyhlédl znovu z okénka, uviděl tentýž vodojem na jihozápadě pod stejným hloubkovým úhlem. Jak rychle letadlo letí?

Řešení:
Řešení zpracováno podle [83], str. 352.
Označme si dráhu letu letadla s (počáteční bod označme P, koncový bod K), jeho rychlost v. Doba letu je $t = 30$ s. Výšku letadla označme h, $h = 3\,400$ m. Situaci je zobrazena na obrázku 3-5 (užito kosoúhlé promítání, $\omega = 135°$, $q = \frac{2}{3}$), půdorys na obrázku 3-6.
Body P_1, K_1 jsou půdorysy bodů P, K, bod V je obraz vodojemu. Z textu vyplývá, že trojúhelník PKV je rovnoramenný. Potom také trojúhelník P_1VK_1 je rovnoramenný a navíc pravoúhlý. Potom platí:

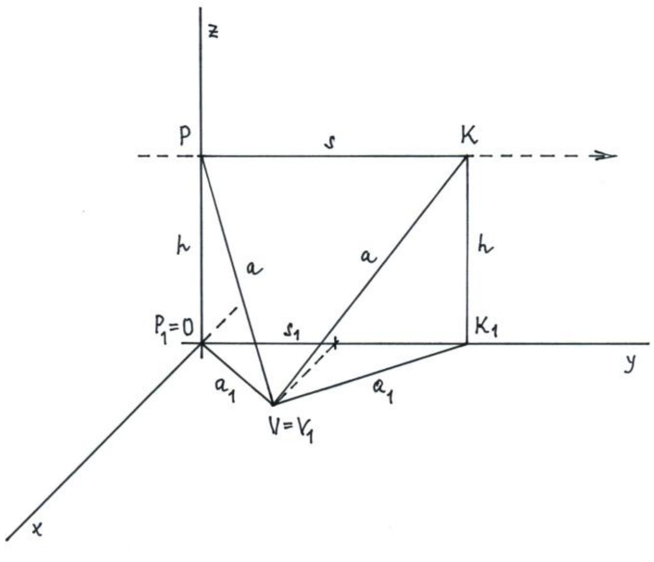
$$\left| \angle PVP_1 \right| = \alpha = 45°,\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{a_1} \Rightarrow \left| PP_1 \right| = \left| P_1V \right| \Rightarrow a_1 = h = 3\,400 \text{ m},$$

potom také

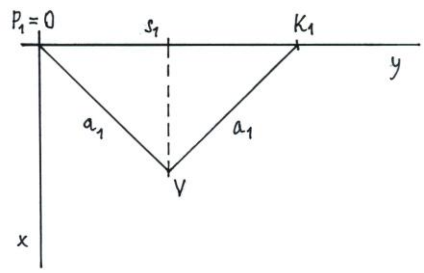
$$a_1 = h \Rightarrow \left| KK_1 \right| = \left| K_1V \right| = 3\,400 \text{ m}.$$

Dále platí $VP_1 \perp VK_1$, z čehož plyne, že trojúhelník P_1VK_1 je pravoúhlý rovnostranný.

Obr. 3-5:



Obr. 3-6:



V trojúhelníku P_1VK_1 platí

$$2a_1^2 = s_1^2.$$

Protože ramena a_1 mají velikost 3 400 m a $s_1 = s$, dostáváme

$$s = a_1 \cdot \sqrt{2} = 3\,400 \cdot \sqrt{2} \doteq 4\,808{,}3 \text{ m.}$$

Potom vypočteme rychlost ze vztahu $s = v \cdot t$ a dostáváme:

$$v = \frac{s}{t} \doteq \frac{4\,808{,}3}{30} \doteq 160{,}3 \text{ m/s} \doteq 577 \text{ km/h.}$$

Zkouška:

Že trojúhelník P_1VK_1 je pravoúhlý, vyplývá ze zadání. Ověříme, zda je to splněno pro naše hodnoty.

Za 30 s uletí letadlo $30 \cdot 160{,}3 \doteq 4\,809$ m.

$|P_1K_1|^2 \doteq 4\,809^2 = 23\,126\,481 \text{ m} \doteq 23\,126 \text{ km.}$

$|P_1V|^2 + |K_1V|^2 = 2 \cdot 3\,400^2 = 23\,120\,000 \text{ m} \doteq 23\,120 \text{ km.}$

Odchylka je způsobena zaokrouhlením.

Odpověď:

Letadlo letí rychlostí 160,3 m/s.

4. Slovní úlohy o směsích

Slovní úlohy o směsích jsou členěny podle počtu složek, které obsahují a jsou doplněny úlohami, kdy jsou směsi v různých situacích nebo jsou nedostatečně určeny. Nejčastěji jsou tyto úlohy řešeny pomocí soustav rovnic, i když je také můžeme řešit pomocí jedné rovnice, pomocí úsudku apod. K řešení těchto úloh můžeme použít též obecných modelů.

4.1. <u>Skupina 1:</u> *„Úlohy o směsích se dvěma složkami"*

Úlohy obsahují zadání o směsích (slitinách, roztocích) se dvěma složkami. Proto je lze vyjádřit soustavou dvou rovnic pro dvě neznámé, které také počítáme. K řešení úloh samozřejmě můžeme využít i jiných metod včetně užití obecných modelů. Tyto úlohy někteří autoři ještě dále člení, ale toto členění je příliš podrobné, v některých podskupinách je těžké vůbec najít vhodné úlohy, a proto další členění neprovádím.

<u>Model 1:</u>

1. složka směsi má . . . . . hmotnost (počet jednotek) . . . m_1; cenu (za jednotku) . . . c_1,
2. složka směsi má . . . . . hmotnost (počet jednotek) . . . m_2; cenu (za jednotku) . . . c_2,

výsledná směs má . . . . . hmotnost (počet jednotek) . . . m; cenu (za jednotku) . . . c.

Modelem je soustava rovnic:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= m \\ c_1 m_1 + c_2 m_2 &= cm\ . \end{aligned} \qquad \textbf{(4-1)}$$

V soustavě rovnic je šest proměnných, čtyři z nich jsou zadány, dvě se počítají. Podle toho, které dvojice se počítají, budeme dále dělit do podskupin. Z tohoto modelu nelze počítat dvě ceny.

Nejčastěji se počítají hodnoty m_1, m_2.

Vyjdeme ze soustavy rovnic (4-1) a dostáváme:

$$m_1 = \frac{cm - c_2 m}{c_1 - c_2}, \qquad \text{nebo} \qquad m_1 = \frac{c - c_2}{c_1 - c_2} \cdot m\,; \qquad \textbf{(4-1a)}$$

$$m_2 = \frac{cm - c_1 m}{c_2 - c_1}, \qquad \text{nebo} \qquad m_2 = \frac{c - c_1}{c_2 - c_1} \cdot m\,. \qquad \textbf{(4-1b)}$$

Dále můžeme vyjádřit neznámé m_1, m.

Vyjdeme opět ze soustavy rovnic (4-1) a dostáváme:

$$m_1 = \frac{cm_2 - c_2 m_2}{c_1 - c}, \qquad \text{nebo} \qquad m_1 = \frac{c - c_2}{c_1 - c} \cdot m_2\,; \qquad \textbf{(4-1c)}$$

$$m = \frac{c_1 m_2 - c_2 m_2}{c_1 - c}, \qquad \text{nebo} \qquad m = \frac{c_1 - c_2}{c_1 - c} \cdot m_2\,. \qquad \textbf{(4-1d)}$$

Také můžeme vyjádřit neznámé c, m.

Vyjdeme opět ze soustavy rovnic (4-1) a dostáváme:

$m = m_1 + m_2$ (k vyjádření nám stačí první rovnice);

$$c = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m_1 + m_2} \qquad \text{nebo} \qquad c = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m} \qquad \textbf{(4-1e)}$$

Můžeme také vyjádřit celkovou cenu. Potom

$cm = c_1 m_1 + c_2 m_2$ (k vyjádření nám stačí druhá rovnice).

Příklad 4.1.1:
Ze dvou druhů čaje v ceně 170 Kč a 210 Kč za 1 kg se má připravit 25 kg směsi v ceně 186 Kč za 1 kg. Kolik kilogramů každého druhu čaje je třeba smíchat?

Řešení:
Matematickým modelem dané situace je předchozí model 1, varianta (4-1), množství m_1, m_2 vypočteme podle vztahů (4-1a), (4-1b).
V našem případě je $c_1 = 170$ Kč, $c_2 = 210$ Kč, $c = 186$ Kč, $m = 25$ kg; potom

$$m_1 = \frac{c - c_2}{c_1 - c_2} \cdot m = \frac{186 - 210}{170 - 210} \cdot 25 = \underline{\underline{15}} \text{ kg};$$

$$m_2 = \frac{c - c_1}{c_2 - c_1} \cdot m = \frac{186 - 170}{210 - 170} \cdot 25 = \underline{\underline{10}} \text{ kg}.$$

Zkouška:
15 kg čaje za 170 Kč stojí celkem $15 \cdot 170 = 2\,550$ Kč,
10 kg čaje za 210 Kč stojí celkem $10 \cdot 210 = 2\,100$ Kč,
celkem 25 kg směsi stojí 2 550 + 2 100 = 4 650 Kč.
Víme také, že cena 25 kg směsi se dá vypočítat jinak: $25 \cdot 186 = 4\,650$ Kč.
Odpověď:
Je třeba smíchat 15 kg čaje v ceně 170 Kč za 1 kg a 10 kg čaje v ceně 210 Kč za 1 kg.

Příklad 4.1.2:
Kolik gramů 60 % roztoku a kolik gramů 35 % roztoku je třeba k vytvoření 100 gramů 40 % roztoku?

Řešení:
Matematickým modelem dané situace je opět předchozí model 1, varianta (4-1), množství m_1, m_2 opět vypočteme podle vztahů (4-1a), (4-1b), protože jak cena zboží, tak procento roztoku vyjadřují kvalitu dané složky směsi. Proto si procenta vyjadřující roztok převedeme na číslo vyjadřující část celku. Je tedy 60 % rovno 0,6 celku, atd.
V našem případě je $c_1 = 0{,}6$, $c_2 = 0{,}35$, $c = 0{,}4$, $m = 100$ g; potom

$$m_1 = \frac{c - c_2}{c_1 - c_2} \cdot m = \frac{0{,}4 - 0{,}35}{0{,}6 - 0{,}35} \cdot 100 = \underline{\underline{20}} \text{ g};$$

$$m_2 = \frac{c - c_1}{c_2 - c_1} \cdot m = \frac{0{,}4 - 0{,}6}{0{,}35 - 0{,}6} \cdot 100 = \underline{\underline{80}} \text{ g}.$$

Zkouška:
Ve 20 g 60 % roztoku je $20 \cdot 0{,}6 = 12$ g látky,
v 80 g 35 % roztoku je $80 \cdot 0{,}35 = 28$ g látky,
dohromady je ve 100g 40 % směsi 12 + 28 = 40 g látky.
Také se současně jedná o 100 g 40 % roztoku a v něm je $100 \cdot 0{,}4 = 40$ g látky.
Odpověď:
Je třeba smíchat 20 g 60 % roztoku a 80 g 35 % roztoku.

Model 2:

1. složka směsi má . . . . . hmotnost (počet jednotek) . . . m_1;   cenu (za jednotku) . . . c_1,
2. složka směsi má . . . . . hmotnost (počet jednotek) . . . m_2;   cenu (za jednotku) . . . c_2,

výsledná směs má . . . . . hmotnost (počet jednotek) . . . m;   cenu (za jednotku) . . . c,
rozdíl hmotností je r (rozdíl je vždy zadán).
Modelem je soustava rovnic:

$$\begin{aligned} m_1 - m_2 &= r \\ c_1 m_1 + c_2 m_2 &= cm\,. \end{aligned} \qquad \textbf{(4-2)}$$

V soustavě rovnic je šest proměnných, čtyři z nich jsou zadány, dvě se počítají. Podle toho, které dvojice se počítají, budeme dále dělit do podskupin. V modelu je předpokládáno, že $m_1 > m_2$, což není na újmu obecnosti. Pokud by tomu bylo obráceně, hodnoty m_1, m_2 zaměníme. Z tohoto modelu nelze počítat dvě ceny.
Nejčastěji se počítají hodnoty m_1, m_2.
Vyjdeme ze soustavy rovnic (4-2) a dostáváme:

$$m_1 = \frac{cm + c_2 r}{c_1 + c_2}; \qquad \textbf{(4-2a)} \qquad\qquad m_2 = \frac{cm - c_1 r}{c_1 + c_2}. \qquad \textbf{(4-2b)}$$

Příklad 4.1.3:
Na stavbu bylo dvěma nákladními auty navezeno celkem 385 tun materiálu. První auto uveze při jedné jízdě 5 tun materiálu, druhé auto 8 tun materiálu. kolikrát které auto jelo, vykonalo-li větší auto o 14 jízd více?

Řešení:
Matematickým modelem dané situace je předchozí model 2, varianta (4-2), množství m_1, m_2 vypočteme podle vztahů (4-2a), (4-2b). Musíme dát pozor na označení, protože zde je důležité pořadí. Jako první budeme brát auto, které uveze 8 t, protože jelo vícekrát (v modelu 2 se předpokládá, že $m_1 > m_2$).
Potom je v našem případě $c_1 = 8$ t, $c_2 = 5$ t, $cm = 385$ t, $r = 14$ a dostáváme

$$m_1 = \frac{cm + c_2 r}{c_1 + c_2} = \frac{385 + 5 \cdot 14}{8 + 5} = \underline{\underline{45}} \text{ - krát.}$$

$$m_2 = \frac{cm - c_1 r}{c_1 + c_2} = \frac{385 - 8 \cdot 14}{8 + 5} = \underline{\underline{21}} \text{ - krát.}$$

Zkouška:
1. auto navezlo celkem $21 \cdot 5 = 105$ t,
2. auto navezlo celkem $35 \cdot 8 = 280$ t,

celkem navezla obě auta $105 + 280 = 385$ t.
Odpověď:
První nákladní auto (5 tun) jelo 21-krát, druhé nákladní auto (8 tun) jelo 45-krát.

Model 3:

1. složka směsi má . . . . . hmotnost (počet jednotek) . . . m_1;   cenu (za jednotku) . . . c_1,
2. složka směsi má . . . . . hmotnost (počet jednotek) . . . m_2;   cenu (za jednotku) . . . c_2,

výsledná směs má . . . . . hmotnost (počet jednotek) . . . m;   cenu (za jednotku) . . . c,
rozdíl cen je d (rozdíl je vždy zadán).
Modelem je soustava rovnic:

$$c_1 - c_2 = d$$
$$c_1 m_1 + c_2 m_2 = cm \;. \qquad \textbf{(4-3)}$$

V soustavě rovnic je šest proměnných, čtyři z nich jsou zadány, dvě se počítají. Podle toho, které dvojice se počítají, budeme dále dělit do podskupin. V modelu je předpokládáno, že $c_1 > c_2$, což není na újmu obecnosti. Pokud by tomu bylo obráceně, hodnoty c_1, c_2 zaměníme.
Z tohoto modelu nelze počítat dvě hmotnosti.
Nejčastěji se počítají hodnoty c_1, c_2.
Vyjdeme ze soustavy rovnic (4-3) a dostáváme:

$$\underline{\underline{c_1 = \frac{cm + dm_2}{m_1 + m_2}}} \quad \text{nebo} \quad \underline{\underline{c_1 = \frac{cm + dm_2}{m}}}; \qquad \textbf{(4-3a)}$$

$$\underline{\underline{c_2 = \frac{cm - dm_1}{m_1 + m_2}}} \quad \text{nebo} \quad \underline{\underline{c_2 = \frac{cm - dm_1}{m}}}. \qquad \textbf{(4-3b)}$$

<u>*Příklad* 4.1.4:</u>
Smísí-li se 5 kg zboží dražšího a 10 kg zboží levnějšího, má směs cenu 220,- Kč za 1 kg. Kolik stojí 1 kg zboží dražšího a kolik 1 kg zboží lacinějšího, liší-li se ceny o 30,- Kč?

Řešení:
Matematickým modelem dané situace je předchozí model 3, varianta (4-3), ceny c_1, c_2 vypočteme podle vztahů (4-3a), (4-3b).
V našem případě je $m_1 = 5$, $m_2 = 10$, $m = 15$, $c = 220$, $d = 30$; potom

$$c_1 = \frac{cm + dm_2}{m} = \frac{220 \cdot 15 + 30 \cdot 10}{15} = \underline{\underline{240}} \text{ Kč.}$$

$$c_2 = c_1 - d = 240 - 30 = 210 \text{ Kč} \quad \text{nebo} \quad c_2 = \frac{cm - dm_1}{m} = \frac{220 \cdot 15 - 30 \cdot 5}{15} = \underline{\underline{210}} \text{ Kč.}$$

Zkouška:
5 kg zboží za 240 Kč stojí celkem $5 \cdot 240$ = 1 200 Kč,
10 kg zboží za 210 Kč stojí celkem $10 \cdot 210$ = 2 100 Kč,
celkem 15 kg zboží (směsi) stojí 1 200 + 2 100 = 3 300 Kč.
Směs stojí 3 300 : 15 = 220 Kč za 1 kg.
Odpověď:
Cena 1 kg dražšího zboží je 240 Kč, 1 kg levnějšího je 210 Kč.

<u>*Příklad* 4.1.5:</u>
Kolik litrů vody 48°C teplé je nutno přidat do 1,2 hl vody 8°C teplé, aby směs měla teplotu 24°C?

Řešení:
K řešení opět použijeme modelu a vztahu (4-1c), kde $c_1 = 48$, $c_2 = 8$, $c = 24$, $m_2 = 120$, a dostáváme

$$m_1 = \frac{c - c_2}{c_1 - c} \cdot m_2 = \frac{24 - 8}{48 - 24} \cdot 120 = \underline{\underline{80}}\ l.$$

Zkouška:
Přidáním 80 *l* vody 48°C teplé dodáme $80 \cdot 48$ = 3 840 kcal tepla, přidáním 120 *l* vody 8°C teplé dodáme $120 \cdot 8$ = 960 kcal, celkem 3840 + 960 = 4 800 kcal tepla.
Směs 200 *l* vody 24°C teplé obsahuje $200 \cdot 24$ = 4 800 kcal tepla.
Odpověď:
Je nutno přidat 80 *l* vody 48°C teplé.

Příklad 4.1.6:
Lovci lovili zajíce, divoké králíky a bažanty. Celkem ulovili 142 kusů. Počet zajíců byl šesti násobkem počtu králíků. Celkový počet noh ulovené zvěře byl 452. Kolik bylo které zvěře?

Řešení:
Neznámá x = počet králíků, počet zajíců je $6x$ a bažantů $142 - 7x$;
potom dostáváme rovnici:

$$4 \cdot x + 4 \cdot 6x + 2 \cdot (142 - 7x) = 452,$$

kde $\underline{x = 12}$; potom počet zajíců je 72, králíků 12 a bažantů 58.
Odpověď:
Lovci ulovili 72 zajíců, 12 králíků a 58 bažantů.

Příklad 4.1.7:
Na dvorku pobíhali králíci a slepice, bylo jich celkem 23 a měli dohromady 60 nohou. Kolik bylo kterých?

Řešení:
Neznámé budou: x = počet králíků, y = počet slepic.
Potom dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x + y &= 23 \\ 4x + 2y &= 60, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $[x; y] = [7; 16]$, tj, 7 králíků a 16 slepic.
Odpověď:
Na dvorku pobíhalo 7 králíků a 16 slepic.

Příklad 4.1.8:
V prodejně jízdních kol mají kola a tříkolky. Dohromady mají 32 sedel a 72 kol. Kolik je v prodejně jízdních kol a kolik tříkolek?

Řešení:
Označme si počet kol x, počet tříkolek y. Vyjádřením situace dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 72 \\ \underline{x + y = 32} &\quad \rightarrow \quad x = 32 - y \\ 2 \cdot (32 - y) + 3y &= 72 \\ 64 - 2y + 3y &= 72 \\ \underline{y = 8} & \\ x = 32 - y &\quad \rightarrow \quad \underline{x = 24} \end{aligned}$$

Zkouška:
Počet sedel: 24 + 8 = 32.

Počet kol: jízdní kola: $2 \cdot 24 = 48$, tříkolky: $3 \cdot 8 = 24$, celkem $48 + 24 = 72$.
Odpověď:
V prodejně je 24 jízdních kol a 8 tříkolek.

Příklad 4.1.9:
Na planetě Drakon žijí draci a drakouši. Drak má 7 hlav a 5 nohou a drakouš 3 hlavy a 6 nohou. Astronauti napočítali 135 hlav a 162 nohou. Kolik draků a kolik drakoušů astronauti viděli?

Řešení:
Označme si počet draků x, počet drakoušů y. Vyjádřením situace dostáváme soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
7x + 3y &= 135 \quad \big|\cdot 2\\
\underline{5x + 6y} &\underline{= 162}\\
14x + 6y &= 270\\
\underline{5x + 6y} &\underline{= 162} \quad \big|\cdot(-1)\\
9x &= 108 \quad \big|:9\\
\underline{\underline{x = 12}} &\quad \rightarrow \quad 60 + 6y = 162 \quad \big|-60\\
&\qquad\qquad 6y = 162 \quad \big|:6\\
&\qquad\qquad \underline{\underline{y = 17}}
\end{aligned}
$$

Zkouška:
Počet hlav: draci: $12 \cdot 7 = 84$, drakouši: $17 \cdot 3 = 51$, celkem: $84 + 51 = 135$.
Počet nohou: draci: $12 \cdot 5 = 60$, drakouši: $17 \cdot 6 = 102$, celkem: $60 + 102 = 162$.
Odpověď:
Na planetě Drakon viděli astronauti 12 draků a 17 drakoušů.

Příklad 4.1.10:
Do přístavu připlouvaly dva druhy trajektů. Větší trajekty převážely 11 autobusů a 25 osobních aut, menší trajekty 5 autobusů a 13 osobních aut. Kolik kterých trajektů přistálo, víme-li, že z trajektů bylo procleno celkem 132 autobusů a 318 osobních automobilů a všechny trajekty byly plně obsazené.

Řešení:
Označme si:
větší trajekt: . . . . . . $\boldsymbol{m}$ autobusů, ... $\boldsymbol{a}$ osobních automobilů, ... $\boldsymbol{x}$ - počet trajektů;
menší trajekt: . . . . . $\boldsymbol{n}$ autobusů, ... $\boldsymbol{b}$ osobních automobilů, ... $\boldsymbol{y}$ - počet trajektů;
$\boldsymbol{p}$ - počet všech autobusů, $\boldsymbol{q}$ - počet všech osobních automobilů. Potom si vyjádříme vztahy popsané v úloze pomocí obecných parametrů a dostáváme soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
ax + by &= q\\
\underline{mx + ny} &\underline{= p}\,.
\end{aligned}
$$

Z dané soustavy postupně vyjádříme hledané hodnoty x, y.

$$y = \frac{q - ax}{b} \qquad\qquad x = \frac{q - by}{a}$$

$$mx + \frac{nq - anx}{b} = p \quad \big|\cdot b \qquad\qquad \frac{mq - bmy}{a} + ny = p \quad \big|\cdot a$$

$$bmx + nq - anx = bp \quad \big|-nq \qquad\qquad mq - bmy + any = ap \quad \big|-mq$$

$$(bm - an)\cdot x = bp - nq \quad \big|:[-(an - bm)] \qquad (an - bm)\cdot y = ap - mq \quad \big|:(an - bm)$$

$$x = \underline{\underline{\frac{nq - bp}{an - bm}}} \qquad \textbf{(4-4a)} \qquad\qquad y = \underline{\underline{\frac{ap - mq}{an - bm}}} \qquad \textbf{(4-4b)}$$

V našem případě je konkrétně m = 11 autobusů, n = 5 autobusů, p = 132 autobusů, a = 25 osobních automobilů, b = 13 osobních automobilů, q = 318 osobních automobilů. Potom větších trajektů je:

$$x = \frac{nq - bp}{an - bm} = \frac{5 \cdot 318 - 13 \cdot 132}{25 \cdot 5 - 13 \cdot 11} = \frac{-126}{-18} = \underline{\underline{7}};$$

menších trajektů je:

$$y = \frac{ap - mq}{an - bm} = \frac{25 \cdot 132 - 11 \cdot 318}{25 \cdot 5 - 13 \cdot 11} = \frac{-198}{-18} = \underline{\underline{11}}.$$

Zkouška:

7 větších trajektů převeze $7 \cdot 11 = 77$ autobusů a $7 \cdot 25 = 175$ osobních automobilů.

11 menších trajektů převeze $11 \cdot 5 = 55$ autobusů a $11 \cdot 13 = 143$ osobních automobilů.

Celkem bylo převezeno 77 + 55 = 132 autobusů a 175 + 143 = 318 osobních automobilů.

Odpověď:

Přistálo celkem 7 velkých a 11 malých trajektů.

Příklad 4.1.11:

Při historické jízdě vlakem taženým parní lokomotivou se cestující dozvěděli, že na každou míli stoupání se pod kotel musí přiložit 11 lopat uhlí, na každou míli klesání 5 lopat uhlí. Na trati dlouhé 62 mil bylo spáleno 400 lopat uhlí. Kolik mil trať stoupala?

Řešení č. 1:

Vyjdeme za vztahů (4-4a), (4-4b) a pro $m = n = 1$ dostáváme vztahy

$$x = \frac{q - bp}{a - b}, \quad y = \frac{ap - q}{a - b}.$$

Totéž vyplývá ze vztahu (4-2) (viz příloha 2)

V našem případě máme konkrétně a = 5 lopat, b = 11 lopat, p = 62 mil, q = 400 lopat a dostáváme řešení pro klesání

$$x = \frac{q - bp}{a - b} = \frac{400 - 11 \cdot 62}{5 - 11} = \frac{-282}{-6} = \underline{\underline{47}} \text{ mil}$$

a pro stoupání

$$y = \frac{ap - q}{a - b} = \frac{5 \cdot 62 - 400}{5 - 11} = \frac{-90}{-6} = \underline{\underline{15}} \text{ mil.}$$

Zkouška:

Celková dráha 47 + 15 = 62 mil.

Celková spotřeba $15 \cdot 11 + 47 \cdot 5 = 400$ lopat uhlí.

Odpověď:

Trať stoupala 15 mil.

Poznámka:

Při volbě konkrétních hodnot jsem volil $a < b$, aby bylo možné porovnat postup s řešením č. 2 (zde musí být $a < b$).

Řešení č. 2:
Vyjdeme ze vztahu (4-3) (viz příloha 2), kde a = 5 lopat, b = 11 lopat ($a < b$), p = 62 mil, q = 400 lopat, $\rho = \frac{q}{p} = \frac{200}{31}$ a dostáváme

$$x : y = \left(11 - \frac{200}{31}\right) : \left(\frac{200}{31} - 5\right) = \frac{141}{31} : \frac{45}{31} = 47 : 15,$$

z toho plyne x = 47 mil, y = 15 mil.
Zkouška a *odpověď* viz řešení č. 1.

Příklad 4.1.12:
Smícháním 80%-ního alkoholu a 20%-ního alkoholu vznikne směs 3,25 *l* 40%-ního alkoholu. Kolik litrů každého druhu bylo použito?

Řešení:
Vyjdeme ze vztahů (4-1a) a (4-1b), kde m = 3,25, c = 0,4, c_1 = 0,8, c_2 = 0,2 a dostáváme

$$m_1 = \frac{c - c_2}{c_1 - c_2} \cdot m = \frac{0{,}4 - 0{,}2}{0{,}8 - 0{,}2} \cdot 3{,}25 = \frac{0{,}2}{0{,}6} \cdot 3{,}25 \doteq \underline{\underline{1{,}08}}\ l.$$

$$m_2 = \frac{c - c_1}{c_2 - c_1} \cdot m = \frac{0{,}4 - 0{,}8}{0{,}2 - 0{,}8} \cdot 3{,}25 = \frac{-0{,}4}{-0{,}6} \cdot 3{,}25 \doteq \underline{\underline{2{,}17}}\ l.$$

Zkouška:
1,08 *l* 80%-ního roztoku obsahuje $1{,}08 \cdot 0{,}8 = 0{,}864\ l$ alkoholu.
2,17 *l* 20%-ního roztoku obsahuje $2{,}17 \cdot 0{,}2 = 0{,}434\ l$ alkoholu.
Dohromady je v 1,08 + 2,17 = 3,25 *l* směsi (roztoku) 0,864 + 0,434 = 1,298 $\doteq$ 1,3 *l* alkoholu.
Podle zadání je ve směsi 3,25 *l* 40%-ního alkoholu $3{,}25 \cdot 0{,}4 = 1{,}3\ l$ alkoholu.
Odpověď:
Bylo použito asi 1,08 *l* 80%-ního alkoholu a asi 2,17 *l* 20%-ního alkoholu.

Příklad 4.1.13:
Nádoba na 30 litrů se má naplnit vodou 60°C teplou. Kolik litrů vody 80°C teplé a kolik litrů vody 20°C teplé musíme smíchat? ($c_{vody} \doteq 4{,}2\,\mathrm{kJ/kg \cdot °C}$)

Řešení:
Vyjdeme ze vztahů (4-1a) a (4-1b), kde m = 30 *l*, c = 60°C, c_1 = 80°C, c_2 = 20°C a dostáváme

$$m_1 = \frac{c - c_2}{c_1 - c_2} \cdot m = \frac{60 - 20}{80 - 20} \cdot 30 = \underline{\underline{20}}\ l.$$

$$m_2 = \frac{c - c_1}{c_2 - c_1} \cdot m = \frac{60 - 80}{20 - 80} \cdot 30 = \underline{\underline{10}}\ l.$$

Zkouška:
20 *l* vody teplé 80°C obsahuje $20 \cdot 80 \cdot 4{,}2$ = 6 720 kJ.
10 *l* vody teplé 20°C obsahuje $10 \cdot 20 \cdot 4{,}2$ = 840 kJ.
Dohromady obsahuje roztok 6 720 + 840 = 7 560 kJ.
Podle zadání 30 *l* vody teplé 60°C obsahuje $30 \cdot 60 \cdot 4{,}2$ = 7 560 kJ.
Odpověď:
Musíme smíchat 20 *l* teplejší a 10 *l* studenější vody.

Příklad 4.1.14:
Mořská voda obsahuje 5% soli. Kolik kg destilované vody je třeba přilít ke 40 kg mořské vody, aby obsah soli byl 2%?

Řešení:
Vyjdeme ze vztahu (4-1b), kde m_1 = 40 kg, c = 2%, c_1 = 5%, c_2 = 0% a dostáváme

$$m_2 = \frac{c_1 - c}{c - c_2} \cdot m_1 = \frac{5-2}{2-0} \cdot 40 = \underline{\underline{60}} \text{ kg.}$$

Zkouška:
Pro ověření výsledku můžeme podle vzorce (4-1a) vypočítat celkovou hmotnost roztoku (musí být 40 + 60 = 100 kg):

$$m = \frac{c_1 - c_2}{c - c_2} \cdot m_1 = \frac{5-0}{2-0} \cdot 40 = 100 \text{ kg.}$$

Odpověď:
Musíme přilít 60 kg destilované vody.

Příklad 4.1.15:
Přidáním 250 g 96%-ního roztoku kyseliny sírové k jejímu 3%-nímu roztoku se změnila původní koncentrace na 25%-ní. Vypočítejte, kolik gramů 3%-ního roztoku bylo použito k ředění.

Řešení:
Vyjdeme ze vztahu (4-1b), kde m_1 = 250 g, c = 25%, c_1 = 96%, c_2 = 3% a dostáváme

$$m_2 = \frac{c_1 - c}{c - c_2} \cdot m_1 = \frac{96-25}{25-3} \cdot 250 \doteq \underline{\underline{807}} \text{ g.}$$

Zkouška:
Pro ověření výsledku můžeme podle vzorce (4-1a) vypočítat celkovou hmotnost roztoku (musí být 250 + 807 = 1 057 g):

$$m = \frac{c_1 - c_2}{c - c_2} \cdot m_1 = \frac{96-3}{25-3} \cdot 250 \doteq 1057 \text{ g.}$$

Odpověď:
K ředění bylo použito asi 807 g 3%-ního roztoku.

Příklad 4.1.16:
V nádrži je voda o objemu 300 litrů a o teplotě 10°C. Přidáme vodu o teplotě 90°C až dosáhneme teploty 30°C. Kolik teplejší vody musíme přidat? (c_{vody} = 4,2 kJ/kg·°C)

Řešení:
Vyjdeme ze vztahu (4-1b), kde m_1 = 300 *l*, c = 30°C, c_1 = 10°C, c_2 = 90°C a dostáváme

$$m_2 = \frac{c_1 - c}{c - c_2} \cdot m_1 = \frac{10-30}{30-90} \cdot 300 = 100 \; l.$$

Zkouška:
Pro ověření výsledku můžeme podle vzorce (4-1a) vypočítat celkové množství vody (musí být 300 + 100 = 400 *l*):

$$m = \frac{c_1 - c_2}{c - c_2} \cdot m_1 = \frac{10 - 90}{30 - 90} \cdot 300 = 400\ l.$$

Odpověď:
Musíme přidat 100 *l* teplejší vody.

Příklad 4.1.17:
Přidáme-li do 0,6 litru 40%-ního roztoku druhý roztok, dostaneme 1 litr roztoku 50%-ního. Jaký byl druhý roztok?

Řešení:
Vyjdeme ze vztahu (4-1), kde m_1 = 0,6 *l*, m = 1 *l*, c_1 = 0,4, c = 0,5. Nejprve užijeme první rovnici pro výpočet m_2:

$$m_1 + m_2 = m \quad \rightarrow \quad m_2 = m - m_1$$

$$m_2 = 1 - 0{,}6 = \underline{\underline{0{,}4}}\ l.$$

Potom vypočteme c_2 z druhé rovnice:

$$c_1 m_1 + c_2 m_2 = cm \quad \rightarrow \quad c_2 = \frac{cm - c_1 m_1}{m_2}$$

$$c_2 = \frac{0{,}5 \cdot 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}6}{0{,}4} = \underline{\underline{0{,}65}} \quad \rightarrow \quad c_2 = \underline{\underline{65\%}}\ .$$

Zkouška:
0,6 *l* 40%-ního roztoku obsahuje $0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24\ l$ látky.
0,4 *l* 65%-ního roztoku obsahuje $0{,}4 \cdot 0{,}65 = 0{,}26\ l$ látky.
Dohromady obsahuje směs 0,24 + 0,26 = 0,5 *l* látky.
Podle zadání 1 *l* 50%-ního roztoku obsahuje $1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5\ l$ látky.
Odpověď:
Druhý roztok byl 65%-ní a bylo ho 0,4 litru.

Příklad 4.1.18:
Kolikaprocentní líh obdržíme, jestliže ke 3 litrům 90% alkoholu přilijeme 2 litry vody?

Řešení:
Vyjdeme ze vztahu (4-1e), kde m_1 = 3 *l*, c_1 = 90%, m_2 = 2 *l*, c_2 = 0%. Dostáváme
$m = m_1 + m_2 = 3 + 2 = 5\ l$;

$$c = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m} = \frac{90 \cdot 3 + 0 \cdot 2}{5} = \underline{\underline{54}}\text{%-ní.}$$

Zkouška:
3 *l* 90%-ního roztoku obsahují $3 \cdot 0{,}9 = 2{,}7\ l$ alkoholu (voda nic).
5 *l* 54%-ního roztoku obsahují $5 \cdot 0{,}54 = 2{,}7\ l$ alkoholu.
Odpověď:
Obdržíme 54%-ní líh.

Příklad 4.1.19:
Smícháme 3 kg vody o teplotě 100°C a 5 kg vody o teplotě 20°C. Jaká bude teplota směsi? (c_{vody} = 4,2 kJ/kg · °C)

Řešení:
Vyjdeme ze vztahu (4-1e), kde m_1 = 3 kg, c_1 = 100°C, m_2 = 5 kg, c_2 = 20°C. Dostáváme
$m = m_1 + m_2 = 3 + 8 = 8$ kg;

$$c = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m} = \frac{100 \cdot 3 + 20 \cdot 5}{8} = \underline{\underline{50}}\text{°C}.$$

Zkouška:
3 kg 100°C teplé vody obsahují $3 \cdot 100 \cdot 2{,}4 = 720$ kJ.
5 kg 20°C teplé vody obsahují $5 \cdot 20 \cdot 2{,}4 = 240$ kJ.
Dohromady roztok obsahuje 720 + 240 = 960 kJ.
Podle zadání 8 kg 50°C teplé vody obsahují $8 \cdot 50 \cdot 2{,}4 = 960$ kJ.
Odpověď:
Teplota směsi bude 50°C.

Příklad 4.1.20:
5 litrů jednoho nápoje a 6 litrů druhého nápoje stálo celkem 432,- Kč. Jeden litr druhého nápoje je o 6,- Kč dražší než 1 litr prvního nápoje. Kolik Kč zaplatíme za 2 litry jednoho a 2 litry druhého nápoje?

Řešení č. 1:
Ze vztahů (4-3a) a (4-3b) pro $m_1 = 6\ l$, $m_2 = 5\ l$, $m = 11\ l$, cm = 432,- Kč, d = 6,- Kč vyplývá

$$c_1 = \frac{cm + dm_2}{m} = \frac{432 + 6 \cdot 5}{11} = \underline{\underline{42}}\text{ Kč};$$

$$c_2 = \frac{cm - dm_1}{m} = \frac{432 - 6 \cdot 6}{11} = \underline{\underline{36}}\text{ Kč}.$$

2 l prvního a 2 l druhého nápoje stojí $2 \cdot 42 + 2 \cdot 36 = \underline{\underline{156}}$ Kč.
Zkouška:
42 – 36 = 6,- Kč.
$6 \cdot 42 + 5 \cdot 36$ = 432,- Kč.
Odpověď:
Za 2 litry prvního a 2 litry druhého nápoje zaplatíme 156,- Kč.

Řešení č. 2:
Ze vztahu (4-3) dostáváme pro $m_1 = 6\ l$, $m_2 = 5\ l$, $m = 11\ l$, cm = 432,- Kč, d = 6,- Kč

$$\begin{array}{ll} c_1 - c_2 = 6 & \big|\cdot 5 \\ \underline{6c_1 + 5c_2 = 432} & \\ 11c_1 = 462 & \big|:11 \\ c_1 = \underline{\underline{42}}\text{ Kč} & \\ c_2 = c_1 - 6 \quad \rightarrow \quad c_2 = \underline{\underline{36}}\text{ Kč}. & \end{array}$$

2 l prvního a 2 l druhého nápoje stojí $2 \cdot 42 + 2 \cdot 36 = \underline{\underline{156}}$ Kč.
Zkouška a *odpověď* viz řešení č. 1.

4.2. Skupina 2: *„Úlohy o směsích se třemi a více složkami“*

Úlohy obsahují zadání o směsích (slitinách, roztocích) se třemi a více složkami. Přesto je vyjadřujeme soustavou nejčastěji dvou rovnic pro dvě neznámé, protože právě tyto dvě neznámé počítáme. K řešení těchto úloh můžeme použít i jiných metod. Tyto úlohy lze také dále členit. Protože toto členění je velmi variabilní, v literatuře se téměř nevyskytuje.

Model 4:
1. složka směsi má . . . . . hmotnost (počet jednotek) . . . m_1; cenu (za jednotku) . . . c_1,
2. složka směsi má . . . . . hmotnost (počet jednotek) . . . m_2; cenu (za jednotku) . . . c_2,
3. složka směsi má . . . . . hmotnost (počet jednotek) . . . m_3; cenu (za jednotku) . . . c_3,
výsledná směs má . . . . . hmotnost (počet jednotek) . . . m; cenu (za jednotku) . . . c.
Modelem je soustava rovnic:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 &= m \\ c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3 &= cm\ . \end{aligned} \qquad \textbf{(4-5)}$$

V soustavě rovnic je osm proměnných, šest z nich je zadáno, dvě se počítají. Podle toho, které dvojice se počítají, budeme dále dělit do podskupin. Z tohoto modelu nelze počítat dvě ceny. Nejčastěji se počítají hodnoty m_1, m_2 (hodnota m_3 je s nimi zaměnitelná).
Vyjdeme ze soustavy rovnic (4-5) a dostáváme:

$$\underline{\underline{m_1 = \frac{cm_2 + cm_3 - c_2 m_2 - c_3 m_3}{c_1 - c}}}; \qquad \underline{\underline{m_2 = \frac{cm_1 + cm_3 - c_1 m_1 - c_3 m_3}{c_2 - c}}}. \qquad \textbf{(4-5a,b)}$$

Často se také počítají hodnoty c, m.
Vyjdeme opět ze soustavy rovnic (4-5) a dostáváme:

$$m = m_1 + m_2 + m_3; \qquad \underline{\underline{c = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3}{m}}}. \qquad \textbf{(4-5c)}$$

Chceme-li vyjádřit jednu z hodnot c_1, c_2, c_3 (jsou zaměnitelné), vyjdeme opět ze soustavy rovnic (4-5) a dostáváme:

$$\underline{\underline{c_3 = \frac{cm - c_1 m_1 - c_2 m_2}{m_3}}}. \qquad \textbf{(4-5d)}$$

Příklad 4.2.1:
Bylo smícháno 8 litrů 70 % lihu, 7 litrů 80 % lihu a 5 litrů lihu neznámého složení. Dostali jsme líh 71 %. Kolikaprocentní líh jsme přilili?

Řešení:
Matematickým modelem dané situace je opět předchozí model, varianta (4-5d). Procenta vyjadřující roztok si opět převedeme na číslo vyjadřující část celku.
V našem případě je $c_1 = 0{,}7$, $c_2 = 0{,}8$, $c = 0{,}71$, $m_1 = 8$, $m_2 = 7$, $m_3 = 5$, $m = 20$ a dostáváme:

$$c_3 = \frac{cm - c_1 m_1 - c_2 m_2}{m_3} = \frac{0{,}71 \cdot 20 - 0{,}7 \cdot 8 - 0{,}8 \cdot 7}{5} = \underline{\underline{0{,}6}}.$$

Z toho plyne, že třetí líh byl 60 %.
Zkouška:
V 8 litrech 70 % lihu je $8 \cdot 0{,}7 = 5{,}6$ litru čistého lihu,
v 7 litrech 80 % lihu je $7 \cdot 0{,}8 = 5{,}6$ litru čistého lihu,

v 5 litrech 60 % lihu je $5 \cdot 0{,}6 = 3$ litry čistého lihu,
celkem je v roztoku $5{,}6 + 5{,}6 + 3 = 14{,}2$ litru čistého lihu.
Protože roztoku máme 20 litrů je $\frac{14{,}2}{20} \cdot 100 = 71$ %.
Odpověď:
Přilili jsme 60 % lih.

Příklad 4.2.2:
K vyplacení částky 670,- Kč použila pokladní 16 bankovek: jednu stokorunu, několik padesátikorun a několik dvacetikorun. Jak částku vyplatila?

Řešení:
Vyjdeme ze vztahu (4-5), kde $m_1 = 1$, $c_1 = 100$, $c_2 = 50$, $c_3 = 20$, $m = 16$, $cm = 670$. Potom z první rovnice vyplývá

$$1 + m_2 + m_3 = 16 \quad \to \quad m_2 + m_3 = 15 \quad \to \quad m_3 = 15 - m_2 .$$

Dosazením do druhé rovnice dostáváme

$$100 \cdot 1 + 50 \cdot m_2 + 20 \cdot (15 - m_2) = 670$$
$$100 + 50m_2 + 300 - 20m_2 = 670 \quad \Big| -400$$
$$30m_2 = 270 \quad \Big| : 30$$
$$\underline{m_2 = 9} \quad \to \quad \underline{m_3 = 6}$$

Zkouška:
Počet bankovek: $1 + 9 + 6 = 16$ ks.
Částka: $1 \cdot 100 + 9 \cdot 50 + 6 \cdot 20 = 670$,- Kč.
Odpověď:
K vyplacení částky 670,- Kč použila pokladní jednu stokorunu, devět padesátikorun a šest dvacetikorun.

Poznámka:
Úlohu můžeme převést na úlohu o směsích se dvěma složkami, protože víme, že pokladní použila jednu stokorunu. Potom úloha zní:
K vyplacení částky 570,- Kč použila pokladní 15 bankovek – padesátikoruny a dvacetikoruny. Jak částku vyplatila?

Řešení upravené úlohy:
Vyjdeme ze vztahu (4-1), kde $c_1 = 50$, $c_2 = 20$, $m = 15$, $c = \frac{570}{15} = 38$. Potom dostáváme podle (4-1a) a (4-1b):

$$m_1 = \frac{c - c_2}{c_1 - c_2} \cdot m = \frac{38 - 20}{50 - 20} \cdot 15 = \underline{9};$$

$$m_2 = \frac{c - c_1}{c_2 - c_1} \cdot m = \frac{38 - 50}{20 - 50} \cdot 15 = \underline{6}.$$

Příklad 4.2.3:
V 1. fotbalové lize hraje každý ze 16 účastníků s každým soupeřem dvakrát. Za každé vítězství získává 3 body, za remízu 1 bod, za porážku žádný. Po skončení soutěže byl oddíl se 49 body a devíti porážkami na šestém místě. Kolikrát zvítězil?

Řešení:
Označme si počet vítězství *x*, počet remíz *y*, počet porážek z, potom dostáváme (víme-li, že v daném systému odehraje každé mužstvo 30 zápasů)

$$3 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 49$$
$$z = 9$$
$$\underline{x + y + z = 30}$$
$$3x + y = 49$$
$$\underline{x + y = 21} \quad \Big| \cdot (-1)$$
$$2x = 28 \quad \Big| : 2$$
$$\underline{x = 14} \quad \rightarrow \quad \underline{y = 7}$$

Zkouška:
Počet utkání: 14 + 7 + 9 = 30.
Počet bodů: $14 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 9 \cdot 0 = 49$.
Odpověď:
Oddíl zvítězil čtrnáctkrát.

Příklad 4.2.4:
Písmovina (liteřina), se kterou pracují tiskárny, je vhodná slitina tří kovů – antimonu, cínu a olova. Podle toho v jakém poměru jsou zde tyto kovy obsaženy, dostáváme různé druhy písmovin, které se navzájem liší bodem tání, tvrdostí, opotřebovatelností při tisku a pod. Ze dvou druhů písmovin, kterých už bylo použito k tisku, má se vyrobit písmovina nová. První druh obsahuje 20% antimonu, 5% cínu a 75% olova, druhý druh obsahuje 14% antimonu, 7% cínu a 79% olova. Oba druhy smísíme v poměru 2:3; jaké složení má nová písmovina?

Řešení:
Protože obě písmoviny jsou smíseny v poměru 2 : 3, budou i jejich složky smíseny ve stejném poměru (včetně procentuálního zastoupení). Proto výsledná písmovina obsahuje

$$\frac{2 \cdot 20 + 3 \cdot 14}{5} = 16{,}4\% \text{ antimonu;}$$
$$\frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{5} = 6{,}2\% \text{ cínu;}$$
$$\frac{2 \cdot 75 + 3 \cdot 79}{5} = 77{,}4\% \text{ olova.}$$

Zkouška:
Vezměme si jako příklad „smíchání“ 2 kg první písmoviny a 3 kg druhé písmoviny (tedy v poměru 2 : 3).
2 kg první písmoviny obsahuje $0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4$ kg antimonu, $0{,}05 \cdot 2 = 0{,}1$ kg cínu a $0{,}75 \cdot 2 = 1{,}5$ kg olova.
3 kg druhé písmoviny obsahuje $0{,}14 \cdot 3 = 0{,}42$ kg antimonu, $0{,}07 \cdot 3 = 0{,}21$ kg cínu a $0{,}79 \cdot 3 = 2{,}37$ kg olova.
5 kg výsledné písmoviny (směsi) obsahuje 0,4 + 0,42 = 0,82 kg (0,82 : 5 = 0,164, tj. 16,4%), 0,1 + 0,21 = 0,31 kg cínu (0,31 : 5 = 0,062, tj. 6,2%) a 1,5 + 2,37 = 3,87 kg olova (3,87 : 5 = 0,774, tj. 77,4%).
Odpověď:
Výsledná písmovina obsahuje 16,4% antimonu, 6,2% cínu a 77,4% olova.

4.3. <u>Skupina 3:</u> *„Úlohy o směsích v různých situacích“*

Úlohy obsahují zadání o směsích (*slitinách, roztocích*) *se dvěma a více složkami ve dvou nebo více různých situacích. Lze je vyjádřit soustavou dvou a více rovnic a počítáme dvě nebo více neznámých.*

<u>Model 5:</u>
1. složka směsi má . . . hmotnost (počet jednotek) v první situaci . . . $m_{1,}$ v druhé situaci . . m_3;
cenu (za jednotku) . . . c_1,
2. složka směsi má . . . hmotnost (počet jednotek) v první situaci . . . m_2; v druhé situaci . . m_4;
cenu (za jednotku) . . . c_2,
celková cena v první situaci je k, v druhé situaci l.
Modelem je soustava rovnic:

$$\begin{aligned} c_1 m_1 + c_2 m_2 &= k \\ c_1 m_3 + c_2 m_4 &= l \end{aligned} . \qquad \textbf{(4-6)}$$

Nejčastěji počítáme c_1,c_2. Lze je vyjádřit z (4-6) takto:

$$\underline{\underline{c_1 = \frac{l m_2 - k m_4}{m_2 m_3 - m_1 m_4}}}; \qquad \textbf{(4-6a)} \qquad \underline{\underline{c_2 = \frac{k m_3 - l m_1}{m_2 m_3 - m_1 m_4}}}. \qquad \textbf{(4-6b)}$$

<u>*Příklad* 4.3.1:</u>
Pepík byl s maminkou na nákupu. Maminka koupila 2 kg ovoce a 5 kg zeleniny a platila 140 Kč. Sousedka koupila 3 kg stejného ovoce a 4 kg zeleniny a platila 168,- Kč. Pomozte Pepíkovi vypočítat, kolik stál 1 kg ovoce a 1 kg zeleniny.

Řešení:
Matematickým modelem dané situace je opět předchozí model, varianta (4-6). Vyjdeme ze vztahů (4-6a), (4-6b), kde je m_1 = 2 kg , m_2 = 5 kg, k = 140 Kč, m_3 = 3 kg, m_4 = 4 kg, l = 168 Kč a dostáváme:

$$c_1 = \frac{l m_2 - k m_4}{m_2 m_3 - m_1 m_4} = \frac{168 \cdot 5 - 140 \cdot 4}{5 \cdot 3 - 2 \cdot 4} = \underline{\underline{40}} \text{ Kč};$$

$$c_2 = \frac{k m_3 - l m_1}{m_2 m_3 - m_1 m_4} = \frac{140 \cdot 3 - 168 \cdot 2}{5 \cdot 3 - 2 \cdot 4} = \underline{\underline{12}} \text{ Kč}.$$

Zkouška:
2 kg ovoce a 5 kg zeleniny stály $2 \cdot 40 + 5 \cdot 12 = 140$ Kč,
3 kg ovoce a 4 kg zeleniny stály $3 \cdot 40 + 4 \cdot 12 = 168$ Kč.
Odpověď:
Kilogram ovoce byl za 40 Kč, kilogram zeleniny za 12 Kč.

<u>*Příklad* 4.3.2:</u>
Bazén o objemu 255 m^3 se naplnil, jestliže voda přitékala rourou A 3 hodiny, rourou B 2 hodiny a rourou C 4 hodiny, nebo jestliže voda přitékala rourou A také 3 hodiny, rourou B 7 hodin a rourou C 2 hodiny, nebo rourou A jednu hodinu, rourou B 2,5 hodiny a rourou C 4 hodiny. Kolik vody nateklo každou rourou za jednu hodinu?

Řešení:

Označíme-li x, kolik nateče rourou A za 1 hodinu, y, kolik nateče rourou B za 1 hodinu a z, kolik nateče rourou C za 1 hodinu, potom dostáváme soustavu rovnic:

$$3x + 2y + 4z = 255$$
$$3x + 7y + 2z = 255$$
$$\underline{x + 2{,}5y + 4z = 255}\ .$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 255 \\ 3 & 7 & 2 & 255 \\ 1 & 2{,}5 & 4 & 255 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 255 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -5{,}5 & -8 & -510 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 255 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 11 & 16 & 1020 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 51 & 0 & 1020 \\ 0 & 11 & 16 & 1020 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 51 & 0 & 1020 \\ 0 & 0 & 816 & 40800 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad x = 5,\ y = 20,\ z = 50.$$

Zkouška:

Jestliže voda přitéká rourou A 3 h, rourou B 2 h a rourou C 4 h, nateče $3 \cdot 5 + 2 \cdot 20 + 4 \cdot 50 = 255$ m^3 vody.

Jestliže voda přitéká rourou A 3 h, rourou B 7 h a rourou C 2 h, nateče $3 \cdot 5 + 7 \cdot 20 + 2 \cdot 50 = 255$ m^3 vody.

Jestliže voda přitéká rourou A 1 h, rourou B 2,5 h a rourou C 4 h, nateče $5 + 2{,}5 \cdot 20 + 4 \cdot 50 = 255$ m^3 vody.

Odpověď:

Rourou A nateče za hodinu 5 m^3 vody, rourou B nateče za hodinu 20 m^3 vody, rourou C nateče za hodinu 50 m^3 vody.

Příklad 4.3.3:

Bazén obsahuje 220 m³ vody. Vypouštět ho můžeme buď

a) 10 hodin rourou B a současně 8 hodin rourou A, nebo

b) 10 hodin rourou A a současně 7 hodin rourou B.

Kolik krychlových metrů vody vyteče za 1 hodinu rourou A a kolik rourou B?

Řešení č. 1:

Označme si výkon roury A . . . x m^3/h, výkon roury B . . . y m^3/h, potom můžeme situaci vymodelovat pomocí soustavy rovnic

$$\begin{array}{rl} 8x + 10y = 220 & \big|\ \cdot 5 \\ \underline{10x + 7y = 220} & \big|\ \cdot (-4) \\ 22y = 84 & \big|\ : 7 \\ \underline{\underline{y = 10}} & \rightarrow \quad \underline{\underline{x = 15}} \end{array}$$

Zkouška:

V prvním případě bylo vypuštěno: $8 \cdot 15 + 10 \cdot 10 = 220$ m^3 vody.

V druhém případě bylo vypuštěno: $10 \cdot 15 + 7 \cdot 10 = 220$ m^3 vody.

Odpověď:

Za 1 hodinu vyteče rourou A 15 m^3 vody, rourou B 10 m^3 vody.

Řešení č. 2:
Ze (4-6a) a (4-6b), kde $m_1 = 8$ h, $m_2 = 10$ h, $m_3 = 10$ h, $m_4 = 7$ h, $k = 220$ m^3, $l = 220$ m^3, dostáváme

$$c_1 = \frac{lm_2 - km_4}{m_2m_3 - m_1m_4} = \frac{220\cdot 10 - 220\cdot 7}{10\cdot 10 - 8\cdot 7} = \underline{\underline{15}};$$

$$c_2 = \frac{km_3 - lm_1}{m_2m_3 - m_1m_4} = \frac{220\cdot 10 - 220\cdot 8}{10\cdot 10 - 8\cdot 7} = \underline{\underline{10}}.$$

Zkouška a *odpověď* viz řešení č. 1.

Příklad 4.3.4:
Alena kupovala lístky do kina pro dvě skupiny spolužáků. Pro první skupinu koupila 7 lístků na I. místo a 5 lístků na II. místo a zaplatila 186,- Kč. Pro druhou skupinu koupila 11 lístků na I. místo a 4 lístky na II. místo a zaplatila 246,- Kč. Kolik korun stál lístek na I. místo a kolik na II. místo?

Řešení č. 1:
Označme si cenu lístku na I. místo x Kč/ks, cenu lístku na II. místo y Kč/ks, potom můžeme situaci vymodelovat pomocí soustavy rovnic

$$\begin{array}{rl} 7x + 5y = 186 & \Big|\cdot(-4) \\ \underline{11x + 4y = 246} & \Big|\cdot 5 \\ 27x = 486 & \Big|: 27 \\ \underline{\underline{x = 18}} \quad \rightarrow & \underline{\underline{y = 12}} \end{array}$$

Zkouška:
První skupina zaplatila: $7\cdot 18 + 5\cdot 12 = 186$,- Kč.
Druhá skupina zaplatila: $11\cdot 18 + 4\cdot 12 = 246$,- Kč.
Odpověď:
Lístek na I. místo stál 18,- Kč, na druhé místo stál 12,- Kč.

Řešení č. 2:
Ze (4-6a) a (4-6b), kde $m_1 = 7$ ks, $m_2 = 5$ ks, $m_3 = 11$ ks, $m_4 = 4$ ks, $k = 186$,- Kč, $l = 246$,- Kč, dostáváme

$$c_1 = \frac{lm_2 - km_4}{m_2m_3 - m_1m_4} = \frac{246\cdot 5 - 186\cdot 4}{5\cdot 11 - 7\cdot 4} = \underline{\underline{18}};$$

$$c_2 = \frac{km_3 - lm_1}{m_2m_3 - m_1m_4} = \frac{186\cdot 11 - 246\cdot 7}{5\cdot 11 - 7\cdot 4} = \underline{\underline{12}}.$$

Zkouška a *odpověď* viz řešení č. 1.

Příklad 4.3.5:
Dělníci hloubili jámu. Když pracovali 5 hodin bez rýpadla a 3 hodiny s rýpadlem, odstranili celkem 60 m^3 zeminy. Když pracovali 2 hodiny bez rýpadla a 6 hodin s rýpadlem, odstranili celkem 96 m^3 zeminy. Kolik krychlových metrů zeminy odstranili za 1 hodinu práce bez rýpadla a kolik s rýpadlem,

Řešení č. 1:
Označme si výkon práce bez rýpadla x m^3/h, výkon práce s rýpadlem y m^3/h, potom můžeme situaci vymodelovat pomocí soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 60 \quad \Big| \cdot (-2) \\ \underline{2x + 6y} &\underline{= 96} \\ -8x &= -24 \quad \Big| : (-8) \\ \underline{\underline{x = 3}} \quad &\rightarrow \quad \underline{\underline{y = 15}} \end{aligned}$$

Zkouška:
V prvním případě bylo odstraněno: $5 \cdot 3 + 3 \cdot 15 = 60$ m^3 zeminy.
V druhém případě bylo odstraněno: $2 \cdot 3 + 6 \cdot 15 = 96$ m^3 zeminy.
Odpověď:
Za 1 hodinu odstraní dělníci bez rýpadla 3 m^3 zeminy, s rýpadlem 15 m^3 zeminy.

Řešení č. 2:
Ze (4-6a) a (4-6b), kde $m_1 = 5$ h, $m_2 = 3$ h, $m_3 = 2$ h, $m_4 = 6$ h, $k = 60$ m^3, $l = 96$ m^3, dostáváme

$$c_1 = \frac{lm_2 - km_4}{m_2m_3 - m_1m_4} = \frac{96 \cdot 3 - 60 \cdot 6}{3 \cdot 2 - 5 \cdot 6} = \underline{\underline{3}};$$

$$c_2 = \frac{km_3 - lm_1}{m_2m_3 - m_1m_4} = \frac{60 \cdot 2 - 96 \cdot 5}{3 \cdot 2 - 5 \cdot 6} = \underline{\underline{15}}.$$

Zkouška a *odpověď* viz řešení č. 1.;

Příklad 4.3.6a:
Koruna Hierona, krále syrakuského, zhotovená ze zlata a stříbra, vážila na vzduchu 20 liber, ponořena ve vodě 18¾ liber. Kolik Au a Ag bylo v ní obsaženo, je-li hustota Au 19.5, Ag 10.5?

Řešení:
Vyjdeme ze vzorců (3-13a,b) (viz disertační práce), kde $h = 20$, $z = 1,25$, $\rho_1 = 19,5$, $\rho_2 = 10,5$.

$$x = \frac{\rho_2 z - h}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \rho_1 = \frac{10,5 \cdot 1,25 - 20}{10,5 - 19,5} \cdot 19,5 \doteq 14,896 \text{ liber},$$

$$y = \frac{\rho_1 z - h}{\rho_1 - \rho_2} \cdot \rho_2 = \frac{19,5 \cdot 1,25 - 20}{19,5 - 10,5} \cdot 10,5 \doteq 5,104 \text{ liber}.$$

Příklad 4.3.6b:
Koruna krále Hieróna, zhotovená ze zlata a stříbra, byla vážena ve vodě a ve vzduchu. Údaj zjištěný ve vodě činil 93,55% hmotnosti 10 kg určené při vážení ve vzduchu. Víme, že 1 kg zlata „ztrácí" ve vodě $\frac{9}{177}$ kg, a že stříbro „ztrácí" $9\frac{11}{12}$ % z údaje o své hmotnosti zjištěné ve vzduchu. Vypočítejte kolik zlata a kolik stříbra spotřeboval zlatník ke zhotovení koruny. (Údaj 10 kg je zvolen pro zjednodušení výpočtů; reálné situaci neodpovídá historicky ani věcně.)

Řešení:
Vyjdeme ze vzorců (3-13a,b) (viz disertační práce), h = 10, z = 0,645, $a = \frac{9}{177}$, $b = \frac{119}{1200}$.

$$x = \frac{z - bh}{a - b} = \frac{0{,}645 - \frac{119}{1200} \cdot 10}{\frac{9}{177} - \frac{119}{1200}} \doteq 7{,}1745 \text{ kg},$$

$$y = \frac{z - ah}{b - a} = \frac{0{,}645 - \frac{9}{177} \cdot 10}{\frac{119}{1200} - \frac{9}{177}} \doteq 2{,}8255 \text{ kg}.$$

Dodatek:

„Původní text“ uváděl ve vodě 99,55% hmotnosti a „ztrátu“ 1 kg zlata ve vodě $\frac{9}{77}$ kg. Výsledky „byly“: 7,1005 kg zlata a 2,8995 kg stříbra. Hodnoty v textu neodpovídají hodnotám pro skutečnou situaci.

4.4. Skupina 4: *„Speciální úlohy o směsích"*

Úlohy obsahují zadání o směsích (*slitinách, roztocích*). *Úlohy nelze vyjádřit pomocí předchozích soustav dvou rovnic. Počet neznámých se rovná počtu rovnic. Dále jsou zde zařazeny i úlohy, které nejsou dostatečně určeny, počet neznámých je větší než počet rovnic. Úlohy vedou na diofantovské rovnice.*

Příklad 4.4.1:
Kolik ledu musíme vhodit do 5 kg vody o teplotě 100°C, aby led roztál a teplota vody klesla na 0°C? Měrné skupenské teplo tání ledu je 335 kJ/kg. ($c_{vody} \doteq 4{,}2$ kJ/kg·°C)

Řešení č. 1:
Měrné teplo vody musí být „spotřebováno" měrným skupenským teplem tání ledu. Kg vody o teplotě 100°C obsahuje $5 \cdot 100 \cdot 4{,}2 = 2100$ kJ tepla. Protože kilogram ledu spotřebuje 335 kJ tepla, musíme přidat 2100 : 335 $\doteq$ 6,27 kg ledu.
Odpověď:
Do vody musíme vhodit asi 6,27 kg ledu.

Řešení č. 2: - {řešení podle [16]}
Hmotnost ledu . . . x kg, potom dostáváme

$$x \cdot 335 = 5 \cdot 4{,}2 \cdot (100 - 0).$$

Řešením je $x \doteq 6{,}3$ kg.

Příklad 4.4.2:
Olověnou kouli (1,2 kg, 20°C, c = 0,13 kJ/kg·°C) ponoříme do vody (2 kg, 50°C). Jaká bude výsledná teplota? ($c_{vody} \doteq 4{,}2$ kJ/kg·°C)

Řešení č. 1:
Měrné teplo vody je $2 \cdot 50 \cdot 4{,}2 = 420$ kJ, měrné teplo koule $1{,}2 \cdot 20 \cdot 0{,}13 = 3{,}12$ kJ, celkem obsahuje 3,2 kg „směsi" 420 + 3,12 = 423,12 kJ tepla. Je-li $c_{směsi} = \dfrac{1{,}2 \cdot 0{,}13 + 2 \cdot 4.2}{1{,}2 + 2} =$ 2,67375 kJ/kg°C, potom výsledná teplota je 423,12 : (3,2 · 2,67375) $\doteq$ 49,45°C.
Odpověď:
Výsledná teplota bude asi 49,5°C.

Řešení č. 2: - {řešení podle [16]}
Výsledná teplota . . . x °C, potom dostáváme

$$1{,}2 \cdot 0{,}13 \cdot (x - 20) = 2 \cdot 4{,}2 \cdot (50 - x).$$

Řešením je $x \doteq 49$ °C.

Příklad 4.4.3:
Dana nakoupila čokolády po 17 a 18 Kč v celkové hodnotě 300 Kč. Kolik levnějších a kolik dražších čokolád nakoupila?

Řešení č. 1:
Počet čokolád po 17 Kč označme x, počet čokolád po 18 Kč označme y, potom platí

$17x + 18y = 300.$

Jedná se o diofantovskou rovnici, kterou vyřešíme pomocí kongruencí

$$18y \equiv 300 \bmod 17 \quad \Big| : 6$$
$$3y \equiv 50 \bmod 17 \quad \Big| - 17$$
$$3y \equiv 33 \bmod 17 \quad \Big| : 3$$
$$y \equiv 11 \bmod 17 \quad \rightarrow \quad \underline{y = 11 + 17t},\ t \in Z,$$

a dosadíme do původní rovnice

$$17x + 18\cdot(11 + 17t) = 300$$
$$17x + 198 + 306t = 300 \quad \Big| - 198 - 306t$$
$$17x = 102 - 306t \quad \Big| .\ 17$$
$$\underline{x = 6 - 18t}.$$

Nyní volíme t a hledáme přirozená x, y:

***t*:**	**. . .**	**1**	**0**	**– 1 . . .**
x = 6 – 18*t*:		**– 12**	**6**	**24**
y = 11 + 17*t*:		**28**	**11**	**– 6**

Ze zobrazených hodnot plyne, že jediným řešením je $x = 6$, $y = 11$.
Zkouška:
6 levnějších čokolád stojí $6 \cdot 17 = 102$ Kč, 11 dražších čokolád stojí $11 \cdot 18 = 198$, celkem stojí všechny čokolády $102 + 198 = 300$ Kč.
Odpověď:
Dana koupila 6 levnějších čokolád (po 17 Kč) a 11 dražších čokolád (po 18 Kč).

Řešení č. 2: - {řešení podle [45]}
x čokolád po . . . . 17 Kč
y čokolád po . . . . 18 Kč

$17x + 18y = 300; \quad x, y \in N$

$17x = 300 - 18y \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{300}{17} - \dfrac{18y}{17}$

$$x = 17 + \frac{11}{17} - \left(y + \frac{y}{17}\right)$$
$$x = 17 + \frac{11}{17} - y - \frac{y}{17}$$
$$x = 17 - y + \frac{11}{17} - \frac{y}{17}$$
$$x = 17 - y + \frac{11 - y}{17} \quad \Rightarrow \quad \frac{11 - y}{17} = t$$
$$11 - y = 17\cdot t$$
$$1 - y = 17\cdot t - 11$$
$$y = 11 - 17\cdot t$$
$$x = 17 - (11 - 17\cdot t) + t$$
$$x = 17 - 11 + 17\cdot t + t$$
$$x = 6 + 18\cdot t$$

Pro $t = 0$ dostaneme:
$x = 6 + 18\cdot t = 6$
$y = 11 - 17\cdot t = 11.$

Výsledek: Dana nakoupila 6 čokolád po 17 Kč a 11 čokolád po 18 Kč.

Příklad 4.4.4:
V místnosti jsou balíky po 3, 5 a 10 kg. Celkový počet balíků v místnosti je 202, jejich hmotnost dohromady činí 1991 kg. Určete počet tří, pěti a desetikilogramových balíků.

Řešení č. 1:
Počet balíků po 3 kg označme x, počet balíků po 5 kg označme y a počet balíků po 10 kg označme z, potom dostáváme soustavu rovnic

$$x + y + z = 202$$
$$\underline{3x + 5y + 10z = 1\,991},$$

kterou upravíme na jednu lineární diofantovskou rovnici odečtením trojnásobku první od druhé rovnice a dostáváme

$$2y + 7z = 1\,385.$$

Diofantovskou rovnici vyřešíme pomocí kongruencí

$$7z \equiv 1\,385 \mod 2 \quad \Big| -1\,378$$
$$7z \equiv 7 \mod 2 \quad \Big| : 7$$
$$z \equiv 1 \mod 2 \quad \rightarrow \quad \underline{z = 1 + 2t},\ t \in Z,$$

a dosadíme do původní diofantovské rovnice

$$2y + 7\cdot(1 + 2t) = 1\,385$$
$$2y + 7 + 14t = 1\,385 \quad \Big| -7 - 14t$$
$$2y = 1\,378 - 14t \quad \Big| : 2$$
$$\underline{y = 689 - 7t}.$$

Nyní dosadíme do první rovnice soustavy

$$x + 689 - 7t + 1 + 2t = 202 \quad \Big| -690 + 5t$$
$$\underline{x = -488 + 5t}.$$

Nyní volíme t a hledáme přirozená x, y, z:

t:	. . .	**97**	**98**	**99**	. . .
x $= -488 + 5t$**:**		**– 3**	**2**	**7**	
y $= 689 - 7t$**:**		**10**	**3**	**– 4**	
z $= 1 + 2t$**:**		**195**	**197**	**199**	

Ze zobrazených hodnot plyne, že jediným řešením je $x = 2$, $y = 3$, $z = 197$.
Zkouška:
Počet balíků je $2 + 3 + 197 = 202$ ks.
Hmotnost balíků je $2\cdot 3 + 3\cdot 5 + 197\cdot 10 = 1\,991$ kg.
Odpověď:
V místnosti byly 2 tříkilogramové balíky, 3 pětikilogramové balíky a 197 desetikilogramových balíků.

Řešení č. 2: - {řešení podle [45]}

$$3x + 5y + 10z = 1\,991$$
$$1x + y + z = 202 \quad \Big| \cdot (-10)$$
$$\left.\begin{aligned} 3x + 5y + 10z &= 1\,991 \\ -10x - 10y - 10z &= -2\,020 \end{aligned}\right\} +$$
$$-7x - 5y = -29 \quad \Big| \cdot (-1)$$
$$7x + 5y = 29$$
$$5y = 29 - 7x$$

$$y = \frac{29 - 7x}{5}$$

$$y = \frac{29}{5} - \frac{7x}{5}$$

$$y = \frac{25 + 4}{5} - \frac{5x + 2x}{5}$$

$$y = 5 + \frac{4}{5} - \left(\frac{5x}{5} + \frac{2x}{5}\right)$$

$$y = 5 + \frac{4}{5} - \left(x + \frac{2x}{5}\right)$$

$$y = 5 + \frac{4}{5} - x - \frac{2x}{5}$$

$$y = 5 - x + \frac{4}{5} - \frac{2x}{5}$$

$$y = 5 - x + \frac{4 - 2x}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{4 - 2x}{5} = t$$

$$4 - 2x = 5t$$

$$x = \frac{4 - 5t}{2}$$

$$y = 5 - \frac{4 - 5t}{2} + t$$

$$y = \frac{6 + 5t}{2} + t$$

Pro $t = 0$

$$x = 4 - 5 \cdot \frac{0}{2} = 2$$

$$y = \frac{6 + 5 \cdot 0}{2} + 0 = 3$$

$$x + y + z = 202$$

$$z = 202 - 2 - 3 = 197$$

Výsledek: V místnosti jsou 2 balíky tříkilogramové, 3 balíky pětikilogramové a 197 balíků desetikilogramových.

5. Slovní úlohy o společné práci

Základní členění slovních úloh o společné práci je podle počtu pracovníků, kteří se zúčastňují pracovního procesu. Dále se úlohy dělí podle toho, zda subjekty pracují po celou dobu práce nebo jen část této doby. Také se objevují případy, kdy alespoň jeden subjekt vykonává „opačnou“ práci (tj. společnou práci „boří“). Nakonec jsou zařazeny specifické druhy společné práce.

5.1. Skupina 1: *„Plná práce dvou subjektů“*

Úlohy obsahují zadání o společné práci dvou subjektů. Oba subjekty pracují po celou dobu společné práce. Počítáme dobu společné práce nebo dobu, za kterou společnou práci vykonají jednotlivé subjekty.

Příklad 5.1.1:
První pracovník by sám vykonal práci za 3 dny, druhý sám za 7 dní. Za jak dlouho by ji vykonali společně?

Řešení:
Vyřešme nejdříve danou úlohu obecně. Vytvořme si matematický model reálné situace. První pracovník by sám vykonal práci za a dní, druhý sám za b dní. Počet dní, kdy budou oba dva pracovat společně tak, aby celou práci udělali, si označme s. Potom za jeden den vykonají:

první . . . . . . $\frac{1}{a}$ práce,

druhý . . . . . . $\frac{1}{b}$ práce,

a společně . . . . . . $\frac{1}{s}$ práce.

Potom se musí rovnat: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{s} \quad \Big| \cdot abs,$

a dostáváme modelový vztah $\boldsymbol{as + bs = ab}$. **(5-1)**

Vyjádříme s a dostáváme:

$$s = \frac{ab}{a+b}. \qquad \textbf{(5-1a)}$$

Poznámka:
Vyjádříme-li a, dostáváme:

$$a = \frac{bs}{b-s}. \qquad \textbf{(5-1b)}$$

Vyjádříme-li b, dostáváme:

$$b = \frac{as}{a-s}. \qquad \textbf{(5-1c)}$$

V našem případě konkrétně platí a = 3 dny, b = 7 dní, potom

$s = \frac{ab}{a+b} = \frac{3\cdot 7}{3+7} = \underline{\underline{2{,}1}}$ dne.

Zkouška:
1. pracovník udělá za 1 den $\frac{1}{3}$ práce, za 2,1 dne $2{,}1 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}7$ práce,
2. pracovník udělá za 1 den $\frac{1}{7}$ práce, za 2,1 dne $2{,}1 \cdot \frac{1}{7} = 0{,}3$ práce,
Dohromady pak udělají 0,7 + 0,3 = 1, tj. celou práci.
Odpověď:
Oba pracovníci vykonají společně práci za 2,1 dne.

Příklad 5.1.2:
Nádržka naplní se prvním kohoutkem o 4, druhým o 9 hodin později než oběma současně. Za jakou dobu každým zvláště, oběma současně?

Řešení:
Oběma kohoutky současně se nádrž naplní za x hodin, za 1 hodinu se naplní $\frac{1}{x}$ nádrže,
1. kohoutkem se nádrž naplní za $(x + 4)$ hodin, za 1 hodinu se naplní $\frac{1}{x+4}$ nádrže,
2. kohoutkem se nádrž naplní za $(x + 9)$ hodin, za 1 hodinu se naplní $\frac{1}{x+9}$ nádrže,
z toho plyne

$$\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{x} \quad \Big| \cdot x \cdot (x+4) \cdot (x+9)$$
$$x \cdot (x+9) + x \cdot (x+4) = (x+4) \cdot (x+9)$$
$$x^2 + 9x + x^2 + 4x = x^2 + 13x + 36 \quad \Big| - x^2 - 13x$$
$$x^2 = 36 \quad \Big| \sqrt{\ }$$
$$x = \pm 6,$$

protože $x > 0$, je jediným řešení $\underline{x = 6}$., potom $\underline{x + 4 = 10}$, $\underline{x + 9 = 15}$.
Zkouška:
Prvním kohoutkem se naplní za 1 hodinu $\frac{1}{10}$ nádrže, za 6 hodin $6 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$ nádrže,
druhým kohoutkem se naplní za 1 hodinu $\frac{1}{15}$ nádrže, za 6 hodin $6 \cdot \frac{1}{15} = \frac{2}{5}$ nádrže,
celkem se za 6 hodin naplní $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$, tj. celá nádrž.
Odpověď:
Jen prvním kohoutkem se nádrž naplní za 10 hodin, jen druhým kohoutkem za 15 hodin a oběma současně se nádrž naplní za 6 hodin.

Příklad 5.1.3:
První traktorista poseče pole sám za 6 hodin, druhý traktorista poseče stejné pole za dobu o 3 hodiny delší. Za jak dlouho posečou celé pole společně?

Řešení č. 1:
První traktorista poseče sám pole za 6 hodin, druhý sám za 9 hodin. Protože máme zjistit dobu společné práce dvou subjektů, vyjdeme ze vzorce (5-1a), kde a = 6 h, b = 9 h a dostáváme

$$s = \frac{ab}{a+b} = \frac{6 \cdot 9}{6+9} = \underline{\underline{3{,}6}} \text{ h.}$$

Zkouška:
Za 3,6 h první a druhý traktorista posečou $3{,}6 \cdot (\frac{1}{6} + \frac{1}{9}) = 3{,}6 \cdot \frac{5}{18} = 1$ (práce).
Odpověď:
Celé pole posečou oba traktoristé společně za 3,6 hodiny.

Řešení č. 2:
Označme si dobu společné práce s [hodin], dobu práce prvního a [hodin], rozdíl mezi dobou práce prvního a druhého r [hodin]. Potom

první traktorista poseče za 1 hodinu . . . . $\frac{1}{a}$ pole,

druhý traktorista poseče za 1 hodinu . . . . $\frac{1}{a+r}$ pole,

oba traktoristé společně posečou za 1 hodinu . . . $\frac{1}{s}$ pole

a platí

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+r} = \frac{1}{s} \quad \Big| \cdot a \cdot (a+r) \cdot s$$
$$(a+r) \cdot s + a \cdot s = a \cdot (a+r)$$
$$as + rs + as = a^2 + ar$$
$$(2a+r) \cdot s = a^2 + ar \quad \Big| : (2a+r)$$
$$\underline{\underline{s = \frac{a^2 + ar}{2a+r}}}. \tag{5-2}$$

Pro $a = 6$ h, $r = 3$ h dostáváme

$$s = \frac{a^2 + ar}{2a+r} = \frac{6^2 + 6 \cdot 3}{2 \cdot 6 + 3} = \underline{\underline{3{,}6}} \text{ hodiny.}$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v řešení č. 1.

Příklad 5.1.4:
Jeden ze dvou závodů může splnit objednávku o 4 dny dříve než druhý. Při společné práci by oba závody splnily za 24 dny pětkrát větší objednávku. Za jakou dobu by splnil objednávku každý závod?

Řešení č. 1:
Označme si x počet dní, za které by objednávku splnil sám první závod, potom druhý závod by splnil objednávku za $(x + 4)$ dny. Společně ji splní za $24 : 5 = 4{,}8$ dne. Za 1 den splní

první závod sám . . . . $\frac{1}{x}$ objednávky,

druhý závod sám . . . . $\frac{1}{x+4}$ objednávky,

oba závody společně . . . . . $\frac{1}{4{,}8}$ objednávky

a platí

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{4{,}8} \quad \Big| \cdot 4{,}8 \cdot x \cdot (x+4)$$

$$4{,}8 \cdot (x + 4) + 4{,}8x = x^2 + 4x$$
$$4{,}8x + 19{,}2 + 4{,}8x = x^2 + 4x \quad \Big| -9{,}6x - 19{,}2$$
$$x^2 - 5{,}6x - 19{,}2 = 0 \qquad D = 108{,}16 \quad \rightarrow \quad \sqrt{D} = 10{,}4$$
$$x_{12} = \frac{5{,}6 \pm 10{,}4}{2} = \begin{cases} 8 \\ -2{,}4 \end{cases}.$$

Protože záporná hodnota nevyhovuje, je jediným řešení $x = 8$, potom $x + 4 = 12$.

Zkouška:

Za 24 dní splní oba závody společně $24 \cdot (\frac{1}{8} + \frac{1}{12}) = 5$ (objednávek).

Odpověď:

První závod by sám splnil objednávku za 8 dní, druhý sám za 12 dní.

Řešení č. 2:

Označme si dobu společné práce s [dní], doba práce prvního závodu bude a [dní], doba práce druhého závodu bude delší o r [dní] než doba práce prvního závodu, tedy bude $(a + r)$ [dní]. Potom

první závod udělá za 1 den . . . . $\frac{1}{a}$ práce,

druhý závod udělá za 1 den . . . . $\frac{1}{a+r}$ práce,

oba závody udělají společně za 1 den . . . $\frac{1}{s}$ práce

a platí

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+r} \quad \Big| \cdot s \cdot a \cdot (a + r)$$
$$a^2 + ar = as + rs + as \quad \Big| -2as - rs$$
$$a^2 + ar - 2as - rs = 0$$
$$a^2 + (r - 2s) \cdot a - rs = 0 \qquad D = (r - 2s)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-rs) = r^2 - 4rs + 4s^2 + 4rs = r^2 + 4s^2$$
$$\underline{\underline{a_{12} = \frac{2s - r \pm \sqrt{r^2 + 4s^2}}{2}}} \qquad \textbf{(5-3)}$$

Pro $s = 4{,}8$ h, $r = 4$ h dostáváme

$$a_{12} = \frac{2s - r \pm \sqrt{r^2 + 4s^2}}{2} = \frac{2 \cdot 4{,}8 - 4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 4{,}8^2}}{2} = \frac{5{,}6 \pm 10{,}4}{2} = \begin{cases} 8 \\ -4{,}8 \end{cases}.$$

Potom $a = 8$ dní, $a + r = 12$ dní.

Zkouška a *odpověď* stejné jako v řešení č. 1.

Příklad 5.1.5:

Otec se synem požnou louku za $2\frac{2}{5}$ dne; syn sám potřeboval by k tomu o 2 dny více než otec. Za jaký čas by požal louku každý sám?

Řešení:

Vyjdeme ze vztahu (5-3), kde $s = 2{,}4$ dne, $r = 2$ dny. Potom

$$a_{12} = \frac{2s - r \pm \sqrt{r^2 + 4s^2}}{2} = \frac{2 \cdot 2{,}4 - 2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 2{,}4^2}}{2} = \frac{2{,}8 \pm 5{,}2}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1{,}2 \end{cases}.$$

Řešením je pouze a = 4 dny, $a + r$ = 6 dní.
Zkouška:
Za 2,4 dne požne otec $2{,}4\cdot\frac{1}{4}$ = 0,6 louky, syn za 2,4 požne $2{,}4\cdot\frac{1}{6}$ = 0,4 louky; dohromady požnou 0,6 + 0,4 = 1 louku.
Odpověď:
Otec by požal sám louku za 4 dny, syn sám za 6 dní.

Příklad 5.1.6:
Jedním kohoutkem naplní se nádržka za dobu o 2 hod., druhým za dobu o 8 hod. delší, než oběma současně. Za jakou dobu se naplní každým zvláště?

Řešení č. 1:
Označme si x počet hodin, za které by se nádržka naplnila oběma kohoutky současně, potom by se nádržka naplnila jen prvním kohoutkem za (x + 2) hodiny a jen druhým kohoutkem za (x + 8) hodin. Potom se za 1 hodinu naplní

jen prvním kohoutkem . . . . $\dfrac{1}{x+2}$ nádržky,

jen druhým kohoutkem . . . . $\dfrac{1}{x+8}$ nádržky,

oběma kohoutky společně . . . . . $\dfrac{1}{x}$ nádržky

a platí

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+8}=\frac{1}{x} \quad \Big|\cdot x\cdot(x+2)\cdot(x+8)$$

$$x^2+8x+x^2+2x=x^2+10x+16 \quad \Big|-x^2-10x$$

$$x^2=16 \quad \Big|\sqrt{}$$

$$\underline{x=4}\ [\text{h}] \quad \text{(význam mají jen kladné hodnoty).}$$

Zkouška:
Nádržka se naplní jen prvním kohoutkem za 6 hodin, jen druhým kohoutkem za 12 hodin, oběma kohoutky společně za 4 hodiny. Za 4 hodiny se prvním kohoutkem naplní $4\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ nádržky, druhým kohoutkem se naplní $4\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$ nádržky. Dohromady se naplní $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$ = 1 nádržka.
Odpověď:
Jen prvním kohoutkem se nádržka naplní za 6 hodin, jen druhým kohoutkem se naplní za 12 hodin.

Řešení č. 2:
Označme si dobu společné práce s [dní], doba práce prvního kohoutku bude delší o a [dní], doba práce druhého kohoutku bude delší o b [dní]. Potom

prvním kohoutkem nateče za 1 den . . . . $\dfrac{1}{s+a}$ nádržky,

druhým kohoutkem nateče za 1 den . . . . $\dfrac{1}{s+b}$ nádržky,

oběma kohoutky společně nateče za 1 den . . . . . $\dfrac{1}{s}$ nádržky a platí

$$\frac{1}{s+a}+\frac{1}{s+b}=\frac{1}{s} \quad \Big| \cdot s\cdot(s+a)\cdot(s+b)$$

$$s\cdot(s+b)+s\cdot(s+a)=(s+a)\cdot(s+b)$$

$$s^2+bs+s^2+as=s^2+as+bs+ab \quad \Big| -s^2-as-bs$$

$$s^2=ab \quad \Big| \sqrt{\ }$$

$$s=\sqrt{ab} \quad \text{(význam mají jen kladné hodnoty).} \qquad \textbf{(5-4)}$$

Pro a = 2 h, b = 8 h dostáváme

$$s=\sqrt{2\cdot 8}=4\ [\text{h}].$$

Jen prvním kohoutkem se nádržka naplní za 4 + 2 = 6 n, jen druhým za 4 + 8 = 12 h.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v řešení č. 1.

Příklad 5.1.7:
Vodní nádrž je možné vypustit jednou rourou za $1\frac{1}{2}$ h, druhou rourou za $1\frac{1}{8}$ h. Za jak dlouho se vyprázdní, otevřeme-li obě roury současně?

Řešení:
Vyjdeme ze vztahu (5-1a), kde $a=\frac{3}{2}$ h, $b=\frac{9}{8}$ h a dostáváme

$$s=\frac{ab}{a+b}=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{8}}{\frac{3}{2}+\frac{9}{8}}=\underline{\frac{9}{14}}\ \text{h.}$$

Zkouška:
Za $\frac{9}{14}$ hodiny vyteče oběma rourami současně $\frac{9}{14}\cdot(\frac{2}{3}+\frac{8}{9})=1$ (vodní nádrž).
Odpověď:
Vodní nádrž se vyprázdní oběma rourami za $\frac{9}{14}$ hodiny.

Příklad 5.1.8:
Když zedník pracuje sám, omítne dům za 8 dní, druhý zedník bude sám hotov za 10 dní. Jak dlouho jim bude trvat, když mají společně omítnout tři takové domy?

Řešení:
Vyjdeme ze vztahu (5-1a), kde a = 8 dní, b = 10 dní a dostáváme

$$3\cdot s=\frac{ab}{a+b}=3\cdot\frac{8\cdot 10}{8+10}=\underline{13\tfrac{1}{3}}\ \text{dne.}$$

Zkouška:
Za $13\frac{1}{3}$ dne omítnou oba zedníci společně $13\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{8}+\frac{1}{10})=\frac{40}{3}\cdot\frac{9}{40}=3$ (domy).
Odpověď:
Tři domy omítnou oba zedníci společně za $13\frac{1}{3}$ dne.

Příklad 5.1.9:
Rybník se vyprázdní za 20 dní, jsou-li otevřena obě stavidla. Větším stavidlem se vyprázdnil za 30 dní. Za kolik dní by se vyprázdnil jen menším stavidlem?

Řešení:
Vyjdeme ze vztahu (5-1c), kde a = 30 dní, s = 20 dní a dostáváme

$$b = \frac{as}{a-s} = \frac{30 \cdot 20}{30-20} = \underline{60} \text{ dní.}$$

Zkouška:
Za 20 dní se oběma stavidly společně vyprázdní $20 \cdot (\frac{1}{30} + \frac{1}{60}) = 1$ rybník.
Odpověď:
Rybník by se vyprázdnil jen menším stavidlem za 60 dní.

Příklad 5.1.10:
Údržbář slíbil, že provede opravné práce v závodě za 24 dní. Z provozních důvodů bylo nutno tuto dobu zkrátit, a proto si přibral pomocníka. Spolu vykonali všechny opravy za $13\frac{1}{3}$ dne. Jak dlouho by opravy trvaly pomocníkovi, kdyby pracoval samostatně?

Řešení:
Vyjdeme ze vztahu (5-1c), kde a = 24 dní, $s = 13\frac{1}{3}$ dní a dostáváme

$$b = \frac{as}{a-s} = \frac{24 \cdot 13\frac{1}{3}}{24 - 13\frac{1}{3}} = \underline{30} \text{ dní.}$$

Zkouška:
Za $13\frac{1}{3}$ dne údržbář a pomocník společně provedou $13\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{24} + \frac{1}{30}) = 1$ (tedy celou práci).
Odpověď:
Kdyby pomocník pracoval samostatně, trvaly by mu opravy 30 dní.

Příklad 5.1.11:
Pepa zbožňuje jahodové knedlíky a dokáže jich sníst za hodinu 32. Jeho bratr Karel sní stejné množství za 3 hodiny. Za jak dlouho sní oba dohromady 32 knedlíků?

Řešení:
Pepa sní za hodinu 32 knedlíků, Karel sní za hodinu $32 : 3 = 10\frac{2}{3}$ knedlíku. Čas potřebný na společné snědění 32 knedlíků označme x, potom platí:

$$32 \cdot x + 10\tfrac{2}{3} \cdot x = 32 \quad | \cdot 3$$
$$96x + 32x = 96$$
$$128x = 96 \quad | : 128$$
$$\underline{\underline{x = 0{,}75}} \text{ [h]} = 45 \text{ min.}$$

Zkouška:
Za 45 minut sní Pepa $32 \cdot 0{,}75 = 24$ knedlíků, Karel sní za 45 minut $10\frac{2}{3} \cdot 0{,}75 = 8$ knedlíků. Dohromady sní oba za 45 minut 24 + 8 = 32 knedlíků.
Odpověď:
Pepa a Karel sní společně 32 knedlíků za 45 minut.

5.2. <u>Skupina 2:</u> *„Neúplná práce dvou subjektů"*

Úlohy obsahují zadání o společné práci dvou subjektů. Alespoň jeden ze subjektů pracuje jen část doby společné práce. Počítáme dobu společné práce nebo dobu, za kterou společnou práci vykonají jednotlivé subjekty. Můžeme také počítat dobu, za kterou by dokončil společnou práci jeden ze subjektů.

<u>*Příklad* 5.2.1:</u>
Dělník *A* by sám určitou práci vykonal za 16 dní, dělník *B* by ji sám vykonal za 12 dní. Nejprve pracuje dělník *A* 2 dny sám. Aby dokončil práci dříve, je mu na pomoc přidán dělník *B*. Společně pracují 2 dny, potom dělník *A* onemocní a dělník *B* musí dokončit práci sám. Jak dlouho mu to trvá?

<u>*Řešení*:</u>
Obecně můžeme úlohu formulovat takto:
První pracovník by sám vykonal určitou práci za *a* dní, druhý pracovník sám za *b* dní. Nejdříve pracuje první pracovník *p* dní, potom pracují společně *s* dní a nakonec společnou práci dokončí druhý pracovník sám za *q* dní. Za jak dlouho bude práce vykonána?

K řešení užijeme modelu:

1. pracovník …. sám vykoná práci za *a* dní …. za 1 den udělá $\frac{1}{a}$ práce,

2. pracovník …. sám vykoná práci za *b* dní …. za 1 den udělá $\frac{1}{b}$ práce.

První pracovník pracuje nejdříve sám *p* dní, potom oba společně *s* dní, nakonec druhý pracovník *q* dní, pak platí:

$$p \cdot \frac{1}{a} + s \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + q \cdot \frac{1}{b} = 1 \quad \Big| - \frac{p}{a} - \frac{q}{b}$$

$$s \cdot \frac{a+b}{ab} = 1 - \frac{p}{a} - \frac{q}{b} \quad \Big| \cdot ab$$

a dostáváme modelový vztah:

$$\boldsymbol{as + bs = ab - bp - aq} \tag{5-5}$$

z toho můžeme postupně vyjádřit hodnoty:

- ***s*** – doba, kdy pracují oba pracovníci současně,
- ***a*** – doba, za kterou udělá celou práci sám první pracovník,
- ***b*** – doba, za kterou udělá celou práci sám druhý pracovník,
- ***p*** – doba, kdy část práce udělá jen první pracovník,
- ***q*** – doba, kdy část práce udělá jen druhý pracovník;

potom: 1) $as + bs = ab - bp - aq$

$$(a + b) \cdot s = ab - bp - aq \quad \big| : (a + b)$$

$$\boldsymbol{s} = \frac{ab - bp - aq}{a + b}. \tag{5-5a}$$

2) $as + bs = ab - bp - aq \quad \big| + aq - ab - bs$

$$as + aq - ab = - bs - bp \quad \big| \cdot (-1)$$

$$ab - as - aq = bs + bp$$

$$a\,(b - q - s) = b\,(p + s) \quad \big| : (b - q - s)$$

$$\boldsymbol{a} = \underline{\underline{\frac{b\ (p+s)}{b-q-s}}}. \qquad \textbf{(5-5b)}$$

3) $as + bs = ab - bp - aq \quad \vert + bp - ab - as$

$bs + bp - ab = - as - aq \quad \vert \cdot (-1)$

$ab - bp - bs = aq + as$

$b\ (a - p - s) = a\ (q + s) \quad \vert : (a - q - s)$

$$\boldsymbol{b} = \underline{\underline{\frac{a\ (q+s)}{a-p-s}}}. \qquad \textbf{(5-5c)}$$

4) $as + bs = ab - bp - aq \quad \vert + bp - as - bs$

$bp = ab - aq - as - bs \quad \vert : b$

$$\boldsymbol{p} = \underline{\underline{a - s - \frac{a\ (q+s)}{b}}}. \qquad \textbf{(5-5d)}$$

5) $as + bs = ab - bp - aq \quad \vert + aq - as - bs$

$aq = ab - bp - as - bs \quad \vert : a$

$$\boldsymbol{q} = \underline{\underline{b - s - \frac{b\ (p+s)}{a}}}. \qquad \textbf{(5-5e)}$$

Nakonec můžeme vyjádřit celkovou dobu práce ***c***, pro kterou platí:

6) $\boldsymbol{c} = p + q + s = p + q + \dfrac{ab - bp - aq}{a+b} =$

$$= \frac{ap + bp + aq + bq + ab - bp - aq}{a+b} = \frac{ab + ap + bq}{a+b},$$

tedy: $$\boldsymbol{c} = \underline{\underline{\frac{ab + ap + bq}{a+b}}}. \qquad \textbf{(5-5f)}$$

V našem případě je $a = 16$ dní, $b = 12$ dní, $p = 2$ dny, $s = 2$ dny, počítáme q; proto vyjdeme ze vztahu (5-5e) a dostáváme:

$$q = b - s - \frac{b(p+s)}{a} = 12 - 2 - \frac{12\cdot(2+2)}{16} = \underline{\underline{7}} \text{ dní.}$$

Zkouška:

První dělník pracuje 2 + 2 = 4 dny, za tuto dobu udělá $4\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$ práce,

druhý dělník pracuje 2 + 7 = 9 dní, za tuto dobu udělá $9\cdot\frac{1}{12} = \frac{3}{4}$ práce,

dohromady udělají $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, tj. celou práci.

Zkoušku můžeme také udělat výpočtem jiných hodnot podle jiných vztahů, například dobu celkové práce c podle vztahu (5-5f):

$c = \dfrac{ab + ap + bq}{a+b} = \dfrac{16\cdot12 + 16\cdot2 + 12\cdot7}{16+12} = 11$ dní a to je skutečně celková doba práce, protože podle zadání a výpočtu je to 2 + 2 + 7 = 11 dní.

Odpověď:

Dělník *B* dokončí sám práci za 7 dní.

<u>*Příklad* 5.2.2:</u>

Na montáži mostu pracují dvě skupiny dělníků. Po 4 dny pracovaly obě skupiny společně. Kdyby pak první odešla na jinou práci, dokončila by práci druhá skupina za dalších $3\frac{1}{5}$ dne.

Kdyby odešla druhá skupina dělníků, pak by první skupina dokončila práci za $2\frac{2}{3}$ dne. Určete za jakou dobu by provedla montáž každá skupina dělníků zvlášť.

Řešení č.1: - pomocí rovnice

První skupina dělníků sama udělá montáž za x dní, za 1 den udělá $\frac{1}{x}$ práce, práci sama dokončí za $2\frac{2}{3}$ dne, udělá $\frac{10}{3x}$ práce;

druhá skupina dělníků sama udělá montáž za y dní, za 1 den udělá $\frac{1}{y}$ práce, práci sama dokončí za $3\frac{1}{5}$ dní, udělá $\frac{16}{5y}$ práce.

Obě skupiny pracují společně 4 dny, udělají $4\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ práce.

Pro celkovou práci platí:

$$\left.\begin{aligned} a)\ \ 4\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{8}{3x}&=1 \\ b)\ \ 4\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{16}{5y}&=1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \frac{8}{3x}=\frac{16}{5y} \quad \rightarrow \quad y=\frac{6}{5}x$$

$$4\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{5}{6x}\right)+\frac{8}{3x}=1$$

$$\frac{4}{x}+\frac{10}{3x}+\frac{8}{3x}=1 \quad \Big|\cdot 3x$$

$$12+10+8=3x \quad \Big|:3$$

$$\underline{\underline{x=10}}\text{ dní,}$$

$$y=\frac{6}{5}x \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y=12}}\text{ dní.}$$

Zkouška:

Společně udělají $4\cdot(\frac{1}{10}+\frac{1}{12})=\frac{44}{60}=\frac{11}{15}$ práce, zbývá $1-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$ práce.

První skupina sama dokončí $2\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$, což je zbytek práce.

Druhá skupina sama dokončí $3\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{12}=\frac{16}{60}=\frac{4}{15}$, což je také zbytek práce.

Odpověď:

První skupina by sama provedla montáž za 10 dní, druhá sama za 12 dní.

Řešení č.2: - pomocí modelu

První skupina dělníků sama udělá montáž za a dní, za 1 den udělá $\frac{1}{a}$ práce, práci sama dokončí za p dní, udělá $\frac{p}{a}$ práce;

druhá skupina dělníků sama udělá montáž za b dní, za 1 den udělá $\frac{1}{b}$ práce, práci sama dokončí za q dní, udělá $\frac{q}{a}$ práce.

Obě skupiny pracují společně s dní, udělají $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot s$ práce, pak pro celkovou práci platí:

$$\left.\begin{aligned} a)\ & \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot s+\frac{p}{a}=1 \\ b)\ & \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot s+\frac{q}{b}=1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \frac{p}{a}=\frac{q}{b} \quad \rightarrow \begin{cases} a)\ b=\dfrac{aq}{p} \\ b)\ a=\dfrac{bp}{q} \end{cases}$$

$$a)\ \frac{s}{a}+\frac{ps}{aq}+\frac{p}{a}=1 \quad \Big|\cdot aq$$

$$qs + ps + pq = aq$$

$$a=\frac{pq+ps+qs}{q} \qquad \textbf{(5-6a)}$$

$$b)\ \frac{qs}{bp}+\frac{s}{b}+\frac{q}{b}=1 \quad \Big|\cdot bp$$

$$qs + ps + pq = bp \quad \Big|:p$$

$$b=\frac{pq+ps+qs}{p} \qquad \textbf{(5-6b)}$$

Protože $a > 0$, $b > 0$, musí platit $\dfrac{ps+qs}{pq+ps+qs} < 1$.

V naší úloze je konkrétně $p = 2\frac{2}{3}$ dne, $q = 3\frac{1}{5}$ dne, $s = 4$ dny, potom

$$a=\frac{pq+ps+qs}{q}=\frac{\frac{8}{3}\cdot\frac{16}{5}+\frac{8}{3}\cdot 4+\frac{16}{5}\cdot 4}{\frac{16}{5}}=\frac{\frac{480}{15}}{\frac{16}{5}}=\frac{2400}{240}=\underline{\underline{10}}\ \text{dní.}$$

$$b=\frac{pq+ps+qs}{p}=\frac{\frac{8}{3}\cdot\frac{16}{5}+\frac{8}{3}\cdot 4+\frac{16}{5}\cdot 4}{\frac{8}{3}}=\frac{\frac{480}{15}}{\frac{8}{3}}=\frac{1440}{120}=\underline{\underline{12}}\ \text{dní.}$$

Zkouška a *odpověď* viz řešení č.1.

Příklad 5.2.3:

Zásoba uhlí by stačila na vytápění většího pokoje na 12 týdnů, menšího na 18 týdnů. Zpočátku se topilo 4 týdny v obou pokojích, pak jen v menším. Jak dlouho stačila zásoba uhlí?

Řešení č. 1:

Vyjdeme ze vztahu (5-5a), kde $p = 0$, potom

$$s=\frac{ab-aq}{a+b}$$

a vyjádříme q (viz obdoba - vztah (5-5e)):

$$sa + sb = ab - aq \quad \Big| + aq - sa - sb$$

$$aq = ab - sa - sb \quad \Big| : a$$

$$q = b - \frac{(a+b)\cdot s}{a}, \qquad \textbf{(5-7)}$$

kde q = doba, kdy se topilo jen v menším pokoji,
a = doba, kdy by se topilo celou dobu v prvním pokoji,
b = doba, kdy by se topilo celou dobu v druhém pokoji,
s = doba, kdy se topilo v obou pokojích společně.

Potom pro a = 12 týdnů, b = 18 týdnů, s = 4 týdny dostáváme

$q = b - \frac{(a+b)\cdot s}{a} = 18 - \frac{(12+18)\cdot 4}{12} = 18 - 10 = \underline{8}$ týdnů.

Celkem se topí $q + s = 8 + 4 = \underline{12}$ týdnů.

Zkouška:

Bylo ztopeno $4\cdot\frac{1}{12} + 12\cdot\frac{1}{18} = 1$ (zásoba uhlí).

Odpověď:

Zásoba uhlí stačila na topení (podle popsaného scénáře) na 12 týdnů.

Řešení č. 2:

Za 4 týdny společného topení se spotřebuje $4\cdot(\frac{1}{12}+\frac{1}{18}) = \frac{1}{3}+\frac{2}{9} = \frac{5}{9}$ zásoby uhlí, zbývá $\frac{4}{9}$ zásoby uhlí, kterou spotřebujeme na topení v menším pokoji. Dobu topení vypočteme pomocí trojčlenky (jedná se o přímou úměrnost).

$$\begin{array}{lcl} \uparrow & 1\,zásoba \ldots\ldots\; 18\,týdnů & \uparrow \\ & \frac{4}{9}\,zásoby \ldots\ldots\; x\,týdnů & \end{array}$$

$$x : 18 = \tfrac{4}{9} : 1 \quad \big|\cdot 18$$

$$x = 8\ [\text{týdnů}]$$

K výsledku musíme připočítat dobu, kdy se topilo v obou pokojích, celková doba topení je tedy 8 + 4 = 12 týdnů.

Zkouška a *odpověď* stejná jako v řešení č. 1.

Příklad 5.2.4:

Prvním kombajnem lze sklidit obilí z určitého lánu za 24 h, druhým, výkonnějším, za 16 hodin. Za kolik hodin bylo sklizeno obilí z tohoto lánu, jestliže se sklízelo současně oběma kombajny, ale druhý kombajn začal pracovat o 4 hodiny později?

Řešení:

Vyjdeme ze vztahu (4-14) (viz příloha 2), kde a = 24 h, b = 16 h, k = 4 h, potom

$$x = \frac{ab+ak}{a+b} = \frac{24\cdot 16 + 24\cdot 4}{24+16} = 12 \text{ hodin.}$$

Zkouška:

Celkový výkon je $12\cdot\frac{1}{24} + 8\cdot\frac{1}{16} = 1$ (lán).

Odpověď:

Obilí z lánu bylo sklizeno za 12 hodin.

Příklad 5.2.5:
Na vyčištění mýtiny potřebuje lesní dělník 12 hodin, druhý lesní dělník 8 hodin. Druhý začal pracovat, když měl první dělník dvě hodiny práce za sebou. Jak brzy skončili společnou práci?

Řešení č. 1:
Vyjdeme ze vztahu (4-14) (viz příloha 2), kde a = 12 h, b = 8 h, k = 2 h, potom

$$x = \frac{ab + ak}{a + b} = \frac{12 \cdot 8 + 12 \cdot 2}{12 + 8} = 6 \text{ hodin.}$$

Toto je doba celkové práce, doba za kterou dokončily práci je o 2 hodiny menší, tj. 4 hodiny.
Zkouška:
Celkový výkon je $6 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 1$ (mýtina).
Odpověď:
Společnou práci skončili dělníci za 4 hodiny.

Řešení č. 2:
Vyjdeme ze vztahu (5-5a), kde q = 0, potom

$$s = \frac{ab - bp}{a + b},$$

a kde dále a = 12 h, b = 8 h, p = 2 h, potom

$$s = \frac{12 \cdot 8 - 8 \cdot 2}{12 + 8} = \underline{4} \text{ hodiny.}$$

Zkouška a *odpověď* stejná jako v řešení č. 1.

Příklad 5.2.6:
Jeden dělník potřebuje na určitou práci 40 hodin, druhý by tuto práci provedl již za 30 h. Několik hodin pracovali společně, potom byl druhý dělník odvolán a první dokončil práci sám za 5 hodin. Kolik hodin pracovali společně a jakou část práce každý z nich vykonal?

Řešení:
Vyjdeme opět ze vztahu (5-5a), $s = \frac{ab - bp}{a + b}$,
kde a = 40 h, b = 30 h, p = 5 h, potom

$$s = \frac{40 \cdot 30 - 30 \cdot 5}{40 + 30} = \underline{15} \text{ hodin.}$$

Zkouška {také odpověď na druhou část otázky}:
První dělník pracuje 20 hodin a udělá $20 \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{2}$ práce; druhý dělník pracuje 15 hodin a udělá $15 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{2}$ práce. Dohromady udělají $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, tj. celou práci.
Odpověď:
Společně pracovali oba dělníci 15 hodin a oba udělali stejně.

Příklad 5.2.7:
Do nádržky 100litrové ústí dva kohoutky; prvním přiteče 5l za 2 minuty, druhým 7l za 3 minuty. Nejprve se otevře první, o něco později druhý: 26 minut po otevření prvého je nádržka plná. Kdy byl otevřen druhý kohoutek?

Řešení:
Prvním kohoutkem nateče do nádržky 26 : $2 \cdot 5$ = 65 *l*, zbývá druhým kohoutkem napustit 100 – 65 = 35 *l*.

To se povede za $35 : \dfrac{7}{3} = 35 \cdot \dfrac{3}{7}$ = 15 minut. Druhý kohoutek byl tedy uzavřen 26 – 15 = 11 minut. Z toho plyne, že druhý kohoutek byl otevřen po 11-ti minutách.

Zkouška:
Oběma kohoutky nateče $26 \cdot \frac{5}{2} + 15 \cdot \frac{7}{3}$ = 100 litrů.

Odpověď:
Druhý kohoutek byl otevřen 11 minut po otevření prvního kohoutku.

5.3. Skupina 3: *„Plná práce tří subjektů"*

Úlohy obsahují zadání o společné práci tří subjektů. Všechny subjekty pracují po celou dobu společné práce. Počítáme dobu společné práce nebo počítáme dobu, za kterou společnou práci vykonají jednotlivé subjekty.

Příklad 5.3.1:
Jistou práci vykoná 1. dělník za 36 h, 2. dělník za 30 h, 3. dělník za 35 h. Za jak dlouho vykonají tuto práci, když budou pracovat všichni tři současně?

Řešení:
Obecně můžeme úlohu formulovat takto:
První pracovník by sám vykonal práci za *a* hodin, druhý sám za *b* hodin, třetí sám za *c* hodin. Za jak dlouho by ji vykonali společně?
Počet hodin, kdy budou všichni tři pracovat společně tak, aby celou práci udělali, si označme *s*. Potom za jednu hodinu vykonají:

první . . . . . . $\frac{1}{a}$ práce,

druhý . . . . . . $\frac{1}{b}$ práce,

třetí . . . . $\frac{1}{c}$ práce,

a společně . . . . . . $\frac{1}{s}$ práce.

Potom se musí rovnat: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{s} \quad \Big| \cdot\ abcs,$

a dostáváme modelový vztah:

$$\boldsymbol{abs + acs + bcs = abc} \qquad \textbf{(5-8)}$$

Vyjádříme *s* a dostáváme:

$$s=\frac{abc}{ab+ac+bc}. \qquad \textbf{(5-8a)}$$

Poznámka:
Vyjádříme-li *a*, dostáváme:

$$a=\frac{bcs}{bc-bs-cs}. \qquad \textbf{(5-8b)}$$

Vyjádříme-li *b*, dostáváme:

$$b=\frac{acs}{ac-as-cs}. \qquad \textbf{(5-8c)}$$

Vyjádříme-li *c*, dostáváme:

$$c=\frac{abs}{ab-as-bs}. \qquad \textbf{(5-8d)}$$

V našem případě konkrétně platí *a* = 36 h, *b* = 30 h *c* = 35 h, potom

$$s=\frac{abc}{ab+ac+bc}=\frac{36\cdot 30\cdot 35}{36\cdot 30+36\cdot 35+30\cdot 35}=\frac{37\,800}{3\,390}=\frac{1\,260}{113}=11\tfrac{17}{113}\doteq 11{,}15 \text{ h.}$$

Zkouška:

1. dělník udělá za $11\frac{17}{113}$ h ..... $\frac{1\,260}{113}\cdot\frac{1}{36}=\frac{35}{113}$ práce,

2. dělník udělá za $11\frac{17}{113}$ h ..... $\frac{1\,260}{113}\cdot\frac{1}{30}=\frac{42}{113}$ práce,

3. dělník udělá za $11\frac{17}{113}$ h ..... $\frac{1\,260}{113}\cdot\frac{1}{35}=\frac{36}{113}$ práce,

dohromady udělají ..... $\frac{35}{113}+\frac{42}{113}+\frac{36}{113}=1$, tj. celou práci.

Zkoušku můžeme udělat také tím, že úlohu vypočteme jiným způsobem.

Odpověď:

Budou-li pracovat současně, vykonají práci všichni tři asi za 11,15 hodiny.

Příklad 5.3.2:

Dělník Procházka splní daný úkol sám za 9 hodin, dělník Bartoň sám za 6 hodin. Poněvadž úkol měl být splněn co nejdříve, přizvali k práci ještě dělníka Odehnala, načež práci skončili za 2 hodiny. Za kolik hodin by splnil daný úkol sám dělník Odehnal?

Řešení:

Vyjdeme ze vztahu (5-8d) a dosadíme a = 9 h, b = 6 h, s = 2 h a počítáme c

$$c=\frac{abs}{ab-as-bs}=\frac{9\cdot 6\cdot 2}{9\cdot 6-9\cdot 2-6\cdot 2}=\frac{108}{24}=\underline{\underline{4\tfrac{1}{2}}}\text{ h.}$$

Zkouška:

Pro ověření správnosti postupu můžeme použít vztahu (5-8a), kde a = 9 h, b = 6 h, c = $5\frac{1}{4}$ h a vypočteme

$$s=\frac{9\cdot 6\cdot \frac{9}{2}}{9\cdot 6+9\cdot\frac{9}{2}+6\cdot\frac{9}{2}}=2\text{ h.}$$

Odpověď:

Dělník Odehnal by sám splnil daný úkol za $4\frac{1}{2}$ hodiny.

Příklad 5.3.3:

Tři dělníci mají vykonat určitou práci. Pracuje-li A s B, vykonají práci za 12 dní, B s C za 20 dní, C s A za 15 dní. Kolik času potřebuje každý sám k vykonání práce a za jak dlouho by ji udělali společně?

Řešení:

Obecně můžeme úlohu formulovat takto:

První a druhý pracovník by společně vykonali určitou práci za u dní, první a třetí pracovník by tuto práci společně vykonali za v dní, druhý a třetí by pak tuto práci vykonali společně za w dní. Za jak dlouho by vykonal tuto práci každý sám a za jak dlouho by ji vykonali všichni tři společně:

Řešíme užitím modelu:

1. pracovník …. sám vykoná práci za a dní …. za 1 den udělá $\frac{1}{a}$ práce,

2. pracovník …. sám vykoná práci za b dní …. za 1 den udělá $\frac{1}{b}$ práce,

3. pracovník …. sám vykoná práci za c dní …. za 1 den udělá $\frac{1}{c}$ práce,

1. a 2. pracovník …. vykonají práci společně za u dní …. za 1 den udělají $\frac{1}{u}$ práce,

1. a 3. pracovník …. vykonají práci společně za v dní …. za 1 den udělají $\frac{1}{v}$ práce,

2. a 3. pracovník …. vykonají práci společně za w dní …. za 1 den udělají $\frac{1}{w}$ práce.

Víme, že platí $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{s}$, potom také bude platit:

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}=\frac{2}{s}$$

a dostáváme modelovou situaci:

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=2\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{2}{s}. \qquad \textbf{(5-9)}$$

Vyjádříme-li s, dostáváme:

$$\underline{\underline{s=\frac{2uvw}{uv+uw+vw}}}. \qquad \textbf{(5-9a)}$$

Z rovností:

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad (+)$$

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \qquad (+)$$

$$\underline{\frac{1}{w}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \qquad (-)$$

plyne: $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-\frac{1}{w}=\frac{2}{a}$,

odkud vyjádříme a:

$$\underline{\underline{a=\frac{2uvw}{uw+vw-uv}}}. \qquad \textbf{(5-9b)}$$

Z rovností:

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad (+)$$

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \qquad (-)$$

$$\underline{\frac{1}{w}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \qquad (+)$$

plyne: $\frac{1}{u}-\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{2}{b}$,

odkud vyjádříme b:

$$b=\frac{2uvw}{uv+vw-uw}. \qquad \textbf{(5-9c)}$$

Z rovností: $\frac{1}{u}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (–)

$\frac{1}{v}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ (+)

$\frac{1}{w}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ (+)

plyne: $-\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{2}{c}$,

odkud vyjádříme c:

$$c=\frac{2uvw}{uv+uw-vw}. \qquad \textbf{(5-9d)}$$

V našem případě máme u = 12 dní, v = 15 dní, w = 20 dní, potom z (5-9a-d) dostáváme

$$s=\frac{2uvw}{uv+uw+vw}=\frac{2\cdot12\cdot15\cdot20}{12\cdot15+12\cdot20+15\cdot20}=\underline{\underline{10}}\text{ dní;}$$

$$a=\frac{2uvw}{uw+vw-uv}=\frac{2\cdot12\cdot15\cdot20}{12\cdot20+15\cdot20-12\cdot15}=\underline{\underline{20}}\text{ dní;}$$

$$b=\frac{2uvw}{uv+vw-uw}=\frac{2\cdot12\cdot15\cdot20}{12\cdot15+15\cdot20-12\cdot20}=\underline{\underline{30}}\text{ dní;}$$

$$c=\frac{2uvw}{uv+uw-vw}=\frac{2\cdot12\cdot15\cdot20}{12\cdot15+12\cdot20-15\cdot20}=\underline{\underline{60}}\text{ dní.}$$

Zkouška:

1. pracovník …. sám vykoná práci za 20 dní …. za 1 den udělá $\frac{1}{20}$ práce,
2. pracovník …. sám vykoná práci za 30 dní …. za 1 den udělá $\frac{1}{30}$ práce,
3. pracovník …. sám vykoná práci za 60 dní …. za 1 den udělá $\frac{1}{60}$ práce,

1\. a 2. pracovník …. za 1 den udělají $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{1}{12}$ práce, celou práci udělají za 12 dní,

1\. a 3. pracovník …. za 1 den udělají $\frac{1}{20}+\frac{1}{60}=\frac{1}{15}$ práce, celou práci udělají za 15 dní,

2\. a 3. pracovník …. za 1 den udělají $\frac{1}{30}+\frac{1}{60}=\frac{1}{20}$ práce, celou práci udělají za 20 dní,

dohromady za 1 den udělají $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}=\frac{1}{10}$ práce, celou práci udělají za 10 dní.

Odpověď:

První pracovník by sám udělal práci za 20 dní, druhý sám za 30 dní, třetí sám za 60 dní, společně by ji všichni tři udělali za 10 dní.

<u>*Příklad* 5.3.4:</u>

Dělník A by sám provedl výkop pro vodovodní přípojku za 7 hodin, dělník B sám za 6 hodin. Když přibrali ještě dělníka C, byli společně hotovi už za 2 hodiny. Za jak dlouho by provedl výkop sám dělník C?

Řešení č.1: - *pomocí rovnice*

Dělník *A* by sám provedl za 1 hodinu $\frac{1}{7}$ výkopu,

dělník *B* by sám provedl za 1 hodinu $\frac{1}{6}$ výkopu,

dělník *C* by sám provedl za 1 hodinu $\frac{1}{x}$ výkopu,

všichni dělníci *A* by společně provedli za 1 hodinu $\frac{1}{2}$ výkopu,

potom platí

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2} \quad \Big| \cdot 42x$$

$$6x + 7x + 42 = 21x \quad \Big| - 13x$$

$$42 = 8x \quad \Big| : 8$$

$$\underline{\underline{x = 5{,}25}} \text{ h.}$$

Zkouška:

Dělník *A* provede za 2 hodiny $2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$ výkopu,

dělník *B* provede za 2 hodiny $2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ výkopu,

dělník *C* provede za 2 hodiny $2 \cdot \frac{4}{21} = \frac{8}{21}$ výkopu,

dohromady provedou $\frac{2}{7} + \frac{1}{3} + \frac{8}{21}$ = 1 výkop.

Odpověď:

Dělník *C* by sám provedl výkop za 5,25 dne.

Řešení č.2: - *pomocí modelu*

Vyjdeme ze vztahu (5-8d), kde a = 7, b = 6, s = 2, potom

$$c = \frac{abs}{ab - as - bs} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 2}{7 \cdot 6 - 7 \cdot 2 - 6 \cdot 2} = 5{,}25 \text{ dne.}$$

Zkouška a *odpověď* viz řešení č.1.

Příklad 5.3.5:

Dělník *A* i dělník *B* vykonají jistou práci každý za 36 hodin, dělník *C* vykoná tutéž práci sám za 30 hodin. Za kolik hodin vykonají tuto práci, budou-li pracovat společně?

Řešení:

Vyjdeme ze vztahu (5-8a), kde a = 36 h, b = 36 h, c = 30 h, potom

$$s = \frac{abc}{ab + ac + bc} = \frac{36 \cdot 36 \cdot 30}{36 \cdot 36 + 36 \cdot 30 + 36 \cdot 30} = \underline{\underline{11{,}25}} \text{ h.}$$

Zkouška:

Za 11 a čtvrt hodiny udělají dělníci společně $11{,}25 \cdot (\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{30})$ = 1 (práce).

Odpověď:

Společně vykonají dělníci práci za 11 hodin 15 minut.

Příklad 5.3.6:

Dělník *A* by sám vykonal určitou práci za 9 dní, dělník *B* by stejnou práci sám vykonal za 12 dní, dělník *C* by stejnou práci sám vykonal za 18 dní. Jak dlouho by každý pracoval sám, aby všichni vykonali stejnou práci a společně udělali určenou práci?

Řešení:

Aby všichni vykonali stejnou práci, musí každý dělník udělat třetinu práce. Z toho plyne, že každý bude pracovat třetinu doby, kterou potřebuje k tomu, aby sám vykonal určenou práci. První dělník bude pracovat 9 : 3 = 3 dny, druhý dělník bude pracovat 12 : 3 = 4 dny, třetí dělník bude pracovat 18 : 3 = 6 dní.

Zkouška:

Společně udělají všichni dělníci $3 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 6 \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ (práce).

Z výpočtu je jasné, že všichni tři dělníci udělají stejnou práci.

Odpověď:

Dělník *A* pracoval sám 3 dny, dělník *B* pracoval sám 4 dny a dělník *C* pracoval sám 6 dní.

5.4. <u>Skupina 4:</u> *„Neúplná práce tří subjektů“*

Úlohy obsahují zadání o společné práci tří subjektů. Alespoň jeden ze subjektů pracuje jen část doby společné práce. Počítáme dobu společné práce nebo dobu, za kterou společnou práci vykonají jednotlivé subjekty. Můžeme také počítat dobu, za kterou by dokončil společnou práci jeden ze subjektů.

<u>*Příklad* 5.4.1:</u>
První pracovník by společnou práci vykonal sám za 20 dní, druhý pracovník sám za 10 dní, třetí pracovník sám za 12 dní. Pracovali následovně: 1. den: 1., 2. a 3. pracovník; 2. den: 2. a 3. pracovník; 3., 4. a 5. den jen 3. pracovník; 6. den 1. a 3. pracovník; 7. den 1. a 2. pracovník. Dokončí práci všichni společně za 2 týdny (10 pracovních dní)? Dokončil by 1. pracovník zbylou práci do konce 2. týdne sám?

<u>*Řešení*:</u>
Obecně můžeme úlohu formulovat takto:
První pracovník by sám vykonal určitou práci za a dní, druhý pracovník sám za b dní, třetí pracovník sám za c dní. Nejdříve pracuje sám první pracovník p dní, potom druhý pracovník sám q dní, potom pracuje třetí pracovník sám r dní, potom pracují společně první a druhý pracovník u dní, potom pracují společně první a třetí pracovník v dní, potom pracují druhý a třetí pracovník w dní a nakonec práci dokončí všichni tři společně za s dní. Za jak dlouho bude práce vykonána? (Za jak dlouho dokončí práci 1. pracovník? . . . atd.)

Řešíme užitím modelu:

1. pracovník …. sám vykoná práci za a dní …. za 1 den udělá $\frac{1}{a}$ práce,

2. pracovník …. sám vykoná práci za b dní …. za 1 den udělá $\frac{1}{b}$ práce,

3. pracovník …. sám vykoná práci za c dní …. za 1 den udělá $\frac{1}{c}$ práce.

První pracovník pracuje nejdříve sám p dní, potom druhý pracovník sám q dní, potom třetí pracovník sám r dní, potom první a druhý pracovník u dní, potom první a třetí pracovník v dní, potom druhý a třetí pracovník w dní a nakonec všichni tři společně s dní (pořadí prací se může zaměnit), pak platí:

$$p\cdot\frac{1}{a}+q\cdot\frac{1}{b}+r\cdot\frac{1}{c}+u\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+v\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+w\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+s\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1 \quad \Big|\cdot abc$$

a dostáváme modelový vztah:

$$\mathbf{(ab+ac+bc)\cdot s+(ac+bc)\cdot u+(ab+bc)\cdot v+(ab+ac)\cdot w+bcp+acq+abr=abc} \quad \mathbf{(5\text{-}10)}$$

z toho můžeme postupně vyjádřit hodnoty:

- ***a*** – doba, za kterou udělá celou práci sám první pracovník,
- ***b*** – doba, za kterou udělá celou práci sám druhý pracovník,
- ***c*** – doba, za kterou udělá celou práci sám třetí pracovník,
- ***p*** – doba, kdy část práce udělá jen první pracovník,
- ***q*** – doba, kdy část práce udělá jen druhý pracovník,
- ***r*** – doba, kdy část práce udělá jen třetí pracovník,
- ***u*** – doba, kdy budou společně pracovat jen první a druhý pracovník,
- ***v*** – doba, kdy budou společně pracovat jen první a třetí pracovník,
- ***w*** – doba, kdy budou společně pracovat jen druhý a třetí pracovník,

s – doba, kdy pracují všichni tři pracovníci současně,
d – celková doba, za kterou je práce hotova.

Potom např:

$$\underline{\underline{s = \frac{abc - bcp - acq - abr - (ac+bc)\cdot u - (ab+bc)\cdot v - (ab+ac)\cdot w}{ab+ac+bc}}}\,; \qquad \textbf{(5-10a)}$$

nebo:

$$\underline{\underline{d = \frac{abc + (ab+ac)\cdot p + (ab+bc)\cdot q + (ac+bc)\cdot r + abu + acv + bcw}{ab+ac+bc}}}\,; \qquad \textbf{(5-10b)}$$

nebo:

$$\underline{\underline{p = a - s - u - v - \frac{a}{c}\cdot(s+r+v+w) - \frac{a}{b}\cdot(s+q+u+w)}}\,; \qquad \textbf{(5-10c)}$$

atd.

V našem případě máme a = 20, b = 10, c = 12, p – počítáme, q = 0, r = 3, u = 1, v = 1, w = 1, s = 1 a po dosazení do (5-10c) dostáváme

$$p = 20 - 1 - 1 - 1 - \frac{20}{12}\cdot(1+3+1+1) - \frac{20}{10}\cdot(1+0+1+1) = 1.$$

Z toho plyne, že 1. pracovník sám dokončí práci za 1 den a práce bude hotova celkem za 8 dní, bude tedy dokončena 2. týden. Samozřejmě budou-li dokončovat práci všichni tři, bude hotova dříve a termín tak bude také splněn.

Zkouška:

1. pracovník pracuje celkem 4 dny a udělá $4\cdot\frac{1}{20} = \frac{1}{5}$ práce,
2. pracovník pracuje celkem 3 dny a udělá $3\cdot\frac{1}{10} = \frac{3}{10}$ práce,
3. pracovník pracuje celkem 6 dní a udělá $6\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2}$ práce,

dohromady udělají $\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2} = 1$, tj. celou práci.

Zkoušku můžeme také udělat tak, že spočteme, jak dlouho budou dokončovat práci společně

$$s = \frac{abc - bcp - acq - abr - (ac+bc)\cdot u - (ab+bc)\cdot v - (ab+ac)\cdot w}{ab+ac+bc} =$$

$$= \frac{20\cdot10\cdot12 - 0 - 0 - 20\cdot10\cdot3 - (20\cdot12+10\cdot12)\cdot1 - (20\cdot10+10\cdot12)\cdot1 - (20\cdot10+20\cdot12)\cdot1}{20\cdot10+20\cdot12+10\cdot12} =$$

$$= \frac{680}{560} = 1\tfrac{3}{14}.$$

Protože už společně 1 den pracovali, zbývá pracovat společně ještě $\frac{3}{14}$ dne. Tuto práci by 1. pracovník dokončil právě za 1 den.

Také můžeme zkoušku provést tím, že ověříme celkovou dobu práce (tj. 8 dní, p = 1).

$$d = \frac{abc + (ab+ac)\cdot p + (ab+bc)\cdot q + (ac+bc)\cdot r + abu + acv + bcw}{ab+ac+bc} =$$

$$= \frac{20\cdot10\cdot12 + (20\cdot10+20\cdot12)\cdot1 + 0 + (20\cdot12+10\cdot12)\cdot3 + 20\cdot10\cdot1 + 20\cdot12\cdot1 + 10\cdot12\cdot1}{20\cdot10+20\cdot12+10\cdot12} =$$

$$= \frac{4\,480}{560} = 8 \text{ dní}.$$

Odpověď:

První pracovník dokončí sám práci za 1 den, společně by ji dokončili za $\frac{3}{14}$ dne. V obou případech stihnou udělat požadovanou práci dříve než za dva týdny.

Příklad 5.4.2:
Rourou *A* se naplní bazén za 10 hodin, rourou *B* za 12 hodin a rourou *C* za 15 hodin. Za jakou dobu se naplní $\frac{2}{3}$ bazénu, budou-li současně otevřeny tři roury najednou?

Řešení: - pomocí modelu
Vyjdeme z modelového vztahu (5-6a), kde $s = \dfrac{abc}{ab+ac+bc}$.
Uvažujeme-li, že všichni pracují společně *h* hodin, pak za tuto dobu udělají
$\dfrac{h}{s} = \dfrac{h\cdot(ab+ac+bc)}{abc}$ práce, tuto hodnotu označme jako *k* (je to část práce, která je již vykonaná. Potom platí

$$k = \frac{h\cdot(ab+ac+bc)}{abc} \qquad \textbf{(5-11)}$$

a vyjádříme *h*.

$$h = \frac{kabc}{ab+ac+bc} \ . \qquad \textbf{(5-12)}$$

Pro konkrétní řešení vyjdeme ze vztahu (modelu) (5-12), kde a = 10 h, b = 12 h, c = 15 h, $k = \frac{2}{3}$. Dostáváme, že $\frac{2}{3}$ bazénu se naplní za

$$h = \frac{kabc}{ab+ac+bc} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 10\cdot 12\cdot 15}{10\cdot 12+10\cdot 15+12\cdot 15} = \frac{1\,200}{450} = \frac{8}{3} = 2\tfrac{2}{3} \text{ hodiny.}$$

Zkouška:
Jsou-li otevřeny všechny tři přítoky najednou, naplní se celý bazén podle (5-6a) za

$$s = \frac{abc}{ab+ac+bc} = \frac{10\cdot 12\cdot 15}{10\cdot 12+10\cdot 15+12\cdot 15} = \frac{1\,800}{450} = 4 \text{ hodiny.}$$

$\frac{2}{3}$ bazénu se naplní za $4\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ hodiny.
Tento postup zkoušky je možné považovat za jiný způsob řešení.
Odpověď:
Dvě třetiny bazénu se naplní všemi třemi rourami současně za $2\frac{2}{3}$ hodiny.

Příklad 5.4.3:
Dělník *A* by vykonal určenou práci sám za 12 hodin, dělník *B* by tutéž práci vykonal sám za 15 hodin a dělník *C* by tutéž práci vykonal za 20 hodin. Nejprve pracují všichni tři společně 4 hodiny, potom jsou dělníci *A* a *B* odvoláni na jinou práci a zbylou práci dokončí sám dělník *C*. Za jak dlouho dělník *C* dokončí zbylou práci?

Řešení:
Vyjdeme ze vztahu (5-10a), kde $p = q = u = v = w = 0$, potom

$$s = \frac{abc - abr}{ab+ac+bc} . \qquad \textbf{(5-13)}$$

Dosadíme-li a = 12 h, b = 15 h, c = 20 h, s = 4 h, dostáváme

$$4 = \frac{12\cdot 15\cdot 20 - 12\cdot 15\cdot r}{12\cdot 15+12\cdot 20+15\cdot 20}$$

$$4 = \frac{3\,600 - 180r}{720} \quad \Big|\cdot 720$$

$$2\,880 = 3\,600 - 180r \quad \Big|\, + 180r - 2\,880$$
$$180r = 720 \quad \Big|\, : 180$$
$$\underline{r = 4} \text{ [hodiny]}$$

Zkouška:
Dělníci A a B pracují 4 dny, dělní C 8 dní, celkem vykonají $4 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{15} + 8 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} + \frac{2}{5} =$
$= 1$ (práce).
Odpověď:
Dělník C by sám dokončil práci za 4 dny.

Příklad 5.4.4:
V tepelné elektrárně je vytvořena určitá zásoba uhlí. Bude-li v činnosti pouze 1. elektrárenský blok, vystačí zásoba uhlí na 10 dní. Bude-li v činnosti jen 2. blok, vystačí zásoba na 16 dní, bude-li v činnosti jen 3. blok, vystačí zásoba na $26\frac{2}{3}$ dne. Určete, na kolik dní vystačí zásoba uhlí, budou-li v činnosti současně všechny tři elektrárenské bloky, víme-li, že 1. blok je v činnosti pouze polovinu dne, 2. blok pouze pětinu dne a 3. blok celý den.

Řešení:
Vyjdeme ze vztahu (5-10a) $s = \dfrac{abc}{ab + ac + bc}$, kde a je doba práce jen 1. bloku, b je doba práce jen 2. bloku a c doba práce jen 3. bloku. Protože 1. blok nepracuje celý den, ale jen poměrnou část dne, označíme si tento poměr j ($j = \frac{1}{2}$), poměrnou denní část práce 2. bloku označíme k ($k = \frac{1}{5}$) a poměrnou část práce 3. bloku označíme l ($l = 1$).
Protože 1. blok pracuje jen polovinu dne, vystačila by zásoba uhlí pro tento blok na práci po dobu dvakrát delší, tj. ve vzorci nahradíme a hodnotou $2a$, obecně a nahradíme hodnotou $\dfrac{a}{j}$.
Stejně budeme postupovat pro hodnoty b, c, celkovou dobu práce označíme místo s písmenem d (všechny tři bloky nebudou pracovat po celou dobu společně) a dostáváme

$$d = \frac{\frac{a}{j} \cdot \frac{b}{k} \cdot \frac{c}{l}}{\frac{a}{j} \cdot \frac{b}{k} + \frac{a}{j} \cdot \frac{c}{l} + \frac{b}{k} \cdot \frac{c}{l}}.$$

Po rozšíření zlomku výrazem jkl dostáváme

$$\underline{\underline{d = \frac{abc}{abl + ack + bcj}}}. \qquad \textbf{(5-14)}$$

Je-li $a = 10$, $b = 16$, $c = 26\frac{2}{3} = \frac{80}{3}$, $j = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{5}$, $l = 1$, potom

$$d = \frac{abc}{abl + ack + bcj} = \frac{10 \cdot 16 \cdot \frac{80}{3}}{10 \cdot 16 \cdot 1 + 10 \cdot \frac{80}{3} \cdot \frac{1}{5} + 16 \cdot \frac{80}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 10 \text{ dní}$$

Zkouška:
Za 10 dní spotřebuje 1. blok $10 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ zásoby uhlí, za 10 dní spotřebuje 2. blok $10 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{8}$ zásoby uhlí, za 10 dní spotřebuje 3. blok $10 \cdot \frac{3}{80} = \frac{3}{8}$ zásoby uhlí, celkem za 8 dní spotřebují všechny bloky $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = 1$ zásobu uhlí.
Odpověď:
Budou-li v činnosti všechny tři bloky v daném režimu, vystačí zásoba uhlí na 10 dní.

5.5. Skupina 5: *„Práce čtyř a více subjektů“*

Úlohy obsahují zadání o společné práci čtyř a více subjektů. Subjekty mohou pracovat po celou dobu společné práce nebo jen část doby společné práce. Počítáme dobu společné práce nebo dobu jen části práce některého ze subjektů.

Příklad 5.5.1:
Při kontrole práce bylo zjištěno, že David splní daný úkol za 3 h 20 min, Jan za 3 h, Marek za 3 h 30 min a Petr za 2 h 45 min. Za jakou dobu splní daný úkol, budou-li pracovat společně
a) David a Petr,
b) David, Jan a Petr,
c) všichni čtyři?

Řešení:
David sám splní daný úkol za $a = 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ hodiny, Jan sám za b = 3 h, Marek sám za $c = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ h, Petr sám za $d = 2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$ h.

A) Vyjdeme ze vztahu (5-1a), kde známe veličiny a, d, proto

$$s = \frac{ad}{a+d}$$

a kde $a = \frac{10}{3}$ h, $d = \frac{11}{4}$ h. Dostáváme

$$s = \frac{\frac{10}{3}\cdot\frac{11}{4}}{\frac{10}{3}+\frac{11}{4}} = \frac{110}{73} \doteq 1{,}507 \text{ h} \doteq 1 \text{ h } 30 \text{ min.}$$

Zkouška:
Asi za 1 h 30 min udělají David a Petr $\frac{3}{2}\cdot(\frac{3}{10}+\frac{4}{11}) = \frac{3}{2}\cdot\frac{73}{110} = \frac{219}{220} \doteq 0{,}995 \doteq 1$.

B) Vyjdeme ze vztahu (5-8a), kde známe veličiny a, b, d, proto

$$s = \frac{abd}{ab+ad+bd}$$

a kde $a = \frac{10}{3}$ h, b = 3 h, $d = \frac{11}{4}$ h. Dostáváme

$$s = \frac{\frac{10}{3}\cdot 3\cdot\frac{11}{4}}{\frac{10}{3}\cdot 3+\frac{10}{3}\cdot\frac{11}{4}+3\cdot\frac{11}{4}} = \frac{330}{328} \doteq 1{,}003 \text{ h} \doteq 1 \text{ h.}$$

Zkouška:
Asi za 1 h udělají David, Jan a Petr $1\cdot(\frac{3}{10}+\frac{1}{3}+\frac{4}{11}) = \frac{329}{330} \doteq 0{,}997 \doteq 1$.

C) Pro všechny čtyři platí

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} = \frac{1}{s}. \qquad \textbf{(5-15)}$$

Do vztahu (5-15) můžeme již dosadit nebo jej můžeme upravit a dostáváme

$$s = \frac{abcd}{abc+abd+acd+bcd}. \qquad \textbf{(5-15a)}$$

Je-li $a = \frac{10}{3}$ h, b = 3 h, $c = \frac{7}{2}$ h, $d = \frac{11}{4}$ h. Dostáváme ze vztahu (5-15)

$$\frac{3}{10}+\frac{1}{3}+\frac{2}{7}+\frac{4}{11} = \frac{1}{s}$$

$$\frac{2963}{2310} = \frac{1}{s} \quad\rightarrow\quad s = \frac{2310}{2963} \doteq 0{,}780 \text{ h} \doteq 47 \text{ min.}$$

Stejně můžeme vyjít ze vztahu (5-15a).

Zkouška:
Za 47 min (asi $\frac{39}{50}$ h) udělají všichni $\frac{39}{50} \cdot \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{4}{11}\right) = \frac{39}{50} \cdot \frac{2963}{2310} \doteq 1{,}0005 \doteq 1$.
Odpověď:
David a Petr splní úkol asi za 1 h 30 min, David, Jan a Petr splní úkol asi 1 h, všichni čtyři pak splní úkol asi za 47 min.

5.6. <u>Skupina 6:</u> *„Různé druhy práce“*

Úlohy obsahují zadání o společné práci subjektů. Alespoň jeden ze subjektů „pracuje“ tak, že společné práce nepřibývá, ale ubývá. Počítáme dobu společné práce nebo dobu jen části práce některého ze subjektů. Do této skupiny také patří Newtonova úloha.

<u>*Příklad* 5.6.1:</u> (*Naplnění splavu*)
U splavu jsou tři stavidla, dvě na přítok, jedno na odtok. Je-li splav prázdný, může být vytažením prvního stavidla naplněn za $1\frac{1}{4}$ dne, druhým za $1\frac{3}{4}$ dne; je-li plný, může být třetím stavidlem vypuštěn za $\frac{3}{4}$ dne. Za jak dlouho by se prázdný splav naplnil, kdyby byla všechna tři stavidla vytažena?

<u>*Řešení* č. 1:</u>
Za 1 den nateče: 1. stavidlem .... $1 : 1\frac{1}{4} = \frac{4}{5}$ splavu,
2. stavidlem .... $1 : 1\frac{3}{4} = \frac{4}{7}$ splavu,
oběma stavidly ..... $\frac{4}{5} + \frac{4}{7} = \frac{48}{35}$ splavu.
Za 1 den vyteče 3. stavidlem .... $1 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$ splavu.
Celkem za 1 den nateče (vyteče) ...... $\frac{48}{35} - \frac{4}{3} = +\frac{4}{105}$ splavu.
Nateče-li za 1 den $\frac{4}{105}$ splavu, nateče celý splav za $\frac{105}{4} = \underline{\underline{26{,}25}}$ dní.
Zkouška:
1. stavidlem nateče za 1 den ..... $\frac{4}{5}$ splavu, za 26,25 dní ..... $\frac{105}{4} \cdot \frac{4}{5} = 21$ splavů,
2. stavidlem nateče za 1 den ..... $\frac{4}{7}$ splavu, za 26,25 dní ..... $\frac{105}{4} \cdot \frac{4}{7} = 15$ splavů,
1. stavidlem vyteče za 1 den ..... $\frac{4}{3}$ splavu, za 26,25 dní ..... $\frac{105}{4} \cdot \frac{4}{3} = 35$ splavů,

tedy celkem nateče: 21 + 15 – 35 = 1 splav.
Odpověď:
Kdyby byla otevřena všechna tři stavidla, prázdný splav by se naplnil za 26 a čtvrt dne.

<u>*Řešení* č. 2:</u>
Označme si x počet dní, za které se naplní prázdný splav, budou-li otevřena všechna tři stavidla. Pak můžeme psát:
Za 1 den nateče: 1. stavidlem .... $1 : 1\frac{1}{4} = \frac{4}{5}$ splavu,
2. stavidlem .... $1 : 1\frac{3}{4} = \frac{4}{7}$ splavu,
za 1 den vyteče 3. stavidlem .... $1 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$ splavu,
za 1 den nateče do prázdného splavu ...... $\frac{1}{x}$ jeho objemu.
Platí tedy rovnice (uvažujeme-li, kolik se naplní za 1 den):

$$\frac{4}{5} + \frac{4}{7} - \frac{4}{3} = \frac{1}{x} \quad \Big| \cdot 105x$$

$$84x + 60x - 140x = 105$$

$$4x = 105 \quad \Big| : 4$$

$$x = \frac{105}{4} = \underline{\underline{26\tfrac{1}{4}}} \text{ dne.}$$

Zkouška a *odpověď* - viz řešení č. 1.

Řešení č. 3:
Označme si x počet dní, za které se naplní prázdný splav, budou-li otevřena všechna tři stavidla. Pak můžeme psát:

Za 1 den nateče: 1. stavidlem .... $1 : 1\frac{1}{4} = \frac{4}{5}$ splavu,

2. stavidlem .... $1 : 1\frac{3}{4} = \frac{4}{7}$ splavu,

za 1 den vyteče 3. stavidlem .... $1 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$ splavu.

Platí tedy rovnice (uvažujeme-li,že se splav naplní za x dní) :

$$\tfrac{4}{5}\cdot x + \tfrac{4}{7}\cdot x - \tfrac{4}{3}\cdot x = 1 \quad \Big|\ \cdot 105$$
$$4x = 105 \quad \Big|\ : 4$$
$$x = \underline{\underline{26{,}25}} \text{ dní.}$$

Zkouška a *odpověď* - viz řešení č. 1.

Řešení č. 4: - *obecný model*
Označme si s počet dní, za které se naplní prázdný splav, budou-li otevřena všechna tři stavidla společně. Pak můžeme psát:

Za 1 den nateče: 1. stavidlem .... $\frac{1}{a}$ splavu,

2. stavidlem .... $\frac{1}{b}$ splavu,

za 1 den vyteče 3. stavidlem .... $\frac{1}{c}$ splavu.

Platí tedy rovnice (uvažujeme-li,že se splav naplní za s dní) :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{s} \quad \Big|\ \cdot abcs$$
$$bcs + acs - abs = abc$$
$$(ac + bc - ab)\cdot s = abc \quad \Big|\ : s$$
$$\underline{\underline{s = \frac{abc}{ac+bc-ab}}}. \qquad \textbf{(5-16)}$$

Pro konkrétní hodnoty $a = 1\frac{1}{4}$ dne, $b = 1\frac{3}{4}$ dne, $c = \frac{3}{4}$ dne dostáváme

$$s = \frac{abc}{ac+bc-ab} = \frac{\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{4}} = \underline{\underline{26{,}25}} \text{ dní.}$$

Zkouška a *odpověď* - viz řešení č. 1.

Příklad 5.6.2:
Bazén se naplní jedním přítokem za 48 hodin, druhým za 56 hodin. Jestliže jsou oba přítoky uzavřeny, bazén se vyprázdní odpadovým otvorem za 42 hodin. V případě, že jsou všechny otvory otevřené (oba přítoky i odpad), nateče do bazénu za 63 hodin 900 m^3 vody. Jaký je objem bazénu? (Předpokládáme, že rychlost přítoku i odtoku vody se s časem nemění.)

Řešení č. 1:
Vyjdeme ze vztahu (5-16), kde a = 48 h, b = 56, c = 42, potom celý bazén nateče (jsou-li otevřeny všechny otvory) za

$$s = \frac{abc}{ac+bc-ac} = \frac{48\cdot 56\cdot 42}{48\cdot 42 + 56\cdot 42 - 48\cdot 56} = \frac{112\ 896}{1680} = 67{,}2 \text{ h.}$$

Protože za 63 hodin nateklo do bazénu 900 m^3 vody, za 67,2 hodiny nateče (a tím se bazén naplní) $\frac{67{,}2}{63}\cdot 900$ = 960 m^3 vody.

Řešení č. 2: - {podle [46]}

1. přítokem nateče za 1 hodinu . . . . . $\frac{1}{48}$ bazénu,

2. přítokem nateče za 1 hodinu . . . . . $\frac{1}{56}$ bazénu,

odtokem vyteče za 1 hodinu . . . . $\frac{1}{42}$ bazénu,

jsou-li všechny otvory otevřené nateče za 63 hodin do bazénu 900 m^3 vody.
Objem bazénu je x m^3

$$63\cdot\frac{1}{48}x+63\cdot\frac{1}{56}x-63\cdot\frac{1}{42}x=900$$

$$\frac{63x}{48}+\frac{63x}{56}-\frac{63x}{42}=900 \quad \Big|\cdot 48\cdot 56\cdot 42$$

$$148\,176x + 127\,008x - 169\,344x = 101\,606\,400$$

$$105\,840x = 101\,606\,400$$

$$x = 960 \text{ m}^3$$

Výsledek: Objem bazénu je 960 m^3.

Příklad 5.6.3:
Tři krávy spasou za 4 dni trávu na louce mající 150 m^2, a to nejen trávu, která tam již je, ale i tu, která za tyto 4 dny nově vyrostla; podobně spase 5 krav za 6 dní 300 m^2 louky. Za kolik dní spase 7 krav trávu na stejné louce výměry 500 m^2?

Řešení:
Vyjdeme ze vztahu (2-3), (viz disertační práce):

$$\underline{\underline{\frac{m_i\cdot(1+t_i\cdot y)}{t_i\cdot x_i}=\frac{m_k\cdot(1+t_k\cdot y)}{t_k\cdot x_k}}} \quad \text{, kde}$$

m_i, m_k je spásaná plocha v jednotlivých případech,

t_i, t_k je doba spásání v jednotlivých případech,

x_i, x_k je počet ks krav v jednotlivých případech,

y je množství trávy, která naroste za jednotku času.

Pomocí tohoto vzorce je možné řešit předchozí úlohu následujícím způsobem.

Zadání: 150 m^2 spasou .... 3 krávy za 4 dny,
300 m^2 spase .... 5 krav za 6 dní,
500 m^2 spase .... 7 krav za x dní.

Použijeme vzorec: $\frac{m_1(1+t_1\cdot y)}{t_1\cdot x_1}=\frac{m_2(1+t_2\cdot y)}{t_2\cdot x_2}$, do kterého dosadíme,

potom $\frac{150\cdot(1+4y)}{4\cdot 3}=\frac{300\cdot(1+6y)}{6\cdot 5}$ a vypočteme y:

$y = \frac{1}{4}$.

Znovu použijeme vzorec: $\dfrac{m_0(1+t_0 \cdot y)}{t_0 \cdot x_0} = \dfrac{m_2(1+t_2 \cdot y)}{t_2 \cdot x_2}$, opět dosadíme, $x_0 = x$,

$\dfrac{500 \cdot (1+x \cdot \frac{1}{4})}{x \cdot 7} = \dfrac{300 \cdot (1+6 \cdot \frac{1}{4})}{6 \cdot 5}$ a vypočteme *x*:

$x = 10$.

Druhou louku o ploše 500 m^2 spase 7 krav za 10 dní.

5.7. <u>Skupina 7:</u> *„Specifické druhy práce“*

Úlohy obsahují zadání o společné práci subjektů. V úlohách se mohou vyskytovat větší skupiny subjektů. Jedná se o specifické druhy společné práce nebo o úlohy, které nelze zařadit do předchozích skupin. Často se tyto úlohy řeší úměrou.

<u>*Příklad* 5.7.1:</u>
Pět stejně zručných zedníků postavilo polovinu zdi za 14 dní. Aby byl splněn plánovaný termín, má být zbývající část postavena za 6 dní. Kolik dalších zedníků bude nutno na stavbu přidělit?

<u>*Řešení*:</u>
Ptáme se kolik dělníků by postavilo polovinu zdi za 6 dní, když stejnou práci udělalo 5 zedníků za 14 dní. Úlohu budeme řešit pomocí nepřímé úměrnosti, hledaný počet zedníků označíme *x*. Potom

$$\uparrow \begin{array}{l} 5\,d. \ldots\ldots 14\,dní \\ x\,d. \ldots\ldots 6\,dní \end{array} \downarrow$$

$$\frac{x}{5} = \frac{14}{6} \quad \rightarrow \quad x = 11\tfrac{2}{3}.$$

Protože 5 dělníků již na stavbě pracuje, musíme přidat $11\frac{2}{3} - 5 = 6\frac{2}{3} \doteq 7$ dělníků. Znamená to, že přidáním 7 dělníků budou se zbývající prací hotovi už během posledního, šestého dne.
Zkouška:
5 dělníků odpracuje ze 14 dní celkem $5 \cdot 14 = 70$ směn (a postaví polovinu zdi). 12 dělníků odpracuje za 6 dní $12 \cdot 6 = 72$ směn a polovinu zdi postaví již během 6 dne. Plánovaný termín bude splněn.
Odpověď:
Aby byl plánovaný termín splněn, je třeba na stavbu zdi přidat po 14 dnech ještě 7 zedníků.

<u>*Příklad* 5.7.2:</u>
Aby se požala určitá rozloha pozemků v 7 dnech, bylo by třeba 92 lidí; kolika lidí by bylo třeba, aby táž práce byla vykonána ve 4 dnech?

<u>*Řešení*:</u>
Vztah mezi počtem lidí na práci a dobou práce je nepřímo úměrný, proto budeme úlohu řešit úměrou (trojčlenkou).

$$\uparrow \begin{array}{l} 92\,lidí \ldots\ldots\ldots 7\,dní \\ x\;\;lidí \ldots\ldots\ldots 4\,dny \end{array} \downarrow$$

$$\frac{x}{92} = \frac{7}{4} \quad \Big| \cdot 92$$

$$\underline{\underline{x = 161}} \text{ lidí.}$$

Zkouška:
V prvním případě odpracovali $92 \cdot 7 = 644$ směn, v druhém případě $161 \cdot 4 = 644$ směn.
Odpověď:
Aby práce byla vykonána ve 4 dnech, bylo by třeba 161 lidí.

Příklad 5.7.3:
Jestliže 35 dělníků při 8 hod. práci denní vykopá za 24 dní příkop 288 m dlouhý a 3 m široký, za kolik dní zhotoví 20 dělníků při 10 hod. práci denní příkop téže hloubky, dlouhý 450 m, široký 2 m?

Řešení:
V prvním případě je denní výkon $\frac{288\cdot 3}{35\cdot 8\cdot 24}=\frac{864}{6\ 720}=\frac{9}{70}$ m^2/h, v druhém případě je denní výkon (označíme-li neznámý počet dělníků x) $\frac{450\cdot 2}{20\cdot 10\cdot x}=\frac{900}{200x}=\frac{9}{2x}$ m^2/h. Protože předpokládané výkony jsou stejné musí platit

$$\frac{9}{70}=\frac{9}{2x} \quad \Big| \cdot \frac{70}{9}x$$

$\underline{\underline{x = 35}}$ dní.

Zkoušku můžeme udělat pomocí úměry.
Odpověď:
V druhém případě budou dělníci pracovat 35 dní.

6. Slovní úlohy o věku a letopočtu

6.1. Skupina 1: *„Věk jednoho člověka"*

V textu jsou údaje o letopočtu nebo o věku jednoho člověka, mohou zde být též údaje o *věku jednoho člověka, které se váží ke konkrétnímu letopočtu. Hledáme buď popsaný letopočet nebo věk člověka, eventuálně obojí.*

Příklad 6.1.1:
(*Diofantův epitaf*)
Prach Diofantův v hrobě je skryt, pohleď, i kámen moudrým uměním (= matematicky) prozradí zemřelého věk: Z vůle bohů byl po šestinu života dítětem a za další polovinu šestiny se dočkal chmýří na lících. Jak minula sedmina, oženil se s milovanou svojí, pět let s ní prožil, než syna dočkal se mudrc. Jen do poloviny svého věku se otec se synem těšil, brzy mohyla dítě otci skryla. Dvakrát dva roky otec oplakával syna, než po těch letech dočkal se svého smutného konce.
Tento epitaf, pokud je věrohodný, je to jediné, co víme o Diofantově životě. Je obsažen v tzv. *Palatinské antologii* a pochází z pera Metrodora (6. stol.). Jak dlouhý byl Diofantův život?

Jiná verze:
O životě vynikajícího matematika starověku – o Diofantovi – se dochovalo jen velmi málo zpráv. Vše co o něm víme, pochází z nápisu na jeho náhrobku. Nápis má tvar matematické úlohy. Poutníče! Zde odpočívá popel Diofantův. A čísla poví, je to zázrak, jak dlouhý byl jeho život. Šestina života patřila krásnému dětství. Ještě dvanáctina života uběhla, než se jeho brada pokryla chmýřím. Sedminu života strávil v bezdětném manželství. Uplynulo dalších pět let a radoval se z narození krásného syna, toho, kterému Osud vyměřil veselý a zářící život na této Zemi, ale dlouhý jen polovinu toho co otci. A v hlubokém smutku ukončil starý muž svou pouť zde na Zemi, čtyři roky po ztrátě syna.
Řekni, jak dlouho žil Diofantos, než ho zastihla smrt.

Řešení č. 1:
Označíme-li si věk, kterého se Diofantos dožil ..... x, potom dostáváme:

dětství .... $\frac{1}{6}x$,
chmýří na bradě .... $\frac{1}{12}x$,
svatba .... $\frac{1}{7}x$,
narození syna .... 5 let,
život synův .... $\frac{1}{2}x$,
poslední etapa .... 4 roky.

Z těchto údajů plyne rovnice:

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=84,$$
$$\frac{75}{84}x=75,$$
$$x=84.$$

Zkouška:

dětství .... $\frac{1}{6}x$ = 14 let,
chmýří na bradě .... $\frac{1}{12}x$ = 7 let,

svatba .... $\frac{1}{7}x$ = 12 let,
narození syna .... 5 let,
život synův .... $\frac{1}{2}x$ = 42 let,
poslední etapa .... 4 roky.
celkem .... 14 + 7 + 12 + 5 + 42 + 4 = 84 let.

Diofantos se dožil 84 let.

Řešení č. 2:
Diofantos byl dítě ..... $\frac{1}{4}$ života, narostly mu vousy za ..... $\frac{1}{12}$ života, oženil se za ..... $\frac{1}{7}$ života, jeho syn žil ..... $\frac{1}{2}$ jeho života. Tato období tvořila $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2}=\frac{75}{84}$ délky jeho života. Potom 9 let (5 + 4) tvořilo $\frac{9}{84}$ Diofantova života a celý věk byl 84 let.
Zkouška – viz řešení č. 1.

Příklad 6.1.2:
Tři sedminy významného letopočtu zvětšeny o 37 let jsou o 100 let menší než polovina toho roku. Který je to rok?

Řešení:
Označíme-li si onen význačný letopočet, dostáváme rovnici

$$\frac{3}{7}x+37=\frac{1}{2}+-100,$$

jejímž řešením je x = 1 918.
Zkouška:
Tři sedminy významného letopočtu zvětšeny o 37 let je $\frac{3}{7}\cdot 1918+37=859$.
Polovina letopočtu je $\frac{1}{2}\cdot 1\,918=959$.
Rozdíl je 959 – 859 = 100.
Odpověď:
Význačný letopočet je rok 1 918.

Příklad 6.1.3:
Za 6 roků bude Jan dvakrát starší, než byl před šesti lety. Kolik je mu let?

Řešení:
Označíme-li si současný Janův věk x, dostáváme lineární rovnici

$$x + 6 = 2\cdot(x-6),$$

jejímž řešením je x = 18.
Zkouška:
Věk Jana před 6 lety: 18 – 6 = 12 let; věk Jana za 6 let: 18 + 6 = 24 let; podíl věků: 24 : 12 = 2.
Odpověď:
Janovi je 18 let.

Příklad 6.1.4:
Když se Petra ptali, kolik je mu let, odpověděl: za deset roků budu dvakrát tak starý, jak jsem byl před čtyřmi roky. Kolik má let?

Řešení:
Označíme-li si současný Petrův věk x, dostáváme lineární rovnici

$$x + 10 = 2 \cdot (x - 4),$$

jejímž řešením je $x = 18$.
Zkouška:
Věk Petr před 4 lety: 18 – 4 = 14 let; věk Petra za 10 let: 18 + 10 = 28 let; podíl věků: 28 : 14 = 2.
Odpověď:
Janovi je 18 let.

Příklad 6.1.5:
Hrabě de la Fère žil prvních 27 let v sídle svých rodičů, třetinu života prožil na cestách po Evropě, pětinu života strávil účastí na dvou křížových výpravách a zbytek, šestinu života, dožil na svém rodném sídle. Kolika let se dožil?

Řešení:
Věk hraběte musí být násobkem čísel 3, 5 a 6. Nejmenším společným násobkem těchto čísel je 30, dalšími násobky jsou 60, 90, … Z těchto násobků musíme vybrat ten, který dává v první fázi života hraběte počet let 27.

část:	**30**	**60**	**90**	**120**	**. . .**
třetina:	10	20	30	40	. . .
pětina:	6	12	18	24	. . .
šestina:	5	10	15	20	. . .
zbytek:	9	18	27	36	. . .

Další hodnoty již nepřicházejí v úvahu (zbytek se stále zvětšuje; věk hraběte by byl příliš vysoký). Proto řešením je 90 let. Za zkoušku můžeme považovat vyhledání správného zbytku.
Odpověď:
Hrabě se dožil úctyhodného věku 90 let.

Příklad 6.1.6:
Dědovi Lebedovi není méně než 50 ani více jak 80 let. Měl několik dětí, samé syny. Každý ze synů má tolik dětí, kolik bratrů. Letos má děda Lebeda tolik let, kolik má potomků (synů a vnoučat). Kolik let je dědovi Lebedovi?

Řešení:
Označme si x počet synů dědy Lebedy. Potom počet bratrů je $(x - 1)$ a stejně tak je to počet dětí každého ze synů. Počet vnoučat dědy Lebedy je tedy $x \cdot (x - 1) = x^2 - x$. Věk dědy Lebedy je roven počtu potomků (synů a vnoučat), což je

$$x + x^2 - x = x^2.$$

Věk dědy Lebedy je druhá mocnina přirozeného čísla. Tato mocnina není menší než 50 a větší než 80. Tomuto požadavku vyhovuje pouze číslo 64.
Zkouška:
Protože $x^2 = 64$, je $x = 8$. Děda Lebeda má 8 synů a každý syn má 7 dětí. Celkem má děda Lebeda $8 \cdot 7 = 56$ vnoučat. Všech potomků má 8 + 56 = 64, což je jeho věk.
Odpověď:
Dědovi Lebedovi je 64 let.

6.2. Skupina 2: *„Věk dvou lidí“*

V textu jsou údaje o věku dvou lidí. Údaje jsou buď absolutní nebo mohou být dány vztahy mezi věkem obou osob, eventuelně se údaje váží ke konkrétnímu letopočtu. Úkolem je určit věk obou lidí nebo jednoho z nich.

Příklad 6.2.1:
Roku 1 900 byl Petr třikrát starší než Pavel; roku 1 912 je Petr o polovičku starší než Pavel. Udejte jejich věk!

Řešení:
Označme si věk Pavla v r. 1 900 – x. Potom věk Petra v tomto roce je $3x$.
Věk Pavla v r. 1 912 je $x + 12$, věk Petra je $3x + 12$.
Ze vztahu pro věk obou v r. 1912 vyplývá:

$$3x + 12 = \tfrac{3}{2}\cdot(x + 12) \quad \Big| \cdot 2$$
$$6x + 24 = 3x + 36 \quad \Big| - 3x - 24$$
$$3x = 12 \quad \Big| : 3$$
$$\underline{\underline{x = 4}}\,,$$

potom věk Petra v r. 1912 je 24 let, věk Pavla 16 let.
Zkouška:
Rok 1900: věk Petra je $3\cdot 4 = 12$ let, věk Pavla 4 roky; jejich poměr je $12 : 4 = 3$.
Rok 1912: věk Petra je 24 let, věk Pavla 16 let, jejich rozdíl je $24 - 16 = 8$, což je polovina věku Pavla.
Odpověď:
Petrovi je v r. 1912 24 let, Pavlovi 16 let.

Příklad 6.2.2:
Marii je 24 let. Je dvakrát tak stará jako byla Anna, když Marii bylo tolik let, kolik je dnes Anně. Jak je stará Anna?

Řešení:
Když bylo Marii 24 let, bylo Anně x let;
když bylo Marii x let, bylo Anně 12 let;
rozdíl jejich věků je stále stejný, proto platí

$$24 - x = x - 12 \quad \Big| + x + 12$$
$$36 = 2x \quad \Big| : 2$$
$$\underline{\underline{x = 18}}$$

Zkouška:
Když bylo Marii 18 let, bylo Anně 12 let (polovina z 24); Marie je o 6 let starší.
Marii je nyní 24 let, Anně 18 let; Marie je opět o 6 let starší.
Odpověď:
Anně je nyní 18 let.

Příklad 6.2.3:
Když se oba přátelé A,B seznámili, byl A starší než B o $\frac{1}{4}$ jeho věku. Tehdejšího věku A dospěl B až po 6 letech. Určete jejich věk!

Řešení:
Označme věk $B = x$, potom věk A, když se seznámili byl $\frac{5}{4}x$. Protože B je o 6 let mladší, platí

$$\frac{5}{4}x - 6 = x \quad \Big| \cdot 4$$
$$5x - 24 = 4x \quad \Big| -4x + 24$$
$$\underline{\underline{x = 24}}$$

Potom věk A je 24 let a věk B je 30 let.
Zkouška:
Rozdíl věků je 30 – 24 = 6, což je čtvrtina věku B.
Odpověď:
Věk A je 24 let a věk B je 30 let.

6.3. <u>Skupina3:</u> *„Věk tří lidí“*

V textu jsou údaje o věku tří lidí. Údaje jsou absolutní, také mohou být dány vztahy mezi věkem všech osob nebo se věk váže ke konkrétnímu letopočtu. Úkolem je určit věk všech lidí nebo jen některého z nich.

Příklad 6.3.1:
Muž 30letý má dva bratry, 20 a 6letého. Kdy mu bude tolik let jako oběma jeho bratrům dohromady?

Řešení:
Označme si počet let, kdy nastane požadovaná situace x, potom platí

$$30 + x = 20 + x + 6 + x$$
$$30 + x = 26 + 2x \quad \Big| - x - 26$$
$$\underline{\underline{x = 4}}$$

Zkouška:
Za 4 roky bude mužovi 30 + 4 = 34 let; staršímu bratrovi bude 20 + 4 = 24, mladšímu bratrovi bude 6 + 4 = 10 let, dohromady jim bude 24 + 10 = 34 let.
Odpověď:
Za 4 roky bude mužovi tolik jako oběma jeho bratrům dohromady.

Příklad 6.3.2:
Muž 24letý má dva bratry, 13 a 8letého. Kdy mu bude tolik let jako oběma jeho bratrům dohromady?

Řešení:
Označme si počet let, kdy nastane požadovaná situace x, potom platí

$$24 + x = 13 + x + 8 + x$$
$$24 + x = 21 + 2x \quad \Big| - x - 21$$
$$\underline{\underline{x = 3}}$$

Zkouška:
Za 3 roky bude mužovi 24 + 3 = 27 let; staršímu bratrovi bude 13 + 3 = 16, mladšímu bratrovi bude 8 + 3 = 11 let, dohromady jim bude 16 + 11 = 27 let.
Odpověď:
Za 3 roky bude mužovi tolik jako oběma jeho bratrům dohromady.

Příklad 6.3.3:
99 let po smrti Koperníkově zemřel Galilei a narodil se Newton. Koperník dožil se 70, Galilei 78, Newton 85 let. Ustanovte letopočty narození a úmrtí těchto tří mužů, víte-li, že Koperník se narodil právě tolik let před r. 1 600, kolik let po r. 1 600 zemřel Newton!

Řešení:
Označme si x letopočet, kdy se narodil Koperník, y počet let, které zbývaly od Koperníkova narození do roku 1 600. Potom pro Koperníkovo narození a Newtonovo úmrtí platí

$$x + 70 + 99 + 85 = 1\,600 + y$$

a pro Koperníkovo narození platí

$$x = 1\,600 - y.$$

Dostáváme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé:

$$x + 254 = 1\,600 + y$$
$$\underline{x = 1\,600 - y}$$
$$1\,600 - y + 254 = 1\,600 + y \quad \big| + y - 1\,600$$
$$254 = 2y \quad \big| : 2$$
$$\underline{y = 127} \quad \rightarrow \quad \underline{x = 1\,473}\,.$$

Koperník zemřel roku 1 473 + 70 = 1 543; Galilei zemřel roku 1 543 + 99 = 1 642 a narodil se roku 1 642 – 78 = 1 564. Newton zemřel roku 1 600 + 127 = 1 727 a narodil se roku 1 727 – 85 = 1 642 (jako zemřel Galilei).
Tento výpočet můžeme současně považovat za zkoušku.
Odpověď:
Koperník žil v letech 1 473 – 1 543, Galilei 1 564 – 1 642, Newton 1 642 – 1 727.

Příklad 6.3.4:
Matka a její dvě děti mají dohromady 60 let. Určete věk dětí, je-li věk staršího trojnásobkem věku mladšího a věk matky je dvojnásobek součtu věku obou jejich dětí.

Řešení č. 1:
Protože věk matky je dvojnásobkem součtu věku obou jejich dětí, rozdělíme 60 let v poměru 2 : 1. Součet věku dětí je pak $\frac{1}{3}$ ze 60, tedy 20 let. Protože věk staršího je trojnásobkem věku mladšího, rozdělíme 20 let v poměru 3 : 1. Potom věk staršího jsou $\frac{3}{4}$ z 20, tedy 15 let, věk mladšího je $\frac{1}{4}$ z 20, tedy 5 let.
Zkouška:
Věk matky je 60 – 20 = 40 let. Celkem je všem dohromady 40 + 15 + 5 = 60 let.
Odpověď:
Děti jsou staré 15 a 5 let.

Řešení č. 2:
Označme věk nejmladšího dítěte x [let], potom věk staršího dítěte je $3x$ [let] a věk matky je $2 \cdot (3x + x) = 8x$ a platí

$$x + 3x + 8x = 60$$
$$12x = 60 \quad \big| : 12$$
$$\underline{x = 5} \text{ [let]} \quad \rightarrow \quad \underline{3x = 15} \text{ [let]}.$$

Zkouška a *odpověď* jako v řešení č. 1.

Příklad 6.3.5:
Pan *A*, který je matematik, potká na ulici svého známého, pana *B*. Pan *B* mu sděluje, že právě jde kupovat dárky pro své tři syny, kteří shodou okolností mají v týž den narozeniny. Ptá se pana *A*, zda by dokázal určit jejich věk, ví-li, že součin jejich věků je 36. „To mi ovšem nestačí," odpovídá pan *A*. Pan *B* tedy dodává: „Součet jejich věků je roven počtu oken na přední straně domu, který stojí před námi." Pan *A* se chvíli zamyslí a posléze řekne: „Ani to mi nestačí." Pan *B* tedy ještě dodá: „Můj nejstarší syn nosí brýle, které mají na levém oku 2,5 dioptrie." Nyní už pan *A* určil věky všech synů pana *B*. Vaším úkolem je určit je také, i když neznáte onen počet oken.

Řešení:
Protože součin věků tří osob je 36, musíme číslo rozložit na součin tří čísel.

$36 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, proto

$36 = 1 \cdot 1 \cdot 36 = 1 \cdot 2 \cdot 18 = 1 \cdot 3 \cdot 12 = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 1 \cdot 6 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 3 \cdot 3 \cdot 4.$

Protože matematik navíc znal součet a jeho znalost mu nestačila, muselo více možností dávat stejný součet. Jedná se o trojice 2 + 2 + 9 a 1 + 6 + 6. Protože jeden syn byl nejstarší, vylučuje se tím možnost 1 + 6 + 6. Výsledkem je tedy 2 + 2 + 9.
Odpověď:
Věk synů je 9, 2 a 2 roky.

6.4. **Skupina 4:** *„Věk čtyř a více lidí“*

V textu jsou údaje o věku čtyř nebo více lidí. Údaje jsou absolutní, mohou být dány vztahy mezi věkem některých (i všech) osob nebo se věk váže ke konkrétnímu letopočtu. Úkolem je určit věk všech lidí nebo jen některého z nich.

Příklad 6.4.1:
Matka má pět dětí. Jejich věky se liší o dva roky. Při narození prvního dítěte bylo matce 18 let, to je dnešní věk nejmladšího syna. Jak je stará matka?

Řešení:
Nejmladší syn má 18 let, potom nejstarší o 8 let více, tedy 26 let. Když se nejstarší narodil, bylo matce 18 let, tedy je o 18 let starší, je jí tedy 26 + 18 = 44 let.
Odpověď:
Matka je stará 44 let.

Příklad 6.4.2:
Rodině skládající se z rodičů a dvou dítek, je dohromady 113 let. Matce s mladším dítětem je dohromady o 2 roky více než otci; se starším dítětem je jí o rok méně než otci a mladšímu dítěti dohromady; věk otcův pak je dvakráte větší než součet věků obou dítek. Určete věky všech členů rodiny!

Řešení:
Označme věk otce x, věk matky y, věk staršího dítěte z a věk mladšího dítěte w. Potom lze vztahy mezi jednotlivými věky vyjádřit soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 113 \\ y + w &= x + 2 \\ y + z &= x + w - 1 \\ \underline{x = 2 \cdot (z + w)} & \end{aligned}$$

Ze čtvrté rovnice dosadíme do rovnic předchozích

$$\begin{aligned} 2z + 2w + y\ z + w &= 113 \\ y + w &= 2z + 2w + 2 \\ \underline{y + z = 2z + 2w + w - 1} & \quad \Big| -z \end{aligned}$$

a dostáváme soustavu rovnic, kdy ze třetí rovnice vyjádříme y,

$$\begin{aligned} y + 3z + 3w &= 113 \\ y - 2z - w &= 2 \\ \underline{y = z + 3w - 1} & \end{aligned}$$

dosadíme do druhé rovnice a vypočítáme z, w a nakonec x, y:

$$\begin{aligned} z + 3w - 1 + 3z + 3w = 113 & \quad \Big| +1 \\ \underline{z + 3w - 1 - 2z - w = 2} & \quad \Big| +1 \\ 4z + 6w = 114 & \\ \underline{-z + 2w = 3} & \quad \Big| \cdot 4 \\ 14w = 126 & \quad \Big| : 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{w = 9} \quad \rightarrow \quad & z = 2w - 3 \quad \rightarrow \quad \underline{z = 15} \\ \rightarrow \quad & y = z + 3w - 1 \quad \rightarrow \quad \underline{y = 41} \\ \rightarrow \quad & x = 2 \cdot (z + w) \quad \rightarrow \quad \underline{x = 48}\ . \end{aligned}$$

Zkouška:
Všem dohromady je 48 + 41 + 15 + 9 = 113 let.
Matce s mladším dítětem je 41 + 9 = 50, což je o 2 roky více než věk otce.
Matce se starším dítětem je 41 + 15 = 56 let, otci s mladším dítětem je 48 + 9 = 57 let, což je o 1 rok více.
Dvojnásobek součtu věků obou dětí je $2 \cdot (15 + 9) = 48$, což je věk otce.
Odpověď:
Otci je 48 let, matce je 41 let, staršímu dítěti je 15 let, mladšímu dítěti je 9 let.

Příklad 6.4.3:
Otec ve věku 56 let má tři syny 28, 22, 16 let. Kdy bude (byl) otec tak stár, jako jeho synové dohromady?

Řešení:
Označme si x počet let, kdy daná situace nastane (pokud už nastala, vyjde x záporné). Potom

$$56 + x = 28 + x + 22 + x + 16 + x \quad \Big| - 66 - x$$
$$-10 = 2x \quad \Big| : 2$$
$$\underline{x = -5} .$$

Situace tedy nastala pře 5-ti lety.
Zkouška:
Před pěti lety bylo otci 51 let, synům 23, 17 a 11 let. Součet věku synů je 23 + 17 + 11 = 51 let.
Odpověď:
Otec byl tak stár jako jeho synové dohromady před pěti lety.

6.5. <u>Skupina 5:</u> *„Neurčité zadání věku“*

V textu těchto úloh jsou údaje o věku lidí. Údaje jsou absolutní, mohou být dány vztahy mezi věkem některých (i všech) osob nebo se věk váže ke konkrétnímu letopočtu. Údaje jsou buď neúplné nebo jsou nějakým způsobem komplikované (jsou nějak specifické). Jsou zde též zařazeny úlohy, které nejde zařadit do předchozích skupin. Úkolem je určit věk všech lidí nebo jen některého z nich.

<u>*Příklad* 6.5.1:</u>
Součet věků všech tří synů pana Nováka je 21. Nejstarší syn je tak starý jako součet věku prostředního a dvojnásobku věku nejmladšího. Jak jsou staří synové pana Nováka?

Řešení:
Označíme si věky synů: x – nejstaršího, y – prostředního, z – nejmladšího. Potom dostáváme:

$$x + y + z = 21$$
$$x = y + 2z$$

$$x + y + z = 21$$
$$x - y - 2z = 0$$

$$2x - z = 21$$
$$x = \frac{z + 21}{2}$$ . . . hledáme z tak, aby x bylo celočíselné

$z = 1; 3; 5; 7; 9; \ldots$ a vypočteme x, y.

Zapíšeme do tabulky:

x:	**y:**	**z:**	
11	9	1	. . . vyhovuje
12	6	3	. . . vyhovuje
13	3	5	. . . z není nejmladší, nevyhovuje
14	0	7	. . . z není nejmladší, nevyhovuje

Odpověď:
Synové pana Nováka jsou staří 11, 9 a 1 rok nebo 12, 6 a 3 roky. Pokud chceme úlohu vyřešit jednoznačně, potřebujeme další údaj.

<u>*Příklad* 6.5.2:</u>
Pan Nepozorný si nechal v obchodě vydláždit čtvercovou síň čtvercovými dlaždicemi. Při psaní objednávky byl roztržitý a omylem uvedl jako počet dlaždic podél jedné stěny svůj věk. Podle objednávky mu dovezli o 107 dlaždic více než potřeboval. Jak byl pan Nepozorný starý?

Řešení:
Označíme-li věk pana Nepozorného x a počet dlaždic na jedné straně čtverce y, pak podle zadání platí

$$x^2 - y^2 = 107.$$

Levou i pranou stranu rovnice rozložíme na součin a dostaneme

$$(x + y) \cdot (x - y) = 107 \cdot 1.$$

Z toho vyplývá

$$x + y = 107$$
$$x - y = 1,$$

a řešení je $[x; y] = [54; 53]$.
Zkouška:
Druhá mocnina věku: $54^2 = 2\,916$. Počet dlaždic v síni: $53^2 = 2\,809$.
Rozdíl: $2\,916 - 2\,809 = 107$.
Odpověď:
Věk pana Nepozorného byl 54 let.

Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci

Katedra algebry a geometrie

Vyhodnocení testů a dotazníku

Disertační práce

Příloha č. 2

Vedoucí disertační práce: **Doc. RNDr. Stanislav Trávníček CSc.**

Vypracoval: **Mgr. František Šíma**

Olomouc 2013

O B S A H

Vyhodnocení testů a dotazníků (celý text kapitoly IV)

Vyhodnocení testů a dotazníků (kapitola IV)

V příloze 2 uvádím nezkrácený původní text kapitoly IV. Ponechávám i původní číslování kapitol a označení tabulek a obrázků.

4.1. Testové úlohy a výsledky testových úloh

Při provádění klasifikace slovních úloh a hledání způsobu jejich řešení jsem dospěl k otázce, jaké způsoby řešení budou preferovat studenti základních a středních škol a jaká bude frekvence použití jednotlivých způsobů řešení. Také mne zajímalo, budou-li nějaké rozdíly mezi chlapci a děvčaty, a to jak v použitých metodách, tak i ve výsledcích. Proto jsem sestavil čtyři varianty testových úloh a ve spolupráci s řediteli a vyučujícími na základních a středních školách Jihočeského kraje byly ve školním roce 2010 – 2011 testy zadány a vyhodnoceny.

4.1.1. Texty testových úloh

Celkem 269 žáků základních škol a studentů středních škol řešilo vybrané slovní úlohy. Test obsahoval čtyři slovní úlohy a časová dotace byla 40 minut. Testy byly ve čtyřech variantách, první příklad byl vždy slovní úloha o celku a částech, druhá úloha vždy o směsích, třetí vždy o pohybu a čtvrtá vždy o společné práci.

Variantu A řešilo 47 dívek a 35 chlapců, celkem 82 žáků a studentů; variantu B řešilo 39 dívek a 36 chlapců, celkem 75 žáků a studentů; variantu C řešilo 28 dívek a 30 chlapců, celkem 58 žáků a studentů; variantu D řešilo 25 dívek a 29 chlapců, celkem 54 žáků a studentů.

Testy řešilo 71 dívek a 53 chlapců, celkem 124 žáků základních škol (včetně nižšího stupně víceletých gymnázií), testy byly zadány žákům 9. tříd (či žákům kvarty víceletých gymnázií). Dále testy řešilo 68 dívek a 77 chlapců, celkem 145 studentů středních škol, testy byly zadány studentům 1. a 2. ročníků (či studentům kvinty víceletých gymnázií).

Titulní list testu vypadal následovně:

TEST
(student, žák)

Chlapec: …………	☐	**Škola: ZŠ ………………**	☐
Dívka: ……..........	☐	**SŠ: gymnázium …………**	☐
Třída ……...........	☐	**SOŠ ____________**	☐
Číslo ……...........	☐	**jiné ___________**	☐

Legenda:

1. Úlohu můžete řešit jakýmkoliv způsobem.
2. Řešení zapisujte celé (žádnou část řešení nevynechávejte).
3. Při řešení můžete používat kalkulačky.
4. Nezapomeňte u každého příkladu provést zkoušku.

Testy zadávali žákům a studentům jejich vyučující matematiky, kteří byli instruováni tak, aby informace udělené při zadání byly jednotné. Jednotlivé varianty byly přiřazovány náhodně. Třetí příklad ve variantě D byl formulován dvojím způsobem. Jedna z formulací měla být matoucí, druhá (ve variantě D_0) měla být pro řešitele snadněji pochopitelná. Testové úlohy variant A – D byly následující:

Varianta A:

1. Ve třech skladištích bylo uloženo celkem 70 tun obilí. V druhém skladišti bylo uloženo o 8,5 t méně a ve třetím skladišti o 3,5 t více než v prvním skladišti. Kolik tun obilí bylo uloženo v jednotlivých skladištích?

2. Denní produkce mléka 630 litrů byla k odvozu slita do 22 konví, z nichž některé byly po 25 litrech, jiné po 35 litrech. Všechny konve byly plné. Kolik bylo jednotlivých konví?

3. Kamion jede po dálnici z Prahy do Bratislavy průměrnou rychlostí 72 km/h. V okamžiku, kdy je kamion od Prahy 54 km, vyjíždí z Prahy osobní auto, které jede rovněž do Bratislavy a jehož průměrná rychlost je 90 km/h. Kdy a na kterém kilometru dálnice Praha – Bratislava dohoní osobní auto kamion.

4. Vodní nádrž by se naplnila jen prvním přítokem za 36 minut, jen druhým za 45 minut. Za jak dlouho se nádrž naplní, přitéká-li voda nejprve 9 minut jen prvním přívodem a pak oběma současně?

Varianta B:

1. Písemnou zkoušku z matematiky psalo 37 žáků, nikdo z nich neměl pětku. Jedniček bylo dvakrát víc než čtyřek, dvojek bylo o 6 více než jedniček, trojek bylo 11. Kolik žáků mělo jedničku, kolik dvojku, trojku a čtyřku?

2. Pět litrů bílého vína a šest litrů červeného vína stálo 432 Kč. Jeden litr červeného vína je o 6 Kč dražší než 1 litr bílého vína. Kolik korun zaplatíme za 2 litry bílého a 2 litry červeného vína?

3. Pánové *A* a *B* bydlí ve vzdálenosti 224 km. Vyjedou-li v autech současně ze svých obydlí proti sobě, setkají se po 2 hodinách. Pán *A* ujede za hodinu o 4 km více než pán *B*. Kolik km urazí každý z nich za hodinu?

4. Dělník *A* by sám provedl výkop za 7 hodin, dělník *B* sám za 6 hodin. Protože výkop má být skončen za 2 hodiny, byl přibrán ještě dělník *C*. Za jak dlouho by výkop provedl sám dělník *C*?

Varianta C:

1. Tři sourozenci měli našetřeno celkem 1 274 Kč. Petr měl našetřeno o 15 % více než Jirka a Hanka o 10 % méně než Petr. Kolik korun měl našetřeno každý z nich?

2. Ze dvou druhů čaje o ceně 160 Kč a 220 Kč za 1 kilogram se má připravit 20 kg směsi v ceně 205 Kč za 1 kilogram. Kolik kilogramů každého druhu čaje bude třeba smíchat?

3. Auto ujelo vzdálenost mezi městy *A* a *B* za 4 hodiny. Kdyby se průměrná rychlost auta zvýšila o 17 km/h, ujelo by auto tuto vzdálenost o hodinu dříve. Určete rychlost auta a vzdálenost mezi městy *A* a *B*.

4. Vodní nádrž se naplní jen prvním přítokem za 10 hodin, jen druhým za 12 hodin a jen třetím za 15 hodin. Za jak dlouho se naplní, budou-li otevřeny všechny tři přítoky současně?

Varianta D:

1. Zákazník si koupil tričko, kravatu a košili. Nejprve si vybral košili, k ní pak kravatu, která byla třikrát levnější než košile. Nakonec si koupil tričko, které bylo o 140 Kč dražší než kravata. Celkem zaplatil 940 Kč. Kolik zaplatil za kravatu, kolik za tričko a kolik za košili?

2. 20 brouků a pavouků má dohromady 146 nohou. Kolik je brouků a kolik je pavouků, má-li brouk 6 nohou a pavouk 8 nohou?

3. Po dvojkolejné trati mezi stanicemi *K* a *M* jely proti sobě dva vlaky. První vlak projel vzdálenost mezi stanicemi za dvě hodiny, druhý, který měl průměrnou rychlost o 15 km/h větší, ji projel za 1,5 hodiny. Vypočítejte průměrné rychlosti obou vlaků a vzdálenost stanic *K* a *M*.

   Varianta D_0:

   V pátek urazil nákladní vlak vzdálenost mezi stanicemi *K* a *M* za 2 hodiny. Další nákladní vlak z *K* měl v sobotu průměrnou rychlost o 15 km/h větší, takže do *M* přijel už za 1,5 hod. Vypočítejte průměrné rychlosti obou vlaků a vzdálenost stanic *K* a *M*.

4. Prvním kombajnem lze sklidit obilí z určitého lánu za 30 hodin, druhým, výkonnějším kombajnem za 20 hodin. Za kolik hodin bylo sklizeno obilí z tohoto lánu, jestliže se sklízelo současně oběma kombajny, ale druhý kombajn se porouchal a první ještě pracoval sám 5 hodin, aby dokončil sklizeň?

4.1.2. Výsledky žáků a studentů v testových úlohách

Základem pro porovnání výsledných známek byly průměry ze všech sledovaných škol. Školy byly rozděleny na základní školy a střední školy a navíc byla ještě vyčleněna gymnázia (společně vyšší i nižší). Potom ještě byly speciálně sledovány základní školy bez nižších gymnázií, střední odborné školy (tj. střední školy bez gymnázií), nižší gymnázia (tj. primy až kvarty víceletých gymnázií) a vyšší gymnázia (tj. kvinty až oktávy víceletých gymnázií a čtyřletá gymnázia). Dosažené výsledky ve variantách A - D shrnuje tabulka 4-1.

Budeme-li porovnávat všechny varianty A – D, lepších výsledků ve velké většině případů dosahovali studenti středních škol (ve srovnání se žáky základních škol) a to ve třinácti z patnácti ukazatelů. Přiřadíme-li k tomu ještě speciálně vyčleněnou skupinu žáků a studentů gymnázií, vidíme, že ve většině ukazatelů jsou tito nejlepší (ve dvanácti z patnácti ukazatelů, ve zbývajících třech jsou to střední školy a to zásluhou středních odborných škol).

Rozdělíme-li školy na základní školy bez gymnázií, střední odborné školy (tj. střední školy bez gymnázií), nižší gymnázia a vyšší gymnázia a hodnotíme-li opět stejných patnáct ukazatelů, potom nejlepších výsledků dosáhla vyšší gymnázia, a to v jedenácti ukazatelích, ve dvou ukazatelích byli nejlepší žáci nižších gymnázií (příklad 2) a ve dvou studenti středních odborných škol (příklad 4). Žáci ze základních škol (bez gymnázií) nebyli nejlepší v žádném z ukazatelů. Nejčastěji nejhorší byli studenti středních odborných škol, a to v osmi ukazatelích; pouze ve čtyřech ukazatelích byli nejhorší žáci základních škol (bez gymnázií) a ve třech ukazatelích byli nejhorší žáci nižších gymnázií. Studenti vyšších gymnázií nebyli nejhorší v žádném ukazateli.

Tabulka 4-1 – Průměrné známky z testů všech variant A – D ve všech typech škol:

Všechny školy:

A - D	D	H	V
1. př.	2,49	2,67	2,58
2. př.	3,28	3,34	3,31
3. př.	3,81	3,57	3,69
4. př.	4,09	3,85	3,97
celé	3,37	3,36	3,37

Střední školy

A - D	D	H	V
1. př.	2,21	2,46	2,34
2. př.	3,48	3,34	3,40
3. př.	3,74	3,56	3,64
4. př.	3,91	3,75	3,82
celé	3,25	3,30	3,28

Základní školy (včetně gy)

A - D	D	H	V
1. př.	2,76	3,07	2,89
2. př.	3,09	3,46	3,25
3. př.	3,87	3,72	3,81
4. př.	4,27	4,14	4,21
celé	3,49	3,58	3,53

Gymnázia

A - D	D	H	V
1. př.	2,15	2,25	2,20
2. př.	2,51	2,88	2,69
3. př.	3,73	3,19	3,46
4. př.	4,42	3,77	4.10
celé	3,15	3,00	3,08

Vyšší gymnázia:

A - D	D	H	V
1. př.	2,12	1,91	2,01
2. př.	2,74	2,76	2,75
3. př.	3,26	3,09	3,16
4. př.	4,03	3,70	3,85
celé	2,94	2,88	2,90

Nižší gymnázia:

A - D	D	H	V
1. př.	2,19	2,95	2,51
2. př.	2,21	3,13	2,60
3. př.	4,33	3,42	3,94
4. př.	4,92	3,92	4,50
celé	3,42	3,26	3,36

Střední odborné školy: **Základní školy (bez gy):**

A - D	D	H	V	A - D	D	H	V
1. př.	2,30	3,05	2,69	1. př.	3,09	3,13	3,11
2. př.	4,17	3,96	4,06	2. př.	3,60	3,65	3,62
3. př.	4,20	4,07	4,13	3. př.	3,61	3,88	3,73
4. př.	3,80	3,80	3,80	4. př.	3,89	4,26	4,05
celé	3,54	3,77	3,65	celé	3,53	3,76	3,63

Nejjednodušším příkladem byl soubor příkladů číslo 1 „o celku a částech“, jehož hodnocení bylo výrazně nejlepší. Druhým v pořadí byl soubor příkladů číslo 2 „o směsích“, jehož hodnocení bylo ještě mírně lepší než byl celkový průměr. Třetím v pořadí byl soubor příkladů číslo 3 „o pohybu“, jehož hodnocení již bylo horší než celkový průměr. Nejtěžším byl soubor příkladů číslo 4 „o společné práci“, jehož hodnocení bylo výrazně nejhorší. Určitý vliv na špatné hodnocení příkladů číslo 4 mělo i to, že tyto příklady byly poslední a někteří řešitelé neměli dostatek času na jejich řešení.

Při porovnávání výsledků dívek a chlapců jsou výsledky u jednotlivých příkladů ve všech školách srovnatelné, mírně lepších výsledků dosahují dívky v prvních dvou příkladech (tyto příklady jsou jednodušší, a proto i průměry známek jsou lepší), v druhých dvou příkladech (tyto příklady jsou těžší, a proto i průměry známek jsou horší) dosahují mírně lepších výsledků chlapci. Celkové výsledky jsou téměř stejné (rozdíl průměrů je 0,01), jsou v rozsahu statistické chyby.

V jednotlivých skupinách typů škol jsou rozdíly mezi výsledky dívek a chlapců rozličné. Nejlépe vyznívá pro dívky hodnocení na základních školách bez nižších gymnázií, kde ve všech pěti sledovaných případech hodnocení jsou dívky úspěšnější, naopak nejhůře vychází hodnocení pro dívky na středních odborných školách, kde jsou dívky lepší pouze v jednom sledovaném případě (viz tabulka 4-2).

Tabulka 4-2 – Rozdíly mezi průměry dívek a chlapců (kladná hodnota, je-li průměr dívek lepší, absolutní rozdíly jsou bez znaménka)

A - D	Všechny školy	Střední školy	Základní školy	Gymnázia	Vyšší gymnázia	Nižší gymnázia	SOŠ (bez gy)	ZŠ (bez gy)
1. př.	0,18	0,25	0,31	0,10	0,21	0,76	0,75	0,04
2. př.	0,06	-0,14	0,37	0,37	0,02	0,92	-0,21	0,05
3. př	-0,24	-0,18	-0,15	-0,54	-0,17	-0,91	-0,13	0,27
4. př.	-0,24	-0,16	-0,13	-0,65	-0,33	-1,00	±0,00	0,37
celé	-0,01	0,05	0,09	-0,15	-0,06	-0,16	-0,23	0,23
absolutní	0,42	0,43	0,50	1,02	0,54	1,92	0,96	0,33

Vezmeme-li v úvahu rozdíly mezi výsledky dívek a chlapců v jednotlivých sledovaných případech, jsou absolutní rozdíly (tj. rozdíly rozdílů) nejmenší v základních školách bez nižších gymnázií (absolutní rozdíl je 0,33). Největší absolutní rozdíl je u nižších gymnázií (činí 1,92). U nižších gymnázií je dokonce nejmenší dílčí rozdíl (0,76) větší než absolutní rozdíly u většiny dalších hodnocených typů škol.

Z jednotlivých variant (viz tabulka 4-3) se celkovému průměru známek velmi blížily varianty A, D. Zatímco ve variantě D výsledky téměř kopírovaly celkový průměr, ve variantě A se výsledky jednotlivých příkladů velmi lišily od celkových průměrů. Výrazně lépe dopadl příklad č. 1, naopak výrazně hůře příklad č. 3. Také se jevil velký rozdíl mezi výsledky dívek a chlapců. Zatímco dívky měly často výsledky lepší než byl průměr, chlapci naopak velmi často horší a mnohdy i výrazně. Celkem se pak výsledky vyrovnaly k průměru.

Tabulka 4-3 – Průměrné známky z testů variant A, B, C, D ve všech typech škol:

Všechny školy:

A	D	H	V	**B**	D	H	V
1. př.	2,02	2,34	2,16	1. př.	1,85	2,18	2,01
2. př.	3,09	3,60	3,30	2. př.	2,91	2,92	2,91
3. př.	3,91	4,11	4,00	3. př.	3,50	2,97	3,25
4. př.	4,18	4,24	4,21	4. př.	4,33	3,61	3,99
celé	3,19	3,54	3,34	celé	3,15	2,97	3,07

C	D	H	V	**D**	D	H	V
1. př.	4,27	3,90	4,08	1. př.	2,40	2,57	2,49
2. př.	4,09	4,08	4,09	2. př.	3,32	3,00	3,15
3. př.	3,91	3,83	3,87	3. př.	3,98	3,62	3,79
4. př.	3,61	3,87	3,74	4. př.	4,10	3,91	4,00
celé	3,93	4,00	3,97	celé	3,44	3,21	3,31

Střední školy

A	D	H	V	**B**	D	H	V
1. př.	1,90	1,98	1,93	1. př.	1,76	1,96	1,87
2. př.	3,63	3,61	3,62	2. př.	3,08	2,63	2,83
3. př.	3,92	4,14	4,02	3. př.	3,32	2,91	3,10
4. př.	4,08	4,00	4,04	4. př.	4,16	3,28	3,68
celé	3,21	3,41	3,30	celé	3,05	2,74	2,88

C	D	H	V	**D**	D	H	V
1. př.	4,35	3,92	4,11	1. př.	1,87	2,70	2,34
2. př.	4,10	4,58	4,36	2. př.	3,33	3,10	3,20
3. př.	4,05	3,88	3,93	3. př.	3,80	3,48	3,61
4. př.	3,65	3,96	3,82	4. př.	3,50	3,88	3,71
celé	3,90	4,25	4,09	celé	3,13	3,25	3,20

Základní školy

A	D	H	V	**B**	D	H	V
1. př.	2,15	2,96	2,44	1. př.	1,93	2,58	2,18
2. př.	2,52	3,58	2,90	2. př.	2,75	3,42	3,02
3. př.	3,91	4,08	3,97	3. př.	3,68	3,08	3,44
4. př.	4,28	4,65	4,42	4. př.	4,50	4,19	4,39
celé	3,17	3,77	3,39	celé	3,25	3,38	3,30

C	D	H	V	D	D	H	V
1. př.	4,22	3,89	4,06	1. př.	3,20	2,28	2,76
2. př.	4,08	3,75	3,92	2. př.	3,30	2,78	3,05
3. př.	3,83	3,81	3,82	3. př.	4,25	3,94	4,11
4. př.	3,58	3,81	3,69	4. př.	5,00	4,00	4,53
celé	3,94	3,83	3,89	celé	3,90	3,11	3,53

Gymnázia

A	D	H	V	B	D	H	V
1. př.	1,98	1,46	1,78	1. př.	1,74	1,75	1,74
2. př.	2,52	2,79	2,62	2. př.	2,32	2,72	2,52
3. př.	4,13	3,39	3,85	3. př.	3,38	2,81	3,11
4. př.	4,76	3,96	4,46	4. př.	4,41	3,38	3,91
celé	3,22	2,86	3,08	celé	3,00	2,81	2,91

C	D	H	V	D	D	H	V
1. př.	4,43	4,00	4,18	1. př.	1,75	2,32	2,10
2. př.	3,57	4,20	3,94	2. př.	2,13	2,39	2,29
3. př.	3,79	3,75	3,76	3. př.	3,42	3,08	3,21
4. př.	3,79	4,15	4,00	4. př.	4,17	3,76	3,92
celé	3,86	4,00	3,94	celé	2,83	2,74	2,78

Ve variantě B byly výsledky proti celkovému průměru téměř ve všech ukazatelích lepší, často výrazně. První tři příklady byly v porovnání s ostatními variantami řešeny nejlépe a ani poslední příklad nebyl výsledkově nejhorší. Zřejmě formulace těchto úloh nejlépe vyhovovala řešitelům (známý problém, podstata problému nebyla náročná, problém pro řešitele lehce uchopitelný apod.).

Nejhůře dopadly výsledky ve variantě C. Zejména první příklad byl výrazně horší než v ostatních skupinách – v průměru o 1,5 stupně! Ukazuje se, že zadání hodnot pomocí procent činí mnoha žákům i studentům problém a pro některé je to problém dokonce neřešitelný. Za zmínku jistě stojí i to, že nejhorších výsledků v tomto příkladě dosáhli studenti gymnázií a nejlepších žáci základních škol, dokonce skupina žáků základních škol bez nižších gymnázií dopadla lépe než ta s nižšími gymnázii. Také výsledek druhého příkladu byl mnohem horší než v jiných variantách. Zde se zřejmě projevilo, že v tomto příkladu jako v jediné skupině byla informace o tom, že se jedná o směs. Tato informace místo, aby vedla k návodu postupu, spíše řešitele vyděsila. Další dva příklady již nepatřily k nejhorším, ale jejich výsledky již ztrátu z prvních dvou příkladů nedokázaly vyrovnat.

4.1.3. Porovnání dvou verzí jedné varianty

Ve variantě D byl třetí příklad (slovní úloha o pohybu) formulován dvěma různými způsoby. Původní formulace (označená jako verze D) mluvila o dvou vlacích jedoucích navzájem proti sobě. Principem úlohy nebyla jízda dvou subjektů proti sobě, ale porovnání dvou různých časů dosažených na téže trati subjektem jedoucím pokaždé jinou rychlostí (směr jízdy nebyl rozhodující). Proto byla původní úloha přeformulována na dvě jízdy téhož vlaku (verze byla označena D_0). Tato nová formulace byla principielně jednodušší. Varianta D byla zadávána rovnoměrně v obou verzích. Výsledky dosažené v obou verzích jsou v tabulce 4-4.

Tabulka 4-4: Porovnání verzí D, D_0

	skupina	celkem	příklad	rozdíl	rozdíl
		př. 1-4	č. 3	c - 3	cv - 3
D_0	dívky	3,80	4,25	-0,45	-0,89
	chlapci	3,06	3,88	-0,82	-0,53
	všichni	3,35	4,02	**-0,67**	**-0,67**
D	dívky	3,20	3,80	-0,60	-0,47
	chlapci	3,50	3,50	0,00	-0,17
	všichni	3,33	3,67	**-0,34**	**-0,34**

Ve třetím sloupci tabulky jsou celkové výsledky (hodnocení celé kontrolní práce), ve čtvrtém sloupci je hodnocení posuzovaného příkladu (slovní úlohy o pohybu). V pátém sloupci je rozdíl výsledné známky a známky třetího příkladu pro danou skupinu (tedy rozdíl sloupců 3 a 4 v daném řádku), v šestém sloupci je rozdíl výsledné známky (tj. průměru, který měli všichni) a známky v dané skupině. Rozhodující jsou hodnoty v řádku „všichni" ve sloupcích 5 a 6, hodnoty jsou vyznačeny tučně („tučné" hodnoty musí být v jednom řádku stejné).

Z tabulky 4-4 je zřejmé, že v obou verzích D, D_0 byly výsledky horší než byla celková známka, ve verzi D (obtížnější) bylo zhoršení všech menší než ve verzi D_0. Hodnota rozdílu je třetina stupně, z toho plyne, že každý třetí měl ve verzi D známku o stupeň lepší než ve verzi D_0. Nejedná se o velký rozdíl, proto můžeme konstatovat, že úprava zadání neměla na výsledek vliv, pokud ano, tak mírně záporný. Nejpravděpodobnější je, že nová verze D_0 nebyla dostatečně zjednodušující, a na výsledku se to neprojevilo.

Porovnáme-li ještě hodnoty dílčí (dívky, chlapci), zjišťujeme, že ve většině případů jsou výsledky lepší pro verzi D. Pouze v jednom případu byly ve verzi D_0 lepší výsledky. Jedná se o srovnání výsledku dívek ve verzi D_0 (výsledek -0,45) s výsledkem dívek ve verzi D (výsledek -0,60) i s výsledkem chlapců ve verzi D_0 (výsledek -0,82). Z tohoto by bylo možné usuzovat, že dívkám vyhovuje spíše jednodušší zadání, zatímco chlapci mají raději zadání komplikovanější. Jedná se ovšem pouze o hypotézu.

4.2. Postupy, které při řešení jednotlivých variant užívali žáci a studenti

Nyní jsou uvedeny postupy, které jednotliví řešitelé, žáci základních škol a studenti středních škol, užívali při řešení úloh jednotlivých variant. Jsou uvedeny i postupy, které řešitelé jen rozpracovali (jsou samozřejmě dopracované a označené: $^+$) a pro úplnost jsou přidány ve většině příkladů postupy, kdy je užíváno k řešení úlohy obecného modelu a také některé postupy, které řešitelé neužívali, ale do přehledu patří (neužité postupy jsou označené: *).

Varianta A:

***Příklad* 1 – *řešení*:**
Ve třech skladištích bylo uloženo celkem 70 tun obilí. V druhém skladišti bylo uloženo o 8,5 t méně a ve třetím skladišti o 3,5 t více než v prvním skladišti. Kolik tun obilí bylo uloženo v jednotlivých skladištích?

1. způsob: (pomocí rovnice)

V 1. skladišti ………… x [t],
v 2. skladišti ………… $x - 8{,}5$ [t],
ve 3. skladišti ………… $x + 3{,}5$ [t],

$$\begin{aligned} x + x - 8{,}5 + x + 3{,}5 &= 70 \\ 3x - 5 &= 70 \quad \Big| + 5 \\ 3x &= 75 \quad \Big| : 3 \\ \underline{x} &\underline{= 25} \text{ [t]}, \end{aligned}$$

potom v prvním skladišti je 25 t, v druhém 25 – 8,5 = 16,5 t a ve třetím 25 + 3,5 = 28,5 t obilí.
Zkouška – dosazením do textu:
Celkem je 25 + 16,5 + 28,5 = 70 t obilí.
Odpověď:
V jednotlivých skladištích bylo 25 t, 16,5 t a 28,5 t obilí.

2. způsob: (pomocí soustavy rovnic)

V 1. skladišti ………… x [t],
v 2. skladišti ………… y [t],
ve 3. skladišti ………… z [t],

$$\begin{aligned} x + y + z &= 70 \\ y &= x - 8{,}5 \\ \underline{z} &\underline{= x + 3{,}5} \\ x + x - 8{,}5 + x + 3{,}5 &= 70 \\ 3x - 5 &= 70 \quad \Big| + 5 \\ 3x &= 75 \quad \Big| : 3 \\ \underline{x} &\underline{= 25} \text{ [t]}, \end{aligned}$$

potom v prvním skladišti je 25 t, v druhém 25 – 8,5 = 16,5 t a ve třetím 25 + 3,5 = 28,5 t obilí.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

3. způsob: (aritmeticky)

Ve všech skladištích je průměrně $70 : 3 = 23{,}\overline{3}$ t obilí. Za základ vezměme, že v 1. skladišti je

23 t obilí, potom ve 2. skladišti musí být 23 – 8,5 = 14,5 t obilí a ve 3. skladišti 23 + 3,5 = = 26,5 t obilí. Potom je ve všech třech celkem 64 t obilí.
Můžeme postupně do všech třech skladišť přidávat po 1 t a hledat, kdy bude součet 70 t. Postup zapíšeme do tabulky.

Tabulka 4-5:

1. skladiště	23 t	24 t	**25 t**	26 t	. . .
2. skladiště	14,5 t	15,5 t	**16,5 t**	17,5 t	. . .
3. skladiště	26,5 t	27,5 t	**28,5 t**	29,5 t	. . .
celkem	64 t	67 t	**70 t**	73 t	. . .

Hledané hodnoty jsou 25 t (1.), 16,5 t (2.) a 28,5 t (3.). Další řešení již neexistuje, protože součty jsou dále již větší než 70 t.
Postup můžeme zkrátit tím, že zjistíme rozdíl: 70 – 64 = 6 t a ten vydělíme třemi: 6 : 3 = 2. Ke každé hodnotě přidáme 2 t a dostaneme stejný výsledek jako v tabulce.

4. způsob: (pomocí úsudku) *

Celkem je ve třech skladištích 70 t obilí.
Kdyby ve druhém skladišti bylo stejně jako v prvním, muselo by být ve všech skladištích celkem o 8,5 t obilí více, tj. 78,5 t.
Kdyby ve třetím skladišti bylo stejně jako v prvním a ve druhém, muselo by být ve všech skla dištích celkem o 3,5 t obilí méně, tj. 78,5 – 3,5 = 75 t.
Nyní by bylo ve všech třech skladištích stejně jako v prvním, tj. v prvním je 75 : 3 = 25 t.
Potom ve druhém je 25 – 8,5 = 16,5 t a ve třetím je 25 + 3,5 = 28,5 t.

5. způsob: (užitím obecného modelu) *

Množství obilí v 1. skladišti .... x [t],
množství obilí, které chybí v 2. skladišti .... a [t],
množství obilí, které chybí ve 3. skladišti .... b [t],
V 1. skladišti .... x [t],
v 2. skladišti .... $x - a$ [t],
ve 3. skladišti .... $x + b$ [t],
celkové množství obilí . . . . m [t].

Celkem: $x + x - a + x + b = m$

$$3x - a + b = m \quad \Big| + a - b$$

$$3x = m + a - b$$

$$x = \frac{m + a - b}{3}. \tag{4-1}$$

V našem případě:
a = 8,5 [t], b = 3,5 [t], m = 70 [t], potom:

$$x = \frac{70 + 8{,}5 - 3{,}5}{3} = \underline{\underline{25}}\ \text{[t]}.$$

Poznámka:

Obecně: $$x = \frac{m + (a_1 + \ldots + a_i) - (b_1 + \ldots + b_j)}{1 + i + j}, \tag{4-1a}$$

kde a_i jsou hodnoty, které ve skladištích chybí, b_j hodnoty, které ve skladištích přebývají.

***Příklad* 2 – *řešení*:**

Denní produkce mléka 630 litrů byla k odvozu slita do 22 konví, z nichž některé byly po 25 litrech, jiné po 35 litrech. Všechny konve byly plné. Kolik bylo jednotlivých konví?

1. způsob: (pomocí jedné rovnice o jedné neznámé)

Počet konví po 25 l ………… x [ks],
počet konví po 35 l ………… $22 - x$ [ks],

$$25 \cdot x + 35 \cdot (22 - x) = 630$$
$$25x + 770 - 35x = 630 \quad \Big| -770$$
$$-10x = -140 \quad \Big| : (-10)$$
$$x = \underline{\underline{14}} \text{ [ks]} \quad \dots \quad \text{po } 25\ l,$$
$$\text{po } 35\ l\text{:}\ \ 22 - x = 22 - 14 = \underline{\underline{8}} \text{ [ks].}$$

Zkouška – dosazením do textu:

$14 \cdot 25 = 350\ l$,
$8 \cdot 35 = 280\ l$,
Celkem ….. $630\ l$.

Odpověď:
Konví po 25 l bylo 14, po 35 l bylo 8.

2. způsob: (pomocí soustavy dvou rovnic o dvou neznámých)

Počet konví po 25 l ………… x [ks],
počet konví po 35 l ………… y [ks],

$$x + y = 22 \quad \Big| -x$$
$$25 \cdot x + 35 \cdot y = 630$$
$$y = 22 - x$$
$$25 \cdot x + 35 \cdot (22 - x) = 630$$
$$25x + 770 - 35x = 630 \quad \Big| -770$$
$$-10x = -140 \quad \Big| : (-10)$$
$$x = \underline{\underline{14}} \text{ [ks]} \quad \dots \quad \text{po } 25\ l,$$
$$\text{po } 35\ l\text{:}\ \ 22 - x = 22 - 14 = \underline{\underline{8}} \text{ [ks].}$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

3. způsob: (aritmetický postup)

Do tabulky zapíšeme pro 25-litrové a 35-litrové konve jejich počty a objemy tak, aby v sloupci dávaly počet 22 ks. Objem ve sloupci sečteme a hledáme, kde bude součet 630 l.

Tabulka 4-6:

25	ks	22	21	20	19	18	17	16	15	**14**	13	12	11	10	9	8	7	6	5	...
l	V	550	525	500	475	450	425	400	375	**350**	325	300	275	250	225	200	175	150	125	...
35	ks	0	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
l	V	0	35	70	105	140	175	210	245	**280**	315	350	385	420	455	490	525	560	595	...
součet		550	560	570	580	590	600	610	620	**630**	640	650	660	670	680	690	700	710	720	...

Protože celkový objem stále narůstá, je z tabulky zřejmé, že úloha má jediné řešení:
14 ks 25-litrových konví a 8 ks 35-litrových konví.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

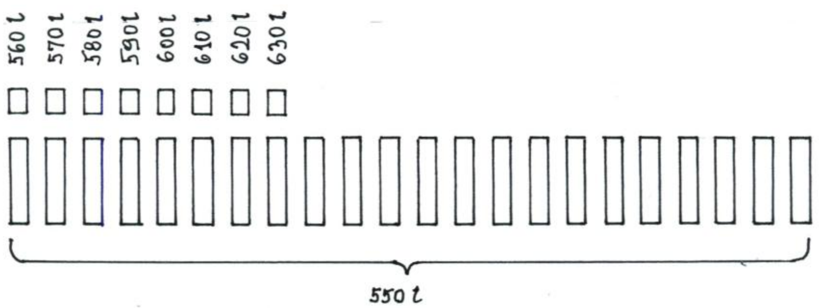
4. způsob: (úsudkem)

Celkový objem je 630 *l*. kdyby všech 22 konví bylo 25-litrových, je objem $22 \cdot 25 = 550$ *l*. Do 630 *l* zbývá: 630 – 550 = 80 *l*. Toto množství musí pojmout 35-litrové konve. Protože mají objem o 10 *l* větší, je jich 80 : 10 = 8 ks. 25-litrových konví je pak 22 – 8 = 14 ks.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

5. způsob: (graficky)

Všech 22 konví bude obsahovat alespoň 25 *l* mléka, celkem je to 550*l*. Zbytek do 630*l* se nalije do 35-litrových konví. Z grafu je zřejmé, že jich bude 8. 25-litrových konví je pak 14.

Obr. 4-1:



Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

6. způsob: (metoda chybného předpokladu)

Odhadneme čísla, která by mohla odpovídat výsledku: počet 25 *l* konví – 16, počet 35 *l* konví – 6 (jejich součet musí být 22).
Potom objem v těchto konvích je 610 *l*, tudíž rozdíl je –20 *l*. Musíme tedy objem zvětšit o 20 *l* tím, že dvě 25 *l* konve přemístíme do 35 *l*. Pětadvacetilitrových konví je 14, pětatřicetilitrových konví je 8.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

7. způsob: (užitím obecného modelu a vytvoření vzorce) *

Počet konví po a [l] ………… x [ks],
počet konví po b [l] ………… y [ks],
počet konví celkem ………… p [ks],
počet litrů celkem ………… q [l],
potom modelovou situaci lze vyjádřit soustavou rovnic:

$$x + y = p \quad \Big| -x$$
$$\underline{ax + by = q}$$
$$y = p - x$$
$$ax + bp - bx = q$$
$$x\,(a - b) = q - bp$$

$$x = \frac{q - bp}{a - b},$$

potom $y = p - \dfrac{q - bp}{a - b} = \dfrac{ap - bp - q + bp}{a - b} = \dfrac{ap - q}{a - b}$.

Řešením je tedy uspořádaná dvojice $[x, y] = \underline{\underline{\left[\dfrac{q - bp}{a - b}; \dfrac{ap - q}{a - b}\right]}}$. **(4-2)**

V našem případě: $a = 25$, $b = 35$, $p = 22$, $q = 630$ a tedy:

$$x = \frac{630 - 35 \cdot 22}{25 - 35} = \frac{-140}{-10} = \underline{\underline{14}} \text{ [ks]}; \quad y = \frac{25 \cdot 22 - 630}{25 - 35} = \frac{-80}{-10} = \underline{\underline{8}} \text{ [ks]}.$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

<u>8. způsob:</u> (poměr – užitím obecného modelu II) +

Počet konví po a [l] .... x [ks],
počet konví po b [l] .... y [ks],
počet konví celkem .... p [ks],
<u>počet litrů celkem .... q [l],</u>
potom vypočteme průměrné množství v jedné konvi a označíme jej ρ, tedy platí:

$$q : p = \rho.$$

Předpokládáme-li, že $a < b$ (tak jako v naší úloze; není to na újmu obecnosti), potom:

$$\rho - a = \frac{q}{p} - a = \frac{q - pa}{p}; \quad b - \rho = b - \frac{q}{p} = \frac{bp - q}{p}.$$

Z předchozího modelu pro tutéž situaci vyplývá, že platí:

$$\frac{x}{y} = \frac{\dfrac{q - bp}{a - b}}{\dfrac{ap - q}{a - b}} = \frac{q - bp}{ap - q} = \frac{bp - q}{q - ap} = \frac{b - \rho}{\rho - a},$$

tedy poměr počtu $\underline{\underline{x : y = (b - \rho) : (\rho - a)}}$. **(4-3)**

Vypočteme-li tento poměr, řešení je již primitivní.

V našem případě $\rho = 630 : 22 = 28,\overline{63}$,

potom $b - \rho = 35 - 28,\overline{63} = 6,\overline{36} = \frac{70}{11}$; $\rho - a = 28,\overline{63} - 25 = 3,\overline{63} = \frac{40}{11}$.

Potom $x : y = \frac{70}{11} : \frac{40}{11} = 7 : 4$, tedy 25 l konví je $\frac{7}{11}$, tj. $\underline{\underline{14}}$ [ks], 35 l konví je $\frac{4}{11}$, tj. $\underline{\underline{8}}$ [ks].

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

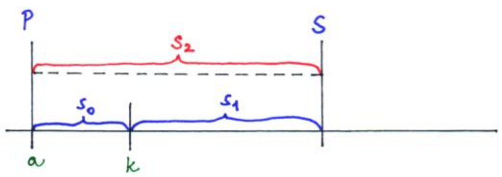
***Příklad* 3 – *řešení*:**

Kamion jede po dálnici z Prahy do Bratislavy průměrnou rychlostí 72 km/h. V okamžiku, kdy je kamion od Prahy 54 km, vyjíždí z Prahy osobní auto, které jede rovněž do Bratislavy a jehož průměrná rychlost je 90 km/h. Kdy a na kterém kilometru dálnice Praha – Bratislava dohoní osobní auto kamion.

<u>1. způsob:</u> (pomocí porovnání drah – užití rovnice)

Situace je zakreslena na obr. 4-2. Označme si neznámou dobu jízdy osobního auta x [h]. Osobní auto jede rychlostí 90 km/h, proto do místa setkání S (kdy dohoní kamion), ujede $90x$ [km].

Obr. 4-2:



Kamion má náskok 54 km a jede rychlostí 72 km/h, proto do místa setkání ujede $(72x + 54)$ [km]. Dráhy se rovnají, tedy:

$$72x + 54 = 90x \quad \Big| - 72x$$
$$18x = 54 \quad \Big| : 18$$
$$x = \underline{\underline{3}} \text{ [h]},$$
$$s_2 = 90 \cdot 3 = \underline{\underline{270}} \text{ [km]}.$$

Zkouška – dosazením do textu:
kamion …………… $72 \cdot 3 + 54 = 270$ [km],
osobní auto ………… $90 \cdot 3 = 270$ [km],
tedy obě auta ujela stejnou dráhu.
Odpověď:
Osobní auto dohoní kamion za 3 hodiny po svém výjezdu na 270 km dálnice (měřeno od Prahy).

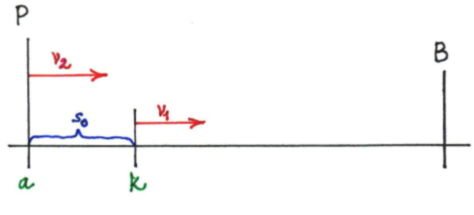
Poznámka: (jiný možný výpočet)
Za neznámou vezmeme dobu jízdy kamionu, označme opět x [h]. Potom dráha kamionu je $72x$ [km] a dráha osobního auta $90(x - \frac{54}{72})$ [km]. Z rovnosti drah plyne:

$$72x = 90(x - \tfrac{54}{72})$$
$$72x = 90x - 67{,}5 \quad \Big| - 72x + 67{,}5$$
$$67{,}5 = 18x \quad \Big| : 18$$
$$\underline{x = 3{,}75} \text{ [h]}$$

Potom čas auta je $3{,}75 - \frac{54}{72} = \underline{\underline{3}}$ [h] a dráha obou je $\underline{\underline{270}}$ km.

<u>2. způsob:</u> (pomocí fyzikálních vzorců)

Obr. 4-3:



$s_1 = v_1 t_1 + s_0$ $\qquad$ $s_1 = 72 \cdot t_1 + 54$
$s_2 = v_2 t_2$ $\qquad$ $s_2 = 90 \cdot t_2$
a platí: $t_1 = t_2 = t$; $\quad s_1 = s_2$,
potom

$$72t + 54 = 90t \quad \Big| - 72t$$
$$54 = 18t \quad \Big| : 18$$
$$t = \underline{\underline{3}} \text{ [h]}$$
$$s_1 = v_1 t_1 + s_0 = 72 \cdot 3 + 54 = \underline{\underline{270}} \text{ km},$$
$$s_2 = v_2 t_2 = 90 \cdot 3 = 270 \text{ km}.$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

Poznámka: (jiné užití vzorců, tj. jiný výpočet)

Vzorec pro rovnoměrný pohyb: $s = v \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{s}{v}$.

Kamion: ujel 54 km, potom počítáme čas t, $t = \frac{s}{72}$.

Osobní auto ujede za čas t o 54 km více, tj. $s + 54$; potom je čas t, $t = \frac{s+54}{90}$.

Protože se časy rovnají, platí:

$$\frac{s}{72} = \frac{s+54}{90} \quad \Big| \cdot 72 \cdot 90$$

$$90s = 72s + 3\,888 \quad \Big| - 72s$$

$$18s = 3\,888 \quad \Big| : 18$$

$$\underline{s = 216} \text{ [km]}$$

Kamion ujede po vyjetí osobního auta 216 km a před jeho vyjetím ještě 54 km, tedy celkem $\underline{\underline{270}}$ km.

Čas t (od vyjetí osobního auta do setkání) je $t = \frac{216}{72} = \underline{\underline{3}}$ h.

Auto ujede za 3 hodiny také 270 km.

<u>3. způsob:</u> (aritmeticky)

Do tabulky zapíšeme počty kilometrů, které ujely jednotlivá auta za určitou jednotku času. jednotku času volíme 45 minut (je to doba po kterou si kamion tvořil náskok). Zapíšeme tyto hodnoty do tabulky a dostáváme:

Tabulka 4-7:

čas jízdy	0 h 45 min	1 h 30 min	2 h 15 min	3 h 00 min	**3 h 45 min**	4 h 30 min	atd.
kamion	54 km	108 km	162 km	216 km	**270 km**	324 km	. . .
osobní auto	0 km	67,5 km	135 km	202,5 km	**270 km**	337,5 km	. . .

Z tabulky je zřejmé, že kamion jede 3 h 45 min a ujede 270 km. Tuto vzdálenost ujede osobní auto za 3 hodiny. Z tabulky je zřejmá i zkouška.

<u>4. způsob:</u> (úsudek – pomocí „zmenšování“ náskoku)

Kamion má náskok 54 km. Osobní auto každou hodinu sníží jeho náskok o $v_2 - v_1 = 90 - 72 = 18$ km. Tedy náskok kamionu bude vymazán za 54 : 18 = 3 hodiny (od výjezdu osobního auta). Osobní auto ujede za 3 hodiny 270 km, kamion včetně náskoku také 270 km (toto je vlastně také zkouška!).

Odpověď:

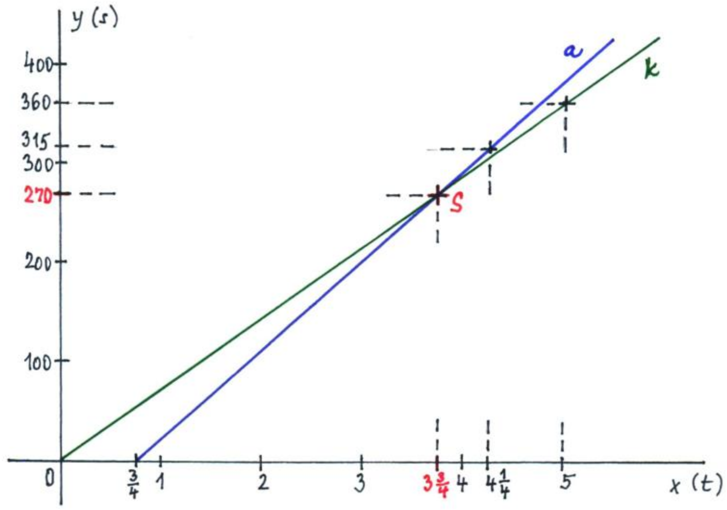
Osobní auto dohoní kamion za 3 hodiny po svém výjezdu na 270 km dálnice (měřeno od Prahy).

<u>5. způsob:</u> (pomocí grafu funkce)

Víme, že oba pohyby jsou lineární a jejich grafy jsou přímky. Stačí proto pro každou přímku najít dva body. Grafem pohybu kamionu bude přímka k, grafem pohybu auta přímka a. Řešením je společný průsečík (jeho souřadnice). Na osu x naneseme čas t, na osu y dráhu s.

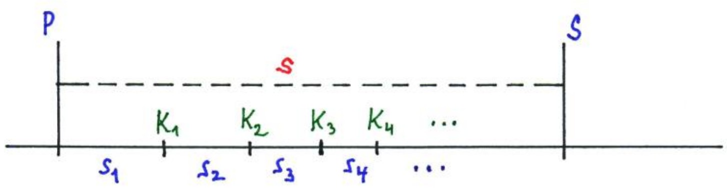
Přímka k: $x_1 = 0 \quad \rightarrow \quad y_1 = 0; \qquad x_2 = 5 \quad \rightarrow \quad y_2 = 360.$
Přímka a: $x_1 = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad y_1 = 0; \qquad x_2 = 4\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad y_2 = 315.$
Přímky a, k se protínají v bodě $S = [3\frac{3}{4}; 270]$. To znamená, že kamion pojede celkem 3 h 45 min (osobní automobil 3 h) a oba se potkají 270 km od Prahy.
Z grafu je zřejmá i zkouška.

Graf (obr. 4-4):



6. způsob: (užití nekonečné geometrické řady) +

Obr. 4-5:



V čase, kdy vyjíždí osobní automobil z Prahy (bod P), je kamion v bodě K_1 a má náskok 54 km. Automobil ujede dráhu s_1 do K_1 za čas $t_1 = 54 : 90 = 0{,}6$ h. Když je automobil v bodě K_1, je kamion již v bodě K_2 a ujede navíc dráhu $s_2 = 72 \cdot 0{,}6 = 43{,}2$ km. Do bodu K_2 z bodu K_1 dojede automobil za čas $t_2 = 43{,}2 : 90 = 0{,}48$ h. Za tuto dobu dojede kamion do bodu K_3 a ujede dráhu $s_3 = 72 \cdot 0{,}48 = 34{,}56$ km. Do bodu K_3 dojede automobil za čas $t_3 = 34{,}56 : 90 = 0{,}384$ h. Za tuto dobu dojede kamion do bodu K_4 a ujede dráhu $s_4 = 72 \cdot 0{,}384 = 27{,}648$ km. Do bodu K_4 dojede automobil za čas $t_4 = 27{,}648 : 90 = 0{,}307\,2$ h atd. …
Nyní stačí sečíst obě nekonečné řady (jak pro dráhu, tak pro čas).
Řada $s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \ldots = 54 + 43{,}2 + 34{,}56 + 27{,}648 + \ldots$
je nekonečná geometrická řada, neboť platí

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{s_3}{s_2} = \frac{s_4}{s_3} = \ldots = \frac{43{,}2}{54} = \frac{34{,}56}{43{,}2} = \frac{27{,}648}{34{,}56} = \ldots = 0{,}8 = q\,.$$

Součet této řady je

$$s = \frac{s_1}{1-q} = \frac{54}{1-0{,}8} = \underline{\underline{270}}\ \text{[km]}.$$

Řada $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots = 0{,}6 + 0{,}48 + 0{,}384 + 0{,}307\,2 + \ldots$
je nekonečná geometrická řada, neboť platí

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{t_3}{t_2}=\frac{t_4}{t_3}=\ldots=\frac{0{,}48}{0{,}6}=\frac{0{,}384}{0{,}48}=\frac{0{,}307\,2}{0{,}384}=\ldots=0{,}8=q\,.$$

Součet této řady je

$$t=\frac{t_1}{1-q}=\frac{0{,}6}{1-0{,}8}=\underline{\underline{3}}\,[\mathrm{h}].$$

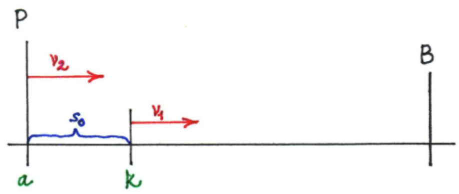
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

7. způsob: (užitím obecného modelu) *

Vyjdeme ze základních vztahů pro rovnoměrný pohyb

$$s_1=v_1t_1+s_0 \qquad\qquad s_2=v_2\,t_2\,.$$

Obr. 4-6:



Z rovností $s_1=s_2$, $t_1=t_2=t$ plyne

$$v_1t+s_0=v_2t \quad \Big|-v_1t$$

$$v_2t-v_1t=s_0$$

$$(v_2-v_1)\cdot t=s_0 \quad \Big|:(v_2-v_1)$$

$$\underline{\underline{t=\frac{s_0}{v_2-v_1}}}\,. \tag{4-4a}$$

Z rovnosti $s_2=v_2\,t$ vyjádříme $t=\dfrac{s_2}{v_2}$ a dosadíme do $s_1=v_1t+s_0$ a dostáváme

$$s_1=\frac{v_1}{v_2}s_2+s_0\,.$$

Protože $s_1=s_2=s$, dostáváme

$$s=\frac{v_1}{v_2}s+s_0 \quad \Big|-\frac{v_1}{v_2}s$$

$$s-\frac{v_1}{v_2}s=s_0$$

$$s\cdot\left(1-\frac{v_1}{v_2}\right)=s_0$$

$$s\cdot\frac{v_2-v_1}{v_2}=s_0 \quad \Big|\cdot\frac{v_2}{v_2-v_1}$$

$$\underline{\underline{s=\frac{v_2\,s_0}{v_2-v_1}}}\,. \tag{4-4b}$$

V našem případě: $v_1=72$ km/h, $v_2=90$ km/h, $s_0=54$ km, potom

$$t=\frac{s_0}{v_2-v_1}=\frac{54}{90-72}=\underline{\underline{3}}\ [\mathrm{h}],$$

$$s=\frac{v_2\,s_0}{v_2-v_1}=\frac{90\cdot 54}{90-72}=\underline{\underline{270}}\ \text{[km]}.$$

***Příklad* 4 – *řešení*:**
Vodní nádrž by se naplnila jen prvním přítokem za 36 minut, jen druhým za 45 minut. Za jak dlouho se nádrž naplní, přitéká-li voda nejprve 9 minut jen prvním přívodem a pak oběma současně?

<u>1. způsob:</u> (rovnice – užití normy za 1 minutu)

1. přítokem nateče nádrž ………. za 36 min …….. za 1 min nateče $\frac{1}{36}$ nádrže,
2. přítokem nateče nádrž ………. za 45 min …….. za 1 min nateče $\frac{1}{45}$ nádrže,
oběma přítoky nateče nádrž ……. za x min …….. za 1 min nateče $\frac{1}{x}$ nádrže;
nejdříve nádrž natéká prvním přítokem 9 min, potom oběma x min (až do naplnění):

$$9\cdot\frac{1}{36}+x\cdot\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{45}\right)=1$$

$$\frac{1}{4}+\frac{5+4}{180}\cdot x=1$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{20}x=1 \quad \Big|\cdot 20$$

$$5+x=20 \quad \Big|-5$$

$$x=15\ \text{[min]}$$

Celkem: 9 + 15 = $\underline{\underline{24}}$ [min].
Zkouška:
1. přítok: voda natéká 24 min, tj. nateče: $24\cdot\frac{1}{36}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$ nádrže,
2. přítok: voda natéká 15 min, tj. nateče: $15\cdot\frac{1}{45}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$ nádrže,
celkem neteče: $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$ = 1, tedy přesně celá nádrž.
Odpověď:
Nádrž se naplní od otevření prvního přítoku za 24 minut.

<u>2. způsob:</u> (pomocí rovnice II)

1. přítokem nateče nádrž ………. za 36 min …….. za 1 min nateče $\frac{1}{36}$ nádrže,
2. přítokem nateče nádrž ………. za 45 min …….. za 1 min nateče $\frac{1}{45}$ nádrže,
oběma přítoky nateče nádrž ……. za x min;
z toho 1. přítokem natéká x minut, 2. přítokem natéká x – 9 minut, tedy platí:

$$x\cdot\tfrac{1}{36}+(x-9)\cdot\tfrac{1}{45}=1 \quad \Big|\cdot 180$$

$$5x+4x-36=180 \quad \Big|-36$$

$$9x=216$$

$$\underline{\underline{x=24}}\ \text{[min]}$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

3. způsob: (úsudek a poměr)

1. přítokem se naplní za 36 min ..... 1 nádrž,
2. přítokem se naplní za 36 min ..... 36 : 48 = 0,8 nádrže,
oběma přítoky se naplní za 36 min celkem ..... 1 + 0,8 = 1,8 nádrže.
Za 9 minut nateče 1. přítokem $9 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{4}$ nádrže, proto se budou napouštět jen $\frac{3}{4}$ nádrže. Dostáváme trojčlenku (poměr):

$$\uparrow \quad \begin{array}{l} 36 \text{ min} \ldots\ldots 1{,}8 \ \textit{nádrže} \\ x \text{ min} \ldots\ldots \frac{3}{4} \ \textit{nádrže} \end{array} \quad \uparrow$$

Potom $\frac{x}{36} = \frac{\frac{3}{4}}{1{,}8} \quad \rightarrow \quad x = \frac{27}{1{,}8} = 15$ minut. {za 15 min se naplní oběma přítoky $\frac{3}{4}$ nádrže.}
Celá nádrž se naplní za 9 + 15 = $\underline{\underline{24}}$ minut.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

4. způsob: (užitím úsudku)

1. přítokem se naplní za 1 min ..... $\frac{1}{36}$ nádrže,
2. přítokem se naplní za 1 min ..... $\frac{1}{45}$ nádrže,
oběma přítoky se naplní za 1 min ..... $\frac{1}{36} + \frac{1}{45} = \frac{1}{20}$ nádrže.
Protože za 1 min se naplní oběma přítoky $\frac{1}{20}$ nádrže, celá nádrž se naplní za 20 minut.
Nádrž je zčásti napuštěna (po dobu 9 min 1. přítokem). Je napuštěna $9 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{4}$ nádrže, proto se budou napouštět jen $\frac{3}{4}$ nádrže a k tomu bude třeba $\frac{3}{4}$ času, tj. $\frac{3}{4} \cdot 20 = 15$ min.
Celkem se nádrž bude napouštět 9 + 15 = $\underline{\underline{24}}$ minut.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

5. způsob: (pomocí procent) *

1. přítokem nateče nádrž .... za 36 min, tj. 100% .... za 1 min nateče $\frac{100}{36} = \frac{25}{9}$ % nádrže,
2. přítokem nateče nádrž .... za 45 min, tj. 100% .... za 1 min nateče $\frac{100}{45} = \frac{20}{9}$ % nádrže,
oběma přítoky nateče nádrž .... za 1 min nateče $\frac{25}{9} + \frac{20}{9} = \frac{40}{9} = 5\,\%$ nádrže;
1. přítokem nateče za 9 min .... $9 \cdot \frac{25}{9} = 25\,\%$, zbývá naplnit 75% nádrže, proto

$$\downarrow \quad \begin{array}{l} x\,[\text{min}] \ldots\ldots 75\,[\%] \\ 1\,[\text{min}] \ldots\ldots 5\,[\%] \end{array} \quad \downarrow$$

$$\frac{x}{1} = \frac{75}{5} \quad \rightarrow \quad \underline{x = 15}\ [\text{min}],$$

celkem celá nádrž nateče za 9 + 15 = $\underline{\underline{24}}$ min.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

6. způsob: (užitím obecného modelu) *

1. přítok .... voda natéká *a* min .... za 1 min nateče $\frac{1}{a}$ nádrže,
2. přítok .... voda natéká *b* min .... za 1 min nateče $\frac{1}{b}$ nádrže,
oba přítoky .... voda natéká *x* min .... za 1 min nateče $\frac{1}{x}$ nádrže;
oběma přítoky také nateče za 1 min ... $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ nádrže a tedy platí:

Postupujeme stejně jako při odvození vztahu (5-1a) (viz příloha 1).

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{a+b}{ab}$$

$$\underline{\underline{x=\frac{ab}{a+b}}}. \qquad \textbf{(4-5)}$$

Je-li a = 36 min, b = 45 min, potom $x = \dfrac{36\cdot 45}{36+45} = \dfrac{1\,620}{81}$ = 20 min.

Prvním přítokem nejprve natéká voda 9 minut, tj. za tuto dobu se naplní $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$ nádrže, zbývá naplnit $\frac{3}{4}$ nádrže. Naplní-li se celá nádrž oběma přítoky za 20, $\frac{3}{4}$ nádrže se naplní za 15 minut a celková doba plnění nádrže je 15 + 9 = $\underline{\underline{24}}$ minut.

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

Varianta B:

***Příklad* 1 – *řešení*:**

Písemnou zkoušku z matematiky psalo 37 žáků, nikdo z nich neměl pětku. Jedniček bylo dvakrát víc než čtyřek, dvojek bylo o 6 více než jedniček, trojek bylo 11. Kolik žáků mělo jedničku, kolik dvojku, trojku a čtyřku?

1. způsob: (pomocí rovnice)

Počet jedniček . . . . . x, ... 8 žáků;
počet dvojek . . . . . . $x + 6$, ... 14 žáků;
počet trojek . . . . 11, ... 11 žáků;
počet čtyřek . . . . $\frac{x}{2}$, ... 4 žáci;
počet pětek . . . . 0, ... 0 žáků.

Potom celkem: $x + x + 6 + 11 + \frac{x}{2} = 37$

$$2{,}5x + 17 = 37 \quad \Big|\ -17$$

$$2{,}5x = 20 \quad \Big|\ :2{,}5$$

$$\underline{\underline{x = 8}} \text{ žáků.}$$

Zkouška:

Poměr jedniček a čtyřek: 8 : 4 = 2 (-krát více);
rozdíl dvojek a jedniček: 14 – 8 = 6;
celkem: 8 + 14 + 11 + 4 = 37 žáků.

Odpověď:

8 žáků mělo jedničku, 14 dvojku, 11 trojku, 4 čtyřku a žádný pětku.

2. způsob: (pomocí soustavy rovnic)

Počet jedniček . . . . . x, ... 8 žáků;
počet dvojek . . . . . . y, ... 14 žáků;
počet trojek . . . . z, ... 11 žáků;
počet čtyřek . . . . w, ... 4 žáci;
počet pětek . . . . 0, ... 0 žáků.

Potom celkem: $x + y + z + w = 37$

$$x = 2w$$

$$y = x + 6 \qquad \rightarrow \qquad y = 2w + 6$$

$$\underline{z = 11}$$

$$2w + 2w + 6 + 11 + w = 37$$

$$5w + 17 = 37 \quad | -17$$

$$5w = 20 \quad | :5$$

$$\underline{w = 4} \text{ [žáci]},$$

potom řešení je $x = 8$, $y = 14$, $z = 11$, $w = 4$.

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

<u>3. způsob:</u> (aritmeticky)

Počet jedniček je dvojnásobek čtyřek. Je-li počet čtyřek přirozené číslo (nebo 0), počet jedniček je sudé číslo, počet dvojek je o šest větší než jedniček a počet trojek vždy 11. Volíme počet jedniček (sudé číslo) nebo počet čtyřek (přirozené číslo), doplníme ostatní hodnoty do tabulky a hledáme, která čtveřice vyhovuje řešení.

Tabulka 4-8:

jedničky	2	4	6	**8**	10	12	. . .
dvojky	8	10	12	**14**	16	18	. . .
trojky	11	11	11	**11**	11	11	. . .
čtyřky	1	2	3	**4**	5	6	. . .
celkem	22	27	32	**37**	42	47	. . .

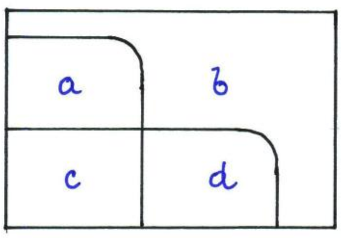
Z tabulky je zřejmé, že jediné řešení je: počet jedniček – 8, počet dvojek – 14, počet trojek – – 11, počet čtyřek – 4.

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

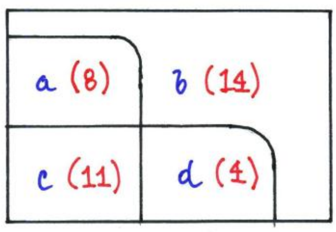
<u>4. způsob:</u> (Vennovy diagramy)

Danou situaci zobrazíme pomocí Vennova diagramu

Obr. 4-7:



Obr. 4-8:



V obr. 4-7 označíme:

a – jedničky, b – dvojky, c – trojky, d – čtyřky.

Zapíšeme-li vztahy, dostáváme soustavu rovnic:

(1) $a + b + c + d = 37$,

(2) $a = 2d$,

(3) $a + 6 = b$, ... $b = 2d + 6$,

(4) $c = 11$,

odkud: $2d + 2d + 6 + 11 + d = 37 \quad \big| -17$

$$5d = 20 \quad \big| : 5$$

$$\underline{d = 4} \quad \rightarrow \quad \underline{a = 8}, \quad \underline{b = 14}, \quad \underline{c = 11}.$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

Poznámka:
Vennův diagram slouží pouze jako názor.

***Příklad* 2 – *řešení*:**

Pět litrů bílého vína a šest litrů červeného vína stálo 432 Kč. Jeden litr červeného vína je o 6 Kč dražší než 1 litr bílého vína. Kolik korun zaplatíme za 2 litry bílého a 2 litry červeného vína?

1. způsob: (pomocí rovnice)

Litr bílého vína stojí . . . . . x [Kč],
litr červeného vína stojí . . . $x + 6$ [Kč].
Potom platí: $5x + 6(x + 6) = 432$

$$5x + 6x + 36 = 432 \quad \big| -36$$

$$11x = 36 \ \text{[Kč]}.$$

Litr bílého – 36 Kč, ... 2 litry . . . . . 72 Kč,
litr červeného – 42 Kč, . . . 2 litry . . . . . 84 Kč,
celkem . . 156 Kč.

Zkouška:
5 l bílého . . . . $5 \cdot 36 = 180$ Kč
6 l červeného . . . . . $6 \cdot 42 = \underline{252 \text{ Kč}}$
celkem . . . . . 432 Kč

Odpověď:
Za 2 litry bílého a 2 litry červeného zaplatíme celkem 156 Kč.

2. způsob: (pomocí soustavy rovnic)

Litr bílého vína stojí . . . . . x [Kč],
litr červeného vína stojí . . . y [Kč].
Potom platí: $y = x + 6$

$$\underline{5x + 6y = 432}$$

$$5x + 6x + 36 = 432 \quad \big| -36$$

$$11x = 36 \ \text{[Kč]}.$$

Litr bílého – 36 Kč, ... 2 litry . . . . . 72 Kč,
litr červeného – 42 Kč, . . . 2 litry . . . . . 84 Kč,
celkem . . 156 Kč.

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

3. způsob: (pomocí průměru – aritmeticky)

Průměrná cena jednoho litru vína je $432 : 11 \doteq 39{,}30$ Kč. Rozdíl cen je 6 Kč, proto cenu bílého stanovíme na 36 Kč/l, cenu červeného na 42 Kč/l a provedeme zkoušku:

5 l bílého . . . . $5 \cdot 36 = 180$ Kč
6 l červeného . . . . . $6 \cdot 42 = \underline{252 \text{ Kč}}$

celkem . . . . . $\underline{\underline{432\text{ Kč}}}$

Pokud by zkouška nevyšla, ceny upravíme tak, aby jejich rozdíl byl vždy 6 Kč (až na 10 hal).
Odpověď stejně jako v 1.

<u>4. způsob:</u> (úsudkem)

Šest litrů červeného vína je celkem o $6\cdot 6 = 36$ Kč dražší. Odečteme-li tuto hodnotu od celkové ceny, dostáváme $432 - 36 = 396$ Kč. To je cena 11 litrů levnějšího (bílého) vína. Potom 1*l* bílého vína stojí $396 : 11 = 36$ Kč. Červené víno je o 6 Kč dražší, jeho 1*l* stojí
$36 + 6 = 42$ Kč.
2*l* bílého a 2*l* červeného stojí $2\cdot 36 + 2\cdot 42 = \underline{\underline{156}}$ Kč.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

<u>5. způsob:</u> (poměr - užitím modelu II) *

Počet litrů bílého vína .... x [ks], jeho cena za litr .... u [Kč],
počet litrů červeného vína .... y [ks], jeho cena za litr .... v [Kč],
rozdíl mezi cenou červeného (dražší) a bílého vína .... d [Kč],
<u>celková cena vína .... q [Kč],</u>
potom platí (podobně jako v příkladu A-2):

$$x + d = y \qquad\rightarrow\qquad x = y - d$$
$$\underline{ux + vy = q} \qquad\qquad \underline{ux + vy = q}$$
$$ux + v(x + d) = q \qquad\qquad u(y - d) + vy = q$$
$$ux + vx + vd = q \quad \Big|\, - vd \qquad\qquad uy - ud + vy = q \quad \Big|\, - ud$$
$$(u + v)x = q - vd \quad \Big|\, : (u + v) \qquad\qquad (u + v)y = q + ud \quad \Big|\, : (u + v)$$
$$\underline{\underline{x = \frac{q - vd}{u + v}}}; \qquad \textbf{(4-6a)} \qquad \underline{\underline{y = \frac{q + ud}{u + v}}}. \qquad \textbf{(4-6b)}$$

Potom celková cena je

$$c = 2x + 2y = 2\cdot\left(\frac{q - vd}{u + v} + \frac{q + ud}{u + v}\right) = 2\cdot\frac{2q - vd + ud}{u + v} = \underline{\underline{2\cdot\frac{2q + d\cdot(u - v)}{u + v}}}. \qquad \textbf{(4-6)}$$

V našem případě: $u = 5$, $v = 6$, $d = 6$, $q = 432$.

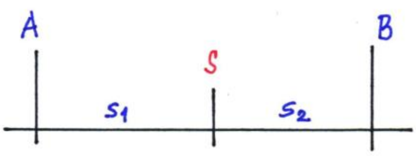
$$c = 2\cdot\frac{2q + d\cdot(u - v)}{u + v} = 2\cdot\frac{2\cdot 432 + 6\cdot(5 - 6)}{5 + 6} = \frac{1716}{11} = \underline{\underline{156}}\text{ Kč.}$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

***Příklad* 3 – *řešení*:**
Pánové *A* a *B* bydlí ve vzdálenosti 224 km. Vyjedou-li v autech současně ze svých obydlí proti sobě, setkají se po 2 hodinách. Pán *A* ujede za hodinu o 4 km více než pán *B*. Kolik km urazí každý z nich za hodinu?

<u>1. způsob:</u> (pomocí rovnice)

Obr. 4-9:



Pán z *A* jede 2 h a ujede za tu dobu o 8 km více. Proto pro dráhy platí:

$s_1 = x$ [km], $s_2 = x - 8$ [km].

Celková dráha je $s = s_1 + s_2$, proto platí:

$$x + x - 8 = 224 \quad \Big|\ +8$$
$$2x = 232 \quad \Big|\ :2$$
$$x = 116 \text{ [km]}, \quad \text{druhý } x - 8 = 108 \text{ [km]}.$$

Rychlost pána *A* je 116 : 2 = $\underline{\underline{58}}$ km/h, rychlost pána *B* je 108 : 2 = $\underline{\underline{54}}$ km/h.

Zkouška:

Rozdíl rychlostí je 58 – 54 = 4 km/h.

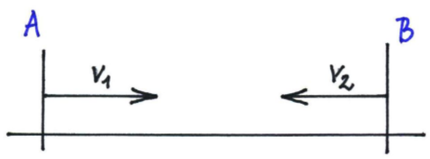
Celková dráha je $58 \cdot 2 + 54 \cdot 2 = 224$ km.

Odpověď:

Pán *A* urazí 58 km/h, pán *B* urazí 54 km/h.

2. způsob: (pomocí fyzikálních vzorců)

Obr. 4-10:



$s_1 = v_1 \cdot t_1$ $\qquad v_1 = x$ $\qquad t_1 = t_2 = 2$

$s_2 = v_2 \cdot t_2$ $\qquad v_2 = x - 4$

$$s_1 + s_2 = 224 \quad \rightarrow \quad x \cdot 2 + (x - 4) \cdot 2 = 224$$
$$2x + 2x - 8 = 224 \quad \Big|\ +8$$
$$4x = 232 \quad \Big|\ :4$$
$$\underline{\underline{x = 58}} \text{ [km/h]}; \quad v_2 = x - 4 = \underline{\underline{54}} \text{ [km/h]}.$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

3. způsob: (aritmeticky)

Vydělíme: 224 : 4 = 56. Toto je průměrná rychlost (v km/h) obou. Volíme postupně rychlosti podobné této (začneme např. pro v_1 = 54 km/h, v_2 = 50 km/h) a hledáme, kdy bude jejich trasa rovna 224 km (viz tabulka).

Tabulka 4-9:

pán A	. . .	54	56	**58**	60	. . .
pán B	. . .	50	52	**54**	56	. . .
trasa	. . .	208	216	**224**	232	. . .

Z tabulky je zřejmé, že jediné řešení je v_1 = $\underline{\underline{58 \text{ km/h}}}$, v_2 = $\underline{\underline{54 \text{ km/h}}}$.

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

4. způsob: (úsudek)

Urazí-li první za 1 h o 4 km více než druhý, za 2 h (do setkání) urazí o 8 km více. Odečteme-li 8 km od celkové dráhy, dostáváme 224 – 8 = 216 km. Toto je dráha, kterou by oba urazili, kdyby se pohybovali rychlostí pomalejšího (druhého). Rychlost pána z *B* je tedy 216 : 4 = = $\underline{\underline{54 \text{ km/h}}}$. Potom rychlost pána z *A* je 54 + 4 = $\underline{\underline{58 \text{ km/h}}}$.

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

5. způsob: (pomocí průměrné rychlosti)

$v = \frac{s}{t}$; $s = 224$ km, $t = 2$ h; $v = \frac{224}{2} = 112$ km/h.

Auta se za hodinu přibližují průměrnou rychlostí 112 km/h (je to součet jejich rychlostí). Platí:

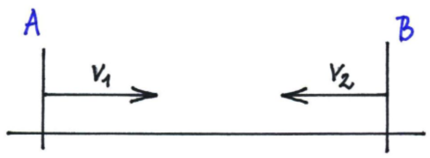
$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 &= 112 \\ v_1 - v_2 &= 4 \end{aligned}\right\} +$$

$2v_1 = 116 \quad \rightarrow \quad v_1 = \underline{\underline{58 \text{ km/h}}}, \quad \rightarrow \quad v_2 = \underline{\underline{54 \text{ km/h}}}.$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

6. způsob: (pomocí obecného modelu) *

Obr. 4-11:



Vyjdeme ze vzorce pro rovnoměrný pohyb a dostáváme:

$s_1 = v_1 \cdot t_1 \qquad t_1 = t_2 = t$

$s_2 = v_2 \cdot t_2 \qquad v_2 = v_1 - d$

$s_1 + s_2 = s \quad \rightarrow \quad v_1t_1 + v_2t_2 = s$

$v_1t + (v_1 - d)t = s$

$v_1t + v_1t - dt = s \quad \Big| + dt$

$2v_1t = s + dt \quad \Big| : 2t$

$$\underline{\underline{v_1 = \frac{s + dt}{2t}}}. \qquad \textbf{(4-7a)}$$

Protože $v_2 = v_1 - d = \frac{s + dt}{2t} - d \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{v_2 = \frac{s - dt}{2t}}}.$ **(4-7b)**

Pro $s = 224$ km, $d = 4$ km/h, $t = 2$ h dostáváme:

$$v_1 = \frac{s + dt}{2t} = \frac{224 + 4 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \underline{\underline{58 \text{ km/h}}};$$

$$v_2 = \frac{s - dt}{2t} = \frac{224 - 4 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \underline{\underline{54 \text{ km/h}}}.$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

***Příklad* 4 – *řešení*:**

Dělník *A* by sám provedl výkop za 7 hodin, dělník *B* sám za 6 hodin. Protože výkop má být skončen za 2 hodiny, byl přibrán ještě dělník *C*. Za jak dlouho by výkop provedl sám dělník *C*?

1. způsob: (pomocí rovnice)

1. dělník . . . udělá sám práci za 7 h . . . . . za 1 h udělá . . . $\frac{1}{7}$ práce,

2. dělník . . . udělá sám práci za 6 h . . . . . za 1 h udělá . . . $\frac{1}{6}$ práce,

3. dělník . . . udělá sám práci za x h . . . . . za 1 h udělá . . . $\frac{1}{x}$ práce,

Dělníci pracují společně 2 h, proto pro společnou práci platí:

$$2\cdot\frac{1}{7}+2\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{x}=1$$

$$\frac{2}{7}+\frac{1}{3}+\frac{2}{x}=1 \quad \Big|\cdot 21x$$

$$6x + 7x + 42 = 21x \quad \Big| -13x$$

$$42 = 8x \quad \Big| : 8$$

$$x = 5{,}25 \text{ h} = \underline{\underline{5 \text{ h } 15 \text{ min}}}.$$

Zkouška:

1. dělník za 2 h udělá . . . . . $\frac{2}{7}$ práce,

2. dělník za 2 h udělá . . . . . $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ práce,

3. dělník za 2 h udělá . . . . . $\frac{2}{5{,}25}=\frac{8}{21}$ práce,

všichni pak udělají dohromady $\frac{2}{7}+\frac{1}{3}+\frac{8}{21}=\frac{6+7+8}{21}=\frac{21}{21}=1$ (tj. celou) práci.

Odpověď:

Třetí dělník by sám provedl výkop za 5 h 15 min.

Poznámka – speciální případ 1. Způsobu:

1. dělník . . . . . za 1 h udělá . . . $\frac{1}{7}$ práce . . . . . za 2 h udělá . . . $\frac{2}{7}$ práce,

2. dělník . . . . . za 1 h udělá . . . $\frac{1}{6}$ práce, ... za 2 h udělá . . . $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ práce,

3. dělník . . . . za 2 h udělá . . . x práce,

Dělníci pracují společně, proto pro společnou práci platí:

$$\frac{2}{7}+\frac{1}{3}+x=1 \quad \Big|\cdot 21$$

$$6 + 7 + 21x = 21 \quad \Big| -13$$

$$21x = 8$$

$$x = \tfrac{8}{21} \text{ (práce)}.$$

Třetí dělník udělá za 2 h $\frac{8}{21}$ práce, za 1 h polovinu, tj. $\frac{4}{21}$ práce. Celou práci pak udělá za $\frac{21}{4}$ h = 5 h 15 min.

<u>2. způsob:</u> (pomocí rovnice II)

1. dělník . . . . . za 1 h udělá . . . $\frac{1}{7}$ práce . . . . . za x h udělá . . . $\frac{x}{7}$ práce,

2. dělník . . . . . za 1 h udělá . . . $\frac{1}{6}$ práce, ... za x h udělá . . . $\frac{x}{6}$ práce,

3. dělník . . . . za x h udělá . . . 1 práci,

všichni dělníci za 1 h udělají . . . $\frac{1}{2}$ práce, ... za x h udělají . . . $\frac{x}{2}$ práce,

z toho plyne vztah:

$$\frac{x}{7}+\frac{x}{6}+1=\frac{x}{2} \quad \Big|\cdot 42$$

$$6x + 7x + 42 = 21x \quad \Big| -13x$$

$$42 = 8x \quad \Big| : 8$$

$$x = \underline{\underline{5{,}25}} \text{ h}.$$

Třetí dělník udělá celou práci 5 h 15 min.

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

<u>3. způsob:</u> (pomocí procent a poměru = trojčlenky)

A udělá za 7 h . . . 100 %, potom . . . . . za 2 h udělá . . . (100 : 7) $\cdot$ 2 $\doteq$ 28, 571 %,
B udělá za 6 h . . . 100 %, potom . . . . . za 2 h udělá . . . (100 : 6) $\cdot$ 2 $\doteq$ 33, 333 %,
C udělá za x h . . . 100 %, potom . . . . . za 2 h udělá . . . zbytek, tj. . . $\doteq$ 38, 096 %.
Zbytek: 100 – 28, 571 – 33, 333 = 38, 096.

$$\uparrow \quad \begin{array}{l} 2\,h \ldots\ldots\ldots 38{,}096\ (\%) \\ x\,h \ldots\ \ldots\ldots 100\quad (\%) \end{array} \quad \uparrow$$

$$\frac{x}{2} = \frac{100}{38{,}096} \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{200}{38{,}096} \doteq 5{,}250 \text{ h} = \underline{\underline{5 \text{ h } 15 \text{ min}}}.$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

<u>4. způsob:</u> (úsudek)

1. dělník . . . . . za 1 h udělá . . . $\frac{1}{7}$ práce . . . . . za 2 h udělá . . . $\frac{2}{7}$ práce,
2. dělník . . . . . za 1 h udělá . . . $\frac{1}{6}$ práce, ... za 2 h udělá . . . $\frac{1}{3}$ práce,

oba společně pak za 2 h udělají $\frac{2}{7} + \frac{1}{3} = \frac{6+7}{21} = \frac{13}{21}$ práce.
Na třetího dělníka zbývá $1 - \frac{13}{21} = \frac{8}{21}$ práce. Jestliže třetí dělník udělá za 2 h $\frac{8}{21}$ práce, za 1 h udělá polovinu, tj. $\frac{4}{21}$ práce. Celou práci pak udělá za $\frac{21}{4}$ h = $\underline{\underline{5 \text{ h } 15 \text{ min}}}$.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

<u>5. způsob:</u> (pomocí rovnice III)

1. dělník . . . . . za 1 h udělá . . . $\frac{1}{7}$ práce . . . . . za 2 h udělá . . . $\frac{2}{7}$ práce,
2. dělník . . . . . za 1 h udělá . . . $\frac{1}{6}$ práce, ... za 2 h udělá . . . $\frac{1}{3}$ práce,
3. dělník . . . . za 2 h udělá . . . x práce,

potom všichni tři společně udělají za 2 h celou práci, tedy platí

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{3} + x = 1 \quad \Big| \cdot 21$$
$$6 + 7 + 21x = 21 \quad \Big| - 13$$
$$21x = 8 \quad \rightarrow \quad x = \frac{8}{21}.$$

Třetí dělník udělá za 1 hod polovinu práce, tj. $\frac{4}{21}$ práce. Celou práci pak udělá za $\frac{21}{4}$ h = $\underline{\underline{5 \text{ h } 15 \text{ min}}}$.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

<u>6. způsob:</u> (pomocí obecného modelu) *

1. dělník . . . udělá sám práci za a h . . . . . za 1 h udělá . . . $\frac{1}{a}$ práce,
2. dělník . . . udělá sám práci za b h . . . . . za 1 h udělá . . . $\frac{1}{b}$ práce,
3. dělník . . . udělá sám práci za x h . . . . . za 1 h udělá . . . $\frac{1}{x}$ práce,

Všichni tři dělníci . . . udělají práci za s h . . . . . za 1 h udělají . . . $\frac{1}{s}$ práce, proto pro společnou práci platí (postupujeme stejně jako při odvození vztahu (5-8d), (viz příloha 2)):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{s} \quad \Big| \cdot a\,b\,x\,s$$

$$
\begin{aligned}
bsx + asx + abs = abx \quad &\Big|\ - asx - bsx\\
abs = abx - asx - bsx\\
(ab - as - bs)\cdot x = abs \quad &\Big|\ : (ab - as - bs)\\
\underline{\underline{x = \frac{abs}{ab - as - bs}}}\,.
\end{aligned}
\qquad \textbf{(4-8)}
$$

Pro $a = 7$, $b = 6$, $s = 2$ dostáváme:

$$x = \frac{abs}{ab - as - bs} = \frac{7\cdot 6\cdot 2}{7\cdot 6 - 7\cdot 2 - 6\cdot 2} = \frac{84}{16} = 5{,}25\ \text{h} = \underline{\underline{5\ \text{h}\ 15\ \text{min}}}.$$

Varianta C:

***Příklad* 1 – *řešení*:**

Tři sourozenci měli našetřeno celkem 1 274 Kč. Petr měl našetřeno o 15 % více než Jirka a Hanka o 10 % méně než Petr. Kolik korun měl našetřeno každý z nich?

1. způsob: (pomocí rovnice)

Jirka ……. 100% …… x [Kč],
Petr ……. 115% …… $1{,}15x$ [Kč],
Hanka …… 90% ze 115%…… $1{,}15x \cdot 0{,}9 = 1{,}035x$ [Kč],

$$
\begin{aligned}
x + 1{,}15x + 1{,}035x &= 1\,274\\
3{,}185x &= 1\,274 \quad \Big|\ : 3{,}185\\
x &= 400\ [\text{Kč}],
\end{aligned}
$$

potom v Jirka měl 400 Kč, Petr 1,15 · 400 = 460 Kč a Hanka 0,9 · 460 = 414 Kč.
Zkouška – dosazením do textu:
Celkem je 400 + 460 + 414 = 1 274 Kč.
Odpověď:
Jirka měl našetřeno 400 Kč, Petr 460 Kč a Hanka 414 Kč.

2. způsob: (pomocí soustavy rovnic)

Jirka ………… x [t],
Petr …………. y [t],
Hanka ……….. z [t],

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 1\,274\\
y &= x + 0{,}15x\\
z &= 0{,}9y\\
x + 1{,}15x + 0{,}9\cdot 1{,}15x &= 1\,274\\
3{,}185x &= 1\,274 \quad \Big|\ : 3{,}185\\
x &= 400\ [\text{Kč}],
\end{aligned}
$$

potom v Jirka měl 400 Kč, Petr 1,15 · 400 = 460 Kč a Hanka 0,9 · 460 = 414 Kč.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

3. způsob: (aritmeticky) [+])

Najdeme „střední“ hodnotu: 1274 : 3 $\doteq$ 424,6. Začneme tedy od 420 Kč a předpokládáme, že tolik ušetřil Jirka. Do tabulky zapíšeme všechny hodnoty včetně součtu. Protože výsledný součet je větší, budeme postupně ubírat, až se dostaneme k výsledné hodnotě (viz tabulka 4-9).

Tabulka 4-10:

Jirka 100%	420	410	**400**	390	. . .
Petr . . . . . . 115% J	483	471,5	**460**	448,5	. . .
Hanka . . . . . 90% P	434,7	424,35	**414**	403,65	. . .
celkem	1 337,7	1 305,85	**1 274**	1 242,15	. . .

Z tabulky je zřejmé, že Jirka měl našetřeno 400 Kč, Petr 460 Kč a Hanka 414 Kč.

4. způsob: (pomocí úsudku – užití procent) +

Jirka 100%,
Petr 115%,
Hanka . . . . 90% ze 115% 103,5%,
celkem 318,5%.
Potom tedy je:
318,5% . . . . . 1 274 Kč,
1% . . . . . 1 274 : 318,5 = 4 Kč,
100% (Jirka) . . . . . . $4 \cdot 100 = 400$ Kč,
115% (Petr) . . . . . . $4 \cdot 115 = 460$ Kč,
103,5% (Hanka) . . . . $4 \cdot 103{,}5 = 414$ Kč.
Všichni 400 + 460 + 414 = 1 274 Kč.

5. způsob: (pomocí rovnice II – užití procent)

Celkem . . . . . . 100% . . . . . 1 274 Kč, z toho
Jirka . . . . x %,
Petr . . . . $1{,}15x$ %,
Hanka . . . . . . $0{,}9 \cdot 1{,}15 = 1{,}035x$ %.
Dostáváme rovnici

$$x + 1{,}15x + 1{,}035x = 100$$
$$3{,}185x = 100 \quad \Big| : 3{,}185$$
$$x \doteq 31{,}4\%,$$

potom Jirka . . . . . 31,4% . . . . . 400,04 ≐ 400 Kč,
Petr . . . . . 36,1% . . . . . 459,91 ≐ 460 Kč,
Hanka . . . . 32,5% . . . . . 414,05 ≐ 414 Kč.
Sečtením zjistíme že hodnoty jsou přesné, chyby vznikly při prvním zaokrouhlování a druhým zaokrouhlením byly odstraněny.

6. způsob: (pomocí rovnice III – užití procent)

Za základ nyní vezmeme co našetřil Petr. Označme 1% . . . . . x.
Celkem . . . . . . 100% . . . . . 1 274 Kč, z toho
Petr . . . . $100x$,
Jirka . . . . $86{,}96x$,
Hanka . . . . $90x$,
Potom dostáváme rovnici

$$100x + 86{,}96x + 90x = 1\,274$$
$$276{,}96x = 1\,274 \quad \Big| : 276{,}96$$

$x \doteq 4{,}6.$

Petr . . . . $100x = 460$ Kč,
Jirka . . . . $86{,}96x = 400$ Kč,
Hanka . . . . $90x = 414$ Kč,
celkem 1274 Kč.

Poznámka:
Výpočet „Jirkova koeficientu“ u x:

$$\downarrow \quad \begin{array}{l} 100 \ldots\ldots\ldots p \\ \underline{115 \ldots\ldots\ldots 100} \end{array} \quad \downarrow$$

$$\frac{p}{100} = \frac{100}{115} \quad \rightarrow \quad p = \frac{100^2}{115} \doteq \underline{86{,}96}.$$

***Příklad* 2 – *řešení*:**
Ze dvou druhů čaje o ceně 160 Kč a 220 Kč za 1 kilogram se má připravit 20 kg směsi v ceně 205 Kč za 1 kilogram. Kolik kilogramů každého druhu čaje bude třeba smíchat?

1. způsob: (pomocí jedné rovnice o jedné neznámé)

Množství 1. druhu čaje (po 160 Kč) .... x [kg],
množství 2. druhu čaje (po 220 Kč) .... $20 - x$ [kg],

$$160 \cdot x + 220 \cdot (20 - x) = 20 \cdot 205$$
$$160x + 4\,400 - 220\,x = 4\,100 \quad \Big| -4\,400$$
$$-60x = -300 \quad \Big| :(-60)$$
$$\underline{\underline{x = 5}} \text{ [kg]} \ \ldots \ \text{prvního druhu čaje,}$$

druhého druhu čaje: $20 - x = \underline{\underline{15}}$ [kg].
Zkouška – dosazením do textu:

$5 \cdot 160 = \ \ 800$ Kč,
$\underline{15 \cdot 220 = 3\,300 \text{ Kč}}$,
Celkem ...... 4 100 Kč.
4 100 : 20 = 205 Kč.

Odpověď:
Prvního druhu čaje bylo 5 kg, druhého druhu bylo 15 kg.

2. způsob: (pomocí soustavy dvou rovnic o dvou neznámých)

Množství 1. druhu čaje (po 160 Kč) .... x [kg],
množství 2. druhu čaje (po 220 Kč) .... y [kg],

$$x + y = 20 \quad \Big| -x$$
$$\underline{160 \cdot x + 220 \cdot y = 205 \cdot 20}$$
$$y = 20 - x$$
$$\underline{160 \cdot x + 220 \cdot (20 - x) = 4\,100}$$
$$160x + 4\,400 - 220\,x = 4\,100 \quad \Big| -4\,400$$
$$-60x = -300 \quad \Big| :(-60)$$
$$x = 5 \text{ [kg]} \ \ldots \ \text{prvního druhu čaje,}$$

druhého druhu čaje: $20 - x = 15$ [kg].
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

3. způsob: (aritmetický postup) +

Celková cena směsi je 4 100 Kč. Do tabulky budeme postupně zapisovat jednotlivé možnosti tak, že začneme množstvím 0 kg prvního čaje a postupně, po 1 kg, budeme množství zvětšovat. Do posledního řádku budeme zapisovat celkovou cenu (viz tabulka 4-10).

Tabulka 4-11:

dražší druh čaje	kg	0	1	2	3	4	**5**	6	...
	cena	0	160	320	480	640	**800**	960	...
levnější druh čaje	kg	20	19	18	17	16	**15**	14	...
	cena	4 400	4 180	3 960	3 740	3 520	**3 300**	3 080	...
celkem		4 400	4 340	4 280	4 220	4 160	**4 100**	4 040	...

Z tabulky je zřejmé, že levnějšího čaje bude 5 kg, dražšího 15 kg.

4. způsob: (úsudkem) *

Celková cena 20 kg směsi je $205 \cdot 20 = 4\,100$ Kč. Kdyby ve směsi byl jen lacinější čaj, stálo by 20 kg směsi $160 \cdot 20 = 3\,200$ Kč. Protože celková cena směs je o $4\,100 - 3\,200 = 900$ Kč větší a 1 kg druhého čaje o $220 - 160 = 60$ Kč dražší, bude dražšího čaje ve směsi $900 : 60 = 15$ kg. Levnějšího čaje pak bude ve směsi 5 kg.

Poznámka:
Na základě stejného principu by se úloha řešila graficky.

5. způsob: (užití obecného modelu) *

1. druh čaje (levnější) …….. cena c_1 [Kč], …….. množství m_1 [kg],
2. druh čaje (dražšího) ……. cena c_2 [Kč], …….. množství m_2 [kg],
směs čaje …………………... cena c [Kč], …….. množství m [kg].
Potom platí (stejně jako při odvození vztahů (4-1a), (4-1b) v modelu 1 v příloze 1):

$$m_1 + m_2 = m$$
$$\underline{c_1 m_1 + c_2 m_2 = cm}$$

1)
$$m_2 = m - m_1$$
$$\underline{c_1 m_1 + c_2 m - c_2 m_1 = cm} \quad \Big| - c_2 m$$
$$m_1 \cdot (c_1 - c_2) = cm - c_2 m \quad \Big| : (c_1 - c_2)$$
$$\underline{\underline{m_1 = \frac{cm - c_2 m}{c_1 - c_2}}}; \qquad \textbf{(4-9a)}$$

2)
$$m_1 = m - m_2$$
$$\underline{c_1 m_1 + c_2 m - c_2 m_1 = cm} \quad \Big| - c_1 m$$
$$m_2 \cdot (c_2 - c_1) = cm - c_1 m \quad \Big| : (c_1 - c_2)$$
$$\underline{\underline{m_2 = \frac{cm - c_1 m}{c_2 - c_1}}}. \qquad \textbf{(4-9b)}$$

V našem případě: $c_1 = 160$ Kč, $c_2 = 220$ Kč, $c = 205$ Kč, $m = 20$ kg.

$$m_1 = \frac{cm - c_2 m}{c_1 - c_2} = \frac{205 \cdot 20 - 220 \cdot 20}{160 - 220} = \frac{-300}{-60} = \underline{\underline{5\text{ kg}}}.$$

$$m_2 = \frac{cm - c_1 m}{c_2 - c_1} = \frac{205 \cdot 20 - 160 \cdot 20}{220 - 160} = \frac{900}{60} = \underline{\underline{15\text{ kg}}}.$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

6. způsob: (užití modelu II – pomocí poměru) +

Vyjdeme z výsledků předchozího řešení. Podle předchozího je poměr $m_1 : m_2$:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\dfrac{(c-c_2)m}{c_1-c_2}}{\dfrac{(c-c_1)m}{c_2-c_1}} = \frac{(c-c_2)m(c_2-c_1)}{(c-c_1)m(c_1-c_2)} = \frac{c_2-c}{c-c_1}.$$

Poměr množství je nepřímo úměrný rozdílu průměrné ceny od jednotlivých cen, tj.

$$\underline{\underline{\frac{m_1}{m_2} = \frac{c_2-c}{c-c_1}}}. \qquad \textbf{(4-10)}$$

Platí tedy $m_1 : m_2 = (220 - 205) : (205 - 160) = 1 : 3$.

Množství m_1 je $\frac{1}{4}$ z 20 kg, tj. $\underline{\underline{5}}$ kg; množství m_2 je $\frac{3}{4}$ z 20 kg, tj. $\underline{\underline{15}}$ kg.

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

***Příklad* 3 – *řešení*:**

Auto ujelo vzdálenost mezi městy *A* a *B* za 4 hodiny. Kdyby se průměrná rychlost auta zvýšila o 17 km/h, ujelo by auto tuto vzdálenost o hodinu dříve. Určete rychlost auta a vzdálenost mezi městy *A* a *B*.

1. způsob: (pomocí porovnání drah – užití rovnice)

Označme si neznámou rychlost osobního auta x [km/h]. Osobní auto ujede v prvním případě (při rychlosti x km/h) vzdálenost z *A* do *B* za 4 hodiny, proto hledaná vzdálenost je $4x$ [km]. V druhém případě (při rychlosti $x + 17$ km/h) ujede vzdálenost z *A* do *B* za 3 hodiny, proto hledaná vzdálenost je $3 \cdot (x + 17)$ [km]. Vzdálenosti se rovnají, tedy:

$$4x = 3 \cdot (x + 17)$$
$$4x = 3x + 51 \quad \Big| -3x$$
$$x = \underline{\underline{51}} \text{ [km/h]},$$
$$s = 51 \cdot 4 = \underline{\underline{204}} \text{ [km]}.$$

Zkouška – dosazením do textu:
První případ …………… 204 [km],
druhý případ …………. $68 \cdot 3 = 204$ [km],
tedy obě vzdálenosti se rovnají.
Odpověď:
Osobní auto jelo původně rychlostí 51 km/h a vzdálenost mezi *A*, *B* je 204 km.

Poznámka: (jiný možný výpočet)
Za neznámou vezmeme vzdálenost mezi *A* a *B*, označme opět x [km]. Potom rychlost auta je v prvním případě $\frac{x}{4}$, v druhém případě $\frac{x}{3}$. Pro rychlosti platí:

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 17 \quad \Big| \cdot 12$$
$$4x - 3x = 204$$
$$x = \underline{\underline{204}} \text{ [km]}$$

Potom rychlost auta je v prvním případě $204 : 4 = 51$ km/h, v druhém případě $204 : 3 =$

= 68 km/h.

2. způsob: (pomocí fyzikálních vzorců)

Obr. 4-12:

$s = v_1 t_1$ $\quad\quad$ $s = v_1 \cdot 4$

$s = v_2 t_2$ $\quad\quad$ $s = v_2 \cdot 3 = (v_1 + 17) \cdot 3$,

potom $\quad v_1 \cdot 4 = (v_1 + 17) \cdot 3$

$$4v_1 = 3v_1 + 51 \quad \Big| - 3v_1$$

$$v_1 = 51 \ \ [\text{km/h}]$$

$$s = v_1 \cdot 4 = 51 \cdot 4 = 204 \text{ km}.$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

Poznámka: (jiné užití vzorců, tj. jiný výpočet)

Vzorec pro rovnoměrný pohyb: $s = v \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \dfrac{s}{v}$.

První případ: auto ujelo vzdálenost za 4 hodiny, potom $\dfrac{s}{v} = 4 \quad \rightarrow \quad s = 4v$.

Druhý případ: auto ujelo vzdálenost za 3 hodiny, potom $\dfrac{s}{v+17} = 3 \quad \rightarrow \quad s = 3v + 51$.

Protože se dráhy rovnají, platí:

$$4v = 3v + 51 \quad \Big| - 3v$$

$v_1 = \underline{51}$ [km/h] $\quad \rightarrow \quad v_2 = 51 + 17 = 68$ [km/h] a dráha

$s = \underline{\underline{204}}$ [km]

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

3. způsob: (aritmeticky) *

Volíme menší rychlost, k ní přiřadíme velikost dráhy, kterou auto ujede za 4 hodiny a to samé pro rychlost auta o 17 km/h větší. Hodnoty zapíšeme do tabulky a hledáme případ, kdy obě dráhy budou stejně velké.

Tabulka 4-12:

menší rychlost	20	30	40	50	55	. . .	**51**
dráha za 4 h	80	120	160	200	220	. . .	**204**
větší rychlost	37	47	57	67	72	. . .	**68**
dráha za 3 h	111	141	171	201	216	. . .	**204**

Z tabulky je zřejmé, že menší rychlost bude 51 km/h, větší rychlost 68 km/h a celková dráha 204 km.

4. způsob: (úsudek) [+]

Když auto zrychlí o 17 km/h, přijede do cíle za 3 hodiny a ušetří 1 hodinu, tak jeho rychlost musí být (lze to dokázat obecně):

$3 \cdot 17 = 51$ km/h.
(Kdyby auto ušetřilo 2 hodiny, musíme výsledek dělit 2.)

5. způsob: (pomocí nepřímé úměrnosti) +

Označme původní rychlost x km/h. Potom mezi rychlostmi a časem je nepřímá úměrnost:

$$\downarrow \begin{array}{l} 4[h] \ldots\ldots\; x[km/h] \\ \underline{3[h] \ldots\ldots\; x+17[km/h]} \end{array} \uparrow$$

$$\frac{x+17}{x} = \frac{4}{3} \quad \Big| \cdot 3x$$

$$3x + 51 = 4x$$

$$x = 51 \text{ [km/h]}.$$

Druhá rychlost je 68 km/h a vzdálenost A, B je 204 km.

6. způsob: (pomocí poměru) *

$s = v_1 t_1, \quad s = v_2 t_2 \quad \rightarrow \quad v_1 t_1 = v_2 t_2 \quad \rightarrow \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1}.$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad v_1 = \tfrac{3}{4} v_2$$

$$\underline{v_2 = v_1 + 17}$$

$$v_2 = \tfrac{3}{4} v_2 + 17 \quad \Big| -\tfrac{3}{4} v_2$$

$$\tfrac{1}{4} v_2 = 17 \quad \Big| \cdot 4$$

$$\underline{v_2 = 68} \text{ [km/h]} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{v_1 = 51}} \text{ [km/h]} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{s = 204}} \text{ [km]}.$$

7. způsob: (pomocí obecného modelu) *

$s = vt \; \ldots\ldots \; s = v_1 t_1, \quad s = v_2 t_2$

$$\underline{v_2 = v_1 + v_0; \quad t_2 = t_1 - t_0 \quad \longrightarrow \quad t_0 = t_1 - t_2}$$

$$v_1 t_1 = v_2 t_2$$

$$v_1 t_1 = v_1 t_2 + v_0 t_2 \quad \Big| - v_1 t_2$$

$$v_1 t_1 - v_1 t_2 = v_0 t_2$$

$$v_1 (t_1 - t_2) = v_0 t_2 \quad \Big| : (t_1 - t_2)$$

$$v_1 = \underline{\underline{\frac{v_0 t_2}{t_1 - t_2}}} = \underline{\underline{\frac{v_0 t_2}{t_0}}}; \quad \ldots \quad \text{potom } v_2 = \underline{\underline{\frac{v_0 t_1}{t_1 - t_2}}} = \underline{\underline{\frac{v_0 t_1}{t_0}}}. \qquad \textbf{(4-11)}$$

V našem případě konkrétně:

$v_0 = 17$ km/h, $t_1 = 4$ h, $t_2 = 3$ h, $t_0 = 1$ h.

$v_1 = \frac{17 \cdot 3}{1} = \underline{\underline{51}}$ km/h; $\quad v_2 = \frac{17 \cdot 4}{1} = \underline{\underline{68}}$ km/h, $\quad s = 51 \cdot 4 = 68 \cdot 3 = \underline{\underline{204}}$ km.

***Příklad* 4 – *řešení*:**

Vodní nádrž se naplní jen prvním přítokem za 10 hodin, jen druhým za 12 hodin a jen třetím za 15 hodin. Za jak dlouho se naplní, budou-li otevřeny všechny tři přítoky současně?

1. způsob: (rovnice – užití normy za 1 minutu)

1. přítokem nateče nádrž ………. za 10 h …….. za 1 h nateče $\frac{1}{10}$ nádrže,

2. přítokem nateče nádrž ………. za 12 h …….. za 1 h nateče $\frac{1}{12}$ nádrže,

3. přítokem nateče nádrž ………. za 15 h …….. za 1 h nateče $\frac{1}{15}$ nádrže,

všemi přítoky nateče nádrž ……. za x h ……… za 1 h nateče $\frac{1}{x}$ nádrže;

potom platí:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}=\frac{1}{x} \quad \Big| \cdot 60x$$

$$6x + 5x + 4x = 60$$

$$15x = 60 \quad \Big| : 15$$

$$\underline{\underline{x = 4}} \ \text{[h]}.$$

Zkouška:

1. přítok: voda natéká 4 h, tj. nateče: $4\cdot\dfrac{1}{10}=\dfrac{2}{5}$ nádrže,

2. přítok: voda natéká 4 h, tj. nateče: $4\cdot\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}$ nádrže,

3. přítok: voda natéká 4 h, tj. nateče: $4\cdot\dfrac{1}{15}=\dfrac{4}{15}$ nádrže,

celkem nateče: $\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{15}=\dfrac{6+5+4}{15}$ = 1, tedy přesně celá nádrž.

Odpověď:

Nádrž se naplní všemi přítoky za 4 hodiny.

<u>2. způsob:</u> (pomocí rovnice II)

1. přítokem nateče nádrž ………. za 10 h …….. za 1 h nateče $\frac{1}{10}$ nádrže,

2. přítokem nateče nádrž ………. za 12 h …….. za 1 h nateče $\frac{1}{12}$ nádrže,

3. přítokem nateče nádrž ………. za 15 h …….. za 1 h nateče $\frac{1}{15}$ nádrže,

všemi přítoky nateče celá nádrž ……. za x h, platí tedy

$$x\cdot\frac{1}{10}+x\cdot\frac{1}{12}+x\cdot\frac{1}{15}=1 \quad \Big| \cdot 60$$

$$6x + 5x + 4x = 60$$

$$15x = 60 \quad \Big| : 15$$

$$\underline{\underline{x = 4}} \ \text{[h]}.$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

<u>3. způsob:</u> (aritmeticky + úsudek a celkový objem)

Zvolíme si objem nádrže (velikost nádrže kupodivu nemá vliv na čas naplnění – čím je nádrž větší, tím bude větší výkon přítoků, obojí není předmětem řešení), např. V = 120 l (objem volíme tak, aby byl dělitelný všemi časy).

1. přítok naplní za 1 h 120 : 10 = 12 l,
2. přítok naplní za 1 h 120 : 12 = 10 l,
3. přítok naplní za 1 h 120 : 15 = 8 l,

Dohromady nateče za 1 h všemi přítoky 12 + 10 + 8 = 30 l.

Nádrž se všemi přítoky naplní za 120 : 30 = 4 hodiny.

Poznámka – obecně:
1. přítok naplní za 1 h $V : 10$ *l*,
2. přítok naplní za 1 h $V : 12$ *l*,
3. přítok naplní za 1 h $V : 15$ *l*,

Dohromady nateče za 1 h všemi přítoky $\frac{V}{10} + \frac{V}{12} + \frac{V}{15} = \frac{V}{4}$ *l*.

Nádrž se všemi přítoky naplní za $V : \frac{V}{4}$ = 4 hodiny.

<u>4. způsob:</u> (užitím úsudku) *

Za 1 h nateče prvním přítokem $\frac{1}{10}$ nádrže, druhým přítokem $\frac{1}{12}$ nádrže, třetím přítokem $\frac{1}{15}$ nádrže, všemi třemi pak $\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} = \frac{1}{4}$ nádrže.
Když za 1 h nateče čtvrtina nádrže, celá nádrž nateče za 4 hodiny.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

<u>5. způsob:</u> (užitím obecného modelu) *

1. přítok …. voda natéká a h …. za 1 h nateče $\frac{1}{a}$ nádrže,
2. přítok …. voda natéká b h …. za 1 h nateče $\frac{1}{b}$ nádrže,
3. přítok …. voda natéká b h …. za 1 h nateče $\frac{1}{c}$ nádrže,

všemi přítoky …. voda natéká x h …. za 1 h nateče $\frac{1}{x}$ nádrže;
všemi přítoky také nateče za 1 h … $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ nádrže a tedy platí:
(stejně jako v příkladu B-4; postupujeme jako při odvození vztahu (5-8a), příloha 2):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{ab + ac + bc}{abc}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{abc}{ab + ac + bc}}}\,. \qquad \textbf{(4-12)}$$

Je-li a = 10 h, b = 12 h, c = 15 h, potom $x = \frac{10 \cdot 12 \cdot 15}{10 \cdot 12 + 10 \cdot 15 + 12 \cdot 15} = \frac{1\,800}{450} = \underline{\underline{4\text{ h}}}$.
Všemi přítoky se nádrž naplní za 4 hodiny.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

Varianta D:

***Příklad* 1 – *řešení*:**
Zákazník si koupil tričko, kravatu a košili. Nejprve si vybral košili, k ní pak kravatu, která byla třikrát levnější než košile. Nakonec si koupil tričko, které bylo o 140 Kč dražší než kravata. Celkem zaplatil 940 Kč. Kolik zaplatil za kravatu, kolik za tričko a kolik za košili?

1. způsob: (pomocí rovnice)

kravata .... x [Kč],
košile .... $3x$ [Kč],
tričko .... $x + 140$ [Kč],

$$x + 3x + x + 140 = 940 \quad | -140$$
$$5x = 800 \quad | : 5$$
$$\underline{x = 160} \text{ [Kč]},$$

potom kravata stála 160 Kč, košile 3 · 160 = 480 Kč a tričko 160 + 140 = 300 Kč.
Zkouška – dosazením do textu:
Celkem je 160 + 480 + 300 = 940 Kč.
Odpověď:
Kravata stála 160 Kč, košile 480 Kč a tričko 300 Kč.

2. způsob: (pomocí soustavy rovnic)

kravata .... x [Kč],
košile .... y [Kč],
tričko .... z [Kč],

$$x + y + z = 940$$
$$y = 3x$$
$$z = x + 140$$
$$x + 3x + x + 140 = 940 \quad | -140$$
$$5x = 800 \quad | : 5$$
$$\underline{x = 160} \text{ [Kč]},$$

potom kravata stála 160 Kč, košile 480 Kč a tričko 300 Kč.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

3. způsob: (aritmeticky)

Zvolíme si cenu košile (nejlépe dělitelnou třemi), vypočteme ceny ostatních koupených výrobků a pak cenu, kterou zaplatil. Protože celková cena je menší než 940, budeme cenu košile zvyšovat (výsledky budeme zapisovat do tabulky), až se nám podaří najít hodnoty, jejichž součet je 940.

Tabulka 4-13:

košile	300	360	420	**480**	540	. . .
kravata	100	120	140	**160**	180	. . .
tričko	240	260	280	**300**	320	. . .
součet	640	740	840	**940**	1 040	. . .

Z tabulky je jasné, že košile stála 480 Kč, kravata 160 Kč a tričko 300 Kč.

4. způsob: (pomocí úsudku) *

Celková cena je pětinásobek ceny kravaty zvětšený o 140. Potom pětinásobek ceny kravaty je 940 – 140 = 800 a cena kravaty je 800 : 5 = 160 Kč. Košile má cenu trojnásobnou, tedy 3 · 160 = 480 Kč a tričko je o 140 Kč dražší než kravata, stojí tedy 160 + 140 = 300 Kč.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

***Příklad** 2 – **řešení**:*
20 brouků a pavouků má dohromady 146 nohou. Kolik je brouků a kolik je pavouků, má-li brouk 6 nohou a pavouk 8 nohou?

<u>1. způsob:</u> (pomocí jedné rovnice o jedné neznámé)

Počet pavouků ………… x [ks],
<u>počet brouků ………… $20 - x$ [ks],</u>

$$8 \cdot x + 6 \cdot (20 - x) = 146$$
$$8x + 120 - 6x = 146 \quad \Big| -120$$
$$2x = 26 \quad \Big| :2$$
$$\underline{\underline{x = 13}} \text{ [ks]} \quad \ldots \quad \text{pavouků,}$$

brouků je: $20 - x = \underline{\underline{7}}$ [ks].
Zkouška – dosazením do textu:

$13 \cdot 8 = 104$ ks,
$\underline{7 \cdot 6 = \ \ 42 \text{ ks}}$,
Celkem …… 146 ks.

Odpověď:
Pavouků je 13, brouků 7.

<u>2. způsob:</u> (pomocí soustavy dvou rovnic o dvou neznámých)

Počet pavouků ………… x [ks],
<u>počet brouků ………….. y [ks],</u>

$$x + y = 20 \quad \longrightarrow \quad y = 20 - x$$
$$\underline{8 \cdot x + 6 \cdot y = 146}$$
$$8 \cdot x + 6 \cdot (20 - x) = 146$$
$$8x + 120 - 6x = 146 \quad \Big| -120$$
$$2x = 26 \quad \Big| :2$$
$$\underline{\underline{x = 13}} \text{ [ks]} \quad \ldots \quad \text{pavouků,}$$

brouků je: $20 - x = \underline{\underline{7}}$ [ks].
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

<u>3. způsob:</u> (aritmetický postup)

Brouci mají 6 nohou, pavouci 8. Zvolíme si jejich libovolný počet (celkem jich musí být 20), např. 10 a 10 a vypočteme, kolik je to nohou. Protože výsledek je menší než 146, budeme zvětšovat množství pavouků a zmenšovat množství brouků. Výsledky zapíšeme do tabulky:

Tabulka 4-14:

brouk	10	9	8	**7**	6	. . .
pavouk	10	11	12	**13**	14	. . .
celkem	140	142	144	**146**	148	. . .

Z tabulky je zřejmé, že brouků bude 7 a pavouků 13.

<u>4. způsob:</u> (úsudkem)

Počet nohou, kdyby byli jen brouci: $20 \cdot 6 = 120$.

Počet zbylých nohou: 146 – 120 = 26.
Pavouk má o 2 nohy více, proto počet pavouků je: 26 : 2 = 13.
Z toho plyne, že brouků je 20 – 13 = 7.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

5. způsob: (graficky)

Zobrazíme nejdříve dvacet jedinců se šesti nožičkami. Celkem to je 120 nožiček. Zbývajících 26 nožiček přidáváme po dvou. Bude to celkem ke 13 jedincům.
(Jedná se vlastně o grafické zobrazení předchozího postupu – úsudku.)

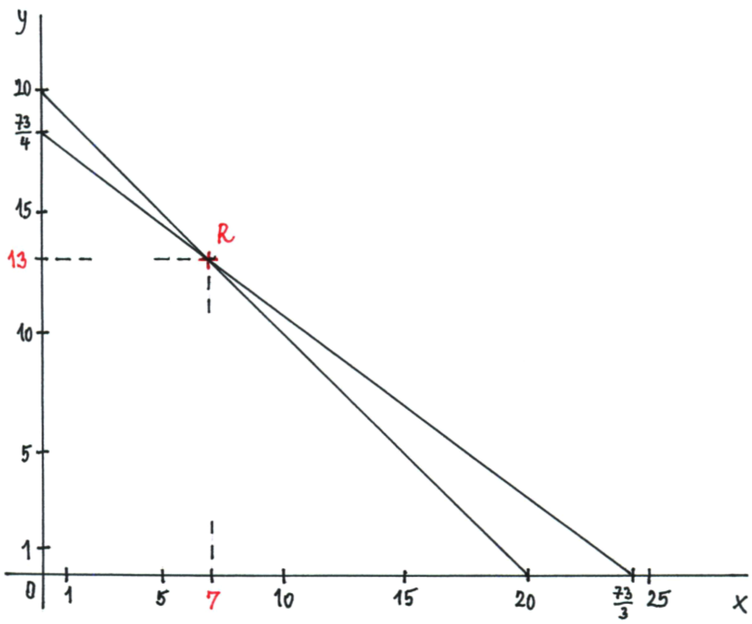
6. způsob: (graficky – pomocí funkcí)

Vyjádříme pomocí proměnných *x* (počet brouků) a *y* (počet pavouků). Dostáváme vztahy, ze kterých postupně dostaneme dvě funkce

$$x + y = 20 \quad \rightarrow \quad y = 20 - x\,,$$
$$8\cdot x + 6\cdot y = 146 \quad \rightarrow \quad y = \tfrac{73}{3} - \tfrac{4}{3}x\,.$$

Sestrojíme v jedné soustavě souřadnic oba grafy a souřadnice průsečíku těchto grafů jsou hledané hodnoty.

Obr. 4-13:



Z grafu je zřejmé, že počet brouků je 7 a počet pavouků je 13.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

7. způsob: (pomocí obecného modelu) *

Počet pavouků . . . . *x* [ks] . . . . . počet jejich nohou . . . . *a*,
počet brouků . . . . *y* [ks] . . . . . počet jejich nohou . . . . *b*;
počet všech . . . . *q* [ks] . . . . . počet všech nohou . . . . *p*.
Platí (postupujeme stejně jako v příkladu B-2):

$$x + y = q$$
$$\underline{ax + by = p}$$

1) $y = q - x$ 2) $x = q - y$

$$ax + bq - bx = p \quad \Big|\; - bq \qquad\qquad aq - ay + by = p \quad \Big|\; - aq$$
$$x \cdot (a - b) = p - bq \quad \Big|\; : (a - b) \qquad\qquad y \cdot (b - a) = p - aq \quad \Big|\; : (b - a)$$
$$\underline{\underline{x = \frac{p - bq}{a - b}}}, \qquad \textbf{(4-13a)} \qquad\qquad \underline{\underline{y = \frac{aq - p}{a - b}}}. \qquad \textbf{(4-13b)}$$

V našem případě: $a = 8$, $b = 6$, $p = 146$, $q = 20$; potom

$$x = \frac{p - bq}{a - b} = \frac{146 - 6 \cdot 20}{8 - 6} = \underline{\underline{13}}; \quad y = \frac{aq - p}{a - b} = \frac{8 \cdot 20 - 146}{8 - 6} = \underline{\underline{7}}.$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

***Příklad* 3 – *řešení*:**

Varianta D:

Po dvojkolejné trati mezi stanicemi *K* a *M* jely proti sobě dva vlaky. První vlak projel vzdálenost mezi stanicemi za dvě hodiny, druhý, který měl průměrnou rychlost o 15 km/h větší, ji projel za 1,5 hodiny. Vypočítejte průměrné rychlosti obou vlaků a vzdálenost stanic *K* a *M*.

Varianta D_0:

V pátek urazil nákladní vlak vzdálenost mezi stanicemi *K* a *M* za 2 hodiny. Další nákladní vlak z *K* měl v sobotu průměrnou rychlost o 15 km/h větší, takže do *M* přijel už za 1,5 hod. Vypočítejte průměrné rychlosti obou vlaků a vzdálenost stanic *K* a *M*.

<u>1. způsob:</u> (pomocí porovnání drah – užití rovnice)

Označme si neznámou rychlost pomalejšího vlaku x [km/h]. Tento vlak ujede vzdálenost mezi stanicemi *K* do *M* za 2 hodiny, proto hledaná vzdálenost je $2x$ [km]. Rychlejší vlak ujede vzdálenost mezi *K* a *M* za 1,5 hodiny rychlostí $x + 15$ [km/h], proto hledaná vzdálenost je $1{,}5 \cdot (x + 15)$ [km]. Vzdálenosti se rovnají, tedy:

$$2x = 1{,}5 \cdot (x + 15)$$
$$2x = 1{,}5x + 22{,}5 \quad \Big|\; - 1{,}5x$$
$$0{,}5x = 22{,}5 \quad \Big|\; \cdot 2$$

$x = \underline{\underline{45}}$ [km/h], druhý vlak: $x + 15 = \underline{\underline{60}}$ [km/h],

$s = 45 \cdot 2 = \underline{\underline{90}}$ [km].

Zkouška – dosazením do textu:

Pomalejší vlak .... $s_1 = 45 \cdot 2 = 90$ [km],

rychlejší vlak .... $s_2 = 60 \cdot 1{,}5 = 90$ [km],

tedy obě dráhy se rovnají.

Odpověď:

Pomalejší vlak jel rychlostí 45 km/h, rychlejší vlak rychlostí 60 km/h a vzdálenost mezi *K*, *L* je 90 km.

Poznámka: (jiný možný výpočet)

Za neznámou vezmeme vzdálenost mezi *K* a *L*, označme opět x [km]. Potom rychlost prvního vlaku je $\frac{x}{2}$, druhého vlaku $\frac{x}{1{,}5}$. Pro rychlosti platí:

$$\frac{x}{1{,}5} - \frac{x}{2} = 15 \quad \Big|\; \cdot 6$$
$$4x - 3x = 90$$
$$\underline{x = 90} \text{ [km]}$$

Potom rychlost pomalejšího vlaku je 90 : 2 = 45 km/h, rychlejšího vlaku je 90 : 1,5 =

= 60 km/h.

2. způsob: (pomocí fyzikálních vzorců)

$s = v_1 t_1$ $\qquad\qquad\qquad s = v_1 \cdot 2$

$s = v_2\, t_2$ $\qquad\qquad\qquad s = v_2 \cdot 1{,}5 = (v_1 + 15) \cdot 1{,}5,$

potom $\qquad v_1 \cdot 2 = (v_1 + 15) \cdot 1{,}5$

$$2v_1 = 1{,}5v_1 + 22{,}5 \quad \Big|\, - 1{,}5v_1$$

$$0{,}5v_1 = 22{,}5 \quad \Big|\, \cdot 2$$

$$v_1 = \underline{\underline{45}}\ \text{[km/h]} \quad \rightarrow \quad v_2 = v_1 + 15 = \underline{\underline{60}}\ \text{[km/h]},$$

$$s = v_1 \cdot 2 = 45 \cdot 2 = \underline{\underline{90}}\ \text{km}.$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

Poznámka: (jiné užití vzorců, tj. jiný výpočet)

Vzorec pro rovnoměrný pohyb: $s = v \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \dfrac{s}{v}$.

Pomalejší vlak ujel vzdálenost za 2 hodiny, potom $\dfrac{s}{v} = 2 \quad \rightarrow \quad s = 2v.$

Rychlejší vlak ujel vzdálenost za 1,5 hodiny, potom $\dfrac{s}{v+15} = 1{,}5 \quad \rightarrow \quad s = 1{,}5v + 22{,}5.$

Protože se dráhy rovnají, platí:

$$2v = 1{,}5v + 22{,}5 \quad \Big|\, - 1{,}5v$$

$$0{,}5v = 22{,}5 \quad \Big|\, \cdot 2$$

$$v_1 = \underline{\underline{45}}\ \text{[km/h]} \quad \rightarrow \quad v_2 = 45 + 15 = \underline{\underline{60}}\ \text{[km/h]} \ \text{ a dráha}$$

$$s = \underline{\underline{90}}\ \text{[km]}$$

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

3. způsob: (aritmeticky)

Budeme volit celkovou dráhu a počítat rychlosti *v*, *v´* obou vlaků. Potom vypočteme rozdíl rychlostí a zapíšeme do tabulky. Budeme pokračovat tak dlouho, až rozdíl rychlostí bude 15 km/h.

Tabulka 4-15:

s	110	105	100	95	**90**	85	. . .
v	55	52,5	50	47,5	**45**	42,5	. . .
v´	73,3	70	66,7	63,3	**60**	56,7	. . .
v´ - v	18,3	17,5	16,7	15,8	**15**	14,2	. . .

Z tabulky je zřejmé, že rychlosti vlaků jsou 45 km/h, 60 km/h a celková trasa je 90 km.

4. způsob: (úsudek) +

Rychlejší vlak ujede za hodinu o 15 km více, za 1,5 hodiny (doba jeho jízdy) o 22,5 km více (a je v cílové stanici). Pomalejší vlak jede ještě půl hodiny. Za tuto dobu musí ujet 22,5 km (oba vlaky projedou stejnou trať, i když opačně), z toho plyne, že jeho hodinová rychlost je dvojnásobná, tedy 45 km/h.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

5. způsob: (pomocí nepřímé úměrnosti)

Rychlost prvního vlaku označme v [km/h], potom rychlost druhého je $v + 15$ [km/h]. První vlak projede trasu za 2 h, druhý za 1,5 h. Jejich rychlosti a časy jsou nepřímo úměrné:

$$\uparrow \begin{array}{l} v \ldots\ldots\ldots\ldots 2 \\ v+15 \ldots\ldots 1{,}5 \end{array} \downarrow$$

$$\frac{v+15}{v} = \frac{2}{1{,}5} \quad \Big| \cdot 1{,}5v$$

$$1{,}5v + 22{,}5 = 2v \quad \Big| \ 1 - 1{,}5v$$

$$22{,}5 = 0{,}5v \quad \Big| : 0{,}5v$$

$\underline{\underline{v = 45}}$ km/h, rychlost druhého vlaku $\underline{\underline{v' = 60}}$ km/h.

Vzdálenost stanic K, M je $45 \cdot 2 = 60 \cdot 1{,}5 = \underline{\underline{90}}$ km.

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

6. způsob: (pomocí obecného modelu) *

I když text je formulován odlišně, princip úlohy je stejný jako v příkladu C-3. Při stejném značení dostáváme pro rychlosti v_1, v_2 vztahy (4-11):

$$v_1 = \frac{v_0 t_2}{\underline{\underline{t_1 - t_2}}} = \frac{v_0 t_2}{\underline{\underline{t_0}}}; \quad v_2 = \frac{v_0 t_1}{\underline{\underline{t_1 - t_2}}} = \frac{v_0 t_1}{\underline{\underline{t_0}}}.$$

V našem případě konkrétně:

$v_0 = 15$ km/h, $t_1 = 2$ h, $t_2 = 1{,}5$ h, $t_0 = 0{,}5$ h.

$$v_1 = \frac{15 \cdot 1{,}5}{0{,}5} = \underline{\underline{45}} \text{ km/h}; \quad v_2 = \frac{15 \cdot 2}{0{,}5} = \underline{\underline{60}} \text{ km/h}, \quad s = 45 \cdot 2 = 60 \cdot 1{,}5 = \underline{\underline{90}} \text{ km}.$$

***Příklad* 4 – *řešení*:**

Prvním kombajnem lze sklidit obilí z určitého lánu za 30 hodin, druhým, výkonnějším kombajnem za 20 hodin. Za kolik hodin bylo sklizeno obilí z tohoto lánu, jestliže se sklízelo současně oběma kombajny, ale druhý kombajn se porouchal a první ještě pracoval sám 5 hodin, aby dokončil sklizeň?

1. způsob: (rovnice – užití normy za 1 minutu)

1. kombajnem ………. za 30 h …….. za 1 h se sklidí $\frac{1}{30}$ lánu,

2. kombajnem ………. za 20 h …….. za 1 h se sklidí $\frac{1}{20}$ lánu,

oběma kombajny ……. za x h ………. za 1 h se sklidí $\frac{1}{x}$ lánu;

navíc první kombajn dokončil práci za 5 hodin, tj. udělal $5 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{6}$ práce, zbývá $\frac{5}{6}$ práce,

potom platí:

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{x} \cdot \frac{5}{6} \quad \Big| \cdot 60x$$

$$2x + 3x = 50$$

$$5x = 50 \quad \Big| : 5$$

$x = 10$ [h].

Celkem sklizeno za 10 + 5 = <u>15 hodin</u>.

Zkouška:

1. kombajn pracoval 15 hodin, sklidil $15 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{2}$ lánu, 2. kombajn pracoval 10 hodin, sklidil $10 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$ lánu, společně sklidily: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, tedy přesně celý lán.

Odpověď:

Oběma kombajny bude lán sklizen za 15 hodin.

<u>2. způsob:</u> (pomocí rovnice II)

1. kombajnem .... za 30 h .... za 1 h se sklidí $\frac{1}{30}$ lánu,

2. kombajnem .... za 20 h .... za 1 h se sklidí $\frac{1}{20}$ lánu,

oběma kombajny .... za x h .... za 1 h se sklidí $\frac{1}{x}$ lánu;

potom platí:

$$(x+5) \cdot \frac{1}{30} + x \cdot \frac{1}{20} = 1 \quad \Big| \cdot 60$$

$$2x + 10 + 3x = 60 \quad \Big| -10$$

$$5x = 50 \quad \Big| : 5$$

$$x = 10 \text{ [h]}.$$

Celkem sklízely oba kombajny pole <u>15 hodin</u>.

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

<u>3. způsob:</u> (úsudek a poměr = algebraicky)

1. kombajnem .... za 30 h .... za 1 h se sklidí $\frac{1}{30}$ lánu,

2. kombajnem .... za 20 h .... za 1 h se sklidí $\frac{1}{20}$ lánu,

oba společně sklidí celé pole za x h, proto platí

$$\frac{x}{30} + \frac{x}{20} = 1 \quad \Big| \cdot 60$$

$$2x + 3x = 60$$

$$5x = 60 \quad \Big| : 5$$

$$\underline{x = 12} \text{ [h]}.$$

Oba společně by celé pole sklidili za 12 hodin, ale druhý nepracoval celý čas a práci dokončil první za 5 hodin. Dobu, kterou nepracovali společně, vypočteme pomocí přímé úměrnosti (doba odpracovaná společně je úměrná době odpracované jedním kombajnem):

$$\uparrow \begin{array}{c} 30 \ldots\ldots\ldots 5 \\ 12 \ldots\ldots\ldots y \\ \hline \end{array} \uparrow$$

$$\frac{y}{5} = \frac{12}{30} \quad \rightarrow \quad y = 2;$$

Z toho plyne, že práci, kterou udělají oba společně za 2 h, zvládne první kombajn za 5 h. Tedy výsledný čas je $c = x - 2 + 5 = \underline{15 \text{ h}}$.

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

<u>4. způsob:</u> (užitím úsudku)

1. kombajn . . . . . za 30 h . . . . . sám pracuje 5 h . . . sklidí $\frac{1}{6}$ pole,
2. kombajn . . . . . za 20 h,
zbývá pro společnou práci . . . $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ pole;
společně . . . . za 1 h . . . $\frac{1}{30}+\frac{1}{20}=\frac{5}{60}$ pole, potom za 10 h . . . $\frac{5}{6}$ pole, což je jejich společný úkol.
Celkem budou sklízet 5 + 10 = $\underline{\underline{\text{15 hodin}}}$.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

5. způsob: (úsudek II)

Vypočteme si v jakém poměru oba kombajny pracují
1. kombajnem ………. za 30 h …….. za 1 h se sklidí $\frac{1}{30}$ lánu ……… udělá x práce,
2. kombajnem ………. za 20 h …….. za 1 h se sklidí $\frac{1}{20}$ lánu ……… udělá y práce,
poměr prací vypočteme z toho, že práce a čas jsou nepřímo úměrné:

$$\downarrow \quad \begin{array}{l} x \ldots\ldots\ 30\ dní \\ \underline{y \ldots\ldots\ 20\ dní} \end{array} \quad \uparrow$$

$$\frac{x}{y}=\frac{20}{30} \quad \rightarrow \quad x:y=2:3.$$

Pokud pracují celou dobu společně, vykoná první kombajn $\frac{2}{5}$ práce, druhý kombajn $\frac{3}{5}$ práce.
První kombajn navíc dokončil práci za 5 hodin, tj. udělal $5\cdot\frac{1}{30}=\frac{1}{6}$ práce, zbývá $\frac{5}{6}$ práce,
proto: 1. kombajn udělá $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ práce, což mu trvá 15 hodin;
2. kombajn udělá $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$ práce, což mu trvá 10 hodin.
Protože druhý kombajn pracuje výhradně v době, kdy pracuje i první, bude pole sklizeno za 15 dní.
Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

6. způsob: (užitím obecného modelu) *

1. kombajn …. sklízí lán a h …. za 1 h sklidí $\frac{1}{a}$ lánu,
2. kombajn …. sklízí lán b h …. za 1 h sklidí $\frac{1}{b}$ lánu,
oba kombajny …. sklízí lán x h …. za 1 h sklidí $\frac{1}{x}$ lánu;
navíc první kombajn pracuje k hodin, tj. druhý pracuje jen $x-k$ hodin..
Z toho plyne (podobně jako při odvození vztahů (5-5), příloha 2):

$$x\cdot\frac{1}{a}+(x-k)\cdot\frac{1}{b}=1 \quad \Big|\cdot ab$$

$$bx+ax-ak=ab \quad \Big|+ak$$

$$(a+b)\cdot x=ab+ak \quad \Big|:(a+b)$$

$$\underline{\underline{x=\frac{ab+ak}{a+b}}}. \qquad \textbf{(4-14)}$$

Je-li a = 30 h, b = 20 h, k = 5 h, potom $x = \dfrac{30 \cdot 20 + 30 \cdot 5}{30 + 20} = \dfrac{750}{50} = \underline{\underline{15 \text{ h}}}$, to je celková doba práce.

Zkouška a *odpověď* stejně jako v 1.

4.3. Vyhodnocení užitých postupů

Přehled užitých postupů uvádějí následující tabulky:

Tabulka 4-16 – Přehled všech užitých postupů ve všech skupinách (pro jednodušší porovnání jsou hodnoty uvedeny v procentech):

Všechny školy - sk. A - D:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	81,0	1,5	0,7	0,4	0	9,7	6,7	100%
př. 2	53,5	3,3	2,2	1,1	2,6	11,5	25,7	100%
př. 3	42,4	1,1	10,8	0	1,1	11,2	33,5	100%
př. 4	41,3	1,9	9,3	0	0,4	4,5	42,8	100%
celkem	54,6	2,0	5,8	0,4	1,0	9,2	27,1	100%

Základní školy - sk. A - D:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	76,6	0,8	0,8	0	0	14,5	7,3	100%
př. 2	57,3	2,4	0,8	1,6	0,8	11,3	25,8	100%
př. 3	41,1	0,8	5,6	0	0	11,3	41,1	100%
př. 4	37,1	0	6,5	0	0	0,8	55,6	100%
celkem	53,0	1,0	3,4	0,4	0,2	9,5	32,5	100%

Střední školy - sk. A - D:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	84,8	2,1	0,7	0,7	0	5,5	6,2	100%
př. 2	50,3	4,1	3,4	0,7	4,1	11,7	25,5	100%
př. 3	43,4	1,4	15,2	0	2,1	11	26,9	100%
př. 4	44,8	3,4	11,7	0	0,7	7,6	31,7	100%
celkem	55,9	2,8	7,8	0,3	1,7	9,0	22,6	100%

Gymnázia - sk. A - D:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	85,6	2,5	0	0,8	0	5,9	5,1	100%
př. 2	60,2	5,1	2,5	1,7	5,1	10,2	15,3	100%
př. 3	42,4	1,7	12,7	0	1,7	11,0	30,5	100%
př. 4	24,6	4,2	15,3	0	0,8	7,6	47,5	100%
celkem	53,2	3,4	7,6	0,6	1,9	8,7	24,6	100%

Tabulka 4-16 jasně ukazuje, že při řešení preferovali žáci a studenti užití rovnic, celkově více než polovina. Na dalším místě ve frekvenci „užití" bylo to, že úloha nebyla řešena. Neřešených úloh přibývalo s nárůstem obtížnosti těchto úloh. Na zvýšeném počtu neřešených úloh se zřejmě také podílelo to, že řešení úlohy bylo ponecháno až na závěr a pak nezbyl řešitelům čas. Proto nejčastěji neřešenou úlohou byl příklad č. 4, který byl v textu uveden jako poslední. Neřešených úloh byla asi čtvrtina. Dále v pořadí bylo užití úsudku, jeho zastoupení bylo kolem 5 procent. Velmi málo byly využíváno aritmetického řešení, grafické řešení a některé speciální metody. Téměř 10 procent postupů nebylo možné přesně určit, proto zůstaly nezařazeny a jsou uvedeny ve zvláštní kolonce.

Celkově je možné říci, že mezi volenými postupy nebyl při porovnávání všech variant A – D výrazný rozdíl mezi jednotlivými typy škol. Snad jen žáci základních škol používali méně úsudku, o to více pak příklady neřešili.

Tabulka 4-17 – Přehled všech užitých postupů ve všech skupinách (hodnoty jsou uvedeny v absolutních číslech):

Všechny školy - sk. A - D:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	218	4	2	1	0	26	18	269
př. 2	144	9	6	3	7	31	69	269
př. 3	114	3	29	0	3	30	90	269
př. 4	111	5	25	0	1	12	115	269
celkem	587	21	62	4	11	99	292	1076

Základní školy - sk. A - D:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	95	1	1	0	0	18	9	124
př. 2	71	3	1	2	1	14	32	124
př. 3	51	1	7	0	0	14	51	124
př. 4	46	0	8	0	0	1	69	124
celkem	263	5	17	2	1	47	161	496

Střední školy - sk. A - D:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	123	3	1	1	0	8	9	145
př. 2	73	6	5	1	6	17	37	145
př. 3	63	2	22	0	3	16	39	145
př. 4	65	5	17	0	1	11	46	145
celkem	324	16	45	2	10	52	131	580

Gymnázia - sk. A - D:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	101	3	0	1	0	7	6	118
př. 2	71	6	3	2	6	12	18	118
př. 3	50	2	15	0	2	13	36	118
př. 4	29	5	18	0	1	9	56	118
celkem	251	16	36	3	9	41	116	472

Tabulka 4-17 byla podkladem pro procentuální zpracování tabulek předchozích. Hodnoty v nich uvedené jsou v absolutních číslech. Užití speciálních metod upřesňuje předchozí jejich výčet při zápisu řešení v jednotlivých variantách.

Tabulka 4-18 – Přehled všech užitých postupů ve všech skupinách (pro jednodušší porovnání jsou hodnoty uvedeny v procentech, jsou zde rozlišeny výsledky dívek a chlapců – v tomto pořadí):

Všechny školy - sk. A - D: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	87,8 ⁄ 73,8	0,7 ⁄ 2,3	0,7 ⁄ 0,8	0,7 ⁄ 0	0	7,2 ⁄ 12,3	2,9 ⁄ 10,8	100%
př. 2	57,6 ⁄ 49,2	4,3 ⁄ 2,3	2,2 ⁄ 2,3	0,7 ⁄ 1,5	2,9 ⁄ 2,3	9,4 ⁄ 13,8	23,0 ⁄ 28,5	100%
př. 3	46,0 ⁄ 38,5	0,7 ⁄ 1,5	7,2 ⁄ 14,6	0	0 ⁄ 2,3	12,2 ⁄ 10,0	33,8 ⁄ 33,1	100%
př. 4	43,2 ⁄ 39,2	2,2 ⁄ 1,5	5,8 ⁄ 13,1	0	0,7 ⁄ 0	2,2 ⁄ 6,9	46,0 ⁄ 39,2	100%
celkem	58,6 ⁄ 50,2	2,0 ⁄ 1,9	4,0 ⁄ 7,7	0,4 ⁄ 0,4	0,9 ⁄ 1,2	7,7 ⁄ 10,8	26,4 ⁄ 27,9	100%

Základní školy - sk. A - D: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	85,9 ⁄ 64,2	0 ⁄ 1,9	0 ⁄ 1,9	0	0	9,9 ⁄ 20,8	4,2 ⁄ 11,3	100%
př. 2	63,4 ⁄ 49,1	1,4 ⁄ 3,8	1,4 ⁄ 0	1,4 ⁄ 1,9	0 ⁄ 1,9	11,3 ⁄ 11,3	21,1 ⁄ 32,1	100%
př. 3	45,1 ⁄ 35,8	0 ⁄ 1,9	1,4 ⁄ 11,3	0	0	12,7 ⁄ 9,4	40,8 ⁄ 41,5	100%
př. 4	42,3 ⁄ 30,2	0	2,8 ⁄ 11,3	0	0	0 ⁄ 1,9	54,9 ⁄ 56,6	100%
celkem	59,2 ⁄ 44,8	0,4 ⁄ 1,9	1,4 ⁄ 6,1	0,4 ⁄ 0,5	0 ⁄ 0,5	8,5 ⁄ 10,8	30,3 ⁄ 35,4	100%

Střední školy - sk. A - D: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	89,7 ⁄ 80,5	1,5 ⁄ 2,6	1,5 ⁄ 0	1,5 ⁄ 0	0	4,4 ⁄ 6,5	1,5 ⁄ 10,4	100%
př. 2	51,5 ⁄ 49,4	7,4 ⁄ 1,3	2,9 ⁄ 3,9	0 ⁄ 1,3	5,9 ⁄ 2,6	7,4 ⁄ 15,6	25,0 ⁄ 26,0	100%
př. 3	47,1 ⁄ 40,3	1,5 ⁄ 1,3	13,2 ⁄ 16,9	0	0 ⁄ 3,9	11,8 ⁄ 10,4	26,5 ⁄ 27,3	100%
př. 4	44,1 ⁄ 45,5	4,4 ⁄ 2,6	8,8 ⁄ 14,3	0	1,5 ⁄ 0	4,4 ⁄ 10,4	36,8 ⁄ 27,3	100%
celkem	58,1 ⁄ 53,9	3,7 ⁄ 1,9	6,6 ⁄ 8,8	0,4 ⁄ 0,3	1,8 ⁄ 1,6	7,0 ⁄ 10,7	22,4 ⁄ 22,7	100%

Gymnázia - sk. A - D: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	91,5 ⁄ 79,7	1,7 ⁄ 3,4	0	1,7 ⁄ 0	0	1,7 ⁄ 10,2	3,4 ⁄ 6,8	100%
př. 2	62,7 ⁄ 57,6	6,8 ⁄ 3,4	3,4 ⁄ 1,7	1,7 ⁄ 1,7	6,8 ⁄ 3,4	3,4 ⁄ 16,9	15,3 ⁄ 15,3	100%
př. 3	42,4 ⁄ 42,4	0 ⁄ 3,4	10,2 ⁄ 15,3	0	0 ⁄ 3,4	13,6 ⁄ 8,5	33,9 ⁄ 27,1	100%
př. 4	18,6 ⁄ 30,5	5,1 ⁄ 3,4	10,2 ⁄ 20,3	0	1,7 ⁄ 0	5,1 ⁄ 10,2	59,3 ⁄ 35,6	100%
celkem	53,8 ⁄ 52,5	3,4 ⁄ 3,4	5,9 ⁄ 9,3	0,8 ⁄ 0,4	2,1 ⁄ 1,7	5,9 ⁄ 11,4	28,0 ⁄ 21,2	100%

Porovnáme-li rozdíly mezi dívkami a chlapci v používání metod (tabulka 4-18), jsou zejména při užití rovnic a úsudků. Rovnice užívají při řešení mnohem častěji dívky. Pokud je tomu někdy naopak, je to vždy v případech, kdy tuto metodu používá méně řešitelů než jindy. Naopak úsudek používají mnohem častěji chlapci. Pokud jej používají častěji dívky, je to opět v těch případech, kdy jej používá méně řešitelů. V ostatních případech je užití metod rovnocenné. Nebylo-li možné metodu přesně určit, vyskytovalo se to spíše u chlapců, rozdíly však nebyly velké, největší byly u studentů gymnázií. Stejně tak více neřešených příkladů měli chlapci, větší rozdíly byly na základních než na středních školách. Naopak na gymnáziích více neřešených příkladů vykazovaly dívky, rozdíl udělal příklad č. 4 o společné práci, kde jej neřešilo téměř 60 procent dívek. Jednalo se o nejvýraznější rozdíl, a to v obou směrech. Opět se potvrzuje to, že nejčastěji používaná metoda při řešení je použití rovnic (pokud je úloha řešena). Nejméně často řešenou úlohou byl příklad č. 4 o společné práci (je také v textu uvedena jako poslední).

Tabulka 4-19 – Přehled všech užitých postupů ve všech skupinách (hodnoty jsou uvedeny v absolutních číslech, jsou zde rozlišeny výsledky dívek a chlapců – – v tomto pořadí):

Všechny školy - sk. A - D: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	122 / 96	1 / 3	1 / 1	1 / 0	~	10 / 16	4 / 14	139 / 130
př. 2	80 / 64	6 / 3	3 / 3	1 / 2	4 / 3	13 / 18	32 / 37	139 / 130
př. 3	64 / 50	1 / 2	10 / 19	~	0 / 3	17 / 13	47 / 43	139 / 130
př. 4	60 / 51	3 / 2	8 / 17	~	1 / 0	3 / 9	64 / 51	139 / 130
celkem	326 / 261	11 / 10	22 / 40	2 / 2	5 / 6	43 / 56	147 / 145	556 / 520

Základní školy - sk. A - D: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	61 / 34	0 / 1	0 / 1	~	~	7 / 11	3 / 6	71 / 53
př. 2	45 / 26	1 / 2	1 / 0	1 / 1	0 / 1	8 / 6	15 / 17	71 / 53
př. 3	32 / 19	0 / 1	1 / 6	~	~	9 / 5	29 / 22	71 / 53
př. 4	30 / 16	~	2 / 6	~	~	0 / 1	39 / 30	71 / 53
celkem	168 / 95	1 / 4	4 / 13	1 / 1	0 / 1	24 / 23	86 / 75	284 / 212

Střední školy - sk. A - D: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	61 / 62	1 / 2	1 / 0	1 / 0	~	3 / 5	1 / 8	68 / 77
př. 2	35 / 38	5 / 1	2 / 3	0 / 1	4 / 2	5 / 12	17 / 20	68 / 77
př. 3	32 / 31	1 / 1	9 / 13	~	0 / 3	8 / 8	18 / 21	68 / 77
př. 4	30 / 35	3 / 2	6 / 11	~	1 / 0	3 / 8	25 / 21	68 / 77
celkem	158 / 166	10 / 6	18 / 27	1 / 1	5 / 5	19 / 33	61 / 70	272 / 308

Gymnázia - sk. A - D: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	54 / 47	1 / 2	~	1 / 0	~	1 / 6	2 / 4	59 / 59
př. 2	37 / 34	4 / 2	2 / 1	1 / 1	4 / 2	2 / 10	9 / 9	59 / 59
př. 3	25 / 25	0 / 2	6 / 9	~	0 / 2	8 / 5	20 / 16	59 / 59
př. 4	11 / 18	3 / 2	6 / 12	~	1 / 0	3 / 6	35 / 21	59 / 59
celkem	127 / 124	8 / 8	14 / 22	2 / 1	5 / 4	14 / 27	66 / 50	236 / 236

Tabulka 4-19 byla opět podkladem pro procentuální zpracování tabulek předchozích. Hodnoty v nich uvedené jsou v absolutních číslech.

Tabulka 4-20 – Přehled všech užitých postupů ve skupině A (pro jednodušší porovnání jsou hodnoty uvedeny v procentech):

Všechny školy - sk. A:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	82,9	1,2	0	0	0	11,0	4,9	100%
př. 2	57,3	2,4	2,4	1,2	4,9	12,2	19,5	100%
př. 3	45,1	1,2	6,1	0	1,2	11,0	35,4	100%
př. 4	37,8	1,2	15,9	0	0	1,2	43,9	100%
celkem	55,8	1,5	6,1	0,3	1,5	8,8	25,9	100%

Základní školy - sk. A:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	77,8	0	0	0	0	19,4	2,8	100%
př. 2	72,2	0	0	0	2,8	11,1	13,9	100%
př. 3	41,7	2,8	2,8	0	0	5,6	47,2	100%
př. 4	41,7	0	11,1	0	0	0	47,2	100%
celkem	58,3	0,7	3,5	0	0,7	9,0	27,8	100%

Střední školy - sk. A:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	87,0	2,2	0	0	0	4,3	6,5	100%
př. 2	45,7	4,3	4,3	2,2	6,5	13,0	23,9	100%
př. 3	47,8	0	8,7	0	2,2	15,2	26,1	100%
př. 4	34,8	2,2	19,6	0	0	2,2	41,3	100%
celkem	53,8	2,2	8,2	0,5	2,2	8,7	24,5	100%

Gymnázia - sk. A:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	94,6	2,7	0	0	0	2,7	0	100%
př. 2	56,8	5,4	5,4	0	10,8	8,1	13,5	100%
př. 3	40,5	2,7	8,1	0	0	13,5	35,1	100%
př. 4	10,8	2,7	27,0	0	0	2,7	56,8	100%
celkem	50,7	3,4	10,1	0	2,7	6,8	26,4	100%

Při řešení varianty A žáci a studenti opět nejčastěji používali rovnic. Kromě neřešených úloh a úloh, u kterých byl postup řešení nejasný (a tak zařazen do kolonky „neurčeno“), používali řešitelé úsudek. Ostatní postupy byly málo zastoupeny. U příkladu č. 4 převažovalo, že byl neřešen. Žáci základních škol stejně často neřešili i příklad č. 3. Studenti gymnázií příklad č. 1 řešili z 95 % pomocí rovnic. Na gymnáziích nebyl nikdo, kdo by tento příklad neřešil.

Tabulka 4-21 – Přehled všech užitých postupů ve skupině A (pro jednodušší porovnání jsou hodnoty uvedeny v procentech, jsou zde rozlišeny výsledky dívek a chlapců – v tomto pořadí):

Všechny školy - sk. A: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	89,4 ⁄ 74,3	2,1 ⁄ 0	0	0	0	8,5 ⁄ 14,3	0 ⁄ 11,4	100%
př. 2	63,8 ⁄ 48,6	4,3 ⁄ 0	2,1 ⁄ 2,9	0 ⁄ 2,9	4,3 ⁄ 5,7	8,5 ⁄ 17,1	17 ⁄ 22,9	100%
př. 3	53,2 ⁄ 34,3	0 ⁄ 2,9	6,4 ⁄ 5,7	0	0 ⁄ 2,9	10,6 ⁄ 11,4	29,8 ⁄ 42,9	100%
př. 4	42,6 ⁄ 31,4	2,1 ⁄ 0	12,8 ⁄ 20	0	0	0 ⁄ 2,9	42,6 ⁄ 45,7	100%
celkem	62,2 ⁄ 47,1	2,1 ⁄ 0,7	5,3 ⁄ 7,1	0 ⁄ 0,7	1,1 ⁄ 2,1	6,9 ⁄ 11,4	22,3 ⁄ 30,7	100%

Základní školy - sk. A: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	87,0 ⁄ 61,5	0	0	0	0	13 ⁄ 30,8	0 ⁄ 7,7	100%
př. 2	82,6 ⁄ 53,8	0	0	0	0 ⁄ 7,7	13 ⁄ 7,7	4,3 ⁄ 30,8	100%
př. 3	52,2 ⁄ 23,1	0 ⁄ 7,7	0 ⁄ 7,7	0	0	4,3 ⁄ 7,7	43,5 ⁄ 53,8	100%
př. 4	52,2 ⁄ 23,1	0	8,7 ⁄ 15,4	0	0	0	39,1 ⁄ 61,5	100%
celkem	68,5 ⁄ 40,4	0 ⁄ 1,9	2,2 ⁄ 5,8	0	0 ⁄ 1,9	7,6 ⁄ 11,5	21,7 ⁄ 38,5	100%

Střední školy - sk. A: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	91,7 ⁄ 81,8	4,2 ⁄ 0	0	0	0	4,2 ⁄ 4,5	0 ⁄ 13,6	100%
př. 2	45,8 ⁄ 45,5	8,3 ⁄ 0	4,2 ⁄ 4,5	0 ⁄ 4,5	8,3 ⁄ 4,5	4,2 ⁄ 22,7	29,2 ⁄ 18,2	100%
př. 3	54,2 ⁄ 40,9	0	12,5 ⁄ 4,5	0	0 ⁄ 4,5	16,7 ⁄ 13,6	16,7 ⁄ 36,4	100%
př. 4	33,3 ⁄ 36,4	4,2 ⁄ 0	16,7 ⁄ 22,7	0	0	0 ⁄ 4,5	45,8 ⁄ 36,4	100%
celkem	56,3 ⁄ 51,1	4 ,2⁄ 0	8,3 ⁄ 8,0	0 ⁄ 1,1	2,1 ⁄ 2,3	6,3 ⁄ 11,4	22,9 ⁄ 26,1	100%

Gymnázia - sk. A: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	91,3 ⁄ 100	4,3 ⁄ 0	0	0	0	4,3 ⁄ 0	0	100%
př. 2	56,5 ⁄ 57,1	8,7 ⁄ 0	4,3 ⁄ 7,1	0	8,7 ⁄ 14,3	4,3 ⁄ 14,3	17,4 ⁄ 7,1	100%
př. 3	34,8 ⁄ 50,0	0 ⁄ 7,1	8,7 ⁄ 7,1	0	0	21,7 ⁄ 0	34,8 ⁄ 35,7	100%
př. 4	4,3 ⁄ 21,4	4,3 ⁄ 0	21,7 ⁄ 35,7	0	0	0 ⁄ 7,1	69,6 ⁄ 35,7	100%
celkem	46,7 ⁄ 57,1	4,3 ⁄ 1,8	8,7 ⁄ 12,5	0	2,2 ⁄ 3,6	7,6 ⁄ 5,4	30,4 ⁄ 19,6	100%

Dívky častěji řešily úlohy pomocí rovnic, celkově ve všech příkladech, nejčastěji příklad č. 1. Chlapci naopak častěji než dívky užívali úsudku nebo také častěji příklady neřešili. Vysoké procento použití rovnic při řešení vykazovali studenti gymnázií u příkladu č. 1, chlapci jej takto dokonce řešili stoprocentně. Dívky zase tento první příklad vždy řešily (a to ve všech sledovaných skupinách). Naopak příklad č. 4 neřešilo na gymnáziích téměř 70 % dívek.

Tabulka 4-22 – Přehled všech užitých postupů ve skupině A (hodnoty jsou uvedeny v absolutních číslech, jsou zde rozlišeny výsledky dívek a chlapců – – v tomto pořadí):

Všechny školy - sk. A: D/H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	42/26	1/0	~	~	~	4/5	0/4	47/35
př. 2	30/17	2/0	1/1	0/1	2/2 [1,2,3])	4/6	8/8	47/35
př. 3	25/12	0/1	3/2	~	0/1 [4])	5/4	14/15	47/35
př. 4	20/11	1/0	6/7	~	~	0/1	20/16	47/35
celkem	117/66	4/1	10/10	0/1	2/3 [1,2,3,4])	13/16	42/43	188/140

Základní školy - sk. A: D/H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	20/8	~	~	~	~	3/4	0/1	23/13
př. 2	19/7	~	~	~	0/1 [2])	3/1	1/4	23/13
př. 3	12/3	0/1	0/1	~	~	1/1	10/7	23/13
př. 4	12/3	~	2/2	~	~	~	9/8	23/13
celkem	63/21	0/1	2/3	~	0/1 [2])	7/6	20/20	92/52

Střední školy - sk. A: D/H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	22/18	1/0	~	~	~	1/1	0/3	24/22
př. 2	11/10	2/0	1/1	0/1	2/1 [1,3])	1/5	7/4	24/22
př. 3	13/9	~	3/1	~	0/1 [4])	4/3	4/8	24/22
př. 4	8/8	1/0	4/5	~	~	0/1	11/8	24/22
celkem	54/45	4/0	8/7	0/1	2/2 [1,3,4])	6/10	22/23	96/88

Gymnázia - sk. A: D/H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	21/14	1/0	~	~	~	1/0	~	23/14
př. 2	13/8	2/0	1/1	~	2/2 [1,2,3])	1/2	4/1	23/14
př. 3	8/7	0/1	2/1	~	~	5/0	8/5	23/14
př. 4	1/3	1/0	5/5	~	~	0/1	16/5	23/14
celkem	43/32	4/1	8/7	~	2/2 [1,2,3])	7/3	28/11	92/56

Legenda:
[1]) - užitím rozkladu (pomocí společného dělitele) - nevede k cíli
[2]) - řešeno užitím průměru
[3]) - metoda chybného předpokladu
[4]) - užití nekonečné geometrické řady

Tabulka 4-22 byla opět podkladem pro procentuální zpracování tabulek předchozích. Hodnoty v nich uvedené jsou v absolutních číslech. V legendě jsou specifikované speciální postupy užité při řešení úloh.

Tabulka 4-23 – Přehled všech užitých postupů ve skupině B (pro jednodušší porovnání jsou hodnoty uvedeny v procentech):

Všechny školy - sk. B:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	89,3	1,3	1,3	1,3	0	4,0	2,7	100%
př. 2	76,0	1,3	4,0	0	0	8,0	10,7	100%
př. 3	45,3	1,3	20,0	0	0	9,3	24,0	100%
př. 4	56,0	1,3	2,7	0	0	2,7	37,3	100%
celkem	66,7	1,3	7,0	0,3	0	6,0	18,7	100%

Základní školy - sk. B:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	87,9	0	3,0	0	0	3,0	6,1	100%
př. 2	75,8	0	3,0	0	0	9,1	12,1	100%
př. 3	51,5	0	12,1	0	0	9,1	27,3	100%
př. 4	45,5	0	0	0	0	0	54,5	100%
celkem	65,2	0	4,5	0	0	5,3	25,0	100%

Střední školy - sk. B:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	90,5	2,4	0	2,4	0	4,8	0	100%
př. 2	76,2	2,4	4,8	0	0	7,1	9,5	100%
př. 3	40,5	2,4	26,2	0	0	9,5	21,4	100%
př. 4	64,3	2,4	4,8	0	0	4,8	23,8	100%
celkem	67,9	2,4	8,9	0,6	0	6,5	13,7	100%

Gymnázia - sk. B:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	87,9	3,0	0	3,0	0	3,0	3,0	100%
př. 2	84,8	0	0	0	0	6,1	9,1	100%
př. 3	39,4	0	24,2	0	0	9,1	27,3	100%
př. 4	51,5	3,0	0	0	0	6,1	39,4	100%
celkem	65,9	1,5	6,1	1,5	0	6,1	19,7	100%

Při řešení varianty B žáci a studenti, stejně jako u varianty A, používali nejčastěji rovnic, nejvíce na středních školách v příkladě č. 1. Tento příklad byl na středních školách řešen stoprocentně (nebyl nikdo, kdo by jej neřešil) a i v ostatních sledovaných skupinách byl řešen nejvíce. Nejčastěji neřešen byl v této variantě opět příklad č. 4, nejvíce na základních školách.

Kromě úloh, které nebyly řešeny a úloh, které nebylo možno zařadit, používali řešitelé ještě úsudku, ostatní postupy byly opět málo zastoupeny. Úsudek byl nejčastěji používán v příkladě č. 3, na gymnáziích jej použila téměř čtvrtina studentů, na středních školách dokonce více než čtvrtina studentů.

Tabulka 4-24 – Přehled všech užitých postupů ve skupině B (pro jednodušší porovnání jsou hodnoty uvedeny v procentech, jsou zde rozlišeny výsledky dívek a chlapců – v tomto pořadí):

Všechny školy - sk. B: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	94,9 ⁄ 83,3	0 ⁄ 2,8	0 ⁄ 2,8	2,6 ⁄ 0	0	0 ⁄ 8,3	2,6 ⁄ 2,8	100%
př. 2	76,9 ⁄ 75,0	2,6 ⁄ 0	2,6 ⁄ 5,6	0	0	7,7 ⁄ 8,3	10,3 ⁄ 11,1	100%
př. 3	46,2 ⁄ 44,4	2,6 ⁄ 0	10,3 ⁄ 30,6	0	0	7,7 ⁄ 11,1	33,3 ⁄ 13,9	100%
př. 4	51,3 ⁄ 61,1	0 ⁄ 2,8	0 ⁄ 5,6	0	0	2,6 ⁄ 2,8	46,2 ⁄ 27,8	100%
celkem	67,3 ⁄ 66,0	1,3 ⁄ 1,4	3,2 ⁄ 11,1	0,6 ⁄ 0	0	4,5 ⁄ 7,6	23,1 ⁄ 13,9	100%

Základní školy - sk. B: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	95,0 ⁄ 76,9	0	0 ⁄ 7,7	0	0	0 ⁄ 7,7	5,0 ⁄ 7,7	100%
př. 2	80,0 ⁄ 69,2	0	5,0 ⁄ 0	0	0	10,0 ⁄ 7,7	5,0 ⁄ 23,1	100%
př. 3	50,0 ⁄ 53,8	0	5,0 ⁄ 23,1	0	0	10,0 ⁄ 7,7	35,0 ⁄ 15,4	100%
př. 4	45,0 ⁄ 46,2	0	0	0	0	0	55,0 ⁄ 53,8	100%
celkem	67,5 ⁄ 61,5	0	2,5 ⁄ 7,7	0	0	5,0 ⁄ 5,8	25,0 ⁄ 25,0	100%

Střední školy - sk. B: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	94,7 ⁄ 87,0	0 ⁄ 4,3	0	5,3 ⁄ 0	0	0 ⁄ 8,7	0	100%
př. 2	73,7 ⁄ 78,3	5,3 ⁄ 0	0 ⁄ 8,7	0	0	5,3 ⁄ 8,7	15,8 ⁄ 4,3	100%
př. 3	42,1 ⁄ 39,1	5,3 ⁄ 0	15,8 ⁄ 34,8	0	0	5,3 ⁄ 13	31,6 ⁄ 13,0	100%
př. 4	57,9 ⁄ 69,6	0 ⁄ 4,3	0 ⁄ 8,7	0	0	5,3 ⁄ 4,3	36,8 ⁄ 13,0	100%
celkem	67,1 ⁄ 68,5	2,6 ⁄ 2,2	3,9 ⁄ 13,0	1,3 ⁄ 0	0	3,9 ⁄ 8,7	21,1 ⁄ 7,6	100%

Gymnázia - sk. B: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	88,2 ⁄ 87,5	0 ⁄ 6,3	0	5,9 ⁄ 0	0	0 ⁄ 6,3	5,9 ⁄ 0	100%
př. 2	82,4 ⁄ 87,5	0	0	0	0	5,9 ⁄ 6,3	11,8 ⁄ 6,3	100%
př. 3	41,2 ⁄ 37,5	0	17,6 ⁄ 31,3	0	0	0 ⁄ 18,8	41,2 ⁄ 12,5	100%
př. 4	41,2 ⁄ 62,5	0 ⁄ 6,3	0	0	0	5,9 ⁄ 6,3	52,9 ⁄ 25,0	100%
celkem	63,2 ⁄ 68,8	0 ⁄ 3,1	4,4 ⁄ 7,8	1,5 ⁄ 0	0	2,9 ⁄ 9,4	27,9 ⁄ 10,9	100%

Ve variantě B je užití rovnic při řešení úloh u dívek i chlapců srovnatelné, tomuto se naopak vymyká užití úsudku v příkladě č. 3. Výraznou převahu zde mají chlapci, v průměru o 20 %. Tento rozdíl dívky „kompenzují“ tím, že ve srovnatelném počtu procent tuto úlohu neřeší. V ostatních ukazatelích nejsou mezi dívkami a chlapci výraznější rozdíly.

Tabulka 4-25 – Přehled všech užitých postupů ve skupině B (hodnoty jsou uvedeny v absolutních číslech, jsou zde rozlišeny výsledky dívek a chlapců – – v tomto pořadí):

Všechny školy - sk. B: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	37 / 30	0 / 1	0 / 1	1 / 0	~	0 / 3	1 / 1	39 / 36
př. 2	30 / 27	1 / 0	1 / 2	~	~	3 / 3	4 / 4	39 / 36
př. 3	18 / 16	1 / 0	4 / 11	~	~	3 / 4	13 / 5	39 / 36
př. 4	20 / 22	0 / 1	0 / 2	~	~	1 / 1	18 / 10	39 / 36
celkem	105 / 95	2 / 2	5 / 16	1 / 0	~	7 / 11	36 / 20	156 / 144

Základní školy - sk. B: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	19 / 10	~	0 / 1	~	~	0 / 1	1 / 1	20 / 13
př. 2	16 / 9	~	1 / 0	~	~	2 / 1	1 / 3	20 / 13
př. 3	10 / 7	~	1 / 3	~	~	2 / 1	7 / 2	20 / 13
př. 4	9 / 6	~	~	~	~	~	11 / 7	20 / 13
celkem	54 / 32	~	2 / 4	~	~	4 / 3	20 / 13	80 / 52

Střední školy - sk. B: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	18 / 20	0 / 1	~	1 / 0	~	0 / 2	~	19 / 23
př. 2	14 / 18	1 / 0	0 / 2	~	~	1 / 2	3 / 1	19 / 23
př. 3	8 / 9	1 / 0	3 / 8	~	~	1 / 3	6 / 3	19 / 23
př. 4	11 / 16	0 / 1	0 / 2	~	~	1 / 1	7 / 3	19 / 23
celkem	51 / 63	2 / 2	3 / 12	1 / 0	~	3 / 8	16 / 7	76 / 92

Gymnázia - sk. B: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	15 / 14	0 / 1	~	1 / 0	~	0 / 1	1 / 0	17 / 16
př. 2	14 / 14	~	~	~	~	1 / 1	2 / 1	17 / 16
př. 3	7 / 6	~	3 / 5	~	~	0 / 3	7 / 2	17 / 16
př. 4	7 / 10	0 / 1	~	~	~	1 / 1	9 / 4	17 / 16
celkem	43 / 44	0 / 2	3 / 5	1 / 0	~	2 / 6	19 / 7	68 / 64

Legenda:
[1]) - řešeno pomocí speciální rovnice
[2]) - k řešení použity Vennovy diagramy

Tabulka 4-25 byla opět podkladem pro procentuální zpracování tabulek předchozích. Hodnoty v nich uvedené jsou v absolutních číslech. V legendě jsou specifikované speciální postupy užité při řešení úloh.

Tabulka 4-26 – Přehled všech užitých postupů ve skupině C (pro jednodušší porovnání jsou hodnoty uvedeny v procentech):

Všechny školy - sk. C:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	72,4	0	0	0	0	13,8	13,8	100%
př. 2	32,8	1,7	0	0	5,2	5,2	55,2	100%
př. 3	34,5	0	10,3	0	1,7	15,5	37,9	100%
př. 4	41,4	3,4	3,4	0	0	12,1	39,7	100%
celkem	45,3	1,3	3,4	0	1,7	11,6	36,6	100%

Základní školy - sk. C:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	72,2	0	0	0	0	13,9	13,9	100%
př. 2	38,9	2,8	0	0	0	2,8	55,6	100%
př. 3	33,3	0	5,6	0	0	16,7	44,4	100%
př. 4	44,4	0	2,8	0	0	2,8	50,0	100%
celkem	47,2	0,7	2,1	0	0	9,0	41,0	100%

Střední školy - sk. C:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	72,7	0	0	0	0	13,6	13,6	100%
př. 2	22,7	0	0	0	13,6	9,1	54,5	100%
př. 3	36,4	0	18,2	0	4,5	13,6	27,3	100%
př. 4	36,4	9,1	4,5	0	0	27,3	22,7	100%
celkem	42,0	2,3	5,7	0	4,5	15,9	29,5	100%

Gymnázia - sk. C:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	58,8	0	0	0	0	17,6	23,5	100%
př. 2	23,5	5,9	0	0	11,8	11,8	47,1	100%
př. 3	29,4	0	17,6	0	5,9	11,8	35,3	100%
př. 4	17,6	11,8	5,9	0	0	29,4	35,3	100%
celkem	32,4	4,4	5,9	0	4,4	17,6	35,3	100%

Při řešení úloh varianty C žáci a studenti opět nejčastěji užívali rovnic, rozdíl je však menší než u předchozích variant. To, že řešitelé nejčastěji užívali rovnic je dáno rozdílem u příkladu č. 1. V ostatních příkladech jsou často úlohy buď neřešeny nebo způsob řešení nelze určit. Příklad č. 3 byl často řešen pomocí úsudku, zejména studenty středních škol a gymnázií. Další postupy (včetně užití úsudku u příkladů č. 1, 2 a 4) již jsou užívány mnohem méně.

Tabulka 4-27 – Přehled všech užitých postupů ve skupině C (pro jednodušší porovnání jsou hodnoty uvedeny v procentech, jsou zde rozlišeny výsledky dívek a chlapců – v tomto pořadí):

Všechny školy - sk. C: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	82,1 ⁄ 63,3	0	0	0	0	10,7 ⁄ 16,7	7,1 ⁄ 20,0	100%
př. 2	39,3 ⁄ 26,7	0 ⁄ 3,3	0	0	7,1 ⁄ 3,3	3,6 ⁄ 6,7	50,0 ⁄ 60,0	100%
př. 3	39,3 ⁄ 30,0	0	7,1 ⁄ 13,3	0	0 ⁄ 3,3	21,4 ⁄ 10,0	32,1 ⁄ 43,3	100%
př. 4	46,4 ⁄ 36,7	7,1 ⁄ 0	3,6 ⁄ 3,3	0	0	7,1 ⁄ 16,7	35,7 ⁄ 43,3	100%
celkem	51,8 ⁄ 39,2	1,8 ⁄ 0,8	2,7 ⁄ 4,2	0	1,8 ⁄ 1,7	10,7 ⁄ 12,5	31,3 ⁄ 41,7	100%

Základní školy - sk. C: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	88,9 ⁄ 55,6	0	0	0	0	5,6 ⁄ 22,2	5,6 ⁄ 22,2	100%
př. 2	38,9 ⁄ 38,9	0 ⁄ 5,6	0	0	0	0 ⁄ 5,6	61,1 ⁄ 50,0	100%
př. 3	38,9 ⁄ 27,8	0	0 ⁄ 11,1	0	0	27,8 ⁄ 5,6	33,3 ⁄ 55,6	100%
př. 4	50,0 ⁄ 38,9	0	0 ⁄ 5,6	0	0	0 ⁄ 5,6	50,0 ⁄ 50,0	100%
celkem	54,2 ⁄ 40,3	0 ⁄ 1,4	0 ⁄ 4,2	0	0	8,3 ⁄ 9,7	37,5 ⁄ 44,4	100%

Střední školy - sk. C: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	70,0 ⁄ 75,0	0	0	0	0	20,0 ⁄ 8,3	10,0 ⁄ 16,7	100%
př. 2	40,0 ⁄ 8,3	0	0	0	20,0 ⁄ 8,3	10,0 ⁄ 8,3	30,0 ⁄ 75,0	100%
př. 3	40,0 ⁄ 33,3	0	20,0 ⁄ 16,7	0	0 ⁄ 8,3	10,0 ⁄ 16,7	30,0 ⁄ 25,0	100%
př. 4	40,0 ⁄ 33,3	20,0 ⁄ 0	10,0 ⁄ 0	0	0	20,0 ⁄ 33,3	10,0 ⁄ 33,3	100%
celkem	47,5 ⁄ 37,5	5,0 ⁄ 0	7,5 ⁄ 4,2	0	5,0 ⁄ 4,2	15,0 ⁄ 16,7	20,0 ⁄ 37,5	100%

Gymnázia - sk. C: D ⁄ H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	85,7 ⁄ 40,0	0	0	0	0	0 ⁄ 30,0	14,3 ⁄ 30,0	100%
př. 2	42,9 ⁄ 10,0	0 ⁄ 10	0	0	28,6 ⁄ 0	0 ⁄ 20,0	28,6 ⁄ 60,0	100%
př. 3	42,9 ⁄ 20,0	0	14,3 ⁄ 20,0	0	0 ⁄ 10,0	14,3 ⁄ 10,0	28,6 ⁄ 40,0	100%
př. 4	14,3 ⁄ 20,0	28,6 ⁄ 0	0 ⁄ 10,0	0	0	28,6 ⁄ 30,0	28,6 ⁄ 40,0	100%
celkem	46,4 ⁄ 22,5	7,1 ⁄ 2,5	3,6 ⁄ 7,5	0	7,1 ⁄ 2,5	10,7 ⁄ 22,5	25,0 ⁄ 42,5	100%

Nejčastěji použitá metoda pomocí rovnic byla téměř ve všech sledovaných případech více frekventovaná u dívek než u chlapců, nejčastěji u dívek na základní škole. Na střední škole a gymnáziích dívky velmi často řešily příklad č. 4 aritmeticky. Příklad č. 2 řešily často dívky na základní a střední škole pomocí speciálních metod (užití poměru či procent), jejich řešení však často nevedla k cíli. Úsudek používali k řešení úloh častěji chlapci.

Tabulka 4-28 – Přehled všech užitých postupů ve skupině C (hodnoty jsou uvedeny v absolutních číslech, jsou zde rozlišeny výsledky dívek a chlapců – – v tomto pořadí):

Všechny školy - sk. C: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	23 / 19	~	~	~	~	3 / 5	2 / 6	28 / 30
př. 2	11 / 8	0 / 1	~	~	2 / 1 [1,2])	1 / 2	14 / 18	28 / 30
př. 3	11 / 9	~	2 / 4	~	0 / 1 [3])	6 / 3	9 / 13	28 / 30
př. 4	13 / 11	2 / 0	1 / 1	~	~	2 / 5	10 / 13	28 / 30
celkem	58 / 47	2 / 1	3 / 5	~	2 / 2 [1,2,3])	12 / 15	35 / 50	112 / 120

Základní školy - sk. C: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	16 / 10	~	~	~	~	1 / 4	1 / 4	18 / 18
př. 2	7 / 7	0 / 1	~	~	~	0 / 1	11 / 9	18 / 18
př. 3	7 / 5	~	0 / 2	~	~	5 / 1	6 / 10	18 / 18
př. 4	9 / 7	~	0 / 1	~	~	0 / 1	9 / 9	18 / 18
celkem	39 / 29	0 / 1	0 / 3	~	~	6 / 7	27 / 32	72 / 72

Střední školy - sk. C: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	7 / 9	~	~	~	~	2 / 1	1 / 2	10 / 12
př. 2	4 / 1	~	~	~	2 / 1 [1,2])	1 / 1	3 / 9	10 / 12
př. 3	4 / 4	~	2 / 2	~	0 / 1 [3])	1 / 2	3 / 3	10 / 12
př. 4	4 / 4	2 / 0	1 / 0	~	~	2 / 4	1 / 4	10 / 12
celkem	19 / 18	2 / 0	3 / 2	~	2 / 2 [1,2,3])	6 / 8	8 / 18	40 / 48

Gymnázia - sk. C: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	6 / 4	~	~	~	~	0 / 3	1 / 3	7 / 10
př. 2	3 / 1	0 / 1	~	~	2 / 0 [1,2])	0 / 2	2 / 6	7 / 10
př. 3	3 / 2	~	1 / 2	~	0 / 1 [3])	1 / 1	2 / 4	7 / 10
př. 4	1 / 2	2 / 0	0 / 1	~	~	2 / 3	2 / 4	7 / 10
celkem	13 / 9	2 / 1	1 / 3	~	2 / 1 [1,2,3])	3 / 9	7 / 17	28 / 40

Legenda:
[1]) - k řešení použito poměru
[2]) - řešeno pomocí procent - nevedlo k cíli
[3]) - užití nepřímé úměrnosti

Tabulka 4-28 byla opět podkladem pro procentuální zpracování tabulek předchozích. Hodnoty v nich uvedené jsou v absolutních číslech. V legendě jsou specifikované speciální postupy užité při řešení úloh.

Tabulka 4-29 – Přehled všech užitých postupů ve skupině D (pro jednodušší porovnání jsou hodnoty uvedeny v procentech):

Všechny školy - sk. D:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	75,9	3,7	1,9	0	0	11,1	7,4	100%
př. 2	38,9	9,3	1,9	3,7	0	22,2	24,1	100%
př. 3	42,6	1,9	5,6	0	1,9	9,3	38,9	100%
př. 4	25,9	1,9	14,8	0	1,9	3,7	51,9	100%
celkem	45,8	4,2	6,0	0,9	0,9	11,6	30,6	100%

Základní školy - sk. D:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	63,2	5,3	0	0	0	26,3	5,3	100%
př. 2	31,6	10,5	0	10,5	0	31,6	15,8	100%
př. 3	36,8	0	0	0	0	15,8	47,4	100%
př. 4	0	0	15,8	0	0	0	84,2	100%
celkem	32,9	3,9	3,9	2,6	0	18,4	38,2	100%

Střední školy - sk. D:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	82,9	2,9	2,9	0	0	2,9	8,6	100%
př. 2	42,9	8,6	2,9	0	0	17,1	28,6	100%
př. 3	45,7	2,9	8,6	0	2,9	5,7	34,3	100%
př. 4	40,0	2,9	14,3	0	2,9	5,7	34,3	100%
celkem	52,9	4,3	7,1	0	1,4	7,9	26,4	100%

Gymnázia - sk. D:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	87,1	3,2	0	0	0	6,5	3,2	100%
př. 2	58,1	9,7	3,2	6,5	0	16,1	6,5	100%
př. 3	54,8	3,2	3,2	0	3,2	9,7	25,8	100%
př. 4	16,1	3,2	22,6	0	3,2	3,2	51,6	100%
celkem	54,0	4,8	7,3	1,6	1,6	8,9	21,8	100%

Při řešení úloh varianty D žáci a studenti opět nejčastěji užívali rovnic (stejně jako u varianty C), rozdíl je opět dán příkladem č. 1. Žáci základních škol naopak u příkladu č. 4 nepoužili k řešení úlohy ani jednou rovnic, řešili jej pouze v malém počtu a to pouze úsudkem. Poměrně často byl příklad č. 2 řešen také aritmeticky, nejčastěji na základních školách. Variantu D řešilo nejméně žáků a studentů, proto některé výsledky vyjádřeny v procentech jsou v některých případech zdánlivě „větší“.

Tabulka 4-30 – Přehled všech užitých postupů ve skupině D (pro jednodušší porovnání jsou hodnoty uvedeny v procentech, jsou zde rozlišeny výsledky dívek a chlapců – v tomto pořadí):

Všechny školy - sk. D: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	80,0 / 72,4	0 / 6,9	4,0 / 0	0	0	12,0 / 10,3	4,0 / 10,3	100%
př. 2	36,0 / 41,4	12,0 / 6,9	4,0 / 0	4,0 / 3,4	0	20,0 / 24,1	24,0 / 24,1	100%
př. 3	40,0 / 44,8	0 / 3,4	4,0 / 6,9	0	0 / 3,4	12,0 / 6,9	44,0 / 34,5	100%
př. 4	28,0 / 24,1	0 / 3,4	4,0 / 24,1	0	4,0 / 0	0 / 6,9	64,0 / 41,4	100%
celkem	46,0 / 45,7	3,0 / 5,2	4,0 / 7,8	1,0 / 0,9	1,0 / 0,9	11,0 / 12,1	34,0 / 27,6	100%

Základní školy - sk. D: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	60,0 / 66,7	0 / 11,1	0	0	0	30,0 / 22,2	10,0 / 0	100%
př. 2	30,0 / 33,3	10,0 / 11,1	0	10,0 / 11,1	0	30,0 / 33,3	20,0 / 11,1	100%
př. 3	30,0 / 44,4	0	0	0	0	10,0 / 22,2	60,0 / 33,3	100%
př. 4	0	0	0 / 33,3	0	0	0	100 / 66,7	100%
celkem	30,0 / 36,1	2,5 / 5,6	0 / 8,3	2,5 / 2,8	0	17,5 / 19,4	47,5 / 27,8	100%

Střední školy - sk. D: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	93,3 / 75,0	0 / 5,0	6,7 / 0	0	0	0 / 5,0	0 / 15,0	100%
př. 2	40,0 / 45,0	13,3 / 5,0	6,7 / 0	0	0	13,3 / 20,0	26,7 / 30,0	100%
př. 3	46,7 / 45,0	0 / 5,0	6,7 / 10,0	0	0 / 5,0	13,3 / 0	33,3 / 35,0	100%
př. 4	40,0 / 35,0	0 / 5,0	6,7 / 20,0	0	6,7 / 0	0 / 10,0	40,0 / 30,0	100%
celkem	56,7 / 50,0	3,3 / 5,0	6,7 / 7,5	0	1,7 / 1,3	6,7 / 8,8	25,0 / 27,5	100%

Gymnázia - sk. D: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	100 / 78,9	0 / 5,3	0	0	0	0 / 10,5	0 / 5,3	100%
př. 2	58,3 / 57,9	16,7 / 5,3	8,3 / 0	8,3 / 5,3	0	0 / 26,3	8,3 / 5,3	100%
př. 3	58,3 / 52,6	0 / 5,3	0 / 5,3	0	0 / 5,3	16,7 / 5,3	25,0 / 26,3	100%
př. 4	16,7 / 15,8	0 / 5,3	8,3 / 31,6	0	8,3 / 0	0 / 5,3	66,7 / 42,1	100%
celkem	58,3 / 51,3	4,2 / 5,3	4,2 / 9,2	2,1 / 1,3	2,1 / 1,3	4,2 / 11,8	25,0 / 32,6	100%

Nejčastěji užitá metoda pomocí rovnic byla více používána dívkami, rozdíly však nebyly velké. Také neřešených příkladů bylo v případě dívek více. Chlapci častěji řešili úlohy aritmeticky (jen mírně více) a také častěji pomocí úsudku. Zde se na rozdílu podílel příklad č. 4, kde chlapci používali úsudku výrazně častěji.

Tabulka 4-31 – Přehled všech užitých postupů ve skupině D (hodnoty jsou uvedeny v absolutních číslech, jsou zde rozlišeny výsledky dívek a chlapců – – v tomto pořadí):

Všechny školy - sk. D: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	20 / 21	0 / 2	1 / 0	~	~	3 / 3	1 / 3	25 / 29
př. 2	9 / 12	3 / 2	1 / 0	1 / 1 [2])	~	5 / 7	6 / 7	25 / 29
př. 3	10 / 13	0 / 1	1 / 2	~	0 / 1 [1])	3 / 2	11 / 10	25 / 29
př. 4	7 / 7	0 / 1	1 / 7	~	1 / 0 [3])	0 / 2	16 / 12	25 / 29
celkem	46 / 53	3 / 6	4 / 9	1 / 1 [2])	1 / 1 [1´3])	11 / 14	34 / 32	100 / 116

Základní školy - sk. D: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	6 / 6	0 / 1	~	~	~	3 / 2	1 / 0	10 / 9
př. 2	3 / 3	1 / 1	~	1 / 1 [2])	~	3 / 3	2 / 1	10 / 9
př. 3	3 / 4	~	~	~	~	1 / 2	6 / 3	10 / 9
př. 4	~	~	0 / 3	~	~	~	10 / 6	10 / 9
celkem	12 / 13	1 / 2	0 / 3	1 / 1 [2])	~	7 / 7	19 / 10	40 / 36

Střední školy - sk. D: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	14 / 15	0 / 1	1 / 0	~	~	0 / 1	0 / 3	15 / 20
př. 2	6 / 9	2 / 1	1 / 0	~	~	2 / 4	4 / 6	15 / 20
př. 3	7 / 9	0 / 1	1 / 2	~	0 / 1 [1])	2 / 0	5 / 7	15 / 20
př. 4	7 / 7	0 / 1	1 / 4	~	1 / 0 [3])	0 / 2	6 / 6	15 / 20
celkem	34 / 40	2 / 4	4 / 6	~	1 / 1 [1´3])	4 / 7	15 / 22	60 / 80

Gymnázia - sk. D: D / H

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	12 / 15	0 / 1	~	~	~	0 / 2	0 / 1	12 / 19
př. 2	7 / 11	2 / 1	1 / 0	1 / 1 [2])	~	0 / 5	1 / 1	12 / 19
př. 3	7 / 10	0 / 1	0 / 1	~	0 / 1 [1])	2 / 1	3 / 5	12 / 19
př. 4	2 / 3	0 / 1	1 / 6	~	1 / 0 [3])	0 / 1	8 / 8	12 / 19
celkem	28 / 39	2 / 4	2 / 7	1 / 1 [2])	1 / 1 [1´3])	2 / 9	12 / 15	48 / 76

Legenda:
[1]) - řešeno pomocí nepřímé úměrnosti
[2]) - k řešení použity různé grafy
[3]) - k řešení použito modelu

Tabulka 4-31 byla opět podkladem pro procentuální zpracování tabulek předchozích. Hodnoty v nich uvedené jsou v absolutních číslech. V legendě jsou specifikované speciální postupy užité při řešení úloh.

Shrneme-li výsledky v jednotlivých variantách A, B, C, D jsou samozřejmě rozdíly mezi dívkami a chlapci větší než v celkovém souboru A – D. Pokud nebudeme srovnávat případy, kdy žáci a studenti úlohy neřešili nebo nebylo možno určit jaké řešení zvolili, můžeme odpovědně porovnat pouze případy, kdy byly úlohy řešeny pomocí rovnic a částečně i případy, kdy byly použity úsudky. V některých skupinách bylo i stoprocentní použití rovnic, a to u 1. příkladu – dívky gymnázií, varianta D a chlapci gymnázií, varianta A. Se zvyšujícím se číslem příkladu se maximum snižovalo, u 4. příkladu se pohybovalo kolem 60 % (dívky SŠ, varianta B – 52,6 %, chlapci SŠ, varianta B – 69,6 %). Minimum použití rovnic se pohybovalo od 0 % ve 4. příkladu (dívky ZŠ i chlapci ZŠ ve variantě D) ke 40 % v 1. příkladu (chlapci gymnázií, varianta C). Tendence minim byla tedy zcela logicky opačná než u maxim. Srovnáme-li použití úsudků, v 1. příkladu se úsudek téměř nevyskytoval (převážně 0 %), v 2. příkladu nepřesáhl u jednotlivých skupin 10 %, pouze ve 3. a 4. příkladu se maximální zastoupení úsudku dostalo přes 30 %, ve všech případech to byli chlapci. Ve všech příkladech se objevily případy, kdy řešitelé neužívali úsudek vůbec, častěji to byly dívky.

Na závěr uvádím ještě souhrnné tabulky, pomocí kterých lze porovnat jak jednotlivé skupiny, tak celý soubor testových úloh.

Tabulka 4-32 – Celkový přehled všech užitých postupů ve všech skupinách (pro jednodušší porovnání jsou hodnoty uvedeny v procentech):

Všechny školy - porovnání skupin:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
sk. A	55,8	1,5	6,1	0,3	1,5	8,8	25,9	100%
sk. B	66,7	1,3	7,0	0,3	0	6,0	18,7	100%
sk. C	45,3	1,3	3,4	0	1,7	11,6	36,6	100%
sk. D	45,8	4,2	6,0	0,9	0,9	11,6	30,6	100%
sk. A - D	54,6	2,0.	5,8	0,4	1	9,2	27,1	100%

Tabulka 4-33 – Přehled všech užitých postupů v jednotlivých skupinách (pro jednodušší porovnání jsou hodnoty uvedeny v procentech, jsou zde rozlišeny výsledky dívek a chlapců – v tomto pořadí):

Všechny školy - porovnání skupin:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
sk. A	62,2 ⁄ 47,1	2,1 ⁄ 0,7	5,3 ⁄ 7,1	0 ⁄ 0,7	1,1 ⁄ 2,1	6,9 ⁄ 11,4	22,3 ⁄ 30,7	100%
sk. B	66,7 ⁄ 65,3	1,3 ⁄ 1,4	3,2 ⁄ 11,1	0,6 ⁄ 0	0,6 ⁄ 0,7	4,5 ⁄ 7,6	23,1 ⁄ 13,9	100%
sk. C	51,8 ⁄ 39,2	1,8 ⁄ 0,8	2,7 ⁄ 4,2	0	1,8 ⁄ 1,7	10,7 ⁄ 12,5	31,3 ⁄ 41,7	100%
sk. D	46,0 ⁄ 45,7	3,0 ⁄ 5,2	4,0 ⁄ 7,8	1,0 ⁄ 0,9	1,0 ⁄ 0,9	11,0 ⁄ 12,1	34,0 ⁄ 27,6	100%
sk. A - D	58,6 ⁄ 50,2	2,0 ⁄ 1,9	4,0 ⁄ 7,7	0,4 ⁄ 0,4	0,9 ⁄ 1,2	7,7 ⁄ 10,8	26,4 ⁄ 27,9	100%

Z celkového přehledu i z přehledu pro dívky a chlapce je evidentní, že zcela jednoznačně byly pro řešení úloh nejčastěji užívány rovnice, často více než v 50 % případů. Jiné užité metody jim nemohou konkurovat, neboť jejich užití je až na jednu výjimku do 8 %, často je užití menší než 3 %. A tak na druhém a třetím místě jsou případy, kdy úlohy nejsou řešeny (až 40 %) nebo způsob řešení nelze určit (kolem 10 %). Druhou nejužívanější metodou je tedy řešení úlohy úsudkem (kolem 6 %). Častěji (až dvojnásobně) užívají úsudek chlapci.

Další v pořadí je užití aritmetických výpočtů (kolem 2 %), výrazně nejčastěji bylo aritmetické řešení použito ve variantě D. Užitá speciální řešení byla různorodá, celkově se pohybovala kolem 1 % užití. Nejméně často bylo k řešení použito grafů. Bylo to jen výjimečně, ani v jednom případě nepřesáhla četnost užití 1 %.

Porovnáme-li frekvenci použitých metod a celkový dosažený výsledek, zjistíme, že není důležité jakou metodu řešitel použil, ale to jak dobře tuto metodu zná. Jeví se to zejména při porovnání dívek a chlapců. I když dívky preferovaly jiné metody než chlapci a byly úspěšné v jiných typech úloh, celkový výsledek dívek a chlapců byl srovnatelný (téměř stejný). Je možné konstatovat, že není tolik důležitá volba cesty, ale je důležitější, jak je tato cesta zvládnuta.

4.4. Dotazník a jeho vyhodnocení

4.4.1. Dotazník

V rámci průzkumu řešení slovních úloh na základních a středních školách v Jihočeském kraji byl zadán žákům a studentům dotazník, ve kterém vyjádřili svůj postoj ke slovním úlohám. Dotazníky byly zadány na školách v Českých Budějovicích, Prachaticích, Vodňanech a ve Volyni. Vzhledem k tomu, že předmětem testování byly slovní úlohy o celku a částech, o pohybu, o směsích a o společné práci, i otázky v dotazníku se zaměřily na tyto slovní úlohy. Ostatní slovní úlohy byly zařazeny do skupiny jiné. Na otázky odpovídalo celkem 238 žáků a studentů.

Dotazník (obr. 4-14) se skládal ze šesti otázek, z nichž čtyři byly uzavřené (č. 1, 3, 4 a 5) a dvě otevřené (č. 2 a 6). Otevřené otázky doplňovaly a upřesňovaly předchozí otázky uzavřené. V první otázce odpovídali respondenti na to, jak mají slovní úlohy oblíbené, v druhé otázce to zdůvodňovali. Ve třetí otázce respondenti vybírali svoje nejoblíbenější slovní úlohy, ve čtvrté se vyjadřovali k tomu, zda by chtěli slovních úloh řešit více či méně. V páté a šesté otázce se respondenti vyjadřovali k tomu, proč slovní úlohy vznikly a k čemu slouží.

Obr. 4-14 – Text dotazníku:

DOTAZNÍK

Svou odpověď vyznač křížkem. Pokud se možnosti nevylučují, je možné u jedné otázky použít i více křížků. Můžeš připsat i svůj komentář. Piš čitelně. Děkuji.

Chlapec: ………… ☐ **Dívka:** …………… ☐

Škola: ZŠ ……... ☐ **SŠ: gymnázium** ………… ☐

SOŠ ______________ ☐

jiné ______________ ☐

1) Slovní úlohy řeším: rád(a) …………..
jak kdy …………..
nerad(a) …………

2) Zdůvodněte své vyjádření v předchozí otázce [proč řeším slovní úlohy (ne)rad(a), co mě vede k tomu, že někdy řeším slovní úlohy rád(a), někdy nerad(a)]:

____

____

3) Které slovní úlohy mám nejraději: o pohybu ………………….
o směsích ………………….
o společné práci ………………
o celku a částech ………………
jiné ……………………..

4) Přál(a) bych si, aby slovních úloh bylo: více …………………..
stejně ………………..
méně …………………
nebyly žádné …………

5) Slovní úlohy slouží k tomu, …
abychom si bystřili mysl ……………………………………..
abychom se seznámili s úlohami z praxe a uměli je řešit ….
abychom se naučili něčemu novému …………………..
abychom se mohli doma chlubit jak jsme chytří …………..
aby nás jimi ve škole učitelé trápili …………………..
k úplně jinému účelu, a to ………________________________________

6) Proč byly slovní úlohy vymyšleny?

____

4.4.2. Obliba řešení slovních úloh a nejoblíbenější úlohy

Odpovědi na otázku č. 1 „Slovní úlohy řeším . . .“ jsou uvedeny v tabulkách 4-34. Pro snadnější porovnání jsou počty studentů uvedeny v procentech. Je to z důvodu nestejného počtu žáků a studentů v jednotlivých typech škol a nestejného počtu chlapců a dívek v těchto skupinách. Celkem nejvíce respondentů přistupuje k řešení slovních úloh diferencovaně, někdy je řeší rádi jindy neradi. V doplňující otázce č. 2 to zdůvodňují tím, že slovní úlohy, kterým rozumí a které jim jdou, řeší rádi, naopak slovní úlohy, kterým nerozumí a nejdou jim, řeší neradi. Dále pak existuje více těch, kteří slovní úlohy řeší neradi než těch, kteří řeší slovní úlohy rádi. Celkově obě tyto skupiny dohromady jsou menší než skupina prostřední (jak kdy).

Podobný výsledek byl zjištěn v práci [88]. Dále jsou v tabulce patrné rozdíly mezi přístupem k oblibě slovních úloh u chlapců a u dívek. Porovnáváme-li jednotlivé hodnoty vůči celku, potom chlapci řeší slovní úlohy raději než dívky, rozdíl však není velký (asi 4 %), naopak dívky řeší slovní úlohy spíše nerady, rozdíl opět není velký (asi 3 %). U těch, kteří řeší slovní úlohy jednou rádi, jednou neradi, se rozdíly mezi chlapci a dívkami téměř neobjevují (do 1 %).

Porovnáme-li hodnoty vyjadřující postoje chlapců a dívek navzájem (tj. „řádkově“), zvětší se nám rozdíly zejména v případech, kdy součet bude menší číslo. Je to v případě, kdy respondenti řeší úlohy rádi (je jich jen 11 %). Tam je potom rozdíl mezi chlapci a dívkami větší než podle skupin (tj. „sloupcově“) a činí 18 %.

Celkově lze říci, že respondenti nejčastěji, a to více než polovina, řeší slovní úlohy diferencovaně podle toho jak jim „jdou“. Asi třetina respondentů řeší úlohy nerada, mírně převažují dívky. Pouze desetina respondentů řeší úlohy ráda, mezi nimi převažují chlapci.

Tabulka 4-34 – Obliba řešení slovních úloh:

Slovní úlohy mám:	chlapec	dívka	**celkem**
rád (a)	13	9	11
jak kdy	56	57	56
nerad (a)	31	34	32
celkem	100%	100%	100%

Slovní úlohy mám:	chlapec	dívka	**celkem**
rád (a)	59	41	100%
jak kdy	50	50	100%
nerad (a)	48	52	100%
celkem	50	50	100%

Odpovědi na otázku č. 3 „Které slovní úlohy mám nejraději . . .“ jsou uvedeny v tabulkách 4-35a, 4-35b. Stejně jako v předchozím případě jsou i tyto údaje pro lepší porovnání uvedeny v procentech. V tabulce 4-35a je základem celkový počet všech respondentů v daném sloupečku, v tabulce 4-35b je základem celkový počet respondentů v daném řádku. Zvlášť jsou hodnoceni žáci základních škol a studenti středních škol. Potom jsou hodnoceni společně a na závěr jsou vyčleněni studenti gymnázií (studenti nižších gymnázií patří věkově mezi žáky základních škol, studenti vyšších gymnázií se řadí věkově mezi studenty středních škol). Navíc jsou v každé skupině odděleně hodnoceni chlapci a dívky.

V předepsaných odpovědích jsou uvedeny slovní úlohy o částech a celku, o pohybu, o směsích a o společné práci. Ostatní úlohy jsou řazeny pod symbol jiné a poslední možnost žádné nebo neuvedeno shrnuje případy, kdy respondenti uvedli, že nemají žádné oblíbené slovní úlohy nebo v odpovědi neuvedli nic.

Z celkového porovnání (tabulka 4-35a; poslední sloupec „celkem“) plyne, že nejoblíbenější úlohy jsou úlohy o celku a částech, jako oblíbené se objevily ve čtvrtině případů a celkově nejoblíbenější byly z uvedených čtyř typů ve všech sledovaných skupinách. Navíc ve všech případech byly vždy oblíbenější mezi dívkami (celkově o 10 % více než u chlapců).

Vezmeme-li v úvahu, že tento typ úloh je nejjednodušší a postup při jeho řešení je nejvíce mechanický, pak nám z toho plyne, že je nejjednodušší se tento typ úloh „našprtat“. Proto asi nikoho nepřekvapí, že nejoblíbenější jsou úlohy o celku a částech mezi děvčaty gymnázií (až 41 %). Naopak chlapci ve všech typech škol vykazují oblíbenost těchto úloh prakticky stejnou (většinou kolem 20 %) a navíc srovnatelnou s oblíbeností jiných typů slovních úloh.

„Opakem“ v oblíbenosti jsou slovní úlohy o pohybu. Celkově je má raději o 8 % více chlapců než dívek. U dívek patří mezi nejméně oblíbené, není to však vždy jednoznačné. Pro chlapce jsou tyto úlohy ve všech skupinách nejoblíbenější. Nejvíce oblíbené jsou pro chlapce na středních školách a na gymnáziích (23 %).

Zbývající dva typy úloh celkově již nepatří v žádné skupině k nejoblíbenějším úlohám, pouze v jednotlivých srovnáních se dostávají mezi nejvíce či nejméně oblíbené – u chlapců na základních školách slovní úlohy o směsích (nejoblíbenější mezi chlapci společně s úlohami o pohybu) a u dívek slovní úlohy o společné práci (nejméně oblíbené mezi dívkami na základních školách) či slovní úlohy o směsích (nejméně oblíbené mezi dívkami na středních školách). Ve všech sledovaných skupinách asi 30 % respondentů uvedlo jako oblíbené jiné slovní úlohy (méně než 30 %) nebo uvedli, že nemají oblíbené žádné slovní úlohy či neuvedli nic (do 5 %).

Přejdeme-li k porovnání výsledků v jednotlivých částech (sloupce „rád“, „jak kdy“ a „nerad“), jsou hodnoty více rozdílné. Jedním z důvodů je menší počet respondentů, kteří tvoří základ, a proto i menší odchylka (co do počtu) se, vyjádřena v procentech, více zvýrazní.

Ve slovních úlohách o celku a částech téměř vždy řeší raději tyto úlohy dívky (v 11 ze 12 sledovaných případů), největší rozdíl je 28 % (= 36 – 8) na středních školách v části „nerad“. Toto zcela koresponduje se zjištěním v celkovém přehledu.

Celkovému přehledu zcela odpovídá i výsledek ve slovních úlohách o pohybu, kdy naopak tyto úlohy často raději řeší chlapci (v 11 ze 12 případů), největší rozdíl je 23 % (= 23 – 0) na gymnáziích v části „nerad“. Tyto částečné výsledky tak jen potvrzují celková zjištění.

Ve slovních úlohách o směsích a úlohách o společné práci jsou celkové rozdíly malé, a proto v dílčích srovnáních se výsledky chlapců a dívek mění. Shrneme-li výsledky v jednotlivých částech, jsou celkem vyrovnané. Je-li v některé části výsledek příhodnější pro dívky, je hned v další části situace opačná.

Poslední dvě možnosti nebudeme porovnávat. Jednak nejsou předmětem našeho zájmu, jednak v některých případech velmi malé základy (z celku maximálně 5 %, mnohdy méně) zkreslují výsledné hodnoty. Ne ojediněle se pak tyto hodnoty blíží 75 %.

Vezmeme-li jako základ celkové hodnoty v jednotlivých řádcích (tabulka 4-35b) a provedeme-li srovnání v těchto řádcích (označme jej nové), vidíme, že hodnoty pro všechny (tj. chlapce i dívky) korespondují s výsledky z předchozího srovnání (tabulka 4-35a; označme jej původní). V novém způsobu srovnání jsou rozdíly větší, v některých případech, kdy základní počet chlapců a dívek se výrazněji liší, mohou dokonce vykazovat opačné výsledky. Nejvýrazněji se to projevuje na středních školách ve slovních úlohách o celku a částech, kde v původním hodnocení je jako oblíbenější úlohy uvádí více procent dívek, kdežto v hodnocení novém je jako oblíbenější uvádí více chlapců. Samozřejmě, že „pravdivěji“ vypovídá o vztahu hodnocení původní. Nové hodnocení nám zase lépe vyjadřuje vazbu mezi údaji pro chlapce, pro dívky i pro všechny mezi jednotlivými sloupci „rád“, „jak kdy“ a „nerad“.

Tabulka 4-35a – Porovnání oblíbenosti slovních úloh:

ZÁKLADNÍ ŠKOLY A NIŽŠÍ GYMNÁZIA

typ	rád			jak kdy			nerad			celkem		
slovní úlohy	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	29	33	31	13	35	24	19	30	25	16	33	25
o pohybu	14	17	15	21	13	16	13	10	11	18	12	15
o směsích	29	50	38	23	18	20	0	5	3	18	17	17
o společné práci	14	0	8	21	8	14	6	5	6	16	6	11
jiné	14	0	8	21	25	23	50	50	50	27	30	29
žádné nebo neuved.	0	0	0	3	3	3	13	0	6	5	2	3
celkem	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

STŘEDNÍ ŠKOLY

typ	rád			jak kdy			nerad			celkem		
slovní úlohy	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	29	38	31	26	20	24	8	36	22	22	27	25
o pohybu	19	13	17	28	20	25	17	4	10	23	14	19
o směsích	10	13	10	13	5	10	4	8	6	10	7	9
o společné práci	19	13	17	11	33	20	17	16	16	14	25	19
jiné	24	13	21	21	20	20	38	28	33	26	22	24
žádné nebo neuved.	0	13	3	0	3	1	17	8	12	4	5	5
celkem	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

ZÁKLADNÍ A STŘEDNÍ ŠKOLY

typ	rád			jak kdy			nerad			celkem		
slovní úlohy	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	29	36	31	21	28	24	13	33	24	20	30	25
o pohybu	18	14	17	25	16	21	15	7	11	21	13	17
o směsích	14	29	19	17	11	15	3	7	5	13	12	12
o společné práci	18	7	14	15	20	17	13	11	12	15	16	15
jiné	21	7	17	21	23	22	43	38	40	26	26	26
žádné nebo neuved.	0	7	2	1	3	2	15	4	9	4	4	4
celkem	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

GYMNÁZIA

typ	rád			jak kdy			nerad			celkem		
slovní úlohy	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	23	40	28	22	39	30	14	47	28	20	41	29
o pohybu	18	10	16	26	9	18	23	0	13	23	7	16
o směsích	18	30	22	17	15	16	0	0	0	13	14	13
o společné práci	14	10	13	11	15	13	5	6	5	10	12	11
jiné	27	10	22	22	20	21	36	47	41	27	25	26
žádné nebo neuved.	0	0	0	2	2	2	23	0	13	6	1	4
celkem	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Tabulka 4-35b – Porovnání oblíbenosti slovních úloh:

ZÁKLADNÍ ŠKOLY A NIŽŠÍ GYMNÁZIA

typ	rád			jak kdy			nerad			celkem		
slovní úlohy	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	6	6	13	16	44	59	9	19	28	31	69	100%
o pohybu	5	5	11	42	26	68	11	11	21	58	42	100%
o směsích	9	14	23	41	32	73	0	5	5	50	50	100%
o společné práci	7	0	7	57	21	79	7	7	14	71	29	100%
jiné	3	0	3	22	27	49	22	27	49	46	54	100%
žádné nebo neuved.	0	0	0	25	25	50	50	0	50	75	25	100%
celkem	5	5	10	30	31	62	13	16	28	48	52	100%

STŘEDNÍ ŠKOLY

typ	rád			jak kdy			nerad			celkem		
slovní úlohy	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	14	7	21	33	19	52	5	21	26	52	48	100%
o pohybu	12	3	15	45	24	70	12	3	15	70	30	100%
o směsích	13	7	20	47	13	60	7	13	20	67	33	100%
o společné práci	13	3	16	19	41	59	13	13	25	44	56	100%
jiné	12	2	15	27	20	46	22	17	39	61	39	100%
žádné nebo neuved.	0	13	13	0	13	13	50	25	75	50	50	100%
celkem	12	5	17	31	23	54	14	15	29	57	43	100%

ZÁKLADNÍ A STŘEDNÍ ŠKOLY

typ	rád			jak kdy			nerad			celkem		
slovní úlohy	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	11	7	18	26	30	55	7	20	27	43	57	100%
o pohybu	10	4	13	44	25	69	12	6	17	65	35	100%
o směsích	11	11	22	43	24	68	3	8	11	57	43	100%
o společné práci	11	2	13	30	35	65	11	11	22	52	48	100%
jiné	8	1	9	24	23	47	22	22	44	54	46	100%
žádné nebo neuved.	0	8	8	8	17	25	50	17	67	58	42	100%
celkem	9	5	14	31	27	58	13	15	28	54	46	100%

GYMNÁZIA

typ	rád			jak kdy			nerad			celkem		
slovní úlohy	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.	chl.	dív.	všich.
o celku a části	10	8	18	24	36	60	6	16	22	40	60	100%
o pohybu	14	4	18	50	14	64	18	0	18	82	18	100%
o směsích	17	13	30	39	30	70	0	0	0	57	43	100%
o společné práci	16	5	21	32	37	68	5	5	11	53	47	100%
jiné	14	2	16	27	20	48	18	18	36	59	41	100%
žádné nebo neuved.	0	0	0	14	14	29	71	0	71	86	14	100%
celkem	13	6	19	32	27	58	13	10	23	57	43	100%

U sledovaných typů slovních úloh o celku a částech, o pohybu, o směsích a o společné práci je rozvrstvení jednotlivých hodnot klasické, odpovídající Gaussově křivce rozdělení hodnot. Jinak je tomu však u hodnot slovních úloh typu „jiné“ a „žádné nebo neuvedeno“. Zde jsou zcela srovnatelné hodnoty ve sloupcích „jak kdy“ a „nerad“. Z toho lze usuzovat, že ti, kteří řeší slovní úlohy neradi, nechtějí řešit úlohy žádné (toto zjištění ostatně odpovídá i výsledkům v otázce č. 4) nebo neví, které úlohy by řešili, protože jim pravděpodobně nejdou řešit žádné.

4.4.3. Více či méně slovních úloh

V otázce č. 4 měli žáci a studenti odpovědět, zda si přejí řešit slovních úloh více nebo méně. Nejdříve porovnejme respondenty podle toho co si přejí. Ti, kteří si přejí aby slovních úloh bylo více, řeší tyto úlohy rádi. Ti, kteří si přejí, aby úloh bylo stejně nebo méně někdy řeší slovní úlohy rádi, jindy neradi. Ti, kteří si nepřejí slovní úlohy žádné, je řeší neradi. Je možné říci, že vztah mezi tím zda respondenti řeší úlohy rádi či neradi a zda si přejí aby jich bylo více či méně, je posunut mírně do záporných hodnot, tj. čím neraději řeší slovní úlohy, tím více si přejí, aby žádné nebyly. Vztahy uvádí první tabulka 4-36.

Tabulka 4-36 – Vztahy mezi přáním a skutečností:

Přeji si, aby slov. úl. bylo:	více	stejně	méně	žádné	nevím*	**celkem**
rád (a)	63	15	3	0	0	12
jak kdy	31	77	62	18	67	59
nerad (a)	6	8	35	82	33	29
celkem	100%	100%	100%	100%	100%	100%

nevím* = včetně neuvedených odpovědí

Přeji si, aby slov. úl. bylo:	více	stejně	méně	žádné	nevím*	**celkem**
rád (a)	37	56	7	0	0	100%
jak kdy	4	58	29	7	2	100%
nerad (a)	1	10	29	58	1	100%
celkem	7	42	26	23	1	100%

nevím* = včetně neuvedených odpovědí

Nyní porovnejme respondenty podle toho, jak rádi řeší slovní úlohy. Ti, kteří řeší slovní úlohy rádi, si spíše přejí, aby slovních úloh bylo stejně, mnohem méně si přejí, aby jich bylo více. Ti, kteří řeší slovní úlohy někdy rádi, někdy neradi, si také nejčastěji přejí, aby slovních úloh bylo stejně, většina ostatních si přeje, aby slovních úloh bylo méně. Ti, kteří řeší slovní úlohy neradi, si přejí, aby slovních úloh bylo méně, mnohem častěji, aby nebyly žádné.

4.4.4. K čemu jsou slovní úlohy

V otázkách č. 5 a č. 6 měli respondenti odpovědět, k čemu slouží slovní úlohy, a proč byly vymyšleny. Výsledky jsou v tabulce 4-37.

Tabulka 4-37: – K čemu slouží slovní úlohy:

Slovní úlohy slouží k tomu, abychom …	**celkem**
si bystřili mysl	24
se seznámili s úlohami z praxe a uměli je řešit	46
se naučili něčemu novému	11
se doma mohli chlubit jak jsme chytří	6
aby nás jimi učitelé ve škole trápili	12
k úplně jinému účelu	1
celkem	100%

Nejčastěji respondenti odpovídali, že slovní úlohy slouží k tomu aby se seznámili s úlohami z praxe a naučili se je řešit. Odpověděla tak téměř polovina žáků a studentů. V další otázce (č. 6) pak doplňovali, že úlohy nebyly vymyšleny, ale přímo vyplynuly z praxe. Téměř čtvrtina respondentů uvedla, že jim úlohy slouží k tomu, aby si bystřili mysl. Odpověď vlastně umocňuje předchozí odpověď – umění řešit slovní úlohy umožňuje bystřit si mysl. Na třetím místě se umístila odpověď „slovní úlohy slouží k tomu, aby nás jimi učitelé ve škole trápili. Dvanáct procent odpovědí (téměř každá sedmá) by nás mělo nutit k zamyšlení. Navíc tuto odpověď častěji uváděli ti, kteří mají ke slovním úlohám záporný postoj a ti, kteří v testech dosahovali podprůměrných výsledků.

Na čtvrtém místě se (těsně o 1 %) umístila odpověď „abychom se naučili něčemu novému“. Také tato odpověď doplňuje první dvě, kdy jde o to naučit se řešit slovní úlohy a zlepšit se. Další odpovědi již nebyly výrazněji zastoupeny.

Celkově lze říci, že z dotazníku jednoznačně nevyplývá, že by slovní úlohy byly neoblíbené. Neoblíbené jsou pouze pro ty, kteří je nechápou a neumějí řešit, ať už stabilně nebo jen někdy. Ukazuje se, že je rozdíl v oblíbenosti slovních úloh mezi chlapci a dívkami. Nejvýrazněji se to projevuje ve slovních úlohách o celku a částech a slovních úlohách o pohybu. Dívky výrazně raději řeší slovní úlohy o celku a částech. Tyto úlohy bývají často jednodušší a při řešení je možné použít mechaničtější postup. Chlapci naopak výrazně raději řeší úlohy o pohybu. Tyto úlohy bývají často variabilnější a řešení je mnohdy složitější než u úloh o celku a částech. Další typy slovních úloh jsou v oblibě mezi chlapci a dívkami srovnatelné, odchylky jsou většinou statisticky nevýznamné.

Ještě bych chtěl upozornit na velké procento žáků a studentů, kteří uváděli, že slovní úlohy slouží učitelům k tomu, aby je s nimi trápili. Pro tyto žáky a studenty by bylo dobré řešení slovních úloh zjednodušit užitím modelů, usnadnit jim zařazení slovních úloh do jednotlivých skupin podle typů a pomoci jim v řešení větší aplikací vzorců. Návodem by nám mohlo být použití vzorců k řešení úloh slovního charakteru již ve starověké Číně.

Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci

Katedra algebry a geometrie

Řešené úlohy testů

(žákovská a studentská řešení)

Disertační práce

Příloha č. 3

Vedoucí disertační práce:

Doc. RNDr. Stanislav Trávníček CSc.

Vypracoval:

Mgr. František Šíma

Olomouc 2013

O B S A H

Varianta A:

1. Ve třech skladištích bylo uloženo celkem 70 tun obilí. V druhém skladišti bylo uloženo o 8,5 t méně a ve třetím skladišti o 3,5 t více než v prvním skladišti. Kolik tun obilí bylo uloženo v jednotlivých skladištích?

2. Denní produkce mléka 630 litrů byla k odvozu slita do 22 konví, z nichž některé byly po 25 litrech, jiné po 35 litrech. Všechny konve byly plné. Kolik bylo jednotlivých konví?

3. Kamion jede po dálnici z Prahy do Bratislavy průměrnou rychlostí 72 km/h. V okamžiku, kdy je kamion od Prahy 54 km, vyjíždí z Prahy osobní auto, které jede rovněž do Bratislavy a jehož průměrná rychlost je 90 km/h. Kdy a na kterém kilometru dálnice Praha – Bratislava dohoní osobní auto kamion.

4. Vodní nádrž by se naplnila jen prvním přítokem za 36 minut, jen druhým za 45 minut. Za jak dlouho se nádrž naplní, přitéká-li voda nejprve 9 minut jen prvním přívodem a pak oběma současně?

Varianta A – příklad 1:

Studentka – Gymnázium Vodňany, kvinta:

1.

A   B   C

$A + B + C = 70\,t$

$B = A - 8{,}5\,t$ $70 : 3 \doteq 23{,}\overline{3}$

$C = A + 3{,}5\,t$

B	$23 - 8{,}5 = 14{,}5$	15,5	16,5	B
C	$23 + 3{,}5 = 26{,}5\,t$	27,5	28,5	C
A	$= 23$	24	25	A

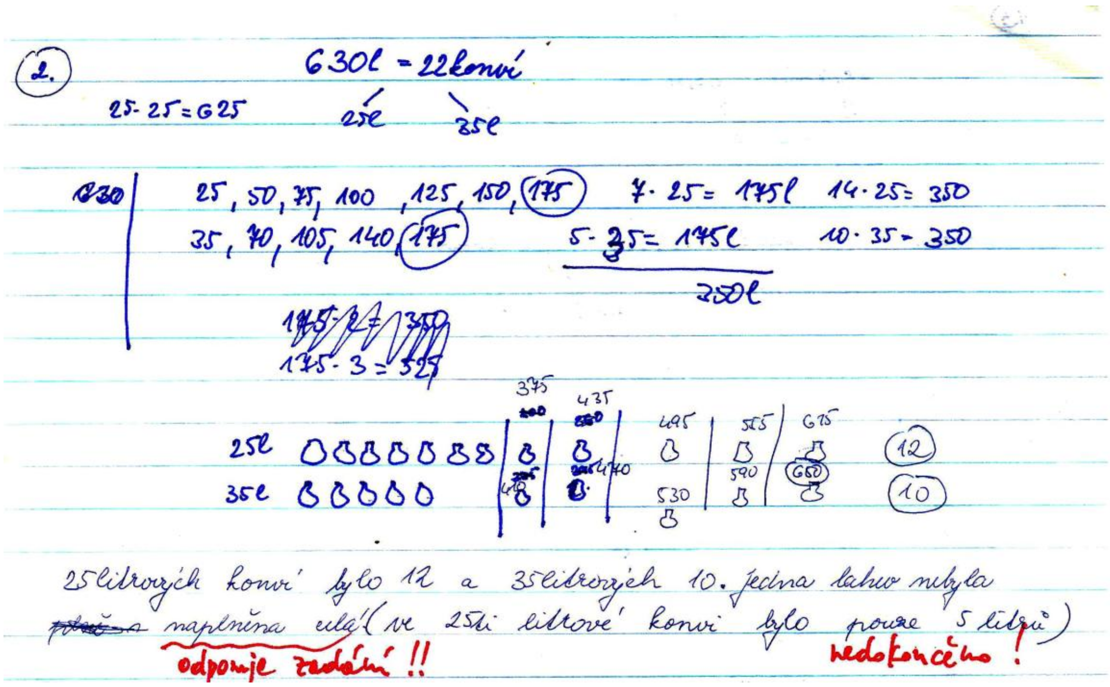
V prvním skladišti bylo uloženo 25tun obilí, ve druhém jen 16,5 tuny a ve třetím 28,5 tuny.

Studentka k řešení zvolila aritmetický postup. Pro určení výchozí hodnoty si pomohla aritmetickým průměrem. Velikost kroku volila 1 [tuna]. Po třech krocích dospěla k výsledku.

Studentka postup nezdůvodnila, postupovala intuitivně. Také neuváděla celkový součet. V zápise není ani zkouška (zkoušku je možné provést zpaměti, ale je nutné to uvést v zápise).

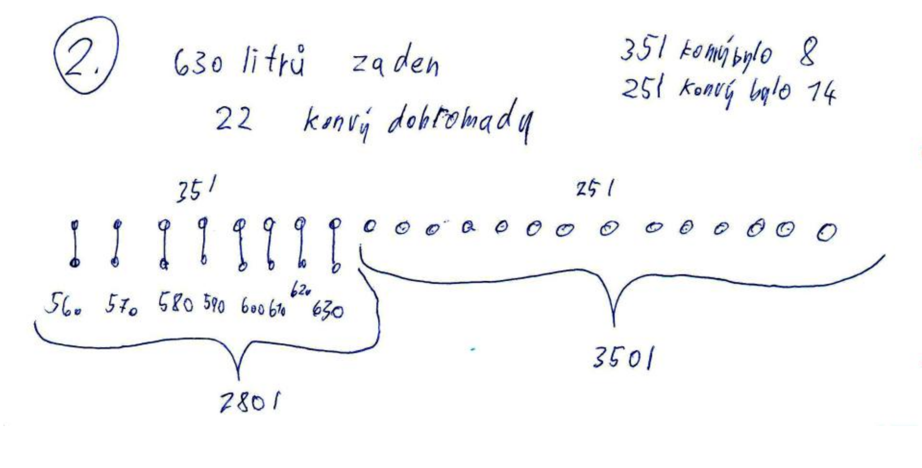
Varianta A – příklad 2:

Studentka – Gymnázium Vodňany, kvinta:



Studentka použila kombinaci aritmetického postupu s grafickým znázorněním. Postup však nedokončila a částečné „řešení“ (to je nutné ještě upravit) prohlásila jako výsledné. Protože ji přebývalo 20 litrů mléka, odebrala toto množství z jedné konve (vybrala si 25-litrovou). Toto řešení odporuje zadání (všechny konve byly plné).

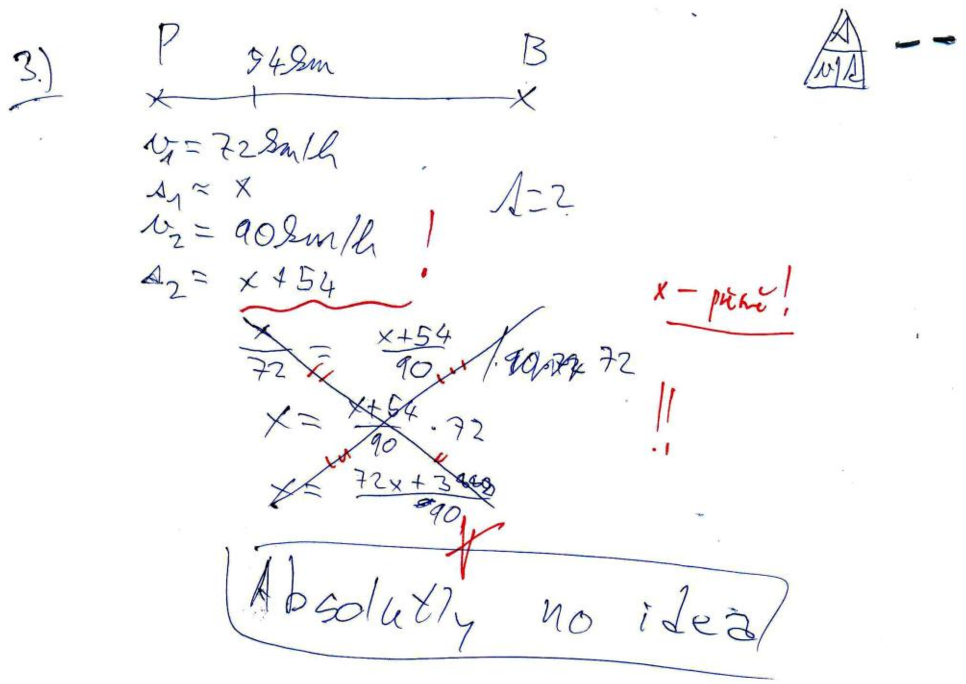
Student – SPŠ stavební České Budějovice, 1.ročník:



Student zvolil klasický grafický postup, kdy vyšel z toho, že každá z 22 konví obsahuje alespoň 25 *l* mléka. Potom přidával ke každé konvi 10 *l* , až byl celkový součet obsahu všech konví 630 *l*. Z grafického znázornění je zřejmá i zkouška.

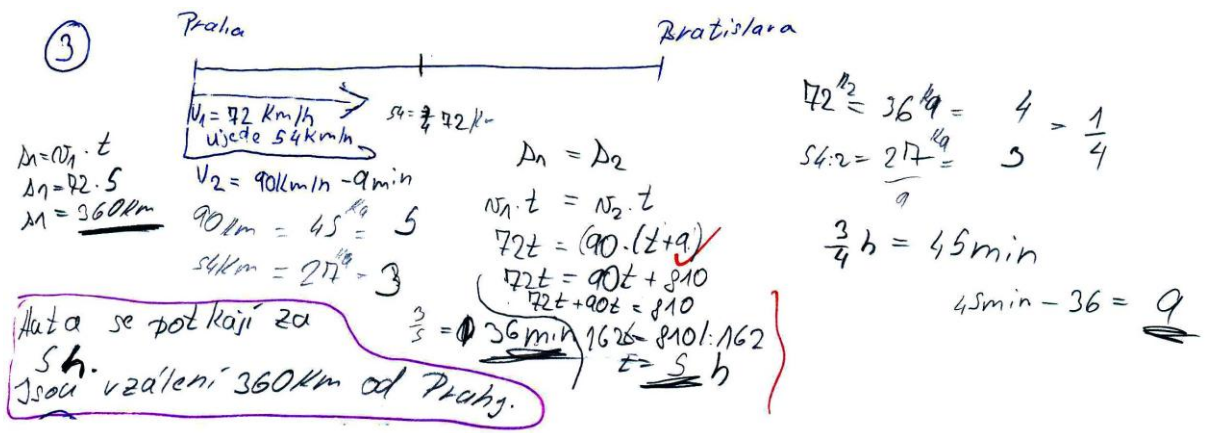
Varianta A – příklad 3:

Student – Gymnázium Jírovcova České Budějovice, 1. ročník:



Student graficky situaci znázornil a sestavil lineární rovnici pro neznámou dráhu *x*. Při řešení rovnice z neznámého důvodu řešení ukončil a škrtl. Závěrečná poznámka „Absolutly no idea“ by měla spíše znít „neumím řešit lineární rovnici“.

Studentka – SPŠ stavební České Budějovice, 1.ročník:



Studentka si zjistila, o kolik minut méně stačí osobnímu autu na projetí náskoku, než na to potřebuje kamion. Pomocí této hodnoty (v minutách) sestavila nesprávně rovnici (navíc rychlost dosadila v km/h). V rovnici navíc ještě udělala další chybu.

Varianta A – příklad 4:

Studentka – Gymnázium Jírovcova České Budějovice, kvinta:

za dobu, kdy přitékala voda 1. přítokem 9 minut: $\frac{1}{4}$ naplněná

~~za 1 minutu ... 36:36 = 1 část~~ 36 : 36 = 1

~~za 1 minutu ... 48:36 =~~ 36 : 45 = 0,8

1 + 0,8 = 1,8

zbývá ... $\frac{3}{4}$ → 27 min pro 1. přítok

Zk: nevím :)

27 : 1,8 = 15

15 + 9 = 24

Společně naplní nádrž za 24 minut.

Studentka prováděla zcela nahodile operace s hodnotami v zadání. Výsledná hodnota skutečně odpovídá, neboť se studentka do výsledku trefila (viz vztah 3-14 z disertační práce).

Studentka – SPgŠ Prachatice, 2.ročník:

4) 1. přívod .... 36 min
2. -//- .... 45 min
9 min ... 1. přívod, pak oba současně
doba napouštění ... x min
1. přívod za x min ... $\frac{x}{36}$ nádrže
2. -//- za x min ... $\frac{x-9}{45}$ nádrže
1. přívod ... x min
2. -//- ... (x − 9) min
společně ... 1 nádrž

$$\frac{x}{36} + \frac{x-9}{45} = 1 \quad /\cdot 180$$
$$5x + 4(x-9) = 180$$
$$5x + 4x - 36 = 180$$
$$9x = 216$$
$$x = \frac{216}{9}$$
$$x = \underline{24\ min}$$

Nádrž bude napuštěna za 24 min

zk.: 1. přívod ... $\frac{24}{36} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ nádrže
2. přívod ... $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ nádrže
$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \underline{1}$

Studentka vzorně rozepsala zadání a na základě toho sestavila lineární rovnici, kterou správně vyřešila. Nakonec provedla správně i zkoušku.

Varianta B:

1. Písemnou zkoušku z matematiky psalo 37 žáků, nikdo z nich neměl pětku. Jedniček bylo dvakrát víc než čtyřek, dvojek bylo o 6 více než jedniček, trojek bylo 11. Kolik žáků mělo jedničku, kolik dvojku, trojku a čtyřku?

2. Pět litrů bílého vína a šest litrů červeného vína stálo 432 Kč. Jeden litr červeného vína je o 6 Kč dražší než 1 litr bílého vína. Kolik korun zaplatíme za 2 litry bílého a 2 litry červeného vína?

3. Pánové *A* a *B* bydlí ve vzdálenosti 224 km. Vyjedou-li v autech současně ze svých obydlí proti sobě, setkají se po 2 hodinách. Pán *A* ujede za hodinu o 4 km více než pán *B*. Kolik km urazí každý z nich za hodinu?

4. Dělník *A* by sám provedl výkop za 7 hodin, dělník *B* sám za 6 hodin. Protože výkop má být skončen za 2 hodiny, byl přibrán ještě dělník *C*. Za jak dlouho by výkop provedl sám dělník *C*?

Varianta B – příklad 1:

Student – Gymnázium Jírovcova České Budějovice, kvinta:

37 žáků

1 a
2 b
3 11 c
4 d
5 0 e

$a = 2 \cdot d$
$b = a + 6$

Vím že a je sudé číslo protože půlka z něj musí být celé číslo zkusil jsem rozumné hodnoty nejdřív 10 pak 8, 8 sedí.

8 jedniček
14 dvojek
11 trojek
4 čtyřky

Student při úvaze využil aritmetických vlastností čísel (sudost) a úlohu dořešil pomocí dosazování jednotlivých (jak student uvádí „rozumných“) hodnot.

Varianta B – příklad 4:

Student – Gymnázium Jírovcova České Budějovice, kvinta:

4) A ... 7 hod ... 100 %
B .. 6 hod ... 100 %

A ... za 2 hod ... 28,57 %
B .. za 2 hod ... 33,33 %

A + B 61,90 %

→ C za 2 hod 38,1 %
za 5,25 hod 100 %

Student využil k řešení velmi jednoduchým způsobem procenta. Jedná se o netradiční postup při řešení slovních úloh o společné práci.

Student – Gymnázium Prachatice, kvarta

4) A ... 7 hodin
B ... 6 hodin
C ... x hodin
~~A + B + C = 2~~
~~7 + 6 + x = 2~~ $\frac{1}{6}$
B udělá $\frac{1}{3}$ za 2 hodiny
A udělá $\frac{2}{7}$ za 2 hodiny
C -"- x -"-

$\frac{1}{3} + \frac{2}{7} + x = \cancel{2}\ 1$!!
$\frac{7}{21} + \frac{6}{21} + x = 2$
$\frac{13}{21} + x = 2$

$x = 2 - \frac{13}{21}$
$x = \frac{42}{21} - \frac{13}{21}$
$x = \frac{29}{21}$
$29 : 13 \doteq 2,2$ → dále!!

Student sestavil chybně rovnici. Úlohu nedokončil. Bylo by zajímavé, jak by tuto rovnici dořešil a jak by výslednou hodnotu interpretoval.

Varianta C:

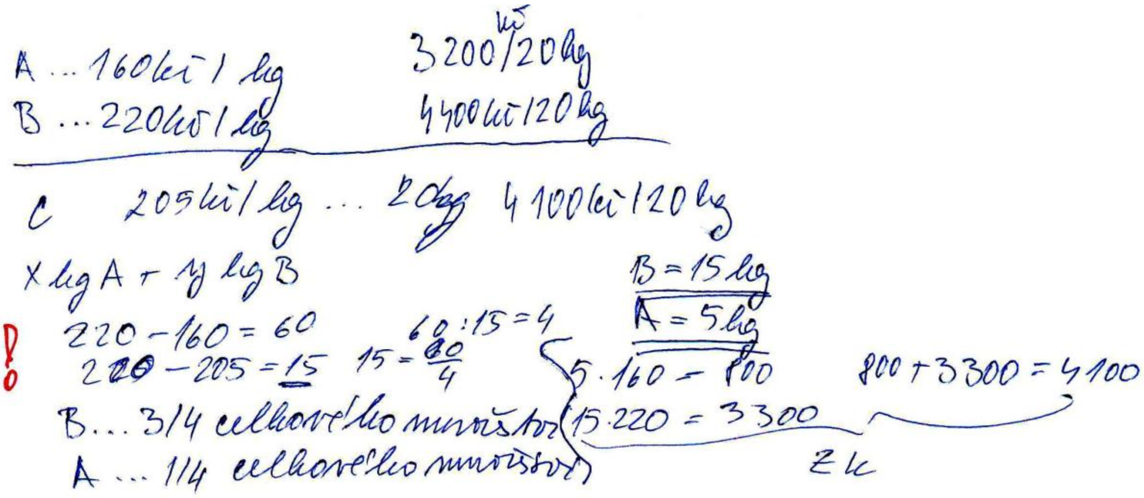
1. Tři sourozenci měli našetřeno celkem 1 274 Kč. Petr měl našetřeno o 15 % více než Jirka a Hanka o 10 % méně než Petr. Kolik korun měl našetřeno každý z nich?

2. Ze dvou druhů čaje o ceně 160 Kč a 220 Kč za 1 kilogram se má připravit 20 kg směsi v ceně 205 Kč za 1 kilogram. Kolik kilogramů každého druhu čaje bude třeba smíchat?
3. Auto ujelo vzdálenost mezi městy *A* a *B* za 4 hodiny. Kdyby se průměrná rychlost auta zvýšila o 17 km/h, ujelo by auto tuto vzdálenost o hodinu dříve. Určete rychlost auta a vzdálenost mezi městy *A* a *B*.

4. Vodní nádrž se naplní jen prvním přítokem za 10 hodin, jen druhým za 12 hodin a jen třetím za 15 hodin. Za jak dlouho se naplní, budou-li otevřeny všechny tři přítoky současně?

Varianta C – příklad 2:

Studentka – Gymnázium Jírovcova České Budějovice, kvinta:


A ... 160 Kč / 1 kg
B ... 220 Kč / 1 kg
3200 Kč/20 kg
4400 Kč/20 kg
C 205 Kč/1 kg ... 20 kg 4100 Kč/20 kg
x kg A + y kg B
B = 15 kg
A = 5 kg
220 − 160 = 60
60 : 15 = 4
220 − 205 = 15
15 = 60/4
5 · 160 = 800
15 · 220 = 3300
800 + 3300 = 4100
B ... 3/4 celkového množství
A ... 1/4 celkového množství
Zk

Elegantní úvaha studentky na základě rozdílu výsledné ceny směsi a cen jednotlivých složek. V úvaze je využito to, že je možné velikosti jednotlivých složek odvodit z rozdílu celkové ceny a cen jednotlivých složek (viz např. vztahy 4-1a, b v příloze 1).

Varianta C – příklad 3:

Student – SPŠ stavební České Budějovice, 1.ročník:

(3) A $\overline{\quad 4\,h = \quad}$ B

3h + 17 km/h

4h = 68 km/h

204

4h = 51 km/h = 51 . 4 = 204 km

3h = 68 . 3 = 204 km

rychlost auta je 68 km/h.

a od A do B je 204 km/h.

když 17 km/h zrychlím ušetřím 1 h tak musí být rychlost 3 × 17 km/h = 51 km/h

Student se jednoduchou úvahou dopracoval k určení původní rychlosti, určení vzdálenosti mezi místy *A* a *B* je potom už jednoduché.

Varianta C – příklad 4:

Studentka – Gymnázium Jírovcova České Budějovice, kvinta:

4)

X . . . 10h $\quad v_X = 1/10h \quad \dots \frac{1}{10} N/h$

Y . . . 12h $\quad v_Y = 1/12h \quad \dots \frac{1}{12} N/h$

Z . . . 15h $\quad v_Z = 1/15h \quad \dots \frac{1}{15} N/h$

$\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15}$

X > Y > Z

$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15}\right) = 0{,}1 + 0{,}0833 + 0{,}\overline{66} \doteq 0{,}25$

0,25 nádrže za 1h $\qquad 0{,}25 \cdot 4 = 1$

1 nádrž za 4h

Studentka použila k určení společné doby práce tří subjektů jednoduché aritmetické operace. Neznámý objem nádrže (nemusíme jej znát, nemá na výsledek vliv) si označila N.

Varianta D:

1. Zákazník si koupil tričko, kravatu a košili. Nejprve si vybral košili, k ní pak kravatu, která byla třikrát levnější než košile. Nakonec si koupil tričko, které bylo o 140 Kč dražší než kravata. Celkem zaplatil 940 Kč. Kolik zaplatil za kravatu, kolik za tričko a kolik za košili?

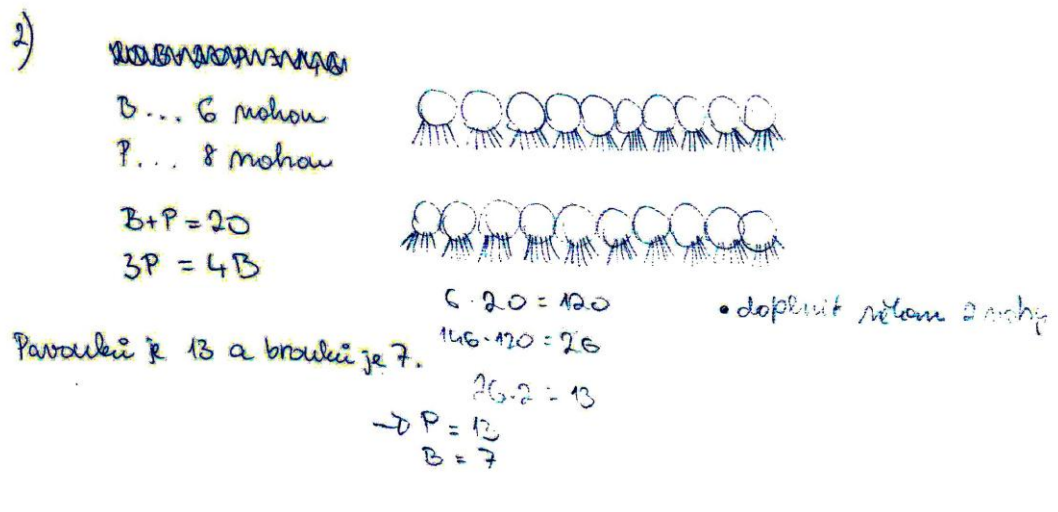
2. 20 brouků a pavouků má dohromady 146 nohou. Kolik je brouků a kolik je pavouků, má-li brouk 6 nohou a pavouk 8 nohou?

3. Po dvojkolejné trati mezi stanicemi *K* a *M* jely proti sobě dva vlaky. První vlak projel vzdálenost mezi stanicemi za dvě hodiny, druhý, který měl průměrnou rychlost o 15 km/h větší, ji projel za 1,5 hodiny. Vypočítejte průměrné rychlosti obou vlaků a vzdálenost stanic *K* a *M*.
   Varianta D_0:
   V pátek urazil nákladní vlak vzdálenost mezi stanicemi *K* a *M* za 2 hodiny. Další nákladní vlak z *K* měl v sobotu průměrnou rychlost o 15 km/h větší, takže do *M* přijel už za 1,5 hod. Vypočítejte průměrné rychlosti obou vlaků a vzdálenost stanic *K* a *M*.

4. Prvním kombajnem lze sklidit obilí z určitého lánu za 30 hodin, druhým, výkonnějším kombajnem za 20 hodin. Za kolik hodin bylo sklizeno obilí z tohoto lánu, jestliže se sklízelo současně oběma kombajny, ale druhý kombajn se porouchal a první ještě pracoval sám 5 hodin, aby dokončil sklizeň?

Varianta D – příklad 2:

Studentka – Gymnázium Jírovcova České Budějovice, kvinta:



Studentka použila k vyřešení problému náčrtku. Pomocí něho jednoduchými algebraickými úpravami dospěla k výsledku.

Varianta D – příklad 3:

Student – Gymnázium Jírovcova České Budějovice, 1. ročník

Pátek:
čas ... 2h
rychlost x

za 30 min ujede 22,5 km
$22{,}5 \cdot 4 = \underline{90\ km}$
$\underline{x = 45\ km\ h^{-1}}$

$(45 + 60) : 2 = \underline{52{,}5\ \frac{km}{h}}$

Sobota
čas 1,5 h
rychlost $x + 15\ km\ h^{-1}$

každých 30 min ujede o 7,5 km více
$7{,}5 \cdot 3 = 22{,}5\ km$
$x + 15\ km\ h^{-1} = 60\ km\ h^{-1}$

Trasa je dlouhá 90 km. Průměrná rychlost je $52{,}5\ km\ h^{-1}$.

Student zjistil jednoduchou úvahou jednu z rychlostí. Vypočítat druhou rychlost a vzdálenost stanic už nebyl problém. Student navíc doplnil průměrnou rychlost (nebyla požadována), ale chybně.

Varianta D – příklad 4:

Studentka – Gymnázium Vodňany, kvinta:

4. 1. kombajn .... 30 h.
2. kombajn .... 20 h.

$x = \frac{20 \cdot 30}{50} = \underline{12\ h}$

~~30 h ..... 100 %~~
~~5 h ..... x %~~
~~$\frac{5}{30} \cdot 100 =$~~

Studentka dobře vypočetla dobu společné práce. Není ovšem jasné kde vzorec (viz příloha 1, vztah 5-1a) vzala. S dalším postupem už si nevěděla rady (viz škrtnuté)

Student – Gymnázium Jírovcova České Budějovice, kvinta:

první . . . . 30 h
druhý . . . . 20 h
~~dohromady~~
první za 5 h . . . . $\frac{1}{6}$ sklizně
~~dohromady . . . . $\frac{\frac{20+30}{2}}{2} = 12,5$ h~~
$12,5 - \frac{5}{6}$
dohromady celé . . . . $\frac{1}{30}+\frac{1}{20}=\frac{25}{300}=1\cancel{6}^{2}$ h
$16 - \frac{26}{6} = 13,\overline{3}$
$13,\overline{3} + 5 = 18,\overline{3}$ h

Student provedl správnou úvahu. Řešení ztroskotalo na chybném dělení. Kdyby student neudělal numerickou chybu, bylo by řešení správné a postup originální.

Žák – ZŠ Národní Prachatice, 9. ročník:

4) 1. k . . . . 30 h . . . $\frac{1}{2}$ pole   15 h
2. k . . . . 20 h . . . $\frac{1}{2}$ pole   10 h
1. k . . . . 5 h sám $15 - 10 = 5$ h
~~15 + 10 = 25 h~~
Obilí bylo sklizeno za 15 h.
$30 - 20 = 10$
$\frac{1}{2}$ z $30 - \frac{1}{2}$ z $20 = 5$

Žák se pokusil o náhodné řešení (odhadl, že oba kombajny udělají polovinu práce) a risk mu vyšel. Úvaha, kterou žák použil, je velmi jednoduchá.

Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci

Katedra algebry a geometrie

R e j s t ř í k y

Disertační práce

Příloha č. 4

Vedoucí disertační práce: **Doc. RNDr. Stanislav Trávníček CSc.**

Vypracoval: **Mgr. František Šíma**

Olomouc 2013

O b s a h

Disertační práce:

Příloha 1 – Sbírka slovních úloh

Příloha 2 – Vyhodnocení testů a dotazníku

Disertační práce – Rejstřík:

Přehled vzorců:

Obrázky:

Tabulky:

Sbírka slovních úloh – Rejstřík:
(Příloha č. 1)

Přehled vzorců:

Obrázky:

Tabulky:

Vyhodnocení testů a dotazníku – Rejstřík
(Příloha č. 2)

Přehled vzorců:

Obrázky:

Tabulky: