

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**NUMERICKÁ SIMULACE RŮSTU TRHLINY V
KERAMICKÝCH KOMPOZITNÍCH MATERIÁLECH
VE 3D**

NUMERICAL SIMULATION OF CRACK PROPAGATION IN CERAMIC COMPOSITES IN 3D

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Josef Svoboda

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Zdeněk Majer, Ph.D.

BRNO 2017

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Bc. Josef Svoboda
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce:	Ing. Zdeněk Majer, Ph.D.
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Numerická simulace růstu trhliny v keramických kompozitních materiálech ve 3D

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce bude zaměřena zejména na keramické částicové kompozity. Keramické materiály mají vynikající odolnost proti vysokým teplotám, vysokou pevnost, ale zároveň jsou velice křehké. Kompozitní materiál tvořený dvěma nebo i více typy keramik může mít výrazně lepší lomové vlastnosti než jeho jednotlivé složky. Podobný závěr je možno formulovat také pro případ trhliny šířící se za podmínek subkritického růstu. V diplomové práci bude studováno chování trhliny šířící se za podmínek subkritického růstu v částicovém keramickém kompozitu typu Low-Temperature Co-fired Ceramics (LTCC), který se používá v mikroelektronice při výrobě desek plošných spojů.

Cíle diplomové práce:

Cílem diplomové práce je studium chování trhliny šířící se za podmínek subkritického růstu v keramické matici částicového kompozitního materiálu. Pro toto studium bude vytvořen 3D numerický model částicového kompozitu s trhlinou. Dílčí cíle práce jsou následující:

- seznámení se základy lineárně-elastické lomové mechaniky (LELM),
- popis a literární rešerše postupů stanovení směru šíření trhliny,
- vytvoření 3D numerického modelu částicového kompozitu s trhlinou v prostředí ANSYS, na základě provedených simulací bude popsán mechanismus šíření trhliny v zadaném částicovém kompozitu s křehkou maticí, přičemž budou brány do úvahy různé počáteční konfigurace trhliny vycházející z rozmístění defektů v reálném kompozitu.

Seznam literatury:

ANDERSON, T. L. Fracture mechanics: fundamentals and applications. 3rd ed. Boca Raton, FL: Taylor & Francis, 2005. ISBN 0849316561.

LAWRENCE, Kent L. ANSYS tutorial: release 11.0 : structural & thermal analysis using the ANSYS release 11.0 environment. Mission: SDC Publications, 2007. ISBN 978-1-58503-400-0.

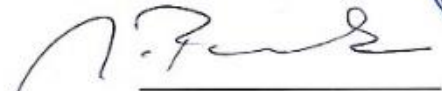
MAJER, Z., M. PLETZ, C. KRAUTGASSER, L. NÁHLÍK, P. HUTAŘ a R. BERMEJO. Numerical Analysis of Sub-critical Crack Growth in Particulate Ceramic Composites. Procedia Materials Science [online]. 2014, 3, 2071-2076 [cit. 2016-11-02]. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.335. ISSN 22118128. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2211812814003368>

BERMEJO, R., P. SUPANCIC, C. KRAUTGASSER, R. MORRELL a R. DANZER. Subcritical crack growth in Low Temperature Co-fired Ceramics under biaxial loading. Engineering Fracture Mechanics [online]. 2013, 100, 108-121 [cit. 2016-11-02]. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2012.12.004. ISSN 00137944. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0013794412004651>

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17.

V Brně, dne 2. 11. 2016





prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu



doc. Ing. Jaroslav Katoňický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Pevnost materiálů jako je sklo a keramika může být ovlivněná prostředím (koroze pod napětím). Při namáhání mohou poruchy (trhliny) růst subkriticky pod lomovou houževnatostí K_{Ic} . Cílem této práce bylo vyvinout tři-dimenzionální konečnoprvkový model pro analýzu chování podkritického růstu trhlin v částicových kompozitech na bázi keramiky. K predikci směru růstu trhliny v rámci lineární elastické lomové mechaniky bylo použito kritérium maximálního tangenciálního napětí. Modelovaným materiálem byla nízkoteplotně vypalovaná keramika (LTCC), obsahující částice oxidu hlinitého uložené ve skleněné matici. Hlavním cílem práce bylo vyvinout 3D model popisující růst trhliny. Závěry z této práce mohou přispět k lepšímu porozumění podkritického šíření trhlin v částicových kompozitech.

Abstract

The strength of materials such as glass and ceramics can be influenced by the environment (stress corrosion). Under applied stress defects (cracks) can grow subcritically below fracture toughness K_{Ic} . The aim of this work was to develop a three-dimensional finite-element model to analyze the subcritical crack growth behavior of ceramic-based particulate composites. The maximum tangential stress criterion (MTS) was used to predict the direction of the crack propagation in the framework of linear elastic fracture mechanics. The modeled material was a Low Temperature Co-fired Ceramics (LTCC), containing alumina particles embedded in a glass matrix. The main aim of this work was to develop a 3D model describing the crack growth. Conclusions from this work can contribute to a better understanding of subcritical crack propagation in particle composites.

Klíčová slova

lomová mechanika, nízko-teplotně vypalovaná keramika, trhlina, subkritický růst trhliny, metoda konečných prvků

Keywords

Fracture Mechanics, Low Temperature Co-fired Ceramics, Crack, Subcritical Crack Propagation, Finite Element Method

Bibliografická citace

SVOBODA, J. *Numerická simulace růstu trhliny v keramických kompozitních materiálech ve 3D*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 68 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Zdeněk Majer, Ph.D..

Prohlášení

Tímto prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením mého vedoucího Ing. Zdeňka Majera, Ph.D. a s použitím uvedené literatury.

V Brně dne 20. května 2017

Josef Svoboda

Poděkování

Rád bych tímto poděkoval Ing. Zdeňku Majerovi, Ph.D. za jeho odbornou pomoc, rady a vedení mé diplomové práce. Také bych chtěl poděkovat pracovníkům Ústavu fyziky materiálů AV ČR v Brně za cenné rady a pomoc, kterou mi poskytli.

Obsah

1	ÚVOD	11
1.1	Problémová situace	12
1.2	Formulace problému	12
1.3	Vymezení cílů práce	12
1.4	Systém podstatných veličin	12
1.5	Výběr metody řešení	13
2	TEORIE KOMPOZITNÍCH MATERIÁLŮ	14
2.1	Definice kompozitního materiálu	14
2.2	Částicový kompozitní materiál	14
2.3	LTCC kompozitní materiál	15
3	ZÁKLADNÍ POJMY LOMOVÉ MECHANIKY	17
3.1	Přehled základních pojmů lomové mechaniky	17
3.2	Napěťová koncepce	18
3.2.1	<i>Napěťová analýza v okolí trhliny</i>	18
3.2.2	<i>Koncepce součinitele intenzity napětí</i>	18
3.2.3	<i>Přímá metoda určení součinitele intenzity napětí</i>	22
3.2.4	<i>Velikost plastické zóny na čele trhliny</i>	24
3.2.5	<i>Lomová houževnatost K_{Ic}</i>	26
3.3	Energetické koncepce	26
3.3.1	<i>Griffithova koncepce</i>	26
3.3.2	<i>Hnací síla trhliny</i>	27
3.3.3	<i>J-integrál</i>	28
3.3.4	<i>Faktor hustoty deformační energie (Sihovo kritérium)</i>	29
3.4	Kritéria určující směr šíření trhliny	29
3.4.1	<i>S-kritérium</i>	30
3.4.2	<i>MTS kritérium</i>	30
3.5	Vlastní výpočet součinitelů intenzity napětí K_I a K_{II}	32
4	SUBKRITICKÝ RŮST TRHLINY PŘI JEDNOOSÉM TAHU	34
5	REALIZACE ŘEŠENÍ	36
5.1	Tvorba numerického modelu	36
5.1.1	<i>Model materiálu</i>	36
5.1.2	<i>Modely geometrie</i>	36
5.1.3	<i>Tvorba sítě</i>	39
5.1.4	<i>Okrajové podmínky a zatížení</i>	40
5.1.5	<i>Mechanismus šíření trhliny</i>	41

5.2	Porovnání metod určení součinitele intenzity napětí ve 2D a 3D.....	41
5.3	Porovnání průběhu trhliny ve 2D a 3D.....	43
5.4	Vliv povrchu	47
5.4.1	<i>Válcová částice bez reziduálních napětí</i>	<i>47</i>
5.4.2	<i>Válcová částice s reziduálními napětími.....</i>	<i>50</i>
5.4.3	<i>Kulová částice bez reziduálních napětí</i>	<i>51</i>
5.5	Kulová částice s nerovným čelem trhliny.....	54
5.5.1	<i>Varianta bez reziduálních napětí</i>	<i>54</i>
5.5.2	<i>Varianta s reziduálními napětími</i>	<i>57</i>
5.6	Subkritický růst trhliny.....	59
6	ZÁVĚR	62
	SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	63
	SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ	65
	SEZNAM OBRÁZKŮ.....	67
	SEZNAM PŘÍLOH	68

1 Úvod

Kompozitní materiály jsou dnes velmi rozšířené a prakticky je lze nalézt ve všech inženýrských aplikacích. Hlavní výhodou kompozitních materiálů je to, že jejich mechanické vlastnosti mohou být přizpůsobeny přímo pro konkrétní aplikaci nebo použití. Jednou z nejdůležitějších skupin jsou částicové kompozity, kde jsou tvrdé částice homogenně rozděleny v měkké matici. Částice vložené do matrice jsou často nazývány plnivem. Obecně je jejich cílem posílit nebo změnit materiálové vlastnosti matrice. Mechanické vlastnosti kompozitu jsou spojeny s velikostí částic, vlastnostmi matrice, objemovým podílem částic, atd. V literatuře lze nalézt spoustu článků, které se zabývají studiem vlivu částic na celkové chování kompozitu. Byly vytvořeny numerické modely, které popisují vliv tvaru částic, mezifáze nebo různých podmínek zatěžování, na šíření trhlin v částicových kompozitech.

V některých případech může být matrice použita pro přizpůsobení výsledných vlastností kompozitu. Jedním takovým příkladem je nízkoteplotně vypalovaná keramika (Low-Temperature Co-fired Ceramics, LTCC), která se používá jako podkladový materiál pro výrobu vícevrstvých elektrických obvodů a senzorů, které se používají v automobilním průmyslu, lékařských a komunikačních zařízeních, atd. LTCC technologie byla vyvinuta v sedmdesátých letech 20. století. LTCC keramika se skládá z keramických částic (oxidu hlinitého) vložených do skelné matrice. Hlavní charakteristikou LTCC je nízká teplota slinování keramických částic (cca. 850°C), což je možné díky použití skelné matrice s nízkým bodem tání.

Predikce životnosti LTCC je spojena s šířením trhlin v daném prostředí. Mechanické vlastnosti skla nebo keramiky mohou degradovat právě účinkem prostředí (koroze pod napětím). Důležitým faktorem pro životnost skel a keramiky je podkritický růst trhlin. Při daném zatížení mohou trhliny růst (podkriticky) v závislosti na faktoru intenzity napětí K_I , který má hodnotu nižší než lomová houževnatost K_{Ic} . Pro získání údajů, kterými lze popsat šíření trhliny, lze použít přímé i nepřímé metody. Pomocí přímých metod se rychlost šíření trhliny měří jako funkce faktoru intenzity napětí. Pomocí nepřímých metod se degradace pevnosti používá k odvození počátečních parametrů pro šíření trhliny.

V této diplomové práci byl vytvořen tří dimenzionální konečnoprvkový model k analýze podkritického růstu trhliny v LTCC kompozitu. Kompozit byl modelován jako dvousložkové kontinuum zahrnující částice (keramika) a matici (sklo).

1.1 Problémová situace

Tato diplomová práce je zaměřena na keramické částicové kompozity. Keramické materiály mají vynikající odolnost proti vysokým teplotám, vysokou pevnost, ale zároveň jsou velice křehké. Kompozitní materiál tvořený dvěma nebo i více typy keramik může mít výrazně lepší lomové vlastnosti než jeho jednotlivé složky. Predikce životnosti takového materiálu souvisí také s pochopením šíření trhliny v daném prostředí. Tato problematika je podrobně popsána pomocí 2D výpočtových modelů. Pomocí 2D modelů je popsán vliv objemového množství částic, vliv rozložení částic, vliv tvaru a velikosti částic atd. 3D výpočtové modely ovšem podstatně neexistují. Proto cílem této diplomové práce je vytvořit právě takový 3D výpočtový model.

1.2 Formulace problému

Účelem této práce je vytvořit 3D výpočtový model keramického kompozitního materiálu, který popisuje šíření trhliny za podmínek subkritického růstu. Tento model by měl být schopen realističtěji popsat chování trhliny než dosavadní 2D modely.

1.3 Vymezení cílů práce

Cíle práce byly zadány následovně:

- seznámení se studovanou problematikou a literární rešerše zaměřená na tuto oblast,
- vytvoření 3D výpočtového modelu porušování s využitím MKP pro daný keramický kompozit s křehkou maticí,
- studium šíření trhliny za podmínek subkritického růstu ($K_I < K_{Ic}$).

1.4 Systém podstatných veličin

S přihlédnutím k formulované problémové situaci a požadovaným cílům řešení je nyní možné na objektu řešení určit systém podstatných veličin.

- **Ω : Objekt**

Objektem řešení diplomové práce je nízko teplotně vypalovaný keramický částicový kompozit (Low-Temperature Co-fired Ceramics, LTCC).

- **S0: Okolí objektu**

Okolím objektu je vlhké korozivní prostředí, které zapříčiňuje subkritický růst trhliny. Model kompozitního materiálu je zatížen jednoosým tahem (tahová zkouška).

- **S1: Geometrie a topologie entity**

Model geometrie kompozitu je 3D vzorek pro tahovou zkoušku. Model se skládá ze dvou částí, matrice a plniva. Podíl plniva v matici udává jeho objemové množství.

- **S2: Vazby a interakce s okolím**

Vazby jsou představovány vazbami zkušební vzorku no okolí, které se realizuje na zkušebním zařízení. Berou se v úvahu pouze silová působení.

- **S3: Aktivace entity s okolím**

Faktorem, který způsobí vznik napjatosti a deformace v modelu kompozitu je tahová zkouška (jednoosý tah) a vliv teploty, s kterou souvisí vznik reziduálních napětí.

- **S4: Ovlivňování entity s okolím**

Chování modelu ovlivňuje vlhké korozivní prostředí a zatížení jednoosým tahem.

- **S5: Oborové vlastnosti struktury entity**

Materiálem objektu je nízkoteplotně vypalovaný keramický částicový kompozitní materiál, který se skládá ze skelné matrice SiO_2 (oxid křemičitý = křemenné sklo) a plniva Al_2O_3 (oxid hlinitý = alumina). Daný kompozitní materiál je popsán modulem pružnosti v tahu (matrice a plniva), Poissonovým číslem (matrice a plniva) a lomovou houževnatostí K_{Ic} matrice.

- **S6: Veličiny popisující procesy a stavy**

Napjatosti na čele trhliny, šíření a rozevírání trhliny v matrici kompozitu.

- **S7: Projevy**

Projevy ve vztahu k deformaci:

- Rozevírání a šíření trhliny, vznik nových lomových ploch v důsledku zatěžování.

Projevy ve vztahu k napětí:

- Vznik napjatosti na čele trhliny a v celém objemu kompozitu v důsledku zatěžování.

- **S8: Důsledky projevů**

Důsledkem může být subkritické šíření trhliny a dosažení mezního stavu křehkého porušení.

1.5 Výběr metody řešení

Na základě sestaveného systému podstatných veličin, je pro řešení problému subkritického šíření trhliny v keramickém kompozitním materiálu zatíženého jednoosým tahem zvoleno výpočtové modelování spojené se vstupními experimentálními daty. Napětově deformační stavy tělesa a z nich získané lomové parametry v místě trhliny jsou řešeny ve výpočetním programu ANSYS. Lomové parametry jsou v systému ANSYS počítány za použití součinitele intenzity napětí, vycházející z teorie lineární lomové mechaniky.

2 Teorie kompozitních materiálů

2.1 Definice kompozitního materiálu [3], [11]

V technické praxi se často hledá materiál, který by měl ideální mechanické vlastnosti pro různé požadavky. Je požadována např. vysoká pevnost při zachování nízké hmotnosti, lepší tepelná vodivost, tepelná stálost, lomová houževnatost, zvýšená tvrdost apod. Ne vždy však vyhovují tradiční materiály. Proto se hodí kombinovat vlastnosti dvou, či více materiálů a jejich vzájemným složením dosáhnout takových vlastností, které budou splňovat všechny potřebné parametry.

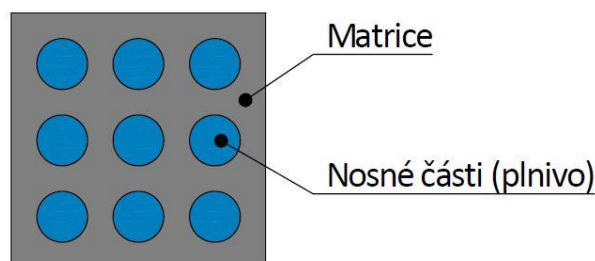
Kompozitní materiály, jsou tedy složené materiály, které se skládají ze dvou nebo více složek. Každá složka plní jinou specifickou funkci a má odlišné materiálové vlastnosti. Většinou značně odlišné materiálové vlastnosti. Nyní se omezíme na dvousložkový kompozit, který je složen ze dvou základních částí:

a) Matrice

- má spojující funkci a vytváří vnější tvar tělesa. Matrice je kontinuální složkou kompozitního materiálu (z jednoho místa matrice do druhého se vždy dostaneme v rámci jedné složky).

b) Nosné části (výztuž, plnivo)

- značně ovlivňují výsledné vlastnosti kompozitu. Na výsledné vlastnosti kompozitu má vliv tvar a velikost výztužných částí. Nosná část představuje diskontinuální složku kompozitu (z jednoho místa výztuže na druhé se nedostaneme v rámci jedné složky).

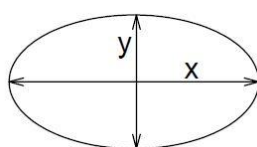


Obrázek 2.1: Schéma dvousložkového kompozitu.

Nejjednodušším příkladem kompozitního materiálu může být železobeton, kdy se do betonu (matrice) vkládají ocelové pruty (plnivo) za účelem zvýšení pružnosti a houževnatosti.


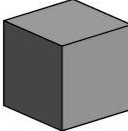
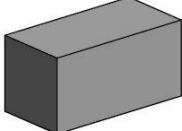
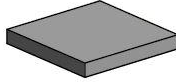

2.2 Částicový kompozitní materiál [3], [12], [16]

U částicového kompozitu jsou výztužnou složkou částice různých tvarů (koule, krychle, destičky apod.). Ke snadnějšímu popisu částic se používá veličina „aspect ratio“ (tzv. velikostní faktor). Velikostní faktor je poměr x/y (viz Obrázek 2.2).



Obrázek 2.2: Velikostní faktor.

Tabulka 2.1 Hodnoty velikostního faktoru pro různé tvary částic.

	Koule	Krychle	Kvádr	Destička	Vlákna
Tvar					
Velikostní faktor	1	~1	~1,4 - 4	~5-100	>100

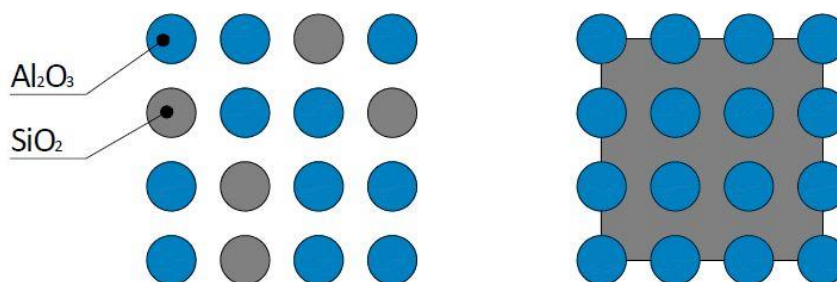
Částice jsou dispergovány v matrici a ovlivňují důležité vlastnosti výsledného kompozitu, jakými jsou například pevnost, tuhost, tažnost a nárazová práce. Částice s malým velikostním faktorem (např. koule, krychle, kvádr) mohou zlepšit tahové vlastnosti, pozitivně ovlivňují modul pružnosti a v některých případech i houževnatost. Naopak částice s velkým velikostním faktorem (např. destičky) zvyšují především pevnost v tahu a tuhost.

2.3 LTCC kompozitní materiál [13], [14], [15]

LTCC (Low-Temperature Co-fired Ceramics) je nízkoteplotně vypalovaná keramika. Nízkoteplotní vypalování probíhá při teplotách cca 850°C. Tento proces vypalování umožňuje sloučit některé výrobní procesy do jednoho kroku a tím podstatně zredukovat dobu potřebnou na celý technologický proces. Může se např. jednat o přímou integraci pasivních obvodových prvků (R, L, C) do struktury.

Nízká teplota je zapříčiněna složením pásku (označení nevytvrzeného substrátu). Pásek je tvořen 45 % SiO_2 (oxid křemičitý = křemenné sklo), 40 % Al_2O_3 (oxid hlinitý = alumina), 15 % organického pojiva a dalších prvků, které jsou pouze ve stopovém množství. Z důvodu největšího zastoupení křemenného skla je tento typ substrátu také nazýván keramikou na bázi skla.

Během výpalu nízkoteplotní keramiky dochází ke spojení částic oxidu křemičitého s částicemi oxidu hlinitého. Současně s tímto procesem dochází k odpařování pojivové složky. Struktura složení nízkoteplotně vypalované keramiky v surovém a ve vytvrzeném stavu (viz Obrázek 2.3).



Obrázek 2.3: Struktura LTCC před výpalem (vlevo) a po výpalu (vpravo).

Množství jednotlivých částic prvků, které jsou obsaženy v pásku, tvoří po výpalu jeho výsledné mechanické a fyzikální vlastnosti. Jelikož při výpalu dochází k odpaření pojivové složky (organické pojivo), nemá tato složka žádný vliv na výsledné vlastnosti. Úkolem pojiva je zajistit spojení oxidu křemičitého a oxidu hlinitého v surovém stavu, a také zajišťuje flexibilitu a měkkost, kterou lze využít při vytváření struktur různých tvarů.

Množství oxidu křemičitého určuje možnosti použití. LTCC s vyšším obsahem skelné báze se používají na nižších kmitočtech a jsou vhodné pro vytváření tenkých vrstev. Pro vyšší kmitočty se naopak používá menší obsah skelné báze proto, že oxid křemičitý se získává z přírodních surovin obsahujících velké množství nečistot, které se potom negativně projevují na vyšších kmitočtech.

3 Základní pojmy lomové mechaniky

3.1 Přehled základních pojmů lomové mechaniky [1], [2]

Lomová mechanika předpokládá existenci počáteční trhliny v tělese. Nezabývá se vznikem trhliny. Trhlina může v tělese vzniknout při výrobě, povrchové úpravě, převozu nebo se může iniciovat při provozu. Experimentálně se zjišťuje odpor materiálu proti růstu trhliny (křehký lom, nestabilní lom houževnatého charakteru nebo stabilní růst trhliny při cyklickém namáhání). Zkoušky se provádí na různých vzorcích s trhlínami za různých podmínek.

Lomová mechanika dává odpovědi na otázky:

- zbytkové pevnosti,
- přípustné velikosti trhliny pro dané provozní zatížení,
- počtu cyklů do kritické velikosti trhliny,
- délky period pravidelných kontrol zjišťujících chování trhliny,
- volby vhodného materiálu.

Lomová mechanika se historicky dělí do dvou hlavních oblastí. A to na lineárně-elastickou lomovou mechaniku (LELM) a elasto-plastickou lomovou mechaniku (EPLM).

a) Lineárně-elastická lomová mechanika

- uvažuje platnost Hookova zákona v celém objemu tělesa. Za určitých předpokladů je schopna popsat problém za existující malé plastické oblasti u kořene trhliny.

b) Elasto-plastická lomová mechanika

- uvažuje u kořene trhliny velkou plastickou oblast, případně až úplné zplastizování nosného průřezu s trhlínou. Používá se tam, kde nejde použít koncept LELM.

Protože se diplomová práce zabývá lomovou mechanikou keramického kompozitního materiálu, pro který je typické křehké porušení (malá plastická zóna na čele trhliny), budeme se dále zabývat pouze LELM. Lomové kritérium na základě LELM lze rozdělit do dvou hlavních kategorií.

a) Energetická kritéria

- založená na energetické bilanci tělesa s trhlínou. Konkrétní kritéria jsou například klasické Griffithovy práce, hnací síla trhliny G , J-integrál nebo hustota deformační energie (Sihovo kritérium).

b) Koncepce na základě napětí a deformací u kořene trhliny

- Koncepce součinitele intenzity napětí K (nejpoužívanější koncepce) nebo rozevření v kořeni trhliny (COD, CTOD).

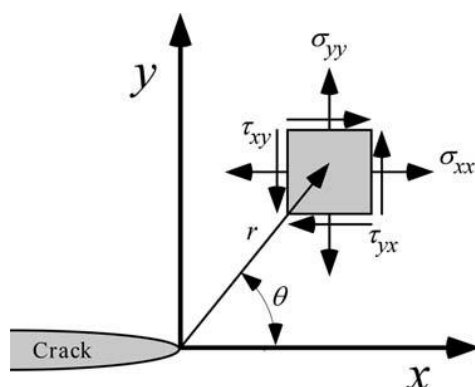
3.2 Napěťová koncepce

3.2.1 Napěťová analýza v okolí trhliny [1]

Pro určitou konfiguraci trhliny zatíženou vnějšími silami, je možné odvodit uzavřenou formu vyjádření napětí v tělese. Za předpokladu lineárního izotropního elastického materiálu. Westergaard, Irwin, Sneddon a Williams byli mezi prvními, kteří publikovali takové řešení. V polárním souřadnicovém systému (viz Obrázek 3.1), který má počátek v kořeni trhliny, může být dokázáno, že pole napětí pro těleso s trhlinou je dáno vztahem (Williamsův rozvoj):

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}}\right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta), \quad (1)$$

kde σ_{ij} je tenzor napětí, r a θ jsou definovány viz Obrázek 3.1, k je konstanta a f_{ij} je bezrozměrná funkce závislá na úhlu θ .



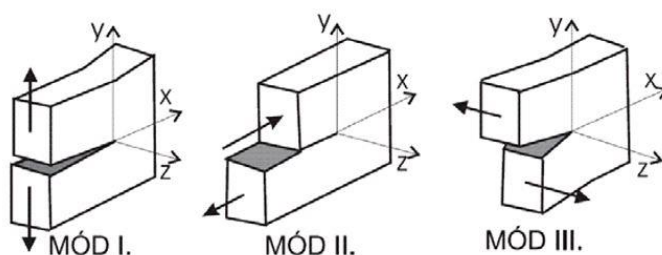
Obrázek 3.1: Definice polárního souřadného systému na čele trhliny [1].

Pokud je chování trhliny ovlivněno pouze malou plastickou oblastí v okolí jejího kořene, uvažujeme pouze první dva členy Williamsova rozvoje. První singularní se singularitou typu $1/\sqrt{r}$. Jeho konstanta je potom úměrná faktoru intenzity napětí K_I . Druhý člen charakterizuje constrain (stísnění) a odpovídá T-napětí.

3.2.2 Koncepce součinitele intenzity napětí [1], [2], [4]

Jak již bylo řečeno, jedná se o nejčastěji využívanou a zároveň nejvíce propracovanou koncepci. Může být použita nejen při statické, ale i při dynamické iniciaci trhliny, jednosměrném i cyklickém zatěžování.

K popisu tělesa s trhlinou se používají tři základní módy zatěžování, které jsou závislé na orientaci zatížení (viz Obrázek 3.2).



Obrázek 3.2: Tři módy zatěžování [5].

- Mód I (normálový) – je charakterizován vnější silou působící kolmo na rovinu lomu, tj. ve směru osy y . Růst trhliny je řízen tahovou složkou tenzoru napětí σ_y .
- Mód II (smykový) – je charakterizován vnějšími silami působícími ve směru růstu trhliny, tj. ve směru osy x . Růst trhliny je řízen smykovou složkou tenzoru napětí τ_{xy} .
- Mód III (antirovinný) – je charakterizován orientací vnějších sil ve směru rovnoběžném s čelem trhliny, tj. ve směru osy z . Růst trhliny je řízen smykovou složkou tenzoru napětí τ_{yz} .

V technické praxi se obvykle nevyskytují jednotlivé módy samostatně, ale vyskytují se jejich kombinace. Kombinací těchto módů lze postihnout všechny možné způsoby namáhání. Pokud při daném zatížení existuje mód I, trhlina se vždy šíří v tomto módu. Módy II a III pouze ovlivňují směr šíření.

K uvedeným módům se vztahuje důležitá charakteristika, a to součinitel intenzity napětí K , který popisuje napjatost na čele trhliny. Každý mód má svůj odpovídající součinitel intenzity napětí K_I, K_{II}, K_{III} . Jednotlivé součinitele intenzity napětí jsou definovány vztahy:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r)^{\frac{1}{2}} \sigma_y(r, 0), \quad (2)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r)^{\frac{1}{2}} \tau_{xy}(r, 0), \quad (3)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r)^{\frac{1}{2}} \tau_{yz}(r, 0). \quad (4)$$

Z definice součinitele intenzity napětí plyne fyzikální rozměr $\text{N}\cdot\text{m}^{3/2}$. Nejčastěji uváděným je však $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$.

Známe-li velikosti součinitelů intenzity napětí, lze rozdělení napětí před vrcholem pro jednotlivé módy popsat následujícími vztahy (uváděny jsou pouze nenulové složky napětí).

Mód I:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right], \quad (5)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right], \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right), \quad (7)$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} 0 & \text{pro rovinnou napjatost} \\ \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & \text{pro rovinnou deformaci} \end{cases} \quad (8)$$

kde ν je Poissonův součinitel.

Mód II:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right], \quad (9)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right), \quad (10)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right], \quad (11)$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} 0 & \text{pro rovinnou napjatost} \\ \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & \text{pro rovinnou deformaci} \end{cases} \quad (12)$$

Mód III:

$$\tau_{xy} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (13)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (14)$$

Pro nekonečně velkou taženou stěnu s centrální trhlinou o velikosti $2a$ (lhotejno, zda s jednoosou nebo dvouosou napjatostí v nekonečnu), lze vyjádřit faktor intenzity napětí K_I vztahem:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}. \quad (15)$$

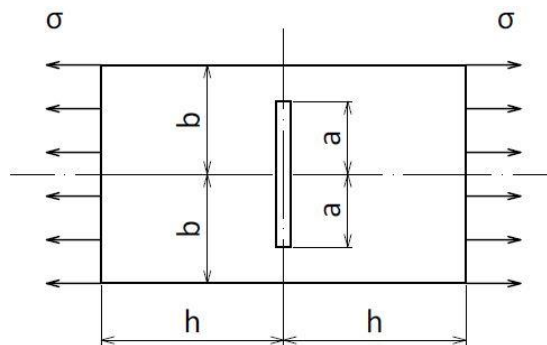
V případě konečného tělesa se používají tzv. korekční funkce $Y\left(\frac{a}{b}\right)$, kterými je nutné vztah upravit:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \cdot Y\left(\frac{a}{b}\right), \quad (16)$$

kde a je charakteristický rozměr trhliny a b je charakteristický rozměr tělesa. Tyto korekční funkce, pro různá tělesa, lze najít v mnoha publikacích, např. [2], [22], [23], [24].

PŘÍKLAD: Určení korekční funkce $Y\left(\frac{a}{b}\right)$. [22]

a) Průchozí centrální trhlina (tahové zatížení)



Obrázek 3.3: Centrální trhlina.

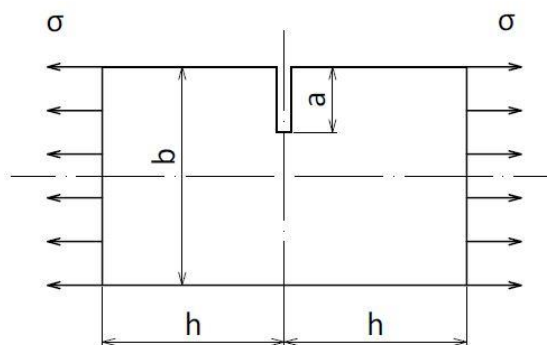
$$Y\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1 - 0,5\left(\frac{a}{b}\right) + 0,37\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 0,044\left(\frac{a}{b}\right)^3}{\sqrt{1 - \frac{a}{b}}} \quad (17)$$

s přesností 0,3 % pro jakékoliv a/b . Za podmínek $a < b \cap h/b \geq 3$.

Pro konkrétní rozměry $a = 1 \text{ mm}$, $b = 4 \text{ mm}$ a $h = 14 \text{ mm}$ (splňující požadované podmínky) má korekční funkce pro centrální trhlina hodnotu:

$$Y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1 - 0,5\left(\frac{1}{4}\right) + 0,37\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 0,044\left(\frac{1}{4}\right)^3}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} \cong 1,0363.$$

b) Průchozí povrchová trhlina (tahové zatížení)



Obrázek 3.4: Trhlina na kraji.

$$Y\left(\frac{a}{b}\right) = 1,12 - 0,231\left(\frac{a}{b}\right) + 10,55\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21,72\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30,39\left(\frac{a}{b}\right)^4 \quad (18)$$

s přesností 0,5 % pro $a/b \leq 0,6$. Za podmínek $a < b \cap h/b \geq 1$.

Pro konkrétní rozměry $a = 1$ mm, $b = 4$ mm a $h = 14$ mm (splňující požadované podmínky) má korekční funkce pro povrchovou trhlinu hodnotu:

$$Y\left(\frac{1}{4}\right) = 1,12 - 0,231\left(\frac{1}{4}\right) + 10,55\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 21,72\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 30,39\left(\frac{1}{4}\right)^4 \cong \mathbf{1,5010}.$$

Uvedené vzorce jsou platné pouze pro tahové zatížení. Pokud by namáhání bylo jiné než tahové (např. ohybové) vzorce se liší.

Hodnota korekční funkce $Y\left(\frac{a}{b}\right)$ je vždy větší než jedna, to znamená, že hodnota K_I bude pro konečně velké těleso vždy větší, než pro nekonečně velké těleso.

Pro daný tvar, velikost tělesa, typ a velikost trhliny, lze součinitele intenzity napětí určit celou řadou metod. Ne všechny z nich jsou však použitelné nebo vhodné pro celé spektrum možných typů zadání. [2]

a) Analytické metody

- jsou historicky nejstarší. Jejich použitelnost je omezena pouze na jednodušší případy (rovinné úlohy).

b) Numerické metody

- jsou v současné době nejpoužívanějším způsobem určování součinitelů intenzity napětí. Především metoda konečných prvků (MKP). Při použití MKP lze rozlišit dva základní přístupy. První nevyžaduje zásahy do programového systému MKP, kdy velikost součinitelů intenzity napětí je určena na základě výpočtů formou postprocesoru (lze použít v každém případě). Druhý přístup využívá speciální trhlinové prvky, které popisují singulární chování v okolí kořene trhliny.

c) Experimentální metody

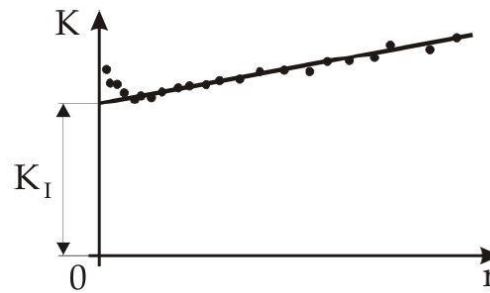
- jsou vedle numerických metod dalším vhodným nástrojem pro určování součinitelů intenzity napětí pro tvarově složitější konstrukce s trhlínami.

d) Inženýrské metody

- jsou metody, které určují součinitele intenzity napětí z aproximovaných analytických vztahů nebo tabulek sestavených na základě předchozích metod.

3.2.3 Přímá metoda určení součinitele intenzity napětí [1], [2], [26]

Přímá metoda je nejjednodušší používanou numerickou metodou. Hodnotu součinitele intenzity napětí dostaneme extrapolací porovnáním vypočtených hodnot napětí nebo posunutí před, respektive za čelem trhliny, s hodnotami z Williamsova rozvoje (Obrázek 3.5).



Obrázek 3.5: Určení součinitele intenzity napětí přímou metodou (extrapolací).

Například pro mód I vyjádříme rovnici (6) pro $\theta = 0$ a dostaneme:

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}, \quad (19)$$

ze které si pak snadno odvodíme vztah pro výpočet součinitele intenzity napětí K_I pro danou vzdálenost r od čela trhliny:

$$K_I = \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r}. \quad (20)$$

Vzhledem k numerickým chybám není takto určená hodnota K_I konstantní. Po zanesení takto vypočtených hodnot $\{K_I, r\}$ do grafu dostaneme odpovídající hodnotu součinitele intenzity napětí K_I extrapolací pro $r \rightarrow 0$.

Stejným postupem lze určit i součinitel intenzity napětí K_{II} . Jen napětí σ_{yy} je nahrazeno smykovým napětím τ_{xy} . Výsledný vzorec pro výpočet K_{II} je potom:

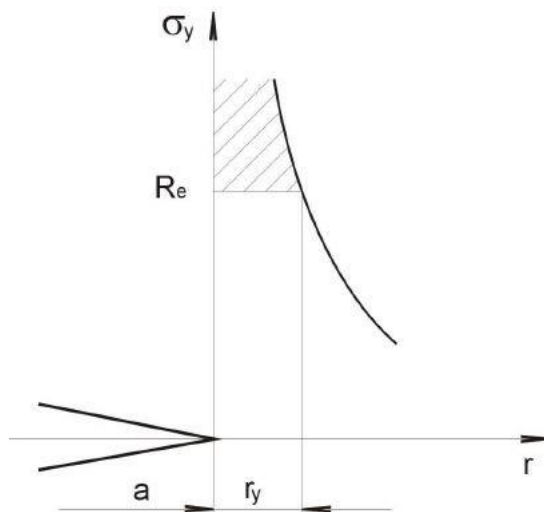
$$K_{II} = \tau_{xy} \sqrt{2\pi r} \quad (21)$$

Tento postup, jak již bylo uvedeno, je velice jednoduchý na provedení a navíc univerzální. Nevýhodou jsou především vysoké nároky na síť konečných prvků a tím i na výpočetní čas. Problematická je i volba velikosti oblasti pro extrapolaci, která vyžaduje určitou zkušenost výpočtáře.

3.2.4 Velikost plastické zóny na čele trhliny [2]

Koncepce součinitele intenzity napětí je použitelná pouze za předpokladu malé plastické zóny na čele trhliny. Velikost plastické zóny lze na základě lineárně elastické analýzy (pro monotónní zatěžování) vyjádřit dvěma způsoby.

a) Bez redistribuce napětí



Obrázek 3.6: Plastická zóna bez redistribuce napětí. [2]

Pro rovinnou napjatost:

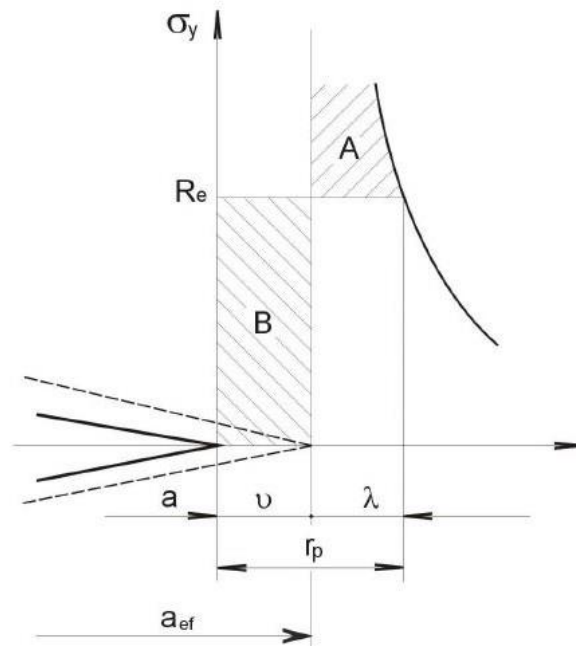
$$(r_y)_{RN} = \frac{a}{2} \left(\frac{\sigma}{R_e} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{R_e} \right)^2. \quad (22)$$

Pro rovinnou deformaci:

$$(r_y)_{RD} = \frac{a}{6} \left(\frac{\sigma}{R_e} \right)^2 = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_I}{R_e} \right)^2. \quad (23)$$

Platí tedy, že velikost plastické zóny při rovinné deformaci je přibližně 1/3 plastické oblasti při rovinné napjatosti.

b) S redistribucí napětí v důsledku plastifikace



Obrázek 3.7: Plastická zóna s redistribucí napětí. [2]

Z předchozího řešení plyne velikost plastické oblasti $\lambda = r_y$. Skutečná velikost plastické zóny musí však být větší než r_y . V důsledku plastifikace na čele trhliny dojde k otupení čela trhliny a k přerozdělení napětí. Průběh napětí je posunutý o hodnotu v , která plyne z rovnosti ploch A a B (za podmínky ekvivalence vnitřních sil). Vliv plastifikace je tom zahrnut do zvětšení velikosti trhliny na její efektivní hodnotu $a_{ef} = a + v$. [2]

Pro $v \ll a$, $\lambda = r_y$ potom dostaneme $v = r_y$. Potom platí:

Pro rovinnou napjatost:

$$(r_p)_{RN} = a \left(\frac{\sigma}{R_e} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{R_e} \right)^2. \quad (24)$$

Pro rovinnou deformaci:

$$(r_p)_{RD} = \frac{a}{3} \left(\frac{\sigma}{R_e} \right)^2 = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{K_I}{R_e} \right)^2. \quad (25)$$

Aby mohla být koncepce součinitele intenzity napětí použita, musí platit následující vztah pro velikost plastické zóny:

$$r_y(r_p) \leq \frac{a}{10}. \quad (26)$$

3.2.5 Lomová houževnatost K_{Ic} [2]

Lomová houževnatost K_{Ic} je materiálová charakteristika, která se určuje experimentálně. Obecně vyjadřuje odpor materiálu proti iniciaci a růstu trhliny. Hodnota lomové houževnatosti K_{Ic} charakterizuje odolnost materiálu proti statické iniciaci křehkého porušení při rovinné deformaci (při rovinné deformaci je hodnota K_{Ic} menší než při rovinné napjatosti) v oblasti kořene trhliny, a to za předpokladu platnosti LELM. Závisí na velikosti a tvaru tělesa, materiálu, rychlosti zatěžování, teplotě a prostředí. U krátkých trhlín dochází k rychlému nárůstu velikosti plastické zóny u čela trhliny. To má za následek narušení předpokladů, na nichž je tato koncepce založena. Proto musí být splněna podmínka délky trhliny:

$$a \geq 2,5 \left(\frac{K_{Ic}}{R_e} \right)^2. \quad (27)$$

Pokud tato podmínka není splněna, doporučuje se pro popis takovéto trhliny použít dvouparametrovou lomovou mechaniku (T-napětí, Q-parametr).

Lomová houževnatost K_{Ic} rozhoduje o tom, zda se trhlina bude, či nebude šířit.

- $K_I < K_{Ic}$ trhlina se nešíří (resp. šíří se subkriticky),
- $K_I = K_{Ic}$ trhlina se šíří,
- $K_I > K_{Ic}$ nepřijatelný stav.

3.3 Energetické koncepce [1], [2]

Energetický přístup je založen na předpokladu, že růst trhliny nastává, pokud energie potřebná na rozšíření trhliny překročí svojí kritickou mez. Pokud dochází k nárůstu trhliny, spotřebovává se energie nejen k vytvoření nových ploch, ale také k plastifikaci v okolí čela trhliny a k lokálnímu ohřevu materiálu [2], potom:

$$\frac{dE_c}{dS} = \frac{d\Pi}{dS} + \frac{d\Gamma}{dS} = 0, \quad (28)$$

kde dS je přírůstek plochy, Π je potenciální energie, Γ je disipační energie a E_c je celková energie.

3.3.1 Griffithova koncepce [2]

Griffith jako jeden z prvních v roce 1920 formuloval posouzení stability trhliny v ideálně křehkém materiálu (skle) pro průchozí trhlinu v nekonečně velkém tělese. Pro ideálně křehký materiál uvažoval, že disipační energie Γ je spotřebována pouze na tvorbu nových ploch.

Stanovil podmínku nestability trhliny ve tvaru:

$$-\frac{d\Pi}{dS} = \frac{dW_T}{dS} = \frac{d\Gamma}{dS}, \quad (29)$$

kde W_T je práce spojená se vznikem nových ploch.

3.3.2 Hnací síla trhliny [2], [4]

Koncepce hnací síly trhliny přímo navazuje na Griffithovu koncepci. Podmínka nestability je zde ve tvaru:

$$-\frac{d\Pi}{dS} = \frac{d\Gamma}{dS}. \quad (30)$$

Pravá strana rovnice, tj.:

$$R = \frac{d\Gamma}{dS}, \quad (31)$$

charakterizuje lomovou houževnatost materiálu a představuje odpor tělesa proti růstu trhliny, tj. energii, která je potřebná pro vytvoření lomové plochy jednotkové velikosti.

Levá strana rovnice, tj.:

$$G = -\frac{d\Pi}{dS}, \quad (32)$$

se nazývá hnací silou trhliny nebo rychlost uvolňování deformační energie. Slovo „rychlost“ v tomto případě neznámá derivaci dráhy podle času. Hnací síla trhliny G je v tomto případě chápána jako rychlost změny potenciální energie soustavy v závislosti na přírůstku lomové plochy.

Fyzikální rozměr G a R je $\text{N/m} = \text{J/m}^2$.

Pro nekonečně velké těleso s centrální trhlinou potom platí vztah:

$$G = -\frac{d\Pi}{dS} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E}, \quad (33)$$

kde σ je nominální napětí v tělese, a je rozměr trhliny a E je modul pružnosti v tahu.

Ke ztrátě stability dojde v případě, kdy hnací síla trhliny G dosáhne své mezní hodnoty G_c , kterou nazýváme lomovou houževnatostí materiálu. Hodnota G_c je získána na základě experimentu.

Obecně potom lze psát podmínku nestability ve tvaru:

$$G = R = G_c. \quad (34)$$

Jakým způsobem trhlina bude růst (stabilně nebo nestabilně) rozhoduje to, jak se bude měnit odpor proti růstu trhliny R a hnací síla trhliny G v závislosti na změně délky trhliny. Závislost R na délce trhliny se potom nazývá křivka odporu (R-křivka).

Zavádí se prahová hodnota s označením G_i . Ke stabilnímu šíření dojde, jestliže hnací síla trhliny G dosáhne prahové hodnoty G_i . Stabilní šíření trhliny končí (nastává nestabilní šíření) v okamžiku, kdy hodnota G dosáhne kritické hodnoty G_c .

- $G < G_i$ trhlina se nešíří,
- $G_i \leq G < G_c$ trhlina se šíří stabilně,
- $G \geq G_c$ trhlina se šíří nestabilně.

3.3.3 J-integrál [27], [1]

J-integrál je křivkový integrál, který je nezávislý na integrační cestě. Je zobecněním koncepce hnací síly trhliny a umožňuje použití i v případech plastické deformace většího rozsahu.

Energetická interpretace J-integrálu:

$$J = -\frac{d\Pi}{dS}. \quad (35)$$

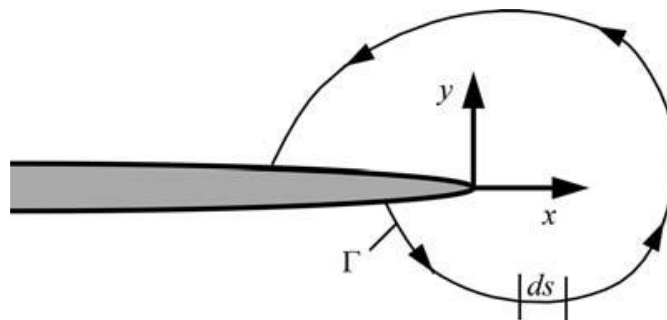
Platí-li podmínky lineárně elastické lomové mechaniky, lze s určitými zjednodušeními použít vztahy:

$$J = G = G_I + G_{II} + G_{III}, \quad (36)$$

$$J = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)(K_I^2 + K_{II}^2) + K_{III}^2] \quad \text{pro rovinnou deformaci}, \quad (37)$$

$$J = \frac{1}{E} [K_I^2 + K_{II}^2 + (1+\nu)K_{III}^2] \quad \text{pro rovinnou napjatost}. \quad (38)$$

J-integrál definovaný jako křivkový integrál:



Obrázek 3.8: Integrační cesta J-integrálu.

$$J = \int_{\Gamma} \left(w dy - T_i \frac{du_i}{dx} ds \right), \quad (39)$$

kde T_i jsou složky vektoru síly $T_i = \sigma_{ij}n_j$, u_i jsou složky vektoru posuvů, ds je přírůstek délky na křivce Γ a w je hustota deformační energie, která je definovaná jako:

$$w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (40)$$

kde σ_{ij} je tenzor napětí a ε_{ij} je tenzor přetvoření.

3.3.4 Faktor hustoty deformační energie (Sihovo kritérium) [2], [4], [6]

Sih vypracoval toto kritérium na základě lomu u obecně namáhaných těles s trhlinou. Kritérium je založeno na elastické deformační energii a umožňuje stanovit nejen podmínky vzniku křehkého lomu, ale také směr šíření trhliny.

Faktor hustoty deformační energie S je dán vztahem:

$$S = r \frac{dU}{dV}, \quad (41)$$

kde r je polární souřadnice a dU/dV je hustota deformační energie. Rozměr faktoru hustoty deformační energie je potom $N/m = J/m^2$.

Faktor hustoty deformační energie lze pak vyjádřit vztahem:

$$S = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2, \quad (42)$$

kde jsou jednotlivé koeficienty definovány vztahy:

$$a_{11} = \frac{1}{16G^*} [(3 - 4\nu - \cos \theta)(1 + \cos \theta)], \quad (43)$$

$$a_{12} = \frac{1}{16G^*} 2 \sin \theta [\cos \theta - (1 - 2\nu)], \quad (44)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16G^*} [4(1 - \nu)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)], \quad (45)$$

$$a_{33} = \frac{1}{4G^*}, \quad (46)$$

kde G^* je modul pružnosti ve smyku, ν je Poissonův poměr a θ je úhel v polárním souřadném systému s počátkem v kořeni trhliny.

3.4 Kritéria určující směr šíření trhliny

Vlivem kombinovaného namáhání (módy I a II) se trhlina může šířit různými směry. K určení směru růstu trhliny, byla vypracována celá řada kritérií.

a) Kritéria na energetické bázi

- kritérium minimální hodnoty faktoru hustoty deformační energie [2], [9], [10],
- kritérium maximální hustoty objemové deformace [21].

b) Napěťově-deformační kritéria

- kritérium maximálního tangenciálního napětí [7],

¹ Označení G^* je použito pro smykový modul pružnosti proto, že označení G je použito pro hnací sílu trhliny.

- kritérium využívající součinitel tangenciálního napětí a tangenciální deformace [20],
- kritérium maximální tangenciální deformace [7], [8], [15], [17].

Více budou rozebrána pouze dvě nejpoužívanější kritéria, a to kritérium minimální hodnoty faktoru hustoty deformační energie (S-kritérium) a kritérium maximálního tangenciálního napětí (MTS kritérium). Obě tyto kritéria jsou charakterizována tím, že pro učení směru růstu trhliny využívají součinitele intenzity napětí K .

3.4.1 S-kritérium [2], [9], [10]

Koncepce součinitele intenzity napětí předpokládá, že se trhlina šíří ve směru původní trhliny. Taková situace však nastane jen ve výjimečných případech (v laboratorních podmínkách), nikoli však u reálných konstrukcí.

S-kritérium vychází z faktoru hustoty deformační energie (viz kapitola 3.3.4). Sih odvodil toto kritérium na dvou hypotetických tvrzeních.

- a) Trhlina se bude šířit ve směru θ_0 , tj. ve směru minimální hustoty deformační energie S , který je určen dvěma podmínkami:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right) = 0 \cap \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2}\right) > 0, \text{ pro } \theta = \theta_0. \quad (47)$$

- b) K nestabilnímu šíření trhliny dojde, jestliže faktor hustoty deformační energie S dosáhne ve směru θ_0 kritické hodnoty S_c :

$$S_{c,min} = konst. = S(K_I, K_{II}, K_{III}, \dots), \text{ pro } \theta = \theta_0. \quad (48)$$

Toto kritérium nevyžaduje žádný další předpoklad o směru, v jakém se trhlina bude šířit. Tím jsou odstraněny problémy, které nastávaly u složitějších případů zatížení trhliny.

3.4.2 MTS kritérium [7], [8], [15], [17]

Kritérium maximálního tangenciálního napětí (MTS) předpokládá, že trhlina se bude šířit v radiálním směru $\theta = \theta_0$, ve kterém je maximální hodnota tangenciálního napětí $\sigma_{\theta\theta}$. Hodnota tangenciálního napětí $\sigma_{\theta\theta}$ je maximální, jestliže je splněna nutná a postačující podmínka:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \cap \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0, \text{ pro } \theta = \theta_0. \quad (49)$$

Tangenciální napětí $\sigma_{\theta\theta}$ (pro kombinaci módů I a II) lze vyjádřit z Williamsova rozvoje následujícím způsobem:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right). \quad (50)$$

Potom je nutná podmínka pro existenci maxima tangenciálního napětí $\sigma_{\theta\theta}$ ve tvaru:

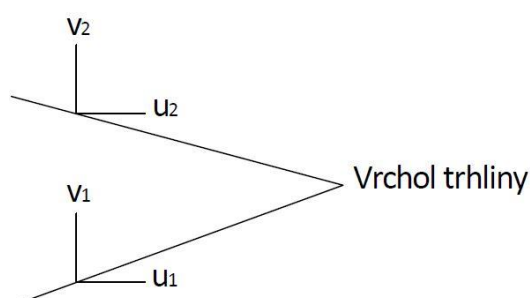
$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = K_I \sin \theta_0 - K_{II}(3 \cos \theta_0 - 1) = 0, \text{ pro } \theta = \theta_0 \quad (51)$$

Po dalších úpravách dostaneme rovnici pro úhel šíření trhliny θ_0 ve tvaru:

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{3K_{II}^2 + K_I\sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{K_I^2 + 9K_{II}^2}\right). \quad (52)$$

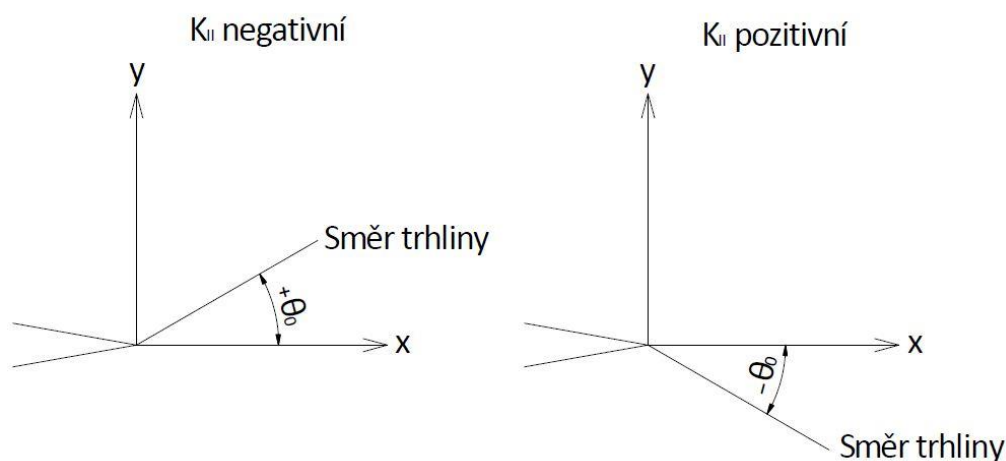
Z rovnice (52) zjistíme pouze velikost úhlu šíření trhliny, ale nezjistíme, jestli má kladnou nebo zápornou orientaci (znaménko). Znaménko úhlu θ_0 zjistíme na základě poměru K_I/K_{II} . Rozhodující je znaménko u K_{II} , protože K_I je vždy kladné. Zda je K_{II} kladné nebo záporné, určíme na základě posuvů u_1, u_2, v_1, v_2 u vrcholu trhliny (viz Obrázek 3.9), které dosadíme do vztahu:

$$\frac{K_I}{K_{II}} = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} \quad (53)$$



Obrázek 3.9: Posuvy u vrcholu trhliny.

Pokud je K_{II} negativní, je úhel θ_0 pozitivní. Naopak pokud je K_{II} pozitivní, je úhel θ_0 negativní (viz Obrázek 3.10).



Obrázek 3.10: Znaménka úhlu trhliny v závislosti na K_{II} .

3.5 Vlastní výpočet součinitelů intenzity napětí K_I a K_{II}

a) KCALC [30]

Tato funkce je přímo implementována v programu ANSYS. Pomocí této funkce jsme přímo schopni vypsát hodnoty K_I a K_{II} . KCALC vychází z posuvů uzlových bodů. Posuvy se pro lineární elastický materiál počítají:

$$u = \frac{K_I}{4G^*} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left((2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{4G^*} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left((2\kappa + 3) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad (54)$$

$$v = \frac{K_I}{4G^*} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left((2\kappa - 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{4G^*} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left((2\kappa + 3) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right), \quad (55)$$

$$w = \frac{K_{III}}{G^*} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (56)$$

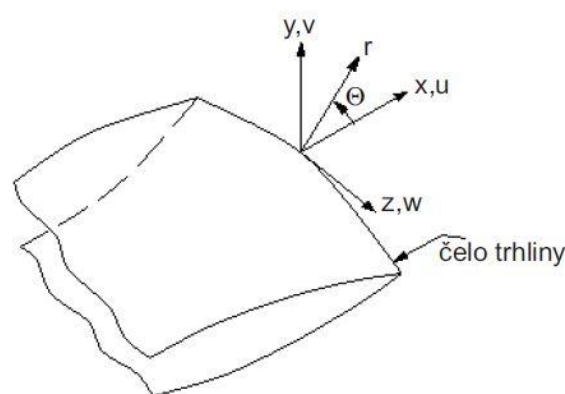
kde u, v, w jsou posuvy v lokálním souřadném systému (viz Obrázek 3.11),
 r, θ jsou souřadnice v lokálním válcovém souřadném systému (viz Obrázek 3.11),

G^* je modul pružnosti ve smyku,

K_I, K_{II}, K_{III} jsou součinitele intenzity napětí podle (viz Obrázek 3.2),

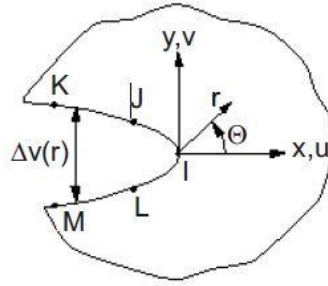
$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{pro rovinnou napjatost} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{pro rovinnou deformaci} \end{cases}$$

ν je Poissonův poměr.



Obrázek 3.11: Lokální systémy pro výpočet KCALC.

Tvar trhliny je zadán pomocí uzlových bodů – souřadnice těchto bodů jsou určujícími parametry příkazu PATH (viz Obrázek 3.12).



Obrázek 3.12: Zobrazení uzlů.

b) CINT [30]

Tato funkce je přímo implementována v programu ANSYS. Pomocí této funkce jsme přímo schopni vypsát hodnoty K_I a K_{II} . CINT počítá součinitele intenzity napětí na základě metody interakce integrálů. Interakční integrál je definovaný následujícím způsobem:

$$I = - \iiint q_{i,j} (\sigma_{kl} \varepsilon_{kl}^{aux} \delta_{ij} - \sigma_{kj}^{aux} u_{k,i} - \sigma_{kj} u_{k,i}^{aux}) dV / \iint \delta q_n dS, \quad (57)$$

kde $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_{ij}$ jsou napětí, přetvoření a posuvy,
 $\sigma_{ij}^{aux}, \varepsilon_{ij}^{aux}, u_{ij}^{aux}$ jsou napětí, přetvoření a posuvy na pomocném poli,
 q_i je vektor prodloužení trhliny.

Tento integrál je propojený s faktorem intenzity napětí následujícím vztahem:

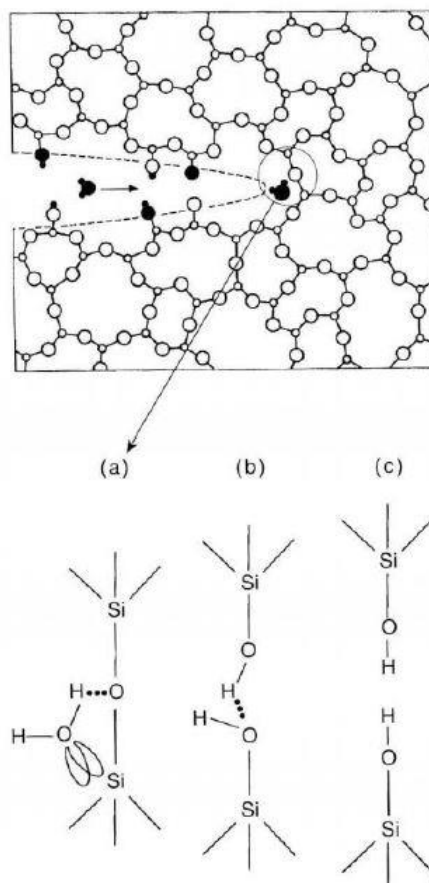
$$I = \frac{2}{E^*} (K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) + \frac{1}{G^*} K_{III} K_{III}^{aux}, \quad (58)$$

kde K_I, K_{II}, K_{III} jsou faktory intenzity napětí pro mód I, II a III,
 $K_I^{aux}, K_{II}^{aux}, K_{III}^{aux}$ jsou pomocné faktory intenzity napětí pro I, II a III,
 $E^* = E$ pro rovinnou napjatost a $\frac{E}{(1-\nu)}$ pro rovinnou deformaci,
 E je Youngův modul pružnosti,
 ν je Poissonův poměr,
 G^* je modul pružnosti ve smyku.

4 Subkritický růst trhliny při jednoosém tahu [18], [19], [15], [25]

Subkritický růst trhliny může být způsoben několika mechanismy, jako je napětí, koroze, difúze, výměna iontů a mikro plasticita. Jaký mechanismus je dominantní, závisí na prostředí a materiálu.

Ve většině případů je však dominantním mechanismem koroze pod napětím. Jedná se o molekulární mechanismu, kde se molekula vody z vlhkého okolí váže k můstkové vazbě Si-O-Si. Mechanismus je vysvětlen na následujícím obrázku:



Obrázek 4.1: Koroze pod napětím [25].

- Molekula vody se váže k můstkové vazbě Si-O-Si v kořeni trhliny.
- Vznikají dvě nové vazby, kyslík O z molekuly vody se váže s Si a vodík H se váže s kyslíkem O → původní vazba O-Si zaniká.
- Nakonec se Si-O-H skupiny vyskytují v každé lomové ploše.

Výsledkem tohoto mechanismu je, že trhlina může růst při statickém zatížení, přestože součinitel intenzity napětí K_I je menší než lomová houževnatost K_{Ic} .

Pro popis subkritického růstu trhliny v kompozitním materiálu (použitém v této práci) se používá single-power law (Paris law), které obvykle předpokládá popis materiálu v prostředí s poměrně vysokou vlhkostí. Pro většinu keramik a skel, je zavedena rychlost růstu trhliny ν dle následujících vztahů:

$$v = \frac{da}{dt}, \quad (59)$$

kde a je velikost trhliny a t je čas.

Často se rychlost růstu trhliny vyjadřuje v závislosti na faktoru intenzity napětí, následujícím způsobem:

$$v = AK_I^n, \quad (60)$$

kde v je rychlost trhliny, A je materiálová konstanta, K_I je faktor intenzity napětí a n je SCCG (stress corrosion crack grow) index.

Pro porovnání materiálů s různými hodnotami lomové houževnatosti K_{Ic} , byl faktor intenzity napětí normalizován jeho kritickou hodnotou dle vztahu:

$$A = \frac{B}{K_{Ic}^n}, \quad (61)$$

kde B je materiálová konstanta.

Výsledný vztah pro rychlost růstu trhliny je potom ve tvaru:

$$v = B \left(\frac{K_I}{K_{Ic}} \right)^n. \quad (62)$$

Parametry B a n jsou závislé na materiálu, prostředí a teplotě.

Parametry zvolené pro výpočet:

Prahová hodnota K_{th} [MPa.m^{1/2}] [28]:

$$K_{th} = 0,24 \div 0,27.$$

Lomová houževnatost K_{Ic} [MPa.m^{1/2}] [28]:

$$K_{Ic} = 0,79.$$

Parametr B [m.s⁻¹] a n [-] jsou pro prostředí s relativní vlhkostí 40 % [29]:

$$B = 7,03872 \cdot 10^{-2},$$

$$n = 35,1.$$

5 Realizace řešení

Jako metoda řešení je zvolena metoda konečných prvků (MKP), resp. její deformační varianta. Samotný algoritmus MKP je implementován v mnoha komerčně dostupných programech. Např. ANSYS, ABAQUS.

Při volbě samotného programu jsem vycházel ze svých znalostí a dostupnosti programu. Pro výpočty jsem proto zvolil program ANSYS Mechanical APDL verze 13.0. Výpočty byly provedeny na počítači Intel Xeon, 3,7 GHz, 80 GB RAM, který mi poskytl k dispozici Ústav fyziky materiálů AV ČR v Brně.

5.1 Tvorba numerického modelu

V této kapitole bude podrobně popsán postup tvorby numerického modelu pro výpočty, který byl vytvořen v prostředí programu ANSYS Mechanical APDL.

5.1.1 Model materiálu

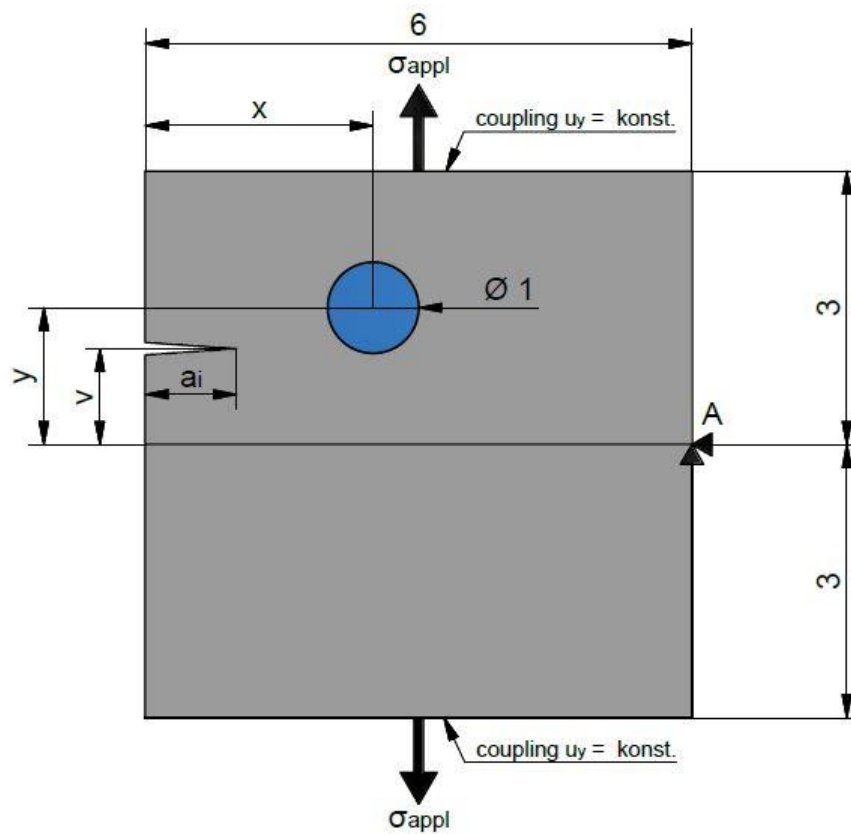
Pro výpočet jsem zvolil lineárně elastický model materiálu, který lze pro daný typ materiálu bez problému použít. Do tohoto modelu je nutné zadat pouze dvě materiálové charakteristiky, a to modul pružnosti v tahu E a Poissonův poměr ν .

Tabulka 5.1: Moduly pružnosti a Poissonovy poměry matrice a částice [15].

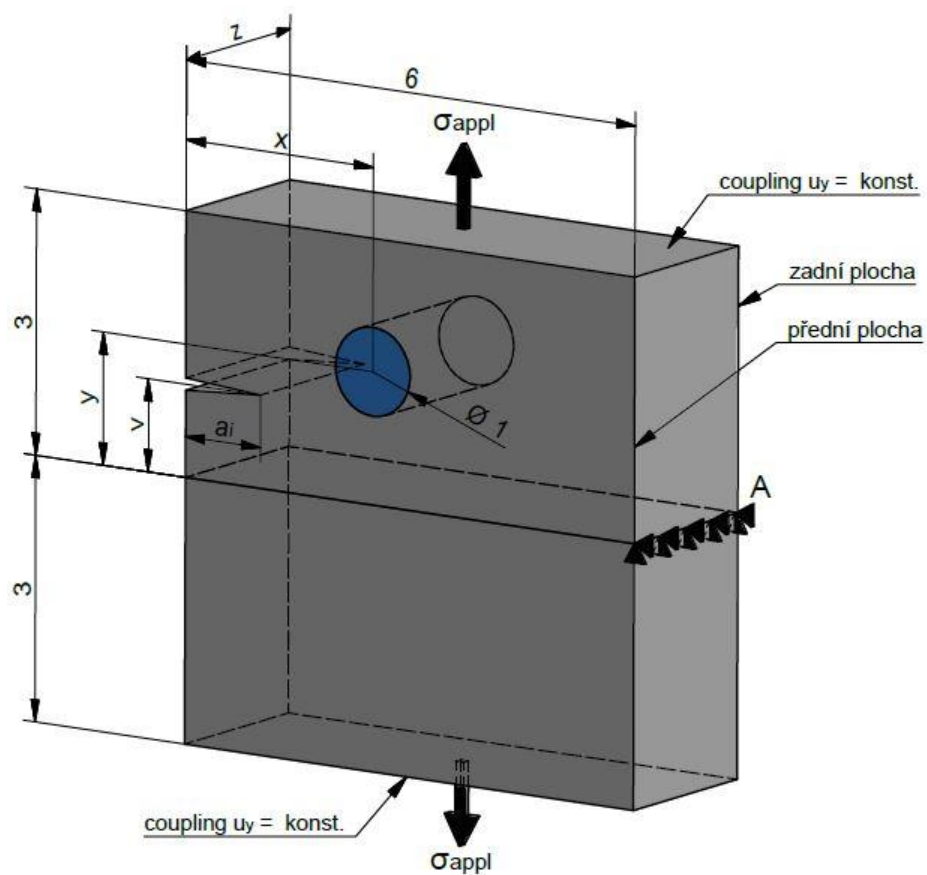
	matrice	částice
E [MPa]	70 000	300 000
ν [-]	0,17	0,29

5.1.2 Modely geometrie

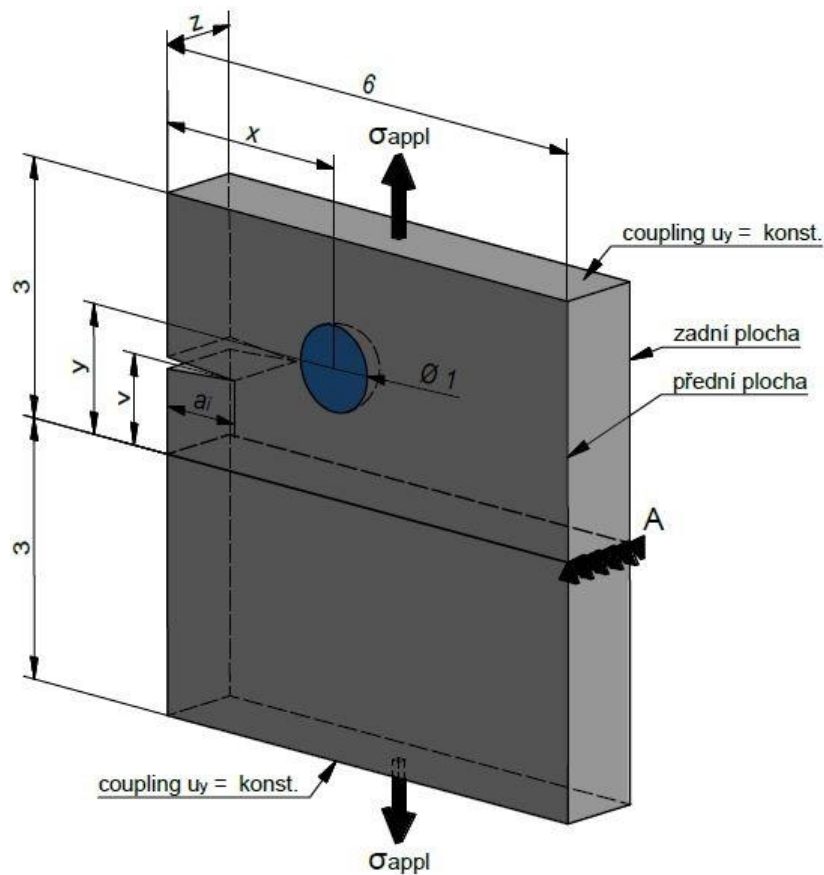
Pro výpočty byly vytvořeny celkem tři modely geometrie. Pro 2D výpočty byl vytvořen čtvercový vzorek o rozměrech $6 \times 6 \mu\text{m}$ (viz Obrázek 5.1) a pro 3D výpočty byly vytvořeny dva rozdílné vzorky, první s válcovou částicí (viz Obrázek 5.2) a druhý s kulovou částicí (viz Obrázek 5.3). Oba dva mají tvar kvádrů o rozměrech $6 \times 6 \times z \mu\text{m}$, kde z je parametr šířky tělesa.



Obrázek 5.1: 2D výpočtový model geometrie.



Obrázek 5.2: 3D výpočtový model geometrie s válcovou částicí.



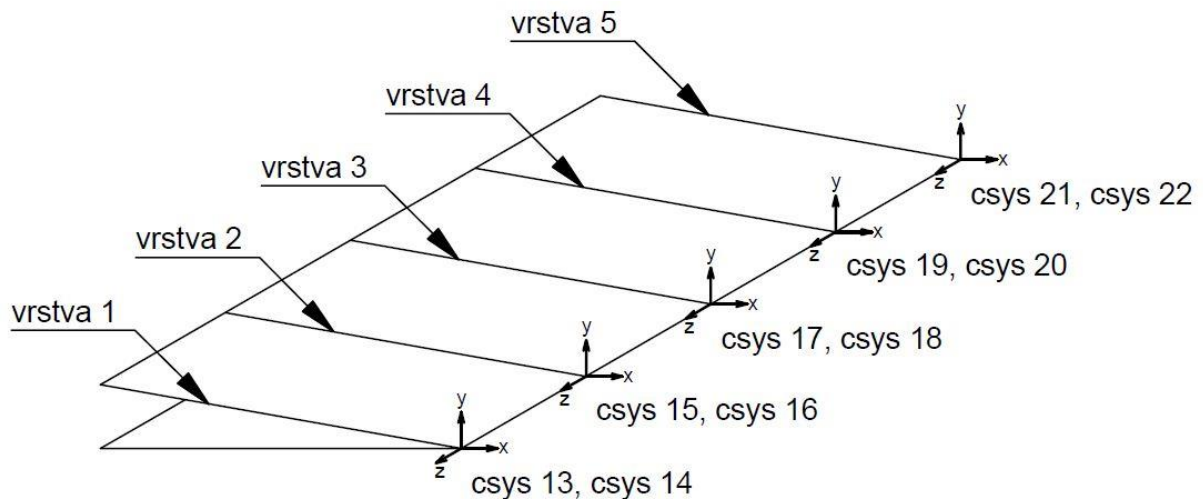
Obrázek 5.3: 3D výpočtový model geometrie s kulovou částicí.

Parametry, které jsou pro všechny tři modely stejné, jsou uvedeny v následující tabulce (tyto parametry lze libovolně měnit):

Tabulka 5.2: Seznam parametrů.

x [μm]	poloha částice ve směru osy x
y [μm]	poloha částice ve směru osy y
z [μm]	šířka zkušebního tělesa (směr osy z)
v [μm]	vyosení trhliny vůči středu
σ_{appl} [MPa]	tlakové zatížení
a_i [μm]	počáteční délka trhliny

V obou 3D modelech je čelo trhliny rozděleno do pěti vrstev (viz Obrázek 5.4). Na hranici každé vrstvy jsou zavedeny dva lokální souřadné systémy (csys 13 až csys 22). Tyto souřadné systémy jsou využity pro tvorbu další geometrie a pro mechanismus šíření trhliny.

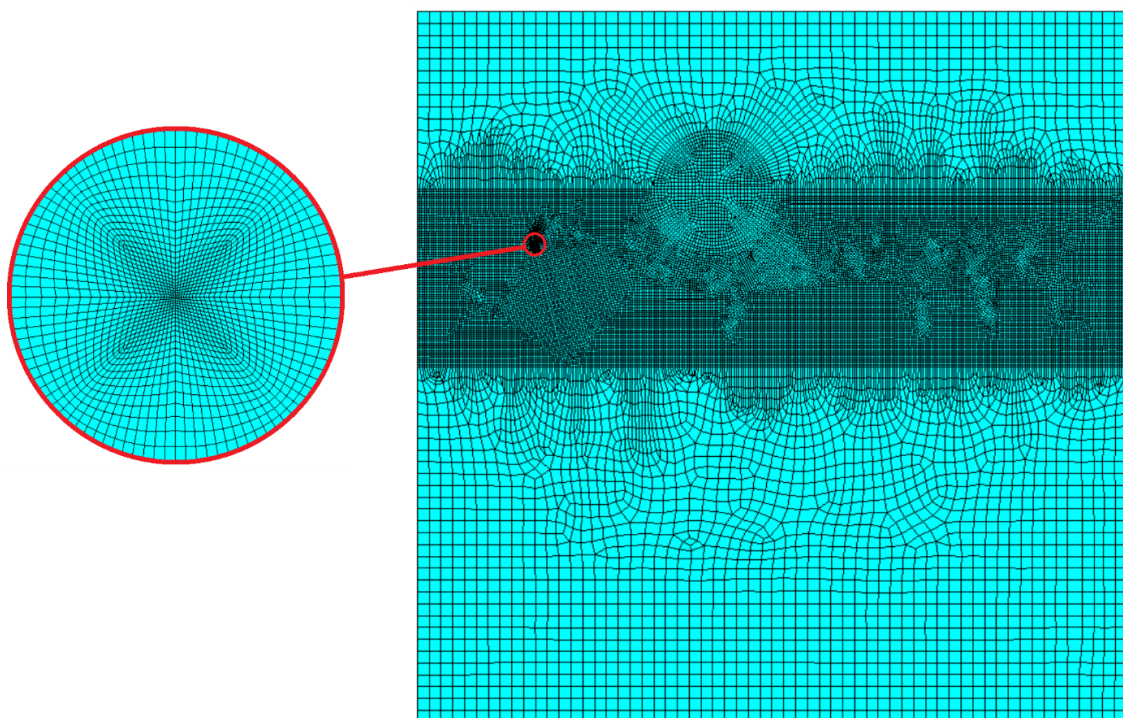


Obrázek 5.4: Čelo trhliny.

5.1.3 Tvorba sítě

Důležitým aspektem pro dosažení kvalitních výsledků je vhodná volba sítě. V případě numerického modelování pomocí MKP je u problémů lomové mechaniky nejdůležitější, vytvořit kvalitní a jemnou síť v okolí čela trhliny. Proto je kolem čela trhliny vytvořena oblast, ve které je síť výrazně zjemněná a mapovaná.

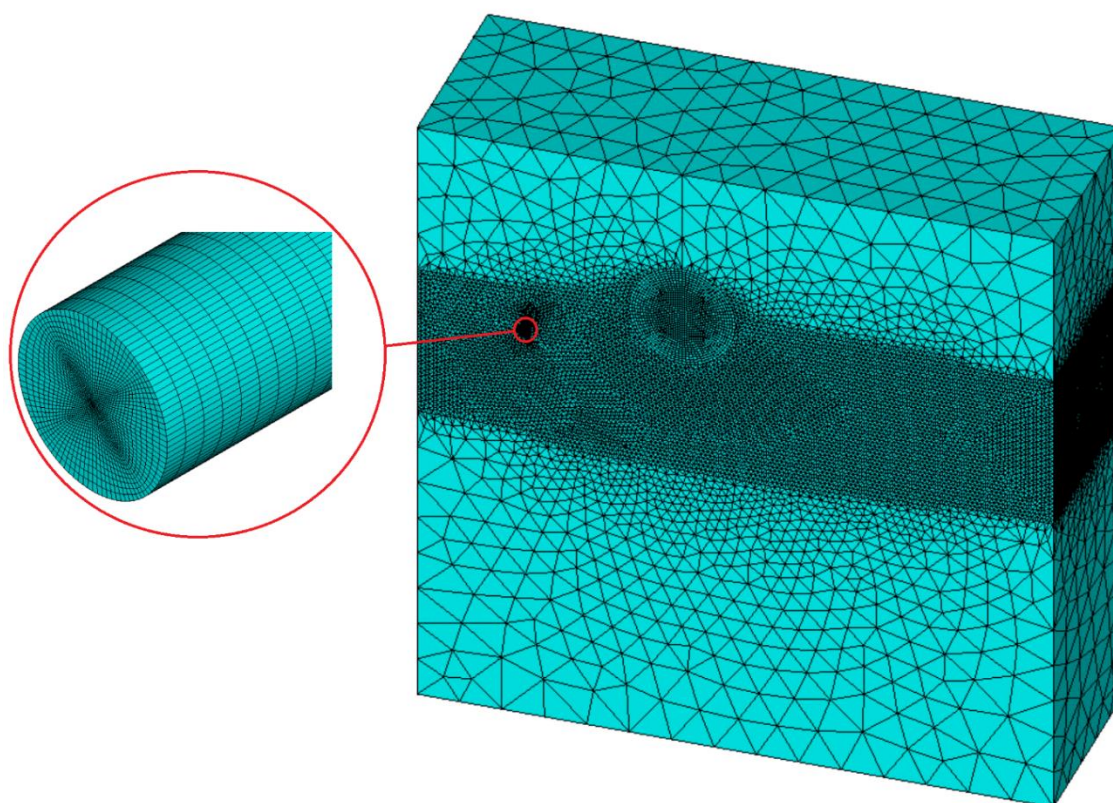
a) 2D síť



Obrázek 5.5: Síť 2D vzorku a detail mapované sítě v okolí čela trhliny.

V detailu je vidět jemná mapovaná síť v okolí čela trhliny. Dále je zjemněna oblast předpokládaného šíření trhliny. V oblastech, které nejsou pro výpočet podstatné, je použita hrubší síť. Jsou použity kvadratické prvky typu PLANE183. Celkový počet prvků v síti se pohybuje v rozmezí 25 000 – 35 000.

b) 3D síť



Obrázek 5.6: Síť 3D vzorku a detail mapované sítě v okolí čela trhliny.

V okolí čela trhliny je vytvořena válcová oblast s jemnou mapovanou sítí. Dále je zjemněna oblast předpokládaného šíření trhliny. Pro oblasti, které nejsou pro výpočet zásadní, je použita hrubší síť. Tvorba 3D sítě je problematická. Se zjemňováním sítě výrazně narůstá počet prvků, což vede na dlouhé výpočetní časy a klade vysoké nároky na hardware. Z tohoto důvodu jsou použity pro 3D síť pouze lineární prvky SOLID185. S těmito prvky je možné vytvořit jemnější síť a přitom udržet výpočetní čas v rozumných mezích. Celkový počet prvků v síti se pohybuje v rozmezí 2 000 000 – 3 000 000.

5.1.4 Okrajové podmínky a zatížení

Okrajové podmínky spolu s tlakovým zatížením jsou navrženy tak, aby simulovaly zkoušku jednoosým tahem. To znamená, že horní a spodní hrana u 2D vzorku nebo plocha u 3D vzorku je zatížena tlakem σ_{appl} . Pro autentickou simulaci tahové zkoušky je na obě dvě hrany/plochy zatížené tlakem použit coupling (tzn.: všechny uzly se posouvají stejně).

V bodě A je vzorek uchycen tak, aby bylo zamezeno posuvům ve směru osy x a osy y . Ve 2D je vzorek chycen v jednom bodě, ve 3D po celé šířce vzorku. Ve 3D je nutné uchytit vzorek i v ose z . To je realizováno zavedením symetrických okrajových podmínek na přední plochu nebo zadní plochu, respektive na obě. Pro různé výpočty jsou okrajové podmínky ve směru osy z nastaveny jinak, proto u každého výpočtu bude uvedeno, jak je symetrická okrajová podmínka realizována.

V LTCC materiálech vznikají při výrobě reziduální napětí v důsledku chladnutí po výpalu. Je to způsobeno rozdílnou teplotní roztažností materiálu matrice a materiálu částic. Díky rozdílným teplotním roztažnostem se po ochlazení materiál částice smrští více než materiál matrice. Proto dochází ke vzniku reziduálních napětí v okolí částic. Tyto reziduální napětí významným způsobem ovlivňují chování trhlin, proto je jejich vliv nutné zahrnout do výpočtu. Residuální napětí se do vzorku vnesou tak, že se nejprve vzorek ohřeje na zvolenou referenční teplotu 850 °C a poté ochladí na 20 °C. V programu ANSYS pomocí příkazů TREF a BFUNIF.

5.1.5 Mechanismus šíření trhliny

Makro použité pro šíření trhliny funguje jako cyklus, který je vytvořen pomocí příkazu *DO. Nastaven je začátek cyklu (počáteční délka trhliny a_i), krok (přírůstek trhliny) a konec cyklu. V každém kroku jsou v každém nodu na čele trhliny spočítány součinitele intenzity napětí K_I a K_{II} (součinitel K_{III} je zanedbán). Pomocí příkazu *GET jsou pro další výpočty ukládány do proměnných a vypisovány do textového souboru. Ze součinitelů intenzity napětí spočítaných v nodech, které odpovídají jednotlivým vrstvám (vrstva 1 – 5), jsou na základě kritéria maximálního tangenciálního napětí spočítány úhly šíření trhliny. Tímto končí jeden cyklus. V každém dalším cyklu je trhlina šířena ve spočteném úhlu o zadaný přírůstek 0,1 μm .

Model šíření trhliny ve 3D funguje dvěma způsoby:

- a) Trhlina je řízena jednou vrstvou.

V tomto případě se pro šíření trhliny používá úhel spočítaný ze součinitelů intenzity napětí v jedné vrstvě. Čelo trhliny se v každé vrstvě následně posune o daný krok a se stejným úhlem šíření. Čelo trhliny je přímka.

- b) Každá vrstva se šíří nezávisle.

V tomto případě je spočítán úhel šíření trhliny v každé vrstvě. Čelo trhliny se posune o daný krok, ale v každé vrstvě v příslušném úhlu. Čelo trhliny je po částech lineární křivka.

5.2 Porovnání metod určení součinitele intenzity napětí ve 2D a 3D

Ve 2D je pro výpočty šíření trhliny nejčastěji používána funkce KCALC s použitím trhlinových prvků, u kterých se prostřední nod posouvá do $\frac{1}{4}$ délky elementu. Takto vytvořený trhlinový prvek je schopen lépe popsat singularitu na čele trhliny. Pro 2D případy je na vytvoření trhlinových prvků v programu ANSYS funkce KSCON, která automaticky vytvoří trhlinové prvky v okolí čela trhliny. Taková funkce ovšem neexistuje pro 3D problém. Proto bylo nutné ověřit, zda je možné funkci KCALC použít pro 3D problém bez použití trhlinových prvků. Výpočty jsou provedeny na 2D modelu a 3D modelu s válcovou částicí popsaných (na přední ploše symetrické okrajové podmínky \rightarrow RD, na zadní plocha volná \rightarrow RN) v předchozí kapitole.

Parametry použité pro výpočet (stejné parametry jsou použity i u všech dalších výpočtů):

Tabulka 5.3: Parametry pro výpočet.

x [μm]	1,2
y [μm]	0,75
z [μm]	2
v [μm]	1,05
σ_{appl} [MPa]	30
a_i [μm]	1

Výsledné hodnoty KCALC:

Tabulka 5.4: Porovnání výsledků z KCALC.

	Rovinná deformace (RD)		Rovinná napjatost (RN)	
	K_I [MPa.m ^{1/2}]	K_{II} [MPa.m ^{1/2}]	K_I [MPa.m ^{1/2}]	K_{II} [MPa.m ^{1/2}]
2D – KCALC + KSCON	1,6529	0,0152	1,6178	0,0210
3D – KCALC	1,6847	0,0128	1,4149	0,0161

Vidíme, že pro rovinnou deformaci součinitel intenzity napětí K_I vychází ve 2D i ve 3D velmi podobně. Rozdíl je 1,89 %, což je v numerických výpočtech zanedbatelná hodnota. Součinitel intenzity napětí K_{II} však vychází rozdílně. Rozdíl je 15,8 %.

Poté byla vyzkoušena pro výpočet součinitelů intenzity napětí na čele trhliny funkce CINT, která je též obsažená v programu ANSYS a byla popsána v kapitole 3.5.

Výsledné hodnoty CINT:

Tabulka 5.5: Porovnání výsledků z KCALC a CINT.

	Rovinná deformace		Rovinná napjatost	
	K_I [MPa.m ^{1/2}]	K_{II} [MPa.m ^{1/2}]	K_I [MPa.m ^{1/2}]	K_{II} [MPa.m ^{1/2}]
2D – CINT	1,6533	0,0151	1,6181	0,0211
3D – CINT	1,6838	0,0157	1,4552	0,0182

Nejprve byly spočítány součinitele intenzity napětí pomocí funkce CINT pro 2D úlohu. Pro podmínky rovinné deformace můžeme vidět, že hodnoty K_I a K_{II} spočtené pomocí CINT a pomocí KCALC+KSCON jsou totožné (rozdíl maximálně do 1 %). Z toho vyplývá, že funkce CINT nevyžaduje trhlínové prvky na čele trhliny. Následně byl proveden výpočet ve 3D. Vidíme, že K_I i K_{II} vychází velice podobně výsledkům z 2D. U K_I je rozdíl 1,8 % a u K_{II} 3,8 %. Pro numerické výpočty se uvádí limit pro numerickou chybu 5 %.

Protože hodnota K_{II} vychází v porovnání s 2D lépe z funkce CINT, je pro většinu výpočtů použit výpočet právě pomocí funkce CINT. Ovšem i funkce KCALC je ve 3D použitelná. Při výpočtu nám jde hlavně o součinitel intenzity napětí K_I (ten vychází správně z obou funkcí), na základě kterého určíme, zda se trhlina šíří nebo ne.

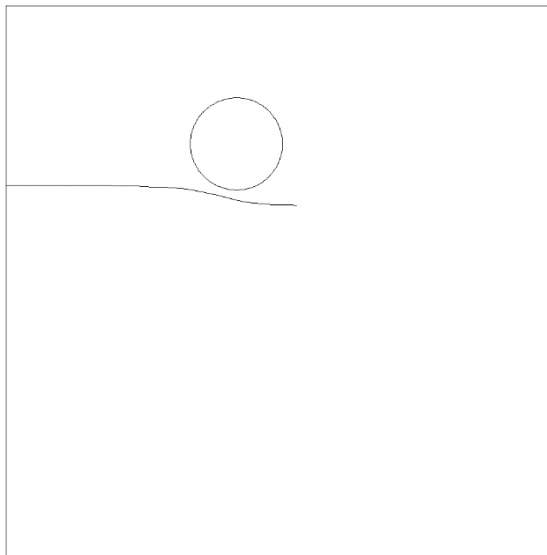
Součinitel K_{II} slouží k určení směru trhliny, do kterého vnášíme chybu už tím, že volíme o jaký krok se má trhlina posunout → chyba u K_{II} je akceptovatelná. Funkce KCALC je použita pro výpočty, kde se čelo šíří jako po částech lineární křivka.

V rovinné napjatosti nevychází totožné výsledky ani pro KCALC ani pro CINT. Jelikož CINT funguje v pořádku pro rovinnou deformaci, není důvod, proč by neměl fungovat pro rovinnou napjatost. Z toho lze usoudit, že 2D model nedokáže dostatečně dobře popsat stav rovinné napjatosti. Výsledky ve 3D byly ověřeny i pomocí přímé metody, která je univerzální a potvrzuje hodnoty získané pomocí funkce CINT a KCALC.

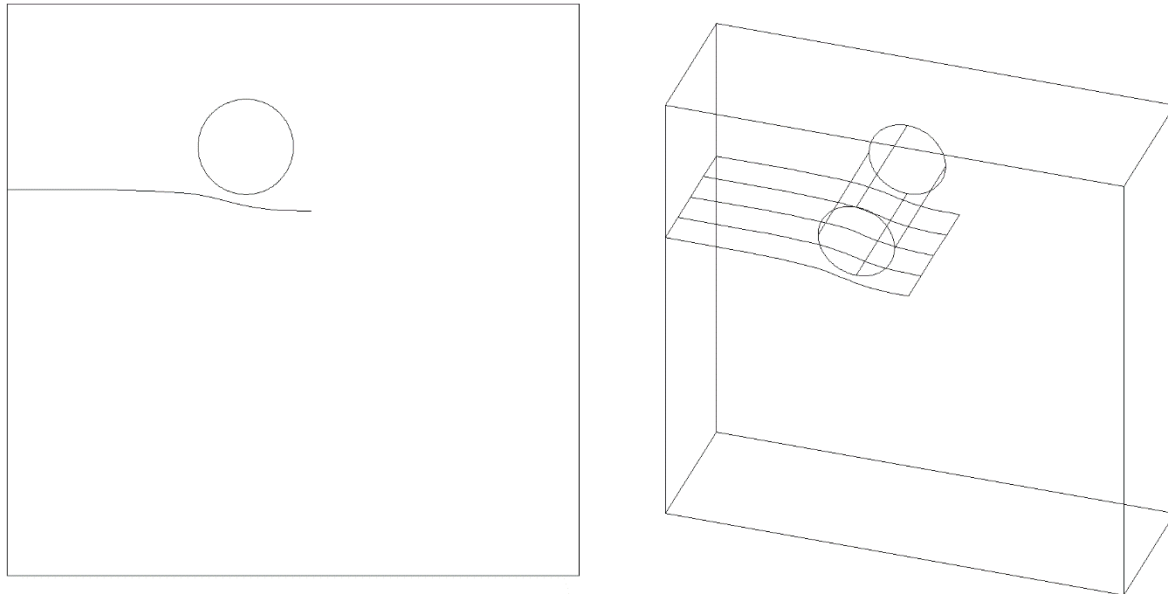
5.3 Porovnání průběhu trhliny ve 2D a 3D

V této kapitole je porovnán 2D a 3D (s válcovou částicí) výpočtový model. Výsledky jsou počítány bez residuálních napětí. U 3D modelu je trhlina řízena pomocí jedné vrstvy. Na přední i zadní ploše nastavená symetrická okrajová podmínka, tak aby v celém objemu byly podmínky rovinné deformace. 2D model je taktéž počítán pro podmínky rovinné deformace.

Bylo spočítáno 23 kroků → konečná délka trhliny je 3,2 μm .

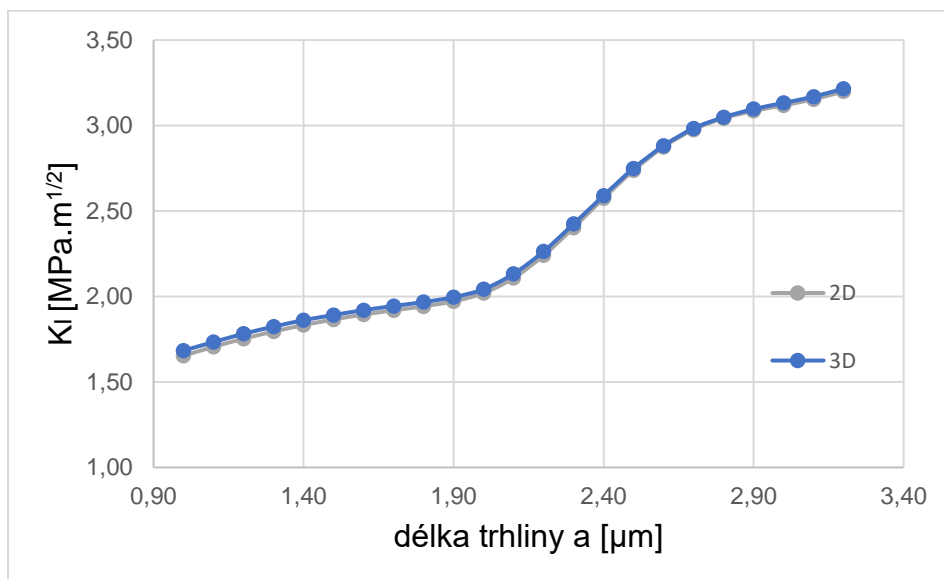


Obrázek 5.7: Výsledná trhlina ve 2D

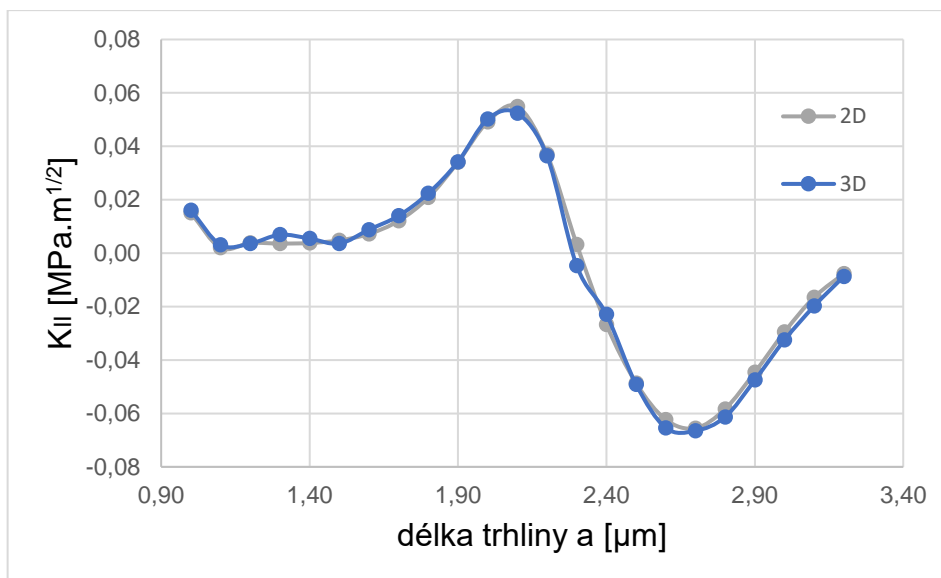
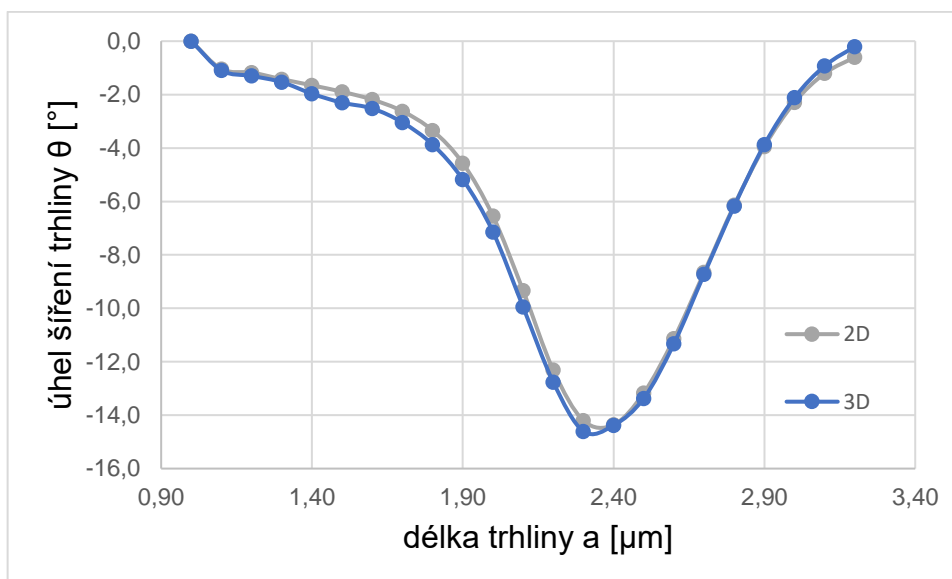


Obrázek 5.8: Výsledná trhlina ve 3D.

Z obrázků je vidět, že průběh trhliny je stejný ve 2D i ve 3D. V následujících grafech jsou potom v grafech porovnány hodnoty K_I , K_{II} a úhlu trhly v jednotlivých krocích.



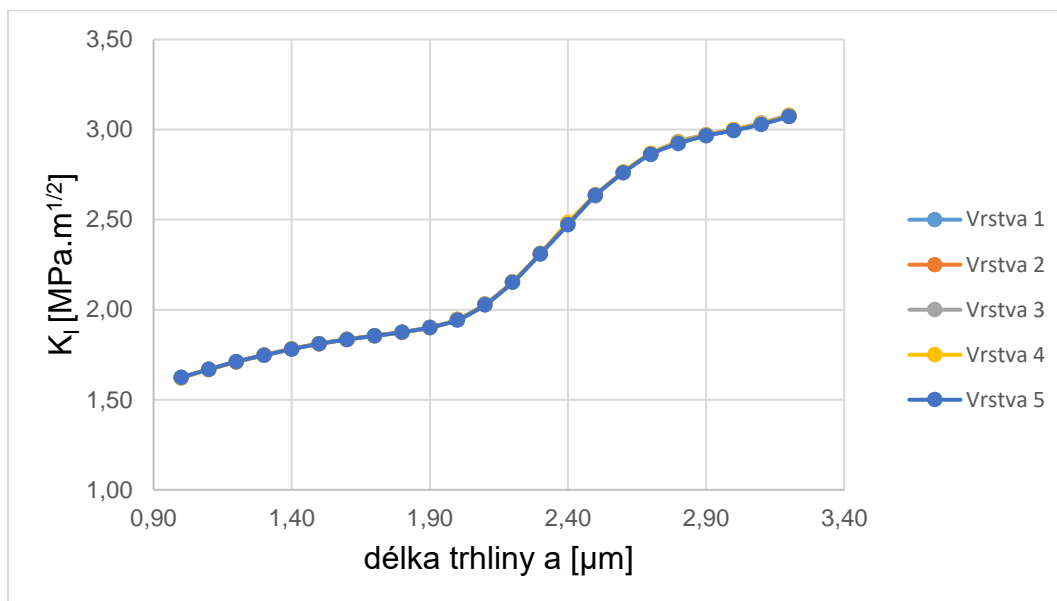
Obrázek 5.9: Průběh K_I ve 2D a ve 3D.

Obrázek 5.10: Průběh K_{II} ve 2D a ve 3D.

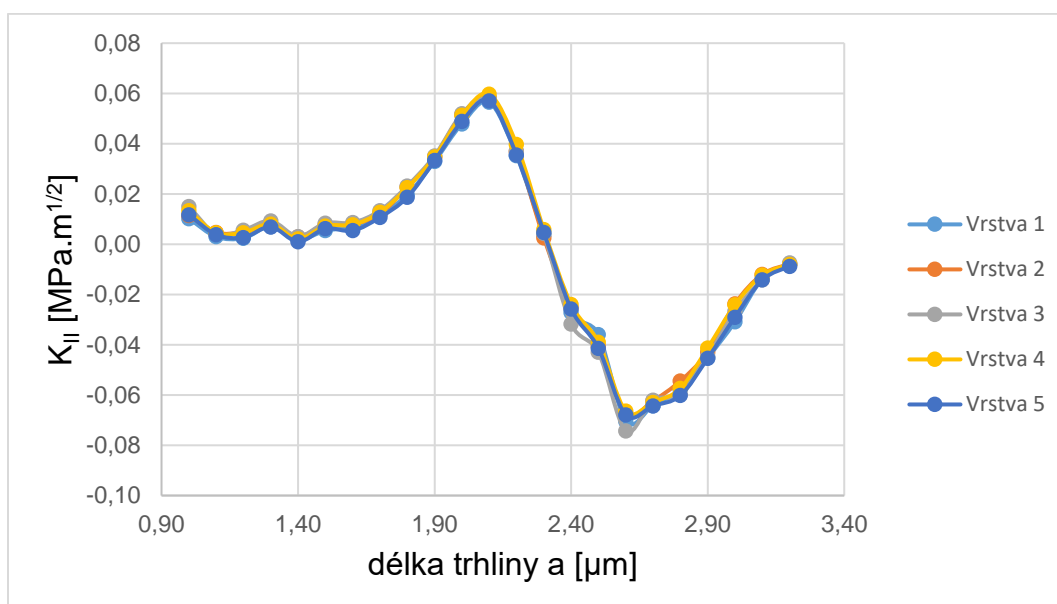
Obrázek 5.11: Průběh úhlu trhliny ve 2D a ve 3D.

Z těchto grafů je vidět, že průběhy K_I , K_{II} a úhlu šíření trhliny jsou pro 2D i 3D téměř totožné. Průběh K_I sedí perfektně. Průběh K_{II} je v některých bodech lehce zatížen numerickou chybou, ale trend je stejný. Úhel šíření je již závislý na K_{II} , tudíž se v něm projeví malé odchylky díky K_{II} .

V dalších grafech jsou porovnány výsledky z jednotlivých vrstev 3D modelu. Jelikož je celý model v rovinné deformaci se symetrickými okrajovými podmínkami na přední i zadní straně, měly by výsledky ze všech vrstev být totožné.



Obrázek 5.12: Porovnání K_I ve všech pěti vrstvách.



Obrázek 5.13: Porovnání K_{II} ve všech pěti vrstvách.

Z grafu (viz Obrázek 5.12) je vidět, že průběh K_I ve všech vrstvách je naprosto totožný. Průběh K_{II} (viz Obrázek 5.13) je lehce zatížen numerickou chybou, ale hodnoty jsou téměř totožné a mají stejný trend.

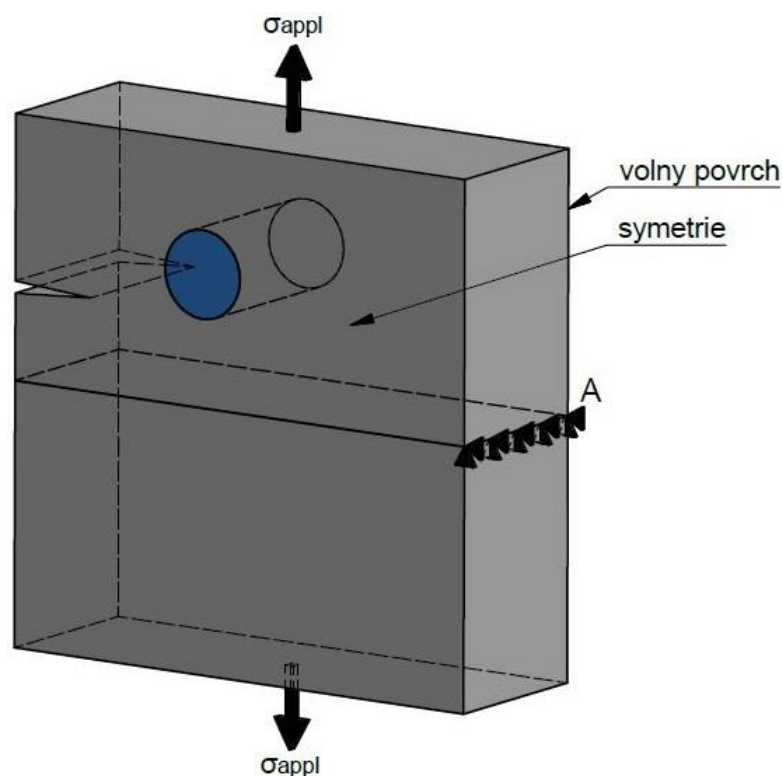
Na základě všech těchto porovnání můžeme říci, že 3D model funguje v pořádku a může být použit pro další výpočty.

5.4 Vliv povrchu

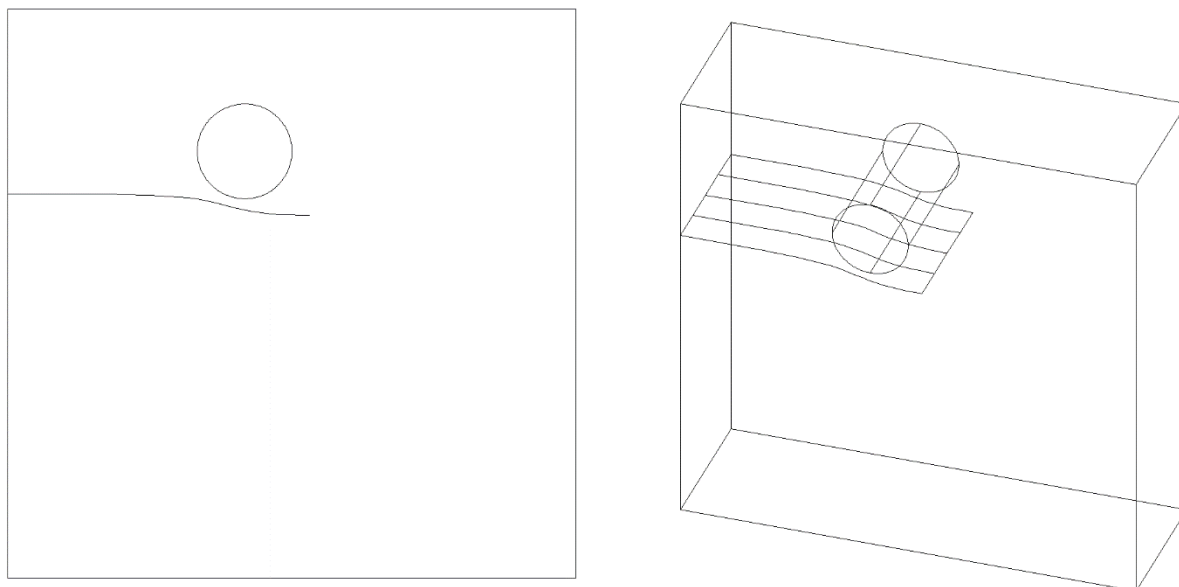
V této kapitole je popsán vliv volného povrchu na průběh trhliny po průřezu. Na přední ploše jsou nastaveny symetrické okrajové podmínky, které zaručí stav rovinné deformace. Na zadní ploše není předepsána žádná okrajová podmínka → volný povrch → rovinná napjatost. U všech variant je čelo trhliny šířeno pomocí vrstvy, ve které je stav rovinné deformace (první vrstva). Součinitele intenzity napětí na čele trhliny jsou počítány pomocí funkce CINT.

5.4.1 Válcová částice bez reziduálních napětí

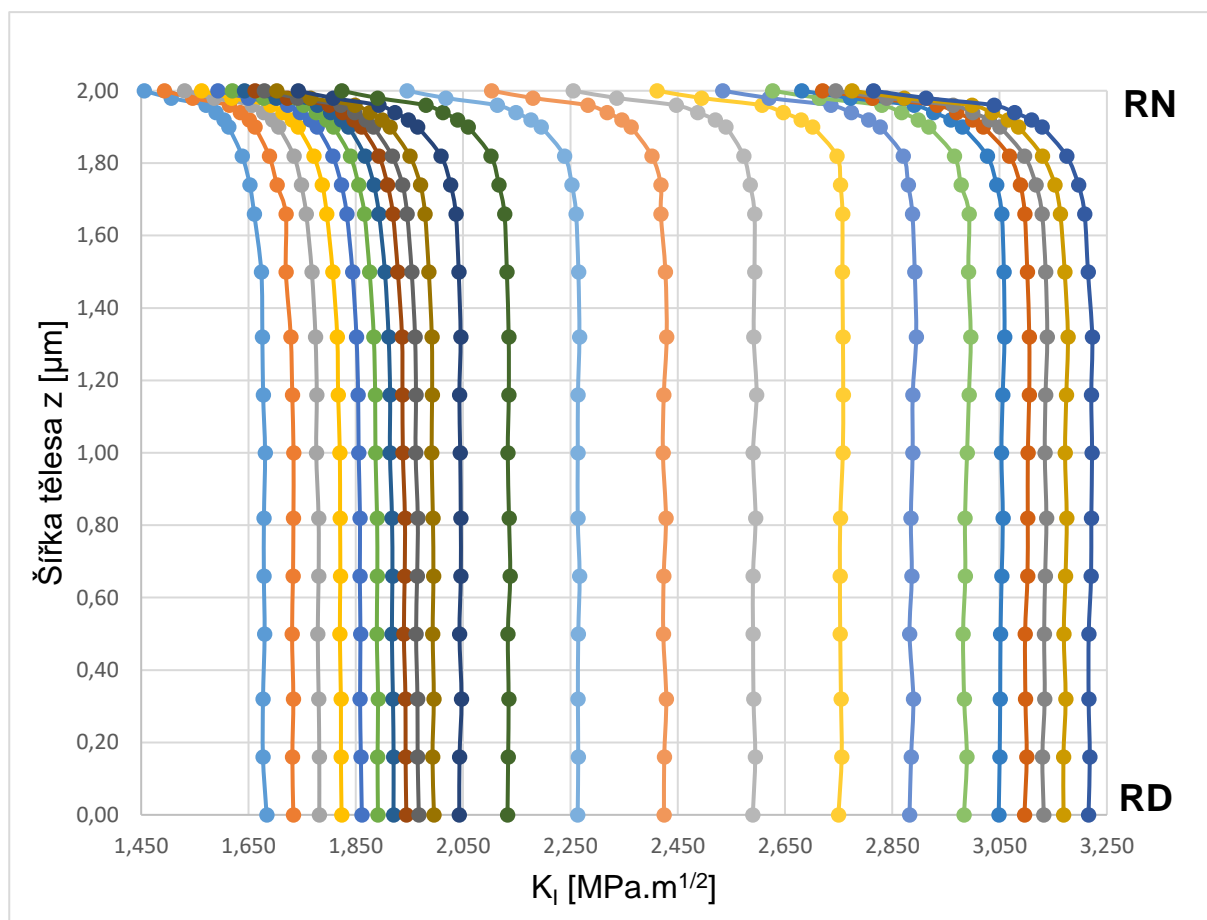
Pro tento model bylo celkem spočítáno 23 kroků → konečná délka trhliny je 3,2 μm .



Obrázek 5.14: Okrajové podmínky u 3D modelu s válcovou částicí.



Obrázek 5.15: Výsledná trhlina 3D (válcová částice).



Obrázek 5.16: Průběh čela trhliny v jednotlivých krocích (válcová částice).

V grafu (viz Obrázek 5.16) je znázorněn průběh součinitele intenzity napětí K_I po průřezu v každém kroku šíření trhliny. Můžeme vidět, že povrch ovlivňuje hodnotu K_I přibližně do hloubky $0,4 \mu\text{m} = 20 \%$ tloušťky tělesa. Přímo na povrchu je čistá rovinná napjatost. Dále až do hodnoty $0,4 \mu\text{m}$ pod povrchem je přechodové pásmo mezi

rovinnou napjatostí a rovinnou deformací. V této oblasti K_I se vzdáleností od povrchu postupně narůstá. Od hodnoty 0,4 μm pod povrchem už je čistá rovinná deformace a průběh K_I po čele trhliny téměř totožný. Dále je vidět, že tvar čela trhliny je při šíření trhliny stále stejný. V okamžiku, kdy trhlina začíná obcházet válcovou částici, dochází k rychlejšímu nárůstu K_I po celé šířce čela trhliny. Jakmile se trhlina dostane za částici, nárůst K_I se zpomalí.

V následující tabulce jsou uvedeny vypočtené hodnoty součinitele intenzity napětí K_I pro rovinnou deformaci (na straně se symetrickými okrajovými podmínkami) a pro rovinnou napjatost (volný povrch).

Tabulka 5.6: Porovnání hodnot K_I pro RD a RN (válcová částice).

a [μm]	K_I RD [$\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$]	K_I RN [$\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$]	Absolutní rozdíl	RN v procentech RD
1,0	1,684	1,455	0,228	86,44
1,1	1,734	1,493	0,241	86,13
1,2	1,782	1,531	0,251	85,91
1,3	1,824	1,563	0,261	85,69
1,4	1,861	1,593	0,269	85,56
1,5	1,891	1,620	0,271	85,65
1,6	1,920	1,642	0,278	85,52
1,7	1,944	1,662	0,282	85,49
1,8	1,968	1,680	0,288	85,37
1,9	1,996	1,702	0,294	85,29
2,0	2,043	1,743	0,300	85,30
2,1	2,133	1,824	0,309	85,50
2,2	2,264	1,946	0,318	85,95
2,3	2,424	2,103	0,321	86,75
2,4	2,590	2,255	0,335	87,07
2,5	2,750	2,411	0,338	87,69
2,6	2,882	2,534	0,348	87,92
2,7	2,984	2,627	0,357	88,04
2,8	3,048	2,681	0,367	87,95
2,9	3,096	2,720	0,376	87,85
3,0	3,132	2,744	0,388	87,61
3,1	3,169	2,775	0,394	87,56
3,2	3,216	2,814	0,401	87,52

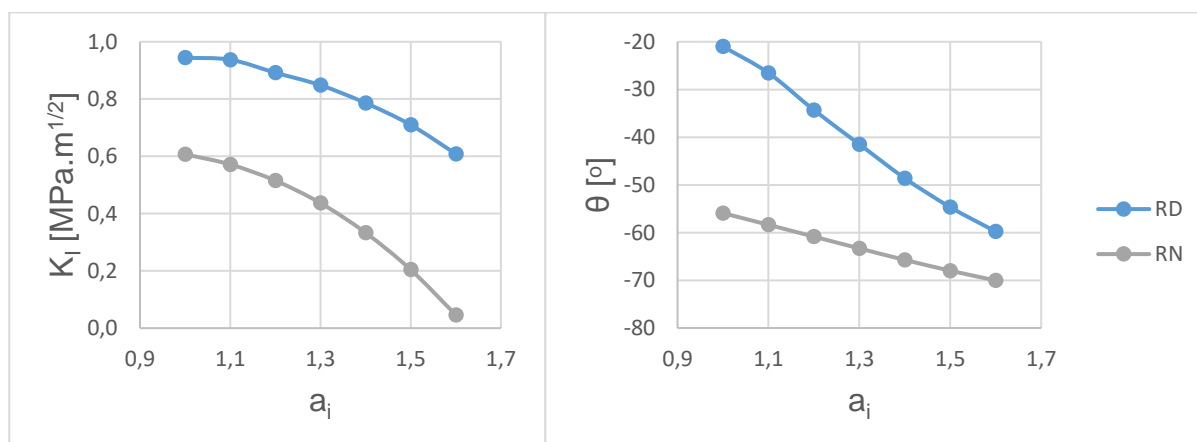
Z dat v tabulce je vidět, že absolutní rozdíl součinitele intenzity napětí K_I při rovinné deformaci a rovinné napjatosti s rostoucí trhlinou narůstá. Při počáteční trhlince o délce 1 μm je rozdíl 0,228 $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$. Při délce trhliny 3,2 μm je rozdíl už 0,401 $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$. Pokud K_I při rovinné napjatosti vyjádříme v procentech K_I při rovinné deformaci, je ovšem tento procentuální rozdíl pořád téměř stejný.

5.4.2 Válcová částice s residuálními napětími

V tomto případě byl použit stejný model jako v předešlé úloze, pouze byl navíc zahrnut vliv residuálních napětí. Při výpočtu šíření trhliny bylo zjištěno, že součinitele intenzity napětí K_I i K_{II} (i úhel šíření) se v důsledku residuálních napětí výrazně po šířce mění. Z tohoto důvodu byl výpočet proveden pouze tak, že byla zvětšována počáteční trhlina a_i a bylo zkoumáno, jak se mění K_I i K_{II} (i úhel šíření) po šířce tělesa v závislosti na délce počáteční trhliny. V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty součinitelů intenzity napětí K_I , K_{II} a úhlu šíření trhliny θ v případě rovinné deformace (na straně se symetrickými okrajovými podmínkami) a rovinné napjatosti (na volném povrchu). Bylo spočítáno sedm kroků, kde počáteční délka trhliny a_i je od 1 do 1,6 $[\mu\text{m}]$.

Tabulka 5.7: Porovnání hodnot K_I , K_{II} a úhlu θ při zahrnutí residuálních napětí.

a_i [μm]	Rovinná deformace			Rovinná napjatost		
	K_I [$\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$]	K_{II} [$\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$]	θ [$^\circ$]	K_I [$\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$]	K_{II} [$\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$]	θ [$^\circ$]
1,0	0,944	0,188	-20,987	0,607	0,738	-55,910
1,1	0,937	0,249	-26,528	0,572	0,849	-58,363
1,2	0,892	0,340	-34,310	0,515	0,974	-60,840
1,3	0,848	0,450	-41,475	0,437	1,123	-63,308
1,4	0,786	0,600	-48,605	0,333	1,301	-65,723
1,5	0,710	0,788	-54,672	0,204	1,518	-67,979
1,6	0,609	1,032	-59,786	0,046	1,786	-70,035



Obrázek 5.17: Průběh K_I a úhlu θ v závislosti na počáteční délce trhliny a_i .

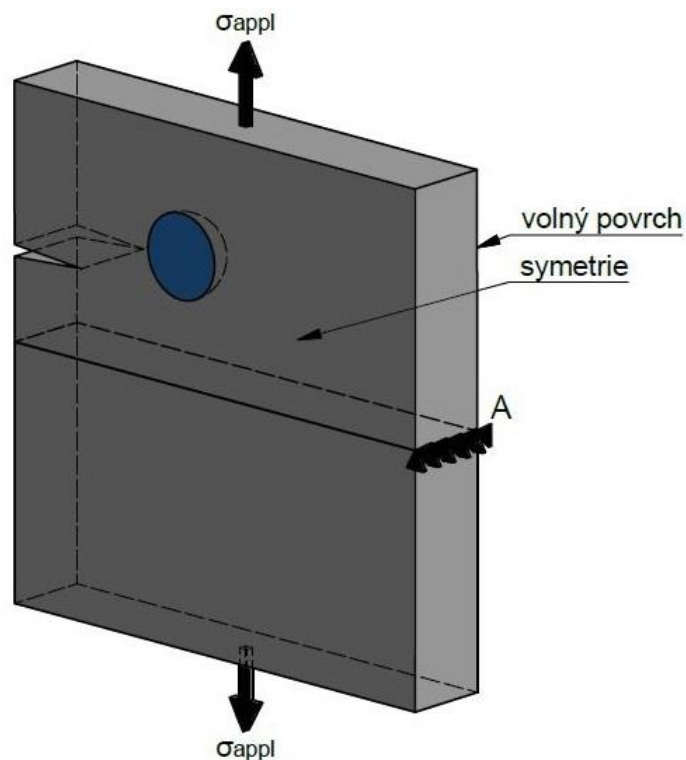
Průběh hodnot K_I je takový, že se s narůstající délkou trhliny jeho hodnoty zmenšují (při RD i při RN). Dále můžeme vidět, že hodnoty K_I jsou při stavu RD větší než při RN. V prvním kroku, kdy je počáteční trhlina 1 μm , je rozdíl mezi hodnotou K_I při RD a K_I při RN přibližně 36 %. V dalším kroku už je rozdíl 39 % a při délce trhliny 1,6 μm je rozdíl dokonce 92 %.

Hodnoty K_{II} s narůstající délkou trhliny rostou \rightarrow rostou i úhly šíření trhliny. Hodnoty K_{II} jsou větší při RN než při RD. Rozdíl mezi hodnotami K_{II} při RN a K_{II} RD v případě počáteční délky trhliny 1 μm je přibližně 75 %. Při délce trhliny 1,6 μm je jejich rozdíl 42%. Vidíme tedy, že rozdíl se postupně zmenšuje.

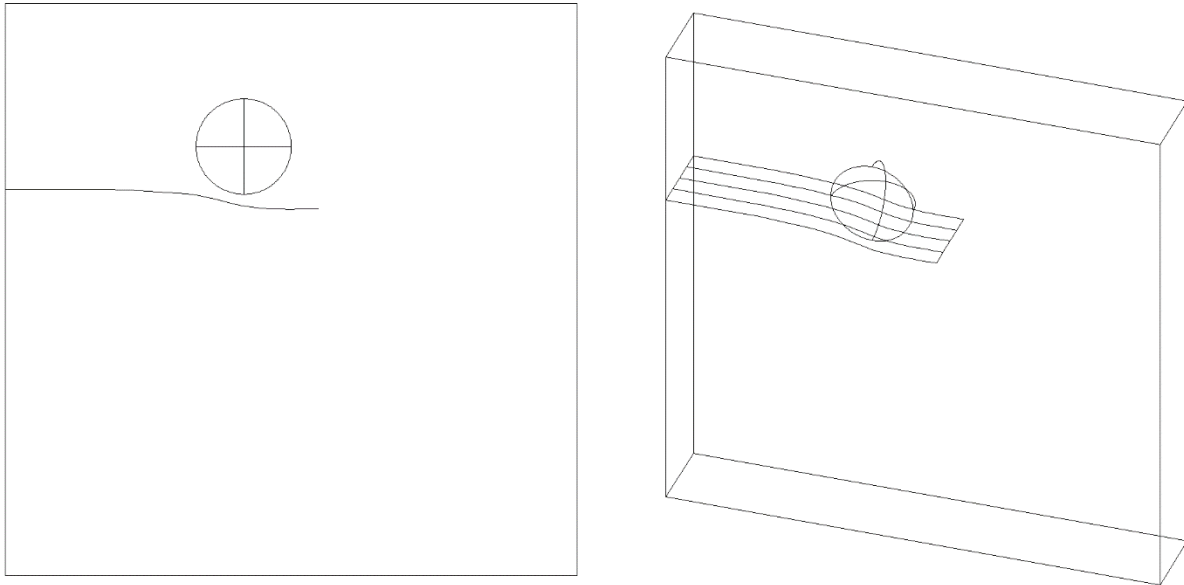
Z důvodu velké rozdílnosti součinitelů intenzity napětí K_I a K_{II} (potažmo úhlu šíření θ) po šířce tělesa, při zatížení residuálními napětími, nelze použít přístup, kdy se čelo trhliny šíří jako přímka a je řízeno pouze pomocí výsledků z jedné vrstvy. Pokud řídíme trhlínu pomocí výsledků z RD (RN), nutíme trhlínu na straně RN (RD) šířit se do míst, kam by se sama nikdy nešířila a dostáváme tak špatné výsledky.

5.4.3 Kulová částice bez reziduálních napětí

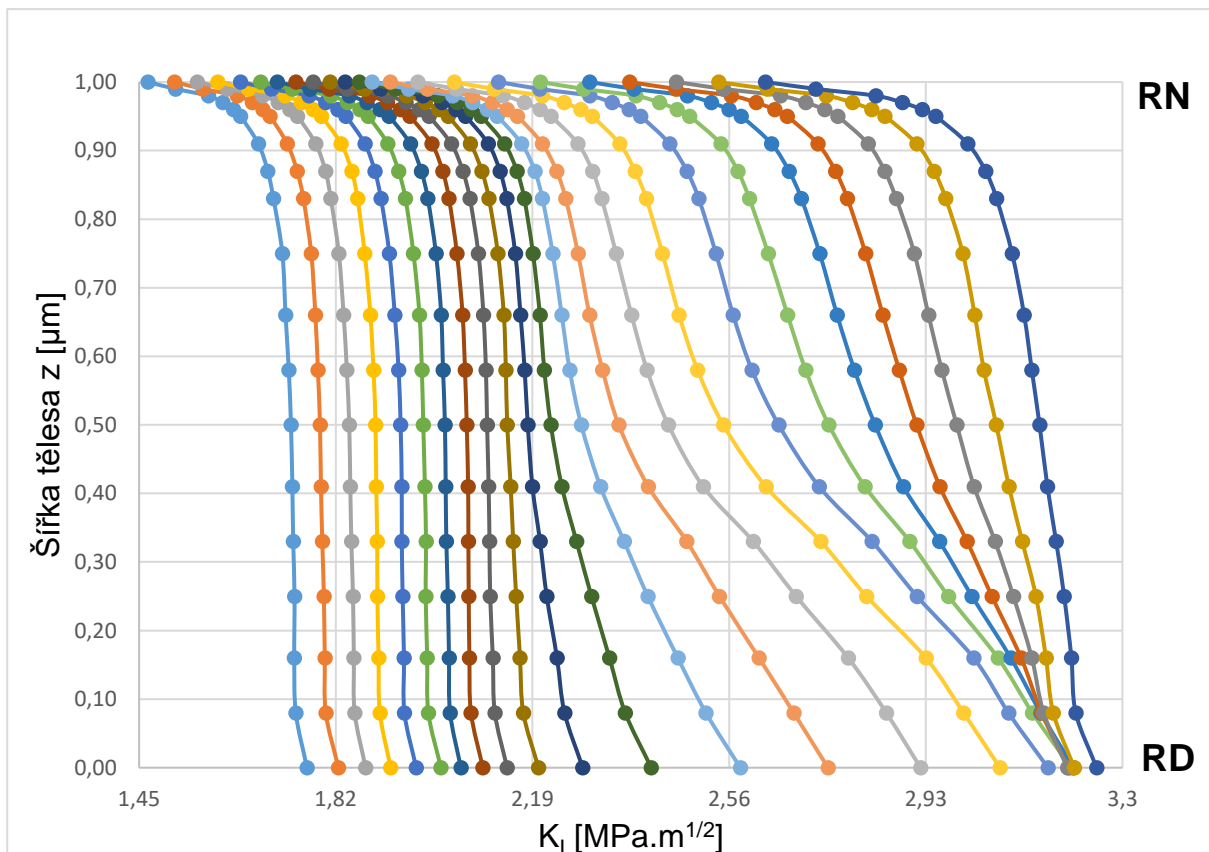
V tomto případě byla tloušťka tělesa z pouze $1\ \mu\text{m}$. Vrchol kulové částice tedy zasahuje přesně do poloviny vzorku ($0,5\ \mu\text{m}$). Ostatní parametry zůstaly nezměněny. Stejně jako pro válcovou částici bylo spočítáno 23 kroků \rightarrow konečná délka trhliny je $3,2\ \mu\text{m}$.



Obrázek 5.18: Okrajové podmínky u 3D modelu s kulovou částicí.



Obrázek 5.19: Výsledná trhlina 3D (kulová částice).



Obrázek 5.20: Průběh čela trhliny v jednotlivých krocích (kulová částice).

V grafu (Obrázek 5.20) je znázorněn průběh součinitele intenzity napětí K_I po průřezu v každém kroku šíření trhliny ve 3D modelu s kulovou částicí. Můžeme vidět, že povrch ovlivňuje hodnotu K_I přibližně do hloubky $0,2 \mu\text{m} = 20\%$ tloušťky vzorku. To je stejná hodnota jako v případě válcové částice. Oproti válcové částici můžeme vidět, že K_I již od počáteční trhliny lehce klesá směrem od RD k RN. Tento jev je zapříčiněn právě

kulovou částicí. Když se trhlina dostane k částici, vidíme, že hodnoty součinitele intenzity napětí K_I se začnou po průřezu zásadně měnit. V RD (trhlina je přímo pod středem částice) začne K_I narůstat mnohem rychleji než na straně RN. Jakmile trhlina projde okolo částice, K_I se po průřezu začne opět vyrovnávat. Na straně RD dokonce vidíme, že v pár krocích má K_I téměř stejnou hodnotu.

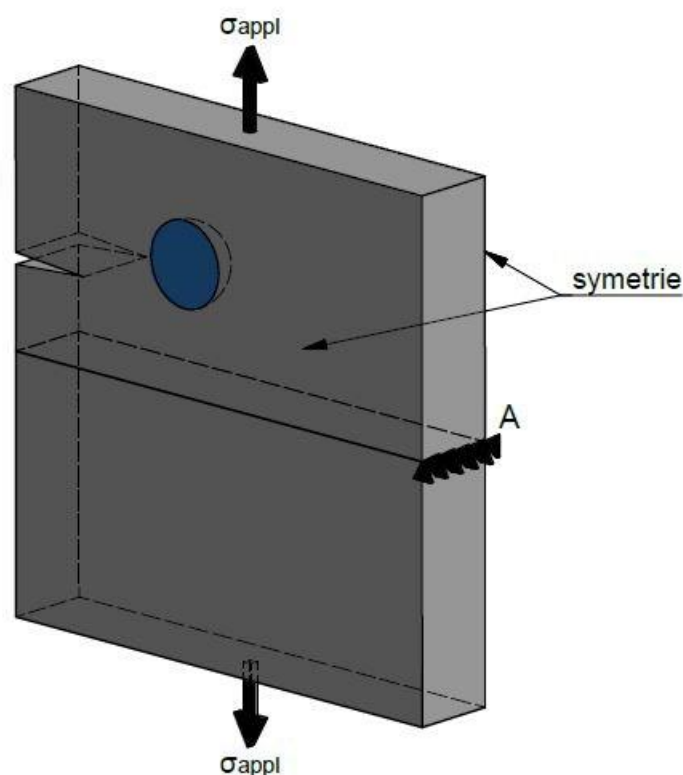
Tabulka 5.8: Porovnání hodnot K_I pro RD a RN (kulová částice).

a [μm]	K_I RD [MPa.m ^{1/2}]	K_I RN [MPa.m ^{1/2}]	Absolutní rozdíl	RN v procentech RD
1,0	1,766	1,467	0,299	83,07
1,1	1,825	1,517	0,308	83,10
1,2	1,876	1,559	0,317	83,11
1,3	1,923	1,598	0,325	83,10
1,4	1,971	1,641	0,331	83,22
1,5	2,018	1,679	0,339	83,19
1,6	2,055	1,710	0,346	83,18
1,7	2,097	1,745	0,352	83,22
1,8	2,142	1,777	0,365	82,95
1,9	2,201	1,809	0,392	82,18
2,0	2,285	1,838	0,447	80,43
2,1	2,414	1,864	0,550	77,23
2,2	2,581	1,888	0,693	73,14
2,3	2,746	1,922	0,824	70,00
2,4	2,920	1,974	0,946	67,60
2,5	3,070	2,043	1,027	66,55
2,6	3,160	2,126	1,034	67,28
2,7	3,203	2,205	0,998	68,84
2,8	3,208	2,298	0,911	71,61
2,9	3,198	2,373	0,825	74,21
3,0	3,197	2,461	0,735	76,99
3,1	3,209	2,540	0,669	79,15
3,2	3,251	2,629	0,623	80,84

Z dat v tabulce můžeme vidět, že absolutní rozdíl K_I při rovinné deformaci a rovinné napjatosti s rostoucí trhlinou narůstá. Stejně jako v případě válcové částice. Při počáteční délce trhliny 1 μm je rozdíl 0,299 MPa.m^{1/2}, což je srovnatelná hodnota jako u válcové částice (0,228 MPa.m^{1/2}). Při délce trhliny 3,2 μm je rozdíl už 0,623 MPa.m^{1/2}. To je přibližně 35 % více než v případě válcové částice (0,401 MPa.m^{1/2}). Pokud K_I při rovinné napjatosti vyjádříme v procentech K_I při rovinné deformaci, vidíme, že se procentuálně mění od cca 66 % do 83 %. Největší rozdíl je právě tehdy, kdy trhlina obchází kulovou částicí. U válcové částice byl tento procentuální rozdíl přibližně stále stejný.

5.5 Kulová částice s nerovným čelem trhliny

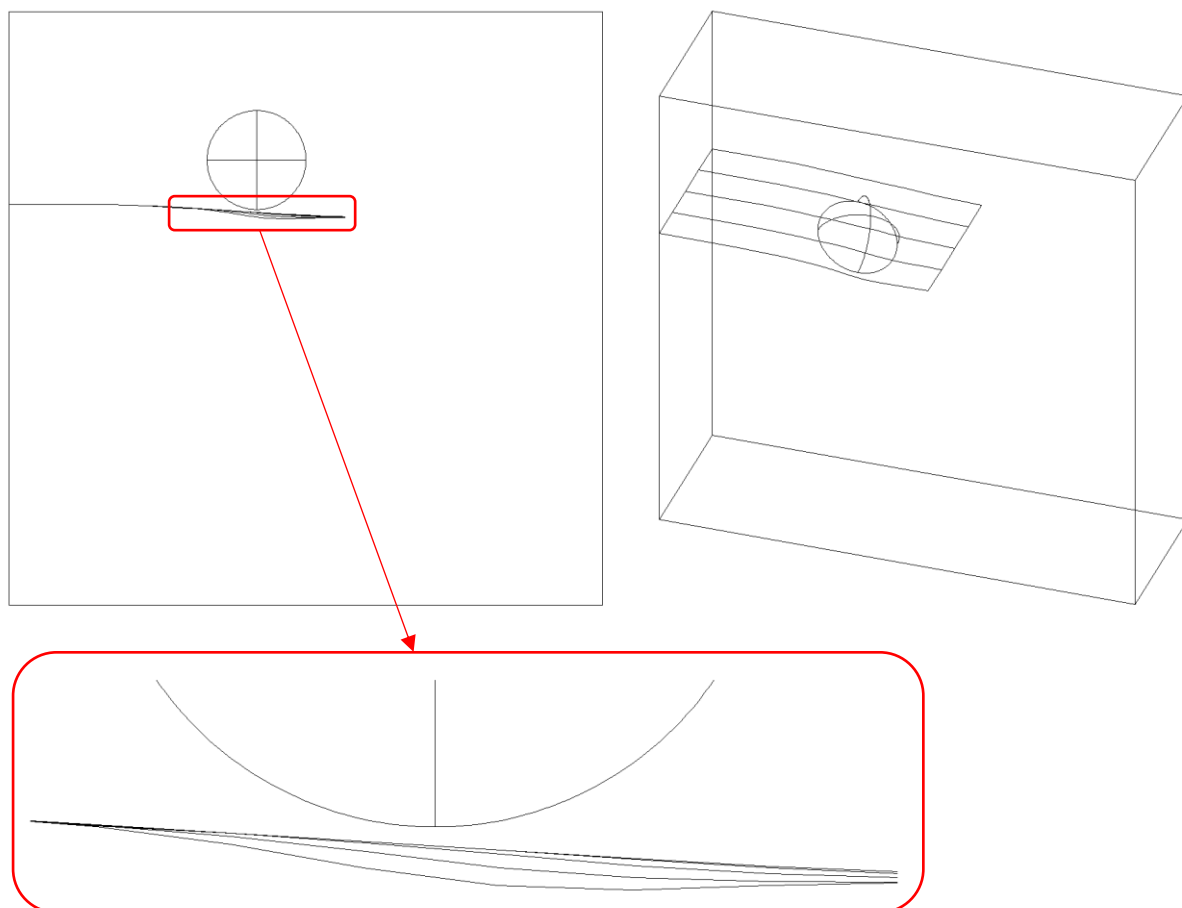
V této kapitole je předveden 3D model s kulovou částicí, kdy se čelo trhliny šíří nezávisle v každé vrstvě. Čelo trhliny je tedy po částech lineární křivka. Součinitele intenzity napětí na čele trhliny jsou v tomto případě počítány na základě funkce KCALC. Na přední i zadní straně jsou nadefinované symetrické okrajové podmínky (viz Obrázek 5.21) → celý model je ve stavu rovinné deformace. Byly spočítány dvě varianty. První bez residuálních napětí. Druhá s residuálními napětími. U obou dvou variant byl zvětšen krok z 0,1 na 0,2 μm (kvůli snížení výpočetního času) a bylo spočteno 13 kroků → celková délka trhliny 3,4 μm . Všechny ostatní parametry zůstaly nastaveny stejně jako u předchozích příkladů.



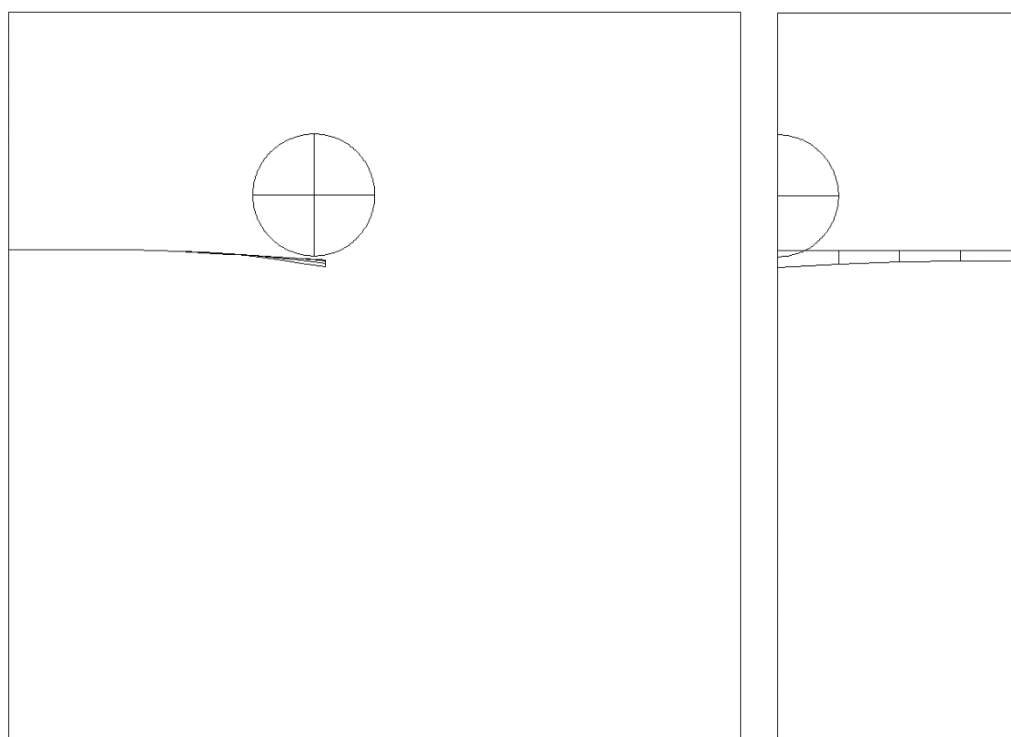
Obrázek 5.21: Symetrie u 3D modelu s kulovou částicí.

5.5.1 Varianta bez residuálních napětí

Na následujících obrázcích je vidět výsledný průběh trhliny a trhlina tedy, kdy prochází na jedné straně přímo pod částicí. Tento obrázek je zde zvolen proto, že je na něm nejlépe vidět rozdíl v natočení trhliny na straně, kde je částice a na straně, kde částice není.



Obrázek 5.22: Výsledný průběh trhliny bez residuálních napětí.



Obrázek 5.23: Trhlina pod částicí (největší rozdíl v úhlu natočení).

Z obrázku je vidět, jak je trhlina po šířce tělesa odpuzována od částice různě. Nejvíce je odpuzována (největší úhel natočení trhliny) na přední straně, kde probíhá přímo pod částicí. Naopak na zadní straně, kdy už částice nad trhlinou není, je trhlina odpuzována nejméně (nejmenší úhel natočení trhliny).

Tabulka 5.9: Porovnání úhlu natočení θ a K_I v jednotlivých vrstvách bez res. napětí.

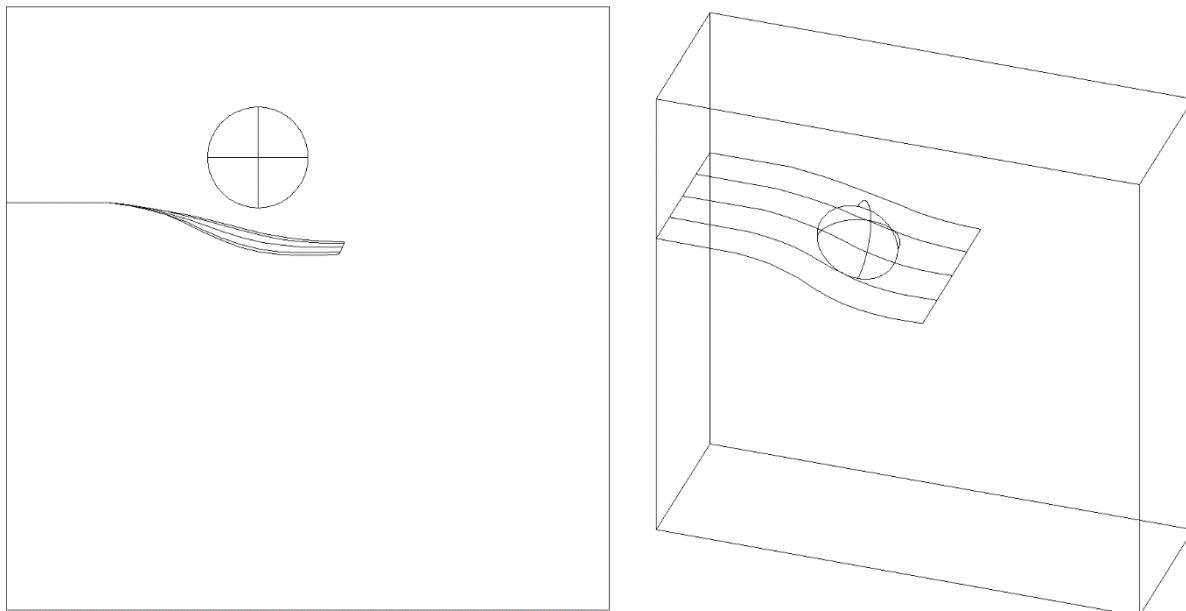
a [μm]	K_I [MPa.m ^{1/2}]					Úhel natočení θ [°]				
	1. vrstva	2. vrstva	3. vrstva	4. vrstva	5. vrstva	1. vrstva	2. vrstva	3. vrstva	4. vrstva	5. vrstva
1,00	1,659	1,656	1,655	1,659	1,662	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,20	1,764	1,764	1,765	1,768	1,773	-1,32	-1,47	-1,69	-1,78	-1,74
1,40	1,854	1,856	1,860	1,866	1,868	-2,20	-2,27	-2,32	-2,45	-2,53
1,60	1,938	1,940	1,951	1,958	1,963	-2,81	-2,84	-2,88	-2,93	-2,99
1,80	2,016	2,021	2,039	2,048	2,053	-3,40	-3,18	-3,18	-3,22	-3,19
2,00	2,137	2,102	2,125	2,140	2,145	-4,61	-3,77	-3,32	-3,28	-3,48
2,20	2,400	2,210	2,217	2,239	2,242	-7,34	-4,72	-3,63	-3,44	-3,16
2,40	2,767	2,373	2,327	2,347	2,353	-10,06	-6,40	-4,07	-3,45	-3,51
2,60	3,054	2,560	2,465	2,478	2,482	-7,39	-7,08	-4,77	-3,78	-3,55
2,80	3,096	2,711	2,622	2,624	2,628	-1,97	-4,20	-4,98	-3,88	-3,65
3,00	3,047	2,842	2,783	2,783	2,783	1,77	-1,66	-3,33	-3,60	-3,28
3,20	3,081	2,985	2,957	2,956	2,960	1,07	-0,13	-1,82	-2,35	-2,40
3,40	3,214	3,158	3,148	3,149	3,149	0,09	-0,05	-0,74	-1,37	-1,54

Z dat můžeme vidět, že v prvních šesti krocích K_I postupně od 1. do 5. vrstvy postupně narůstá. To je způsobeno tím, že postupně klesá vzdálenost od částice. Od sedmého kroku (délky trhliny 2,2 μm) je K_I největší v 1. vrstvě a postupně s vrstvami klesá. To je způsobeno větším úhlem natočení ve vrstvách blíže částici. Největší rozdíl v součiniteli intenzity napětí je při délce trhliny 2,6 μm (trhlina je pod částicí) a to 0,572 [MPa.m^{1/2}].

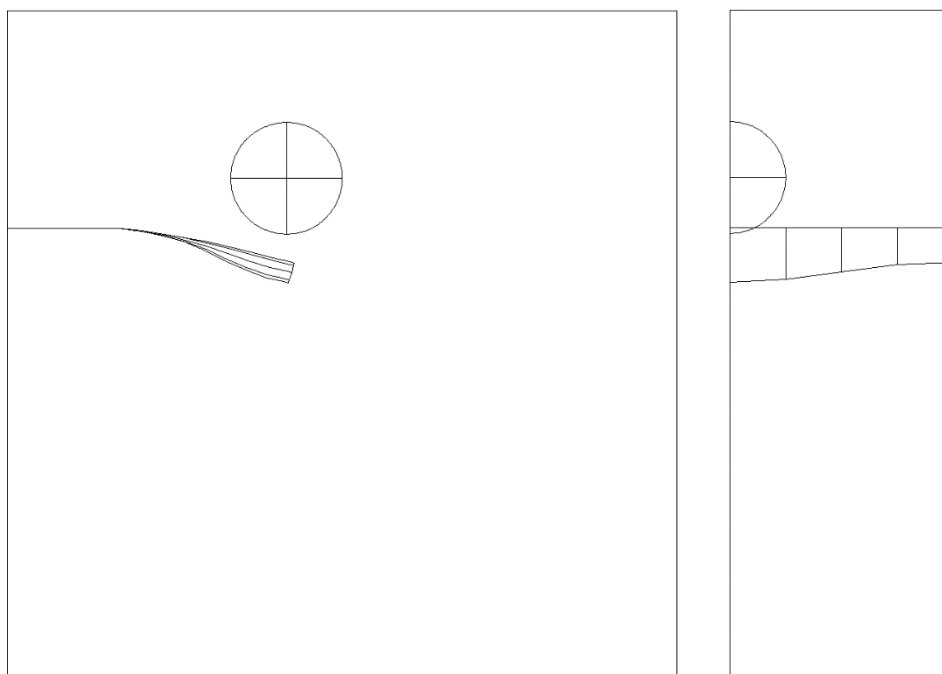
Úhel natočení trhliny θ je v prvních čtyřech krocích nejmenší v 1. vrstvě a s vrstvami postupně roste. Od pátého kroku (trhlina se přiblíží částici) začne být úhel natočení v 1. vrstvě největší a s dalšími vrstvami postupně klesá. S délkou trhliny postupně ve všech vrstvách úhel narůstá. V posledních pěti krocích, kdy je trhlina již za středem částice, se trhlina začne vyrovnávat. Největší rozdíl v úhlu natočení mezi 1. a 5. vrstvou je při délce trhliny 2,4 μm a to 6,55 °.

5.5.2 Varianta s residuálními napětími

Na následujících obrázcích je opět vidět výsledný průběh trhliny a trhlina tehdy, kdy prochází na jedné straně přímo pod částicí, tentokrát se zahrnutím vlivu residuálních napětí.



Obrázek 5.24: Výsledný průběh trhliny s residuálními napětími.



Obrázek 5.25: Trhlina v místě pod částicí.

Z obrázku můžeme vidět, že trhlina na straně pod částicí je mnohem více odpuzována než na straně, kde částice není. Toto je způsobeno právě residuálními napětími, které jsou větší blíže částici. Pokud by byl model geometrie ještě širší (zadní plocha by byla

ještě více vzdálená částice), byl by rozdíl ještě výraznější. V porovnání s modelem bez residuálních napětí, je trhlina celkově více odpuzována od částice.

V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty úhlu natočení θ a součinitele intenzity napětí K_I v jednotlivých vrstvách v průběhu růstu trhliny.

Tabulka 5.10: Porovnání úhlu natočení θ a K_I v jednotlivých vrstvách s res. napětími.

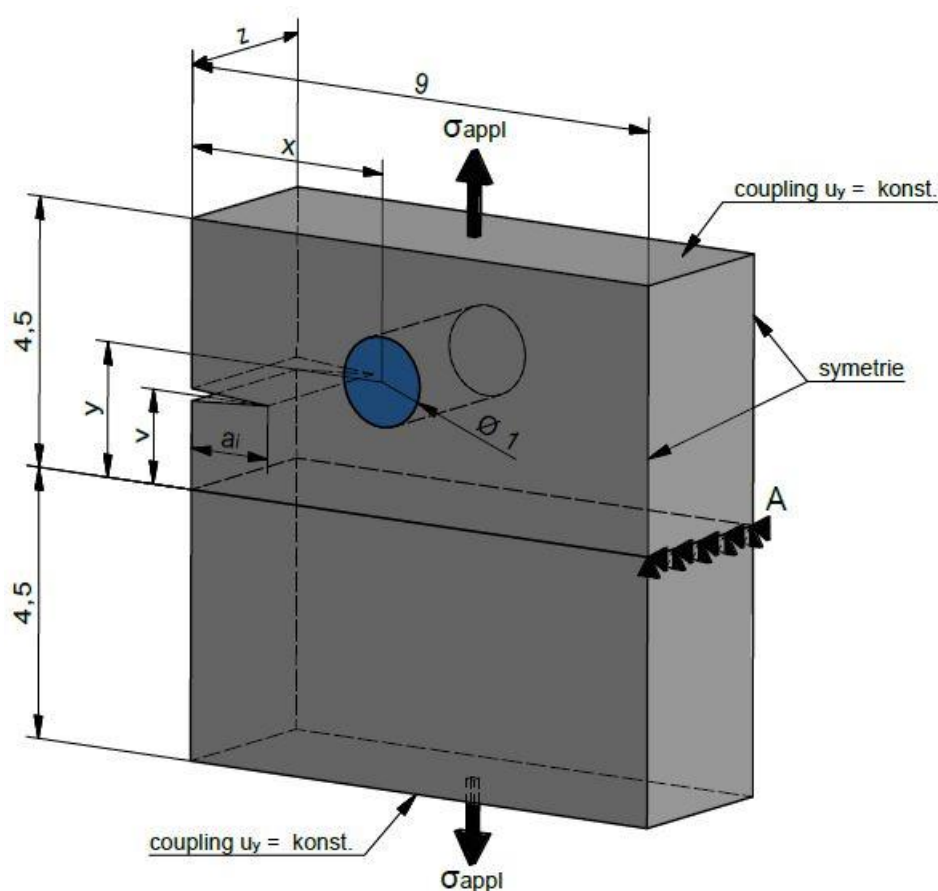
a [μm]	K_I [MPa.m ^{1/2}]					Úhel natočení θ [°]				
	1. vrstva	2. vrstva	3. vrstva	4. vrstva	5. vrstva	1. vrstva	2. vrstva	3. vrstva	4. vrstva	5. vrstva
1,00	1,423	1,424	1,437	1,451	1,460	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,20	1,515	1,525	1,546	1,559	1,561	-6,99	-6,97	-6,94	-6,43	-6,21
1,40	1,608	1,627	1,645	1,653	1,655	-11,07	-11,01	-9,95	-8,58	-8,04
1,60	1,763	1,772	1,760	1,748	1,744	-16,35	-15,49	-12,84	-10,41	-9,54
1,80	2,046	2,007	1,904	1,849	1,839	-22,70	-20,74	-16,04	-12,40	-11,12
2,00	2,431	2,310	2,086	1,971	1,945	-27,10	-24,37	-18,76	-14,12	-12,70
2,20	2,816	2,627	2,285	2,101	2,065	-25,22	-23,71	-19,64	-15,48	-13,88
2,40	3,150	2,919	2,481	2,248	2,195	-19,89	-18,85	-17,28	-15,32	-14,16
2,60	3,386	3,140	2,666	2,404	2,342	-13,49	-13,03	-13,03	-13,14	-13,21
2,80	3,508	3,276	2,825	2,566	2,497	-7,22	-7,43	-8,53	-10,03	-10,33
3,00	3,548	3,357	2,969	2,734	2,670	-2,50	-2,78	-4,59	-6,43	-7,35
3,20	3,572	3,416	3,102	2,906	2,849	0,76	0,21	-1,38	-3,56	-4,19
3,40	3,627	3,498	3,245	3,090	3,047	2,32	1,81	0,32	-1,21	-2,00

Z dat můžeme vidět, že v prvních třech krocích K_I postupně od 1. do 5. vrstvy postupně narůstá. To je způsobeno tím, že postupně klesá vzdálenost od částice a s tím klesá i vliv residuálních napětí, které trhlinu zavírají. Od čtvrtého kroku (délky trhliny 1,6 μm) je K_I největší v 1. vrstvě a postupně s vrstvami klesá. To je způsobeno větším úhlem natočení ve vrstvách blíže částici. Největší rozdíl v součiniteli intenzity napětí je stejně tak jako u případu bez residuálních napětí při délce trhliny 2,6 μm (trhlina je pod částicí) a to 1,044 [MPa.m^{1/2}]. V případě bez residuálních napětí je tento rozdíl menší, a to 0,572 [MPa.m^{1/2}].

Úhel natočení trhliny θ je od začátku největší v 1. vrstvě a s vrstvami postupně klesá. S délkou trhliny postupně ve všech vrstvách úhel narůstá. Jakmile trhlina projde pod částicí (délka trhliny 2,8 μm), začne se trhlina srovnávat a největší úhel natočení je potom v 5. vrstvě. Největší rozdíl v úhlu natočení mezi 1. a 5. vrstvou je při délce trhliny 2 μm a to 14,4 °. V případě bez residuálních napětí byl maximální rozdíl mezi úhly natočení při délce trhliny 2,4 μm , jeho hodnota potom 6,55 °.

5.6 Subkritický růst trhliny

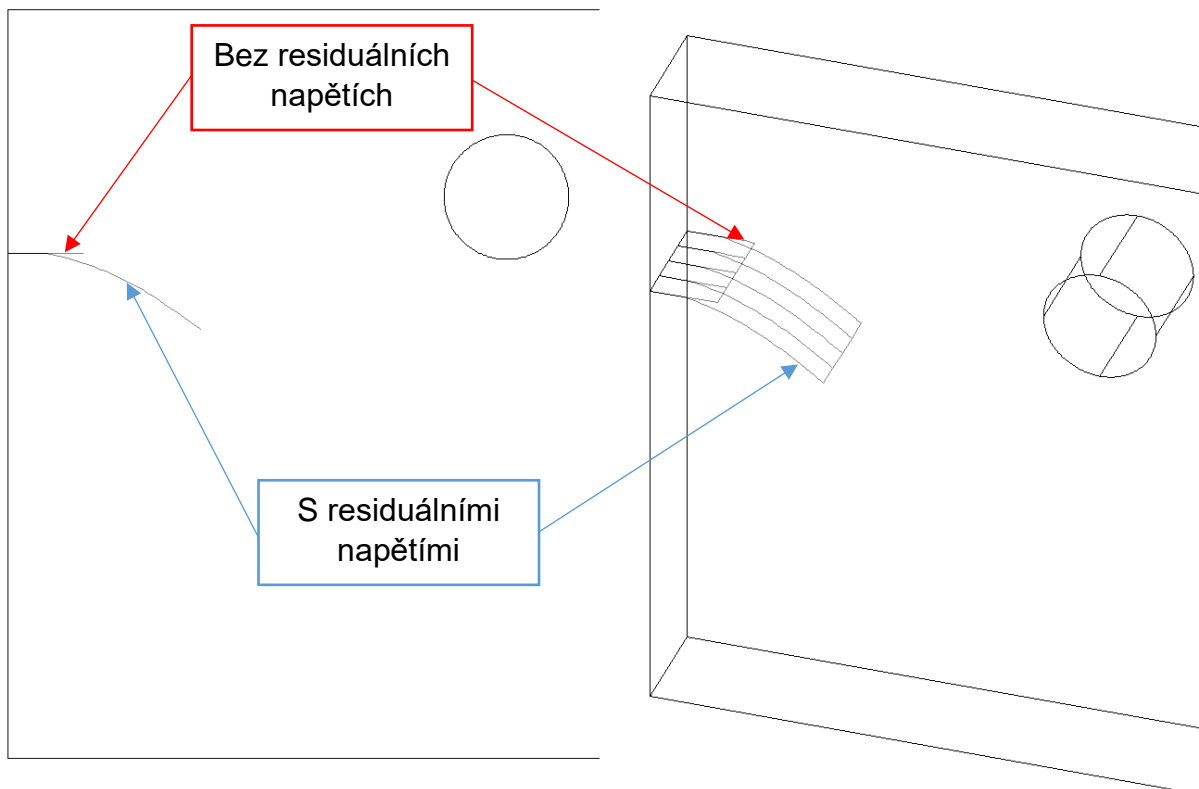
V předchozích kapitolám nebyl respektován subkritický růst. V této kapitole je proveden výpočet právě za podmínek subkritického růstu trhliny. Pro výpočet je použit zvětšený 3D model s válcovou částicí, kde na přední i zadní straně jsou nastaveny symetrické okrajové podmínky → celý model je v rovinné deformaci (viz Obrázek 2.1). Jsou také upraveny i některé parametry (viz Tabulka 5.11). Tyto změny jsou provedeny proto, že naladit subkritické šíření v takto jednoduchém modelu, kde není splněno objemové množství částic, není úplně jednoduché. Jsou spočítány dvě varianty. Jedna bez residuálních napětí a druhá s residuálními napětími. Následně je spočítán čas, po který se trhlina šíří, než součinitel intenzity napětí K_I dosáhne lomové houževnatosti K_{Ic} → trhlina se začne šířit nestabilně. Pro výpočet času růstu trhliny je použit vzorec a konstanty, viz kapitola 4.



Obrázek 5.26: 3D model pro subkritický růst trhliny.

Tabulka 5.11: Rozměry modelu a parametry pro subkritický růst.

x [μm]	4
y [μm]	1,5
z [μm]	1
v [μm]	1,05
σ_{appl} [MPa]	18
a_i [μm]	0,3
K_{th} [MPa.m ^{1/2}]	0,24 – 0,27
K_{Ic} [MPa.m ^{1/2}]	0,79
B [m.s ⁻¹]	7.03872e-2
n [-]	35,1



Obrázek 5.27: Porovnání trhlin při subkritickém růstu.

Pro výpočet je zmenšen krok růstu trhliny na $0,5 \mu\text{m}$. Jak můžeme vidět z obrázku, pokud jsou ve výpočtu zahrnuty residuální napětí, trhlina naroste do mnohem větší délky a mnohem delší čas, než součinitel intenzity napětí K_I dosáhne lomové houževnatosti K_{Ic} . To je způsobeno tím, že residuální napětí mají velký vliv na napjatost v tělese. Residuální napětí tlačí na líce trhliny a tím trhlínu zavírají → dochází ke snížení K_I na čele trhliny. Konkrétně je délka trhliny při residuálních napětích $1,8 \mu\text{m}$ a do této délky naroste za přibližně 122 let. Bez residuálních napětí má trhlina pouze $0,6 \mu\text{m}$ a této velikosti dosáhne za $1,6 \cdot 10^{-2}$ sekundy. Hodnoty času jsou extrémní, to je dáno použitím modelem pouze s jednou jedinou částicí. Z výsledků je jasně vidět vliv residuálních napětí. Výrazně ovlivňují cestu šíření trhliny a zvyšují dobu, kterou se trhlina šíří než dosáhne lomové houževnatosti.

Tabulka 5.12: Hodnoty K_I pro výpočet času a vypočtený čas.

S residuálními napětími			Bez residuálních napětí		
přírůstek [μm]	K_I [MPa.m ^{1/2}]	čas [s]	přírůstek [μm]	K_I [MPa.m ^{1/2}]	čas [s]
0,05	0,2473	3597665115	0,05	0,5949	0,00014969
0,05	0,2676	225644520	0,05	0,6404	1,1265E-05
0,05	0,2872	18876154,8	0,05	0,6805	1,3363E-06
0,05	0,3063	1969824,94	0,05	0,7163	2,2098E-07
0,05	0,3244	262572,682	0,05	0,748	4,8333E-08
0,05	0,3432	36347,7657	0,05	0,7788	1,1726E-08
0,05	0,3617	5756,44768	0,05	0,8064	3,4535E-09
0,05	0,3797	1046,70009	Součet =		0,00016258 s
0,05	0,3974	211,489707			
0,05	0,4149	46,5985772			
0,05	0,4329	10,4950124			
0,05	0,4505	2,59119385			
0,05	0,4688	0,64050475			
0,05	0,4872	0,16582947			
0,05	0,5062	0,04329922			
0,05	0,5243	0,01261636			
0,05	0,5433	0,00361654			
0,05	0,562	0,00110266			
0,05	0,5812	0,00033912			
0,05	0,6016	0,00010104			
0,05	0,6211	3,2977E-05			
0,05	0,6414	1,0665E-05			
0,05	0,6614	3,6299E-06			
0,05	0,6816	1,2627E-06			
0,05	0,7037	4,1199E-07			
0,05	0,726	1,3782E-07			
0,05	0,7447	5,6447E-08			
0,05	0,7684	1,8796E-08			
0,05	0,7867	8,2278E-09			
0,05	0,8076	3,2779E-09			
	Součet =	3844461610 s			

6 Závěr

Cílem této práce bylo vytvoření 3D modelu šíření trhliny v keramických kompozitních materiálech, který by byl schopen popsat šíření trhliny při subkritickém růstu. V práci je vytvořeno několik modelů geometrie (s válcovou/kulovou částicí, bez residuálních napětí/s residuálními napětími), na kterých je model šíření trhliny testován. Ve 2D je model šíření trhliny dobře propracovaný a odzkoušený, proto je v práci vytvořen i 2D model, který slouží k porovnání výsledků.

Hlavním přínosem práce je právě vytvořený funkční 3D model šíření trhliny. Tvorba 3D modelu je komplikovaná z hlediska tvorby geometrie, odladění výpočtu součinitelů intenzity napětí K_I a K_{II} na čele trhliny, kvality sítě a také výpočetní náročnosti.

Pomocí vytvořeného modelu je v práci spočteno několik úloh. Byl sledován vliv volného povrchu a tvaru částice na průběh velikosti součinitele intenzity napětí K_I po tloušťce tělesa. V této úloze bylo čelo trhliny šířeno jako přímka. Největším přínosem je však vytvoření modelu, v kterém se čelo trhliny šíří jako po částech lineární křivka. Z těchto výsledků je krásně vidět, jak se trhlina „vlní“ okolo částice a mění se součinitele intenzity napětí K_I , K_{II} a úhel natočení trhliny po tloušťce tělesa. Tato úloha byla řešena bez i s vlivem residuálních napětí. Z výsledků je potom zcela patrný vliv residuálních napětí na průběh trhliny → případně residuálních napětí je trhlina mnohem více odpuzována od částice.

Z výsledků je vidět, že má smysl dále rozvíjet a vylepšovat 3D model. Další prací by mohlo být implementování vytvořeného modelu šíření trhliny do složitějšího modelu geometrie. Dále model upravit tak, aby se čelo trhliny nešířilo rovně, ale šířilo se v závislosti na velikosti součinitele intenzity napětí K_I (pomocí vyrovnávání K_I na čele trhliny). Zabývání se vylepšením 3D modelu, by mohlo vést k lepšímu pochopení selhávání sklo-keramických kompozitů a optimalizovat jejich pevnost a spolehlivost.

Seznam použitých zdrojů

- [1] Anderson T. L.: Fracture Mechanics, Fundamentals and Applications. CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [2] Vlk, M., Florián, Z., Mezní stavy a spolehlivost. Brno, 2007.
- [3] Vrbka, J., Mechanika kompozitů. Brno, 2008.
- [4] Kunz, J., Aplikovaná lomová mechanika. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2005.
- [5] Hutař, P., Náhlík, L., Základy lomové mechaniky. Dostupné z: <http://hutar.wz.cz/lomovka/08.pdf>
- [6] Sih, G. C., Methods of analysis and solutions of crack problems. Mechanics of Fracture. 1973, Sv. 1.
- [7] Erdogan F., Sih G. C., On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear. Journal of Basic Engineering, Vol. 85, 1963, 519-527.
- [8] Phan, A., V. Ansys tutorial – 2-D Fracture Analysis, University of South Alabama, 15s.
- [9] Sih G. C. Mechanics of Fracture Initiation and Propagation. Kluwer, The Netherlands, 1991.
- [10] Růžička, M., Jurenka, J., Hrubý, Z., Dynamická pevnost a životnost. Dostupné z: http://mechanika.fs.cvut.cz/content/files/DPZ/DPZ_2014_Jur03.pdf
- [11] Vláknové kompozitní materiály, jejich vlastnosti a výroba. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2007. Dostupné z: <http://docplayer.cz/4294044-Vlaknove-kompozitni-materialy-jejich-vlastnosti-a-vyroba.html>
- [12] Dubnikova I. L., Berezina S. M., Antonov A.V.: Effect of rigid particle size on the Toughness of Filled polypropylene, Journal of Applied Science, Vol. 94, 2004, p. 1917-1926
- [13] Kosina, P., Šandera, J., Hejátková, E. Perspektiva LTCC technologie. Bulletin of SMT/ISHM Int. Conference "New Trends in Microelectronics", 2009, roč. 2009, č. 64, s. 4-5. ISSN: 1211- 6947.
- [14] Pietriková, A., Somora, M., Vývojové trendy materiálů pre hrubé vrstvy, Košice, 1998. ISBN 80-7099-316-2.
- [15] Majer, Z., M. Pletz, C. Krautgasser, L. Náhlík, P. Hutař a R. Bermejo. Numerical Analysis of Sub-critical Crack Growth in Particulate Ceramic Composites. Procedia Materials Science [online]. 2014, 3, 2071-2076 [cit. 2016-11-02]. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.335. ISSN 22118128. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2211812814003368>
- [16] Physicochemical Aspect of Mineral Components for Plastics Processors (Review), Technology Plastics, Omya AG, Oftringen, Switzerland, Dostupné z: www.omya.com
- [17] H. A. Richard, M. Fulland og M. Sander, »Theoretical Crack Path Prediction«, Blackwell Publishing, 2004.

- [18] Atkinson B K, 1984. Subcritical crack growth in geological materials. *J. Geophys. Res.*, 89: p. 4077- 4114.
- [19] Atkinson B K, 1987. *Fracture Mechanics of Rock*. Contributions ed. by Atkinson. Academic Press, Geology Series, London.
- [20] Wu X., Li X.: Analysis and modification of fracture criteria for mixed mode crack. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 34, 1989, 55-64.
- [21] Theocaris P. S., Kardomateas G. A., Andrianopoulos N. P.: Experimental study of the T-criterion in ductile fractures. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 17, 1982, 439-447.
- [22] Ondráček, E., J. Vrbka, P. Janíček a J. Burša. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost II. 4. přeprac. vyd.* Brno: CERM, 2006, 262 s. ISBN 80-214-3260-8.
- [23] Murakami, Y. and Co-editors: *Stress intensity factors handbook*, Vol. 1, The Society of Mat. Science & Elsevier Science, 1987
- [24] Murakami, Y. and Co-editors: *Stress intensity factors handbook*, Vol. 2, The Society of Mat. Science & Elsevier Science, 1987
- [25] Majer, Z., et al. Residual Lifetime Determination of Low Temperature Co-Fired Ceramics. In: *Key Engineering Materials*. Trans Tech Publications, 2016. p. 266-269.
- [26] Hutař, P., Náhlík, L., Lineárně elastická lomová mechanika (K koncepce). Dostupné z: <http://hutar.wz.cz/lomovka/09.pdf>
- [27] Hutař, P., Náhlík, L., Elasto plastická lomová mechanika (J-integrál). Dostupné z: <http://hutar.wz.cz/lomovka/10.pdf>
- [28] Sglavo V.M., Green D.J., Indentation Determination of Fatigue Limits in Silicate Glasses, *J. Am. Ceram. Soc.* 82 (1999) 1269-1274
- [29] Bermejo R., Supancic P., Subcritical crack growth in Low Temperature Co-fired Ceramics under biaxial loading, *Engineering Fracture Mechanics* 100 (2013) 108–121
- [30] ANSYS® User's Manual, 2010. Release 13.0. SAS IP, Inc.

Seznam použitých zkratek a symbolů

a	délka trhliny
a_i	počáteční délka trhliny
A	materiálová konstanta subkritického růstu
B	materiálová konstanta subkritického růstu
da	přírůstek trhliny
ds	přírůstek délky
dS	přírůstek plochy
dt	přírůstek času
$d\Gamma$	přírůstek disipační energie
$d\Pi$	přírůstek potenciální energie
dW_T	přírůstek práce spojené se vznikem nových ploch
dE_c	přírůstek celkové energie
E	modul pružnosti v tahu
E_c	celková energie
G	hnací síla trhliny
G_c	kritická hodnota hnací síly trhliny
G^*	smykový modul pružnosti
I	interakční integrál
J	J-integrál
K_I, K_{II}, K_{III}	součinitele intenzity napětí pro mód I, II a III
$K_I^{aux}, K_{II}^{aux}, K_{III}^{aux}$	pomocné součinitele intenzity napětí pro mód I, II a III
K_{Ic}	lomová houževnatost
K_{th}	prahová hodnota součinitele intenzity napětí
$LTCC$	nízkoteplotně vypalovaná keramika
n	exponent pro subkritický růst trhliny
q_i	vektor prodloužení trhliny
R	odpor proti růstu trhliny
R_e	mez kluzu
r_p	poloměr plastické zóny na čele trhliny s redistribucí napětí
r_y	poloměr plastické zóny na čele trhliny bez redistribuce napětí
S	faktor hustoty deformační energie
$SCCG$	subkritický růst trhliny
t	čas
u_1, u_2	posuvy v ose x
v_1, v_2	posuvy v ose y
v	rychlost růstu trhliny
W_T	práce spojená s přírůstkem nových ploch
$Y\left(\frac{a}{b}\right)$	korekční funkce
σ_{appl}	aplikované napětí
σ_{ij}	tenzor napětí
$\sigma_{\theta\theta}$	tangenciální napětí
σ_{xx}	x-ová složka tenzoru napětí
σ_{yy}	y-ová složka tenzoru napětí
σ_{zz}	z-ová složka tenzoru napětí

τ_{xy}	smyková složka tenzoru napětí
τ_{yz}	smyková složka tenzoru napětí
ε_{ij}	tenzor přetvoření
ν	Poissonův poměr

Seznam obrázků

Obrázek 2.1: Schéma dvousložkového kompozitu.....	14
Obrázek 2.2: Velikostní faktor.	14
Obrázek 2.3: Struktura LTCC před výpalem (vlevo) a po výpalu (vpravo).	15
Obrázek 3.1: Definice polárního souřadného systému na čele trhliny [1].....	18
Obrázek 3.2: Tři módy zatěžování.....	18
Obrázek 3.3: Centrální trhlina.....	21
Obrázek 3.4: Trhlina na kraji.	21
Obrázek 3.5: Určení součinitele intenzity napětí přímou metodou (extrapolací).	23
Obrázek 3.6: Plastická zóna bez redistribuce napětí.....	24
Obrázek 3.7: Plastická zóna s redistribucí napětí.....	25
Obrázek 3.8: Integrovaná cesta J-integrálu.....	28
Obrázek 3.9: Posuvy u vrcholu trhliny.	31
Obrázek 3.10: Znaménka úhlu trhliny v závislosti na K_{II}	31
Obrázek 3.11: Lokální systémy pro výpočet KCALC.....	32
Obrázek 3.12: Zobrazení uzlů.	33
Obrázek 4.1: Koroze pod napětím.....	34
Obrázek 5.1: 2D výpočtový model geometrie.....	37
Obrázek 5.2: 3D výpočtový model geometrie s válcovou částicí.....	37
Obrázek 5.3: 3D výpočtový model geometrie s kulovou částicí.....	38
Obrázek 5.4: Čelo trhliny.	39
Obrázek 5.5: Síť 2D vzorku a detail mapované sítě v okolí čela trhliny.....	39
Obrázek 5.6: Síť 3D vzorku a detail mapované sítě v okolí čela trhliny.....	40
Obrázek 5.7: Výsledná trhlina ve 2D	43
Obrázek 5.8: Výsledná trhlina ve 3D.	44
Obrázek 5.9: Průběh K_I ve 2D a ve 3D.....	44
Obrázek 5.10: Průběh K_{II} ve 2D a ve 3D.....	45
Obrázek 5.11: Průběh úhlu trhliny ve 2D a ve 3D.....	45
Obrázek 5.12: Porovnání K_I ve všech pěti vrstvách.	46
Obrázek 5.13: Porovnání K_{II} ve všech pěti vrstvách.	46
Obrázek 5.14: Okrajové podmínky u 3D modelu s válcovou částicí.....	47
Obrázek 5.15: Výsledná trhlina 3D (válcová částice).	48
Obrázek 5.16: Průběh čela trhliny v jednotlivých krocích (válcová částice).....	48
Obrázek 5.17: Průběh K_I a úhlu θ v závislosti na počáteční délce trhliny a_i	50
Obrázek 5.18: Okrajové podmínky u 3D modelu s kulovou částicí.....	51
Obrázek 5.19: Výsledná trhlina 3D (kulová částice).	52
Obrázek 5.20: Průběh čela trhliny v jednotlivých krocích (kulová částice).	52
Obrázek 5.21: Symetrie u 3D modelu s kulovou částicí.	54
Obrázek 5.22: Výsledný průběh trhliny bez residuálních napětí.....	55
Obrázek 5.23: Trhlina pod částicí (největší rozdíl v úhlu natočení).	55
Obrázek 5.24: Výsledný průběh trhliny s residuálními napětími.	57
Obrázek 5.25: Trhlina v místě pod částicí.	57
Obrázek 5.26: 3D model pro subkritický růst trhliny.	59
Obrázek 5.27: Porovnání trhlín při subkritickém růstu.	60

Seznam příloh

2D_CINT	.txt
2D_KCALC	.txt
3D_VALCOVA_RN_KCALC	.txt
3D_VALCOVA_ROVNE_CINT	.txt
3D_KULOVA_ROVNE_CINT	.txt
3D_KULOVA_NEROVNE_RN_KCALC	.txt
3D_KULOVA_NEROVNE_KCALC	.txt