VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA PODNIKATELSKÁ

FACULTY OF BUSINESS AND MANAGEMENT

ÚSTAV INFORMATIKY

INSTITUTE OF INFORMATICS

# SOUSTAVY POLYNOMIÁLNÍCH ROVNIC V EKONOMII

SYSTEMS OF POLYNOMIAL EQUATIONS IN ECONOMICS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Kristína Šramková

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. RNDr. Miroslav Kureš, Ph.D.

BRNO 2016

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta podnikatelská

Akademický rok: 2015/2016
Ústav informatiky

# ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

## Šramková Kristína

Matematické metody v ekonomice (6207R005)

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách, Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně a Směrnicí děkana pro realizaci bakalářských a magisterských studijních programů zadává bakalářskou práci s názvem:

**Soustavy polynomiálních rovnic v ekonomii**

v anglickém jazyce:

**Systems of Polynomial Equations in Economics**

Pokyny pro vypracování:

Úvod
Cíle práce, metody a postupy zpracování
Teoretická východiska práce
Analýza současného stavu
Vlastní návrhy řešení
Závěr
Seznam použité literatury

Podle § 60 zákona č. 121/2000 Sb. (autorský zákon) v platném znění, je tato práce "Školním dílem". Využití této práce se řídí právním režimem autorského zákona. Citace povoluje Fakulta podnikatelská Vysokého učení technického v Brně.

Seznam odborné literatury:

DOKTOROVÁ, A. Gröbnerovy báze, Čuang-c’ův algoritmus a ataky multivariačních kryptosystémů. Diplomová práce, VUT Brno, 2013.
ROCZEN, M. First steps with Gröbner bases. Combinatorics in algebra and geometry. Eforie, 1998. Sem. Ser. Math. Algebra, 2, "Ovidius" Univ. Constanța, Constanța, str. 33-47, 1999.
SERRANO, R. a A. M. FELDMAN. A Short Course in Intermediate Microeconomics with Calculus. Cambridge Univ. Press, 2012. ISBN 978-1107017344.
SCHMEDDERS, K. a K.L. JUDD. Handbook of Computational Economics. Oxford, North Holland, 2014. ISBN 978-0-444-52980-0.

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Miroslav Kureš, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/2016.

L.S.

| | |
|---|---|
| doc. RNDr. Bedřich Půža, CSc.<br>Ředitel ústavu | doc. Ing. et Ing. Stanislav Škapa, Ph.D.<br>Děkan fakulty |

V Brně, dne 29.2.2016

**Abstrakt**

Bakalárska práca je založená na aplikácii matematického aparátu pri analýze ekonomických modelov, konkrétne modelov, ktoré vedú na sústavu polynomiálnych rovníc. Jednou z častí je súhrn základných poznatkov z oblasti algebry s orientáciou na Gröbnerove bázy. V ďalšom texte sú rozobraté ekonomické modely, pri ktorých riešení sú Gröbnerove bázy aplikované s využitím programu *Wolfram Mathematica*. Do tohto prostredia je takisto implementovaný vlastný programový balík ako návrh riešenia na zjednodušenie výpočtu a práce s modelmi.

**Abstract**

Bachelor thesis is based on application of mathematical apparatus for the analysis of economic models, in particular models that lead to a system of polynomial equations. One of the parts is a summary of basic knowledge of algebra focused on Gröbner basis. Hereinafter are discussed economic models in which solution Gröbner basis are applied using the program *Wolfram Mathematica*. Own software package is implemented into this program as a concept of solution to simplify the calculation and work with models.

**kľúčové slová**

Gröbnerova báza, Nashova rovnováha, Závod v zbrojení, Arrow-Debreuova rovnováha, *Wolfram Mathematica*

**key words**

Gröbner basis, Nash equilibrium, Arms Race, Arrow-Debreu equilibrium, *Wolfram Mathematica*

**Bibliografická citácia**

ŠRAMKOVÁ, K.: *Soustavy polynomiálních rovnic v ekonomii*, Brno, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta podnikatelská, 2016. 82 s. Vedoucí bakalářské práce doc. RNDr. Miroslav Kureš, Ph.D..

**Čestné prehlásenie**

Prehlasujem, že predložená bakalárska práca je pôvodná a spracovala som ju samostatne. Prehlasujem, že citácie použitých prameňov sú úplné, že som v svojej práci neporušila autorské práva (v zmysle Zákona č. 121/2000 Sb., o práve autorskom a o právach súvisiacich s právom autorským).

V Brne dňa 31.mája 2016

................................

Kristína Šramková

**Poďakovanie**

Rada by som poďakovala vedúcemu mojej bakalárskej práce doc. RNDr. Miroslavovi Kurešovi, Ph.D. za odborné vedenie, cenné rady a podnetné pripomienky, ktorými prispel k vypracovaniu tejto práce.

# Obsah

# ÚVOD

Človek má od nepamäti svoje potreby. V praveku, keď stál vývoj ľudstva na samotnom počiatku, boli tieto potreby veľmi jednoduché, ako aj človek sám. Postupom času sa ľudský druh menil a spoločne s ním sa menili aj jeho potreby. V dnešnej dobe sú naše potreby rozmanité, dokonca až natoľko, že sa niekedy nevieme rozhodnúť, ako medzi ne budeme alokovať svoje zdroje. Práve tento aspekt ľudského správania sa ekonómia snaží popísať prostredníctvom ekonomických modelov. Pokúša sa nájsť optimum, celkovú rovnováhu medzi potrebami a zdrojmi, medzi úžitkom a kapitálom.

Ekonomické modely sú veľmi subjektívnymi popismi reality, avšak jednu vec majú všetky spoločnú, ekonomické správanie popisujú prostredníctvom matematického aparátu. Slovným alebo grafickým popisom totižto nie je možné dosiahnuť natoľko exaktné vyjadrenie, matematické symboly sú akýmsi univerzálnym jazykom v každej časti sveta.

V tejto bakalárskej práci sa budem zaoberať rozborom modelov, ktorých popis je realizovaný pomocou sústavy polynomiálnych rovníc. Cieľom bude okrem klasických metód riešenia takýchto sústav, predstaviť najmä trochu netradičnú metódu Gröbnerovej bázy. Na zavedenie tejto metódy budem využívať poznatky z oblasti algebry. Po tejto rýdzo matematickej časti práce sa pokúsim premostiť získané poznatky s už spomínanými ekonomickými modelmi.

Hoci ekonomické modely predstavujú zjednodušený popis reality, rovnice, ktoré tento popis realizujú sú pomerne zložité. Cieľom bude odvodenie modelov obohatiť o vlastné postrehy a príklady, ktorými by som chcela čitateľovi model priblížiť a rovnako aj pomôcť interpretovať získané výsledky.

Hlavným cieľom práce je vytvorenie vlastného algoritmického riešenia vybraných ekonomických modelov. Získané poznatky z predchádzajúcich častí budú zhrnuté do návrhu riešenia rozobratej problematiky. Spomínaný návrh bude implementovaný do matematického prostredia *Wolfram Mathematica*. Výstupom práce bude vlastný programový balík, ktorý zabezpečí realizáciu výpočtov, ako aj interpretáciu obdržaných výsledkov. Súčasne bude práca slúžiť aj ako detailný manuál pre používateľa balíku, rozšírený o príklady ilustrujúce prácu s programom.

# CIELE PRÁCE, METÓDY A POSTUPY SPRACOVANIA

## Ciele práce

Hlavným cieľom tejto práce je oboznámenie čitateľa so základným matematickým aparátom, ktorý je potrebný pri problematike Gröbnerovych báz. Snahou je teoretický základ nielen popísať, ale aj vysvetliť na konkrétnych príkladoch. Ďalším cieľom je matematické poznatky aplikovať v ekonómii na príslušných ekonomických modeloch a tiež výsledky vhodne interpretovať.

Na záver práce je cieľom samostatne navrhnúť algoritmus, ktorý vybrané modely vypočíta pre rôzne vstupné hodnoty a používateľovi pomôže s interpretáciou získaných výsledkov. Táto práca slúži takisto ako detailný manuál k použitiu spomínaného algoritmu.

## Metódy a postupy spracovania

Pri spracovávaní problematiky aplikácie Gröbnerovych báz na ekonomické modely bolo na začiatku potrebné vymedziť a naštudovať si teoretický základ z oblasti algebry, so zameraním na okruhy, usporiadanie multiindexov a následne samotné Gröbnerove bázy. Ďalším krokom bola analýza troch vybraných ekonomických modelov, ktorej výsledkom bolo zostavenie sústavy rovníc pre každý model a definovanie príslušných obmedzení výpočtu.

Ďalším krokom spracovania bolo spojenie získaných poznatkov a rozborov, výsledkom bola aplikácia matematických metód na nájdenie rovnováhy ekonomických modelov. Poslednou časťou bola programová realizácia v software *Wolfram Mathematica*, ktorej tvorbou boli zhrnuté poznatky z predchádzajúcej analýzy za využitia naštudovaného teoretického základu.

# 1 TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ PRÁCE

V tejto kapitole zavedieme základné pojmy, s ktorými budeme v práci ďalej pracovať. Začneme vymedzením znalostí z oblasti všeobecnej algebry, najmä problematiky týkajúcej sa okruhov a ideálov. Ďalej sa zameriame na pojmy ako sú *monóm* a *polynóm*, pri ktorých zavedieme tiež ich rôzne usporiadania, pre lepšiu predstavu pridáme aj niekoľko vysvetľujúcich príkladov. Kľúčovým bude zavedenie pojmu *Gröbnerova báza*, o ktorý sa bude opierať celá práca.

V neposlednom rade sa pokúsime podrobne rozobrať problematiku nelineárnych rovníc, kde sa zameriame na výpočet koreňov kvadratickej a kubickej rovnice a hlavne na riešenie sústav rovníc. Pri sústavách rovníc bude hlavným prvkom práve aplikácia Gröbnerovej bázy na ich zjednodušenie a následný výpočet.

## 1.1 Okruhy a ideály

Prvá časť kapitoly bude venovaná teoretickému základu z algebraickej problematiky okruhov a ideálov. Definujeme tieto pojmy a tiež niektoé ich vlastnosti.

**Definícia 1.1.** Nech $R = (R, +, .)$ je neprázdna množina s dvomi operáciami $+$ a $.$ . $R$ sa nazýva *okruh*, ak platí: [1]

(i) $(R, +)$ je komutatívna grupa

(ii) $(R, .)$ je pologrupa

(iii) platia tzv. distributívne zákony (pravý a ľavý distributívny zákon):

$$a, b, c \in R \Longrightarrow a.(b + c) = a.\,b \; + \; a.\,c,$$
$$(b + c).\,a = b.\,a \; + \; c.\,a$$

**Poznámka.** Neutrálny prvok grupy $(R, +)$, inými slovami nulový prvok komutatívnej grupy$(R, +)$, sa väčšinou označuje $0_R$ a nazýva sa *nulový prvok (nula* okruhu $R$. [1]

**Tvrdenie 1.2.** *Ak $R$ je okruh, potom pre každý prvok $r$ okruhu $R$ platí: [1]*

$$0_R.r = r.0_R = 0_R.$$

**Definícia 1.3.** Nech $R$ je okruh. Ak pologrupa $(R, .)$ je komutatívna, potom $R$ nazývame *komutatívny okruh*. Ak má pologrupa $(R, .)$ jedničku rôznu od nulového prvku, nazýva sa $R$ *okruh s jedničkou*. Jednička pologrupy $(R, .)$ sa označuje $1_R$ a nazýva sa *jednička okruhu* $R$. [1]

**Príklad 1.4.** Príkladom komutatívneho okruhu sú množiny celých čísel $\mathbb{Z}$, reálnych čísel $\mathbb{R}$ alebo komplexných čísel $\mathbb{C}$.

Ďalším príkladom, ktorý nás bude ďalej zaujímať je okruh polynómov s neurčitou $x$ nad poľom $F$, označujeme $F[x]$. Takýmto polynómom rozumieme výraz $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, kde koeficienty $a_0, a_1, ..., a_n$ sú z poľa $F$ a $n$ je nezáporné celé číslo.

**Definícia 1.5.** Nech $R$ je komutatívny okruh. Potom podmnožina $I \subseteq R$ je *ideál*, ak spĺňa nasledujúce podmienky: [2]

(i) $0 \in I$,

(ii) ak $a, b \in I$, potom $a + b \in I$,

(iii) ak $a \in I, b \in R$, potom $b.a \in I$.

**Definícia 1.6.** *Monómom* nazveme výraz

$$x_1^{\alpha_1} \,.\, x_2^{\alpha_2} \,...\, x_n^{\alpha_n},$$

kde všetky exponenty $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sú nezáporné celé čísla. [2]

**Poznámka.** Zápis monómu môžeme zjednodušiť zavedením $n$-tice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Potom zapíšeme:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \,.\, x_2^{\alpha_2} \,...\, x_n^{\alpha_n}.$$

Keď $\alpha = (0, ..., 0)$, potom $x^\alpha = 1$. Tiež zavedieme $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$. [2]

**Definícia 1.7.** *Polynómom* $f$ premenných $x_1, ..., x_n$ s koeficientmi z $F$ nazveme konečnú lineárnu kombináciu monómov. Zapíšeme: [2]

$$f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in F$$

**Definícia 1.8.** Pre $\mu, \nu \in \mathbb{N}^n$ definujeme *lexikografické usporiadanie*
$\mu <_{lex} \nu \Leftrightarrow$ existuje $j \in 1, ..., n$ také, že $\mu_j < \nu_j$ a pre všetky $i < j$ je $\mu_i = \nu_i$. [3]

**Príklad 1.9.** Lexikografické usporiadanie.
$(1, 4, 3) <_{lex} (2, 0, 1)$, pretože existuje $j$ také, že $\mu_j < \nu_j$ a pre všetky $i < j$ je $\mu_i = \nu_i$, v tomto prípade $j = 1$
$(3, 2, 4) <_{lex} (3, 3, 0)$, v tomto prípade $j = 2$
$(2, 1, 1) <_{lex} (2, 1, 2)$, v tomto prípade $j = 3$

**Definícia 1.10.** Pre $\mu, \nu \in \mathbb{N}^n$ definujeme *gradované lexikografické usporiadanie*
$\mu <_{deglex} \nu \Leftrightarrow |\mu| < |\nu|$ alebo $|\mu| = |\nu|$ a zároveň $\mu <_{lex} \nu$.[3]

**Príklad 1.11.** Gradované lexikografické usporiadanie.
$(2, 0, 1) <_{deglex} (1, 0, 3)$, pretože $|(2, 0, 1)| = 3 < |(1, 0, 3)| = 4$ ,
$(1, 2, 1) <_{deglex} (1, 3, 0)$, pretože $|(1, 2, 1)| = |(1, 3, 0)| = 4$ a $(1, 2, 1) <_{lex} (1, 3, 0)$

**Definícia 1.12.** Pre $\mu, \nu \in \mathbb{N}^n$ definujeme *gradované obrátené lexikografické usporiadanie*
$\mu <_{degrevlex} \nu \Leftrightarrow |\mu| < |\nu|$ alebo $|\mu| = |\nu|$ a zároveň existuje $j \in 1, ..., n$ také, že $\mu_j > \nu_j$ a pre všetky $i > j$ je $\mu_i = \nu_i$. [3]

**Príklad 1.13.** Gradované obrátené lexikografické usporiadanie.
$(4, 0, 2) <_{degrevlex} (1, 5, 3)$, pretože $|(2, 0, 1)| = 6 < |(1, 0, 3)| = 9$ ,
$(5, 3, 1) <_{degrevlex} (6, 2, 1)$, pretože $|(5, 3, 1)| = |(6, 2, 1)| = 9$ a existuje $j$ také, že $\mu_j > \nu_j$
a pre všetky $i > j$ je $\mu_i = \nu_i$, v tomto prípade $j = 2$

**Príklad 1.14.** Na tomto príklade názorne ukážeme rozdiel medzi jednotlivými monomiálnymi usporiadaniami.
Majme monómy $(2, 1, 1), (0, 5, 0), (2, 0, 2), (1, 2, 1), (1, 1, 2)$. Potom usporiadania vyzerajú nasledovne:

LEX: $(0, 5, 0) <_{lex} (1, 1, 2) <_{lex} (1, 2, 1) <_{lex} (2, 0, 2) <_{lex} (2, 1, 1)$

DEGLEX: $(1, 1, 2) <_{deglex} (1, 2, 1) <_{deglex} (2, 0, 2) <_{deglex} (2, 1, 1) <_{deglex} (0, 5, 0)$

DEGREVLEX: $(1, 1, 2) <_{degrevlex} (2, 0, 2) <_{degrevlex} (1, 2, 1) <_{degrevlex} (2, 1, 1) <_{degrevlex} (0, 5, 0)$

**Definícia 1.15.** Nech $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ je nenulový polynóm v $k = [x_1, ..., x_n]$ a nech $>$ je monomiálne usporiadanie. Potom: [2]

(i) *multistupeň* polynómu $f$ definujeme $multideg(f) = max\,\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : a_\alpha \neq 0\}$

(ii) *vedúci koeficient* polynómu $f$ definujeme $lc(f) = a_{multideg(f)}$

(iii) *vedúci monóm* polynómu $f$ definujeme $lm(f) = x^{multideg(f)}$

(iv) *vedúci člen* polynómu $f$ definujeme $lt(f) = lc(f)lm(f)$

**Príklad 1.16.** Uvažujme polynóm $f = 8x^2yz^3 - 5y + z^2 - 2x^4z + 4x^3y + 11x$ a lexikografické usporiadanie. Potom

$$multideg(f) = (4, 0, 1), \quad lc(f) = -2, \quad lm(f) = x^4z, \quad lt(f) = -2x^4z.$$

**Definícia 1.17.** Ideál $in_<(I)$ generovaný všetkými vedúcimi členmi nenulových polynómov, zapíšeme $lt(f), f \in I - \{0\}$, sa nazýva *počiatočný ideál* ideálu $I$. [3]

**Poznámka.** Počiatočný ideál závisí na zvolenom usporiadaní.[3]

**Definícia 1.18.** Nech $f_1, ..., f_s \in I - \{0\}$. *Gröbnerovou bázou* ideálu $I$ rozumieme bázu s vlastnosťou $in(I) = \langle lt(f_1), ..., lt(f_s)\rangle$ [4]

**Definícia 1.19.** Gröbnerova[1] báza sa nazýva *redukovaná*, ak pre všetky rôzne $p, q \in G$ platí, že žiadny monóm, ktorý sa vyskytuje v $p$ nie je násobkom $lt(q)$. [5]

## 1.2 Nelineárne rovnice

V matematike môžeme rozlíšiť dva typy rovníc, prvým sú lineárne rovnice, tie sa vyznačujú tým, že neznáma nemá mocninu. Druhým typom sa budeme zaoberať práve v tejto podkapitole, kde ich všeobecne zavedieme, tiež uvedieme špeciálne prípady a metódy ich riešenia. Ďalej sa taktiež budeme venovať sústavám nelineárnych rovníc a rovnako aj ich riešením, zameriame sa na metódu Gröbnerovej bázy.

---

[1] Wolfgang Gröbner (1899-1980), rakúsky matematik, teória Gröbnerovych báz je podľa neho pomenovaná, hoci bola skonštruovaná jeho žiakom Brunom Buchbergerom, ktorý tút teóriu pomenoval po svojom učiteľovi

### 1.2.1 Jedna rovnica

Táto kapitola je inšpirovaná [6].

Všeobecný zápis rovnice $n$-tého stupňa (kde $n$ je kladné celé číslo) je nasledovný:

$$a_0x^n \ + \ a_1x^{n-1} \ + \ \dots \ + \ a_{n-1}x \ + \ a_n \ = \ 0, \tag{1.1}$$

kde koeficienty $a_0, \ a_1, \ \dots, \ a_{n-1}, \ a_n$ sú komplexné čísla a vedúci koeficient $a_0$ je nenulový. Taktiež neznámu $x$ hľadáme z oboru komplexných čísel $\mathbb{C}$.

Pri vyššie uvedenom zápise rovnice sa predpokladá, že túto rovnicu máme vypočítať. To znamená, nájsť číselné hodnoty neznámej $x$, ktoré rovnicu spĺňajú, inými slovami, po dosadení tejto hodnoty za neznámu $x$ v rovnici (1.1) a následnými úpravami rovnice, dostaneme na ľavej strane rovnice číslo $0$.

Na ľavej strane rovnice (1.1) sa nachádza člen:

$$a_0x^n \ + \ a_1x^{n-1} \ + \ ... \ + \ a_{n-1}x \ + \ a_n,$$

ktorý sa nazýva *polynóm $n$-tého stupňa* neznámej $x$. Polynómom teda nazveme sumu celočíselných nezáporných mocnín neznámej $x$ s príslušnými číselnými koeficientmi. Predovšetkým za polynóm nepovažujeme výraz, ktorý obsahuje záporné, alebo neceločíselné mocniny neznámej, ako napríklad $x + \frac{2}{x^3} - 4$ alebo $3x^{-2} - 2x^{-1} + 8$.

Prirodzene, existujú polynómy $n$-tého stupňa pre všetky prirodzené čísla $n$, pre niektoré z nich používame špeciálne označenie, ako napríklad polynómy prvého stupňa alebo tiež lineárne, ďalej kvadratické, kubické atď.

Ak pre polynóm $f(x)$ existuje číslo $c$ také, že platí $f(c) = 0$, potom číslo $c$ sa nazýva *koreň* polynómu $f(x)$. Zo skúseností vieme, že nie každý polynóm s reálnymi koeficientmi má aj reálne korene, napríklad $x^2 + 1$, ktorého korene sú komplexné čísla. Mohli by sme očakávať, že existujú polynómy, ktoré nemajú koreň ani v obore komplexných čísel. Tento problém však rieši *základný teorém algebry komplexných čísel*, ktorý znie nasledovne.

**Teorém 1.20.** *Základný teorém algebry komplexných čísel*
*Každý polynóm aspoň prvého stupňa s ľubovoľnými číselnými koeficientmi má aspoň jeden koreň, ktorý je vo všeobecnosti komplexný.*

Teorém síce hovorí o existencii koreňov, avšak nenaznačuje žiadnu metódu, ktorou by sme tieto korene mohli nájsť. Pre rovnice druhého, tretieho a štvrtého stupňa sú známe univerzálne vzorce pre ich výpočet. Teraz si ukážeme postup ich odvodenia.

**Kvadratická rovnica.** Uvažujme kvadratickú rovnicu, teda rovnicu tvaru

$$x^2 \ + \ px \ + q \ = \ 0, \tag{1.2}$$

s ľubovoľnými komplexnými koeficientmi. Vedúci koeficient môžeme uvažovať ako jednotku bez straty všeobecnosti tohto odvodenia, v prípade, že by bol rôzny od jednotky, rovnicu by sme predelili jeho hodnotou. Túto rovnicu môžeme tiež zapísať ako

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=0,$$

po úprave

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Z tejto rovnice už môžeme vidieť, že korene kvadratickej rovnice vypočítame podľa známeho vzorca

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

**Príklad 1.21.** Uvažujme kvadratickú rovnicu $3x^2+6x+18-36i=0$.
Obe strany rovnice podelíme číslom 3 a dostaneme základný tvar:

$$x^2+2x+6-12i=0$$

S použitím vzorca odvodeného vyššie dostaneme:

$$x=-\frac{2}{2}\pm\sqrt{\frac{4}{4}-(6-12i)}=1\pm\sqrt{-5+12i}.$$

Ďalej si vyjadríme korene komplexného čísla pod odmocnicou

$$\sqrt{-5+12i}=\pm(2+3i)$$

Nakoniec sme vypočítali riešenie zadanej rovnice, sú ním korene

$$x_1=-3-3i \quad x_2=1+3i.$$

**Kubická rovnica.** Uvažujme kubickú rovnicu, teda rovnicu tvaru

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0, \tag{1.3}$$

s ľubovoľnými komplexnými koeficientmi. V rovnici (1.3) nahradíme neznámu $y$ novou neznámou $x$, pre ktorú platí

$$y = x - \frac{a}{3} \tag{1.4}$$

po dosadení dostaneme kubickú rovnicu s jednou neznámou $x$, ktorá však už neobsahuje druhú mocninu neznámej

$$x^3 + px + q = 0. \tag{1.5}$$

Ak nájdeme korene rovnice (1.5), potom spätným dosadením substitúcie (1.4) dostaneme tiež korene pôvodnej rovnice (1.3). Podľa základného teorému vieme, že rovnica (1.5) má tri komplexné korene. V nasledujúcich krokoch by sme si zaviedli nové neznáme, využili Vietove[2] vzorce a substitúciu. Nakoniec by sme došli ku známemu *Cardanovmu*[3] *vzorcu*, ktorý vyjadruje korene rovnice (1.5)

$$x_o = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{1.6}$$

kde $\alpha$ a $\beta$ sú nasledujúce tretie odmocniny výrazov

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{1.7}$$

Keďže kubická rovnica má tri korene v obore komplexných čísel, vzťahy (1.7) poskytujú tri hodnoty pre $\alpha$, ako aj tri hodnoty pre $\beta$. To je 9 možných kombinácií, avšak z týchto kombinácií budú vhodné len tri, ktoré budú spĺňať isté podmienky stanovené v predchádzajúcej časti odvodenia, ktorú sme kvôli zložitosti vynechali. Konečné vzťahy pre výpočet sú nasledujúce

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \beta_1 \\ x_2 &= \alpha_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon^2 \\ x_3 &= \alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1\varepsilon, \end{aligned}$$

[2]François Viète (1540-1603), francúzsky matematik, zaviedol písmenkové označenie neznámych veličín, vďaka ktorému bolo umožnené popísanie koreňov rovníc univerzálnym spôsobom

[3]Gerolamo Cardano (1501-1576), taliansky matematik, ktorý uverejnil všeobecné vzťahy na výpočet koreňov kubickej rovnice

kde $\alpha_1$ je ľubovoľná z troch hodnôt koreňa $\alpha$, potom $\beta_1$ je tá hodnota koreňa $\beta$, ktorá zodpovedá hodnote $\alpha_1$ na základe podmienky $\alpha\beta = -\frac{p}{3}$. A $\varepsilon$ je treťou odmocninou jedničky $\varepsilon^3 = 1$, kde zo všeobecného vzťahu pre $n$-tý koreň jedničky

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

jednoducho ukážeme, že platí

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Príklad 1.22.** Uvažujme kubickú rovnicu $y^3 - 6y^2 - 6y - 7 = 0$
Použitím substitúcie: $y = x - \frac{-6}{3} = x + 2$ dostaneme nasledujúci tvar rovnice, ktorá neobsahuje kvadratický člen:

$$x^3 - 18x - 35 = 0$$

Ďalej vypočítame $\alpha$ a $\beta$ dosadím do vzťahov (1.7)

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{\frac{35}{2} + \sqrt{\frac{35^2}{4} - \frac{18^3}{27}}} = 3$$
$$\beta_1 = \sqrt[3]{\frac{35}{2} - \sqrt{\frac{35^2}{4} - \frac{18^3}{27}}} = 2$$

Dopočítame aj zvyšné $\alpha_2 = \alpha_1\varepsilon$, $\alpha_3 = \alpha_1\varepsilon^2$, $\beta_2 = \beta_1\varepsilon$, $\beta_3 = \beta_1\varepsilon^2$, kde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Dostaneme nasledujúce výsledky

$$\alpha_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$
$$\alpha_3 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$
$$\beta_2 = -1 + \sqrt{3}i$$
$$\beta_3 = -1 - \sqrt{3}i.$$

Teraz dosadíme vypočítané $\alpha$ a $\beta$ do rovníc pre výpočet koreňov

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1 = 5$$
$$x_2 = \alpha_2 + \beta_3 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$x_3 = \alpha_3 + \beta_2 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Avšak toto sú korene rovnice po použití substitúcie, takže ich musíme spätne substituovať, aby sme dostali korene pôvodne zadanej rovnice. Substitúciu uskutočníme dosadením do vzťahu $y = x + 2$. Dostávame hľadané riešenie rovnice, teda 3 korene $y_1, y_2$ a $y_3$.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 7 \\
y_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \varepsilon \\
y_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = \varepsilon^2
\end{aligned}
$$

**Kvartická rovnica.** Uvažujme kvartickú rovnicu, teda rovnicu tvaru

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0, \tag{1.8}$$

s ľubovoľnými komplexnými koeficientmi. Podobne ako pri kubickej rovnici, použijeme najskôr substitúciu

$$y = x - \frac{a}{4}, \tag{1.9}$$

po dosadení do (1.8) dostaneme rovnicu, ktorá neobsahuje tretiu mocninu neznámej

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{1.10}$$

Ďalej by sme postupovali pomocou substitúcií a rôznych úprav. Nakoniec, po úpravách sa dostaneme dve kvadratické rovnice, ktoré už vieme vyriešiť

$$
\begin{aligned}
x^2 - \sqrt{2\alpha_0}x + \left(\frac{p}{2} + \alpha_0 + \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right) &= 0 \\
x^2 + \sqrt{2\alpha_0}x + \left(\frac{p}{2} + \alpha_0 + \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right) &= 0
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

kde $\alpha_0$ je jeden z koreňov kubickej rovnice s neznámou $\alpha$ a komplexnými koreňmi

$$q^2 - 4.2\alpha\left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right) = 0 \tag{1.12}$$

Vzťah na výpočet koreňov kvartickej rovnice ako prvý publikoval Lodovico Ferrari[4].

**Rovnice vyšších stupňov.** V 20. rokoch 19. storočia Abel[5] dokázal, že pre rovnice $n$-tého stupňa pre $n \geq 5$, neexistujú všeobecné vzorce, ako to bolo u predchádzajúcich

[4]Lodovico Ferrari (1522-1565), taliansky matematik

[5]Niels Henrik Abel (1802-1829), nórsky matematik

troch stupňov. Avšak fakt, že neexistujú všeobecné vzťahy, teda vzťahy, pomocou ktorých vypočítame korene vo všeobecnosti len pomocou koeficientov daného polynómu, nevylučuje, že korene takýchto polynómov dokážeme spočítať iným spôsobom.

### 1.2.2 Sústava rovníc

**Definícia 1.23.** *Sústavou $m$ polynomiálnych rovníc* o $n$ neznámych je každá sústava, ktorú môžeme upraviť na tvar [6]

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{1.13}$$

kde výrazy na ľavých stranách sú nenulové polynómy $n$ neurčitých.

K riešeniu sústavy polynomiálnych rovníc sa väčšinou používajú *ekvivalentné úpravy* pre jednotlivé rovnice. Sú to úpravy, pomocou ktorých sa snažíme pôvodnú rovnicu zjednodušiť a zároveň nezmeniť množinu jej riešení. Medzi základné úpravy patria: [7]

1. Zámena pravej a ľavej strany rovnice.
2. Pričítanie (odčítanie) rovnakého čísla alebo výrazu obsahujúceho neznáme (ak sú definované v celom obore riešení) k obidvom stranám rovnice.
3. Vynásobenie (vydelenie) obidvoch strán rovnice rovnakým nenulovým číslom alebo nenulovým výrazom obsahujúcim neznáme (ak sú definované v celom obore riešení).
4. Umocnenie oboch strán rovnice prirodzeným mocniteľom, ak obidve strany rovnice nadobúdajú nezáporné (alebo záporné) hodnoty v celom obore riešení.

Taktiež poznáme ekvivalentné úpravy pre sústavy rovníc. Podobne ako u jedotlivých rovníc, aj v tomto prípade úpravou odstaneme sústavu rovníc ekvivalentnú k pôvodnej sústave. Sú to nasledujúce úpravy: [7]

1. Nahradenie ľubovoľnej rovnice sústavy rovnicou, ktorá je k nej ekvivalentná.

2. Nahradenie ľubovoľnej rovnice sústavy súčtom tejto rovnice s ľubovoľným násobkom inej rovnice sústavy

3. Dosadenie neznámej alebo výrazu s neznámymi z jednej rovnice sústavy do ľubovoľnej inej rovnice tejto sústavy.

Na riešenie sústavy rovníc existujú rôzne metódy, napríklad aditívna, eliminačná, grafická, substitučná, atď. Úspešnosť týchto metód však závisí od zadanej sústavy. V tejto práci sa uvedenými metódami riešenia nebudeme ďalej zaoberať, zameriame sa na jednu z ďalších možných metód riešenia, ktorou sú Gröbnerove bázy.

### 1.2.3 Riešenie polynomiálnych rovníc pomocou Gröbnerovych báz

Pomocou Gröbnerovej bázy môžeme sústavy polynomiálnych rovníc výrazne zjednodušiť a následne už jednoducho vyriešiť. Pojem Gröbnerova báza sme si zadefinovali už v kapitole 1.1 prostredníctvom pojmu počiatočný ideál. Teraz sa však pozrieme na jej výpočet. Ako prvé si zavedieme tzv. $\mathcal{S}$-polynóm.

**Definícia 1.24.** *$\mathcal{S}$-polynóm* $\mathcal{S}(P,Q)$ dvoch nenulových polynómov $P, Q$ definujeme nasledovne [4]

$$\mathcal{S}\left(P,Q\right) = \frac{lcm\left(lmP, lmQ\right)}{ltP}P - \frac{lcm\left(lmP, lmQ\right)}{ltQ}Q$$

**Poznámka.** Najmenší spoločný násobok, z anglického Least Common Multiple, označujeme *lcm*.

**Príklad 1.25.** Máme zadané dva polynómy $P = x^3 + xy + z$ a $Q = x^2 + 2y^2$. Určite ich $\mathcal{S}\left(P,Q\right)$.

$$\mathcal{S}\left(x^3 + xy + z, x^2 + 2y^2\right) = \frac{lcm\left(x^3, x^2\right)}{x^3}(x^3 + xy + z) - \frac{lcm\left(x^3, x^2\right)}{x^2}(x^2 + 2y^2) =$$

$$= (x^3 + xy + z) - x(x^2 + 2y^2) = -2xy^2 + xy + z$$

**Definícia 1.26.** Nech $\tilde{P}$ je polynóm získaný z polynómu $P$ konečným počtom redukcií, pričom $\tilde{P}$ neobsahuje žiadny monóm, ktorý by bol deliteľný vedúcimi monómmi polynómov $Q_1, ..., Q_n$. Potom je $\tilde{P}$ *normálny tvar polynómu* $P$ vzhľadom k polynómom $Q_1, ..., Q_n$. Zapisujeme $\tilde{P} = normalf(P, \{Q_1, ...Q_n\})$. [2]

**Príklad 1.27.** Majme dva polynómy $Q_1 = x^2 + xy + z$ a $Q_2 = x + z^3$, budeme používať lexikografické usporiadanie $x > y > z$. Určíme normálny tvar $\mathcal{S}$-polynómu polynómov $Q_1, Q_2$. Ako prvé vypočítame $\mathcal{S}(Q_1, Q_2)$.

$$\mathcal{S}(Q_1, Q_2) = \frac{lcm(x^2, x)}{x^2}(x^2+2y^2) - \frac{lcm(x^2, x)}{x}(x+z^3) = \frac{x^2}{x^2}(x^2+2y^2) - \frac{x^2}{x}(x+z^3) =$$

$$= x^2 + 2y^2 - x^2 - xz^3 = -xz^3 + 2y^2$$

Teraz určíme normálny tvar tohto polynómu. Vedúci monóm polynómu $\mathcal{S}(Q_1, Q_2)$ je deliteľný vedúcim monómom polynómu $Q_2$. Takže od polynómu $\mathcal{S}(Q_1, Q_2)$ odčítame $-z^3.Q_2$. Po dosadení dostaneme

$$\begin{aligned} normalf(\mathcal{S}(Q_1, Q_2), \{Q_1, Q_2\}) &= -xz^3 + 2y^2 - (-z^3)(x + z^3) = \\ &= -xz^3 + 2y^2 + xz^3 + z^6 = 2y^2 + z^6 \end{aligned}$$

Našli sme teda normálny tvar $\mathcal{S}(Q_1, Q_2)$ vzhľadom k polynómom $Q_1, Q_2$, môžeme zapísať $normalf(\mathcal{S}(Q_1, Q_2), \{Q_1, Q_2\}) = 2y^2 + z^6$

**Poznámka.** Pre ideál $i = \langle P_1, ..., P_s \rangle$ zostrojíme množinu polynómov $\mathcal{G}$ nasledovne

1. Všetky polynómy $P_1, ..., P_s \in G$ budú patriť do $\mathcal{G}$
2. Ak sú pre nejaké $i, j = 1, ..., s$ zvyšky po delení $\mathcal{S}$-polynómu $\mathcal{S}(P_i, P_j)$ polynómami z $\mathcal{G}$ nenulové, pridáme ich do množiny $\mathcal{G}$. Respektíve, ak sú pre nejaké $i, j = 1, ..., s$ normálne tvary $\mathcal{S}(P_i, P_j)$ nenulové, pridáme ich do množiny $\mathcal{G}$.
3. Tento postup opakujeme tak dlho, kým pre celú množinu $\mathcal{G}$ nevychádzajú len nulové zvyšky po delení $\mathcal{S}$-polynómov prvkami z $\mathcal{G}$.

Tento algoritmus sa nazýva *Buchbergerov*[6] *algoritmus* a jeho výstupom je Gröbnerova báza daného ideálu $i$, presnejšie redukovaná Gröbnerova báza vzhľadom k použitiu normálneho tvaru polynómov. [2]

[6]Bruno Buchberger (1942-), rakúsky matematik

**Poznámka.** Gröbnerova báza ideálu nie je jednoznačne určená, preto sa zavádza pojem redukovaná Gröbnerova báza, ktorý sme definovali v definícii . Po úvahe vidíme, že pojem redukovaná báza súvisí s normálnym tvarom polynómu. Z tohto dôvodu bol tento tvar zavedený a v algoritme s ním počítame.

**Poznámka.** Existuje kritérium, pomocou ktorého môžeme zjednodušiť výpočet normálneho tvaru polynómu.
Ak pre nejakú dvojicu indexov $i, j = 1, ..., s$ platí

$$lcm\,(lt(P_i), lt(P_j)) = lt(P_i)lt(P_j),$$

potom pre normálny tvar $\mathcal{S}$-polynómu platí

$$normalf(\mathcal{S}(P_i, P_j), \{P_i, P_j\}) = 0.$$

**Príklad 1.28.** Majme zadanú sústavu rovníc

$$x^2 - 2y + 1 = 0$$
$$x - y + 4 = 0.$$

Pomocou Buchbergerovho algoritmu určíme Gröbnerovu bázu ideálu $i$, ktorý je tvorený rovnicami zo zadania a následne vyriešime sústavu.
Ako prvé si označíme polynómy daného ideálu, nech $P = x^2 - 2y + 1$ a $Q = x - y + 4$.
Množina $\mathcal{G}$ teda zatiaľ obsahuje polynómy $P$ a $Q$.
Začneme výpočtom $\mathcal{S}$- polynómu

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(P, Q) &= \frac{lcm(x^2, x)}{x^2}(x^2 - 2y + 1) - \frac{lcm(x^2, x)}{x}(x - y + 4) = \\ &= \frac{x^2}{x^2}(x^2 - 2y + 1) - \frac{x^2}{x}(x - y + 4) = x^2 - 2y + 1 - x^2 + xy - 4x = \\ &= -4x + xy - 2y + 1\end{aligned}$$

Označíme $R = \mathcal{S}(P, Q)$. V ďalšom kroku nájdeme normálny tvar polynómu $R$ tak, že od neho odpočítame $-4Q$.

$$-4x+xy-2y+1-(-4)(x-y+4) = -4x+xy-2y+1+4x-4y+16 = xy-6y+17 = R_1$$

avšak to ešte nie je normálny tvar polynómu $R$, preto sme označili $R_1$. Monóm $xy$ je deliteľný vedúcim monómom polynómu $Q$, takže od $R_1$ odčítame $yQ$

$$\tilde{R} = normalf(R, \{P, Q\}) = xy - 6y + 17 - y(x - y + 4) = xy - 6y + 17 - xy + y^2 - 4y =$$

$$= y^2 - 10y + 17$$

$\tilde{R}$ je normálny tvar polynómu $R$.

Výpočet $\mathcal{S}(P, R)$ a $\mathcal{S}(Q, R)$ si môžeme zjednodušiť pomocou predchádzajúceho kritéria, keďže $lcm\,(lt(P), lt(R)) = lt(P)lt(R)$, potom $normalf(\mathcal{S}(P, R), \mathcal{G}) = 0$, analogicky pre dvojicu $Q, R$.

Nakoniec ešte musíme polynóm $P$ previesť na normálny tvar, keďže jeho vedúci monóm je deliteľný vedúcim monómom polynómu $Q$. Dostávame teda

$$x^2 - 2y + 1 - x(x - y + 4) = x^2 - 2y + 1 - x^2 + xy - 4x = -4x + xy - 2y + 1,$$

avšak toto ešte nie je normálny tvar polynómu $P$, pretože vedúci monóm $-4x$ je deliteľný vedúcim monómom polynómu $Q$. Ďalej upravíme

$$-4x + xy - 2y + 1 - (-4)(x - y + 4) = -4x + xy - 2y + 1 + 4x - 4y + 16 = xy - 6y + 17.$$

Tento polynóm stále nie je v normálnom tvare, je rovnako deliteľný vedúcim monómom polynómu $Q$. Nakoniec dostávame

$$\begin{aligned} \tilde{P} = normalf(P, \{R, Q\}) &= xy - 6y + 17 - y(x - y + 4) = \\ &= xy - 6y + 17 - xy + y^2 - 4y = y^2 - 10y + 17. \end{aligned}$$

Dostali sme normálny tvar polynómu $P$, ktorý je však zhodný s $\tilde{R}$, teda ho už znovu pridávať do množiny $\mathcal{G}$ nebudeme.

Pomocou Buchbergerovho algoritmu sme určili Gröbnerovu bázu ideálu $i$, je to množina $\mathcal{G} = \{y^2 - 10y + 17, x - y + 4\}$. A teda sústavu zo zadania, môžeme prepísať pomocou ekvivalentnej sústavy

$$\begin{aligned} y^2 - 10y + 17 &= 0 \\ x - y + 4 &= 0. \end{aligned}$$

V tomto prípade bola už zadaná sústava rovníc ľahko vyriešiteľná, preto výsledná sústava nie je jej zjednodušením, ale je možné jednoduchým výpočtom ukázať, že riešenie oboch sústav je rovnaké, a to

$$x = 1 - 2\sqrt{2}, \quad y = 5 - 2\sqrt{2},$$
$$x = 1 + 2\sqrt{2}, \quad y = 5 + 2\sqrt{2}$$

**Poznámka.** Vzhľadom k tomu, že ručný výpočet Gröbnerovej bázy je náročný a zdĺhavý, funkcia na jej výpočt je implementovaná v mnohých matematických softwaroch. Pre účely tejto práce, budeme používať sofware *Wolfram Mathematica*.

**Príklad 1.29.** Predchádzajúci príklad vyriešime pomocou sofwaru *Mathematica*. Pre výpočet Gröbnerovej bázy daného systému rovníc použijeme príkaz
`GroebnerBasis[{x^2 - 2y + 1, x - y + 4}, {x, y},Method -> "Buchberger"]`
Výsledkom je

$$17 - 10y + y^2, 4 + x - y,$$

čo zodpovedá výslednej ekvivalentnej sústave rovníc, ktorú sme dostali.
Riešenie tejto sústavy dostaneme pomocou príkazu
`Solve[17 - 10y + y^2 == 0 && 4 + x - y == 0, {x, y}]`.
Výsledok je zhodný s tým, ku ktorému sme sa dostali v predchádzajúcom príklade.

# 2 ANALÝZA SÚČASNÉHO STAVU

Ekonomické modely sú zjednodušeným popisom reality, sú zostavené tak, aby spĺňali predpoklady ekonomického správania. Dôležitou charakteristikou je, že modely sú subjektívne navrhované, pretože neexistuje žiadne objektívne meranie ekonomických výstupov. Každý ekonóm má vlastnú mienku o tom, aké faktory by jeho model mal zahŕňať, aby popisoval jeho interpretáciu reality. [12]

Presnosť a komplexnosť modelu teda závisia čisto len od typu problému, ktorý popisujú. Rovnako aj vlastnosti týchto modelov sú rozmanité, sú však aspekty, ktoré zostávajú pri všetkých modeloch rovnaké, spomenieme tri z nich. Prvým je predpoklad *ceteris paribus*[7], alebo tiež za inak rovnakých podmienok. Druhým je predpoklad hľadania optima, teda rozhodovanie v modele je založené na princípe hľadania optimálnej stratégie v danej situácii. Treťou vlastnosťou je rozlišovanie medzi pozitívnou a normatívnou otázkou modelu. Pozitívne otázky sa zaoberajú vecami takými, aké v skutočnosti sú, teda skúmajú fakty. Na druhej strane normatívne otázky sa zameriavajú na to, aké by veci mali byť. [13]

Vo všeobecnosti je ekonomický model reprezentovaný sústavou rovníc, ktoré popisujú ekonomické správanie. Cieľom je zahrnúť dostatočné množstvo rovníc, aby tento systém popisoval racionalitu správania hráčov alebo zobrazoval, ako funguje ekonomika. [12]

## 2.1 Závod v zbrojení

Prvým modelom je tzv. Závod v zbrojení[8], hra zavedená podľa [10], v modele budeme počítať Bayesovu Nashovu rovnováhu. Na začiatku si vysvetlíme základné pojmy. *Bayesovské*[9] *hry*, tiež nazývané ako hry s neúplnou informáciou, sú hry, v ktorých aspoň jeden z hráčov nepozná výplatné funkcie ostatných hráčov. *Nashova*[10] *rovnováha* je situácia,

[7] označenie predpokladu alebo podmienky, ktorá platí iba pri nezmenených ostatných podmienkach a premenných

[8] anglicky Arms Race Game

[9] Thomas Bayes (1702-1761), anglický štatistik, známy vďaka formulácii Bayesovej vety o vzťahu medzi podmienenou pravdepodobnosťou a opačne podmienenou pravdepodobnosťou

[10] John Nash (1928-2015), americký matematik známy vďaka prácam v oblasti teórie hier, držiteľ Ceny Švédskej ríšskej banky za ekonomické vedy na pamiatku Alfreda Nobela(1994)

v ktorej stratégia každého hráča je najlepšou odpoveďou na stratégie ostatných hráčov. Podrobnejšie rozoberieme Nashovu rovnováhu v ďalšej kapitole. Bayesova Nashova rovnováha je teda Nashova rovnováha Bayesovskej hry. [11] Táto kapitola je inšpirovaná [5].

Dvaja hráči sa naraz a nezávisle rozhodujú medzi postavením nového systému zbrojenia (*B* - build) a nepostavením nového systému zbrojenia (*N* - not build). Na základe ich rozhodnutia, a samozrejme aj rozhodnutia oponenta, môžu vyhrať alebo prehrať. Ak si obaja vyberú stratégiu *N*, výnos pre oboch bude $0$. Hráč, ktorý zvolí stratégiu *N*, pričom oponent zahrá *B*, utrpí prehru $d > 0$, ktorá bude pravdepodobne dosť veľká. Hoci hráč, ktorý zvolí stratégiu *B* nikdy nezaplatí túto sumu $d$, avšak musí zaplatiť cenu zbrane. Naopak hráč, ktorý zahrá *B*, zatiaľ čo jeho oponent zahrá *N*, vyhrá $\mu > 0$. Zameriame sa na prípady, keď $\mu$ bude malé, aby pokušenie stavať zbrane nebolo také veľké.

Cena postavenia nového systému zbrojenia pre $i$-teho hráča je $c_i \geq 0, i = 1, 2$, pričom táto cena môže byť peňažná čiastka, ako aj psychická. Tejto cene budeme hovoriť *typ* $i$-teho hráča a bude to jeho súkromná informácia. Zo získaných údajov môžeme zostaviť výplatnú maticu, kde $i$-ty hráč vyberá riadok matice a oponent stĺpec.

Tab. 1: Závod v zbrojení - výplatná matica, (Zdroj: [5])

| | *B* | *N* |
|---|---|---|
| *B* | $-c_i$ | $\mu - c_i$ |
| *N* | $-d$ | $0$ |

Ako bolo vyššie spomenuté, typ hráča $c_i$ je jeho súkromná informácia, z toho vyplýva, že typy $c_1, c_2$ sú navzájom nezávislé. Avšak vieme, že tieto typy majú rovnaké rozdelenie so spojitou kumulatívnou distribučnou funkciou $F$. Funkcia $F$ má hustotu pravdepodobnosti $[0, \overline{c}]$, kde $F(0) = 0$, $F'(c) > 0$, pre $0 < c < \overline{c}$ teda funkcia je na tomto intervale rastúca a $F(\overline{c}) = 1$. Ďalej platí $\overline{c} < d$. Všetky parametre, ako aj funkcie sú všeobecne známou informáciou s výnimkou typov $c_1$ a $c_2$.

Z tabuľky 1 môžeme vidieť ,že pokiaľ $-c_i \geq -\overline{c} > -d$, *B* je najlepšou odpoveďou na *B*. Preto tu existuje *Bayesovu Nashova rovnováha*, kde všetky typy zvolia stratégiu *B* s pravdepodobnosťou jedna. Ďalšou rovnováhou je stretégia *N* ako odpoveď na *N* práve vtedy, keď $c_i \geq \mu$. V tejto hre teda existujú dve Nashove ekvilibriá, sú to stratégie *(N,N)* a *(B,B)*. Medzi týmito ekvilibriami existuje hranica, indiferentné $c_i^* > 0$, kde platí

- ak $c_i < c_i^*$, potom $i$-ty hráč zvolí stratégiu *B*

- ak $c_i > c_i^*$, potom $i$-ty hráč zvolí stratégiu *N*.

Podmienka, že hráčov $i$-ty typ $c^*$ je indiferentný medzi *B* a *N*, keď očakáva, že hráč $j$ zvolí *B* s pravdepodobnosťou $F(c^*)$ je $S(c^*) = 0$, kde

$$S(c) \equiv F(c)(d - c) + (1 - F(c))(\mu - c) \tag{2.14}$$

Toto vedie k nasledujúcej definícii.

**Definícia 2.30.** Rozdelenie vyhovuje *multiplikátorovej podmienke*, ak platí $F(c)\,d \geq c$ pre všetky $c \in [0, \overline{c}]$.

Ak je multiplikátorová podmienka splnená, potom $S(c) > 0$ pre všetky $\mu > 0$ a $c \geq 0$. Multiplikátorová podmienka zaisťuje, že si každý hráč vyberie stratégiu *B*, keď si myslí, že každý hráč s nižším typom ako má on, zvolí stratégiu *B*, takže sa sklon k zahratiu stratégie *B* rozšíri na celú populáciu.

Poznamenajme, že $F(0)d = 0$ a $F(\overline{c})d = d > \overline{c}$ čo vyplýva z predpokladov. Graficky multiplikátorová podmienka hovorí, že graf funkcie $F$ leží na alebo nad polpriamkou prechádzajúcou začiatkom so smernicou $1/d$. Rovnomerné rozdelenie, $F(c) = c/\overline{c}$, vyhovuje multiplikátorovej podmienke, pretože $cd/\overline{c} \geq c$ pre všetky $c \geq 0$. Vo všeobecnosti je táto podmienka splnená v prípade, že distribučná funkcia $F$ je konkávna, pretože konkávnosť implikuje $F(c) \geq c/\overline{c} \geq c/d$ pre všetky $c \geq 0$.

Ak je multiplikátorová podmienka porušená, potom pre dostatočne malé $\mu$ existuje $c^* < \overline{c}$ také, že $S(c^*) = 0$. To znamená, že typ $c^*$ je indiferentný medzi *B* a *N*, ak si hráč tohto typu myslí, že jeho súper zahrá stratégiu *B* s pravdepodobnosťou $F(c^*)$. Teda pre malú hodnotu $\mu$ je multiplikátorová podmienka nutná rovnako, ako je dostatočná pre rozšírenie sklonu k zahratiu *B* na celú populáciu.

Multiplikátorová podmienka je porušená, ak je funkcia $F$ konvexná. Intuitívne, z konvexnosti vyplýva, že výskyt hráčov s nízkymi typmi je ojedinelý a nepravdepodobný. Pri konvexnej funkcii hráči s relatívne vysokými typmi nemusia chcieť zbrojiť ani za predpokladu, že si myslia, že súper s nižším typom zbrojiť bude. Je to z toho dôvodu, že stretnutie s hráčom s takýmto nízkym typom je veľmi nepravdepodobné. To zastaví rozšírenie sklonu k zahratiu *B* na celú populáciu.

Po analýzach možných rovnovážnych stavov do hry vstupuje *cheap talk*[11]. V tomto rozšírení hru rozdeľuje do troch krokov. V nultom kroku sú prirodzene určené typy hráčov $c_1$ a $c_2$, $c_i$ sa stáva súkromnou informáciou $i$-teho hráča. V prvom kroku sú verejne a súbežne oznámené správy hráčov. Dve správy, ktoré vedú k rovnovážnemu stavu, nazveme D a H. D[12] je zmierlivá správa a H[13] je útočná správa. V druhom kroku si hráči súbežne vyberú stratégiu *B* alebo *N* a ich výnos z hry je vypočítaný podľa tabuľky 1. Správy, ktoré boli poslané v prvom kroku, nemajú priamy vplyv na výnos jednotlivých hráčov, avšak môžu ovplyvniť ich rozhodnutie. Rovnovážna stratégia závisí na nasledujúcej lemme.

**Lema 2.31.** *Predpokladajme, že multiplikátorová podmienka je splnená. Pre dostatočne malé* $\mu > 0$, *existuje trojica* $\left(c^L, c^*, c^H\right)$ *taká, že platí*

$$\mu < c^L < c^* < c^H < \overline{c} \tag{2.15}$$

$$\left[F\left(c^H\right) - F\left(c^L\right)\right] c^L = \left(1 - F\left(c^H\right)\right) \mu \tag{2.16}$$

$$\left[1 - 2\left(F\left(c^H\right) - F\left(c^L\right)\right)\right] c^H = F\left(c^L\right) d \tag{2.17}$$

$$\left(1 - F\left(c^H\right)\right)\left(\mu - c^*\right) + F\left(c^L\right)\left(-c^*\right) = F\left(c^L\right)\left(-d\right) \tag{2.18}$$

*Ak* $\mu \to 0$, *potom* $c^H \to 0$.

**Dôkaz.** viz Príloha 1

Rozlišujeme tieto tri typy hráčov: *normálny hráč*, *pomerne tvrdý hráč* a *veľmi tvrdý hráč*. Veľmi tvrdý hráč bude zbrojiť za každých okolností, bez ohľadu na to, akú správu poslal alebo prijal. Pri normálnom hráčovi je malá pravdepodobnosť, že bude zbrojiť. Dá sa očakávať, že bude zbrojiť len v prípade, že si bude istý, že zbrojí aj súper. Nakoniec, pomerne tvrdý hráč, ktorý má priemernú tendenciu zbrojiť, teda jeho rozhodnutie závisí od toho, čo je najlepšou odpoveďou na súperove rozhodnutie.

Z trojice $\left(c^L, c^*, c^H\right)$, ceny $c^L$ a $c^H$ predstavujú hraničné ceny. Cena $c^L$ je hranica medzi pomerne tvrdým a veľmi tvrdým hráčom, teda medzi poslaním falošne zmierlivej správy D alebo útočnej správy H. Cena $c^H$ je hranica medzi pomerne tvrdým a normálnym

[11] v teórii hier je takto označovaná komunikácia medzi hráčmi, ktorá priamo neovplyvňuje priebeh hry

[12] z anglického Dove

[13] z anglického Hawk

hráčom, teda medzi poslaním zmierlivej správy D alebo falošne útočnej správy H. Cena $c^*$ je indiferentná medzi stratégiami *B* a *N*, ak súper pošle zmierlivú správu. Pre naše tri typy hráčov platí nasledujúce:

$$\text{normálny hráč: } c_i > c^H$$
$$\text{pomerne tvrdý hráč: } c^L \leq c_i \leq c^H$$
$$\text{veľmi tvrdý hráč: } c_i < c^L$$

Ďalej môžeme predpokladať, že normálny a veľmi tvrdý hráč pošlú v prvom kroku zmierlivú správu, teda D a pomerne tvrdý hráč pošle útočnú správu H. Samozrejme, hráči môžu poslať aj iné správy, ale tie by neviedli k rovnovážnej stratégii, takže ich nebudeme v modele uvažovať.

Akú správu hráč odošle je jedna vec, avšak čo skutočne spraví v druhom kroku, je vec druhá. V prípade, že $c_i \leq \mu$ hráč zvolí stratégiu *B*. Opačný prípad, teda $c_i > \mu$ je už komplikovanejší, rozhodnutie závisí na správe, ktorú hráč obdrží. Ak obaja hráči pošlú správu H, potom v druhom kroku ani jeden z hráčov nebude stavať, teda zvolia $(N, N)$. Ak naopak, obaja hráči pošlú správ D, potom hráč, ktorý je veľmi tvrdým typom bude v druhom kroku stavať, zatiaľ čo hráč normálneho typu stavať nebude. Nakoniec, ak jeden z hráčov pošle správu D a druhý H, potom budú obaja v druhom kroku stavať systém.

Tab. 2: Závod v zbrojení - výplatná matica po poslaní správ, (Zdroj: [5])

| | $c_2 < c^L$ (D) | $c^L \leq c_2 \leq c^H$ (H) | $c_2 > c^H$ (D) |
|---|---|---|---|
| $c_1 < c^L$ (D) | *BB* | *BB* | *BN* |
| $c^L \leq c_1 \leq c^H$ (H) | *BB* | *NN* | *BB* |
| $c_1 > c^H$ (D) | *NB* | *BB* | *NN* |

**Polynomiálne riešenie hry**

Je zrejmé, že nemôžeme predpokladať, že nájdeme riešenie pre sústavu rovníc (2.16) -

(2.18), ktoré navyše vyhovuje nerovnosti (2.15), pre všeobecnú funkciu $F$. Za predpokladu, že funkcia $F$ je polynomiálna funkcia na intervale $[0, \overline{c}]$, potom aj rovnice (2.16) - (2.18) tvoria sústavu polynomiálnych rovníc a môžeme aplikovať metódu Gröbnerovej bázy.

Predpokladajme distribučnú funkciu rovnomerne rozloženú na intervale $[0, 1]$, teda funkciu $F(c) = c$ pre $c \in [0, 1]$. Potom sústavu rovníc (2.16) - (2.18) môžeme prepísať do nasledujúceho tvaru

$$\left(c^H - c^L\right) c^L = \left(1 - c^H\right) \mu \tag{2.19}$$

$$\left[1 - 2\left(c^H - c^L\right)\right] c^H = c^L d \tag{2.20}$$

$$\left(1 - c^H\right)(\mu - c^*) + c^L(-c^*) = c^L(-d). \tag{2.21}$$

Túto sústavu troch rovníc o troch neznámych budeme riešiť pomocou Gröbnerovej bázy za použitie softwaru *Wolfram Mathematica*. Z tohto dôvodu preznačíme premenné

$$\mathtt{m} := \mu, \ \ \mathtt{L} := c^L, \ \ \mathtt{S} := c^* \ \text{ a } \mathtt{H} := c^H.$$

Výsledkom je sústava

$$G[1] = (-2m + d - 1)L^3 + (2md + m)L^2 + (m^2 d - 2m^2 - m)L + m^2 \tag{2.22}$$

$$G[2] = (m + 1)S + (m - d)L + (-md - m) \tag{2.23}$$

$$G[3] = (-2m^2 - 2m)H + (2m - d + 1)L^2 + (-md)L + (2m^2 + m) \tag{2.24}$$

Vzhľadom k zvolenej polynomiálnej funkcii máme definované horné ohraničenie $\overline{c} = 1$. Z predpokladov definovaných pre model musí byť splnená podmienka $d > \overline{c}$, pre ďalšie riešenie príkladu teda zvolíme $d = 1,5$. Keď dosadeníme do rovníc (2.22) - (2.24) a položíme ich rovné nule, získame

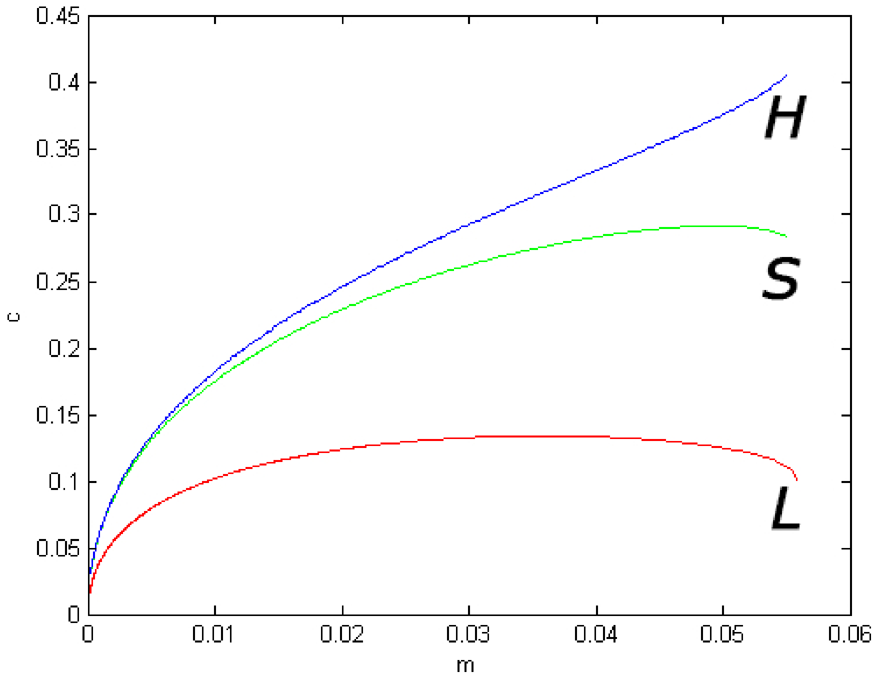
$$L^3(0.5 - 2m) + 4.L^2 m + L\left(-0.5m^2 - m\right) + m^2 = 0 \tag{2.25}$$

$$L(m - 1.5) + (m + 1)S - 2.5m = 0 \tag{2.26}$$

$$H\left(-2m^2 - 2m\right) + L^2(2m - 0.5) - 1.5Lm + 2m^2 + m = 0. \tag{2.27}$$

Môžeme vidieť, že prvá rovnica je rovnicou tretieho stupňa v premennej $L$, teda má tri korene. Pripomeňme, že jedným z predpokladov modelu bolo dostatočne malé $\mu > 0$, túto podmienku budeme brať do úvahy počas ďalšieho riešenia. Po zafixovaní hodnoty

$\mu$ z krátkej analýzy rovnice zistíme, že dva z týchto koreňov sú kladné reálne čísla pre $\mu \le \frac{16}{143+19\sqrt{57}} \approx 0,0558568$, pre vyššie hodnoty $\mu$ sú tieto korene komplexné čísla. Posledný koreň rovnice je záporný pre všetky $\mu < 0,25$.




Graf 1: Rovnováha pre d = 1,5

V grafe 1 sú znázornené tri krivky, každá pre jednu z hraničných hodnôt $L < S < H$ (v zavedenom značení $c^L < c^* < c^H$), v závislosti na dostatočne malých hodnotách $\mu$ podľa predpokladu. Uvedené krivky sú však len jedným riešením, ďalšie riešenie je záporné a posledné porušuje predpoklad lemmatu, pre $\mu \to 0$ neplatí $c^H \to 0$, ale $c^H \to \frac{1}{2}$.

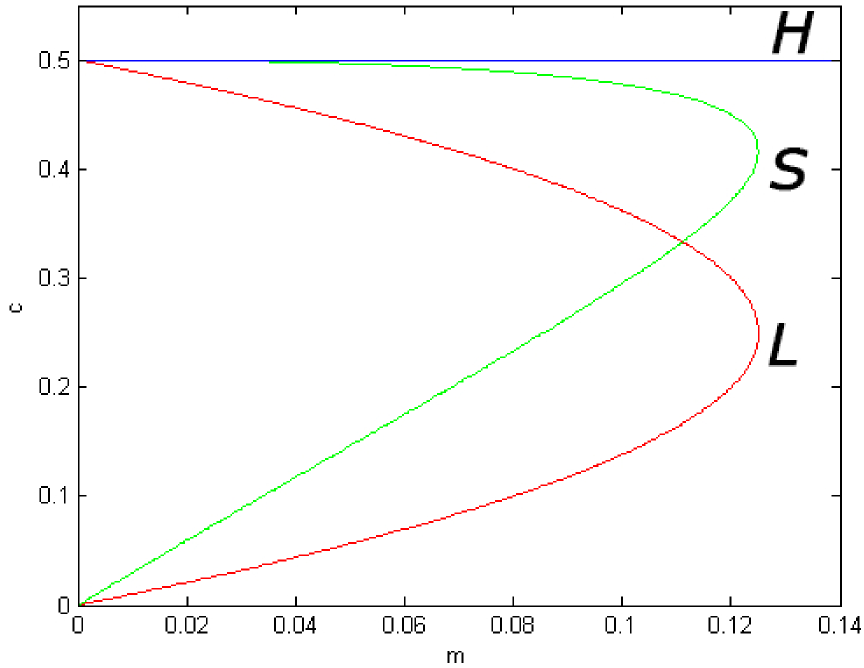
Pre vyššie hodnoty $\mu$ už sústava rovníc nemá nezáporné reálne riešenie. Napríklad pre hodnotu $\mu = 0,06$ sú prípustné dve komplexné riešenia

$$(c^L, c^*, c^H) = (0.103662 \pm 0.023391i,\ 0.282333 \pm 0.031777i,\ 0.424489 \mp 0.031038i).$$

Na záver ukážeme, prečo je podmienka $\bar{c} < d$ pre model taká dôležitá. Keby sme zvolili $d = \bar{c} = 1$, zo sústavy rovníc (2.22)-(2.24) by sme získali značne zjednodušenú sústavu, ktorú by sme dokázali jednoducho vyriešiť. Riešenia budeme mať opäť tri, ravnako ako je aj rád prvej rovnice sústavy

$$
\begin{aligned}
(c^L, c^*, c^H) &= (1, 1, 1),\\
(c^L, c^*, c^H) &= (\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{1-8\mu}\right), \frac{(\mu-1)\sqrt{1-8\mu}+7\mu+1}{4(1+\mu)}, \frac{1}{2}),\\
(c^L, c^*, c^H) &= (\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{1-8\mu}\right), \frac{(-\mu+1)\sqrt{1-8\mu}+7\mu+1}{4(1+\mu)}, \frac{1}{2}).
\end{aligned}
$$

Prvé z uvedených riešení nevyhovuje podmienke (2.15) z lemmatu 2.31, zvyšné dve riešenia zakreslíme do grafu 2.




Graf 2: Rovnováha pre d = 1 (Zdroj: vlastný)

Keďže $c_H$ má konštantnú hodnotu $c_H = \frac{1}{2}$, nie je splnená podmienka z lemmatu, pre $\mu \to 0$ neplatí $c^H \to 0$. Takže riešenie pre $d = \bar{c} = 1$ nie je riešením nami zavedenej úlohy závodu v zbrojení.

## 2.2 Viacnásobná Nashova rovnováha

Začneme vysvetlením pojmu Nashova rovnováha. Nashova rovnováha je taká situácia, keď stratégia každého hráča je najlepšia možná (optimálna) odpoveď na stratégie ostatných hráčov. To znamená, že žiadnou zmenou stratégie z Nashovej rovnováhy, pri nezmených rozhodnutiach ostatných hráčov, si hráč nemôže polepšiť. Nashova rovnováha je teda logickou predikciou, ako bude hra zahraná. Je to z toho dôvodu, že ak všetci hráči vedia predpovedať, že takáto rovnováha nastane, nikto z nich nemá dôvod hrať inak. Nashova rovnováha má výnimočnú vlastnosť, jedine tento typ rovnováhy môže byť hráčmi predikovaný, a tiež môžu hráči predvídať, že táto rovnováha je predikovaná ich oponentmi. [14]

Typickým príkladom hry, v ktorej existuje Nashova rovnováha, dokonca jedinečná Nashova rovnováha, je známa hra Väzňova dilema[14]. Je to hra dvoch hráčov, ktorými sú väzni, jedná sa o nekooperatívnu hru, teda títo hráči spolu nespolupracujú. Základná myšlienka je v tom, že každý väzeň sa môže rozhodnúť medzi mlčaním a priznaním sa k spoločnému zločinu. Ak sa priznajú obaja, dostanú znížený trest (3 roky). Ak sa prizná iba jeden z nich, dostane nižší trest (1 rok) a nečestný väzeň dostane tvrdší trest (10 rokov). Ak budú obaja mlčať, dostanú obaja len nízky trest (2 roky). Tabuľka stratégií vyzerá nasledovne

Tab. 3: Väzňova dilema, (Zdroj: vlastný)

| | SPOLUPRÁCA | MLČANIE |
|---|---|---|
| SPOLUPRÁCA | $3, 3$ | $1, 10$ |
| MLČANIE | $10, 1$ | $2, 2$ |

Základným princípom je, že väzni spolu nemôžu komunikovať, preto obaja zvolia stratégiu, v ktorej sa priznajú. Spravia tak zo strachu, že keby mlčali a druhý väzeň by sa k spoločnému zločinu priznal, dostali by tvrdší trest. Stratégia, v ktorej sa obaja väzni priznajú k spáchanému zločinu je teda hľadanou jedinečnou Nashovou rovnováhou. Je to stabilná stratégia, pri ktorej sa zmenou rozhodnutia pri nezmenenom rozhodnutí druhého väzňa, nemôžu dostať do lepšej situácie. [15]

Väzňova dilema je základom pre pochopenie Nashovej rovnováhy, teraz prejdeme na zložitejšie ekonomické aplikácie tejto rovnováhy.

[14] Prisoners' Dilemma

### 2.2.1 Viacnásobná Arrow-Debreuova rovnováha

Problém, ktorým sa budeme v tejto časti zaoberať, bol formulovaný Léonom Walrasom[15] v roku $1874$. Walras hľadal systém rovníc, ktoré popisujú rovnováhu na trhu v takom zmysle, že ponuka sa rovná dopytu na každom čiastkovom trhu. V tomto probléme máme $n$ hráčov, kde každý hráč má počiatočné zdroje komodít a funkcie užitočnosti pre spotrebu všetkých komodít, ako ich vlastných, tak aj ostatných. Postup hry je nasledovný, každý hráč na začiatku predá svoje vložené zdroje a výnos, ktorý mu predaj prinesie, použije na kúpu takého množstva komodít, ktoré budú maximalizovať jeho úžitok z tejto hry. Walrasovou otázkou bolo, či je možné nájsť taký cenový vektor, za ktorého podmienky by takáto hra mohla prebehnúť. Tento problém nakoniec vyriešili Arrow[16] a Debreu[17] v roku $1954$. Ukázali, že takáto rovnováha na trhu môže existovať za predpokladu, že budú funkcie užitočnosti všetkých hráčov konkávne. [16] [17] Táto kapitola je inšpirovaná [5].

Zavedieme spomínaný model pomocou matematického aparátu. Predpokladajme, že máme dvoch hráčov(spotrebiteľov) a dve komodity. Funkcie užitočnosti pre jednotlivých hráčov sú nasledovné

$$u^1(c_1, c_2) = -\frac{64}{2}c_1^{-2} - \frac{1}{2}c_2^{-2} \qquad u^2(c_1, c_2) = -\frac{1}{2}c_1^{-2} - \frac{64}{2}c_2^{-2}. \tag{2.28}$$

Každý spotrebiteľ do hry vstupuje so svojimi vlastnými zdrojmi, teda s istým kapitálom, ktorý predstavuje určité množstvo komodít. Rozdelenie zdrojov je v parametrizovanej forme zapísané nasledovne

$$e^1 = (1-e, e), \qquad e^2 = (e, 1-e) \tag{2.29}$$

s parametrom $e \in [0, 1]$. Zavedieme označenie $e_{hl}$ pre kapitál hráča $h$ pre komoditu $l$ a analogicky $c_{hl}$ ako spotrebu hráča $h$ pre komoditu $l$. Pre našu hru máme $h \in \{1, 2\}$, $l \in \{1, 2\}$. Ďalej označíme cenu komodity $l$ symbolom $p_l$.

---

[15] Léon Walras (1834-1910), francúzsky ekonóm, tvorca teórie všeobecnej ekonomickej rovnováhy

[16] Keneth Arrow (1921- ), americký ekonóm, známy vďaka prínosu do Teórie všeobecnej rovnováhy, držiteľ Ceny Švédskej ríšskej banky za ekonomické vedy na pamiatku Alfreda Nobela (1972)

[17] Gérard Debreu (1921-2004), francúzsky ekonóm a matematik, držiteľ Ceny Švédskej ríšskej banky za ekonomické vedy na pamiatku Alfreda Nobela (1983)

Toto zadanie je typickým ekonomickým príkladom, keď sa spotrebiteľ snaží maximalizovať svoj úžitok s obmedzenými zdrojmi. Z matematického hľadiska je to úloha na viazané extrémy, kde hľadáme extrémy za predpokladu vopred zadaných podmienok. V našom prípade je to hľadanie maxima funkcie užitočnosti vzhľadom k daným rozpočtovým obmedzeniam. Každý hráč bude mať svoje rozpočtové obmedzenie, pre prvého hráča bude vyzerať

$$p_1 c_{11} + p_2 c_{12} = p_1 e_{11} + p_2 e_{12},$$

pre druhého bude analogicky

$$p_1 c_{21} + p_2 c_{22} = p_1 e_{21} + p_2 e_{22}.$$

Úlohu na viazané extrémy budeme riešiť Lagrangeovou[18] metódou. Zavedieme *Lagrangeov multiplikátor* pre rozpočtové obmedzenie hráča $h$, budeme značiť symbolom $\lambda_h$. Pomocou takto zavedeného označenia zostavíme Lagrangeovu funkciu pre každého z hráčov

$$\begin{aligned} L_1 &= -\frac{64}{2} c_{11}^{-2} - \frac{1}{2} c_{12}^{-2} - \lambda_1 \left[ p_1 (c_{11} - e_{11}) + p_2 (c_{12} - e_{12}) \right], \\ L_2 &= -\frac{1}{2} c_{21}^{-2} - \frac{64}{2} c_{22}^{-2} - \lambda_2 \left[ p_1 (c_{21} - e_{21}) + p_2 (c_{22} - e_{22}) \right]. \end{aligned}$$

Ďalej zostavíme pre každého hráča sústavu dvoch rovníc tak, že jeho Lagrangeovu funkciu zderivujeme postupne podľa neznámych $c_{hl}$. Táto sústava pre prvého hráča vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial c_{11}} &: \qquad 64 c_{11}^{-3} - \lambda_1 p_1 = 0, \\ \frac{\partial L_1}{\partial c_{12}} &: \qquad c_{12}^{-3} - \lambda_1 p_2 = 0. \end{aligned}$$

Analogicky zostavíme sústavu pre druhého hráča

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_2}{\partial c_{21}} &: \qquad c_{21}^{-3} - \lambda_2 p_1 = 0, \\ \frac{\partial L_2}{\partial c_{22}} &: \qquad 64 c_{22}^{-3} - \lambda_2 p_2 = 0. \end{aligned}$$

Takto sme dostali štyri rovnice, ďalej pridáme rovnice rozpočtových obmedzení pre každého hráča a ešte pridáme posledné dve rovnice, ktoré predstavujú rovnice vyčistenia

[18] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), taliansko-francúzsky matematik a astronóm

trhu[19]. Vyčistenie trhu je našim predpokladom, neberieme do úvahy, že by po hre zostali nejaké voľné komodity. Teda počítame s tým, že zdroje sa rovnajú spotrebe hráčov pre každú komoditu. Sústava takto zostavených rovníc tvorí rovnovážnu sústavu a vyzerá nasledovne

$$64c_{11}^{-3} - \lambda_1 p_1 \quad = 0 \tag{2.30}$$

$$c_{12}^{-3} - \lambda_1 p_2 = 0 \tag{2.31}$$

$$p_1(c_{11} - e_{11}) + p_2(c_{12} - e_{12}) = 0 \tag{2.32}$$

$$c_{21}^{-3} - \lambda_2 p_1 = 0 \tag{2.33}$$

$$64c_{22}^{-3} - \lambda_2 p_2 = 0 \tag{2.34}$$

$$p_1(c_{21} - e_{21}) + p_2(c_{22} - e_{22}) = 0 \tag{2.35}$$

$$c_{11} + c_{21} - e_{11} - e_{21} = 0 \tag{2.36}$$

$$c_{12} + c_{22} - e_{12} - e_{22} = 0 \tag{2.37}$$

Táto sústava ôsmych nelineárnych rovníc je pomerne zložitá, môžeme ju nasledujúcim spôsobom upraviť na jednoduchšiu sústavu troch polynomiálnych rovníc. Prvým krokom bude znormalizovanie ceny komodít prostredníctvom *Walrasovho zákona* a to tak, že stanovíme $p_1 = 1$ a eliminujeme Lagrangeove multiplikátory. Postup je nasledujúci, do rovníc (2.30) a (2.33) dosadíme $p_1 = 1$ a vyjadríme si z nich $\lambda_h$, toto vyjadrenie následne dosadíme do rovníc (2.31) a (2.34). Dostaneme rovnice

$$64\frac{1}{c_{11}^3} = \frac{1}{p_2 c_{12}^3} \tag{2.38}$$

$$\frac{1}{c_{21}^3} = 64\frac{1}{p_2 c_{22}^3}. \tag{2.39}$$

Ďalej označíme $p_2 = q^3$ a môžeme zaviesť prebytok dopytu hráča 1 ako $x_l = c_{1l} - e_{1l}$. Rovnice (2.38) a (2.39) môžeme podľa zavedeného označenia upraviť

$$64q^3 c_{12}^3 = c_{11}^3$$

$$q^3 c_{22}^3 = 64c_{21}^3.$$

[19] z anglického *market clearing*

Teraz obe rovnice umocníme na $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} 4qc_{12} &= c_{11} \\ qc_{22} &= 4c_{21}, \end{aligned}$$

v ďalšom kroku na prvú rovnicu aplikujeme zavedený prebytok dopytu, do ktorého dosadíme konkrétne hodnoty individuálneho kapitálu $e_{hl}$

$$4q(x_2 + e) = x_1 + 1 - e.$$

Do druhej rovnice použijeme vyjadrenia neznámych $c_{21}$ a $c_{22}$ z rovníc (2.36), (2.37), ktoré rovnako ďalej upravíme pomocou zavedené prebytku dopytu a dosadíme hodnoty kapitálu

$$\begin{aligned} c_{21} &= e_{11} + e_{21} - c_{11} = e_{11} + e_{21} - (e_{11} + x_1) = e - x_1 \\ c_{22} &= e_{12} + e_{22} - c_{12} = e_{12} + e_{22} - (e_{12} + x_2) = 1 - e - x_2 \end{aligned}$$

Vyjadrené hodnoty dosadíme do druhej rovnice

$$q(1 - e - x_2) = 4(e - x_1).$$

Takto sme získali dve z troch rovníc. Poslednú získame dosadením do rovnice (2.32)

$$x_1 + q^3 x_2 = 0$$

Takouto transformáciou sme dostali nasledujúcu sústavu troch polynomiálnych rovníc

$$\begin{aligned} (1 - e + x_1) - 4(e + x_2)q &= 0 \\ 4(e - x_1) - (1 - e - x_2)q &= 0 \\ x_1 + x_2 q^3 &= 0. \end{aligned} \tag{2.40}$$

**Príklad 2.32.** V tomto príklade budeme uvažovať model taký, ako bol zavedený v predchádzajúcom texte, ale budeme ho analyzovať na konkrétnom zadaní. To znamená, že máme dvoch hráčov Robinsona a Piatka a dve komodity zlato a diamanty, ich funkcie užitočnosti zavedieme rovnicami (2.28) a rozdelenie zdrojov podľa (2.29). Parameter $e$ pevne zvolíme $e = \frac{1}{61}$.

Tento model je opäť popísaný sústavou rovníc (2.40), ktorej odvodenie je podrobne popísané v predchádzajúcom texte. Najskôr budeme túto sústavu riešiť všeobecne, teda bez dosadenia konkrétnej nami zvolenej hodnoty $e$.

V podkapitole 1.2.2 sme sa zaoberali metódami pre riešenie sústav rovníc. Väčšinou sa na rešenie používajú tzv. ekvivalentné úpravy. Keď sa pozrieme na našu sústavu, môžeme vidieť, že ručné riešenie by bolo veľmi obtiažne. Ďalšou možnosťou, ako sme ukázali v podkapitole 1.2.3, sú Gröbnerove bázy, ktorými môžeme takúto sústavu výrazne zjednodušiť. Bol ukázaný aj ručný výpočet, ten však v tomto príklade používať nebudeme. Príklad budeme riešiť pomocou programu *Wolfram Mathematica*.

Najskôr do programu zadáme sústavu rovníc a následne vypočítame príslušnú Gröbnerovu bázu a priradíme ju do premennej `gb`. Zavedieme zjednodušené značenie premenných, ktoré budeme v programe používať, $x := x_1$, $y := x_2$ a $z := q$. Tu je uvedený kód, ktorý popísaný výpočet vykoná

$\mathtt{a} = (1 - \mathtt{e} + \mathtt{x}) - 4(\mathtt{e} + \mathtt{y})\mathtt{z}$

$\mathtt{b} = 4(\mathtt{e} - \mathtt{x}) - (1 - \mathtt{e} - \mathtt{y})\mathtt{z}$

$\mathtt{c} = \mathtt{x} + \mathtt{y}\mathtt{z}^3$

`gb = GroebnerBasis`$[\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, \{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}]$.

Výsledkom je sústava štyroch rovníc o troch neznámych $x, y, z$ s parametrom $e$

$$\texttt{gb[1]} = 1 - 15\mathtt{e} + 4\mathtt{z} - 4\mathtt{z}^2 + \mathtt{z}^3 + 15\mathtt{e}\mathtt{z}^3$$

$$\texttt{gb[2]} = -15 + 30\mathtt{e} + 225\mathtt{e}^2 + 15\mathtt{y} + 225\mathtt{e}\mathtt{y} + 16\mathtt{z} - 4\mathtt{z}^2 - 60\mathtt{e}\mathtt{z}^2$$

$$\texttt{gb[3]} = -4 + \mathtt{z} + 15\mathtt{e}\mathtt{z} + 15\mathtt{y}\mathtt{z}$$

$$\texttt{gb[4]} = -1 - 15\mathtt{e} + 15\mathtt{x} + 4\mathtt{z}$$

Ako vidíme, prvá rovnica je len o jednej neznámej a tou je $z$, potom už závisí iba od parametra $e$. Teda túto rovnicu môžeme vyriešiť, znovu s použitím programu

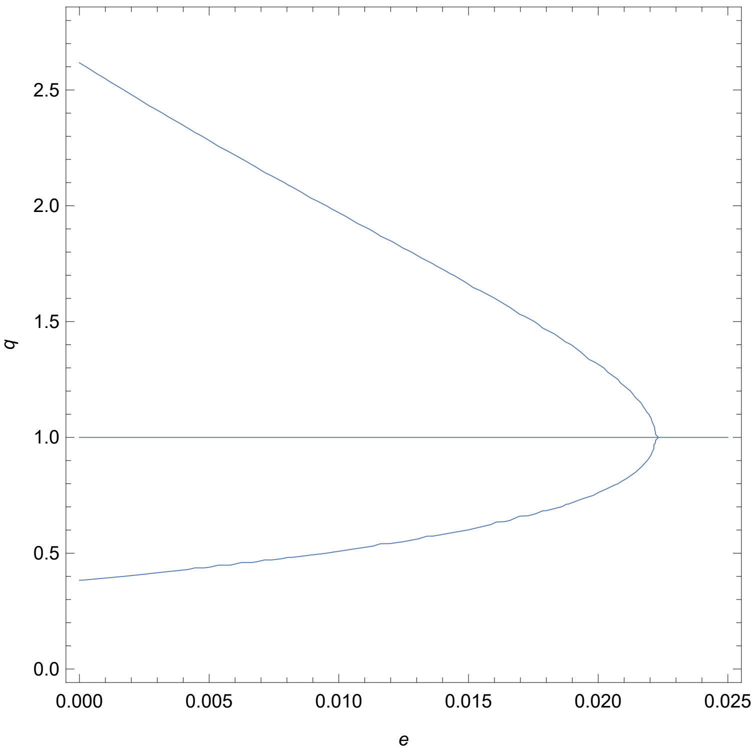
`Solve` $[\mathtt{gb}[[1]] == 0, \mathtt{z}]$.

Výsledkom sú tri reálne korene, preznačíme ich naspäť podľa pôvodného označenia

$$q = 1 \tag{2.41}$$

$$q = \frac{3 - 15e - \sqrt{5}\sqrt{1 - 42e - 135e^2}}{2(1 + 15e)} \tag{2.42}$$

$$q = \frac{3 - 15e + \sqrt{5}\sqrt{1 - 42e - 135e^2}}{2(1 + 15e)} \tag{2.43}$$




Graf 3: Reálne korene `gb[1]` pre hodnoty $e$, (Zdroj: vlastný)

V grafe 3 môžeme tieto korene vidieť, z obrázku tiež vidíme, že všetky tieto korene sú pre hodnoty $e \leq \frac{1}{45}$, ďalej z grafu vieme, že sú reálne a nezáporné. Pre $e = \frac{1}{45}$ má polynóm `gb[1]` jeden trojnásobný reálny koreň $q = 1$. Pre $e > \frac{1}{45}$ má tento polynóm dva komplexné korene a jeden reálny a to $q = 1$, $q = 1$ je koreňom polynómu `gb[1]` pre všetky hodnoty $e$, je v ňom teda jedinečná Arrow-Debreuova rovnováha.

V tomto kroku sme už dostatočne rozobrali všeobecné riešenie úlohy a môžeme sa vrátiť k nášmu príkladu. Pre pripomenutie, jedná sa o dvoch hráčov Robinsona a Piatka a dve komodity zlato a diamanty. Rozdelenie ich zdrojov pre zadané $e = \frac{1}{61}$ bude vyzerať

$$e^1 = \left(\frac{60}{61}, \frac{1}{61}\right), \qquad e^2 = \left(\frac{1}{61}, \frac{60}{61}\right).$$

Teda na začiatku hry má Robinson $\frac{60}{61}$ zlata a $\frac{1}{61}$ diamantov, tieto množstvá sú uvedené v pomere. Analogicky pre Piatka. Týmito počiatočnými kapitálmi hráči disponujú a ďalej ich môžu alokovať podľa svojho uváženia. Základným princpom je maximalizácia úžitku, teda sa budú počas hry snažiť predať a spätne nakúpiť komodity v takom pomere, aby mali ich funkcie užitočnosti maximálnu možnú hodnotu, v takom prípade sa dostanú do stavu Arrow-Debreuovej rovnováhy, kde hra končí. V hre musia dodržať princíp vyčistenia trhu, teda žiadne komodity nemôžu zostať nerozdelené.

Chceme nájsť všetky Arrow-Debreuove rovnováhy, ako už naznačilo všeobecné riešenie, tieto rovnováhy budú tri. Pre každý z troch koreňov $q$ daných rovnicami (2.41), (2.42) a (2.43), do ktorých dosadíme $e = \frac{1}{61}$. Ďalej už dokážeme dopočítať neznáme $p_2$, $x_1$, $x_2$ a nakoniec aj hľadané množstvá komodít $c_{11}$, $c_{12}$, $c_{21}$ a $c_{22}$.

Hodnoty budeme pre prehľadnosť zapisovať do tabuľky 4. Prvý stĺpec vyplníme hodnotami rovíc (2.41), (2.42) a (2.43) po dosadení $e = \frac{1}{61}$. V druhom stĺpci máme hodnoty ceny druhej komodity, v našom prípade sú to ceny diamantov, vypočítame ich ako $q^3$. Ďalší stĺpec obsahuje hodnoty $x_1$, rovnicu si vyjadríme z `gb[4]`

$$x_1 = \frac{1}{15}(15e - 4q + 1).$$

Do rovnice stačí dosadiť hodnotu $e$ a postupne všetky tri hodnoty $q$.
Podobne dostaneme ďalší stĺpec pre $x_2$, rovnicu si vyjadríme z `gb[3]`

$$x_2 = \frac{-15eq - q + 4}{15q}.$$

Podobne ako pri predchádzajúcom stĺpci dosadíme $e$ a vypočítame pre tri hodnoty $q$. V ďalšom stĺpci máme hodnoty pre množstvo prvej komodity u prvého hráča, to znamená Robinsonove rovnovážne množstvo zlata. Dostaneme ho zo spätnej substitúcie $c_{11} = x_1 + e_{11}$. Analogicky získame aj hodnoty Robinsonovho množstva vody, teda druhej komodity prvého hráča. Opäť spätne substituujeme $c_{12} = x_2 + e_{12}$. K doplneniu celej tabuľky nám už chýbajú iba rovnovážne množstvá jednotlivých komodít pre druhého hráča, teda Piatkove množstvá chleba a vody. Tieto hodnoty dostaneme z rovníc (2.36) a (2.37) z pôvodnej sústavy ôsmych rovníc. Po vyjadrení hľadaných hodnôt dostaneme závislosti, v ktorých hodnoty všetkých neznáme už poznáme

$$c_{21} = e_{11} + e_{21} - c_{11},$$

analogicky pre druhú komoditu

$$c_{22} = e_{12} + e_{22} - c_{12}.$$

Výsledkom je nasledujúca tabuľka hodnôt pre tri Arrow-Debreuove rovnováhy

Tab. 4: Arrow-Debreuove rovnováhy, (Zdroj: vlastný)

| $q$ | $p_2$ | $x_1$ | $x_2$ | $c_{11}$ | $c_{12}$ | $c_{21}$ | $c_{22}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0,634512$ | $0,255458$ | $-0,08614$ | $0,33721$ | $0,8975$ | $0,3536$ | $0,1025$ | $0,6464$ |
| $1$ | $1$ | $-0,18361$ | $0,18361$ | $0,8$ | $0,2$ | $0,2$ | $0,8$ |
| $1,576014$ | $3,914538$ | $-0,33721$ | $0,08614$ | $0,6464$ | $0,1025$ | $0,3536$ | $0,8975$ |

### 2.2.2 Strategická tržná hra

Budeme uvažovať jednoduchú strategickú tržnú hru v zmysle [18]. V tejto hre budeme predpokladať existenciu trhu, na ktorom sa všetky komodity predajú, teda nezostanú žiadne voľné, to hru výrazne zjednoduší. Takúto situáciu sme uvažovali už v predchádzajúcom príklade.

Ďalej budú v hre vystupovať dva typy hráčov s funkciami užitočnosti a rozdelením zdrojov zavedeným v predchádzajúcej podkapitole o viacnásobnej Arrow-Debreuovej rovnováhe rovnicami (2.28) a (2.29). Zmenou bude rozšírenie hry na takzvanú $N$-tú reprodukciu ekonomiky, ktorá bude pozostávať z $N$ rovnakých hráčov každého typu. Každého hráča teda môžeme charakterizovať jeho typom, ktorý budeme označovať $h = 1, 2$, typ hráča udáva jeho funkciu užitočnosti a tiež rozdelenie zdrojov. Druhou charakteristikou každého hráča bude jeho číslo v reprodukcii, ktoré budeme značiť $m \in \{1, 2, 3, ..., N\}$.

Pre lepšie porozumenie pojmov a označení, charakteristiku hry zhrnieme. Hra sa odohráva na trhu s dvomi komoditami $i = 1, 2$, sú tu taktiež dva typy hráčov $h = 1, 2$. Typ hráča je v skutočnosti jeho tendencia k nákupu, je to ekonomické správanie hráča, teda vypovedá o tom, aký úžitok mu prinesie daná komodita a tiež, ako bude s vlastnými zdrojmi ďalej nakladať. Typy hráčov si môžeme predstaviť napríklad ako spoločenské triedy, strednú a vyššiu trieda. Vyššia trieda bude mať väčšiu tendenciu nakupovať luxusný tovar, z ktorého stredná trieda nebude mať taký úžitok. Na druhej strane stredná trieda bude výraznejšie preferovať základné potraviny.

Priebeh hry je podobný ako v predchádzajúcom modele, aj teraz hráči počas hry predávajú svoje zdroje $e_{11}$ a $e_{21}$ za cenu $p_1$ a $e_{12}$, $e_{22}$ za cenu $p_2$ a následne za rovnaké ceny nakupujú opäť komodity $i$, ktorých nakúpené množstvá sú $c_{h,i}$. Opäť je základným princípom maximalizácia úžitku. Je tu však jedna zmena, ktorú predstavuje ponuka $b_{il}$ $i$-teho hráča pre komoditu $l$. Táto ponuka predstavuje množstvo peňažných prostriedkov, ktoré môže hráč ponúknuť za komodity, pri danej cene. Ponuka spolu s dopytom, ktorý predstavujú zdroje, sú dôležité pre stanovenie ceny komodít.

Teraz model zapíšeme matematicky pomocou sústavy rovníc, postupne sústavu odvodíme. Každý hráč $i = (h, m) \in I$ má stratégiu, ktorá pozostáva z ponuky $b_{i1}$ pre komoditu $1$ a ponuky $b_{i2}$ pre komoditu $2$, ktorých význam sme vysvetlili v predchádzajúcom texte. Ceny $p_l$ jednotlivých komodít sú stanovené ponukou a dopytom

$$p_l((b_i)_{i \in I}) \;=\; \frac{\sum_{i \in I} b_{il}}{\sum_{i \in I} e_{il}} \tag{2.44}$$

Ďalej je priebeh hry ovplyvnený rozpočtovými obmedzeniami

$$c_{il} \;=\; \frac{b_{il}}{p_l((b_j)_{j \in I})}, \tag{2.45}$$

$$b_{i1} + b_{i2} \;=\; p_1((b_j)_{j \in I})\, e_{i1} + p_2((b_j)_{j \in I})\, e_{i2}. \tag{2.46}$$

Našou úlohou je nájsť všetky symetrické Nashove rovnováhy. Keď zoberieme do úvahy špeciálny prípad s agregátnymi zdrojmi, ktorých suma je pre každú komoditu rovná $N$, matematicky zapísané

$$\sum_{i \in I} e_{i1} = N$$
$$\sum_{i \in I} e_{i2} = N,$$

priamym dosadením môžeme prepísať rozpočtové obmedzenia pre $i$-teho hráča takto

$$N\,(b_{i1} + b_{i2}) = e_{i1} \sum_{j \in I} b_{j1} + e_{i2} \sum_{j \in I} b_{j2} \tag{2.47}$$

$$c_{il} = N \frac{b_{il}}{\sum_{j \in I} b_{jl}}. \tag{2.48}$$

Podobne ako pri predchádzajúcom modele budeme úlohu riešiť pomocou viazaných extrémov, teda si zavedieme Lagrangeovu funkciu, kde $\mu$ je Lagrangeov multiplikátor.

Následnou deriváciou obdržíme podmienky pre každého hráča typu $1$

$$64\frac{[Nb_{21}+(N-1)b_{11}]/\left[Nb_{11}+Nb_{21}\right]^2}{[b_{11}/(Nb_{11}+Nb_{21})]^3}-\lambda(N-e_{11})=0,$$
$$\frac{[Nb_{22}+(N-1)b_{12}]/[Nb_{12}+Nb_{22}]^2}{[b_{12}/(Nb_{12}+Nb_{22})]^3}-\lambda(N-e_{12})=0.$$

Elimináciou multiplikátoru $\lambda$ z rovníc dostaneme polynomiálnu rovnicu, ktorá charakterizuje optimum pre hráča typu $1$. Multiplikátor eliminujeme jednoducho, z jednej z rovníc si vyjadríme $\lambda$, potom priamym dosadením a úpravou získame rovnicu

$$\begin{aligned}&64(Nb_{21}+(N-1)b_{11})(b_{11}+b_{21})b_{12}^3(N-e_{12})=\\&=(Nb_{22}+(N-1)b_{12})(b_{12}+b_{22})b_{11}^3(N-e_{11}),\end{aligned}\tag{2.49}$$

analogicky podmienka pre hráča typu $2$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{64}(Nb_{11}+(N-1)b_{21})(b_{11}+b_{21})b_{22}^3(N-e_{22})=\\&=(Nb_{12}+(N-1)b_{22})(b_{12}+b_{22})b_{21}^3(N-e_{21}).\end{aligned}\tag{2.50}$$

V tomto kroku máme sústavu troch rovníc (2.48), (2.49) a (2.50) o štyroch neznámych $b_{hl}$, kde $h=1,2$ a $l=1,2$. Tieto tri rovnice charakterizujú symetrickú Nashovu rovnováhu, avšak aby sme dostali štvorcovú[20] sústavu polynomiálnych rovníc, musíme pridať ďalšiu rovnicu a tou je rovnica pre normalizáciu ponúk. Pridáme rovnicu

$$b_{11}+b_{12}+b_{21}+b_{22}=10.\tag{2.51}$$

Teraz už máme štvorcovú sústavu rovníc. Keď sa na tieto rovnice pozrieme detailnejšie, vidíme, že sú vždy splnené pre $b_{11}=b_{12}=0$ alebo $b_{21}=b_{22}=0$. Teda tento systém má nekonečne veľa riešení. Aby sme zabránili takýmto riešeniam, pridáme podmienku, ktorá zaistí, že všetky ponuky musia byť rôzne od nuly. Za týmto účelom zavedieme premennú $t$, ktorá spĺňa nasledujúcu rovnicu

$$1-tb_{11}b_{12}b_{21}b_{22}=0.\tag{2.52}$$

Ďalej do sústavy pridáme rovnicu vyčistenia trhu. Zostavíme ju dosadením (2.44) do rovnice (2.46) pre prvý typ hráča

$$b_{11}+b_{12}=\frac{b_{11}+b_{21}}{N}e_{11}+\frac{b_{12}+b_{22}}{N}e_{12}.$$

[20]počet rovníc sústavy sa rovná počtu neznámych

Následnou úpravou dostaneme ďalšiu rovnicu sústavy

$$b_{11}e_{21} + b_{12}e_{22} - b_{21}e_{11} - b_{22}e_{12} = 0 \tag{2.53}$$

Nakoniec do modelu zahrnieme ešte štyri rovnice, ktoré popisujú rozdelenie spotreby jednotlivých typov hráčov pre každú komoditu

$$c_{11}(b_{11} + b_{21}) - b_{11} = 0, \tag{2.54}$$

$$c_{12}(b_{12} + b_{22}) - b_{12} = 0, \tag{2.55}$$

$$c_{21}(b_{11} + b_{21}) - b_{21} = 0, \tag{2.56}$$

$$c_{22}(b_{12} + b_{22}) - b_{22} = 0. \tag{2.57}$$

Výsledná sústava deviatich rovníc, ktorá realizuje popis rozoberaného ekonomického modelu vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned}
64(Nb_{21} + (N-1)b_{11})(b_{11} + b_{21})b_{12}^3(N - e_{12}) - \\
(Nb_{22} + (N-1)b_{12})(b_{12} + b_{22})b_{11}^3(N - e_{11}) = 0, \\
\frac{1}{64}(Nb_{11} + (N-1)b_{21})(b_{11} + b_{21})b_{22}^3(N - e_{22}) - \\
(Nb_{12} + (N-1)b_{22})(b_{12} + b_{22})b_{21}^3(N - e_{21}) = 0 \\
10 - b_{11} - b_{12} - b_{21} - b_{22} = 0 \\
1 - tb_{11}b_{12}b_{21}b_{22} = 0 \\
b_{11}e_{21} + b_{12}e_{22} - b_{21}e_{11} - b_{22}e_{12} = 0 \\
c_{11}(b_{11} + b_{21}) - b_{11} = 0 \\
c_{12}(b_{12} + b_{22}) - b_{12} = 0 \\
c_{21}(b_{11} + b_{21}) - b_{21} = 0 \\
c_{22}(b_{12} + b_{22}) - b_{22} = 0.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Teraz, keď už máme zostavený hľadaný model, môžeme ho začať riešiť. Keďže jeho popis je tvorený sústavou polynomiálnych rovníc, môžeme použiť metódu Gröbnerovej bázy. Jej výpočet uskutočníme opäť pomocou programu *Wolfram Mathematica*.

Všeobecný zápis riešenia je príliš zložitý, z toho dôvodu uvedieme výpočet konkrétneho riešenia pre $e = 1/61$. Výsledky pre rôzne hodnoty $N$ sú uvedené v tabuľke 5, v poslednom riadku sú tiež uvedené tri Walrasove rovnováhy, ktoré sme vypočítali v predchádzajúcej kapitole a ich hodnoty sme uviedli v tabuľke 4. Ako môžeme vidieť Nashova rovnováha v strategickej hre pri zvyšujúcom sa počte hráčov $N$ konverguje k Walrasovej rovnováhe v príslušnom modele všeobecnej ekonomickej rovnováhy.

Tab. 5: Rovnováhy pre rôzne $N$, (Zdroj: vlastný)

| $N$ | $c_{11}(1)$ | $c_{12}(1)$ | $c_{11}(2)$ | $c_{12}(2)$ | $c_{11}(3)$ | $c_{12}(3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $0,8873$ | $0,1127$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| 2 | $0,8128$ | $0,1872$ | $0,9058$ | $0,3328$ | $0,6672$ | $0,0942$ |
| 10 | $0,8020$ | $0,1980$ | $0,9023$ | $0,3591$ | $0,6409$ | $0,0977$ |
| 100 | $0,8002$ | $0,1998$ | $0,8980$ | $0,3543$ | $0,6457$ | $0,1021$ |
| 1000 | $0,80002$ | $0,19998$ | $0,89752$ | $0,35367$ | $0,64633$ | $0,10248$ |
| WE | $0,8$ | $0,2$ | $0,8975$ | $0,3536$ | $0,6464$ | $0,1025$ |

## 2.3 Zhrnutie analytickej časti

V analytickej časti práce sme sa zamerali na priblíženie a rozbor vybraných ekonomických modelov. Cieľom bolo modely rozanalyzovať z ekonomického hľadiska a následne zostaviť matematické vyjadrenie prostredníctvom sústavy rovníc. Taktiež bol pridaný názorný príklad, na ktorom sme sa pokúsili vysvetliť ako model pracuje, vyriešiť ho, teda nájsť rovnovážne hodnoty a upozorniť na dôležité aspekty či už po ekonomickej alebo matematickej stránke.

# 3 VLASTNÝ NÁVRH RIEŠENIA

Cieľom tejto časti práce bolo navrhnúť algoritmus, ktorý modely z predchádzajúcej kapitoly vypočíta a interpretuje získané výsledky. Táto kapitola slúži takisto ako detailný manuál pre používateľa spomínaného algoritmu doplnený o obrázky z matematického softwaru *Wolfram Mathematica*, v ktorom je program realizovaný.

## 3.1 Balík v programe Wolfram Mathematica

Návrh na riešenie ekonomických modelov som spracovala v prostredí programu *Wolfram Mathematica*. Výstupom práce je programový balík, ktorý obsahuje tri funkcie, jednu pre každý model uvedený v analytickej časti, teda Závod v zbrojení, model Arrow-Debreuovej rovnováhy a Strategická tržná hra. Kód balíku je uvedený v Prílohe 2.

Programový balík je aplikácia, do ktorej môžeme napísať kód pre viacero funckií a v prípade potreby, jednoducho tento balík zavolať v inej aplikácii a použiť už naprogramované funkcie. V programe *Wolfram Mathematica* má súbor s balíkom príponu `*.m`.

Náš vytvorený balík sa volá `BP.m`. Na začiatku rozoberieme jeho štruktúru, tá vyzerá nasledovne

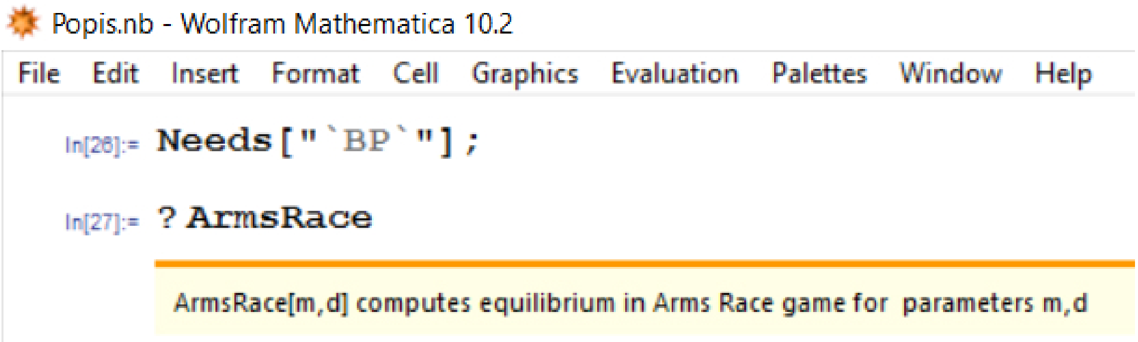
```
BeginPackage["`BP` "];
   popis použitia funkcie
Begin["`Private` "];
   samotný kód
End[]
EndPackage[]
```

Do tejto štruktúry už môžeme priamo písať samotný kód. Popis použitia funkcie slúži pre používateľa ako návod, ktorý mu hovorí, k čomu daná funkcia slúži, ako ju správne použiť a ako zapísať jej parametre. Vytvorený balík obsahuje tri funkcie, časť s popisom použitia funkcií vyzerá nasledovne

```
ArmsRace::usage="ArmsRace[m,d] computes equilibrium in Arms
    Race game for parameters m,d ";
ArrowDebreu::usage="ArrowDebreu[a,e] computes Arrow-Debreu
```

```
    equilibrium for parameters a,e ";
Strateg::usage="Strateg[a,e] computes equilibrium in
    Strategic Market Game for parameters a,e ";
```

Získanie popisu sa vykoná jednoduchým príkazom, v našom prípade napríklad `?ArmsRace`, ako môžeme vidieť na obrázku 1.




Obr. 1: Získanie popisu funkcie, (Zdroj: vlastný)

## 3.2 Program - Závod v zbrojení

Prvou funkciou v balíku bude výpočet Bayes-Nashovej rovnováhy v hre Závod v zbrojení, ktorú sme detailne rozanalyzovali v kapitole 2.1. Teraz si popíšeme algoritmus výpočtu a jeho aplikácie pri riešení konkrétnych problémov.

### 3.2.1 Rozbor algoritmu

Na začiatku stanovíme, akú má algoritmus funkciu. Na vstupe používateľ zadá dve hodnoty, pre ktoré bude rovnováha počítaná, označenie budeme dodržiavať podľa kapitoly 2.1. Týmito hodnotami bude získaná výhra $\mu$ hráča, ktorý zvolí stratégiu *B*, zatiaľ čo jeho súper zvolí stratégiu *N*. A naopak utŕžená prehra $d$ hráča, ktorý zvolí stratégiu *N*, zatiaľ čo jeho súper zvolí stratégiu *B*, bude druhým vstupom. Výstupom programu budú hodnoty $c^L, c^*$ a $c^H$. Sú to hraničné hodnoty medzi jednotlivými typmi hráčov a tiež medzi voľbou optimálnej stratégie. Budeme teda sledovať, ako tieto indiferentné hodnoty závisia na výške prehry a výhry hráča. V programe budeme používať zjednodušené značenie.

- **VSTUP:** `m, d`
- **VÝSTUP:** `L, S, H`

Algoritmus vychádza z modelu, ktorý sme už zostavili, teda z rovníc (2.19) - (2.21), v programe

```
r1 = (H - L)L - (1 - H)m;
r2 = [1 - 2H - L]H - Ld;
r3 = dL+(1 - H)(m - S) - LS;
```

Hneď na začiatku môžeme do sústavy dosadiť používateľom zadané hodnoty `m` a `d`.

Teraz, keď už máme zadaný konkrétny model, môžeme ho začať riešiť. Vzhľadom k tomu, že sa jedná o polynomiálnu sústavu rovníc, môžeme použiť metódu Gröbnerovej bázy. Príkaz na jej riešenie je v programe *Mathematica* priamo implementovaný. Použijeme ho preto na vyriešenie našej sústavy a riešenie si uložíme do premennej `gb`.

```
gb = GroebnerBasis[{ r1,r2,r3 },S];
```

Táto premenná teraz obsahuje tri rovnice. Prvou je rovnica tretieho stupňa o jednej neznámej `L`. Druhá rovnica je lineárnou závislosťou neznámej `H` na `L` a posledná z nich je závislosť `S` na `L`. Tieto rovnice sme uložili do premenných `a`, `b` a `c`, aby sa s nimi ďalej lepšie pracovalo.

```
a = gb[[1]];
b = gb[[3]];
c = gb[[2]];
```

V tomto kroku už stačí sústavu rovníc iba vyriešiť, avšak je potrebné dbať na isté obmedzenia. Prvým obmedzením je podmienka $d > 1$, ktorej význam sme vysvetlili pri analýze modelu. Splnenie tejto podmienky zaisťuje vetvenie `If`, kde vo vetve, ktorá sa vykoná v prípade porušenia podmienky je jednoduchý výpis,

```
Print["POZOR -> NIE SU SPLNENE PODMIENKY MODELU! -> d<=1"];
```

pri splnení podmienky sa vykoná sekvencia príkazov, ktorú si ďalej popíšeme.

Ako sme už uviedli, rovnica `a` je rovnicou tretieho stupňa o jednej neznámej `L`. Preto prvým krokom bude jej vyriešenie, výsledkom sú tri korene, ako nám naznačil stupeň rovnice, ktoré uložíme do premennej `sola`.

```
sola = Solve[a==0, L][[All,1,2]];
```

Ďalej nasleduje nájdenie koreňov zvyšných dvoch rovníc. Tento výpočet prebehne v cykle `For`, ktorý postupne riešenia uloží do premenných `bb[i]` a `cc[i]`, pre `i` $= 1, 2, 3$. Postup výpočtu je nasledovný, najskôr sa do rovnice `b` dosadí namiesto premennej `L` vypočítaný koreň (postupne 1., 2. a 3.koreň rovnice), rovnica sa položí rovná nule a vypočíta sa koreň pre premennú `S`. Analogický je výpočet koreňov rovnice `c`.

```
For[i=1, i<4, i++,
    bb[i] = Solve[b/. L->sola[[i]]  == 0, S][[All,1,2]];
    cc[i] = Solve[c/. L->sola[[i]]  == 0, H][[All,1,2]];];
```

Korene rovníc už máme vypočítané, musíme však posúdiť ich význam v danom modele a prostredníctvom výpisu v programe ich správne používateľovi interpretovať. Najskôr vytvoríme tabuľku $3 \times 3$, do ktorej hodnoty koreňov zapíšeme tak, že každý riadok tabuľky odpovedá jednému rovnovážnemu riešeniu.

```
data = Table[0,3,3];
For[i=1, i<4, i++,
    data[[i]] = {sola[[i]],bb[i][[1]],cc[i][[1]]};];
```

Nasledujúca sekvencia príkazov je zapuzdrená do jedného `For` cyklu, ktorého počet opakovaní je rovný počtu riadkov tabuľky `data`. Pevné číslo tu nie je zadané z dôvodu mazania riadkov vo vnútri cyklu.

```
For[i=1, i < (Dimensions[data][[1]] +1),i++, príkazy ];
```

Prvý príkaz v tejto sekvencii zaisťuje upozornenie používateľa na riešenie, ktoré nie je v obore reálnych čísel. Navyše do premennej `imag`, ktorá je booleanovského typu, si v prípade imaginárneho riešenia uložíme hodnotu `true`. Táto premenná nám bude slúžiť pri finálnom výpise výsledkov pre používateľa.

```
If[Im[data[[i,1]]] != 0,
    Print[Style["POZOR -> RIESENIE NIE JE V OBORE REALNYCH
    CISEL", FontWeight->Bold, FontColor->Red]];
    imag = true; Break[]];
```

Ako sme uviedli už pri zostavovaní modelu, riešenia pre $\mu < 0,0558568$ získame tri. Jedno z nich je záporné, pre druhé platí, že pre $\mu \longrightarrow 0$ platí $c^H \longrightarrow \frac{1}{2}$, toto riešenie nespĺňa podmienku lemy, ale je prípustné. Posledné riešenie je práve hľadaným riešením, platí preň predpoklad z lemy, že pre $\mu \longrightarrow 0$ platí $c^H \longrightarrow 0$.

Najskôr teda z modelu vylúčime neprípustné riešenie, teda odstránime záporné riešenia. Týmto spôsobom získame všetky prípustné riešenia daného modelu.

```
For[j=1, j<(Dimensions[data][[2]]+1), j++,
    If [Re[data[[i,j]]]<0, data=Delete[data,i]]; Break[]];
```

Avšak, my chceme získať jediné hľadané riešenie nášho modelu, ak je to pri daných vstupoch možné. Z krátkej analýzy zistíme, že z dvoch prípustných riešení je hľadaným to riešenie, ktoré má vyššiu hodnotu $c^L$. Budeme teda v cykle hľadať maximum v prvom stĺpci matice riešení `data`. Do premennej `max` si uložíme číslo riadku, v ktorom sa nachádza hľadané riešenie. Pred cyklom sme nastavili hodnotu `max = 1;`, aby sme mali riešenia s čím porovnávať.

```
If[Re[data[[max ,1]]]< Re[data[[i,1]]], max =i];
```

V tomto kroku už máme model vyriešený, nakoniec nasleduje výpis výsledkov modelu. Najskôr vypíšeme prípustné riešenia modelu, tie sme dostali v prípade reálnych, ako aj imaginárnych riešení.

```
Print["PRIPUSTNE RIESENIA SU:"];
For[i = 1, i < Dimensions[data][[1]] + 1, i++,
    Print["{L, S, H } = ", data[[i]]];];
```

Hľadané riešenie však vieme nájsť iba pre riešenia z oboru reálnych čísel, tu prichádza na rad premenná `imag`, do ktorej sme si uložili hodntou `true` v prípade, že model má imaginárne riešenie. Teda výpis hľadaného riešenia sa uskutoční iba v prípade, že jej hodnota bude `false`.

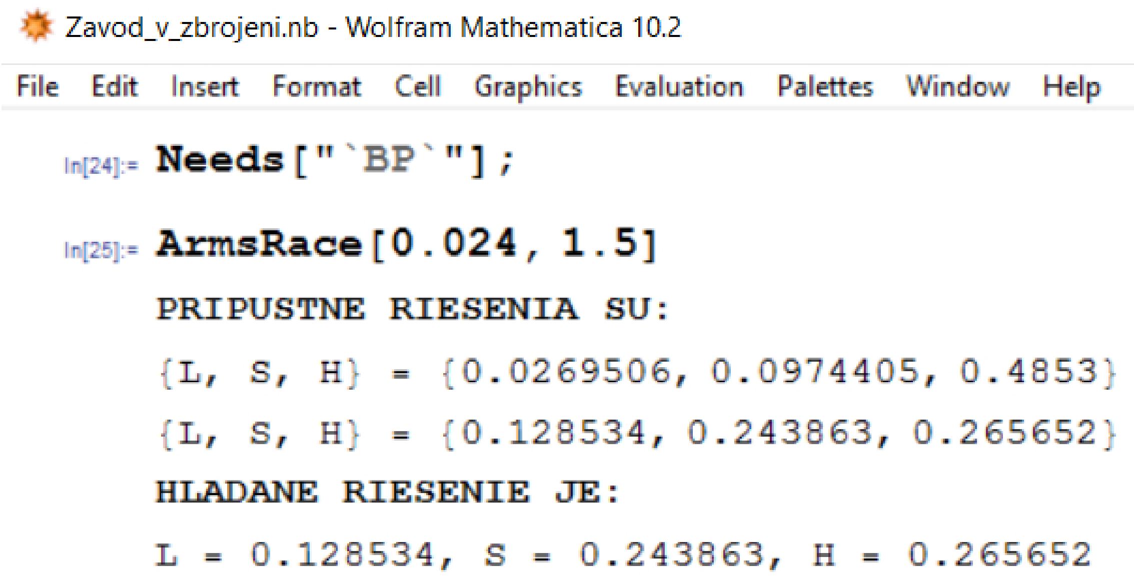
```
If[imag == false,
    Print[Style["HLADANE RIESENIE JE:", FontWeight->Bold]];
    Print["L = ",data[[max,1]],", S = ",data[[max,2]],",
    H = ",data[[max,3]]]]
```

Týmto spôsobom máme vytvorený algoritmus výpočtu riešenia zostaveného modelu pre hru Závod v zbrojení a súčasne aj výpis získaných výsledkov. Teraz si na príkladoch ukážeme, ako algoritmus funguje a ako ho možno používať.

### 3.2.2 Príklad použitia

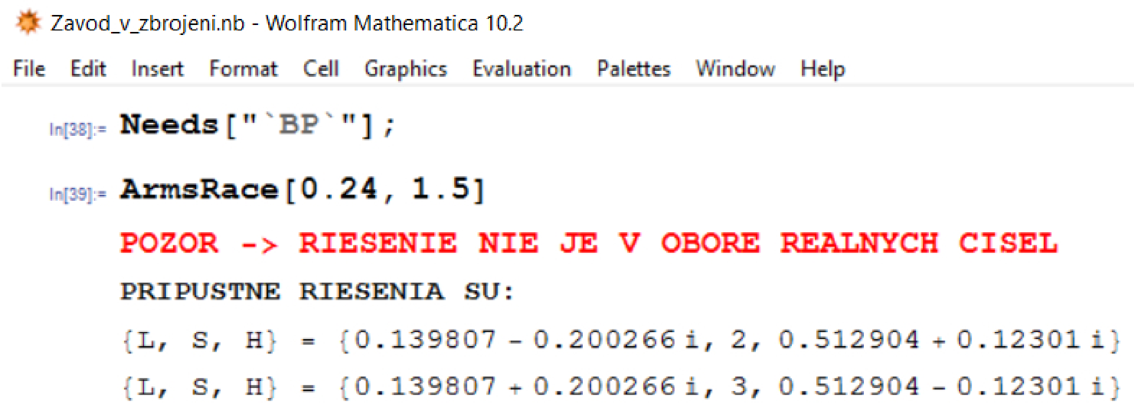
V tejto časti na príkladoch ukážeme, ako algoritmus pre výpočet rovnováhy v hre Závod v zbrojení používať. Algoritmus ako aj ilustratívne príklady sú vytvorené v prostredí programu *Wolfram Mathematica*.

Na prvom príklade ukážeme riešenie modelu pre hodnoty `m = 0,024` a `d = 1,5`. Pre tieto hodnoty premenných existuje riešenie v obore reálnych čísel, získame tak prípustné riešenia, ako aj jediné hľadané riešenie modelu. Pre dané $d$ máme riešenia pre rôzne `m` zobrazené v grafe 2, presný výsledok teda môžeme skonfrontovať. Na obrázku 2 vidíme, ako toto riešenie prebehne v programe Wolfram Mathematica.



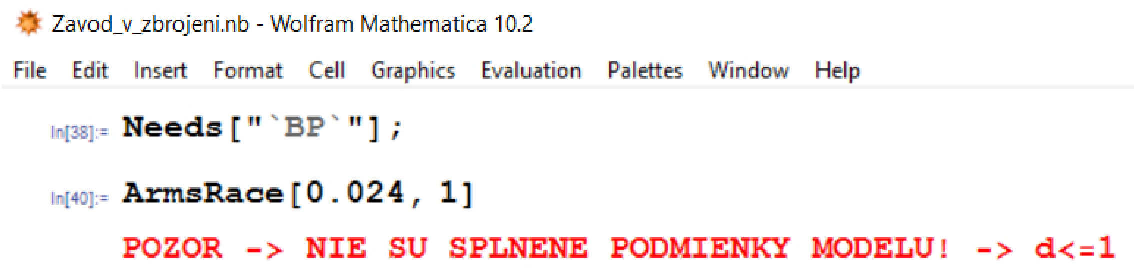

Obr. 2: Zavod v zbrojeni - hľadané riešenie, (Zdroj: vlastný)

Druhý príklad ilustruje imaginárne riešenie daného modelu, existuje teda iba prípustné riešenie, nie však už nami hľadané, jediné riešenie tohto modelu. Zadanie je `m = 0,24` a `d = 1,5`, na obrázku 3 vidíme riešenie v prostredí *Wolfram Mathematica*.




Obr. 3: Zavod v zbrojeni - imaginárne riešenie, (Zdroj: vlastný)

Posledný príklad ilustruje situáciu, ktorá nastane po zadaní d = 1 a ľubovoľného m, teda po porušení podmienky d>1. Výstup môžeme vidieť na obrázku 4.




Obr. 4: Zavod v zbrojeni - $d = 1$, (Zdroj: vlastný)

## 3.3 Program - Viacnásobná Arrow-Debreuova rovnováha

Ďalšia funkcia z balíku slúži k výpočtu Arrow-Debreuovej rovnováhy modelu čiastkových trhov, aký sme zaviedli v kapitole 2.2.1. Budeme teda hľadať optimálne rozdelenie komodít v hre dvoch hráčov s cieľom maximalizácie zisku. Najskôr rozoberieme algoritmus výpočtu vlastnej realizácie funkcie v programe *Wolfram Mathematica* a na záver tejto časti uvedieme niekoľko príkladov použitia.

### 3.3.1 Rozbor algoritmu

Algoritmus je navrhnutý tak, aby po zadaní hodnoty a a e vyhodnotil model a vypočítal konkrétne rovnovážne hodnoty. Vysvetlíme si význam vstupov, keď si spomenieme na zavedený model v kapitole 2.2.1, na začiatku celého výpočtu stáli funkcie užitočnosti popísané rovniacmi (2.28) pre každého hráča, ktoré sme postupne maximalizovali. Čitatele zlomkov konštánt stojacich pred premennými, označujúcimi množstvá jednotlivých komodít, v rovnici prvého hráča môžeme označiť premennými $a$ a $b$. Vďaka symetrii modelu budú rovnaké tieto premenné rovnaké aj pre druhého hráča, avšak v opačnom poradí. Pre zjednodušenie modelu, bez ujmy na všeobecnosti, môžeme tieto premenné $a$ a $b$ vyjadriť v pomere, teda určíme hodnotu $b = 1$ a následne $a$ je uvedené v závislosti na $b$. Takto máme zavedený pomer úžitkov z jednotlivých komodít

$$u^1(c_1, c_2) = -\frac{\mathtt{a}}{2}c_1^{-2} - \frac{1}{2}c_2^{-2} \qquad u^2(c_1, c_2) = -\frac{1}{2}c_1^{-2} - \frac{\mathtt{a}}{2}c_2^{-2}. \tag{3.59}$$

Vráťme sa naspäť k nášmu programu. Z vyššie vysvetleného dôvodu je vstupom funkcie iba hodnota `a`, ktorá vyjadruje pomer úžitku prvej komodity pri jednotkovom úžitku druhej komodity prvého hráča. Je teda parametrom funkcie užitočnosti, ktorú zvolí používateľ. Premennú `b` v programe nastávime konštantne na honotu 1.

```
b = 1
```

Druhý vstup `e` nám hovorí o počiatočnom rozdelení zdrojov komodít pre jednotlivých hráčov, znova z modelu, konkrétne z rovnice (2.29) môžeme vidieť, že ide o symetrickú veličinu.

- **VSTUP:** `a, e`
- **VÝSTUP:** tabuľka rovnováh - `c11, c12, c21, c22`

Model, ktorý sme zostavili v analytickej časti, pre konkrétne hodnoty je vyjadrený rovnicami (2.40). Do programu však musíme s modelom pracovať vo všeobecnom tvare, ktorého zadanie vyzerá nasledovne.

```
r1 = b^(1/3) * (1 - e + x) - a^(1/3) * (e + y)*z;
r2 = a^(1/3) * (e - x) - b^(1/3) * (1 - e - y)*z;
r3 = x + y * z^3;
```

Po tomto zadaní program automaticky dosadí zadanú hodnotu `a` a konštantu `b` do príslušných premenných v rovniciach modelu. Hodnotu `e` zatiaľ nebudeme do modelu dosádzať, chceme totižto vypočítať jej kritickú hodnotu, takto označíme hodnotu, pre ktorú existuje iba jedna rovnováha. Z analýzy modelu vieme, že všeobecne existujú tri rovnováhy, teda kritická hodnota je hodnota, v ktorej sústava bude mať jeden trojnásobný koreň.

Aby sme vypočítali kritickú hodnotu, v programe označíme `ekrit`, musíme vypočítať tento trojnásobný koreň. Zadaná sústava rovníc spĺňa predpoklady pre použitie Gröbnerovej bázy, preto ju môžeme vyriešiť použitím implementovaného príkazu a výslednú sústavu rovníc uložiť do premennej `gb`. Prvá rovnica novej sústavy je rovnicou tretieho stupňa v jednej premennej `z`, preto túto rovnicu môžeme pre túto premennú vyriešiť. Získame dve rovnice v závislosti na `e` a jeden koreň `e = 1`, ktorý zodpovedá všeobecnej tržnej rovnováhe pre rôzne vstupy, ako sme vysvetlili pri analýze modelu. Trojnásobný koreň teda dosiahneme pre také `e`, pre ktoré sa spomínané dve rovnice budú rovnať. Týmto porovnaním získame dva korene, z ktorých jeden bude kladný a druhý záporný, naša kritická hodnota je pre kladné `e`. Do premennej `ekrit` teda priradíme tento kladný koreň. Po získaní kritickej hodnoty už môžeme dosadiť užívateľský vstup do premennej `e`, ktorá sa automaticky dosadí do rovníc modelu.

```
gb = GroebnerBasis[{r1,r2,r3},{x,y,z}];
zz = NSolve[gb[[1]]==0, z][[All,1,2]];
ekrit = Solve[zz[[2]] == zz[[3]], e][[All,1,2]][[2]];
e=inpute;
```

Zvyšok funkcie je zapuzdrený vo vetvení `If`, ktorého úlohou je umožniť riešenie modelu iba v prípade splnenia podmienky $e \leq ekrit$, v opačnom prípade sú korene modelu imaginárne čísla.

```
If[e <= ekrit,
```

V prípade porušenia podmienky, teda v tzv. else vetve vetvenia, sa uskutoční chybový výpis.

```
Print[Style["POZOR -> e > ekrit -> RIESENIA NIE SU REALNE
    CISLA, pre model taketo riesenie nema vyznam ",
    FontWeight->Bold, FontColor->Red]]
```

Všetky nasledujúce príkazy sa nachádzajú v kladnej vetve vetvenia, teda pri splnení podmienky `e <= ekrit`. Na zadanú sústavu rovníc po dosadení konkrétnej zadanej hodnoty `e` ešte raz aplikujeme Gröbnerovu bázu pre zjednodušenie ďalšieho výpočtu. Do premennej `gb` uložíme výslednú zjednodušenú sústavu.

```
gb = GroebnerBasis[{r1,r2,r3},{x,y,z}];
```

V premennej `gb` máme teraz uloženú sústavu troch rovníc o neznámych `x, y, z`. Pre pripomenutie, pri zavedení modelu sme zvolili toto označenie premenných pre jednoduchšie prácu v programe. Jednotlivé premenné v modele majú nasledujúci význam `x`:= $x_1$, `y`:= $x_2$ a `z`:= $q$, podrobnejšia interpretácia bola zavedená v kapitole 2.2.1.

Vráťme sa k obsahu premennej `gb`. Prvou rovnicou sústavy, ako sme už spomínali pri hľadaní hodnoty `ekrit`, je rovnica tretieho stupňa v jednej premennej `z`, ktorú už máme vyriešenú, výsledkom sú tri korene, ktoré máme uložené v premennej `zz`.

Druhá rovnica v `gb` je závislosť premennej `y` na premennej `z` v prvej a druhej mocnice, ktorej hodnoty však už poznáme, teda ich môžeme do rovnice dosadiť a vypočítať aj korene pre `y`, ktoré uložíme do premennej `yyy[[i]]` pre `i = 1,2,3` pre jednotlivé korene `zz[[i]]`.

V poslednej rovnici je lineárna závislosť premennej `x` na premennej `z`. To znamená, že aj korene tejto rovnice môžeme vypočítať analogicky ako to bolo pre premennú `y`. Výsledok uložíme do premennej `xxx[[i]]`.

Teraz už môžeme vypočítať hľadané hodnoty množstiev jednotlivých komodít, pre všetky tri rovnováhy. vzorec pre výpočet sme zaviedli pri zostavovaní modelu. Pre tri rovnováhy môžeme vypočítať hodnoty `c11[i], c12[i], c21[i]` a `c22[i]`.

Ako sme si mohli všimnúť, pre jednotlivé `i = 1,2,3` sa postup výpočtu nemení, z tohto dôvodu môžeme použiť cyklus `For`. Výpočet, ktorý sme teraz popísali je uskutočnení touto postupnosťou príkazov.

```
For[i=1, i<4, i++,
   yy[i] = gb[[2]] /. z->zz[[i]];
   yyy[i] = Solve[yy[i]==0, y][[All,1,2]];
   xx[i] = gb[[3]] /. z->zz[[i]];
   xxx[i] = Solve[xx[i]==0, x][[All,1,2]];

   c11[i] = xxx[i][[1]] + 1 - e;
   c12[i] = yyy[i][[1]] + e;
   c21[i] = 1 - c11[i];
   c22[i] = 1 - c12[i]; ];
```

V tejto chvíli už prebehol výpočet a všetky výsledky máme uložené v premenných. Nasleduje výpis rovnovážnych stavov. Najvhodnejšou voľbou z hľadiska prehľadnosti výpisu bude tabuľka, ako prvé si ju vytvoríme, so záhlavím bude mať 4 riadky a 8 stĺpcov. Do je prvého riadku vypíšeme záhlavie, popis uskutočníme podľa značenia zavedeného v modele. Hodnoty do tabuľky vypíšeme pomocou `For` cyklu. Takto máme vyplnenú tabuľku pre tri rovnovážne stavy.

Z hľadiska lepšej interpretácie pre používateľa, sme sa rozhodli pridať do výpisu jedno vetvetvenie `If`. Pre `ekrit` platí, že rovnováha má trojnásobný koreň, z pohľadu výpisu by to znamenalo tri rovnaké riadky tabuľky. Teda toto vetvenie v prípade, že `e == ekrit`, vypíše iba prvé dva riadky tabuľky, teda záhlavie a jednu rovnováhu. V opačnom prípade je výstupom celá tabuľka s tromi rovnovážnymi stavmi. Výpis ako sme ho práve popísali nám zabezpečí nasledujúca časť kódu.

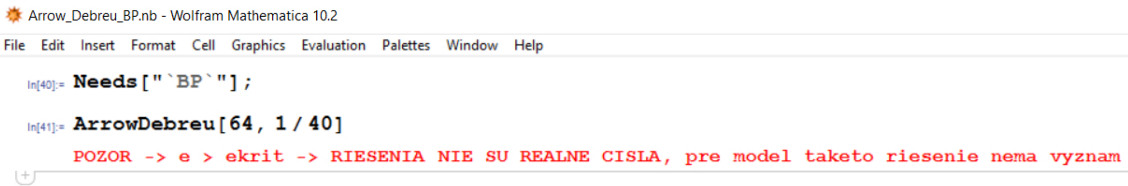
```
data = Table[0,{4},{8}];
data[[1]] = {"q", "p2", "x1", "x2", "c11", "c12", "c21",
    "c22"};
For[ i=1, i<4, i++,
    data[[i+1]] = {zz[[i]],zz[[i]]^3, xxx[i][[1]],
        yyy[i][[1]], c11[i], c12[i], c21[i], c22[i]}
    ];
If[ e == ekrit,
    Return[{data[[1]],data[[2]]}],
    Return[data]
    ],
```

Takto máme zostavený vlastný algoritmus výpočtu Arrow-Debreuovej rovnováhy, teda viacnásobnej Nashovej rovnováhy pre daný ekonomický model, ktorého výstupom je prehľadný výpis získaných výsledkov. Teraz si na niekoľkých jednoduchých príkladoch ukážeme, ako funkcia funguje a ako ju môžeme používať, samozrejme pridáme obrázky použitia z prostredia *Mathematica*.

### 3.3.2 Príklad použitia

Rovnako, ako pri predchádzajúcom modele, aj v tejto časti uvedieme názorné príklady použitia algoritmu v prostredí *Mathematica*.

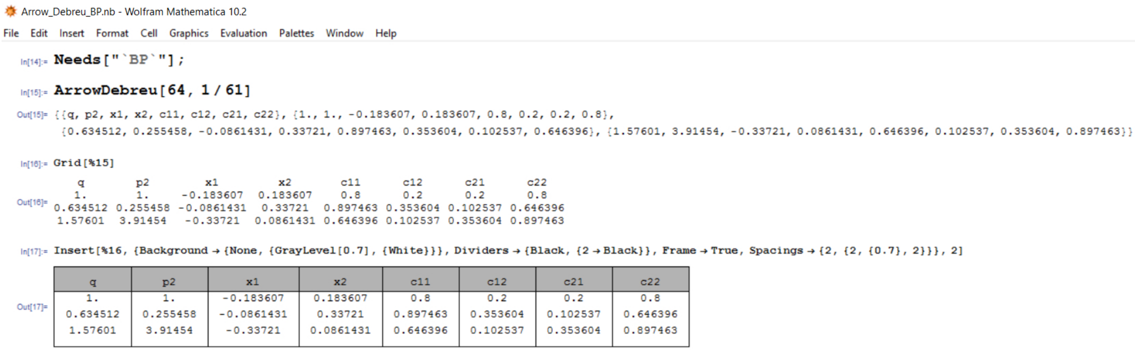
Na prvom príklade demonštrujeme funkčnú podmienku celého modelu $e \leq e_{krit}$. Zadanie príkladu, ktorý budeme chcieť riešiť znie $b = 64$, $e = \frac{1}{40}$. Na obrázku 5 môžeme vidieť výstup programu po zadaní zvolených parametrov do modelu Arrow-Debreuovej rovnováhy.




Obr. 5: Arrow-Debreuova rovnováha - e $= \frac{1}{40}$, (Zdroj: vlastný)

Druhý príklad ilustruje hľadané riešenie, použili sme rovnaké zadanie ako v príklade v kapitole 2.2.1. V programe je zápis `b = 64` a `e = 1/61`. Môžeme teda porovnať výsledky, ktoré sme získali riešením a tie, ktoré dostaneme po zavolaní funkcie.

Výstupom je tabuľka, ktorá však z dôvodu následného používania výstupov tejto funkcie v inej funkcii, v našom treťom modele, nie je upravená. Avšak prostredie programu je veľmi intuitívne a úpravu výpisu môžeme uskutočniť aj priamo v notebooku prostredníctvom tzv. Suggestions Bar. Ten sa po vypísaní výstupu zobrazí pod posledným riadkom. Tam môžeme jednoducho zvoliť v ponuke `Display as` možnosť `Grid`. Tu ale možnosti Suggestions Baru nekončia, môžeme navyše zvoliť úpravu tabuľky, ako je zarovnanie, pridanie hlavičky alebo úprava štýlu. My sme, ako môžeme vidieť na obrázku 6, v našom ilustračnom príkalde zvolili možnosť úpravy štýlu a to šedé podfarbenie záhlavia tabuľky.



Arrow_Debreu_BP.nb - Wolfram Mathematica 10.2

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

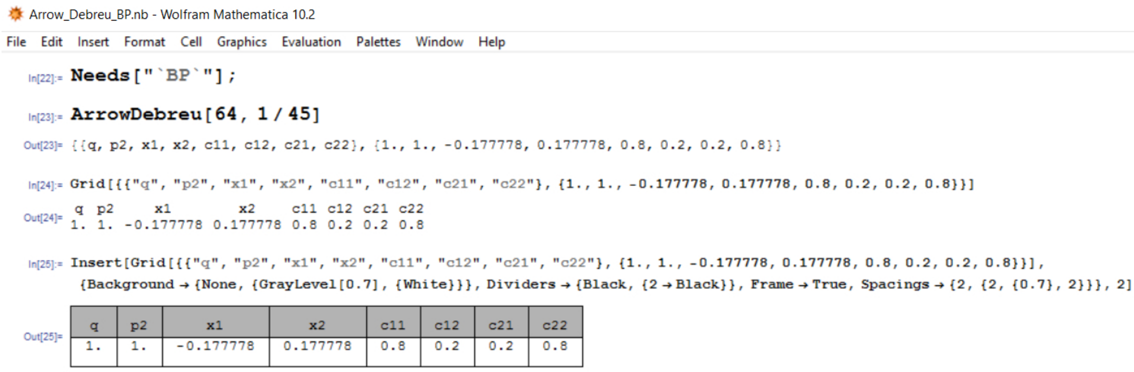
```
In[14]:= Needs["`BP`"];

In[15]:= ArrowDebreu[64, 1 / 61]

Out[15]= {{q, p2, x1, x2, c11, c12, c21, c22}, {1., 1., -0.183607, 0.183607, 0.8, 0.2, 0.2, 0.8},
  {0.634512, 0.255458, -0.0861431, 0.33721, 0.897463, 0.353604, 0.102537, 0.646396}, {1.57601, 3.91454, -0.33721, 0.0861431, 0.646396, 0.102537, 0.353604, 0.897463}}

In[16]:= Grid[%15]

Out[16]=
    q        p2        x1         x2        c11      c12      c21      c22
    1.       1.     -0.183607  0.183607   0.8      0.2      0.2      0.8
0.634512 0.255458 -0.0861431  0.33721   0.897463 0.353604 0.102537 0.646396
 1.57601  3.91454  -0.33721  0.0861431  0.646396 0.102537 0.353604 0.897463

In[17]:= Insert[%16, {Background → {None, {GrayLevel[0.7], {White}}}, Dividers → {Black, {2 → Black}}, Frame → True, Spacings → {2, {2, {0.7}, 2}}}, 2]
```

Out[17]=

| q | p2 | x1 | x2 | c11 | c12 | c21 | c22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 1. | -0.183607 | 0.183607 | 0.8 | 0.2 | 0.2 | 0.8 |
| 0.634512 | 0.255458 | -0.0861431 | 0.33721 | 0.897463 | 0.353604 | 0.102537 | 0.646396 |
| 1.57601 | 3.91454 | -0.33721 | 0.0861431 | 0.646396 | 0.102537 | 0.353604 | 0.897463 |

Obr. 6: Arrow-Debreuova rovnováha - hľadané riešenie, (Zdroj: vlastný)

Posledný príklad zobrazuje trojnásobnú rovnováhu. Zadanie je `b=64` a `e=1/45`. Na obrázku 7 môžeme vidieť, že výsledná tabuľka obsahuje iba jediný riadok, v ktorom je jediné riešenie tohto zadania. Tabuľku aj s nastaveným štýlom sme získali rovnakým spôsobom ako v predchádzajúcom príklade.



Arrow_Debreu_BP.nb - Wolfram Mathematica 10.2

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

```
In[22]:= Needs["`BP`"];

In[23]:= ArrowDebreu[64, 1 / 45]

Out[23]= {{q, p2, x1, x2, c11, c12, c21, c22}, {1., 1., -0.177778, 0.177778, 0.8, 0.2, 0.2, 0.8}}

In[24]:= Grid[{{"q", "p2", "x1", "x2", "c11", "c12", "c21", "c22"}, {1., 1., -0.177778, 0.177778, 0.8, 0.2, 0.2, 0.8}}]

Out[24]=
 q  p2     x1        x2     c11 c12 c21 c22
1.  1. -0.177778 0.177778 0.8 0.2 0.2 0.8

In[25]:= Insert[Grid[{{"q", "p2", "x1", "x2", "c11", "c12", "c21", "c22"}, {1., 1., -0.177778, 0.177778, 0.8, 0.2, 0.2, 0.8}}],
  {Background → {None, {GrayLevel[0.7], {White}}}, Dividers → {Black, {2 → Black}}, Frame → True, Spacings → {2, {2, {0.7}, 2}}}, 2]
```

Out[25]=

| q | p2 | x1 | x2 | c11 | c12 | c21 | c22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 1. | -0.177778 | 0.177778 | 0.8 | 0.2 | 0.2 | 0.8 |

Obr. 7: Arrow-Debreuova rovnováha - trojnásobná rovnováha, (Zdroj: vlastný)

## 3.4 Program - Strategická tržná hra

Posledná funkcia vytvoreného balíku slúži k výpočtu Nashovej rovnováhy pre strategickú tržnú hru predpokladmi podobnú, ako to bolo pri modele Arrow-Debreuovej rovnováhe. Do hry je pridané jedno rozšírenie, znovu uvažujeme dva typy hráčov, avšak každého typu môže existovať hráčov viacero, v našom značení $N$ hráčov. Zvyšovaním počtu hráčov rovnováha konverguje k Walrasovej rovnováhe, ako sme ukázali pri analýze tohto modelu.

Najskôr detailne rozoberieme algoritmus vytvorený pre tento model a potom sa pozrieme na konkrétne príklady jeho použitia.

### 3.4.1 Rozbor algoritmu

Algoritmus je veľmi podobný tomu, ktorý sme vytvorili pre Arrow-Debreuovu rovnováhu vzhľadom k charakteru hry. Vstupné hodnoty sú rovnaké, pomerná hodnota funkcie užitočnosti `a` a parameter rozdelenia zdrojov komodít `e`.

- **VSTUP:** `a, e`
- **VÝSTUP:** tabuľka rovnováh pre rôzne `N` - `c11, c12`

Z analógie s predchádzajúcim algoritmom vyplýva prevzatie nasledujúcej časti programu, vďaka ktorej vypočítame hodnotu `ekrit`.

```
r1 = b^(1/3) * (1 - e + x) - a^(1/3) * (e + y)*z;
r2 = a^(1/3) * (e - x) - b^(1/3) * (1 - e - y)*z;
r3 = x + y * z^3;
gb = GroebnerBasis[{r1,r2,r3},{x,y,z}];
zz = NSolve[gb[[1]]==0, z][[All,1,2]];
ekrit = Solve[zz[[2]] == zz[[3]], e][[All,1,2]][[2]];
```

Výpočet sa líši, ako sme už naznačili, v pridaní počtu hráčov `N`. Zvolili sme reprezentatívnu množinu týchto hodnôt a uložili sme ich do poľa `hodN`.

```
hodN[1] = 1;
hodN[2] = 2;
hodN[3] = 10;
hodN[4] = 100;
hodN[5] = 1000;
```

V tejto chvíli môžeme do premennej `e` uložiť užívateľom zadanú vstupnú hodnotu.

```
e = inpute;
```

Výstup budeme realizovať kvôli prehľadnosti do tabuľky, hneď na začiatku si ju vytvoríme a vyplníme hlavičku.

```
dat = Table[0,{7},{7}];
dat[[1]]={"N", "c1(1)", "c2(1)", "c1(2)", "c2(2)",
    "c1(3)", "c2(3)"};
```

V kapitole 2.2.2 sme rozobrali tento prípad maximalizácie úžitku a hľadania Nashovej rovnováhy pri daných podmienkach. Zostavili sme tiež ekonomický model, ktorý toto správanie popisuje, je to sústava rovníc (2.58). Túto sústavu rovníc zadáme do programu.

```
adef = a*(n - e)*(b1+b3)*((n-1)*b1 + n*b3)*b2^3 -
    (n-(1-e))*((n-1)*b2 + n*b4)*(b2+b4)*b1^3;
bdef = (1/a) *(n -(1- e))*(b1+b3)*((n-1)*b3 + n*b1)*b4^3 -
    (n-e)*((n-1)*b4 + n*b2)*(b2+b4)*b3^3;
c = e*b1 + (1-e)*b2 - (1-e)*b3 - e*b4;
d = 1- t*b1*b2*b3*b4;
h = 10 - b1-b2-b3-b4;
g1 = c1*(b1+b3) - b1;
g2 = c2*(b2+b4) - b2;
g3 = c3*(b1+b3) - b3;
g4 = c4*(b2+b4) - b4;
```

Teraz už máme zadané všetky potrebné parametre pre výpočet. Zvyšok programu bude opäť zapuzdrený v jednom vetvení `If`, ktoré zabezpečí splnenie podmienky `e<ekrit`. V else vetve sa nachádza výpis, ktorý upozorňuje používateľa o nesplnení podmienky a teda existencii imaginárneho riešenia.

```
Print[Style["POZOR -> e >= ekrit -> RIESENIA NIE SU REALNE
   CISLA, pre model taketo riesenie nema vyznam ",
   FontWeight->Bold, FontColor->Red]]];
```

Nasledujúca časť programu sa nachádza v kladnej vetve vetvenia, teda sa vykoná po splnení podmienky `e < ekrit`. Ako prvý sa samostatne zrealizuje výpočet riešenia pre `N = 1`, pretože tu existuje len jediné riešenie. Postup je nasledovný, na začiatku do premennej `nn` priradíme prvú hodnotu `hodN[1]`, potom túto hodnotu dosadíme za neznámu `n` do rovníc `adef` a `bdef`, tieto rovnice uložíme do premenných `aa, bb`.

Na tento model s konkrétnymi číselnými hodnotami už môžeme aplikovať metódu Gröbnerovej bázy, výslednú sústavu uložíme do premennej `gb`. Teraz môžeme vypočítať korene prvej rovnice sústavy `gb` za podmienky kladnej hodnoty `c2`. Toto obmedzenie je celkom prirodzené, množstvo komodít nebudeme uvažovať záporné, takýto výsledok by nemal interpretačnú hodnotu. Takto máme v premennej `sol2` uložené jediné riešenie rovnováhy pre `N = 1`, v našom modele má táto hodnota význam množstva druhej komodity prvého hráča. Následne dopočítame aj množstvo prvej komodity pre prvého hráča, ktoré uložíme do premennej `sol1`. Teraz už môžeme zapísať toto riešenie do druhého riadku vytvorenej tabuľky.

```
nn = hodN[1];
aa = adef/. n->nn;
bb = bdef/. n->nn;
gb = GroebnerBasis[{aa,bb,c,d,h,g1,g2,g3,g4},
    {c1,c2,c3,c4,b1,b2,b3,b4}, {c4,c3,b1,b2,b3,b4,t}];
sol2 = NSolve[gb[[1]]==0 && c2>0, c2, Reals][[All,1,2]];
sol1 = c1/.NSolve[{gb[[2]]/. c2->sol2}==0 && c1>0, c1,
    Reals];
dat[[2]]={hodN[1],sol1[[1]],sol2[[1]],"-", "-", "-", "-"};
```

Teraz máme vypočítanú rovnováhu pre počet hráčov `N = 1`. Pre zvyšné hodnoty `N` už môžeme riešenie realizovať v cykle `For`. Postup výpočtu je rovnaký, aký sme použili pre hodnotu `N = 1`. Najskôr načítame príslušnú hodnotu do `nn`, ktorú v zápätí dosadíme do rovníc `adef` a `bdef` za premennú `n` a vypočítame Gröbnerovu bázu.

Rozdiel oproti prvej rovnováhe je v tom, že pri riešení rovnice, dostaneme tri korene `c2`. Máme teda tri rovnováhy. V ďalšom `For` cykle vypočítame tiež príslušné rovnovážne hodnoty pre množstvo prvej komodity pre prvého hráča `c2`. Získané hodnoty opäť zapíšeme do nového riadku tabuľky.

```
For[i=2, i<6, i++,
    nn = hodN[i];
    aa = adef/. n->nn;
    bb = bdef/. n->nn;
    gb = GroebnerBasis[{aa,bb,c,d,h,g1,g2,g3,g4},
        {c1,c2,c3,c4,b1,b2,b3,b4}, {c4,c3,b1,b2,b3,b4,t}];
    solc2[i] = NSolve[gb[[1]]==0 && c2>0, c2,
        Reals][[All,1,2]];
```

```
For[j=2, j<5, j++,
    solc1[j]= c1/.NSolve[{gb[[2]]/. c2->
        solc2[i][[j]]}==0 && c1>0, c1, Reals];
    ];
dat[[i+1]] ={nn, solc1[3][[1]], solc2[i][[3]],
    solc1[4][[1]], solc2[i][[4]], solc1[2][[1]],
    solc2[i][[2]]};
];
```

V tejto chvíli už máme vypočítané všetky potrebné hodnoty. Nasleduje časť programu, ktorá sa týka výpisu získaných rovnovážnych stavov pre používateľa. Ako sme už spomínali pri analýze tohto ekonomického modelu, pri zvyšujúcom sa počte hráčov `N`, rovnováhy konvergujú k Walrasovej rovnováhe, ktorej hodnotu sme vypočítali v predchádzajúcom algoritme.

Funkciu `ArrowDebreu[a,e]` teda v tomto kroku algoritmu zavoláme. Parametre funkcie budú rovnaké ako vstupné hodnoty funkcie `Strateg[a,e]`, výsledok uložíme do premennej `aro`. Keďže štruktúru tohto výstupu poznáme, vieme z tabuľky vybrať tie hodnoty, ktoré pre náš model potrebujeme. Z výstupnej tabuľky daného algoritmu vyberieme hodnoty `c11` a `c12`. Tieto hodnoty môžeme zapísať do posledného riadku tabuľky `dat`.

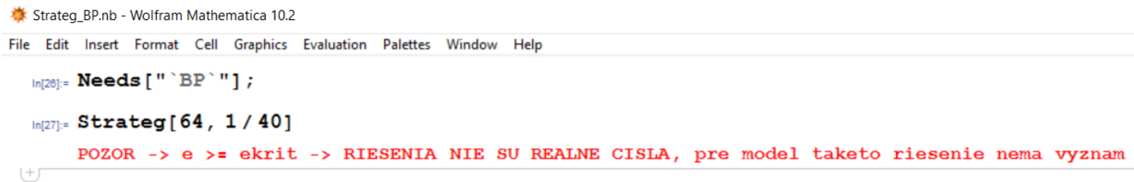
```
aro = ArrowDebreu[a,e];
dat[[7]]={"WE", aro[[2]][[5]], aro[[2]][[6]],
aro[[3]][[5]], aro[[3]][[6]], aro[[4]][[5]],
aro[[4]][[6]]};
```

Nakoniec nasleduje výpis hľadaného riešenia, kvôli prehľadnosti bude realizovaný formou tabuľky.

```
Return[Grid[dat]],
```

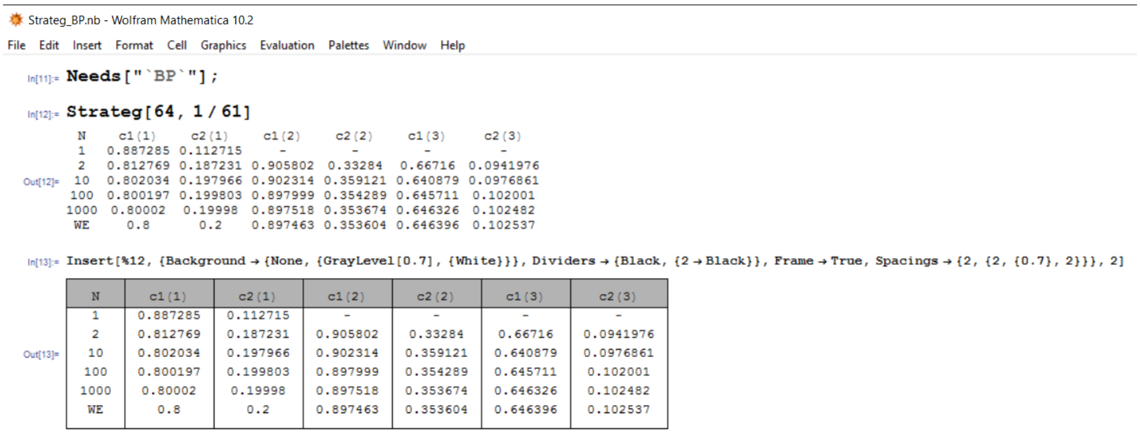
### 3.4.2 Príklad použitia

Rovnako ako pri predchádzajúcich modeloch, aj v tomto prípade nasleduje časť s konkrétnymi príkladmi použitia algoritmu. Prvým príkladom bude zobrazenie chybovej hlášky pri zadaní vstupných parametrov, pre ktoré riešenie vypočítané modelom nemá interpretačný význam. Jedná sa o porušenie podmienky modelu $e < e_{krit}$. V našom prípade zadáme `b = 64` a `e = 1/40`. Na obrázku 8, môžeme vidieť výstup programu pre dané vstupné hodnoty.




Obr. 8: Strategická tržná hra - $\mathtt{e} = \frac{1}{40}$, (Zdroj: vlastný)

Na druhom príklade si ukážeme riešenie strategickej tržnej hry pre hodnoty, ktoré spĺňajú vyššie spomenutú podmienku. Vstupom budú parametre `b = 64` a `e = 1/61`, výsledok by mal byť teda zhodný s tým, ktorý sme vypočítali v kapitole 2.2.2. Výsledkom funkcie je tabuľka hodnôt, ktorú si môžeme upraviť podobne ako sme to spravili v časti 3.3.2 pridaním štýlu. Obrázok 9 zobrazuje riešenie tohto zadania v prostredí *Mathematica*.




| N | c1(1) | c2(1) | c1(2) | c2(2) | c1(3) | c2(3) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.887285 | 0.112715 | - | - | - | - |
| 2 | 0.812769 | 0.187231 | 0.905802 | 0.33284 | 0.66716 | 0.0941976 |
| 10 | 0.802034 | 0.197966 | 0.902314 | 0.359121 | 0.640879 | 0.0976861 |
| 100 | 0.800197 | 0.199803 | 0.897999 | 0.354289 | 0.645711 | 0.102001 |
| 1000 | 0.80002 | 0.19998 | 0.897518 | 0.353674 | 0.646326 | 0.102482 |
| WE | 0.8 | 0.2 | 0.897463 | 0.353604 | 0.646396 | 0.102537 |

Obr. 9: Strategická tržná hra - hľadané riešenie, (Zdroj: vlastný)

# ZÁVER

V tejto práci som sa zaoberala riešením ekonomických modelov za pomoci matematického aparátu a ich implementáciou do programového prostredia *Wolfram Mathematica*. Hlavným cieľom práce bolo vytvorenie programového balíku a týmto spôsobom zjednodušenie práce s ekonomickými modelmi, ktoré sú síce zjednodušením reality, avšak práca s rovnicami, ktoré ich popisujú je pomerne zložitá. Čiastkovým cieľom je snaha o prehľadné vysvetlenie a zhrnutie potrebných teoretických poznatkov ako aj matematického aparátu.

Na začiatku bolo potrebné podrobne rozobrať teoretické východiská práce, teda zadefinovať základné pojmy z oblasti všeobecnej algebry. Dôraz bol kladený hlavne na problematiku okruhov a ideálov, ktorá vyústila do zavedenie pojmu Gröbnerova báza. Ďalšou dôležitou teoretickou základňou bolo zavedenie nelineárnych rovníc ako aj sústav rovníc, na ktorých riešenie bola aplikovaná práve metóda Gröbnerovej bázy.

Druhá časť práce je ekonomického charakteru, postupne sú predstavené tri rôzne ekonomické modely Závod v zbrojení, model s Arrow-Debreuovou rovnováhou a strategická tržná hra. Zostavenie modelov je detailne popísané, spoločne s vysvetlením potrebných prostriedkov z oblasti matematiky ako aj teórie hier. Zostavený model je ďalej analyzovaný a vyriešený v názornom príklade. Pri riešení je aplikovaná metóda Gröbnerovej bázy za použitia matematického softwaru *Wolfram Mathematica*.

Poslednou časťou je návrh riešenia výpočtového problému rozobratých modelov. Výstupom je samostatne vytvorený programový balík obsahujúci funkcie, ktoré používateľovi umožňujú jednoduché riešenie modelu po zadaní vstupných parametrov. Bakalárska práca obsahuje rozbor tohto vlastného algoritmu spoločne s príkladmi použitie. Teda tvorí prehľadný užívateľský manuál pre prácu s naprogramovaným balíkom funkcií. Je takisto rozšírená o príklady použitia spomínaných algoritmov.

Celá práca sa nesie v duchu hľadania rovnováhy. Možno sa teória rovnováhy na trhoch zdá byť príliš zidealizovaná, avšak presne tak ekonómia funguje. Rovnováha je totižto jediný stabilný stav, je to optimálne riešenie v danej ekonomickej situácii.

# ZOZNAM POUŽITÝCH ZDROJOV


[1] KARÁSEK, Jiří a Ladislav SKULA. *Obecná algebra*. Vyd. 1. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008, 64 s. ISBN 978-80-214-3794-4.

[2] COX, David A., John B. LITTLE a Donal. O'SHEA. *Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. 3rd ed. New York: Springer, c2007. ISBN 03-873-5651-7.

[3] ROCZEN, M. *First steps with Gröbner bases*. Combinatorics in algebra and geometry. Eforie, 1998. Sem. Ser. Math. Algebra, 2, "Ovidius" Univ. Constanţa, Constanţa, str. 33-47, 1999.

[4] DOKTOROVÁ, Alice. *Gröbnerovy báze, Čuang-c'ův algoritmus a ataky multivariačních kryptosystémů*. Brno, 2013. Diplomová práca. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce Doc. RNDr. Miroslav Kureš, Ph.D.

[5] KUBLER, Felix a Karl SCHMEDDERS. *Tackling Multiplicity of Equilibria with Gröbner Bases*. Operations Research [online]. 2010, 58(4-part-2), 1037 - 1050 [cit. 2016-04-28]. DOI: 10.1287/opre.1100.0819. ISSN 0030-364x.
Dostupné z: http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/opre.1100.0819

[6] KUROŠ Aleksandr Gennadievič. *Higher algebra*. 5th printing. Moscow: Mir Publ, 1988. ISBN 50-300-0131-X.

[7] GLOC Jaromír. Řešení rovnic a nerovnic. *ROVNICE A NEROVNICE* [online]. 2008 [cit. 2016-05-10]. Dostupné z: http://www.rovnice.kosanet.cz/reseni.html

[8] SCHMEDDERS, K. a K.L. JUDD. *Handbook of Computational Economics*. Oxford, North Holland, 2014. ISBN 978-0-444-52980-0.

[9] SERRANO, R. a A. M. FELDMAN. *A Short Course in Intermediate Microeconomics with Calculus*. Cambridge Univ. Press, 2012. ISBN 978-1107017344.

[10] BALIGA, Sandeep a Tomas SJOSTROM. *Arms Races and Negotiations*. Review of Economic Studies [online]. 2004, 71(2), 351-369 [cit. 2016-04-28]. DOI: 10.1111/0034-6527.00287. ISSN 0034-6527. Dostupné z: http://restud.oxfordjournals.org/lookup/doi/10.1111/0034-6527.00287

[11] GIBBONS, Robert.*Game theory for applied economists*. Princeton: Princeton University Press, c1992. ISBN 06-910-4308-6.

[12] OULIARIS, Sam. What Are Economic Models?: How economists try to simulate reality. *FINANCE & DEVELOPMENT*. 2011, 48(2), 46-47. ISSN 0015-1947.

[13] NICHOLSON, Walter. a Christopher SNYDER. *Microeconomic theory: basic principles and extensions*. 10th ed. Belmont, CA: Thomson Business and Economics, c2008. ISBN 03-244-2162-1.

[14] FUDENBERG, Drew a Jean TIROLE. *Game theory*. Cambridge, Mass.: MIT Press, c1991. ISBN 0-262-06141-4.

[15] AXELROD, Robert M. *The evolution of cooperation*. New York: Basic Books, c1984. ISBN 0-465-02122-0.

[16] YE, Yinyu. *A path to the Arrow–Debreu competitive market equilibrium*. Mathematical Programming [online]. 2007-6-20, 111(1-2), 315-348 [cit. 2016-04-27]. DOI: 10.1007/s10107-006-0065-5. ISSN 0025-5610. Dostupné z: http://link.springer.com/10.1007/s10107-006-0065-5

[17] ARROW, Kenneth J. a Gerard DEBREU. *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy*. Econometrica [online]. 1954, 22(3), 265- [cit. 2016-04-27]. DOI: 10.2307/1907353. ISSN 00129682.
Dostupné z: http://www.jstor.org/stable/1907353?origin=crossref

[18] POSTLEWAITE, A. a D. SCHMEIDLER. Approximate Efficiency of Non-Walrasian Nash Equilibria. Econometrica [online]. 1978, 46(1), 127- [cit. 2016-05-07]. DOI: 10.2307/1913649. ISSN 00129682.
Dostupné z: http://www.jstor.org/stable/1913649?origin=crossref

# ZOZNAM TABULIEK

# ZOZNAM OBRÁZKOV

# ZOZNAM GRAFOV

# ZOZNAM PRÍLOH

# A PRÍLOHY

## Príloha 1 - Dôkaz lemy

**Lema:**

Predpokladajme, že multiplikátorová podmienka je splnená. Pre dostatočne malé $\mu > 0$, existuje trojica $\left(c^L, c^*, c^H\right)$ taká, že platí [5]

$$\mu < c^L < c^* < c^H < \overline{c} \tag{A.60}$$

$$\left[F\left(c^H\right) - F\left(c^L\right)\right] c^L = \left(1 - F\left(c^H\right)\right)\mu \tag{A.61}$$

$$\left[1 - 2\left(F\left(c^H\right) - F\left(c^L\right)\right)\right] c^H = F\left(c^L\right) d \tag{A.62}$$

$$\left(1 - F\left(c^H\right)\right)\left(\mu - c^*\right) + F\left(c^L\right)\left(-c^*\right) = F\left(c^L\right)(-d) \tag{A.63}$$

Ak $\mu \to 0$, potom $c^H \to 0$.

*Dôkaz.* Definujeme dve funkcie $H$ a $G$ nasledujúcim spôsobom:

$$H(x,y) \equiv [F(y) - F(x)]x - (1 - F(y))\mu \tag{A.64}$$

$$G(x,y) \equiv [1 - 2(F(y) - F(x))]y - F(x)d \tag{A.65}$$

Potom rovnice (A.61) a (A.62) sú ekvivalentné s tvrdením, že $(x,y) = (c^L, c^H)$ rieši sústavu rovníc

$$\begin{aligned} H(x,y) &= 0 \\ G(x,y) &= 0 \end{aligned} \tag{A.66}$$

K analýze tohto systému musíme zvážiť tvar kriviek definovaných podľa (A.66), našu pozornosť obmedzíme na $x$ a $y$ na intervale $[0, \overline{c}]$. Najskôr ešte pripomeňme definované vlastnosti funkcie $F(0) = 0, F(\overline{c}) = 1$. Dosadením do rovníc dostaneme

$$H(0,y) = -(1 - F(y))\mu$$

Preto existuje jediné $y \in [0, \overline{c}]$, konkrétne $y = \overline{c}$, také, že $H(0,y) = 0$. Podobne,

$$H(\overline{c},y) = -(1 - F(y))(\mu + \overline{c})$$

tu existuje jediné $y \in [0, \overline{c}]$, konkrétne $y = \overline{c}$, také, že $H(\overline{c},y) = 0$. Ďalej pre $0 < x < \overline{c}$ dostaneme

$$H(x,0) = -F(x)x - \mu < 0$$

$$H(x,\bar{c}) = [1 - F(x)]x > 0$$

a

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial y} = F'(y)(x+\mu) > 0.$$

Preto existuje jediné $y \in (0,\bar{c})$, ktoré spĺňa $H(x,y) = 0$. Môžeme zapísať $y = \Phi(x)$ také, že $H(x,\Phi(x)) \equiv 0$, pre všetky $x \in [0,\bar{c}]$. Všimnime si, že pre všetky $x > 0$, $\mu \to 0$ implikuje $\Phi(x) \to x$.

Teraz prejdeme na funkciu $G$. Dosadením $y = 0$ dostaneme

$$G(x,0) = -F(x)d$$

takže existuje jediné $x \in [0,\bar{c}]$, konkrétne $x = 0$, ktoré spĺňa $G(x,0) = 0$. Označme $c^{med}$ stredný typ, pre ktorý platí $F(c^{med}) = 1/2$. Dosadíme

$$G(x,c^{med}) = \left[1 - 2\left(\frac{1}{2} - F(x)\right)\right] c^{med} - F(x)d = F(x)(2c^{med} - d)$$

Poznamenajme, že $2c^{med} = c^{med}/F(c^{med}) \leq d$ podľa multiplikátorovej podmienky. Ak $c^{med}/F(c^{med}) = d$, potom $G(x,c^{med}) = 0$ pre všetky $x \in [0,\bar{c}]$. Avšak, ak $c^{med}/F(c^{med}) < d$, potom existuje jediné $x \in [0,\bar{c}]$, konkrétne $x = 0$, také, že $G(x,c^{med}) = 0$

Ďalej predpokladajme $0 < y < c^{med}$. Potom

$$G(0,y) = [1 - 2F(y)]y > 0$$
$$G(y,y) = y - F(y)d \leq 0$$

Okrem toho, pre $y < c^{med}$ použitím multiplikátorovej podmienky dostaneme

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = F'(x)(2y - d) = F'(x)\left(\frac{y}{F(c^{med})} - d\right) < F'(x)\left(\frac{y}{F(y)} - d\right) \leq 0. \tag{A.67}$$

Odtiaľ plynie, že pre každé $y \in (0,c^{med})$, existuje jediné $x \in (0,y]$ také, že $G(x,y) = 0$. Môžeme zapísať $x = \theta(y)$ také, že $G(\theta(y),y) = 0$ pre všetky $y \in (0,c^{med})$.

**Tvrdenie**

Ak $0 < x \leq y$ a $x$ a $y$ sú dostatočne blízke nule, potom [5]

$$0 < \frac{d\theta(y)}{dy} < 1.$$

*Dôkaz.* Totálnym diferencovaním $G(\theta(y), y) \equiv 0$ dostávame

$$\frac{d\theta(y)}{dy}\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = 0 \tag{A.68}$$

Zderivovaním dostávame

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} \equiv F'(x)(2y - d)$$

a

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial y} \equiv 1 - 2(F(y) - F(x)) - 2F'(y)y$$

Dosadením do rovnice A.68 dostaneme

$$\frac{d\theta(y)}{dy} = -\frac{\partial G(x,y)/\partial y}{\partial G(x,y)/\partial x} = \frac{1 - 2(F(y) - F(x)) - 2F'(y)y}{F'(x)(d - 2y)} \tag{A.69}$$

Pre dostatočne malé $x$ a $y$, rovnica (A.69) je ostro kladná, keďže čiatateľ aj menovateľ sú ostro kladné. Aby sme ukázali, že (A.69) je ostro menšie ako $1$, je potrebné ukázať, že

$$\frac{1 - 2(F(y) - F(x)) - 2F'(y)y}{F'(x)(d - 2y)} < \frac{1}{F'(x)d} \tag{A.70}$$

keďže pre dostatočne malé $x$, $F'(x)d > 1$. Ale rovnica (A.70) je ekvivalentná rovnici

$$(F'(y)d - 1)y + (F(y) - F(x))d > 0. \tag{A.71}$$

Prvý člen v (A.71) je ostro kladný pre dostatočne malé $y$, zatiaľ čo druhý člen je nezáporný pre $y \geq x$. Teda (A.71) je splnená.

■

Zostáva už len dokázať $\mu < c^L < c^* < c^H$. Pre $(c^L, c^H)$ blízke nule je zaistené

$$1 - F(c^H) > F(c^H) - F(c^L) \tag{A.72}$$

Rovnica $H(c^L, c^H) = 0$ implikuje

$$[F(c^H) - F(c^L)]c^L = (1 - F(c^H))\mu \tag{A.73}$$

Za predpokladu, že $c^L > 0$ a $\mu > 0$, z rovníc (A.72) a (A.73) plynie $\mu < c^L$.

Nakoniec, nech $c^*$ je riešením rovnice (A.63). To znamená, že $c^*$ spĺňa

$$(1 - F(c^H) + F(c^L))c^* = (1 - F(c^H))\mu + F(c^L)d \tag{A.74}$$

Je zrejmé, že $c^*$ existuje, pretože $1 - F(c^H) + F(c^L) > 0$. Môžeme teda povedať, že $c^L < c^* < c^H$. Rovnica $G(c^L, c^H) = 0$ implikuje

$$[1 - F(c^H) - (F(c^H) - F(c^L))]c^H = F(c^L)(d - c^L) \tag{A.75}$$

Ak $c^L < c^H$, potom z (A.75) plynie

$$[1 - F(c^H) - (F(c^H) - F(c^L))]c^L < F(c^L)(d - c^L) \tag{A.76}$$

a tiež

$$(1 - F(c^H))c^H - (F(c^H) - F(c^L))c^L > F(c^L)(d - c^H) \tag{A.77}$$

Teraz urobíme substitúciu z (A.73) do (A.76) a (A.77)

$$(1 - F(c^H) + F(c^L))c^L < (1 - F(c^H))\mu + F(c^L)d$$

a

$$(1 - F(c^H) + F(c^L))c^H > (1 - F(c^H))\mu + F(c^L)d$$

Z týchto dvoch nerovností a rovnosti (A.74) plynie $c^L < c^* < c^H$. [5] ∎

## Príloha 2 - Kód balíku funkcií BP.m

```
BeginPackage["`BP`"]

ArrowDebreu::usage="ArrowDebreu[a,e] computes Arrow-Debreu
    equilibrium for parameters a,e";
ArmsRace::usage="ArmsRace[m,d] computes equilibrium in Arms
Race
    game for parameters m,d";
Strateg::usage="Strateg[a,e] computes equilibrium in
Strategic
    Market Game for parameters a,e";

Begin["`Private`"]

ArmsRace[inputm_ ,inputd_] := (
m = inputm;
d = inputd;

r1 = (H - L) *L - (1 - H)*m;
r2 = (1 - 2*(H - L))*H - L*d;
r3 = (1 - H)*(m- S) - L*S + L*d;

gb = GroebnerBasis[{r1,r2,r3},{S}];
a = gb[[1]];
b = gb[[3]];
c = gb[[2]];

If[d > 1,
    sola = Solve[a==0, L][[All,1,2]];
    For[i=1, i<4, i++,
        bb[i] = Solve[{b/. L->sola[[i]] } == 0,
S][[All,1,2]];
        cc[i] = Solve[{c/. L->sola[[i]] } == 0,
H][[All,1,2]];
```

```
        ];

    data = Table[0,{3},{3}];
    For[ i=1, i<4, i++,
        data[[i]] = {sola[[i]],bb[i][[1]],cc[i][[1]]};];

    imag = false;
    max = 1;
    For[i=1, i<(Dimensions[data][[1]]+1),i++,
        If[Im[data[[i,1]]] != 0,
            Print[Style["POZOR -> RIESENIE NIE JE V OBORE
                REALNYCH CISEL", FontWeight->Bold,
                FontColor->Red]];
            imag = true;
            Break[]];

        If[i > Dimensions[data][[1]], Break[]];
        If[Re[data[[max,1]]] < Re[data[[i,1]]],
            max=i];
        For[j=1,j<(Dimensions[data][[2]]+1), j++,
            If [Re[data[[i,j]]]<0,
                data=Delete[data,{i}]]; Break[];];];];

    Print[Style["PRIPUSTNE RIESENIA SU:",
FontWeight->Bold]];
    For[i=1, i<Dimensions[data][[1]]+1, i++,
        Print["{L, S, H} = ",data[[i]]];];

    If[imag == false,
        Print[Style["HLADANE RIESENIE JE:",
FontWeight->Bold,
            FontSize->15]];
        Print["L = ", data[[max,1]],", S =
",data[[max,2]],",
```

```
          H = ",data[[max,3]]]],

       Print[Style["POZOR -> NIE SU SPLNENE PODMIENKY
MODELU!
          -> d<=1", FontWeight->Bold, FontColor->Red]];
   ]; );
```

**ArrowDebreu[inputa_,inpute_] := (**

```
Clear["Global`*"];
Clear[e];
a = inputa;
b = 1;

r1 = b^(1/3) * (1 - e + x) - a^(1/3) * (e + y)*z;
r2 = a^(1/3) * (e - x) - b^(1/3) * (1 - e - y)*z;
r3 = x + y * z^3;

gb = GroebnerBasis[{r1,r2,r3},{x,y,z}];

zz = NSolve[gb[[1]]==0, z][[All,1,2]];
ekrit = Solve[zz[[2]] == zz[[3]], e][[All,1,2]][[2]];

e = inpute;
gb = GroebnerBasis[{r1,r2,r3},{x,y,z}];

If[e <= ekrit,
   For[i=1, i<4, i++,
      yy[i] = gb[[2]] /. z->zz[[i]];
      yyyy[i] = NSolve[yy[i]==0, y][[All,1,2]];
      xx[i] = gb[[3]] /. z->zz[[i]];
      xxxx[i] = Solve[xx[i]==0, x][[All,1,2]];

      c11[i] = xxx[i][[1]]+1-e;
      c12[i] = yyy[i][[1]]+e;
      c21[i] = 1 - c11[i];
      c22[i] = 1 - c12[i];
```

```
    ];

  data = Table[0,{4},{8}];
  data[[1]] = {"q", "p2", "x1", "x2",
    "c11", "c12","c21", "c22"};
  For[ i=1, i<4, i++,
    data[[i+1]] = {zz[[i]],zz[[i]]^3, xxx[i][[1]],
    yyy[i][[1]], c11[i], c12[i], c21[i], c22[i]}];

  If[ e == ekrit,
    Return[{data[[1]],data[[2]]}],
    Return[data]],

  Print[Style["POZOR -> e > ekrit-> RIESENIA NIE SU
REALNE
    CISLA, pre model taketo riesenie nema vyznam ",
    FontWeight->Bold, FontColor->Red]]
  ]; );
```

**Strateg[inputa_,inpute_] := (**

```
Clear[n];
Clear[e];
a = inputa;
b = 1;

r1 = b^(1/3) * (1 - e + x) - a^(1/3) * (e + y)*z;
r2 = a^(1/3) * (e - x) - b^(1/3) * (1 - e - y)*z;
r3 = x + y * z^3;
gb = GroebnerBasis[{r1,r2,r3},{x,y,z}];
zz = NSolve[gb[[1]]==0, z][[All,1,2]];
ekrit = Solve[zz[[2]] == zz[[3]], e][[All,1,2]][[2]];

e=inpute;

hodN[1] = 1;
```

```
hodN[2] = 2;
hodN[3] = 10;
hodN[4] = 100;
hodN[5] = 1000;

dat = Table[0,{7},{7}];
dat [[1]] = {"N", "c1(1)", "c2(1)", "c1(2)", "c2(2)",
   "c1(3)", "c2(3)"};

adef = 64*(n - e)*(b1+b3)*((n-1)*b1 + n*b3)*b2^3 -
   (n-(1-e))*((n-1)*b2+n*b4)*(b2+b4)*b1^3;
bdef = 1/64*(n -(1- e))*(b1+b3)*((n-1)*b3 + n*b1)*b4^3 -
   (n-e)*((n-1)*b4+n*b2)*(b2+b4)*b3^3;
c = e*b1 + (1-e)*b2 - (1-e)*b3 - e*b4;
d = 1- t*b1*b2*b3*b4;
h = 10 - b1-b2-b3-b4;
g1 = c1*(b1+b3) -b1;
g2 = c2*(b2+b4) -b2;
g3 = c3*(b1+b3) -b3;
g4 = c4*(b2+b4) -b4;

If[e < ekrit,
   nn=hodN[1];
   a = adef /. n->nn
   b = bdef /. n->nn
   gb = GroebnerBasis[{a,b,c,d,h,g1,g2,g3,g4},
      {c1,c2,c3,c4,b1,b2,b3,b4}, {c4,c3,b1,b2,b3,b4,t}];

   sol2 = NSolve[gb[[1]]==0 && c2>0,c2, Reals][[All,1,2]];
   sol1 = c1/.NSolve[{gb[[2]]/. c2->sol2}==0 && c1>0,
      c1, Reals];

   dat[[2]]={hodN[1], sol1[[1]], sol2[[1]], "-", "-",
      "-", "-"};
```

```
     For[i=2, i<6, i++,
       nn = hodN[i];
       a = adef /. n->nn
       b = bdef /. n->nn
       gb = GroebnerBasis[{a,b,c,d,h,g1,g2,g3,g4},
          {c1,c2,c3,c4,b1,b2,b3,b4},
{c4,c3,b1,b2,b3,b4,t}];

       solc2[i] = NSolve[gb[[1]]==0 && c2>0, c2,
          Reals][[All,1,2]];
       For[j=2, j<5, j++,
          solc1[j] = c1/.NSolve[{gb[[2]]/.
             c2->solc2[i][[j]]}==0 && c1>0, c1, Reals];
          ];
       dat[[i+1]] ={n, solc1[3][[1]], solc2[i][[3]],
          solc1[4][[1]], solc2[i][[4]],
          solc1[2][[1]], solc2[i][[2]]};
       ];

    aro = ArrowDebreu[a,e];
    dat[[7]]={"WE", aro[[2]][[5]], aro[[2]][[6]],
aro[[3]][[5]],
       aro[[3]][[6]], aro[[4]][[5]], aro[[4]][[6]]};
    Return[Grid[dat]],

    Print[Style["POZOR -> e >= ekrit -> RIESENIA NIE SU
REALNE
       CISLA, pre model taketo riesenie nema vyznam ",
       FontWeight->Bold, FontColor->Red]]
    ]; );

End[]
EndPackage[]
```